

ANALOGIE TRA I TENSORI UTILIZZATI PER DESCRIVERE L'ORIENTAZIONE DELLE FIBRE NEI COMPOSITI

Francesca Cosmi

*Università degli Studi di Trieste - Dipartimento di Ingegneria e Architettura,
Via A. Valerio 10, 34127 Trieste, e-mail: cosmi@units.it*

Sommario

Nei polimeri rinforzati con fibre corte, le condizioni dinamiche del flusso che riempie lo stampo determinano la disposizione delle fibre di rinforzo e di conseguenza la capacità del componente di resistere ai carichi applicati. I software che simulano il processo descrivono la configurazione delle fibre mediante il tensore di Advani-Tucker, del secondo ordine, i cui autovettori indicano le direzioni principali delle fibre e gli autovalori rappresentano la frazione di fibre nella direzione corrispondente. Per una verifica sperimentale, è necessario confrontare queste previsioni con le misure ottenute in una sezione opportunamente preparata o in una porzione ricostruita mediante micro-tomografia. La descrizione tensoriale basata sul concetto di Mean Intercept Length risulta essere in questo caso particolarmente semplice e veloce. In questo lavoro viene mostrato che è possibile confrontare i risultati ottenuti con i due approcci e che due tensori individuano le medesime direzioni principali delle fibre.

Abstract

In short fibers reinforced polymers, the flow dynamic conditions in the molding process determine the arrangement of reinforcement fibre and the consequent ability of the component to resist the applied loads. Simulations softwares describe the fibre configuration by means of the Advani-Tucker second order tensor, whose eigenvectors indicate the fibre principal directions and whose eigenvalues represent the fraction of fibre arranged in the corresponding direction. For an experimental verification, it is necessary to compare these predictions with measurements obtained in a section correctly prepared or in a portion of the sample reconstructed by micro-tomography. In this case, the tensorial description based on the Mean Intercept Length concept turns out to be particularly simple and fast. In this work it is shown that it is possible to compare the results obtained with the two approaches and that the two tensors identify the same fibre principal directions.

Parole chiave: Fibre corte, Mean Intercept Length, micro-CT, orientazione.

1. INTRODUZIONE

È ben noto che la distribuzione dell'orientazione delle fibre è uno dei principali fattori che influenzano le proprietà dei compositi a matrice polimerica rinforzati con fibre corte. La capacità del componente di resistere ai carichi applicati deriva quindi dalle condizioni dinamiche del flusso del polimero che riempie lo stampo trascinando le fibre e determinandone quindi la disposizione finale [1]. I software commerciali che simulano il processo di stampaggio a iniezione sono attualmente in grado di considerare sia gli effetti idrodinamici sia le interazioni tra le fibre. La soluzione del problema dinamico che determina l'orientazione delle fibre viene di solito espressa mediante il dal tensore di orientazione, introdotto da Advani e Tucker [2], del secondo ordine, i cui autovettori indicano le direzioni principali delle fibre e gli autovalori rappresentano la frazione di fibre disposta nella direzione dell'autovettore corrispondente. Per una verifica sperimentale dei risultati delle simulazioni, è necessario confrontare queste previsioni

con le misure ottenute in una sezione opportunamente preparata del campione in esame o in una porzione ricostruita mediante micro-tomografia computerizzata (micro-CT). In entrambi i casi, per la descrizione dell'orientamento delle fibre corte sono possibili due diversi approcci.

Un metodo molto utilizzato è basato sull'individuazione (automatica o manuale) delle direzioni di ogni singola fibra, che consente di determinare direttamente il tensore di orientazione. Se da un lato questo approccio consente di confrontare direttamente i risultati sperimentali con quelli delle simulazioni, lo stesso presenta però dei limiti.

Nel caso in cui le fibre vengono identificate mediante analisi al microscopio di sezioni preparate al microtomo, l'angolo che le fibre formano con il piano di sezione può essere calcolato a partire dall'eccentricità dell'ellisse. Le incertezze della misura derivano dalla difficoltà di preparazione del campione dovuta alla frantumazione dei bordi delle fibre e dalla necessità di analizzare sezioni adiacenti per discriminare angoli diversi corrispondenti alla medesima traccia.

Nel caso in cui sia disponibile una ricostruzione 3D della struttura interna del campione ottenuta mediante micro-CT, dimensioni e numerosità fibre del campione rendono un approccio basato sull'analisi diretta di ogni singola fibra difficilmente percorribile. Un approccio più recente è quello, globale, basato sulla determinazione dei parametri morfologici delle fasi. Il Mean Intercept Length, il cui calcolo automatico è particolarmente semplice e veloce, si è rivelato particolarmente efficace per la descrizione dell'anisotropia delle fibre corte [3-8], ed è applicabile anche su immagini 2D ottenute al microscopio [9]. Anche in questo caso l'orientamento delle fibre risulta descritto da un tensore del secondo ordine, in generale diverso ma di significato analogo a quello del tensore di orientazione.

In questo lavoro viene mostrato che è possibile confrontare tra loro i risultati ottenuti con l'approccio MIL e con il tensore di orientazione e che la distribuzione del Mean Intercept Length può essere direttamente impiegata per ricavare un tensore di orientazione del tipo introdotto da Advani e Tucker.

2. TENSORI PER LA DESCRIZIONE DELL'ORIENTAZIONE DELLE FIBRE CORTE

Secondo l'approccio suggerito da Advani e Tucker [2], sotto le ipotesi che

- le fibre siano cilindri rigidi, di lunghezza e diametro uniforme
- il numero di fibre per unità di volume sia uniforme, anche se l'orientazione delle singole fibre può non esserlo

lo stato di orientazione in un punto dello spazio può essere descritto mediante una funzione di densità di probabilità e , associando un vettore unitario \mathbf{p} a ciascuna fibra, si può definire la funzione di densità di probabilità $\psi(\mathbf{p})$ di trovare una fibra in una certa orientazione.

La funzione che descrive la distribuzione delle orientazioni è quindi funzione delle variabili che descrivono la configurazione della fibra nel volume di interesse. Se da un lato questa distribuzione fornisce una descrizione completa dello stato di orientazione delle fibre e può essere calcolata a partire dalle condizioni di processo, dall'altro rappresenta una mole di informazioni di difficile gestione nell'ambito di una simulazione. Per una descrizione più concisa si può utilizzare la rappresentazione tensoriale ottenuta formando i prodotti vettoriali di \mathbf{p} e successivamente integrando su tutte le direzioni possibili il prodotto dei tensori così ricavati per la funzione di distribuzione $\psi(\mathbf{p})$. Dal momento che non è possibile distinguere le direzioni di due fibre orientate a 180° tra loro, si ha la condizione di periodicità $\psi(\mathbf{p}) = \psi(-\mathbf{p})$, gli integrali dispari sono nulli e la più compatta descrizione dell'orientazione delle fibre può essere ottenuta mediante il tensore del secondo ordine di componenti:

$$a_{ij} = \oint p_i p_j \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (1)$$

Questo approccio, che possiamo definire locale, se rapportato alla pratica sperimentale comporta la determinazione della posizione e dell'orientamento di ogni singola fibra nel volume significativo e risulta perciò di difficile implementazione, soprattutto per percentuali di fibra di interesse strutturale, che però sono proprio i casi in cui sarebbe più interessante poter confrontare i risultati delle simulazioni con l'effettiva configurazione delle fibre nel pezzo.

Per ovviare a questo inconveniente è possibile affrontare il problema con un procedimento globale, individuabile tra i metodi morfologici utilizzati in diversi campi per descrivere le proprietà di anisotropia di una vasta gamma di materiali che va dalle rocce all'osso trabecolare [10-12].

La lunghezza Mean Intercept Length, MIL , viene calcolata su un'immagine segmentata del volume bifase di interesse, VOI, inviando un insieme di linee parallele attraverso il volume e dividendo nella direzione i -esima la lunghezza totale $L(i)$ delle linee all'interno del volume per il numero di intersezioni $N(i)$ con la fase scelta, contando quindi ad esempio il numero di passaggi da fibra a matrice (e omettendo i passaggi da matrice a fibra):

$$MIL(i) = \frac{L(i)}{N(i)}. \quad (2)$$

Cambiando l'orientazione della linea di misura si ottiene la distribuzione MIL , distribuzione discreta delle lunghezze di intercetta. Utilizzando ad esempio un VOI sferico, la lunghezza MIL assumerà il valore massimo nella direzione in cui la linea di misura attraversa il minor numero di volte la fase considerata e quindi corrisponde alla direzione in cui è orientato il maggior numero di fibre. La rappresentazione grafica delle lunghezze medie di intersezione in coordinate polari dà origine al cosiddetto MIL rose diagram, che, se il numero di direzioni di misura è sufficientemente grande, può essere approssimato mediante "best-fit" con un ellissoide e risulta quindi rappresentabile da un tensore definito positivo del secondo ordine che ha l'asse principale nella direzione preferenziale di orientazione delle fibre e dà origine alla distribuzione MIL fitted, come mostrato ad esempio in Fig.3 per due volumi tratti dalle zone (a) shell e (b) core e ottenuti dalla ricostruzione micro-tomografica di un campione estratto da un provino in PA6-GF 30 ricavato una lastra iniettata di testa.

In questo lavoro si vuole mostrare come la distribuzione delle misure MIL possa anche rappresentare il punto di partenza per la definizione di un tensore di orientazione direttamente confrontabile con quello introdotto da Advani-Tucker e che le diverse rappresentazioni tensoriali conducono all'identificazione delle medesime direzioni principali. Una volta normalizzata la distribuzione delle lunghezze MIL rispetto al valore massimo, associando a ciascuna misura MIL il versore corrispondente alla direzione di misura si ottiene il vettore \mathbf{MIL} e si può definire la funzione densità di probabilità di trovare una certa lunghezza media di intersezione normalizzata in una certa direzione, $\psi(\mathbf{MIL})$, che soddisfa la condizione di periodicità $\psi(\mathbf{MIL}) = \psi(-\mathbf{MIL})$ in quanto la misura della lunghezza MIL non distingue per definizione tra direzioni orientate a 180° tra loro. È quindi possibile definire un tensore di orientazione del secondo ordine analogo a quello proposto da Advani e Tucker e basato sul concetto di Mean Intercept Length.

$$m_{ij} = \oint MIL_i MIL_j \psi(\mathbf{MIL}) d\mathbf{MIL}. \quad (3)$$

In modo analogo, la funzione di probabilità, o densità discreta $MIL(i)$, nel caso pratico di misura in N direzioni, dà origine al tensore di orientazione di componenti

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sum_{i=1}^N [\sin(\theta + \pi/2)\cos\varphi]^2 MIL(i) \\ m_{22} &= \sum_{i=1}^N [\sin(\theta + \pi/2)\sin\varphi]^2 MIL(i) \\ m_{33} &= \sum_{i=1}^N [\cos(\theta + \pi/2)]^2 MIL(i) \\ m_{12} &= \sum_{i=1}^N [\sin(\theta + \pi/2)]^2 \cos\varphi\sin\varphi MIL(i) \\ m_{13} &= \sum_{i=1}^N \cos\varphi\sin(\theta + \pi/2)\cos(\theta + \pi/2) MIL(i) \\ m_{23} &= \sum_{i=1}^N \sin\varphi\sin(\theta + \pi/2)\cos(\theta + \pi/2) MIL(i) \end{aligned} \quad (4)$$

dove, coerentemente con la notazione utilizzata dal software Quant3D [13] utilizzato in questo lavoro, φ rappresenta la longitudine e θ la latitudine.

3. APPLICAZIONE IN 2D

Sono state considerate 8 immagini “virtuali” di strutture piane, corrispondenti a diverse distribuzioni delle fibre.

Per queste strutture, in Tab.1 sono riportati la distribuzione degli orientamenti e α_{AT} , direzione principale del primo autovalore nel tensore di orientazione.

In Tab.2 sono riportati i parametri dei calcoli basati sulle lunghezze medie di intersezione per le stesse strutture e precisamente: i diagrammi polari *MIL rose diagram*, la distribuzione *MIL_fitted* e la direzione α_{MIL} dell'asse maggiore dell'ellisse approssimante.

La relazione tra la direzione principale attesa e la direzione principale del tensore di orientazione ottenuta da da: (a) distribuzione delle fibre α_{AT} , (b) distribuzione delle misure *MIL* e (c) distribuzione *MIL_fitted* è illustrata in Fig.1 per vari angoli. Si può notare che le descrizioni sono equivalenti.

Il caso relativo ad una disposizione ordinata delle fibre in una direzione diversa da quella dell'orientamento delle stesse è mostrato in Tab.3, dove è considerato un allineamento delle fibre in direzione verticale e orientazione delle fibre a 45° . Si nota come i risultati coincidano con di Tab.1 e 2.

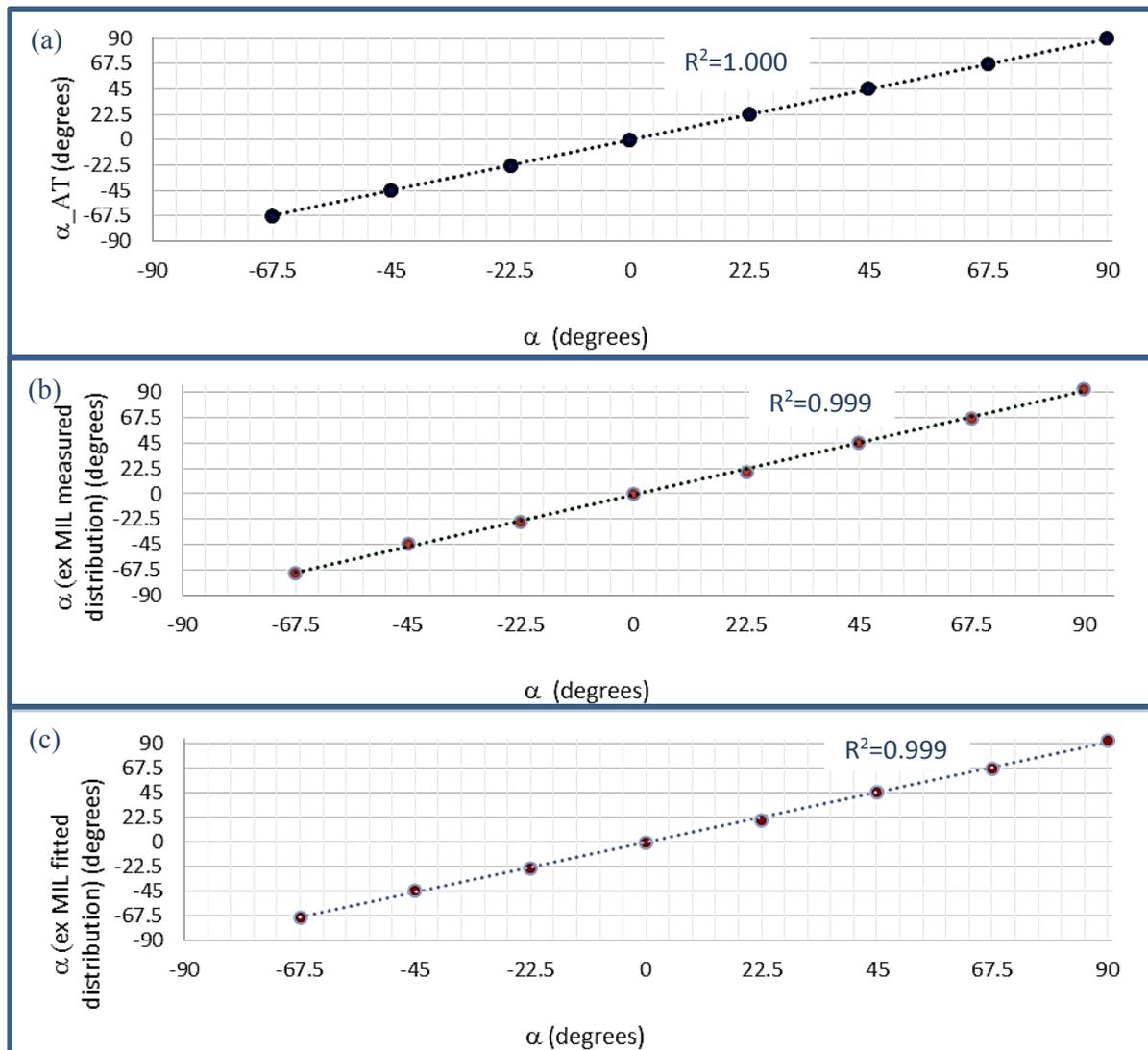


Figura 1: Direzione principale del tensore di orientazione valutata a partire da: (a) distribuzione delle fibre α_{AT} , (b) distribuzione delle misure *MIL* e (c) distribuzione *MIL_fitted*.

Tabella 1: Strutture 2D, distribuzione delle fibre e direzione principale del tensore di Advani-Tucker

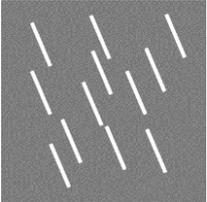
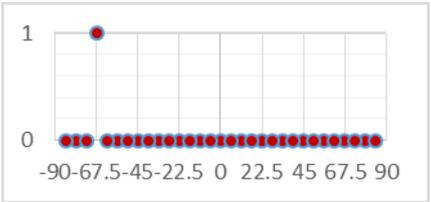
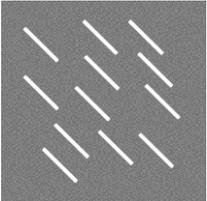
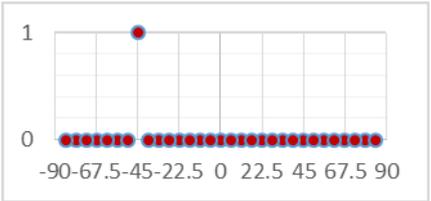
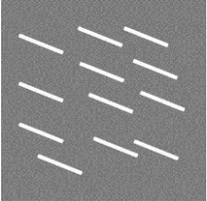
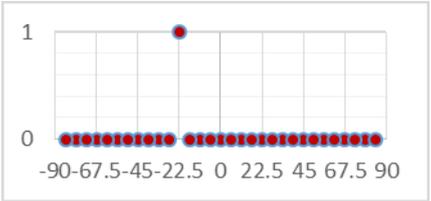
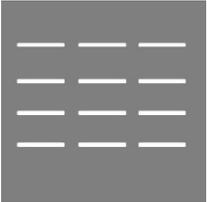
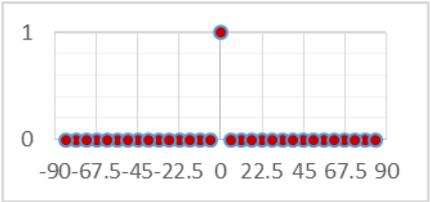
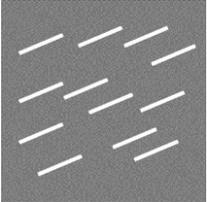
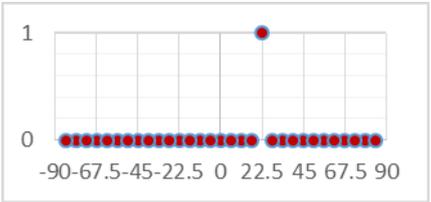
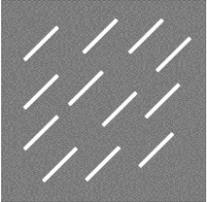
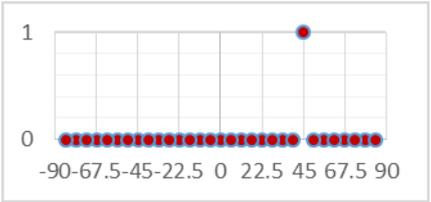
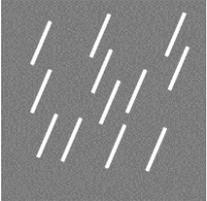
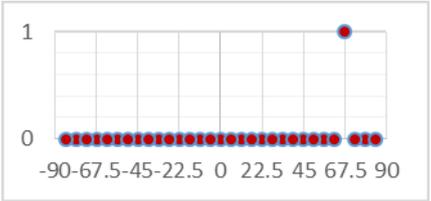
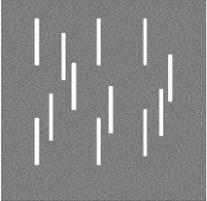
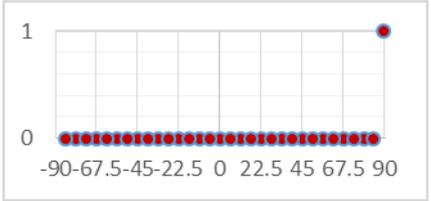
Struttura	α	Distribuzione orientazione fibre	α_{AT}
	-67.50		-67.49
	-45.00		-45.00
	-22.50		-22.51
	0.00		0.00
	22.50		22.51
	45.00		45.00
	67.50		67.49
	90.00		90.00

Tabella 2: Strutture 2D, α angolo di orientazione delle fibre della struttura, diagramma polare *MIL rose*, distribuzione dell'ellisse *MIL_fitted*, α_{MIL} angolo principale dell'ellisse *MIL_fitted*.

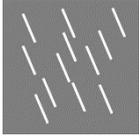
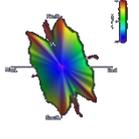
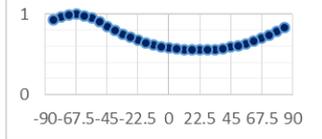
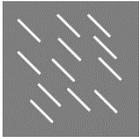
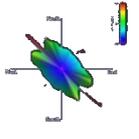
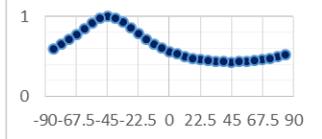
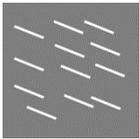
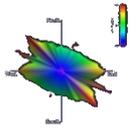
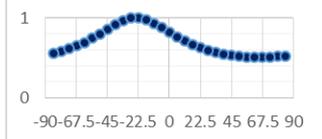
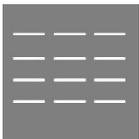
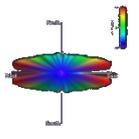
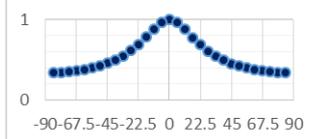
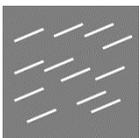
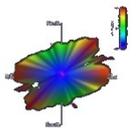
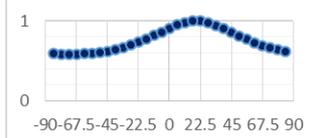
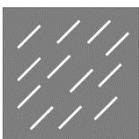
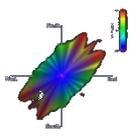
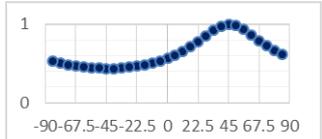
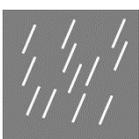
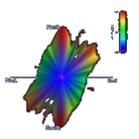
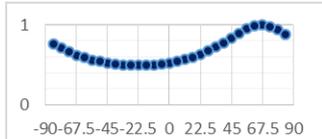
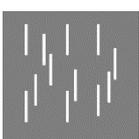
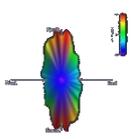
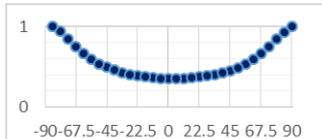
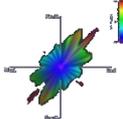
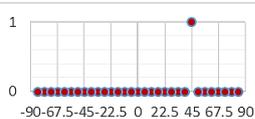
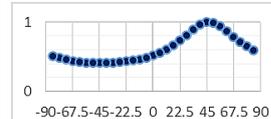
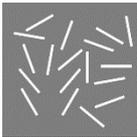
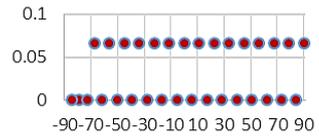
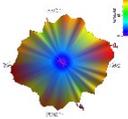
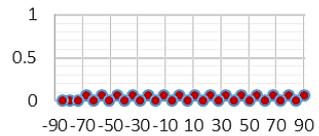
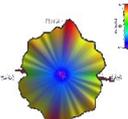
Struttura	α	<i>MIL rose</i> diagram	Distribuzione <i>MIL_fitted</i>	α_{MIL}
	-67.50			-69.27
	-45.00			-44.63
	-22.50			-24.55
	0.00			-0.15
	22.50			19.26
	45.00			45.56
	67.50			66.89
	90.00			93.08

Tabella 3: Struttura con allineamento delle fibre in direzione verticale e orientazione delle fibre a 45°, distribuzione degli orientamenti e direzione principale dei tensori di orientazione.

Struttura	α	MIL rose diagram	Distribuzione orientazione fibre	α_{AT}	Distribuzione MIL_fitted	α_{MIL}
	45.00 (v)			45.00		45.56

Interessante è anche il caso di due disposizioni casuali, una in cui le fibre sono separate e l'altra, più realistica, in cui le fibre appaiono sovrapposte, Tab. 4. Si nota come i tensori di orientazione ricavati dalla distribuzione delle intercette medie siano in grado di cogliere la sostanziale isotropia della distribuzione degli orientamenti anche nel caso in cui le fibre appaiono sovrapposte.

Tabella 4: Strutture con diversa disposizione casuale delle fibre, distribuzione delle orientazioni delle fibre e direzione principale di Advani-Tucker

Struttura	Distribuzione orientazione fibre	Tensore di orientazione AT						
		autovalori		autovettori				
		T1	0.53	0.98	-0.20			
		T2	0.47	0.20	0.98			
MIL rose diagram	Tensore di orientazione MIL		Tensore di orientazione MIL_fitted					
	autovalori	autovettori	autovalori	autovettori				
	T1	0.48	0.90	-0.43	T1	0.50	0.91	0.41
	T2	0.47	0.43	0.90	T2	0.42	-0.41	0.91
Struttura	Distribuzione orientazione fibre	Tensore di orientazione AT						
		autovalori		autovettori				
		T1	0.53	0.98	-0.20			
		T2	0.47	0.20	0.98			
MIL rose diagram	Tensore di orientazione MIL		Tensore di orientazione MIL_fitted					
	autovalori	autovettori	autovalori	autovettori				
	T1	0.47	-1.00	-0.10	T1	0.45	1.00	0.00
	T2	0.49	0.10	-1.00	T2	0.47	0.00	1.00

4. APPLICAZIONE IN 3D

Sono stati analizzati due volumi, rappresentati in Fig.2, ottenuti dalla ricostruzione micro-tomografica di un campione estratto da un provino in PA6-GF 30 e ricavato una lastra iniettata di testa di dimensioni 120 mm (lato di iniezione) x 180 mm x 3,2 mm di spessore. La lastra così iniettata esibisce la ben nota struttura *shell-core-shell*.

I due volumi (VOI Volume Of Interest) analizzati, $40 \times 40 \times 40$ voxel³, sono rispettivamente estratti uno dalla zona *shell*, dove le fibre sono disposte nella direzione del flusso di iniezione, x , e l'altro dalla zona del *core*, dove le fibre tendono a orientarsi, ma in modo meno marcato, nella direzione perpendicolare, z [3].

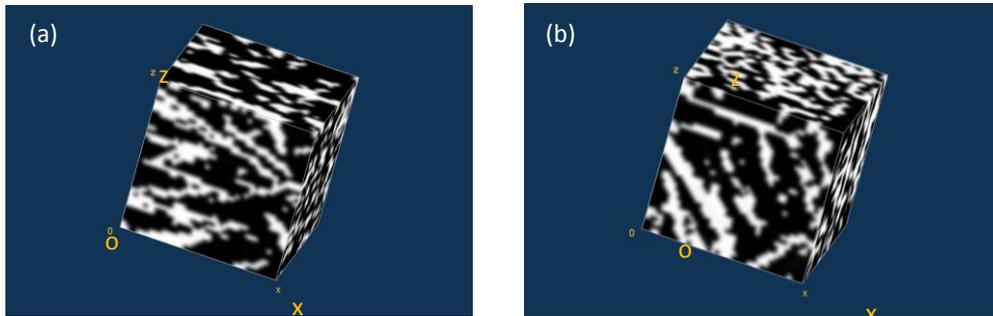


Figura 2: Volumi di interesse estratti dalla ricostruzione del campione nelle zone (a) *shell* e (b) *core*.

Questi andamenti sono chiaramente riscontrabili in Fig. 3 dove le distribuzioni delle lunghezze *MIL* (in colore blu) e *MIL_Fitted* (in colore ciano) sono riportate in coordinate polari per entrambi i volumi.

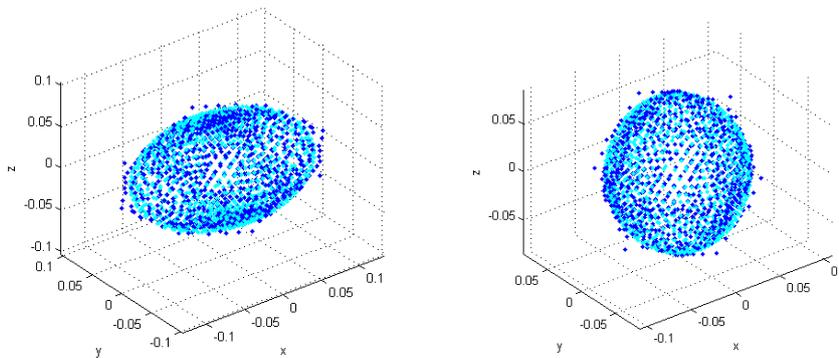


Figura 3: Distribuzioni delle lunghezze *MIL* (blu) e *MIL_Fitted* (ciano) in due volumi tratti dalle zone (a) *shell* e (b) *core* e ottenuti dalla ricostruzione micro-tomografica di un campione estratto da un provino in PA6-GF 30 e ricavato una lastra iniettata di testa.

Gli autovalori e autovettori del tensore dell'ellissoide *MIL* e del tensore di orientazione ricavato dalla distribuzione *MIL* nei due volumi sono riportati nelle Tab.5 e Tab.6.

5. CONCLUSIONI

Diversi sono i metodi utilizzabili per descrivere l'orientazione delle fibre corte all'interno della matrice. Come sottolineato in [2], il passaggio dall'impiego di una funzione di distribuzione per descrivere l'orientamento delle fibre in un volume a un tensore del secondo ordine porta a livello di simulazione enormi vantaggi dal punto di vista computazionale. Tuttavia, l'approccio basato sulla determinazione diretta dell'orientazione di ogni singola fibra, se da un lato risulta conveniente e diffuso per la ricostruzione della distribuzione degli orientamenti a partire dai risultati di una simulazione numerica, espressi in termini di tensore del secondo ordine, presenta invece grossi svantaggi nell'utilizzo diretto di dati ottenuti da misure sperimentali.

In questo lavoro si è mostrato che è possibile definire un tensore di orientazione del secondo ordine analogo a quello proposto da Advani e Tucker ma basato sul concetto di Mean Intercept Length, di più agevole determinazione sperimentale. Tale tensore può essere ricavato sia dalla distribuzione direttamente misurata delle lunghezze *MIL*, sia da quella, *MIL Fitted*, che deriva dall'approssimazione ad ellissoide, permettendo in entrambi i casi di cogliere la direzione principale di orientamento delle fibre e le proprietà di anisotropia della distribuzione. In questo modo è possibile il confronto diretto tra i dati ricavati sperimentalmente e i risultati della simulazione del processo di stampaggio a iniezione.

Tabella 5: *MIL rose diagram*, autovalori e autovettori del tensore dell'ellissoide *MIL* e del tensore di orientazione ricavato dalla distribuzione delle lunghezze *MIL* nel volume ricostruito nella zona *shell*

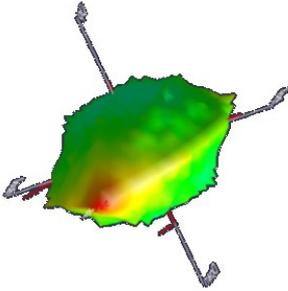
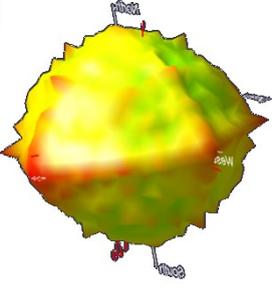
MIL rose diagram	Tensore (ellissoide) <i>MIL</i>				
	autovalori		autovettori		
			$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
	T1	0.46	1.00	0.07	0.02
	T2	0.32	-0.07	1.00	0.00
	T3	0.22	-0.02	0.00	1.00
	Tensore di orientazione <i>MIL</i>				
	autovalori		autovettori		
			$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
	T1	0.38	1.0	0.1	0.0
	T2	0.33	0.1	-1.0	0.0
	T3	0.28	0.0	0.0	1.0

Tabella 6: *MIL rose diagram*, autovalori e autovettori dell'ellissoide *MIL* e del tensore di orientazione ricavato dalla distribuzione delle lunghezze *MIL* nel volume ricostruito nella zona *core*

MIL rose diagram	Tensore (ellissoide) <i>MIL</i>				
	autovalori		autovettori		
			$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
	T1	0.36	0.0	0.2	1.0
	T2	0.33	-1.0	-0.2	0.0
	T3	0.31	-0.2	1.0	-0.2
	Orientation tensor ex MIL distribution				
	autovalori		autovettori		
			$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
	T1	0.35	0.0	-0.1	1.0
	T2	0.33	-1.0	-0.2	0.0
	T3	0.32	-0.2	1.0	0.1

BIBLIOGRAFIA

- [1] Fu S, Lauke B. “Effects of fiber length and fiber orientation distributions on the tensile strength of short-fiber-reinforced polymers”. *Composites Science and Technology*, 56,1179–90 (1996).
- [2] Advani SG, Tucker III CL. “The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites” *J.Rheology*, 31, 751–84 (1987).
- [3] Bernasconi A, Cosmi F, Dreossi D. “Local anisotropy analysis in injection moulded fibre reinforced polymer composites”, *Composites Science and Technology*,68, 2574-2781 (2008).
- [4] Bernasconi A, Cosmi F, Zappa E.”Combined effect of notches and fibre orientation on fatigue behaviour of short fibre reinforced polyamide”. *Strain*, 46, 435-445 (2010).
- [5] Cosmi F., Bernasconi A. “Elasticity of short fibre reinforced polyamide: morphological and numerical analysis of fibre orientation effects”. *Materiálové ininierstvo*, XVII, 6-10, (2010).
- [6] F. Cosmi, A. Bernasconi, N. Sodini. “Phase contrast micro-tomography and morphological analysis of a short carbon fibre reinforced polyamide”. *Composites Science and Technology*, 71, 23-30 (2011).
- [7] Cosmi F. “Local Anisotropy and Elastic Properties in a Short Glass Fibre Reinforced Polymer Composite”. *Strain*, 47, 215-221, (2011).
- [8] F. Cosmi and C. Ravalico. “Threshold Identification for Micro-Tomographic Damage Characterisation in a Short-Fibre-Reinforced Polymer”. *Strain*, 51, 171–179, (2015).
- [9] Bernasconi A., Cosmi F., Hine P.J. “Analysis of fibre orientation distribution in short fibre reinforced polymers: a comparison between optical and tomographic methods”. *Composites Science and Technology*, 72, 2002-2008 (2012).
- [10] Ketcham, R.A. “Three-dimensional textural measurements using high-resolution X-ray computed tomography”. *Journal of Structural Geology*, 27, 1217-1228, (2005).
- [11] Odgaard A. “Three-dimensional methods for quantification of cancellous bone architecture”. *Bone* 4, 315–28, (1997).
- [12] G. M. Luo, A. M. Sadegh, S. C. Cowin. “The mean intercept length polygons for systems of planar nets” *Journal of Materials Science*, 26(9), 2389-2396 (1991)
- [13] Ketcham RA, Ryan TM. “Quantification and visualization of anisotropy in trabecular bone”. *J Microscopy*; 213, 158–71, (2004).