EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKA DOKTORI ISKOLA
ALKALMAZOTT MATEMATIKA DOKTORI PROGRAM

Dinamikus járványterjedési modellek adaptív hálózatokon

című doktori értekezés tézisei

Szabó-Solticzky András

Témavezető:

Prof. Simon L. Péter
egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia Doktora

A Matematika Doktori Iskola vezetője:

Prof. Laczkovich Miklós
egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Az Alkalmazott Matematika doktori program vezetője:

Prof. Faragó István
egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia Doktora

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Budapest, 2016

1. Bevezetés

Az elmúlt évtizedben a hálózatokon tekintett járványterjedési folyamatok vizsgálata egyre fontosabbá vált [3, 5, 6], különös tekintettel az úgynevezett adaptív hálózatok esetére [1, 4, 8]. A doktori dolgozat fő témája a hálózat alapú, sztochasztikus SIS járványterjedési modell, mely fő jellemzője, hogy figyelembe veszi az egyedek közötti kapcsolati hálót. A dolgozatban ezen modell két altípusával foglalkozunk. Az első változatban egy hurokélmentes, irányítatlan gráfot tekintünk, melyről feltesszük, hogy időben állandó, azaz az élek nem változnak. A hálózat csúcsai kétféle állapotban lehetnek: egészséges (S) és fertőzött, aki fertőz (I). Járványterjedés csak egy S és egy I típusú csúcs között, más szóval (SI) élen történhet τ rátával. Továbbá, minden egyes I csúcs meggyógyulhat γ rátával. A járványterjedést és a gyógyulást független Poisson folyamatnak tekintjük, azaz egy kis Δt időintervallum alatt a fertőzés valószínűsége $1 - \exp(-N_I \tau \Delta t)$, ahol N_I jelöli a fertőzött szomszédok számát. Hasonlóan egy fertőzött csúcs gyógyulásának a valószínűsége $1 - \exp(-\gamma \Delta t)$.

A másik fontos modell az úgynevezett adaptív, vagy dinamikus SIS modell, melyben létrejöhetnek új élek, illetve megszűnhetnek meglévők. Ezzel egy időben változó hálózatot, úgynevezett dinamikus gráfot kapunk. A modell a következő független Poisson folyamatokat foglalja magában:

- **Fertőzés:** Fertőzés minden egyes (SI) típusú élen τ rátával,
- **Gyógyulás:** Minden I típusú csúcs γ rátával gyógyul,
- **Él létrehozás:** Egy még nem létező él létrehozása egy A és egy B típusú csúcs között, α_{AB} rátával, ahol $A, B \in \{S, I\}$,
- **Él megszüntetés:** Egy létező él megszüntetése egy A és egy B típusú csúcs között ω_{AB} rátával, ahol $A, B \in \{S, I\}$.

A folyamatra ugyan felírhatók az úgynevezett alapegyenletek, ez azonban egy, a csúcsok számában exponenciális méretű közönséges differenciálegyenlet rendszerhez vezet. Ennek elkerülése érdekében a dolgozatban a fertőzöttek számának várható értékével foglalkozunk, melyhez nem szükséges az imént említett egyenletrendszer felírása. Jelölje $[I]$ a fertőzöttek számának várható értékét, továbbá legyen $[SS], [SI], [II]$ az $(SS), (SI), (II)$ típusú élek számának várható értéke. Ekkor a következő rendszer írható fel, lásd [7],

$$\dot{[I]} = \tau[SI] - \gamma[I], \tag{1}$$

$$\dot{[SI]} = \gamma([II] - [SI]) + \tau([SSI] - [ISI] - [SI]) + \alpha_{SI}([S][I] - [SI]) - \omega_{SI}[SI], \tag{2}$$

$$\dot{[II]} = -2\gamma[II] + 2\tau([ISI] + [SI]) + \alpha_{II}([I]([I] - 1) - [II]) - \omega_{II}[II], \tag{3}$$

$$\dot{[SS]} = 2\gamma[SI] - 2\tau[SSI] + \alpha_{SS}([S]([S] - 1) - [SS]) - \omega_{SS}[SS]. \tag{4}$$

Ahol $[ABC]$ $(A, B, C \in \{S, I\})$ jelöli azon élpárok számának várható értéket, ahol egy A típusú csúcs össze van kötve egy B típusúval és az egy C típusúval. Annak érdekében, hogy a fenti egyenletrendszer jól definiált legyen, a következő jól ismert [5] közelítést alkalmazzuk az élpárok számára,

$$[ABC] \approx \frac{n-1}{n} \frac{[AB][BC]}{[B]}, \tag{5}$$

ahol n jelöli a B típusú csúcsok átlagos fokszámát. Alkalmazva az (5) közelítést az (1)-(4) rendszerre egy jól definiált egyenletrendszert kapunk, melyre a továbbiakban pairwise modellként fogunk hivatkozni.

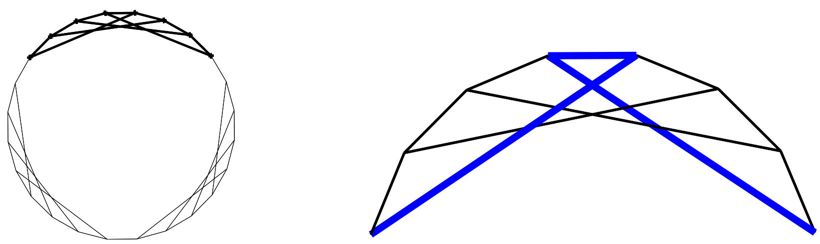
Jelen tézisfüzetben a szerző következő négy publikációjának eredményeit tárgyaljuk [11, 12, 13, 14]. A [14] tanulmányban egy speciális hálózaton tekintett SIS járványterjedéssel foglalkoztunk. További két cikkben [11, 12] az adaptív SIS modell közelítő egyenletrendszerét elemeztük bifurkációelméleti módszerekkel. Végül [13]-ban szimulációs eredmények bifurkációit tanulmányoztuk a hálózat kvalitatív változásaival egyetemben.

2. SIS járványterjedés módosított körgráfon

Ebben a fejezetben bemutatjuk egy újfajta közelítő módszerünk eredeményét [14] egy speciális hálózat esetén, az úgynevezett módosított körgráfon. Ezen hálózat legfőbb jellemzője, hogy struktúrája egy változóval paraméterezhető. Módszerünk kidolgozása során követtük [9] eredményeit, ahol a szerzők egy új közelítést dolgoztak ki körgráfok esetére.

A módosított körgráf $G_{N,d}$ konstrukciója a következő. Hozzunk létre egy N csúcsú C_N körgráfot és számozzuk meg a csúcsait 1-től N-ig. Ezután adjunk további éleket a hálózathoz úgy, hogy minden csúcs foka három legyen a következő módon. Legyen $d \geq 2$ egész és húzzunk élt az első csúcstól az $1+d$-edik csúcsig, a másodiktól a $2+d$-edik csúcsig és így tovább a d-edik csúcstól a $2d$-edik csúcsig. Ekkor az $1, 2, \ldots, 2d$ csúcsok foka három. Ezután folytassuk az iménti eljárást az $1 + 2d$-edik csúcsból indulva.

A közelítésünk több, a hálózat speciális struktúráját érintő megfigyelésen alapszik. A legfontosabb, hogy a $G_{N,d}$ gráf $N/2d$ darab részgráfból áll, melyek egy-egy éllel vannak összekötve egymással kör alakban és a méretük $2d$. Az 1a. ábra a $G_{24,4}$ gráfot mutatja kiemelve az egyik nyolc csúcsú $\widetilde{G_4}$ részgráfot a három közül.



(a) $G_{24,4}$ és $\widetilde{G_4}$ részgráf vastagítottal kiemelve.

(b) A $\widetilde{G_4}$ részgráf és a legrövidebb út (kékkel), ahogy a járványterjedés átmegy a gráfon.

1. ábra

A második fontos megfigyelés, hogy a részgráfon belül a járványterjedés három egymástól szeparált íven fut, 1b. ábra. Végül ezek az ívek összeérnek és az egész részgráf fertőzött lesz, néhány gyógyulástól eltekintve. A járványterjedés a következő szakaszonként lineáris függvénnyel közelíthető,

$$I_{std}(t) = \begin{cases} at & \text{ha,} \quad 0 \leq t \leq t_{stat} \\ c & \text{ha,} \quad t_{stat} \leq t \end{cases} \tag{6}$$

Ahol t_{stat}-ot a két egyenes metszéspontja határozza meg, illetve $c = 2d(1 - \frac{\gamma}{3\tau})$ és

$$a = \begin{cases} 1.5\tau - \gamma & \text{ha,} \quad d = 2 \\ 2.5\tau - \gamma & \text{ha,} \quad d = 4 \\ (6\tau - 4\gamma)(1 - \frac{\gamma}{3\tau}) & \text{ha,} \quad 8 \leq d < \frac{N}{2} \end{cases} \tag{7}$$

Jelölje R, hogy átlagosan mennyi idő alatt ér át a járványterjedés egy részgráfon, azaz az első csúcs megfertőződésétől kezdve mennyi idő telik el mire a következő részgráf első csúcsa fertőzött lesz. Ekkor R az alábbi módon közelíthető,

$$R = \begin{cases} R_2 & \text{ha,} \quad d = 2 \\ R_4 & \text{ha,} \quad d = 4 \\ \frac{R_4 + R_5}{2} & \text{ha,} \quad 8 \leq d \end{cases} \tag{8}$$

ahol,

$$R_2 = \frac{260\tau^5 + 420\gamma\tau^4 + 316\gamma^2\tau^3 + 153\tau^2\gamma^3 + 6\gamma^5 + 45\tau\gamma^4}{6\tau^3(20\tau^3 + 25\tau^2\gamma + 12\tau\gamma^2 + 2\gamma^3)},$$

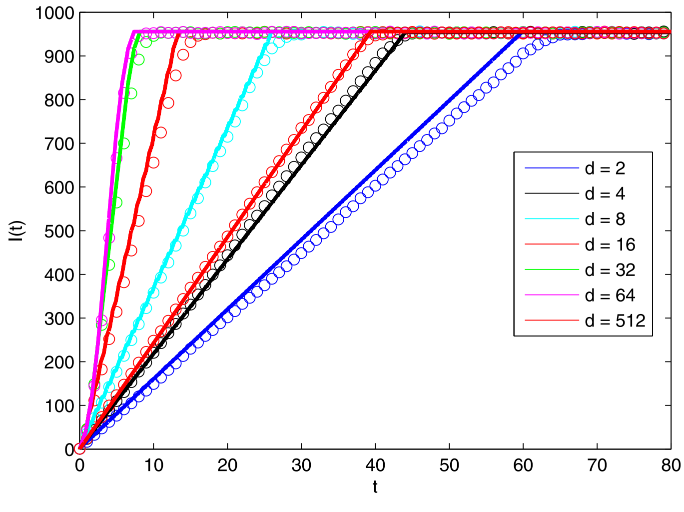
$$R_4 = \frac{9\tau^3 + 12\gamma\tau^2 + 8\gamma^2\tau + 2\gamma^3}{\tau^3(3\tau + 2\gamma)},$$

$$R_5 = \frac{1388\tau^3\gamma^4 + 1107\tau^6\gamma + 1900\tau^4\gamma^3 + 324\tau^7 + 1804\tau^5\gamma^2 + 24\gamma^7 + 192\tau\gamma^6 + 674\tau^2\gamma^5}{\tau^4(24\gamma^4 + 216\tau^3\gamma + 120\gamma^3\tau + 81\tau^4 + 235\gamma^2\tau^2)}.$$

Alkalmazva a fenti közelítéseket az $I_{std}(t)$ függvényre és az R átérési időre a fertőzöttek számának várható értéke $I(t)$ a következő módon közelíthető,

$$I(t) = 2\sum_{k=1}^{M/2} H(t - R(k-1))I_{std}(t - (k-1)R), \tag{9}$$

ahol M a részgráfok száma, illetve H a Heaviside függvény, mely nulla negatív argumentum esetén, és egy, ha az argumentum pozitív. A következő ábrán összefoglaljuk az eredményeinket, ahol egy $N = 1024$ csúcsú gráfon különböző d értékekre vetjük össze a (9) formulából kapott közelítéseket szimulációs eredményekkel,



2. ábra. $I(t)$ görbék $N = 1024$ csúcsú gráfok és $d = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 512$ esetén, $\tau = 5$, $\gamma = 1$. A folytonos vonalakat a (9) formulából kaptuk, a körökkel jelzett görbék pedig szimulációs eredmények 1000 ismétlésből átlagolva.

3. A közelítő pairwise modell dinamikája és bifurkációi

Ebben a fejezetben a pairwise közelítő egyenletrendszert vizsgáljuk bifurkációelméleti módszerekkel. Az itt tárgyalt eredményeket a szerző következő publikációi tartalmazzák [11, 12, 13]. A továbbiakban a célunk, hogy meghatározzuk, milyen típusú bifurkációk jelenhetnek meg a rendszerben. Eredményeinket a paraméterek három speciális esetére fogjuk tárgyalni. Mindezek előtt ismertetünk egy általános eredményt a betegségmentes egyensúlyi pontot illetően.

1. Állítás. *A pairwise rendszerben betegségmentes egyensúlyi állapot van az alábbi pontban,*

$$[I] = 0, \quad [SI] = 0, \quad [II] = 0, \quad [SS] = \frac{\alpha_{SS} N(N-1)}{\alpha_{SS} + \omega_{SS}}. \tag{10}$$

3.1. Az $\alpha_{II} = \omega_{II} = 0$ eset vizsgálata, ha n rögzített

A [11] tanulmányunkban az $\alpha_{II} = \omega_{II} = 0$ esetet vizsgáltuk. Ekkor a pairwise rendszer a következő,

$$[\dot{I}] = \tau[SI] - \gamma[I], \tag{11}$$

$$[\dot{SI}] = \gamma([II] - [SI]) + \tau \frac{n-1}{n} \frac{[SI]([SS] - [SI])}{[S]} - \tau[SI] + \alpha_{SI}([S][I] - [SI]) - \omega_{SI}[SI], \tag{12}$$

$$[\dot{II}] = -2\gamma[II] + 2\tau \frac{n-1}{n} \frac{[SI]^2}{[S]} + 2\tau[SI], \tag{13}$$

$$[\dot{SS}] = 2\gamma[SI] - 2\tau \frac{n-1}{n} \frac{[SI][SS]}{[S]} + \alpha_{SS}([S]([S]-1) - [SS]) - \omega_{SS}[SS], \tag{14}$$

ahol feltesszük, hogy n állandó. Bevezetve a következő jelöléseket $x = [I], q = \frac{n-1}{n}, \rho_{SS} = \alpha_{SS} + \omega_{SS}$ meghatározzuk az egyensúlyi pontok számát a paraméterek függvényében. A legfontosabb két paraméter a τ és az ω_{SI}. Ezeket vizsgálták [2]-ben is, ezért a célunk, hogy a (τ, ω_{SI}) síkot tartományokra osszuk az egyensúlyi pontok száma szerint. A parametrikus reprezentáció módszerét használva [10] definiálunk egy speciális görbét az úgynevezett D-görbét az alábbi módon,

$$D(x) = \Big(\frac{f_0'(x) f_2(x) - f_0(x) f_2'(x)}{f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x)}, \frac{f_0(x) f_1'(x) - f_0'(x) f_1(x)}{f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x)} \Big),$$

ahol,

$$f_0(x) = -\gamma(2\alpha_{SI}\gamma q x + (\gamma + \alpha_{SI})\rho_{SS}(N - x)), \tag{15}$$

$$f_1(x) = (N - x)(\alpha_{SS}\gamma q(N - x - 1) + \alpha_{SI}(2\gamma q x + \rho_{SS}(N - x))), \tag{16}$$

$$f_2(x) = -\gamma(2\gamma q x + \rho_{SS}(N - x)). \tag{17}$$

A D-görbe adja meg a nyereg-csomó bifurkáció görbéjét, egyben segítségével meghatározható az egyensúlyi pontok száma. Az erre vonatkozó eredményeinket a következő tétel foglalja össze,

1. Tétel. *Legyen $D(x)$ a fent definiált D-görbe. Ekkor a D-görbe pozíciójától függően az alábbi két eset lehetséges.*

- *Ha a következő egyenlőtlenség nem teljesül*

$$2q^2\alpha_{SI}\alpha_{SS}(1-\frac{1}{N})+(q\alpha_{SS}+\frac{\alpha_{SI}}{\gamma}\rho_{SS})(1+\frac{\alpha_{SI}}{\gamma})\rho_{SS}<2q\alpha_{SI}\rho_{SS} \tag{18}$$

  akkor az alábbi egyenes

$$\gamma(\gamma+\alpha_{SI})\rho_{SS}-\tau((N-1)\alpha_{SS}\gamma q+N\alpha_{SI}\rho_{SS})+\omega_{SI}\gamma\rho_{SS}=0 \tag{19}$$

  két részre osztja a (τ,ω_{SI}) paraméter síkot. Ha egy (τ,ω_{SI}) paraméter pár a bal oldali részbe esik, akkor az egyetlen egyensúlyi pont a betegségmentes egyensúly melynek koordinátái (10)*-ből adódnak. Ha egy (τ,ω_{SI}) paraméter pár a jobb oldali részbe esik, akkor két egyensúlyi pont van, közülük az egyik a betegségmentes egyensúly.*

- *Ha a (18)-ban definiált egyenlőtlenség teljesül, akkor a D-görbe és a (19) egyenes három részre osztja a (τ,ω_{SI}) paraméter síkot. Ha egy (τ,ω_{SI}) paraméter pár a jobb oldali tartományba esik, akkor két egyensúlyi pont van, közülük az egyik a betegségmentes egyensúly. Ha egy (τ,ω_{SI}) paraméter pár a bal oldali tartomány D-görbe feletti részébe esik, akkor az egyetlen egyensúlyi pont a betegségmentes egyensúly melynek koordinátái* (10)*-ből adódnak. Ha egy (τ,ω_{SI}) paraméter pár a bal oldali tartomány D-görbe alatti részébe esik, akkor három egyensúlyi állapot van, közülük az egyik a betegségmentes egyensúly.*

Egy adott egyensúlyi állapot stabilitásának eldöntéséhez a Jacobi mátrix vizsgálatára van szükség. A betegségmentes egyensúly stabilitását az alábbi tétel adja meg.

2. Tétel. *A betegségmentes egyensúlyi állapot pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha az alábbi egyenlőtlenség teljesül,*

$$\omega_{SI}>\tau\left(q(N-1)\frac{\alpha_{SS}}{\rho_{SS}}+N\frac{\alpha_{SI}}{\gamma}\right)-\gamma-\alpha_{SI}.$$

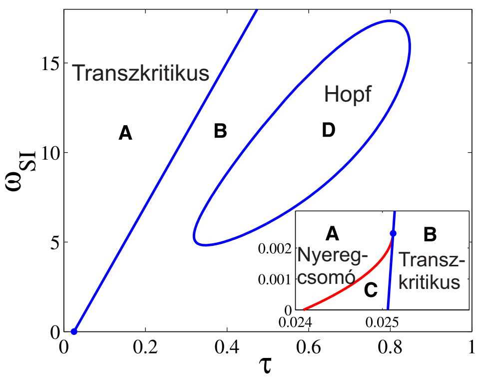
Továbbá a (19) egyenes mentén a (τ,ω_{SI}) paraméter síkban transzkritikus bifurkáció van.

Endemikus egyensúlyi állapotok esetén, azaz amikor nem hal ki a járványterjedés a Jacobi mátrixot numerikusan vizsgáljuk. Megmutattuk, hogy létrejöhet Hopf bifurkáció és szemi-numerikus módon meghatároztuk azon pontok halmazát, ahol ez bekövetkezhet. Azt mondjuk, hogy egy adott (τ,ω_{SI}) pár rajta van a Hopf görbén, ha létezik olyan egyensúlyi pont ahol a Jacobi mátrixnak van két nulla valósrészű sajátértéke. Mivel ez csak szükséges feltétele a Hopf bifurkációnak, ezért numerikusan megoldjuk a differenciálegyenletet, hogy eldönthessük a bifurkációról, hogy szub- vagy szuperkritikus. A teljes bifurkációs kép a 3a. ábrán látható, illetve a 3b. ábra mutatja a négy lehetséges viselkedést.

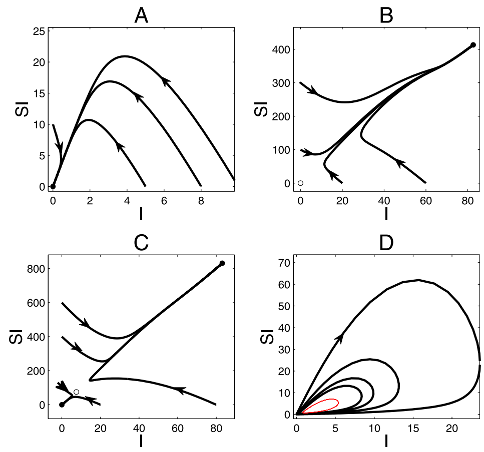
3.2. Az $\alpha_{SI}=\alpha_{II}=\omega_{SS}=\omega_{II}=0$ eset vizsgálata, ha $n(t)$ időfüggő

A továbbiakban a [13] cikkünk eredményeit ismertetjük röviden. Alkalmazva az 1. Állítást a betegségmentes egyensúly koordinátái az alábbiak,

$$I=0,\quad [SI]=0,\quad [II]=0,\quad [SS]=\frac{\alpha_{SS}N(N-1)}{\alpha_{SS}}=N(N-1). \tag{20}$$



(a) A három bifurkációs görbe.



(b) A négy lehetséges viselkedés az (I, SI) fázissíkon.

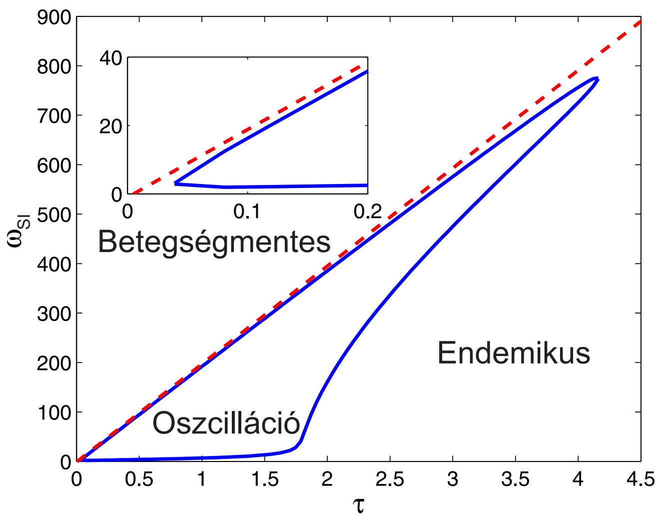
3. ábra. Bifurkációs görbék, illetve a négy lehetséges viselkedést ábrázoló fázisképek. A paraméterek $N = 100, n = 10, \alpha_{SI} = 0.005, \alpha_{SS} = 0.004, \omega_{SS} = 0.005, \gamma = 1$.

A Jacobi mátrix vizsgálatából adódik, hogy a transzkritikus bifurkáció az alábbi egyenesen megy végbe,

$$\omega_{SI} = \tau(N-2) - \gamma.$$

2. Állítás. *A betegségmentes egyensúlyi állapot pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha* $\omega_{SI} > \tau(N-2) - \gamma$ *teljesül.*

Az endemikus egyensúlyi állapotokat csak numerikusan vizsgáljuk, mely során megmutatjuk a Hopf bifurkáció létezését. A teljes bifurkációs kép a 4. ábrán látható.



4. ábra. A közelítő pairwise modellhez tartozó bifurkációs ábra. A paraméterek $N = 200$, $\gamma = 1$ és $\alpha_{SS} = 0.04$. A szaggatott vonal jelöli a transzkritikus bifurkáció egyenesét, illetve a zárt görbe határán Hopf bifurkáció jön létre.

3.3. Az éltípus-független SIS modell dinamikája, ha $n(t)$ időfüggő

A [12] tanulmányunkban egy olyan paraméter esetet vizsgáltunk, ahol az élek létrehozása, illetve megszüntetése a csúcsok típusától függetlenül történik. Más szóval a paramétereket az alábbi módon választjuk,

$$\alpha_{SS} = \alpha_{SI} = \alpha_{II} = \alpha, \quad \omega_{SS} = \omega_{SI} = \omega_{II} = \omega. \tag{21}$$

Megmutatjuk, hogy ebben az esetben a pairwise modellben nem jöhet létre oszcilláció. Ezt [7]-ben sejtésként már a szerzők megfogalmazták, azonban tudomásunk szerint a mi munkánk [12] adta meg az első precíz matematikai bizonyítást. Alkalmazva a (21) összefüggéseket a pairwise egyenletekre, az alábbi rendszert kapjuk,

$$[\dot{I}] = \tau[SI] - \gamma[I], \tag{22}$$

$$[\dot{SI}] = \gamma([II] - [SI]) + \tau\frac{n-1}{n}\frac{[SI]([SS] - [SI])}{[S]} - \tau[SI] + \alpha([S][I] - [SI]) - \omega[SI], \tag{23}$$

$$[\dot{II}] = -2\gamma[II] + 2\tau\frac{n-1}{n}\frac{[SI]^2}{[S]} + 2\tau[SI] + \alpha([I]([I]-1) - [II]) - \omega[II], \tag{24}$$

$$[\dot{SS}] = 2\gamma[SI] - 2\tau\frac{n-1}{n}\frac{[SI][SS]}{[S]} + \alpha([S]([S]-1) - [SS]) - \omega[SS]. \tag{25}$$

Felhasználva az 1. Állítást, a betegségmentes egyensúly koordinátái az alábbiak,

$$[I] = 0, [SI] = 0, [II] = 0, [SS] = \frac{\alpha N(N-1)}{\alpha + \omega}. \tag{26}$$

A továbbiakban definiálunk egy kétdimenziós sokaságot, majd ezen tekintjük a fenti pairwise rendszert. A következő állítás megadja az átlagos fokszámot az egyensúlyi pontokban.

3. Állítás. *Jelölje $E(t)$ az élek számát a t időpillanatban, azaz $E(t) = [SS](t) + 2[SI](t) + [II](t)$. Bármely egyensúlyi pontban az átlagos fokszám,*

$$k = \frac{\alpha(N-1)}{\alpha + \omega}. \tag{27}$$

Továbbá, $E(t) = (E(0) - kN)e^{-(\alpha+\omega)t} + kN$, azaz ha $E(0) = kN$, akkor $E(t) = kN$ minden t esetén.

Általános esetben k különbözik az S típusú csúcsok átlagos fokszámától n-től, de ha $E(0) = kN$, akkor ezen két mennyiség egybeesik, ahogy az alábbi tétel is mutatja.

4. Állítás. *Tegyük fel, hogy $E(0) = kN$, ahol k-t a (27) formulával definiáljuk, és tegyük fel, hogy $[SS](0) + [SI](0) = k[S](0)$. Ekkor a (22)-(25) rendszer megoldásaira teljesülnek az alábbi egyenlőségek,*

$$[SS] + [SI] = k[S], \quad [SI] + [II] = k[I]. \tag{28}$$

Összefoglalva a 3., illetve 4. állításokat, a következő tétel adódik.

3. Tétel. *A négydimenziós (22)-(25) rendszernek létezik egy kétdimenziós sokasága(egy sík), melyet az alábbi egyenletek határoznak meg,*

$$[SS] + 2[SI] + [II] = kN, \quad [SS] + [SI] = k[S]. \tag{29}$$

Alkalmazva a (29)-beli összefüggéseket a (22)-(25) rendszerre, a következő kétdimenziós egyenletrendszert kapjuk,

$$\dot{[S]} = \gamma N - (\gamma + k\tau)[S] + \tau[SS], \tag{30}$$

$$\dot{[SS]} = 2(k[S] - [SS])\Big(\gamma - \frac{\tau(k-1)[SS]}{k[S]}\Big) + \alpha[S]([S]-1) - (\alpha+\omega)[SS]. \tag{31}$$

Ezután a nullklínák grafikus tulajdonságait felhasználva meghatároztuk a rendszerhez tartozó iránymezőt. Az ehhez tartozó eredményeket a következő tétel foglalja össze.

4. Tétel. *A (30)-(31) rendszerben az alábbi τ_c paraméterértéknél transzkritikus bifurkáció van,*

$$\tau_c = \frac{\gamma(2\gamma + \alpha + \omega)}{\alpha N + 2\gamma(k-1)} \tag{32}$$

- *Ha $\tau < \tau_c$, akkor nincs endemikus egyensúlyi pont és a betegségmentes egyensúly globálisan stabil.*
- *Ha $\tau > \tau_c$, akkor az endemikus egyensúlyi pont globálisan stabil és a betegségmentes egyensúly instabil.*

Az eredeti (22)-(25) egyenletrendszer megörökli a sokaságon tekintett (30)-(31) rendszer főbb tulajdonságait. Legyen $A(t) = [SI](t) + [SS](t) - k[S](t)$ és most ne tegyük fel, hogy $E(0) = kN$, ekkor a következő rendszert kapjuk,

$$\dot{[S]} = \gamma N - (\gamma + k\tau)[S] + \tau[SS] - \tau A(t), \tag{33}$$

$$\dot{[SS]} = 2(A(t) + k[S] - [SS])\Big(\gamma - \frac{\tau(n(t)-1)[SS]}{n(t)[S]}\Big) + \alpha[S]([S]-1) - (\alpha+\omega)[SS]. \tag{34}$$

Ezután megmutatjuk, hogy a (33)-(34) rendszer aszimptotikusan autonóm. Ismert, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén az ilyen típusú rendszerek megoldásai az autonóm (határérték) egyenlet egyensúlyi pontjaihoz konvergálnak [15]. Felhasználva [15] eredményeit, a (22)-(25) rendszer a következő módon jellemezhető.

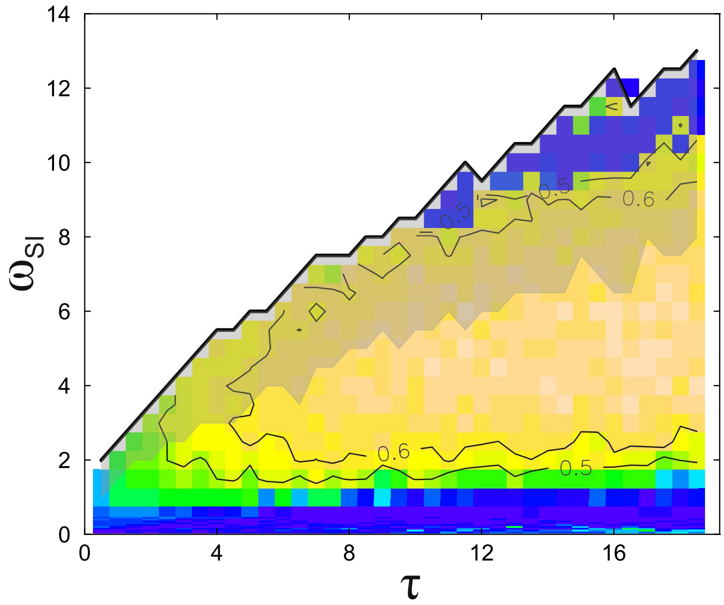
5. Tétel. *A (33)-(34) rendszerben a τ_c paraméterértéknél transzkritikus bifurkáció van, ahol τ_c-t a* (32) *formula adja meg.*

- *Ha $\tau < \tau_c$, akkor nincs endemikus egyensúlyi pont és a betegségmentes egyensúly globálisan stabil.*
- *Ha $\tau > \tau_c$, akkor az endemikus egyensúlyi pont globálisan stabil és a betegségmentes egyensúly instabil.*

4. Szimulációk elemzése az $\alpha_{SI} = \alpha_{II} = \omega_{SS} = \omega_{II} = 0$ esetben

Jelen fejezetben megvizsgáljuk, hogy hogyan viszonyulnak egymáshoz a szimulációs eredmények, illetve a pairwise modell. A szimulációk azt mutatják, hogy a rendszerben a pairwise modellben is tapasztalt háromféle viselkedés lehetséges. A trajektóriák bifurkációinak meghatározásához empirikus definíciókat alkalmaztunk. Eredményeinket az 5. ábrán látható bifurkációs kép foglalja össze.

Az ábrán bifurkációs görbéket láthatunk és a három különböző viselkedéshez tartozó tartományt. Az oszcilláló trajektóriák meghatározásához frekvencia elemzést használtunk.



5. ábra. Szimulációs eredmények bifurkációs ábrája a (τ, ω_{SI}) paraméter síkon. A paraméterek $N = 200$, $\gamma = 1$,$\alpha_{SS} = 0.04$.

Két lehetséges határvonalat ábrázoltunk, ahol az úgynevezett 'peak' vagy csúcs frekvenciák értéke legalább 0.5, illetve 0.6. A legnagyobb érték 0.75, narancs színnel jelölve és a közel nulla frekvenciákat sötétkékkel jelöltük. Ezen határvonalak a pairwise modell kvalitatív tulajdonságait visszaadják. A betegségmentes tartományra szintén két lehetséges határvonalat ábrázoltunk. A vastag fekete vonal határolja azon ω_{SI} értékeket, melyek felett minden esetben megszűnt a járványterjedés. Az alsó, szürkével jelölt terület alatti részen pedig sosem történt megszűnés. Ha összehasonlítjuk a szimulációkból nyert bifurkációs ábrát (5.) a pairwise modell bifurkációs ábrájával (4.), akkor látható, hogy a főbb tulajdonságokban nincs különbség, de részleteiben eltérőek az ábrák.

Az oszcillációk létrejötte a fertőzöttek várható értékének $[I]$ és a hálózat átlagos fokszámának k időben késleltetett változásával magyarázható. Ezen mennyiségek változásának sebességét a következő négy folyamat befolyásolja: **A:** Fertőzés $\tau[SI]$ rátával, **B:** Az I csúcsok gyógyulása $\gamma[I]$ rátával, **C:** SS élek létrehozása $\alpha_{SS}([S]([S]-1)-[SS])$ rátával, **D:** SI élek törlése $\omega_{SI}[SI]$ rátával. Az oszcilláció a következő négy fázis egymás után történő végbemenésével jön létre:

1. $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, $\mathbf{C} > \mathbf{D}$: $[I]$ növekszik, k növekszik,
2. $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, $\mathbf{C} < \mathbf{D}$: $[I]$ növekszik, k csökken,
3. $\mathbf{A} < \mathbf{B}$, $\mathbf{C} < \mathbf{D}$: $[I]$ csökken, k csökken,
4. $\mathbf{A} < \mathbf{B}$, $\mathbf{C} > \mathbf{D}$, $[I]$ csökken, k növekszik.

Ezután a rendszer mindig ezen szakaszokat járja be ciklikusan.

Hivatkozások

[1] Gross, T., Blasius, B., Adaptive coevolutionary networks: a review, *J. Roy. Soc. Interface*, **5** (2008), 259-271. 1

[2] Gross, T., Dommar D'Lima, C.J., Blasius, B., Epidemic dynamics on an adaptive network, *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006), 208701. 4

[3] House, T., Keeling, M.J., Insights from unifying modern approximations to infections on networks, *J. Roy. Soc. Interface*, **8** (2011), 67-73. 1

[4] Juher, D., Ripoll, J., Saldaña, J., Outbreak analysis of an SIS epidemic model with rewiring, *J. Math. Biol.*, **67** (2013), 411-432. 1

[5] Keeling, M.J., The effects of local spatial structure on epidemiological invasions, *Proc. R. Soc. Lond. B*, **266** (1999) ,859-867. 1

[6] Keeling, M.J., Rohani, P., Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals, *Princeton University Press* (2007) 1

[7] Kiss., I.Z., Berthouze, L., Taylor, T.J., Simon, P.L., Modelling approaches for simple dynamic networks and applications to disease transmission models, *Proc. R. Soc. A.*, **468** (2141), (2012), 1332-1355. 1, 7

[8] Marceau, V., Noël, P.A., Hébert-Dufresne. L., Allard. A., Dubé, L.J., Adaptive networks: coevolution of disease and topology, *Phys. Rev. E*, **82** (2010), 036116. 1

[9] Nagy, N., Simon P.L., Monte-Carlo simulation and analytic approximation of epidemic processes on large networks, *Cent. Eur. J. Math.*, **11** (2013), 800-815. 2

1645-1664

[10] Simon, P.L., Farkas, H., Wittmann, M., Constructing global bifurcation diagrams by the parametric representation method, *J. Comp. Appl. Math.*, **108** (1999), 157-176. 4

[11] Szabó, A., Simon, P.L., Kiss, I.Z., Detailed study of bifurcations in an epidemic model on a dynamic network, *Differ. Equ. Appl.*, **4** (2012), 277-296. 2, 4

[12] Szabó-Solticzky, A., Dynamics of a link-type independent adaptive epidemic model (2016) 2, 4, 7

[13] Szabó-Solticzky, A., Berthouze, L., Kiss, I.Z., Simon, P.L., Oscillating epidemics in a dynamic network model: stochastic and mean-field analysis, *Journal of Math. Biol.* (2016) DOI 10.1007/s00285-015-0902-3 2, 4, 5

[14] Szabó-Solticzky, A., Simon, P.L., The effect of graph structure on epidemic spread in a class of modified cycle graphs, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **9** (2014), 89-107. 2

[15] Thieme, H.R., Asymptotically autonomous differential equations in the plane, *Rocky Mountain J. Math.*, **24** (1994), 351-380. 8