

УДК 532.542

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МИКРОЗАЗОРАХ С ГРАНИЧНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ВЯЗКОСТИ

Соколов В.И., Рассказова Ю.Б.

## MODELING OF FLUID FLOW IN MICROGAPS WITH THE BOUNDARY CHANGE OF VISCOSITY

Sokolov V.I., Rasskazova Yu.B.

*Исследовано течение вязкой несжимаемой жидкости в микрозазорах гидравлических устройств и аппаратов с учетом скачкообразного граничного изменения вязкости. Для принятой модели распределения динамической вязкости проинтегрированы уравнения движения жидкости, на основании чего получены выражения для скорости жидкости по высоте зазора. Получены зависимости для расчета падения пропускной способности проходного сечения. Приведены примеры расчета распределений скорости и падения пропускной способности для плоской щели. Выполнена оценка границ применимости классического подхода к расчету течения вязкой жидкости в микрозазоре.*

**Ключевые слова:** динамическая вязкость, жидкость, давление, расход, распределение скорости.

**Постановка проблемы.** Течение жидкости в микрозазорах представляет практический интерес в связи с решением задач по уплотнениям гидравлических устройств и аппаратов, герметичность соединения подвижных пар которых часто обеспечивается выполнением гарантированного микронного зазора. Классический подход к расчету течения в узких щелях предполагает постоянство динамической вязкости жидкости по сечению. Поток жидкости для распространенных условий работы гидросистем носит ламинарный характер и расчет течения производят на основе известных зависимостей для плоской, концентрической и эксцентрической щелей [1, 2].

Однако, согласно теоретическим положениям и опытным данным ряда авторов [3, 4] вблизи границы твердого тела (до нескольких тысяч ангстрем,  $1\text{Å} = 10^{-4}\text{ мкм} = 10^{-10}\text{ м}$ ) вязкость минеральных масел скачкообразно увеличивается. Хотя толщина слоев, где проявляется отклонение вязкости, заметно меньше величины микрозазоров (размеры щелей в гидроаппаратах обычно выполняют не меньше 10-15 мкм), возникает

несомненный интерес к оценке гидромеханических параметров потока с учетом отмеченного эффекта.

**Анализ последних исследований и публикаций.** На величину скачка оказывает влияние род жидкости, материал твердой стенки, температура и т.д. Исследование свойств приграничных слоев жидкостей показывает, что это слои, где жидкость находится в особом фазовом состоянии, характеризующимся высокой степенью упорядочения молекул. Одна из самых простых непротиворечивых теорий, учитывающих эффекты пристеночных течений, исходит из модели сплошной среды с внутренним вращением неточечных структурных элементов [5 – 7].

Несмотря на то, что качественная оценка граничного увеличения вязкости вблизи твердой поверхности достаточно широко представлена в литературе, количественные характеристики для оценки гидромеханических параметров течения в микрозазоре отсутствуют.

**Цель статьи.** Предложить математическую модель течения вязкой несжимаемой жидкости в микрозазорах гидравлических устройств и аппаратов с учетом скачкообразного граничного изменения вязкости и установить зависимости для расчета падения пропускной способности проходного сечения.

**Материалы и результаты исследования.** Рассмотрим стационарное течение в плоской щели, образованной двумя параллельными стенками неограниченной ширины. Выбрав ось  $x$  по потоку, ось  $y$  – перпендикулярно к стенкам щели (рис. 1), запишем уравнение движения несжимаемой среды с переменной динамической вязкостью [1, 2]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость;  $\partial p / \partial x$  – градиент давления;  $u_x$  – скорость течения жидкости

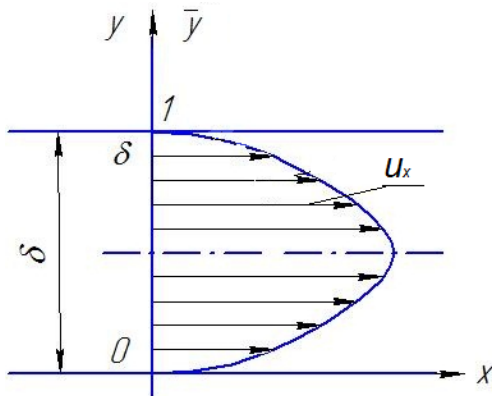


Рис. 1. Схема течения в плоской щели

Будем считать, что стенки, образующие щель, выполнены, в общем случае, из разных материалов. Это предполагает введения в рассмотрения различных величин скачков вязкости вблизи твердой поверхности, а также различных размеров приграничных слоев, где проявляется изменение вязкости. Поэтому, непротиворечивым является задание следующего распределения динамической вязкости по высоте зазора (рис. 2):

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 + \Delta\mu_1, & y < \Delta\delta_1; \\ \mu_0, & \Delta\delta_1 \leq y \leq \delta - \Delta\delta_2; \\ \mu_0 + \Delta\mu_2, & y > \delta - \Delta\delta_2; \end{cases} \quad (2)$$

где  $\delta$  – размер щели;

$\Delta\delta_1, \Delta\delta_2$  – размеры приграничных слоев у каждой из стенок, вблизи которых происходит увеличение вязкости;

$\mu_0$  – динамическая вязкость (в основном потоке жидкости вне граничных слоев);

$\Delta\mu_1, \Delta\mu_2$  – величины приграничных скачков вязкости.

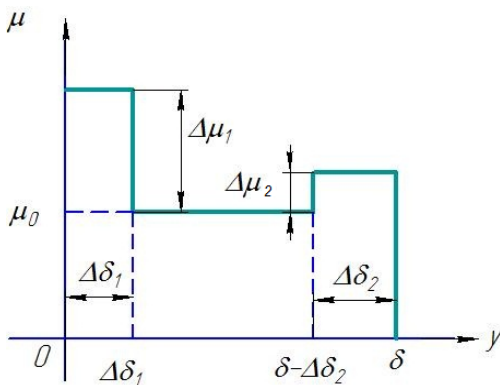


Рис. 2. Распределение динамической вязкости по высоте зазора

С целью дальнейшего упрощения математических выкладок введем следующие безразмерные переменные:

безразмерные координаты

$$\bar{y} = y/\delta; \quad \bar{\delta}_1 = \Delta\delta_1/\delta; \quad \bar{\delta}_2 = \Delta\delta_2/\delta; \quad (3)$$

безразмерная вязкость и ее скачки

$$\bar{\mu} = \mu/\mu_0; \quad \bar{\mu}_1 = \Delta\mu_1/\mu_0; \quad \bar{\mu}_2 = \Delta\mu_2/\mu_0; \quad (4)$$

безразмерная скорость

$$\bar{u} = \bar{u}_x / V_0, \quad (5)$$

где  $u_0$  – средняя скорость при классическом расчете течения в плоской щели [1, 2];

$$V_0 = -\frac{\delta^2}{12\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

или в виде, более удобном для технических расчетов,

$$V_0 = \frac{\Delta p \delta^2}{12\mu_0 l}, \quad (7)$$

где  $\Delta p$  – перепад давлений на щели;  $l$  – длина щели.

С учетом (3 – 6) уравнение (1) и распределение (2) принимают следующий безразмерный вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} \right) = -12; \quad (8)$$

$$\bar{\mu} = \begin{cases} 1 + \bar{\mu}_1, & \bar{y} < \bar{\delta}_1; \\ 1, & \bar{\delta}_1 \leq \bar{y} \leq 1 - \bar{\delta}_2; \\ 1 + \bar{\mu}_2, & \bar{y} > 1 - \bar{\delta}_2. \end{cases} \quad (9)$$

Безразмерное распределение вязкости (9) показано на рис. 3.

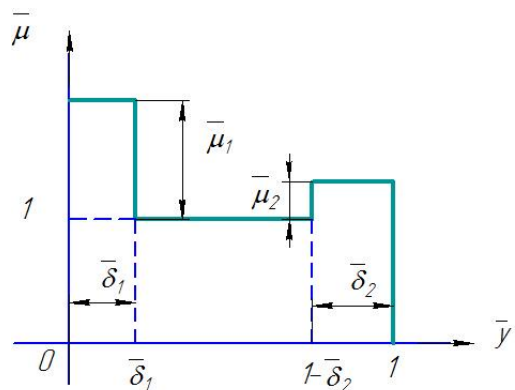


Рис. 3. Безразмерное распределение вязкости

Для нахождения распределения скорости  $\bar{u}_x(\bar{y})$  по высоте щели выделим в зазоре (рис. 4) три зоны (0, 1, 2), соответствующие постоянным значениям вязкости и проинтегрируем уравнение (8) для каждой из зон

$$\bar{u}_1(\bar{y}) = -\frac{6}{1+\bar{\mu}_1} \bar{y}^2 + C_{11}\bar{y} + C_{12}; \quad (10)$$

$$\bar{u}_0(\bar{y}) = -6\bar{y}^2 + C_{01}\bar{y} + C_{02} \quad (11)$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) = -\frac{6}{1+\bar{\mu}_2} \bar{y}^2 + C_{21}\bar{y} + C_{22}; \quad (12)$$

где  $C_{11}, C_{12}, C_{01}, C_{02}, C_{21}, C_{22}$  – постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования рассматриваем следующие граничные условия

$$\bar{u}_1(0) = 0; \quad \bar{u}_2(1) = 0 \quad (13)$$

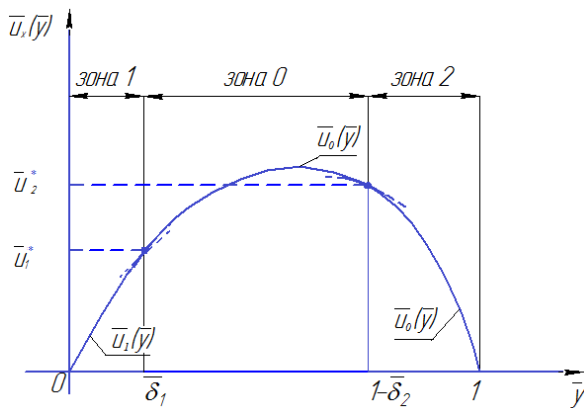


Рис. 4. К определению распределения скорости в плоской щели

и вводим согласно рис. 4 пока еще неизвестные скорости  $\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*$

$$\bar{u}_1^* = \bar{u}_1(\bar{\delta}_1) = \bar{u}_0(\bar{\delta}_1); \quad (14)$$

$$\bar{u}_2^* = \bar{u}_2(1 - \bar{\delta}_2) = \bar{u}_0(1 - \bar{\delta}_2). \quad (15)$$

С учетом (13 – 15) получаем значения констант, после подстановки которых в (10 – 12) имеем

$$\bar{u}_1(\bar{y}) = \frac{6}{1+\bar{\mu}_1} \bar{y}(\bar{\delta}_1 - \bar{y}) + \bar{u}_1^* \frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_1}; \quad (16)$$

$$\bar{u}_0(\bar{y}) = \bar{u}_1^* + 6\bar{\delta}_1^2 - 6\bar{y}^2 + \frac{\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^* + 6(\bar{\delta}_1^2 - (1 - \bar{\delta}_2)^2)}{\bar{\delta}_1 - (1 - \bar{\delta}_2)} (\bar{y} - \bar{\delta}_1) \quad (17)$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) = \frac{6}{1+\bar{\mu}_2} (1 - \bar{y})(\bar{\delta}_2 - 1 + \bar{y}) + \bar{u}_2^* \frac{(1 - \bar{y})}{\bar{\delta}_2}; \quad (18)$$

Так как функциональная зависимость для скорости должна быть непрерывной и гладкой, то для нахождения скоростей  $\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*$  используем условия равенства производных от скорости в точках «сшивания» профилей скорости различных зон (рис. 4)

$$\left. \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}} \right|_{\bar{\delta}_1} = \left. \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}} \right|_{\bar{\delta}_1}; \quad (19)$$

$$\left. \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{y}} \right|_{1-\bar{\delta}_2} = \left. \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}} \right|_{1-\bar{\delta}_2}. \quad (20)$$

Зависимости (19, 20) дают следующие уравнения

$$-\frac{6\bar{\delta}_1}{1+\bar{\mu}_1} + \frac{\bar{u}_1^*}{\bar{\delta}_1} = -12\bar{\delta}_1 + \frac{\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^* + 6(\bar{\delta}_1^2 - (1 - \bar{\delta}_2)^2)}{\bar{\delta}_1 - (1 - \bar{\delta}_2)}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{6\bar{\delta}_2}{1+\bar{\mu}_2} + \frac{12(1-\bar{y})}{1+\bar{\mu}_2} \frac{\bar{u}_2^*}{\bar{\delta}_2} = \\ & = -12(1-\bar{\delta}_2) + \frac{\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^* + 6(\bar{\delta}_1^2 - (1 - \bar{\delta}_2)^2)}{\bar{\delta}_1 - (1 - \bar{\delta}_2)}; \quad (22) \end{aligned}$$

Решая совместно (21) и (22), получаем

$$\bar{u}_1^* = \frac{6\bar{\delta}_1^3 \bar{\mu}_1 - 6\bar{\delta}_1^2 \bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} - \frac{6\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2^2 \bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} + 6\bar{\delta}_1(1 - \bar{\delta}_1); \quad (23)$$

$$\bar{u}_2^* = \frac{6\bar{\delta}_2^3 \bar{\mu}_2 - 6\bar{\delta}_2^2 \bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} - \frac{6\bar{\delta}_1^2 \bar{\delta}_2 \bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} + 6\bar{\delta}_2(1 - \bar{\delta}_2); \quad (24)$$

Подставляя (23 – 24) в (16 – 18), имеем

$$\bar{u}_1(\bar{y}) = 6\bar{y} \left( 1 - \frac{\bar{\delta}_2^2 \bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} + \frac{\bar{\delta}_1^2 \bar{\mu}_1 - 2\bar{\delta}_1 \bar{\mu}_1 - \bar{y}}{1+\bar{\mu}_1} \right); \quad (25)$$

$$\bar{u}_0(\bar{y}) = -\frac{6\bar{\delta}_1^2 \bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} + 6\bar{y} \left( 1 - \bar{y} + \frac{\bar{\delta}_1^2 \bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} - \frac{\bar{\delta}_2^2 \bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} \right); \quad (26)$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) = 6(1 - \bar{y}) \left( \frac{\bar{y} + \bar{\delta}_2^2 \bar{\mu}_2 - 2\bar{\delta}_2 \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} - \frac{\bar{\delta}_1^2 \bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} \right). \quad (27)$$

Зависимости (25 – 27) дают полное распределение безразмерной скорости по размеру щели. Примеры профилей скорости, рассчитанных по данным зависимостям для случая  $\bar{\delta}_2 = 2\bar{\delta}_1$  и

$\bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 2$ , приведенные на рис. 5. Как видно, скорость течения меньше скорости, определенной по классическому расчету. Также, заметно смещение максимального значения скорости от центра зазора при неравномерном распределении вязкости.

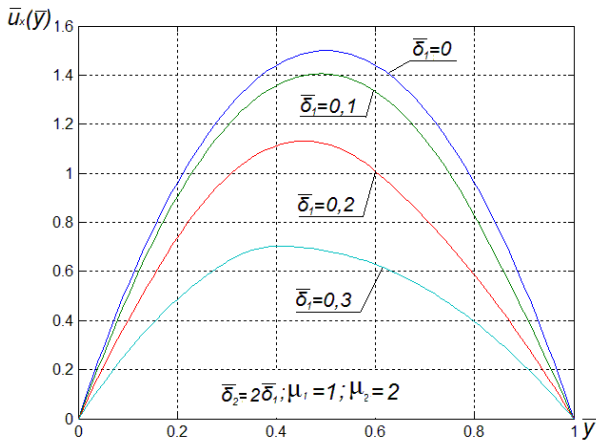


Рис. 5. Распределение скорости в щели

Введем безразмерный расход жидкости в зазоре

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{\int_0^\delta u_x(y) dy}{V_0 \delta}, \tag{28}$$

где  $Q$  – действительный расход в зазоре;  
 $Q_0$  – расход в зазоре по классическому расчету.

Нетрудно убедиться, что величина  $\bar{Q}$  есть соотношение между значением расхода, определенным с учетом скачкообразного граничного изменения вязкости, и значением расхода, определенным по классическому расчету. Величину  $\bar{Q}$  можно также рассматривать как падение пропускной способности проходного сечения микрозазора.

Учитывая (3, 5), вместо (28) имеем

$$\bar{Q} = \int_0^1 \bar{u}_x(\bar{y}) d\bar{y} \tag{29}$$

или, рассматривая интеграл (29) по зонам (рис. 4),

$$\bar{Q} = \int_0^{\bar{\delta}_1} \bar{u}_1(\bar{y}) d\bar{y} + \int_{\bar{\delta}_1}^{1-\bar{\delta}_2} \bar{u}_0(\bar{y}) d\bar{y} + \int_{1-\bar{\delta}_2}^1 \bar{u}_2(\bar{y}) d\bar{y}. \tag{30}$$

Подставив (25-27) в (30), получаем следующее выражение для определения падения пропускной способности проходного сечения

$$\bar{Q} = 1 - \bar{\mu}_1 \bar{\delta}_1^2 \frac{3 - 2\bar{\delta}_1}{1 + \bar{\mu}_1} - \bar{\mu}_2 \bar{\delta}_2^2 \frac{3 - 2\bar{\delta}_2}{1 + \bar{\mu}_2}. \tag{31}$$

Необходимо отметить, что при  $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 \rightarrow 0$  или  $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2 \rightarrow 0$  выражение (31) дает  $\bar{Q} = 1$ , т.е. имеется явный предельный переход к классическому расчету течения вязкой несжимаемой жидкости в микрозазоре.

Более общий анализ влияния скачкообразного увеличения вязкости можно сделать, если рассмотреть течение в плоской щели между стенками из однородных материалов. В этом случае имеем одно значение размера приграничной зоны и величины приграничного скачка вязкости

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2; \tag{32}$$

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2. \tag{33}$$

Ввиду появляющейся при этом симметрии распределения скорости зависимости (25 – 27) записываем для половины размера щели

$$\bar{u}(\bar{y}) = \begin{cases} 6\bar{y} \left( 1 - \frac{2\bar{\delta}\bar{\mu} + \bar{y}}{1 + \bar{\mu}} \right), & 0 \leq \bar{y} < \bar{\delta}; \\ 6\bar{y}(1 - \bar{y}) - \frac{6\bar{\mu}\bar{\delta}^2}{1 + \bar{\mu}}, & \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0,5. \end{cases} \tag{34}$$

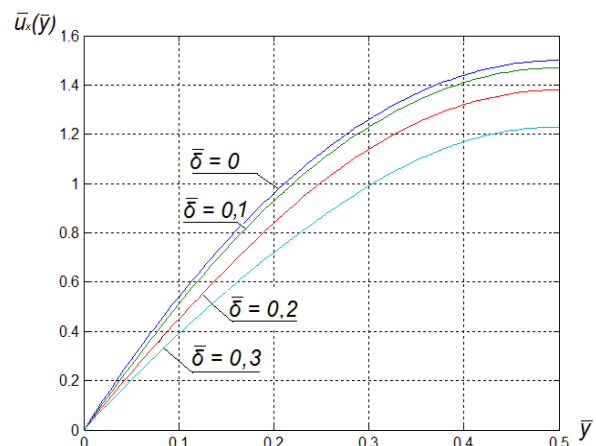


Рис. 6. Полупрофиль скорости в щели между стенками из однородных материалов

Примеры расчета распределений скорости для  $\bar{\mu} = 1$  при различных значениях  $\bar{\delta}$  приведены на рис. 6.

На основании (32) и (33) получаем следующее выражение для падения пропускной способности проходного сечения плоской щели

$$\bar{Q} = 1 - 2\bar{\mu}\bar{\delta}^2 \frac{3 - 2\bar{\delta}}{1 + \bar{\mu}}. \tag{35}$$

Примеры расчета зависимости падения пропускной способности проходного сечения от размера приграничной зоны при различных значениях скачка вязкости показаны на рис. 7. Примеры расчета зависимости падения пропускной способности проходного сечения от приграничного

скачка вязкости при различных размерах приграничной зоны представлены на рис. 8.

Анализ полученных результатов показывает, что скачкообразное граничное увеличение динамической вязкости однозначно приводит к падению пропускной способности проходного сечения микроззора. Также можно считать, что падение расхода для плоской щели составляет не более 5% при  $\bar{\delta} < 0,1$  и  $\bar{\mu} < 4$ , а для расчета течения вполне применимы известные зависимости [1, 2].

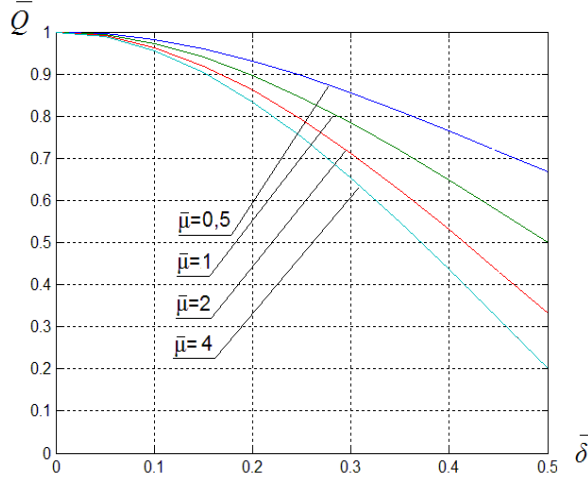


Рис. 7. Падение пропускной способности в зависимости от размера приграничного слоя с повышенной вязкостью

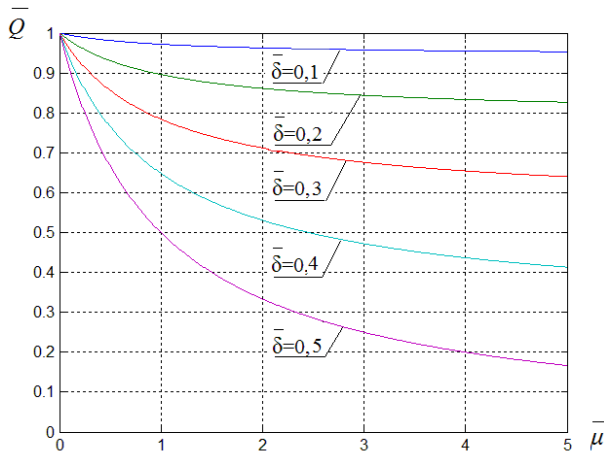


Рис. 8. Падение пропускной способности в зависимости от скачка вязкости

**Выводы.** Проведены исследования течения вязкой несжимаемой жидкости в микроззорах гидравлических устройств и аппаратов с учетом скачкообразного граничного увеличения вязкости вблизи твердой поверхности. На примере плоской щели установлены зависимости для расчета падения пропускной способности проходного сечения.

#### Л и т е р а т у р а

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Лойцянский Л.Г. // – М.: Наука, 1987. – С.840.

2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика [Текст]/ Емцев Б.Т. // – М.: Машиностроение, 1987. – С.440.  
3. Дерягин Б.В. Поверхностные силы [Текст]/ Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М // – М.: Наука, 1983. – С.399.  
4. Дерягин Б.В. Смачивающие пленки [Текст]/ Дерягин Б.В., Чураев Н.В. // – М.: Наука, 1984. – С.160.  
5. Бондаренко Н.Ф. Соотношение между сдвиговой прочностью жидкостей в объеме и ограниченных слоях. Бондаренко Н.Ф. / Бондаренко Н.Ф., Нерпин С.В Сб. Поверхностные силы в тонких пленках и дисперсных системах. – М.: Наука, 1972. – С. 281 – 289.  
6. Листров А.Т. О модели вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений [Текст] / Листров А.Т. // Прикладная математика и механика. – 1967. – Вып. 31. - № 1. – С.112 – 115.  
7. Cosserat E., Cosserat F. Teoretie des corps deformables. [Text] – Paris: Herman, 1909. – 226 p.

#### References

1. Loitsianskyi L.H. Mekhanyka zhydkosti y haza [Tekst] / Loitsianskyi L.H // – М.: Nauka, 1987. – S.840.  
2. Emtsev B.T. Tekhnicheskaia hydromekhanyka [Tekst]/ Emtsev B.T. // – М.: Mashynostroenye, 1987. – S.440.  
3. Deriahyn B.V. Poverkhnostnye sylu [Tekst]/ Deriahyn B.V., Churaev N.V., Muller V.M // – М.: Nauka, 1983. – S.399.  
4. Deriahyn B.V. Smachyvaiushchye plenky [Tekst]/ Deriahyn B.V., Churaev N.V. // – М.: Nauka, 1984. – S.160.  
5. Bondarenko N.F. Sootnoshenye mezhdru sdvyhivoi prochnosti zhydkosti v obueme y ohranychennukh sloiakh. Bondarenko N.F. / Bondarenko N.F., Nerpyn S.V Sb. Poverkhnostnye sylu v tonkykh plenkakh y dyspersnykh systemakh. – М.: Nauka, 1972. – S. 281 – 289.  
6. Lystrov A.T. O modely viazkoi zhydkosti s nessymetrychnum tenzorom napriazheniy [Tekst] / Lystrov A.T. // Prykladnaia matematyka y mekhanyka. – 1967. – Vup. 31. - # 1. – S.112 – 115.  
7. Cosserat E., Cosserat F. Teoretie des corps deformables. [Text] – Paris: Herman, 1909. – 226 r.

**Соколов В.І., Рассказова Ю.Б. Дослідження течії рідини в микрозорах з граничною зміною в'язкості.**

Досліджена течія нестисливої в'язкої рідини в микрозорах гідралічних пристроїв і апаратів з урахуванням стрибкоподібної граничної зміни в'язкості. Для прийнятої моделі розподілу динамічної в'язкості проінтегровані рівняння руху рідини, на основі чого отримані вирази для швидкості рідини по висоті зазору. Отримані залежності для розрахунку падіння пропускної спроможності проходного перетину. Приведені приклади розрахунку розподілів швидкості та падіння пропускної спроможності для плоскої щілини. Виконана оцінка границь застосування класичного підходу до розрахунку течії в'язкої рідини в микрозорі.

**Ключові слова:** динамічна в'язкість, рідина, тиск, витрата, розподіл швидкості.

**Sokolov V.I., Rasskazova Yu.B. Modeling of fluid flow in microgaps with the boundary change of viscosity.**

The flow of an incompressible viscous fluid in microgap of the hydraulic equipment and vehicles considering the abrupt change in the boundary viscosity is observed. Relations

---

*for the calculation of the decreasing of the throughput flow area is offered.*

**Keywords:** *dynamic viscosity of the fluid, pressure, flow, velocity distribution.*

**Соколов Володимир Ілліч** – д.т.н., проф., зав. кафедри машинобудування та прикладної механіки, Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля (м. Сєверодонецьк).  
[sokolov.snu.edu@gmail.com](mailto:sokolov.snu.edu@gmail.com)

**Рассказова Юлія Борисівна** – аспірант кафедри машинобудування та прикладної механіки, Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля (м. Сєверодонецьк)  
[urass.snu.edu@gmail.com](mailto:urass.snu.edu@gmail.com)

*Рецензент:* д.т.н., проф. **Марченко Д.М.**

Стаття подана 23.09.2016