

# La correction d'erreur pour les anyons non abéliens

par

Guillaume Dauphinais

Thèse présentée au département de physique  
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)

FACULTÉ des SCIENCES  
UNIVERSITÉ de SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 5 avril 2017

Le 5 avril 2017

*le jury a accepté la thèse de Monsieur Guillaume Dauphinais dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur David Poulin  
Directeur de recherche  
Département de physique

Professeur Bertrand Reulet  
Membre interne  
Département de physique

Professeur Barbara Terhal  
Membre externe  
Département de physique  
RWTH Aachen University

Professeur Alexandre Blais  
Président rapporteur  
Département de physique

À Freya et Fabiola

# Sommaire

Bien que le calcul quantique topologique soit tolérant aux fautes de manière intrinsèque à température nulle, cette protection topologique est perdue à toute température plus élevée. L'utilisation de méthodes servant à contrecarrer les effets délétères des excitations thermiques sera donc nécessaire pour construire un ordinateur quantique basé sur ces principes. Dans cette thèse, nous développons des outils de simulation numérique permettant l'analyse de systèmes donnant lieu à des anyons d'Ising. Nous présentons également une méthode de correction d'erreur pouvant être appliquée pour tout modèle anyonique non cyclique, abélien ou non. Cette procédure est fondée sur les travaux de Gács [1] et de Harrington [2] et est basée sur l'utilisation d'automates cellulaires. Une analyse détaillée démontre l'existence d'un taux de création d'excitations critique en deçà duquel l'information peut être protégée. Des simulations numériques permettent d'estimer ce dernier entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$ .

## Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier mon superviseur, David Poulin. Sans invitation à rejoindre son groupe, je n'aurais sans doute jamais entrepris d'études doctorales. Son support m'a permis d'apprendre énormément, et en particulier quant à la manière de communiquer en science, un aspect qui me donne beaucoup de fil à retordre. Son savoir encyclopédique est une inspiration à continuer d'approfondir mes connaissances dans les divers domaines de la physique.

Je me dois également de remercier les membres du groupe de David, présents et passés, que j'ai eu la chance de côtoyer au cours de ces dernières années. Toujours disposés à échanger sur les différents aspects de leurs travaux et à faire part de leur expertise, ils ont su créer un environnement propice à la recherche et un milieu de vie agréable. Je veux donc remercier, sans ordre particulier, Pavithran Iyer Sridharan, Andrew Darmawan, Nicolas Delfosse, Anirudh Krishna, Jessica Lemieux, Benjamin Bourassa, Jonas Tyler Anderson, Andrew Ferris, Guillaume Duclos-Cianci, Olivier Landon-Cardinal, Winton Brown, Chen-Fu Chiang, Marc-Olivier Proulx et Thomas Gobeil. Je présente mes plus sincères excuses à tous ceux que j'aurais pu oublier.

Merci à Fabiola, ma femme, de m'avoir épaulé durant toutes ces années, particulièrement depuis la naissance de notre fille. Je n'ai pas été aussi présent que j'aurais dû l'être.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Sommaire</b>   | <b>ii</b> |
| <b>1 Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Les anyons . . . . .  | 1         |
| 1.1.1 Les anyons abéliens et non abéliens . . . . .                             | 3         |
| 1.2 Calcul quantique et anyons non abéliens . . . . .                           | 5         |
| 1.3 La correction d’erreur pour les anyons non abéliens . . . . .               | 7         |
| 1.3.1 La nécessité de la correction d’erreur . . . . .                          | 7         |
| 1.3.2 La correction d’erreur pour les anyons non abéliens . . . . .             | 8         |
| 1.4 Résumé de la thèse . . . . .  | 10        |
| <b>2 Introduction aux anyons non abéliens</b>                                   | <b>12</b> |
| 2.1 Éléments de base de la théorie algébrique des anyons . . . . .              | 12        |
| 2.2 Les anyons non cycliques . . . . .  | 17        |
| 2.3 Données de base pour les anyons d’Ising . . . . .                           | 18        |
| 2.4 Représentation de l’espace de fusion des anyons d’Ising en termes de qubits | 20        |
| 2.4.1 Calcul topologique pour les anyons d’Ising . . . . .                      | 25        |
| 2.5 Simulation numérique d’un gaz d’anyons d’Ising . . . . .                    | 27        |
| 2.5.1 Les processus topologiques élémentaires . . . . .                         | 27        |
| 2.5.2 Simulation sur un graphe planaire . . . . .                               | 28        |
| 2.5.3 La séquence de tresses linéarisée . . . . .                               | 30        |
| 2.5.4 Simulation sur un graphe non-planaire . . . . .                           | 32        |
| <b>3 La correction d’erreur pour le code topologique d’Ising</b>                | <b>38</b> |
| 3.1 Le code topologique d’Ising . . . . .                                       | 38        |
| 3.2 Méthodes d’échantillonnage . . . . .  | 39        |
| 3.2.1 L’échantillonnage à taux fixe . . . . .                                   | 39        |
| 3.2.2 L’échantillonnage de Métropolis . . . . .                                 | 40        |
| 3.3 La correction d’erreurs pour le code topologique d’Ising . . . . .          | 44        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3.1    | La détermination du seuil du code topologique d'Ising . . . . .                            | 44         |
| 3.3.2    | L'algorithme d'appariement optimal (AAO) . . . . .   | 45         |
| 3.4      | Résultats numériques . . . . .   | 48         |
| <b>4</b> | <b>Correction d'erreur tolérante aux fautes pour les anyons non abéliens</b>               | <b>51</b>  |
| 4.1      | Classification du bruit . . . . .  | 53         |
| 4.1.1    | Définitions de base . . . . .  | 54         |
| 4.1.2    | Le bruit de niveau 0 . . . . .   | 54         |
| 4.1.3    | Le bruit de niveau $n$ . . . . .   | 54         |
| 4.1.4    | Le taux d'erreur renormalisé $\epsilon_n$ . . . . .  | 55         |
| 4.1.5    | Exemple de classification des erreurs . . . . .  | 57         |
| 4.2      | La procédure de correction d'erreur . . . . .  | 60         |
| 4.2.1    | Les automates cellulaires . . . . .  | 60         |
| 4.2.2    | L'idée générale de l'algorithme . . . . .  | 61         |
| 4.2.3    | Description sommaire de la procédure . . . . .   | 63         |
| 4.2.4    | Description qualitative des règles de transition . . . . .                                 | 66         |
| 4.3      | Simulations numériques pour les anyons d'Ising . . . . .                                   | 68         |
| <b>5</b> | <b>Analyse de l'algorithme tolérant aux fautes</b>   | <b>72</b>  |
| 5.1      | Concepts de base pour la correction d'erreur des anyons non abéliens . . . . .             | 74         |
| 5.1.1    | L'évolution d'état . . . . .   | 75         |
| 5.1.2    | Les régions causales . . . . .   | 77         |
| 5.1.3    | Les trajectoires . . . . .   | 80         |
| 5.1.4    | Les syndromes renormalisés . . . . .   | 83         |
| 5.2      | Survol du processus de correction d'un amas causalement lié . . . . .                      | 85         |
| 5.3      | Propriétés importantes de l'algorithme . . . . .   | 89         |
| 5.4      | Les conséquences de la $k$ -localité, de la $k$ -fidélité et de la $k$ -réussite . . . . . | 91         |
| 5.5      | Discussion . . . . .   | 94         |
| <b>6</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>96</b>  |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>98</b>  |
| <b>A</b> | <b>Copie de l'article «Fault-Tolerant Error Correction for Non-Abelian Anyons»</b>         | <b>102</b> |

# Liste des tableaux

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Représentation symplectique d'un état quantique . . . . .                  | 24 |
| 2.2 | Décomposition de la représentation des générateurs du groupe de tresse . . | 25 |
| 3.1 | Processus élémentaires de la dynamique des anyons . . . . .                | 40 |
| 3.2 | Matrice de transition pour l'échantillonnage de Metropolis . . . . .       | 42 |

# Table des figures

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Calcul quantique topologique . . . . .  | 5  |
| 1.2 | L'état de fusion d'anyons et la topologie de leurs lignes d'univers . . . . .                                 | 6  |
| 1.3 | La perturbation d'un calcul quantique topologique par des processus thermiques . . . . .                      | 8  |
| 1.4 | Anyons de différentes erreurs en interaction . . . . .  | 10 |
| 2.1 | Graphes associés à quelques modèles anyoniques . . . . .  | 18 |
| 2.2 | Application de portes logiques en tressant des anyons d'Ising . . . . .                                       | 26 |
| 2.3 | Séquence de tresses linéarisée pour un graphe planaire. . . . .   | 31 |
| 2.4 | Séquence de tresses linéarisée pour un graphe non planaire . . . . .  | 33 |
| 2.5 | Boucles homologiquement non triviales sur un graphe non planaire . . . . .                                    | 34 |
| 3.1 | Impact du processus de décohérence sur les anyons d'Ising . . . . .   | 43 |
| 3.2 | Construction du graphe $K_q$ associé à une configuration d'anyons . . . . .                                   | 46 |
| 3.3 | Détermination d'une opération de correction par l'algorithme d'appariement optimal . . . . .                  | 47 |
| 3.4 | Taux d'erreur logique en fonction du temps de simulation $t_{sim}$ pour le code topologique d'Ising . . . . . | 48 |
| 3.5 | Temps de mémoire en fonction de l'inverse de la température pour le code topologique d'Ising . . . . .        | 49 |
| 4.1 | Classification des erreurs individuelles en erreurs potentielles de niveau 0 . . . . .                        | 57 |
| 4.2 | Identification des véritables erreurs de niveau 0 . . . . .   | 58 |
| 4.3 | Identification des véritables erreurs de niveau 1 . . . . .   | 59 |
| 4.4 | Identification des véritables erreurs de niveau 2 . . . . .   | 60 |
| 4.5 | Structure de base d'une colonie . . . . .   | 64 |
| 4.6 | Organisation d'un groupe de $Q \times Q$ colonies en «colonie renormalisée» . . . . .                         | 65 |
| 4.7 | Simulations numériques pour l'algorithme tolérant aux fautes . . . . .  | 69 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 5.1 | Échec de l'application d'une règle de transition renormalisée . . . . . | 88 |
|-----|---|----|

## Chapitre 1

# Introduction

### 1.1 Les anyons

---

La statistique d'échange en mécanique quantique est un concept ayant des répercussions fondamentales en physique. Dans notre monde à 3 dimensions spatiales, les particules élémentaires peuvent se classer en deux catégories distinctes, appelées bosons et fermions. Alors que la fonction d'onde est symétrique sous l'échange de deux bosons identiques, elle est antisymétrique dans le cas des fermions. Cette dernière propriété a de nombreuses conséquences physiques. Par exemple, les phénomènes de condensation de Bose-Einstein, de superfluidité ou encore de supraconductivité découlent directement du fait que les constituants microscopiques de systèmes se comportent comme des bosons. La nature fermionique des électrons est entre autres choses nécessaire à la formation des atomes et des molécules, donne lieu à la structure de bande des semi-conducteurs et est à la base de plusieurs propriétés des matériaux, telle que la déformation due à l'application d'une force.

Les particules sont limitées à être des bosons ou des fermions en 3 dimension puisque d'effectuer un double échange adiabatique de deux particules est équivalent à encercler l'une avec l'autre. Or, en 3 dimensions, il est toujours possible de transformer continûment une telle trajectoire en un point, ce qui revient à ne faire aucun déplacement. On ne peut donc pas affirmer de façon non ambiguë si une particule en encercle une autre en 3 dimensions spatiales puisque l'enroulement dépend du point de vue de l'observateur. On en conclut qu'après une transformation de ce type, la fonction d'onde ne peut être modifiée que par une phase de  $\pm 1$ , pour les bosons et les fermions respectivement.

L'enroulement de deux particules acquiert toutefois un sens objectif en 2 dimensions spatiales. Ainsi, la possibilité du point de vue théorique de l'existence de particules obéissant à une statistique d'échange beaucoup plus riche a été pour la première fois vers la fin des années 70 [3, 4, 5, 6]. La différence fondamentale en 2 dimensions est le fait que le trajet d'une particule encerclant une autre ne peut pas être déformé en un point sans passer à travers celle qui reste immobile, permettant à cette transformation de modifier la fonction d'onde d'une manière beaucoup plus riche.

Afin de comprendre un peu mieux les conséquences d'une telle statistique d'échange, considérons un ensemble de  $N$  particules, et concentrons-nous sur les transformations interchangeant leurs positions. Notons que ces dernières n'ont pas besoin d'être toutes identiques, il peut y avoir différents types de particules indiscernables. Afin de simplifier la situation, nous imaginons qu'elles sont toutes disposées sur une ligne. Comme l'échange de particules implique qu'il y a évolution temporelle, nous nous intéressons à leurs trajectoires dans l'espace-temps dans des espaces  $3 + 1$  dimensionnels (3 dimensions spatiales et 1 de temps) et  $2 + 1$  dimensionnels.

Dans le cas à  $3 + 1$  dimensions, nous notons tout d'abord qu'il n'y a pas de différence entre l'échange de positions de particules de manière horaire ou antihoraire (en laissant une coordonnée fixe), puisqu'il est toujours possible de continûment transformer une trajectoire vers une autre (dans l'espace à 4 dimensions au total) [7]. L'échange des deux particules voisines  $i$  et  $i + 1$  est dénoté par  $s_{i,i+1}$  et correspond à leur permutation, puisque  $s_{i,i+1}^2 = s_{i,i+1} s_{i,i+1}^{-1} = \mathbb{1}$ . Dans le cas général à  $N$  particules, nous avons donc leur échange est décrit par le groupe des permutations de  $N$  objets,  $S_N$ . Or, en effectuant une permutation  $s \in S_N$  à deux reprises, nous revenons à l'état original, comme  $s^2 = \mathbb{1}$ . La fonction d'onde du système ne peut donc faire autrement que d'acquérir une phase de  $\pm 1$ . Notons par ailleurs que  $S_N$  est un groupe fini contenant  $N!$  éléments.

Pour ce qui est du cas à  $2 + 1$  dimensions, il est impossible de continûment déformer la trajectoire de particules effectuant un échange de positions dans le sens horaire vers celle d'un échange dans le sens antihoraire. L'échange de deux particules voisines  $b_{i,i+1}$  dans le sens horaire est différent de celui de ces mêmes particules dans le sens antihoraire,  $b_{i,i+1}^{-1}$ . Nous trouvons donc que  $b_{i,i+1}^2 \neq \mathbb{1}$ , contrastant avec le cas à 3 dimensions spatiales. Les échanges effectués sur un système à  $N$  particules est décrit par le groupe des tresses de  $N$  objets,  $B_N$ . Contrairement au groupe des permutations,  $b^2 \neq \mathbb{1}$  en général, où  $b \in B_N$ . Le groupe des tresses est en fait d'ordre infini, et offre par conséquent des possibilités de statistique d'échange beaucoup plus riches que dans le cas du groupe des permutations.

### 1.1.1 Les anyons abéliens et non abéliens

Le groupe des tresses est insuffisant pour décrire l'évolution d'un système d'anyons. Chaque anyon possède un nombre quantique, appelé charge topologique. Étant donné un ensemble de particules, il est possible de physiquement rapprocher deux d'entre elles ayant des nombres quantiques bien définis afin de les combiner, tout en gardant les autres éloignées ; il s'agit du processus de fusion. La fusion de particules de charge  $a$  et  $b$  pour donner un objet composite de charge  $c$  de manière déterministe est dénoté par  $\phi_a \times \phi_b = \phi_c$ , où  $\phi_x$  représente une particule de charge  $x$ . La situation peut cependant être plus compliquée. Comme dans le cas de la mécanique quantique familière, deux particules ayant des nombres quantiques bien définis peuvent se combiner de plusieurs manières différentes (ayant des nombres quantiques différents). Par exemple, deux particules de spin  $\frac{1}{2}$  peuvent former un objet composite de spin 0 ou de spin 1 (*c.-à-d.* les états triplets et singulet). Les diverses possibilités sont appelées les canaux de fusions, et sont dénotés par les *règles de fusions* :

$$\phi_a \times \phi_b = \sum_c N_{ab}^c \phi_c, \quad (1.1)$$

avec  $N_{ab}^c$  des entiers naturels dénotant la dégénérescence d'un canal de fusion. Cette équation représente la fusion d'une particule de charge (nombre quantique)  $a$  avec une particule de charge  $b$  et dont la charge totale (la charge de l'objet combiné) peut être  $c$  si  $N_{ab}^c > 0$ . Si cette dernière condition est remplie, cette équation représente également un processus de fission : une particule de charge  $c$  peut se scinder en deux particules de charges  $a$  et  $b$ . Notons que les processus de fusion et de fission sont conjugués l'un de l'autre.

Si pour toute paire de particules de charges  $a$  et  $b$ , il existe une unique charge  $c$  telle que  $N_{ab}^c \neq 0$ , alors les anyons sont appelés abéliens. Si ce n'est pas le cas, ils sont non abéliens.

Un espace de Hilbert est associé à un système où  $N$  anyons sont disposés à des positions fixes. L'effet d'échanger deux particules dans l'espace de Hilbert est donné par une représentation du groupe de tresses sur cet espace. En particulier, l'échange des particules  $i$  et  $j$  de manière horaire effectue la transformation

$$\psi_\alpha \rightarrow [\rho(b_{i,j})]_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (1.2)$$

où  $\{\psi_\alpha\}$  est une base orthonormale de l'espace de Hilbert considéré, et où  $\rho(b_{i,j})$  est une matrice unitaire représentant une transformation dans l'espace de Hilbert associée à la tresse  $b_{i,j}$ .

Si les anyons sont abéliens, alors l'espace de Hilbert est de dimension 1. La représentation des tresses est donc elle aussi unidimensionnelle et est donnée par un facteur de phase  $e^{i\phi}$ , généralisant le cas des bosons (phase de  $+1 = e^{i0}$ ) et des fermions (phase de  $-1 = e^{i\pi}$ ). Par contre, si les anyons sont non abéliens, alors l'espace de Hilbert est de dimension plus grande que 1 et la représentation des tresses est également de dimension plus élevée. Notons que si  $b$  et  $b'$ , toutes deux éléments de  $B_N$ , sont telles que  $bb' \neq b'b$ , alors en général  $[\rho(b)] [\rho(b')] \neq [\rho(b')] [\rho(b)]$ . Effectuer une opération de tresse revient en général à appliquer une rotation non triviale dans l'espace de Hilbert.

Dans la discussion précédente, nous avons négligé les interactions possibles entre les particules, et nous nous sommes concentrés sur les effets purement topologiques. Dans le cas où les particules auraient des interactions à courte portée, cette description tient la route dans la mesure où les particules sont constamment éloignées les unes des autres. Dans ce cas, l'évolution de la fonction d'onde sera insensible à ces interactions et sera, en très bonne approximation, uniquement déterminée par la topologie des trajectoires.

## 1.2 Calcul quantique et anyons non abéliens

Une des raisons expliquant l'intérêt porté aux anyons non abéliens est leur potentiel quant à être utilisé comme support pour le calcul quantique [8], appelé calcul quantique topologique et illustré par la figure 1.1. L'idée est de tirer profit de certains systèmes physiques bidimensionnels donnant lieu à des excitations qui se comportent comme des anyons non abéliens. Ces excitations sont bien localisées dans l'espace réel et interagissent uniquement à courte portée.

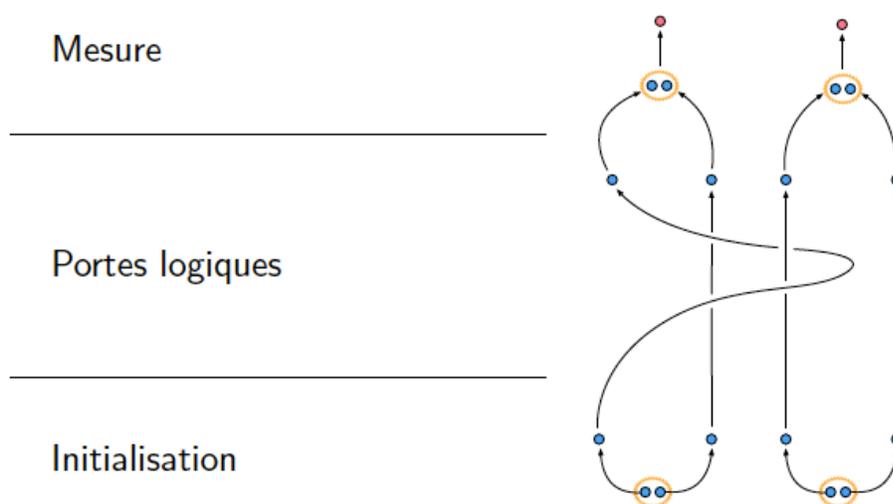


FIGURE 1.1 – Illustration simpliste de l'idée derrière le calcul quantique topologique. Lors de l'étape d'initialisation, des anyons (cercles bleus) sont créés à partir du vide, représentés par les bulles rouges. L'état de qubits est encodé dans l'espace de fusion des paires d'anyons. Les portes logiques sont par la suite appliquées en tressant les trajectoires dans l'espace-temps des anyons, montrés par les lignes noires. Les anyons sont ensuite fusionnés et les différentes charges topologiques résultantes (indiquées par des cercles rouges) sont observées.

L'espace de Hilbert dégénéré associé aux différents canaux de fusion est utilisé afin d'encoder l'état de qubits. L'initialisation du calcul quantique peut être effectuée en créant des paires de particules/antiparticules à partir du vide (l'état fondamental du système, caractérisé par l'absence d'excitations). Ceci nous permet de préparer un état connu. Les opérations agissant de façon non triviale sur cet espace de Hilbert sont effectuées en tressant les anyons, appliquant par le fait même des opérations logiques sur les qubits encodés. La mesure de l'état des qubits encodé dans l'espace de fusion des anyons est par la suite obtenue en rapprochant les paires d'anyons et en mesurant la charge topologique résultante.

Le calcul quantique effectué à l'aide d'anyons non abéliens est naturellement robuste au niveau physique. Dans ce modèle, l'information n'est pas encodée dans des qubits locaux, mais dans l'espace de fusion d'un ensemble d'anyons. L'évolution du système obtenu par des opérations de tressage ne dépend pas des détails de la trajectoire dans l'espace-temps des anyons, mais seulement de la topologie des tresses ayant eu lieu, tel qu'illustré sur la figure 1.2. L'information encodée étant délocalisée, ceci amène une protection naturelle contre les erreurs causées par l'interaction avec l'environnement, qui ont en général une action locale. Une autre source de robustesse du modèle de calcul quantique topologique provient du fait que les opérations unitaires appliquées sur l'espace de fusion sont discrètes. En effet, les tresses sont effectuées entièrement ou pas du tout, elles ne peuvent pas être appliquées de manière approximative, étant caractérisées par des propriétés topologiques discrètes des trajectoires. Ceci est en contraste avec les autres systèmes couramment considérés pour servir de qubit. Par exemple, les opérations sur les qubits de spins étant effectuées en appliquant des champs électromagnétiques peuvent comporter une légère imprécision par rapport à l'opération visée, causée notamment par une fluctuation de l'intensité du champ ou de sa durée, et dont les effets s'additionnent avec les applications successives.

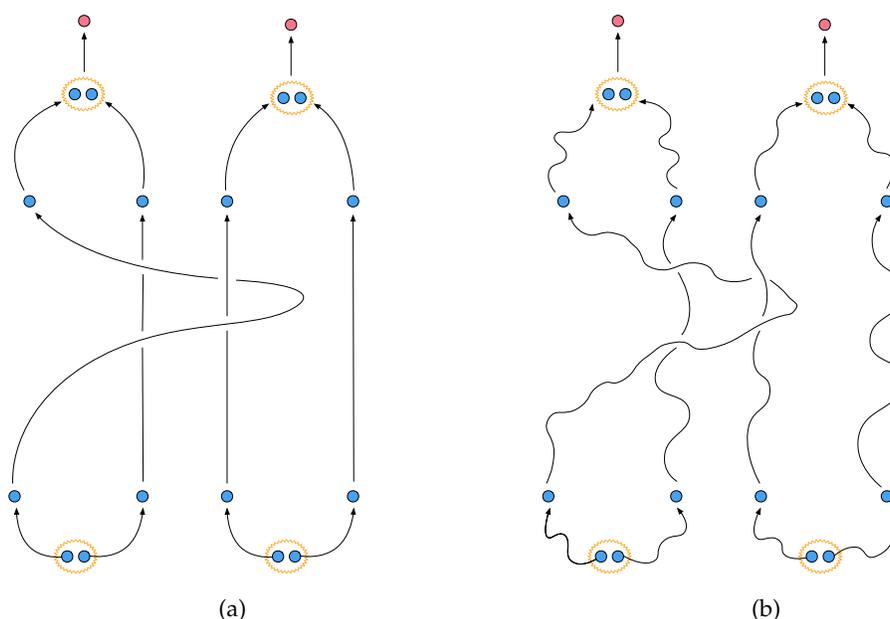


FIGURE 1.2 – L'état quantique décrivant l'espace de fusion d'un ensemble d'anyons ne dépend que de la topologie des trajectoires dans l'espace-temps des anyons. L'état après les opérations de tressages des anyons de (a) est exactement le même que celui de (b), puisque les trajectoires sont topologiquement équivalentes.

Les opérations de tressage dans certains modèles anyoniques donnent lieu à un ensemble de portes universel [9, 10], auquel cas le calcul topologique quantique est équivalent au modèle de circuit quantique.

## 1.3 La correction d'erreur pour les anyons non abéliens

---

### 1.3.1 La nécessité de la correction d'erreur

Étant donné la grande stabilité de systèmes donnant lieu à des excitations anyoniques et la robustesse face au bruit local, l'on peut se demander quels processus sont susceptibles de causer des erreurs. Évidemment, il faut être en mesure de bien suivre l'évolution des anyons, afin de s'assurer d'effectuer les opérations de tressage désirées. Ceci implique de tenir compte non seulement des anyons créés intentionnellement, mais aussi de ceux créés de manière involontaire par des processus thermiques ou encore d'excitations qui sont confinées à cause du désordre (causé par exemple par des impuretés ou une surface rugueuse). Des anyons provenant d'un processus thermique peuvent être tressés ou fusionner avec des anyons faisant partie du calcul, comme montré à la figure 1.3. Cela peut avoir pour effet de corrompre le calcul quantique visé [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

La création d'anyons étant associé à un «gap» énergétique  $\Delta$ , il est souhaitable de réduire la température le plus possible, dans le but de supprimer l'apparition des excitations thermiques. Il y aura cependant toujours une densité non nulle d'anyons thermiques présentes dans le système à une température plus élevée que 0K. En augmentant la taille du système afin de pouvoir faire du calcul quantique dans des espaces de Hilbert de plus grande dimension (correspondant à avoir un plus grand nombre de qubits), nous nous buterons inévitablement à la présence de telles excitations. Il est donc nécessaire de développer des méthodes de correction d'erreur s'appliquant aux systèmes donnant lieu à des anyons non abéliens afin de pouvoir tirer profit du calcul quantique topologique.

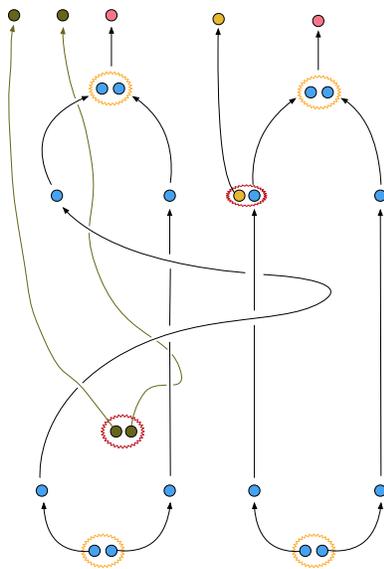


FIGURE 1.3 – La création d’anyons par les processus thermiques peut mener à l’application d’opérations non voulues impliquant les anyons encodant l’état des qubits. Une paire d’anyons thermiques (en vert) est créée. Une fois les excitations dans le système, elles peuvent diffuser et effectuer des tresses avec les anyons utilisés pour le calcul quantique, appliquant ainsi des opérations non triviales dans l’espace des états encodés. Des processus de fission (indiqué par la création d’un anyon en jaune) peuvent également survenir et influencer les anyons impliqués dans le calcul.

### 1.3.2 La correction d’erreur pour les anyons non abéliens

La correction d’erreurs dans les systèmes donnant lieu à des excitations décrites par des modèles anyoniques abéliens est intrinsèquement liée à la correction d’erreur des codes topologique. Cette dernière a été étudiée de manière extensive dans le contexte du code torique, un sujet de recherche toujours actif [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Dans ce contexte, il est possible de modéliser les différents processus thermiques pouvant affecter le système de manière phénoménologique en utilisant un taux de création et un taux de diffusion pour les excitations donné. Le système est périodiquement mesuré afin d’y détecter la présence et la position des excitations. Un algorithme de décodage est par la suite utilisé dans le but de déterminer une opération de correction qui a pour but d’apparier des groupes d’anyons, avec l’espoir que les excitations de chaque groupe s’annihilent. Cette opération est choisie de manière à minimiser la probabilité qu’une opération non triviale ait été effectuée dans le sous-espace des états encodés. Il est maintenant bien établi (voir les références ci-

haut) que ces systèmes possèdent un seuil critique : en deçà d'une « température » critique, le taux d'erreur logique peut être diminué de manière arbitraire simplement en augmentant la taille du système.

Ces études sur la correction d'erreurs d'anyons abéliens assument que les opérations de mesure des différentes charges topologiques sont effectuées parfaitement. Cette hypothèse n'est clairement pas réaliste. Il est possible qu'une mesure ne rapporte pas la bonne charge, par exemple une mesure pourrait rapporter la présence d'une charge alors il n'y en a pas, ou encore peut ne pas rapporter la présence d'un anyon. L'algorithme de décodage doit donc prendre en compte la possibilité de telles erreurs, sinon les opérations de correction effectuées peuvent avoir pour effet d'en créer davantage. La protection d'un système topologiquement ordonné en utilisant des mesures de charge bruyantes est intrinsèquement liée à la tolérance aux fautes dans un code de correction d'erreur topologique, où la tolérance aux fautes fait référence à la capacité de combattre les erreurs à l'aide d'instruments affectés par le bruit. Comme pour la correction d'erreur, ce problème a largement été étudié dans le cas abélien et il existe des algorithmes de correction possédant un seuil de tolérance aux fautes [2, 18, 21, 30, 31, 32, 33, 34].

L'idée de base derrière tout algorithme de correction d'erreur pour les systèmes ordonnés topologiquement est d'apparier les excitations thermiques deux à deux, d'amener les anyons appartenant à une même paire ensemble et d'espérer qu'ils fusionnent vers le vide. La procédure détaillée déterminant l'appariement d'anyons et la manière dont ils seront déplacés afin de les faire fusionner est spécifique à chaque algorithme. Le fait que les anyons soient non abéliens cause de nouvelles difficultés à cette stratégie générale de décodage. Tout d'abord, la fusion de deux (ou plus) anyons non abéliens est un processus irréversible, contrairement au cas abélien. En particulier, lorsque deux anyons de charges opposées  $a$  et  $\bar{a}$  sont fusionnés, il peut en résulter une charge non triviale. La mesure de cette charge est irréversible car il s'agit d'un effondrement (partiel) de la fonction d'onde, et donc la procédure de correction elle-même peut induire des changements irréversibles au système. Notons qu'un tel processus de fusion peut quand même comporter un certain avantage, étant donné que cela indique soit que les deux charges en question ne proviennent pas de la même paire, soit qu'il y ait eu tressage impliquant d'autres anyons, ou encore que des processus de fusion aient eu lieu dans le passé.

Il peut par ailleurs y avoir de nombreuses façons par lesquelles plusieurs petites erreurs impliquant des anyons non abéliens peuvent interagir et créer une erreur de grande taille. Contrairement au cas des anyons non abéliens, il n'est pas nécessaire que deux excitations entrent en collision directe pour que deux petites erreurs se joignent en une plus grande ; il suffit qu'il y ait eu tresse, comme la figure 1.4 l'illustre. Il y a évidemment plusieurs

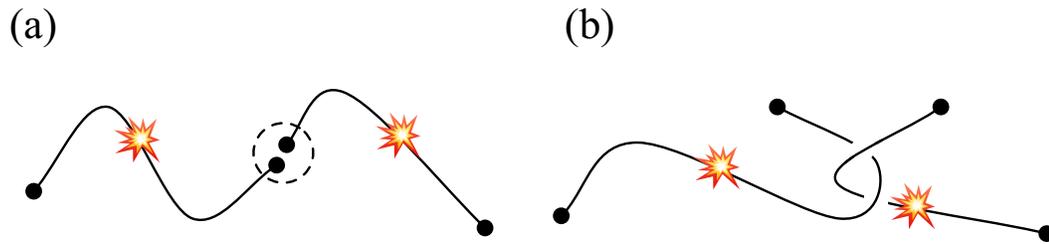


FIGURE 1.4 – Exemple de deux petites erreurs se combinant pour en former une plus grande. (a) Une paire d’anyons provenant de différents événements de fission (représentés par les pictogrammes d’explosion) se percutent et fusionnent vers le vide. (b) Des anyons non abéliens provenant de différents événements de fission sont tressés ensemble, et deviennent donc intriqués. Figure tirée de [35].

façons pour deux anyons de se tresser, et donc cette contribution entropique additionnelle pourrait favoriser l’apparition d’une phase désordonnée, empêchant ainsi l’utilisation d’un tel système pour faire du calcul quantique de manière fiable. De plus, la nature non abélienne des excitations pose des obstacles considérables en ce qui a trait à l’analyse de la procédure de correction elle-même, et nécessite l’introduction de plusieurs nouveaux concepts.

Notons que quelques autres travaux ont été effectués jusqu’à ce jour dans le domaine. Des simulations numériques ont été faites pour le modèle anyonique  $\phi - \lambda$  [36], les anyons d’Ising [37] et les anyons de Fibonacci [38]. Ces dernières sont toutes en accord avec l’existence d’un seuil. De plus, il a été démontré que les décodeurs avides à décision fixe utilisant des méthodes de renormalisation possèdent un seuil pour les anyons non abéliens [39, 40]. Tous ces travaux assument cependant que les mesures sont parfaites, une hypothèse peu réaliste.

## 1.4 Résumé de la thèse

---

Le champ d’études de la correction d’erreurs pour les systèmes donnant lieu à des anyons non abéliens est quant à lui beaucoup moins développé, et très peu de travaux ont été effectués sur le sujet à ce jour. L’apport principal de cette thèse est la présentation d’un algorithme de correction d’erreur tolérant aux fautes pour des systèmes donnant lieu à des anyons non abéliens, ainsi que la démonstration de l’existence d’un seuil pour cet algorithme. Au passage, des outils numériques et de nombreux nouveaux concepts permettant l’étude de tels systèmes sont introduits. Nos travaux présentent donc une étape importante en vue de montrer qu’il est en principe possible de réaliser un calcul quantique topologique arbitrairement long à température non nulle.

L'information contenue dans cette thèse est organisée de la manière suivante. Une brève introduction à la théorie mathématique décrivant les anyons non abéliens est présentée au chapitre 2, et la famille des anyons non cycliques y est introduite. Ces concepts sont illustrés en plus de détails pour les anyons d'Ising, et nous discutons de leur utilisation pour effectuer du calcul quantique. Ce chapitre se conclut en décrivant une méthode de simulation numérique pour les systèmes d'anyons d'Ising. Le chapitre 3 introduit le code topologique d'Ising ainsi qu'un algorithme de correction d'erreur, supposant des opérations de mesures parfaites. Les résultats de simulations numériques sont également présentés. Un algorithme de correction d'erreur tolérant aux fautes (incluant des erreurs de mesures) basé sur une généralisation pour les anyons non abéliens de l'algorithme introduit par Harrington [2] est présenté au chapitre 4, ainsi que des simulations numériques montrant l'existence d'un seuil. Le chapitre 5 introduit les notions de base permettant une analyse mathématique de cet algorithme, et esquisse l'ébauche des principales étapes permettant d'établir la preuve de l'existence d'un seuil pour les systèmes donnant lieu à des anyons non cycliques. Les détails de la preuve sont présentés dans un article en annexe.

# Introduction aux anyons non abéliens

## 2.1 Éléments de base de la théorie algébrique des anyons

---

Nous supposons que le système considéré est défini sur une surface bidimensionnelle, possède des interactions à courte portée et que la différence d'énergie entre le premier état excité et le sous-espace fondamental est strictement supérieure à 0. Les excitations sont par ailleurs bien localisées dans l'espace réel, et nous supposons la capacité de déplacer les excitations le long de chemins arbitraires en appliquant un opérateur local bien choisi.

Les excitations sont classifiées en secteurs de super-sélection [41], chaque secteur étant représenté par un nombre quantique, appelé la charge topologique. Un secteur consiste en un ensemble d'états (des excitations) qui peuvent être transformés entre eux par l'application d'opérateurs locaux, définis comme étant des opérateurs agissant sur des régions homologiquement triviales. Nous supposons également qu'il est possible de mesurer la charge topologique des excitations. La charge triviale (l'absence d'excitation ou encore le vide) est dénotée par  $\mathbb{1}$ .

Comme mentionné au chapitre 1, l'échange adiabatique d'anyons est décrit par le groupe de tressage. Ce dernier n'est cependant pas suffisant pour décrire un système d'anyons, étant donné le fait que le nombre d'excitations peut varier ; le groupe de tresses n'est pas en mesure de décrire les processus de fusion et de fission. Il nous faut une théorie incluant les représentations des groupes de tressages à  $N$  tresses,  $B_N$ , pour tout  $N$ , et ces représentations doivent être compatibles entre elles. La théorie mathématique décrivant une telle situation est la théorie des *catégories tensorielles* [42]. Une catégorie est composée d'objets et de morphismes, qui sont les applications entre les objets préservant la structure de ceux-ci [43]. Dans notre

cas, les objets sont les anyons des différentes charges topologiques ainsi que les différentes configurations d'anyons, alors que les morphismes sont les trajectoires des anyons reliant une configuration donnée d'anyons à un temps initial vers une configuration à un temps ultérieur. Une catégorie *tensorielle* est une catégorie ayant une structure de produit tensoriel pour l'opération de multiplication des objets : l'ensemble de deux ensembles d'anyons bien séparés est décrit par le produit tensoriel des deux ensembles d'anyons.

La théorie des catégories tensorielles étant très complexe et n'ayant besoin que de quelques éléments de base dans cet ouvrage, nous ne présentons dans cette section que quelques concepts clés de la théorie algébrique des anyons [44]. Cette dernière est essentiellement l'application de la théorie des catégories tensorielles restreintes aux systèmes physiques donnant lieu aux anyons, et est présentée en termes beaucoup plus proches de la physique. Nous référons le lecteur aux ouvrages [44] et [45] pour de plus amples détails.

L'espace de Hilbert  $V_c^{ab}$  est associé au processus élémentaire de fusion pour lequel des particules de charge  $a$  et  $b$  sont restreintes à fusionner vers la charge totale  $c$ . De manière correspondante, l'espace de Hilbert  $V_{ab}^c$  est l'espace des états de charge  $c$  restreinte à provenir de la fusion d'anyons de charges  $a$  et  $b$ . Les espaces  $V_c^{ab}$  et  $V_{ab}^c$  sont conjugués l'un de l'autre. Les vecteurs d'une base orthonormale pour les espaces de fission et de fusion sont dénotés par  $|a, b; c, \psi\rangle \in V_c^{ab}$  et  $\langle a, b; c, \psi| \in V_{ab}^c$ , où  $\psi$  est le canal de fusion. Les opérations de fission et de fusion peuvent être représentées graphiquement en utilisant des sommets trivalents affectés des étiquettes de charge et de canal de fusion correspondant :

$$\left(\frac{d_c}{d_a d_b}\right)^{\frac{1}{4}} \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad / \\ \psi \\ | \\ c \end{array} = |a, b; c, \psi\rangle \in V_c^{ab}; \quad \left(\frac{d_c}{d_a d_b}\right)^{\frac{1}{4}} \begin{array}{c} c \\ | \\ \psi^\dagger \\ / \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} = \langle a, b; c, \psi| \in V_{ab}^c \quad (2.1)$$

Les facteurs de normalisation  $d_x$  sont introduits afin que les diagrammes soient dans la convention d'invariance sous isotopie ; incurver les lignes et effectuer la rotation d'une partie d'un diagramme ne change pas la valeur du diagramme tant que les extrémités du diagramme sont tenues fixes. La quantité  $d_x$  est appelée la dimension quantique d'un anyon de charge  $x$  et est définie ci-après. Comme les espaces de fusion et de fission sont conjugués, les diagrammes peuvent être lu du bas vers le haut ou vice-versa.

La multiplicité d'un canal de fusion est définie par  $N_{ab}^c = \dim V_{ab}^c = \dim V_c^{ab}$ . De plus, nous supposons que l'axiome de dualité est valide : pour chacune des charges  $a$ , il existe

une unique charge  $\bar{a}$  (aussi appelée la charge opposée de  $a$ ) telle que  $N_{a\bar{a}}^{\mathbb{1}} = 1$ , c'est-à-dire que la seule charge pouvant fusionner avec  $a$  et ayant pour résultat d'annihiler les deux excitations est  $\bar{a}$ . Notons qu'il est possible que  $\bar{a} = a$ . Il peut aussi se produire que  $N_{a\bar{a}}^b > 0$ , c'est-à-dire que la fusion de  $a$  et  $\bar{a}$  résulte en une excitation de charge  $b$  ( $\neq \mathbb{1}$ ).

Nous pouvons considérer le cas où trois anyons de charges  $a, b$  et  $c$  sont restreints à fusionner vers une excitation de charge totale  $d$ . Il y a une certaine liberté quant à l'ordre dans lequel les anyons sont fusionnés, correspondant à différentes bases orthonormales dans lesquelles un état peut être représenté. Un tel changement de base est décrit par la matrice  $F$  qui est définie par

$$\begin{array}{c} a & b & c \\ & \diagdown & / \\ & e & \\ & / & \diagdown \\ & d & \end{array} \longrightarrow \sum_f [F_d^{abc}]_{ef} \begin{array}{c} a & b & c \\ & / & \diagdown \\ & f & \\ & \diagdown & / \\ & d & \end{array} . \quad (2.2)$$

La dimension quantique d'une particule est définie par  $d_a = |[F_a^{a\bar{a}a}]_{\mathbb{1}\mathbb{1}}|^{-1}$ . Physiquement,  $d_a$  représente l'inverse de la probabilité que deux anyons de charge  $a$  et  $\bar{a}$  créés à partir de paires d'anyons différentes provenant du vide s'annihilent.

L'échange de particules de charge  $a$  et  $b$  est définie en termes d'opérations de tressage  $R^{ab}$  dans le sens horaire et  $(R^{ab})^{-1}$  antihoraire, et peut être représenté de manière diagrammatique par

$$R^{ab} = \begin{array}{c} \diagdown & / \\ / & \diagdown \end{array} , \quad (R^{ab})^{-1} = \begin{array}{c} / & \diagdown \\ \diagdown & / \end{array} . \quad (2.3)$$

L'action des opérateurs de tressage sur l'espace de fusion peut être complètement déterminée en fonction des symboles  $R$  représentant l'opération unitaire consistant à échanger deux anyons (soit de manière horaire ou antihoraire) provenant d'un canal de fusion spécifique :

$$R_c^{ab} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \cup \\ c \end{array} = \begin{array}{c} b \quad a \\ \times \\ c \end{array} \quad (2.4)$$

Une tresse arbitraire entre deux charges qui n’ont pas été créées ensemble peut être exprimée en termes de changement de base par une matrice  $F$  combiné avec les opérations de tressage  $R_c^{ab}$  et  $(R_c^{ab})^{-1}$ . De manière générale, la tresse de deux anyons n’applique pas seulement une phase, mais peut modifier l’état de fusion d’un ensemble d’anyons. Si pour chaque charge  $x \neq \mathbb{1}$ , il existe une charge  $a$  telle que  $R^{ax}R^{xa}$  est différent de l’opérateur d’identité, alors le tressage est dit non dégénéré. Notons pour référence future que les systèmes donnant lieu à des excitations anyoniques peuvent être définis sur des surfaces fermées de genre plus élevé que 0 si et seulement si le tressage est non dégénéré [44]. Une théorie anyonique qui est non dégénérée est aussi appelée *modulaire*.

Les systèmes d’anyons possèdent également la propriété suivante, qui implique les relations de Yang-Baxter [43] :

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad | \quad \diagup \\ \times \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ | \quad | \end{array} \quad (2.5)$$

L’on peut déplacer librement les lignes au-dessus ou au-dessous des sommets, et ce sans introduire de facteur de phase additionnel. Notons que cette propriété est aussi valide dans le cas où la tresse est effectuée dans l’autre sens.

Le produit scalaire de deux états  $\langle \psi' | \psi \rangle$  est représenté graphiquement en connectant les feuilles correspondantes des arbres de fusions associés aux deux états  $\langle \phi |$  et  $|\psi \rangle$ , et est donné par

$$\begin{array}{c} c \\ | \\ \text{loop } \psi' \text{ (top), } \psi \text{ (bottom)} \\ | \\ c' \end{array} = \delta_{cc'} \delta_{\psi\psi'} \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}} \begin{array}{c} c \\ | \\ c' \end{array} \quad (2.6)$$

La matrice topologique  $S_x$  est définie par

$$(S_x)_{ab} = \frac{1}{D} \begin{array}{c} \text{arc } x \\ \text{circles } a, b \end{array} \quad (2.7)$$

où  $D = \sum \sqrt{d_a^2}$  est tel que pour une théorie modulaire,  $S_x$  est unitaire (si elle n'est pas nulle).

Pour les théories modulaires, un projecteur pour la charge totale d'un ensemble d'anyons peut être défini [46] par

$$\Pi_a^{1\dots n} = \begin{array}{c} a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \\ | \ | \ \dots \ | \\ \text{oval } \omega_a \end{array} \quad (2.8)$$

où  $\omega_a$  est donné par

$$\begin{array}{c} b \\ | \\ \text{loop } \omega_a \end{array} = \sum_x (S_1)_{1a} (S_1)_{ax} \begin{array}{c} b \\ | \\ \text{loop } x \end{array} = \delta_{ab} \begin{array}{c} b \\ | \end{array} \quad (2.9)$$

Physiquement, l'opérateur  $\Pi_a^{1\dots n}$  correspond à encercler (tresser) un ensemble d'anyons (les anyons  $a_1$  à  $a_n$ ) avec une superposition linéaire judicieusement choisie de paires d'anyons de charge  $x$  et  $\bar{x}$  puis à fusionner ces paires vers le vide. Ceci implique en général une étape de post-sélection puisque la tresse peut modifier le canal de fusion de la paire d'anyons. Le fait que ce processus mesure la charge encerclée s'explique par un effet de type Aharonov-Bohm. L'effet de cet opérateur est de projeter les anyons entourés par la boucle sur la charge collective  $a$ . La probabilité de mesurer cette dernière charge est donnée par

$$\langle \psi | \Pi_a^{1 \dots n} | \psi \rangle, \quad (2.10)$$

où  $|\psi\rangle$  est l'état du système [47], [48].

La dégénérescence de l'état fondamental d'un système donnant lieu à des excitations anyoniques décrites par une théorie modulaire sur une surface bidimensionnelle de genre  $g$  et non perforée est donnée par  $\sum_a (S_{\mathbb{1}a})_{\mathbb{1}a}^{2-2g}$  [49]. De plus, les états appartenant à l'espace fondamental sont caractérisés par l'absence d'excitations. Dans le cas d'un tore, cette expression se réduit à  $|\mathcal{A}|$ , le nombre de différents secteurs de super-sélection dans le modèle anyonique  $\mathcal{A}$ . Le sous-espace des états fondamentaux peut être vu comme un espace encodé [8], et les erreurs logiques consistent à créer une paire de particule/antiparticule à partir du vide, de déplacer un des anyons sur une trajectoire homologiquement non triviale, et à faire fusionner la paire d'excitations vers le vide. Il est aussi en général possible de sortir du sous-espace des états fondamentaux en effectuant de telles opérations, bien que dans ce cas la fusion de la paire de particule/antiparticule donne une charge non triviale.

## 2.2 Les anyons non cycliques

---

Dans le cadre de cette thèse, il est utile de définir une famille d'anyons appelés les modèles anioniques non cycliques. Un modèle anyonique est non cyclique si et seulement si

$$\prod_{i=1}^n N_{x_i \bar{x}_i}^{x_{i+1}} = 0, \quad (2.11)$$

pour tout  $n$  et pour toute séquence  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = x_1\}$  et tel que  $x_1 \neq \mathbb{1}$ . Un modèle anyonique qui n'est pas non-cyclique est appelé cyclique. À partir de cette définition, il est clair que tous les modèles abéliens sont non-cycliques.

Une manière équivalente de définir les anyons non cycliques peut être formulée en utilisant une représentation graphique des règles de fusion. Pour tout modèle anyonique  $\mathcal{A}$ , nous construisons un graphe dirigé  $G_{\mathcal{A}} = (V, E)$ . Nous associons un sommet  $v \in V$  à chaque paire de particule/antiparticule dénoté par  $v = (a, \bar{a})$ . Pour toutes les charges  $a$  différentes du vide, si  $N_{a\bar{a}}^b > 0$ , alors on ajoute une arête dirigée du sommet  $(a, \bar{a})$  vers le sommet  $(b, \bar{b})$ . Étant donné ce graphe,  $\mathcal{A}$  est appelé non cyclique si  $G_{\mathcal{A}}$  ne contient aucun cycle. Sinon,  $\mathcal{A}$  est cyclique. Si  $\mathcal{A}$  est non cyclique, nous dénotons le diamètre de  $G_{\mathcal{A}}$  par  $\text{diam}(G_{\mathcal{A}})$ , où le diamètre d'un graphe est défini comme étant la plus grande distance entre

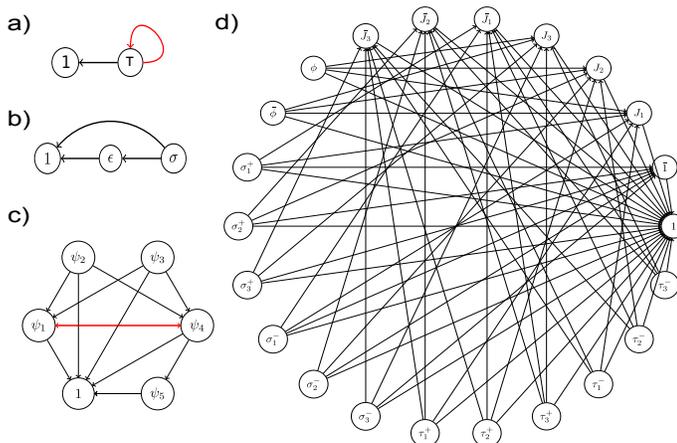


FIGURE 2.1 – Quelques exemples de graphes dirigés associés aux anyons de Fibonacci (a), aux anyons d’Ising (b), aux anyons de  $SO(5)_2$  (c) et aux anyons provenant du modèle quantique double du groupe des quaternions  $D(\bar{H})$  (d). Parmi ceux-ci, les anyons d’Ising et  $D(\bar{H})$  sont non cycliques. Les cycles causant problème pour les anyons de Fibonacci (a) et les anyons de  $SO(5)_2$  (c) sont indiqués en rouge. Figure tirée de [35].

deux sommets d’un graphe, en considérant toutes les paires de sommets possibles. La figure 2.1 montre quelques exemples de tels graphes.

### 2.3 Données de base pour les anyons d’Ising

Nous avons décrit de façon sommaire les éléments de bases nécessaires pour décrire l’état d’un système donnant lieu à des anyons. Nous présentons dans la présente section les données de base pour les anyons d’Ising, un des modèles d’anyons non abéliens les plus simples. En plus de s’avérer utile dans les sections ultérieures de cette thèse, cela permettra également de comprendre les principes de bases derrière le modèle de calcul quantique topologique. On pense par ailleurs que le modèle d’anyons d’Ising permet de décrire plusieurs systèmes physiques, notamment les excitations dans un liquide de Hall fractionnaire au facteur de remplissage  $\nu = \frac{5}{2}$  [50], aux réseaux de fils unidimensionnels donnant lieu à des fermions de Majorana [51], ou encore à la phase A de l’hélium-3 superfluide [52].

Le modèle d’anyons d’Ising est le plus simple modèle non abélien qui soit non cyclique. Les données de bases de ce modèle sont présentées dans la présente section. Nous référons le lecteur à la section 2.4 pour une description plus intuitive. En plus du vide  $\mathbb{1}$ , le modèle comporte deux charges topologiques non triviales, soit un fermion  $\epsilon$  et l’anyon d’Ising,  $\sigma$ . Les règles de fusion non triviales sont données par

$$\begin{aligned}
\epsilon \times \epsilon &= \mathbb{1}, \\
\sigma \times \epsilon &= \sigma, \\
\sigma \times \sigma &= \mathbb{1} + \epsilon.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Les dimensions quantiques des différents anyons sont données par

$$d_1 = 1 \quad d_\epsilon = 1 \quad d_\sigma = \sqrt{2}. \tag{2.13}$$

Notons que  $d_\sigma > 1$ , étant donné qu'il y a plus d'un canal de fusion possible pour deux anyons  $\sigma$ .

Les matrices de tresses pour les différentes charges topologiques sont données par

$$\begin{aligned}
R_1^{11} &= R_\epsilon^{\epsilon 1} = R_\epsilon^{1\epsilon} = R_\sigma^{\sigma 1} = R_\sigma^{1\sigma} = 1 \\
R_1^{\sigma\sigma} &= e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad R_1^{\epsilon\epsilon} = -1 \\
R_\epsilon^{\sigma\sigma} &= e^{3i\frac{\pi}{8}} \quad R_\sigma^{\sigma\epsilon} = R_\sigma^{\epsilon\sigma} = -i.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Les éléments des matrices  $F$  non triviales sont donnés quant à eux par

$$\begin{aligned}
F_\sigma^{\sigma\epsilon\sigma} &= F_\sigma^{\epsilon\sigma\epsilon} = -\mathbb{I} \\
F_\sigma^{\sigma\sigma\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

où la base utilisée est  $(1, \epsilon)$ . Pour ce qui est des autres matrices  $F$ , elle sont soit nulles si la transformation n'est pas permise par les règles de fusion, soit égale à l'identité.

Pour ce qui est des matrices topologiques  $S$ , elles sont données par

$$S_{\mathbb{1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}, \quad S_{\sigma} = 0, \quad (2.16)$$

où la base  $(1, \epsilon, \sigma)$  est utilisée.

## 2.4 Représentation de l'espace de fusion des anyons d'Ising en termes de qubits

---

Dans cette section, la représentation de l'espace de fusion des anyons d'Ising en utilisant des qubits est introduite [53]. Ce formalisme est utilisé afin de simuler numériquement la dynamique d'un gaz d'anyons d'Ising. De plus, cela suggère un encodage permettant d'effectuer du calcul quantique topologique à l'aide des anyons d'Ising, qui sera abordé à la section 2.4.1

Nous remarquons tout d'abord que les particules abéliennes (les différents canaux de fusion sont uniques) de charge  $\epsilon$  se comportent comme des fermions. En effet,  $R_1^{\epsilon\epsilon}$  (voir équation 2.15) nous indique que l'échange de deux anyons  $\epsilon$  a pour effet de multiplier l'état par une phase de  $-1$ .

Intuitivement, la règle de fusion  $\sigma \times \sigma = \mathbb{1} + \epsilon$  nous indique qu'un anyon de charge  $\sigma$  se comporte comme un «demi» mode fermionique, puisque deux de ces anyons se combinent pour donner un mode fermionique qui est soit vide (de charge totale  $\mathbb{1}$ ), soit occupée (de charge totale  $\epsilon$ ). Ce mode fermionique est délocalisé, puisque les anyons sont séparés dans l'espace. On peut interpréter la règle de fusion  $\sigma \times \epsilon = \sigma$  par le fait que l'occupation du mode fermionique d'une paire d'anyons  $\sigma$  peut être modifiée par l'émission ou l'absorption d'un fermion de charge  $\epsilon$ . La matrice  $F_{\sigma}^{\sigma\sigma}$  nous apprend que la fusion de deux anyons  $\sigma$  provenant de paires différentes donne un résultat aléatoire, chacune des charges totales ayant une probabilité de  $1/2$  d'être mesurée.

L'état de fusion des anyons de charge  $\sigma$  peut être décrit en définissant les opérateurs de Majorana  $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{2n}$ , chacun associé à un anyon de charge  $\sigma$ . Notons que les opérateurs de Majorana peuvent être écrits en termes des opérateurs de création ( $\hat{\gamma}_j^{\dagger}$ ) et d'annihilation ( $\hat{\gamma}_j$ ) de fermions :  $\hat{c}_{2j-1} = \hat{\gamma}_j + \hat{\gamma}_j^{\dagger}$  et  $\hat{c}_{2j} = \frac{\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_j^{\dagger}}{i}$ . Les règles de fusion imposent la parité du

nombre d'anyons de charge  $\sigma$ , puisque leur nombre ne peut être changé qu'en les fusionnant par paires ou encore en fissionnant un anyon (soit de charge triviale ou encore de charge  $\epsilon$ ) en deux anyons de charge  $\sigma$ . Ceci concorde également avec l'intuition qu'un anyon de charge  $\sigma$  correspond à un «demi» mode fermionique puisqu'on ne peut avoir qu'un nombre entier de fermions dans le système. L'espace de Hilbert associé à l'espace de fusion de  $2n$  anyons de charge topologique  $\sigma$  peut être associé à l'espace de Hilbert de  $n$  qubits,  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ . L'état  $|0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$  correspond à la préparation à partir du vide de  $n$  paires d'anyons, que l'on peut dénoter par paires ayant été créées ensemble,  $(1,2), (3,4), \dots, (2n-1, 2n)$ . Il est possible de représenter les opérateurs de Majorana par des opérateurs de Pauli  $\sigma_j^x, \sigma_j^y$  et  $\sigma_j^z$  agissant sur  $n$  qubit :

$$\begin{aligned}\hat{c}_{2j-1} &\rightarrow \sigma_1^z \otimes \cdots \otimes \sigma_{j-1}^z \otimes \sigma_j^x \otimes \hat{I}_{j+1} \otimes \cdots \otimes \hat{I}_n, \\ \hat{c}_{2j} &\rightarrow \sigma_1^z \otimes \cdots \otimes \sigma_{j-1}^z \otimes \sigma_j^y \otimes \hat{I}_{j+1} \otimes \cdots \otimes \hat{I}_n,\end{aligned}\tag{2.17}$$

où  $j$  prend les valeurs entre 1 et  $n$ . Le fait que  $\hat{c}_p$  soit son propre conjugué hermitien découle du fait que la charge topologique  $\sigma$  est son propre inverse.

Le processus de fusion d'anyons voisins est défini par la mesure de l'opérateur  $F_p = -i\hat{c}_p\hat{c}_{p+1}$ . Une valeur propre de  $+1$  de  $F_p$  correspond à la fusion des anyons  $p$  et  $p+1$  vers le vide, alors que la mesure d'une valeur propre de  $-1$  correspond à la fusion vers un anyon de charge  $\epsilon$ . Notons que

$$F_p = \hat{I}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{I}_{\frac{p-1}{2}} \otimes \sigma_{\frac{p+1}{2}}^z \otimes \hat{I}_{\frac{p+3}{2}} \otimes \cdots \otimes \hat{I}_n\tag{2.18}$$

si  $p$  est impair.

Considérons par exemple le cas où deux paires d'anyons de charge  $\sigma$  sont créés à partir du vide, dénotées par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  et  $\sigma_4$  respectivement. L'état de fusion est alors représenté par  $|00\rangle$ . Il est clair que cet état est un état propre des opérateurs  $F_1$  et  $F_3$  avec valeur propre  $+1$ . L'opérateur  $F_2$  est cependant donné par  $\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x$ , pour lequel  $|00\rangle$  n'est pas un état propre. La mesure de  $F_2$  donnera donc  $\pm 1$ , avec une probabilité de  $1/2$  pour chaque cas, tel qu'on s'y attend.

Comme mentionné dans la section 2.1, l'échange d'anyons dans le plan est représenté par des tresses. De telles opérations sont décrites mathématiquement par le groupe de tressage  $\mathcal{B}_n$  sur  $n$  cordes alignées sur une droite. Dans notre cas, chaque corde représente la ligne d'univers d'un anyon. Les éléments générateurs de  $\mathcal{B}_n$  sont donnés par  $b_j$  et  $b_j^{-1}$ , avec  $j = 1, \dots, n-1$ . L'action de  $b_j$  est de tresser les cordes des positions  $j$  et  $j+1$  dans le sens

horaire, tandis que  $b_j^{-1}$  l'effectue dans le sens antihoraire. En termes physiques, ces tresses correspondent à l'échange des particules aux positions  $j$  et  $j + 1$ , soit dans le sens horaire, ou antihoraire. Les générateurs obéissent par ailleurs aux relations de Yang-Baxter :

$$\begin{aligned} b_j b_k &= b_k b_j \text{ si } |j - k| > 1, \\ b_j b_{j+1} b_j &= b_{j+1} b_j b_{j+1}, \text{ pour } j = 1, \dots, n - 2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Étant donné l'application des opérateurs de Majorana vers les opérateurs de Pauli, nous cherchons une représentation du groupe de tresses dans l'espace des spineurs [50],

$$\psi = \mathcal{B}_{2n} \rightarrow U(2^n). \quad (2.20)$$

Pour le cas des anyons d'Ising, la représentation des éléments générateurs du groupe de tressage  $b_1, \dots, b_{2n-1}$  est donnée par

$$\psi(b_p) = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \hat{c}_p \hat{c}_{p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{I} - \hat{c}_p \hat{c}_{p+1}), \quad (2.21)$$

où une phase globale a été négligée, puisqu'elle n'a aucun impact en ce qui nous concerne.

Les portes logiques pouvant être appliquées sont générées par les opérations de tressage, et leurs représentations sont données par

$$B_p \equiv \psi(b_p). \quad (2.22)$$

Une tresse échangeant les anyons  $p$  et  $q$  avec  $p < q$  peut être exprimée en utilisant les éléments générateurs par

$$B_{p,q} = B_{q-1} \dots B_{p+1} B_p B_{p+1}^\dagger \dots B_{q-1}^\dagger, \quad (2.23)$$

pour tout  $p \leq q - 2$ .

L'effet par conjugaison de l'opérateur  $B_{p,q}$  sur les opérateurs de Majorana est donné par

$$B_{p,q}\hat{c}_rB_{p,q}^\dagger = \begin{cases} \hat{c}_r, & \text{si } r \notin \{p, q\} \\ \hat{c}_q, & \text{si } r = p, \\ -\hat{c}_p, & \text{si } r = q. \end{cases} \quad (2.24)$$

En combinant les opérations de mesures ainsi que les tresses, il est également possible de définir la fusion des particules  $p$  et  $q$  ( $> p$ ) par

$$F_{p,q} = -i\hat{c}_p\hat{c}_q = B_{p+1,q}F_pB_{p+1,q}^\dagger. \quad (2.25)$$

Nous nous intéressons à simuler numériquement l'évolution de l'état de fusion d'anyons d'Ising sous l'évolution causée par des opérations de tressage ainsi que de fusion (et de fission). Pour ce faire, il n'y a pas besoin de suivre l'évolution de l'état  $|\psi\rangle$  des  $n$  qubits représentant les  $2n$  anyons de charge  $\sigma$ ; on peut se contenter de suivre l'évolution des opérateurs de fusion  $\{F_{p,q}\}$  tels que  $F|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$  pour tout  $F \in \{F_{p,q}\}$ , et des phases  $\pm 1$  correspondantes. Comme les opérateurs  $\hat{c}_p$  sont représentés en termes des opérateurs de Pauli sur  $n$  qubits, on voit que l'application d'une tresse dans le sens horaire entre les anyons  $j$  et  $k$  sur  $F_{pq}$  correspond à appliquer une opération de Clifford<sup>1</sup>. Ceci se comprend aisément en observant que  $B_{jk}F_{pq}B_{jk}^\dagger = -iB_{jk}\hat{c}_p\hat{c}_qB_{jk}^\dagger = -i\left(B_{jk}\hat{c}_pB_{jk}^\dagger\right)\left(B_{jk}\hat{c}_qB_{jk}^\dagger\right)$ , et en utilisant l'équation 2.24. La fusion d'anyons,  $F_{pq}$  correspond quant à elle à la mesure de l'opérateur de Pauli correspondant.

Or, il est possible de simuler efficacement un circuit quantique composé uniquement d'opérations de Clifford et de la mesure d'opérateurs de Pauli sur un ordinateur classique [54]. L'idée est de représenter les opérateurs de Pauli stabilisant l'état quantique en utilisant des séquences de bits classiques (voir table 2.1), pour ensuite appliquer une séquence d'opérations binaires sur les bits implémentant l'évolution des stabilisateurs sous l'effet de portes logiques. On utilise donc la représentation d'Heisenberg. Notons que toute opération de Clifford peut être générée à partir des portes de Hadamard ( $H$ ), de phase ( $P$ ) et contrôle-non ( $CNOT$ ) :

---

1. Les opérations de Clifford sont définies comme étant les opérations unitaires  $C$  tels que pour tout opérateur  $P$  dans le groupe de Pauli (le groupe généré par les opérateurs de Pauli affublés des phases  $\pm 1$  et  $\pm i$ ),  $CP C^\dagger$  est aussi dans le groupe de Pauli.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Un opérateur de Pauli  $\mathcal{P}$  agissant sur  $n$  qubits peut être représenté en utilisant une chaîne de  $2n$  bits classique, en utilisant la représentation symplectique. Pour ce faire,  $\mathcal{P}$  est tout d'abord écrit comme étant le produit des opérateurs de Pauli  $\mathcal{P}_z$  et  $\mathcal{P}_x$ , composé uniquement de  $\sigma^z$  ( $\sigma^x$ , respectivement) et de l'identité. Les  $n$  premiers bits servent à identifier les positions des opérateurs  $\sigma^z$  dans  $\mathcal{P}_x$  par une valeur de 1, alors que les  $n$  bits suivant servent à représenter les positions des opérateurs  $\sigma^x$ . Un dernier bit est utilisé afin de représenter la phase associée à l'opérateur  $\mathcal{P}$ . Il faut  $n$  stabilisateurs pour représenter un état à  $n$  qubits.

| État  | Stabilisateurs                                    | Représentation symplectique |
|---|---|-----------------------------|
| $\frac{1}{\sqrt{2}} ( 0,0,0\rangle - i 0,1,0\rangle)$ | $+\sigma^z \otimes \mathbb{I} \otimes \sigma^z$   | 1 0 1   0 0 0   0           |
|   | $-\mathbb{I} \otimes \sigma^y \otimes \mathbb{I}$ | 0 1 0   0 1 0   1           |
|   | $-\sigma^z \otimes \sigma^y \otimes \mathbb{I}$   | 1 1 0   0 1 0   1           |

TABLE 2.1 – Un état quantique (colonne de gauche) peut être représenté par ses stabilisateurs (colonne du milieu), les opérateurs de Pauli (incluant la phase) pour lesquels l'état est un état propre de valeur propre  $+1$ . Des opérateurs de Pauli agissant sur  $n$  qubits peuvent être représentés en utilisant  $2n + 1$  bits (colonne de droite). Dans cet exemple, les trois premiers bits représentent les positions des opérateurs  $\sigma_z$ , alors que les trois bits suivants identifient la position des opérateurs  $\sigma_x$  dans la décomposition  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_z \cdot \mathcal{P}_x$ . Le dernier bit  $s$  représente la phase associée au stabilisateur,  $(-1)^s$ . Dans l'exemple ci-haut, les diverses séquences de bits sont séparées par une ligne verticale pour plus de clarté.

L'effet d'appliquer une tresse sur l'état de fusion peut être suivi en effectuant des opérations binaires sur les séquences de bits représentant ses stabilisateurs. Pour ce faire, on peut décomposer l'opérateur correspondant à une tresse en une séquence de portes de Hadamard ( $H$ ), de phase ( $P$ ) et contrôle-non ( $CNOT$ ) (voir table 2.2). Ces portes sont par la suite implémentées de manière séquentielle; l'application de chacune des portes élémentaires correspond à effectuer des opérations binaires sur les séquences de bits représentant les

stabilisateurs. L'application d'une porte élémentaire peut être effectuée en utilisant  $\mathcal{O}(n^2)$  opérations élémentaires [55].

| Opérateur     | Décomposition |                            |
|---------------|---------------|----------------------------|
|               | $p$ impair    | $p$ pair                   |
| $B_p$         | $HP^3HP^3H$   | $P^3$ (CNOT) $HP^3$ (CNOT) |
| $B_p^\dagger$ | $HHPH$        | (CNOT) $PH$ (CNOT) $P$     |

TABLE 2.2 –  $B_p$  et  $B_p^\dagger$  peuvent être décomposés en séquences de portes de Hadamard ( $H$ ), de phase ( $P$ ) et contrôle-non ( $CNOT$ ). Lorsque  $p$  est impair, les opérations sont appliquées sur le qubit  $(p+1)/2$ . Pour un  $p$  pair, les portes  $H$  et  $P$  sont appliquées sur le qubit  $p/2$ , alors que la porte  $CNOT$  a pour contrôle le qubit  $p/2$  et comme cible le qubit  $p/2+1$ .

Pour ce qui est de la mesure d'un opérateur de Pauli  $\mathcal{P}$ , il suffit de vérifier si l'opérateur mesuré peut être généré par les stabilisateurs, auquel cas le produit des bits correspondant aux stabilisateurs formant l'opérateur mesuré permet de déterminer le résultat de la mesure. Si  $\mathcal{P}$  ne peut pas être généré par les stabilisateurs, alors le résultat de la mesure est aléatoire, chacune de deux mesures ayant une probabilité de  $1/2$  de survenir. Après avoir effectué la mesure, les stabilisateurs sont mis à jour. Ceci requière encore une fois  $\mathcal{O}(n^2)$  opérations élémentaires.

#### 2.4.1 Calcul topologique pour les anyons d'Ising

Étant donné le formalisme présenté à la section 2.4, un modèle de calcul topologique pour les anyons d'Ising émerge [53]. Ce formalisme suggère l'encodage d'un qubit dans l'espace de fusion de 2 anyons de charge  $\sigma$ . Cet encodage présente cependant un sérieux désavantage; une paire d'anyons qui serait préparée dans l'état  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$  possède une charge topologique totale de 1 et  $\epsilon$  respectivement. Or, ces deux charges faisant partie de deux secteurs de super-sélection distincts<sup>2</sup> puisqu'il y a conservation de la parité du nombre de fermions, il est impossible de créer un l'état d'un qubit qui serait dans une superposition de  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ .

Afin de remédier à ce problème, on peut par exemple encoder un qubit logique dans l'état  $|\bar{0}\rangle = |0,0\rangle$  et  $|\bar{1}\rangle = |1,1\rangle$ . On utilise donc 2 paires d'anyons de charge  $\sigma$  pour encoder

2. Un secteur de super-sélection est un ensemble d'états dans l'espace de Hilbert qui sont connectés par des opérations physiques.

un qubit. L'état logique  $|\bar{0}\rangle$  est défini par  $F_1|\bar{0}\rangle = F_3|\bar{0}\rangle = +|\bar{0}\rangle$ , correspondant à l'état de fusion pour lequel les deux paires d'anyons fusionnent vers le vide, et l'état logique  $|\bar{1}\rangle$  est défini par  $F_1|\bar{1}\rangle = F_3|\bar{1}\rangle = -|\bar{1}\rangle$ , l'état de fusion pour lequel les deux paires d'anyons fusionnent pour donner un fermion. Remarquons que les états  $|\bar{0}\rangle$  et  $|\bar{1}\rangle$  ont tous deux une charge totale correspondant au vide.

En utilisant un tel encodage, l'on peut définir les opérateurs de Pauli logiques

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^z &= -i\hat{c}_1\hat{c}_2, \\ \bar{\sigma}^x &= -i\hat{c}_2\hat{c}_3, \\ \bar{\sigma}^y &= -i\hat{c}_1\hat{c}_3.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Étant donné la représentation des opérations de tressage donnée par les équations 2.22 et 2.23, il est clair qu'il est possible d'implémenter les opérateurs de Pauli en tressant les anyons. Par exemple, le double échange des anyons 1 et 2 dans le sens horaire revient à appliquer  $\sigma^z$  dans l'espace encodé, alors que d'effectuer la même opération avec les anyons 2 et 3 applique  $\sigma^x$  tel qu'illustré sur la figure 2.2.

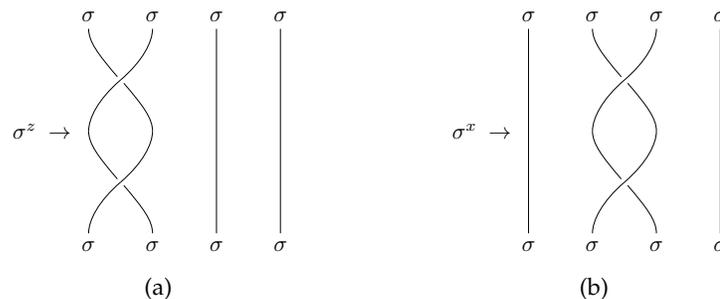


FIGURE 2.2 – Les opérateurs de Pauli à 1 qubit sont effectués en tressant les anyons d'Ising. (a)  $\sigma^z$  est obtenu en échangeant les deux anyons d'une paire à deux reprises, (b) alors que  $\sigma^x$  est obtenu en échangeant des anyons provenant des différentes paires.

Notons cependant que cet encodage pour les anyons d'Ising ne permet pas de faire du calcul quantique universel en appliquant uniquement des opérations de tressage et de fusion; il faut compléter le modèle avec d'autres opérations non topologiquement protégées pour y parvenir. Il pourrait être par exemple possible de tirer profit des interactions à courte portée entre les anyons ou encore des propriétés particulières associées aux frontières du système [53].

## 2.5 Simulation numérique d'un gaz d'anyons d'Ising

---

Afin d'étudier numériquement des codes de correction d'erreurs pour les systèmes donnant lieu à des anyons non abéliens, nous aurons besoin de simuler un gaz d'anyons d'Ising. Le développement d'une méthode de simulation efficace pour ce type de système est l'une des réalisations importantes de cette thèse. Dans cette section, nous décrivons brièvement cette méthode. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la référence [37].

### 2.5.1 Les processus topologiques élémentaires

Afin de simuler les propriétés universelles d'un gaz d'anyons d'Ising, il suffit de caractériser les différentes manières dont les anyons peuvent interagir ; soit par tressage, fusion ou encore fission. D'autres processus peuvent dépendre des détails microscopiques du modèle spécifique considéré, mais de tels processus ne sont pas importants pour les degrés de liberté topologiques globaux. Nous ignorons donc de tels détails.

Nous considérons la dynamique du système dans un réseau bidimensionnel défini par un graphe  $G = G(V, E)$  ( $V$  pour «vertex», représentant les sites, et  $E$  pour «edge», représentant les liens entre les sites voisins). Les variables d'occupations  $n_q^i$  spécifient le nombre de particules avec charge  $q \in \{\epsilon, \sigma\}$  au site  $i$ . L'ensemble de toutes les variables d'occupation définissent une configuration de charge du réseau. Bien que les configurations de charges soient définies avec de multiples particules à chaque site du graphe, nous considérons toutes les particules dans un site donné comme étant physiquement fusionnées. Ces dernières sont dénotées séparément par simplicité.

Comme les anyons de charge  $\sigma$  sont non-abéliens, nous devons spécifier l'espace de Hilbert associé à l'espace de fusion de ces particules. Notons les particules de charge  $\epsilon$  sont abéliennes et donc ne contribuent pas à l'espace de fusion. Pour une configuration comportant  $2m$  anyons de type  $\sigma$ , l'espace de fusion est de dimension  $2^m$ , puisque chaque paire d'anyons possède en général deux canaux de fusions possibles.

Les processus de fusion, de tressage, de fission et de déplacement d'anyons peuvent être décomposés en opérations élémentaires sur le graphe  $G$  :

1. La création d'une paire de particule/antiparticule de la forme  $q \times \bar{q}$  à partir du vide avec  $q \in \{\epsilon, \sigma\}$  sur les sites adjacents à l'arête  $(i, j) \in E$ ,
2. Le saut de toutes les charges du site  $i$  au site voisin  $j$ ,

3. L'échange de toutes les charges du site  $i$  avec celles du site voisin  $j$  de manière horaire ou antihoraire,
4. La décohérence de la charge totale du site  $i$ .

De manière générale, plusieurs anyons de charges différentes peuvent coexister sur un même site, et dont l'état est décrit par une combinaison linéaire des différentes charges totales possibles. Le processus de décohérence correspond à la fusion de tous les anyons présents sur le site  $i$  vers un état propre de la charge *a priori* inconnu. Il s'agit donc d'un effondrement local de la fonction d'onde au site  $i$ , et peut être causé par la mesure de la charge totale sur ce site.

### 2.5.2 Simulation sur un graphe planaire

Nous débutons par traiter le cas où le graphe  $G$  considéré est planaire (et un système fermé). Le cas où  $G$  est défini sur un tore sera abordé à la section suivante. Cette dernière contrainte impose la conservation de la charge totale du système. En d'autres termes, tout observable physique  $O$  doit satisfaire l'équation

$$[\hat{O}, \hat{Q}] = 0, \quad (2.28)$$

où  $\hat{Q}$  est l'opérateur de charge totale,

$$\hat{Q} = (-i)^m \hat{c}_1 \hat{c}_2 \cdots \hat{c}_{2n}. \quad (2.29)$$

Les valeurs propres de  $Q$  correspondent à la charge totale de tous les anyons de charge  $\sigma$ . Une valeur propre de  $+1$  représente une charge totale correspondant au vide, alors qu'une valeur propre de  $-1$  représente une charge totale de  $\epsilon$ . Après avoir fixé la charge totale comme étant le vide par convention, l'espace de fusion restant est de dimension  $2^{n-1}$ .

Les processus de tresse entre des anyons agissent de manière unitaire sur l'espace de fusion. Afin de spécifier la transformation dans l'espace de fusion correspondant à une tresse entre deux anyons sur des sites adjacents de  $G$ , nous devons tout d'abord spécifier une base dans l'espace des configurations en définissant un ordre pour les anyons dans le système. Nous organisons les anyons relativement à un ordre naturel des sites du graphe  $G$ . Cet ordre est donné par la fonction bijective

$$\#_G : V \rightarrow \{1, \dots, |V|\} \quad (2.30)$$

des sites de  $G$  vers un sous-ensemble des nombres naturels. Il s'agit simplement d'une étiquette donnée aux différents sites. On peut alors choisir une fonction  $\#_\sigma$  organisant les anyons de charge  $\sigma$  dans le système de manière compatible avec l'ordre donné par  $\#_G$ . Nous requérons que pour les anyons  $\alpha$  et  $\beta$  présents aux sites  $i$  et  $j$  respectivement, avec  $\#_G(i) < \#_G(j)$ , alors  $\#_\sigma(\alpha) < \#_\sigma(\beta)$ . Notons que nous réservons l'usage de lettres romaines pour référer aux sites de  $G$ , tandis que les lettres grecques sont utilisées pour identifier les particules  $\sigma$  dans la fonction d'ordre  $\#_\sigma$ .

Les opérations de tresse impliquant les anyons de charge  $\epsilon$  agissent sur l'espace de fusion simplement en accumulant une phase globale. Nous pouvons donc nous limiter à considérer les opérations de tressage impliquant des anyons de charge  $\sigma$ . Un ensemble d'opérations générant les processus de tressage et de fusion de particules est donné par les opérations impliquant des anyons voisins dans  $\#_\sigma$ . Par convention, l'indice de l'opérateur de Majorana  $\hat{c}_\alpha$  correspondant à sa position dans  $\#_\sigma$ . Une tresse effectuée dans le sens horaire entre deux particules  $\sigma_\alpha$  et  $\sigma_{\alpha+1}$  appliquent l'opérateur

$$B_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \hat{c}_\alpha \hat{c}_{\alpha+1}), \quad (2.31)$$

tel que stipulé par l'équation 2.21. Pour une tresse dans le sens antihoraire, il s'agit de l'opérateur

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \hat{c}_\alpha \hat{c}_{\alpha+1}). \quad (2.32)$$

Nous utilisons la représentation d'Heisenberg afin de faire évoluer l'état de fusion du système. L'état de fusion de  $2n$  anyons de charge  $\sigma$  est représenté par un ensemble de  $n$  opérateurs de Pauli qui commutent. L'état du système est tel qu'il est un état propre de valeur propre  $+1$  pour chacun de ces opérateurs. Notons que l'opérateur de la charge totale  $Q$  peut toujours être généré à partir de ces opérateurs de Pauli.

En plus des opérations appliquées sur l'espace de fusion correspondant au tressage des anyons, nous devons également spécifier un opérateur de fusion pour les particules voisines dans  $\#_\sigma$ . Rappelons que la fusion de la paire de particules  $\alpha$  et  $\alpha + 1$  est représentée par l'opérateur

$$F_\alpha = -i\hat{c}_\alpha \hat{c}_{\alpha+1}. \quad (2.33)$$

Une valeur propre  $+1$  correspond à la fusion vers le vide, alors que  $-1$  correspond à

une charge  $\epsilon$ . Lorsque les particules  $2m + 1$  et  $2m + 2$  de charge  $\sigma$  sont créées à partir du vide, deux nouveaux modes sont créés et initialisés dans l'état propre  $+1$  de l'opérateur  $F$  correspondant, en utilisant l'application 2.17. En termes de simulation numérique, cela revient à ajouter un qubit ( $m \rightarrow m + 1$ ) ainsi qu'un nouvel opérateur de Pauli correspondant à  $F$  et commutant avec les  $m$  autres décrivant les  $2m$  premiers anyons, et à permuter les qubits (appliquer une opération de Clifford) afin de s'assurer que  $\#_G$  et  $\#_\sigma$  soient compatibles.

De manière similaire, la fusion de  $2l$  anyons  $\sigma$  voisins est donné par

$$F_\alpha^{(2l)} = (-i)^l \hat{c}_\alpha \hat{c}_{\alpha+1} \hat{c}_{\alpha+2} \dots \hat{c}_{\alpha+2l-1}. \quad (2.34)$$

La décohérence ou la mesure de la charge totale d'un ensemble d'anyons de charge  $\sigma$  correspond à la mesure de l'opérateur  $F$  approprié.

Nous sommes en mesure de négliger les phases globales acquises durant les opérations de tressage pourvu que nous garantissions que le système reste dans un état propre de la charge à chaque étape de la simulation, donc aussi longtemps que les variables d'occupations  $n_\epsilon$  et  $n_\sigma$  peuvent être traitées de manière classique. Notre modèle phénoménologique n'incorpore que des processus qui transforment des états propres de la charge vers d'autres états propres de la charge, et donc les opérations de tresse et de mesure décrites précédemment suffisent à générer toute la dynamique requise pour notre système.

Bien que ces opérations soient suffisantes en principe pour spécifier toute la dynamique de notre système, elles ne correspondent pas aux processus élémentaires de notre modèle phénoménologique. En effet, le modèle phénoménologique effectue des opérations sur le graphe  $G$ , alors que les transformations associées aux tresses correspondent aux opérations sur la ligne spécifiée par l'ordre  $\#_\sigma$ . Nous devons donc introduire la notion de séquence de tresses linéarisée afin de relier ces deux descriptions.

### 2.5.3 La séquence de tresses linéarisée

Afin de calculer de manière explicite l'effet sur l'espace de fusion d'une opération impliquant des sites voisins du graphe  $G$ , nous devons l'associer à une séquence d'opérations agissant sur les voisins du graphe  $\#_\sigma$ , correspondant aux éléments générateurs du groupe de tressage,  $B_\alpha$  et  $B_\alpha^\dagger$ . Cette séquence est appelée la séquence de tresses linéarisée correspondant à une arête  $e = (i, j)$  du graphe  $G$ . Ceci nous donnera l'effet de déplacer des charges du site  $i$  au site  $j$  sur l'espace de fusion.

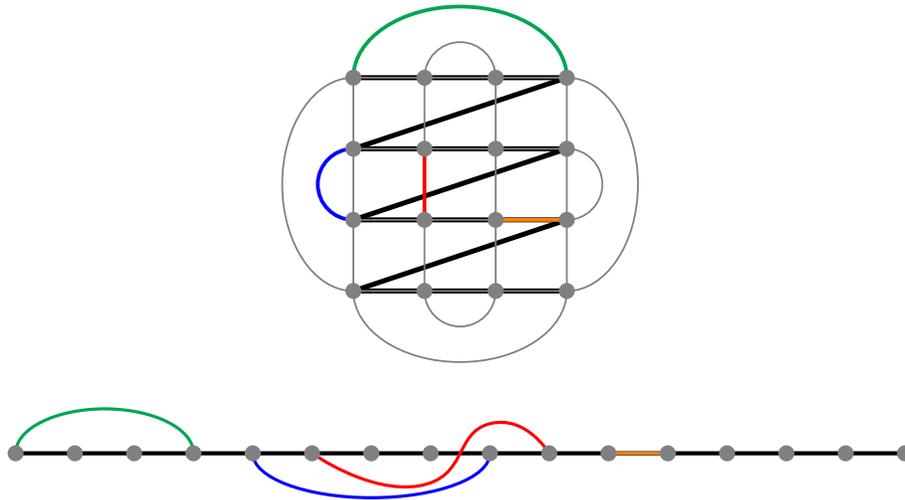


FIGURE 2.3 – Un exemple de graphe  $G$  (montré par des arêtes grises) et de  $\#_G$  (en traits noirs foncés). Plusieurs arêtes sont surlignées en couleur afin de montrer la prescription entre des sites voisins sur  $G$  et des chemins dans  $\#_G$ . Après avoir enchâssé  $G$  dans le plan, un graphe linéaire correspondant à  $\#_G$  y est superposé. Nous pouvons par la suite déformer de manière continue n'importe quelle arête en séquence de tresses sur une ligne. Le graphe linéaire du bas représente  $\#_G$  linéarisé, et l'image de quelques arêtes colorées dans  $G$  y sont montrées. Figure tirée de [37].

Afin de définir une séquence de tresses linéarisée, le graphe  $G$  est enchâssé dans le plan. Un chemin planaire connectant chaque sommet de  $G$  dans l'ordre  $\#_G$  y est superposé. Nous pouvons par la suite déformer continûment ce graphe, jusqu'à ce que  $\#_G$  devienne une ligne droite, et l'image de l'arête  $e = (i, j) \in E$  sous cette déformation nous donne une prescription pour traduire une opération sur des sites voisins de  $G$  sur  $e$  vers une séquence d'opérations sur des voisins dans  $\#_G$  et  $\#_\sigma$ . Un exemple d'une telle séquence de tresses linéarisée est illustré sur la figure 2.3.

Afin de déplacer les charges du site  $i$  vers le site  $j$  le long d'une arête  $e$ , nous suivons l'arête déformée lors de son déplacement le long de  $\#_G$ , à partir de  $i$ . Si l'arête passe au-dessus du sommet  $k$  dans  $\#_G$ , alors un déplacement vers la droite le long de l'arête correspond à une séquence d'échanges dans la direction horaire entre les anyons de charge  $\sigma$  de  $i$  avec ceux du site  $k$ . Un déplacement vers la gauche correspond à une séquence d'échanges dans le sens antihoraire. Si l'arête est déplacée sous un sommet de  $\#_G$ , la direction de la tresse est inversée. Le fait que les ordres  $\#_G$  et  $\#_\sigma$  soient concordants nous assure que ces opérations sont des séquences d'échanges de voisins dans  $\#_\sigma$ . Ces échanges sont implémentés mathématiquement en conjuguant le groupe des stabilisateurs par l'opérateur de tresse pertinent  $B_\alpha$  ou  $B_\alpha^\dagger$ . Les charges sont échangées à partir du site  $i$  sur le chemin jusqu'au site

$j$ , la où les processus physiques désirés peuvent être effectués.

En utilisant ces séquences de tresses linéaires, nous pouvons simuler les processus phénoménologiques définis dans la section 2.5.1 de la manière suivante :

- (1) Pour la création de paires de charge  $q$  le long d'une arête  $e = (i, j)$ , deux charges de type  $q$  sont créées à partir du vide au site  $i$ . Par la suite, une séquence de tresses linéarisée déplaçant une charge du site  $i$  au site  $j$  est effectuée, où la charge est additionnée à la charge totale au site  $j$ .
- (2) Pour faire sauter une charge le long de l'arête reliant le site  $i$  au site  $j$ , une séquence de tresses linéarisée déplaçant les charges du site  $i$  au site  $j$  est effectuée, où ces dernières sont ajoutées à la charge totale existante au site  $j$ .
- (3) Pour échanger des charges le long d'une arête  $e = (i, j)$ , soit de manière horaire ou antihoraire, une séquence de tresses linéarisée est effectuée en prenant les charges du site  $i$  au site  $j$ , où elles peuvent être échangées avec les charges du site  $j$  dans la direction appropriée, pour ensuite retourner les charges du site  $j$  au site  $i$  par la séquence de tresse linéarisée inverse.
- (4) Pour faire décohérer la charge totale au site  $i$ , une mesure projective de la charge totale au site  $i$  est effectuée. Si  $n_\sigma^i$  est impair, la charge totale est nécessairement  $\sigma$ , sinon la charge totale peut être calculée en utilisant l'équation 2.34 (tout en tenant compte des particules  $\epsilon$  qui pourraient être présentes au site  $i$ ).

#### 2.5.4 Simulation sur un graphe non-planaire

La description d'un système d'anyons d'Ising sur un tore (ou une surface de genre plus élevé) diffère du plan (ou une sphère) par le fait que des opérations de tresse le long de courbes non contractiles sont possibles. Le groupe des tresses doit donc être étendu, et une description mathématique décrivant cette situation peut être trouvée dans la référence [56]. Nous nous limiterons donc ici à ne traiter que le cas du tore, bien que le cas des surfaces bidimensionnelles générales peut être traité d'une manière similaire.

À la différence d'une sphère ou du plan, le sous-espace des états fondamentaux possède une dégénérescence de 3 pour un système donnant lieu à des anyons d'Ising, où les états fondamentaux sont caractérisés par l'absence d'anyons. Une base pour l'espace fondamental peut être définie par des flux correspondant à chaque charge anyonique du modèle et passant à travers les boucles non contractiles du tore. Un anyon effectuant une tresse autour d'une telle boucle agit comme s'il avait encerclé la charge correspondante.

Bien qu'il y ait deux boucles non triviales sur un tore, elles ne transportent pas toutes

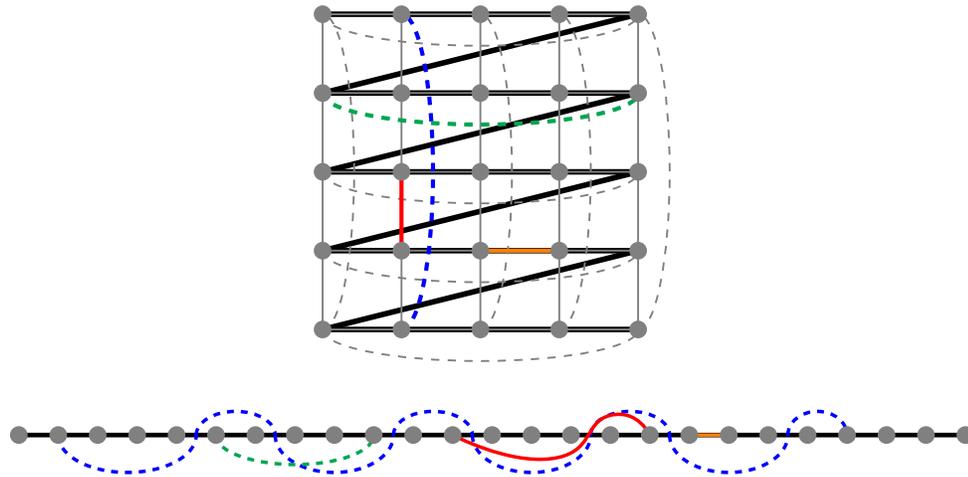


FIGURE 2.4 – Un graphe non-planaire  $G$  montré avec des arêtes grises et l'ordre correspondant  $\#_G$  montré avec des lignes noires foncées. Les arêtes formant les «joints» du tore sont en pointillés. Plusieurs arêtes identifiées par diverses couleurs sont déformées pour montrer les séquences de tresses linéarisées correspondantes. Figure tirée de [37].

deux un flux associé indépendant. Les flux passant à travers ces deux boucles sont reliés par la matrice topologique  $S$ , qui correspond à un changement de base décrivant le sous-espace fondamental. Le comportement d'anyons étant tressés le long de boucles non triviales sur le tore peut aussi être analysé en utilisant le calcul diagrammatique généralisé de Pfeifer *et al.* [57]. Les deux bases orthonormales naturelles pour le sous-espace fondamental peuvent être dénotées par  $\{|1\rangle_h, |\epsilon\rangle_h, |\sigma\rangle_h\}$  et  $\{|1\rangle_v, |\epsilon\rangle_v, |\sigma\rangle_v\}$ , où  $h$  et  $v$  font références aux deux classes de boucles non triviales.

Nous décrivons la simulation phénoménologique des anyons d'Ising sur un tore, en insistant sur les différences par rapport au cas planaire. Le graphe de la figure 2.4 n'est pas planaire, mais il a un enchâssement naturel dans le tore. Comme pour le cas planaire, il est utile de choisir un ordre linéaire des sites de  $G$ , illustré par les traits noirs en gras. Ceci nous permet encore une fois de déterminer la séquence de tresses linéarisée d'une arête en utilisant la déformation continue du graphe  $G$  vers une ligne droite.

Considérons une configuration de charge correspondant au vide sur tous les sites sauf pour la charge  $q$  sur un seul site. Notons que toute configuration de charge peut être transformée en une telle configuration par une série d'opérations de tressage et de fusion sans croiser les «joints» du tore, en n'effectuant donc pas d'opération homologiquement non triviale. Nous pouvons transformer un état exprimé dans la base  $h$  vers la base  $v$  en utilisant la matrice topologique  $S_q$ . Pour les anyons d'Ising, nous rappelons que ces dernières sont

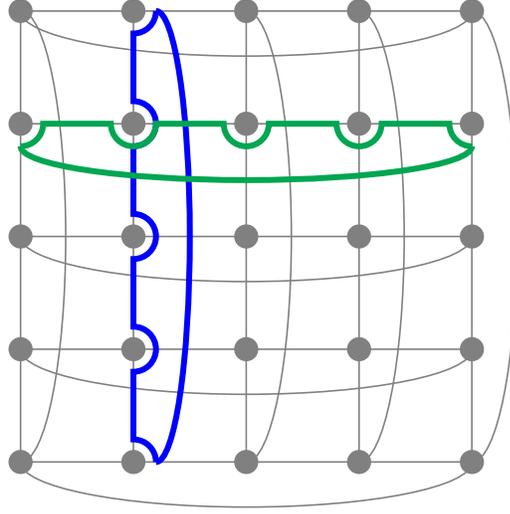


FIGURE 2.5 – Les représentants de deux classes de boucles non triviales sur le graphe non planaire sont identifiées. La boucle  $h$  est montrée en vert, alors que la boucle  $v$  est montrée en bleu. Figure tirée de [37].

données par

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}, \quad S_\sigma = 0. \quad (2.35)$$

À chaque fois qu'un anyon se déplace autour d'une boucle non triviale sur le tore, ce dernier est de manière effective tressé avec la charge associée au flux passant à travers la boucle [57]. Par exemple, si un anyon est tressé le long de la boucle verte sur la figure 2.5 alors que la charge topologique est  $|q\rangle_h$ , ce dernier se comporte comme si un échange double avait été effectué avec la charge  $q$ . Le chemin bleu quant à lui correspond à effectuer cette action dans la base  $v$ . Afin de déterminer les effets de ces opérations, nous devons utiliser la matrice topologique  $S_q$ , passant de la base  $h$  à la base  $v$  entre ces processus, dépendamment de la charge totale  $q$  présente sur le réseau.

Nous pouvons déterminer les règles à appliquer en tressant des anyons le long de boucles non triviales sur le tore en considérant les transformations engendrées par la matrice  $S$  et les règles de fusion des anyons d'Ising. Nous considérons le processus dénoté par  $\mathcal{L}_q^h$ ;

ce dernier crée une paire d'anyons de charges  $q \times \bar{q}$  à partir du vide, déplace l'un deux sur une boucle  $h$ , pour ensuite fusionner ces deux mêmes anyons. Un simple calcul permet de déterminer l'effet de cet opérateur sur les différents états de la base :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\epsilon^h |1\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= |1\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} \\ \mathcal{L}_\sigma^h |1\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= |1\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}}\end{aligned}\quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\epsilon^h |\epsilon\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= |\epsilon\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} \\ \mathcal{L}_\sigma^h |\epsilon\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= -|\epsilon\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}}\end{aligned}\quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\epsilon^h |\sigma\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= -|\sigma\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} \\ \mathcal{L}_\sigma^h |\sigma\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= e^{-i\frac{\pi}{4}} |\sigma\rangle_h \otimes |\epsilon\rangle_{\text{bulk}}\end{aligned}\quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\epsilon^h |\sigma\rangle_h \otimes |\epsilon\rangle_{\text{bulk}} &= -|\sigma\rangle_h \otimes |\epsilon\rangle_{\text{bulk}} \\ \mathcal{L}_\sigma^h |\sigma\rangle_h \otimes |\epsilon\rangle_{\text{bulk}} &= e^{-i\frac{\pi}{4}} |\sigma\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}}\end{aligned}\quad (2.39)$$

où  $|1\rangle_{\text{bulk}}$  possède la charge 1 à chaque site de  $G$ , alors que  $|\epsilon\rangle_{\text{bulk}}$  dénote un état avec une seule particule de charge  $\epsilon$  sur un site, avec tous les autres sites occupés par le vide.

Nous trouvons pour les opérateurs  $\mathcal{L}_q^v$  (agissant comme  $\mathcal{L}_q^h$ , mais le long d'une boucle  $v$ ) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\epsilon^v |1\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= |\epsilon\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} \\
\mathcal{L}_\sigma^v |1\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\sigma\rangle_h \otimes (|1\rangle_{\text{bulk}} + |\epsilon\rangle_{\text{bulk}})
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\epsilon^v |\epsilon\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= |1\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} \\
\mathcal{L}_\sigma^v |\epsilon\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\sigma\rangle_h \otimes (|1\rangle_{\text{bulk}} - |\epsilon\rangle_{\text{bulk}})
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\epsilon^v |\sigma\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= |\sigma\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} \\
\mathcal{L}_\sigma^v |\sigma\rangle_h \otimes |1\rangle_{\text{bulk}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_h + |\epsilon\rangle_h) \otimes |1\rangle_{\text{bulk}}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\epsilon^v |\sigma\rangle_h \otimes |\epsilon\rangle_{\text{bulk}} &= -|\sigma\rangle_h \otimes |\epsilon\rangle_{\text{bulk}} \\
\mathcal{L}_\sigma^v |\sigma\rangle_h \otimes |\epsilon\rangle_{\text{bulk}} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle_h - |\epsilon\rangle_{\text{bulk}}) \otimes |1\rangle_{\text{bulk}}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

L'équation (2.39) montre que sur une surface non triviale, la charge totale du système n'est plus une quantité conservée, bien que pour les anyons d'Ising, nous pouvons garantir que la charge totale ne peut pas être  $\sigma$ .

Il est à noter que nous avons fait un choix de convention en écrivant les équations ci-haut, en définissant un sens préféré pour la tresse autour des boucles non triviales. Lorsqu'un anyon effectue une tresse dans ce sens, cela correspond à effectuer l'opération  $\mathcal{L}$  pertinente, alors qu'une tresse effectuée dans la direction opposée correspond à l'opérateur adjoint  $\mathcal{L}^\dagger$ . De plus, les relations ci-haut mettent en lumière la connexion qui existe entre les boucles  $h$  et  $v$ , en permettant de vérifier que l'identité  $(\mathcal{L}_q^v)^\dagger = S \mathcal{L}_q^h S^\dagger$  tient, avec  $S$  agissant comme  $S_{\mathbb{1}}$  ou  $S_\epsilon$ , dépendamment de la charge totale du système.

La définition des opérateurs  $\mathcal{L}^v$  et  $\mathcal{L}^h$  nous permet donc de simuler non seulement les processus spécifiques par lesquels ils sont définis, mais également des tresses générales sur le tore. L'application d'une opération de tressage sur le tore telle qu'illustré sur la figure 2.4 cause en général une action sur l'espace de fusion en tressant des anyons du système en plus d'appliquer une « opération topologique » sur l'espace fondamental dépendamment de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Cette opération topologique est effectuée à chaque fois qu'un anyon ayant parcouru un trajet homologiquement non trivial fusionne avec son partenaire, en plus d'appliquer la séquence de tresse linéarisée standard. Cette prescription nous assure que les opérations sur le tore satisfassent les relations du groupe de tresses de Fox [56, 58], une

généralisation du groupe de tresses pour des surfaces de genre plus élevé que 0.

Bien qu'il soit possible de simuler directement les processus correspondant aux équations ci-haut, il est plus simple en pratique de tirer profit de la structure particulière du modèle d'anyons d'Ising [59, 60]. Il suffit de suivre l'évolution des opérateurs  $\mathcal{L}_\epsilon^h$  et  $\mathcal{L}_\epsilon^v$ . Notons tout d'abord que ces opérateurs commutent. Étant donné qu'ils sont leurs propres inverses, ils ont comme valeurs propres simultanées  $\pm 1$ . Les quatre états propres correspondants engendrent l'espace  $|\cdot\rangle_h \otimes |\cdot\rangle_{\text{bulk}}$ . Comme  $[\mathcal{L}_\sigma^h, \mathcal{L}_\epsilon^h] = 0$  et  $\mathcal{L}_\sigma^v \mathcal{L}_\epsilon^h (\mathcal{L}_\sigma^v)^\dagger = -\mathcal{L}_\epsilon^h$  (et de manière similaire en interchangeant  $h$  et  $v$ ), ceci est suffisant pour suivre l'évolution de l'état fondamental du système sous l'application d'opérateurs topologiques. Finalement, lorsqu'un anyon de charge  $\sigma$  traverse un joint dont l'opérateur correspondant  $\mathcal{L}_\epsilon$  est dans l'état propre de valeur propre  $-1$ , ce dernier absorbe une charge  $\epsilon$  additionnelle (ce qui correspond mathématiquement au changement de signe de la valeur propre de l'opérateur de Majorana correspondant).

## Chapitre 3

# La correction d'erreur pour le code topologique d'Ising

### 3.1 Le code topologique d'Ising

---

Un système d'anyons d'Ising sur un réseau carré enchâssé dans un tore de taille  $L \times L$  peut être utilisé comme encodage pour un état quantique. Les opérateurs logiques de ce code correspondent à la tresse d'anyons le long de ces boucles non triviales,  $\mathcal{L}_q$ . Bien que  $\mathcal{L}_\sigma^h$  et  $\mathcal{L}_\sigma^v$  ne soient pas à strictement parler des opérateurs logiques puisqu'ils ne préservent pas l'espace encodé (ils peuvent faire changer la charge totale du système), l'application non désirée de ces opérateurs constitue néanmoins un échec irréparable de l'opération de décodage, tout comme les opérateurs  $\mathcal{L}_e^h$  et  $\mathcal{L}_e^v$ . La seule différence est que  $\mathcal{L}_\sigma^h$  et  $\mathcal{L}_\sigma^v$  peuvent être détectés, en mesurant la charge totale du système. Bien qu'il soit possible de détecter cette erreur, il est impossible de la réparer en général, puisque la mesure de la charge totale a pour effet de projeter l'état du système sur une charge totale bien définie, et donc corrompt l'information encodée. Notons cependant que les opérateurs  $(\mathcal{L}_\sigma^h)^2$  et  $(\mathcal{L}_\sigma^v)^2$  sont des opérateurs logiques valides.

Notons que nous pouvons considérer une version de ce code comme étant implémentée par l'espace fondamental de l'hamiltonien

$$H = - \sum_{s \in \Lambda} |1\rangle\langle 1|_s, \quad (3.1)$$

où  $\Lambda$  dénote le réseau. Ceci revient à pénaliser (en énergie) le fait d'avoir une charge non triviale sur le réseau.

## 3.2 Méthodes d'échantillonnage

---

Nous nous intéressons à simuler la dynamique d'un système d'anyons d'Ising en contact avec un environnement thermique pour une courte période de temps (avant d'atteindre l'équilibre thermique, où l'information encodée dans le système est perdue [61]). Nous décrivons donc deux méthodes différentes permettant un échantillonnage des processus précédents, soit la méthode d'échantillonnage à taux fixe et l'échantillonnage de Metropolis.

### 3.2.1 L'échantillonnage à taux fixe

Cette méthode d'échantillonnage est la plus simple et la plus générale. Pour chacun des processus élémentaires mentionnés précédemment, un taux fixe  $\gamma$  est associé :  $\gamma_c^q$  pour la création d'une paire d'anyons de charge  $q$  (en notant que  $\bar{q} = q$  pour tout  $q$  dans le modèle d'anyons d'Ising),  $\gamma_h$  pour le saut d'une charge d'un site à l'autre et  $\gamma_e$  pour l'échange. Étant donné que la décohérence est un processus de bruit différent, nous associons une probabilité  $p_d$  à de tels événements. Nous souhaitons calculer le temps de mémoire pour un canal de bruit à taux fixe. Or, un changement d'échelle des différents taux associés au bruit correspond simplement à un changement d'échelle quant au temps de mémoire. Nous utilisons donc la convention que le taux total est normalisé à 1, et que les différents taux présentés ci-après ne sont considérés que comme des taux relatifs.

Nous simulons la dynamique d'un système pour  $T$  pas de temps, où  $T$  est tiré d'une distribution de Poisson de moyenne  $T_0$ . À chaque pas de temps, une seule opération parmi l'ensemble { création d'une paire, saut d'anyons et échange d'anyons } est effectuée. Spécifiquement, une arête dirigée  $e = (i, j)$  est tout d'abord choisie au hasard selon une distribution de probabilité uniforme, et l'un des processus de bruit non trivial possible sur cette arête est choisi aléatoirement. Un processus de bruit est appelé trivial s'il laisse l'état du système inchangé. Les états sur lesquels chacun des processus peut agir de façon non triviale sont décrits dans le tableau 3.1, où  $q, q'$  dénotent des charges anioniques différentes du vide.

| Processus            | Charges aux sites $i, j$ |                 |                 |         |
|----------------------|--------------------------|-----------------|-----------------|---------|
|                      | $\mathbb{1}, \mathbb{1}$ | $\mathbb{1}, q$ | $q, \mathbb{1}$ | $q, q'$ |
| Création d'une paire | ✓                        | ✓               | ✓               | ✓       |
| Saut                 |                          |                 | ✓               | ✓       |
| Échange              |                          | ✓               | ✓               | ✓       |

TABLE 3.1 – Les processus élémentaires permis pour le modèle de bruit phénoménologique de la dynamique des anyons. Les crochets indiquent les processus possibles sur une arête dirigée du site  $i$  vers le site  $j$  du graphe  $G$ .  $q$  et  $q'$  dénotent des charges anyoniques différentes du vide. Table tirée de [37].

Étant donné l'ensemble des différents processus possibles sur une arête, une opération est choisie en tenant compte des taux relatifs  $\gamma$  de ces processus. Après chacun de ces processus, la charge totale sur chacun des deux sites est décochée avec probabilité  $p_d$ . Après  $T$  pas de temps, ceci correspond approximativement à la simulation du système évoluant pour un temps  $t_{sim} \propto (T_0/|E|)$  pour un graphe comportant  $|E|$  arêtes.

La méthode d'échantillonnage à taux fixe est un modèle de bruit naturel pour une architecture de calcul quantique, et peut être une bonne approximation pour les processus de thermalisation aux courtes échelles de temps pour un système d'anyons d'Ising, pour des taux bien choisis. Par contre, l'échelle de temps sur laquelle cette approximation reste valide peut être très faible. En particulier, on s'attend à ce qu'après une phase initiale de créations d'excitations, la diffusion des particules domine lorsque la densité d'anyons est proche de celle de l'équilibre.

### 3.2.2 L'échantillonnage de Métropolis

Afin de bien pouvoir capturer l'essence des processus de thermalisation de notre modèle, nous considérons une méthode d'échantillonnage basée sur la méthode de Metropolis. Pour déterminer la procédure à suivre, nous associons une masse (de manière équivalente, une énergie associée à la création d'un anyon) à chaque particule non triviale,  $m_\epsilon$  et  $m_\sigma$ . Nous définissons par ailleurs l'hamiltonien

$$H = \sum_{i \in V} (m_\epsilon P_i^\epsilon + m_\sigma P_i^\sigma), \quad (3.2)$$

avec  $P_i^q$  le projecteur de la charge totale  $q$  sur le site  $i$ .

La méthode de Métropolis propose tout d'abord un processus de bruit élémentaire suivant une probabilité de distribution fixe  $P(A \rightarrow B)$  pour ensuite calculer la différence d'énergie entre les états avant et après cette opération,  $\Delta_E$ . Cette opération est acceptée avec probabilité  $\min\{1, e^{-\beta\Delta_E}\}$ , pour un système avec une température inverse  $\beta = \frac{1}{k_B}T$ . En choisissant une distribution  $P(A \rightarrow B)$  réversible et ergodique, cette procédure garantit la convergence à un état thermal obéissant au bilan d'état détaillé.

Bien que le processus d'évolution que nous avons défini n'est pas techniquement ergodique sur l'ensemble de l'espace de Hilbert du système tel que précédemment défini, il est ergodique sur l'espace restreint qui est accessible par les opérations topologiques qui respectent les règles de super-sélection. Bien que le système soit défini de manière plus naturelle sur un espace de Hilbert plus grand, la structure du modèle est telle qu'il n'y a qu'un sous-espace de Hilbert «physique» qui nous intéresse; pour un système fermé, la charge totale est contrainte. En parlant d'ergodicité ou d'état thermique, nous considérons qu'il est défini sur l'espace physique restreint approprié.

Les processus de saut et de création de paires d'anyons que nous voulons considérer ne transforment pas toujours un état propre de l'énergie vers un autre état propre de l'énergie. Il est donc pratique de considérer un ensemble de processus de bruit nous assurant que le système reste dans un état propre de l'énergie après chaque étape élémentaire de l'évolution du système. Pour ce faire, nous travaillons dans la limite d'extrême décohérence de notre bruit en choisissant  $p_d = 1$ , c'est-à-dire que toute transformation menant à une superposition de charges topologiques à un site donné sera immédiatement suivie de décohérence, laissant ainsi chaque site dans un état de charge bien défini. Ceci nous permettra de définir de manière cohérente les probabilités d'accepter une transition. Parce que ce modèle de bruit est local et converge vers un état thermique satisfaisant le bilan d'état détaillé, nous croyons que cette méthode d'échantillonnage capture l'essence des processus de thermalisation réels.

Les règles de transition  $P(A \rightarrow B)$  que nous avons choisies sont les suivantes. Nous choisissons tout d'abord une arête dirigée  $E = (i, j)$  au hasard, avec une distribution de probabilité uniforme. Nous créons par la suite une paire de particules  $(q, q)$  à partir du vide avec une probabilité de  $P(q)$  sur cette arête, que nous amenons aux sites  $i$  et  $j$  respectivement, pour finalement mesurer la charge à chacun de ces deux sites. La probabilité  $P(q)$  est en fait conditionnée par les charges  $q_i$  et  $q_j$  présentes sur les sites  $i$  et  $j$  respectivement. Nous écrivons donc  $P(q|q_i, q_j)$ , donnée par

$$\begin{aligned}
P(\mathbb{1}|q_i, q_j) &= \frac{1}{2}, \\
P(\epsilon|q_i, q_j) &= \begin{cases} 0 & \text{si } q_i = q_j = \sigma, \\ \frac{1}{4} & \text{sinon,} \end{cases} \\
P(\sigma|q_i, q_j) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } q_i = q_j = \sigma \\ \frac{1}{4} & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ces différents taux impliquent la matrice de transition de la table 3.2. L'on peut directement vérifier que  $P(A \rightarrow B) = P(B \rightarrow A)$ , et donc il s'agit d'un processus stochastique réversible. Notons que ce choix particulier pour les taux de transition n'est pas le seul choix possible menant au respect du bilan d'état détaillé; cette convention a été choisie par simplicité.

|                                  | ( $\mathbb{1}, \mathbb{1}$ ) | ( $\epsilon, \epsilon$ ) | ( $\sigma, \sigma; \mathbb{1}$ ) | ( $\mathbb{1}, \epsilon$ ) | ( $\epsilon, \mathbb{1}$ ) | ( $\sigma, \sigma; \epsilon$ ) | ( $\mathbb{1}, \sigma$ ) | ( $\sigma, \mathbb{1}$ ) | ( $\epsilon, \sigma$ ) | ( $\sigma, \epsilon$ ) |
|----------------------------------|------------------------------|--------------------------|----------------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|
| ( $\mathbb{1}, \mathbb{1}$ )     | 1/2                          | 1/4                      | 1/4                              | 0                          | 0                          | 0                              | 0                        | 0                        | 0                      | 0                      |
| ( $\epsilon, \epsilon$ )         | 1/4                          | 1/2                      | 1/4                              | 0                          | 0                          | 0                              | 0                        | 0                        | 0                      | 0                      |
| ( $\sigma, \sigma; \mathbb{1}$ ) | 1/4                          | 1/4                      | 1/2                              | 0                          | 0                          | 0                              | 0                        | 0                        | 0                      | 0                      |
| ( $\epsilon, \mathbb{1}$ )       | 0                            | 0                        | 0                                | 1/2                        | 1/4                        | 1/4                            | 0                        | 0                        | 0                      | 0                      |
| ( $\mathbb{1}, \epsilon$ )       | 0                            | 0                        | 0                                | 1/4                        | 1/2                        | 1/4                            | 0                        | 0                        | 0                      | 0                      |
| ( $\sigma, \sigma; \epsilon$ )   | 0                            | 0                        | 0                                | 1/4                        | 1/4                        | 1/2                            | 0                        | 0                        | 0                      | 0                      |
| ( $\mathbb{1}, \sigma$ )         | 0                            | 0                        | 0                                | 0                          | 0                          | 0                              | 1/2                      | 1/8                      | 1/4                    | 1/8                    |
| ( $\sigma, \mathbb{1}$ )         | 0                            | 0                        | 0                                | 0                          | 0                          | 0                              | 1/8                      | 1/2                      | 1/8                    | 1/4                    |
| ( $\epsilon, \sigma$ )           | 0                            | 0                        | 0                                | 0                          | 0                          | 0                              | 1/4                      | 1/8                      | 1/2                    | 1/8                    |
| ( $\sigma, \epsilon$ )           | 0                            | 0                        | 0                                | 0                          | 0                          | 0                              | 1/8                      | 1/4                      | 1/8                    | 1/2                    |

TABLE 3.2 – La matrice de transition  $P(A \rightarrow B)$  provenant des équations 3.3 à 3.4. Les trois blocs ont la charge topologique totale 1,  $\epsilon$  et  $\sigma$  respectivement. Table tirée de [37].

Nous pouvons considérer ce modèle de bruit comme semi-classique, étant donné que ce dernier ne permet pas d'avoir la superposition d'états ayant différentes charges totales à

chaque site. À chaque pas de temps, le système est dans un état propre de l'énergie. L'espace de fusion des anyons est bien entendu simulé, mais l'espace de fusion de deux anyons (ou plus) sur le même site est projeté sur un état donné dans cette approximation. Ceci semble raisonnable en supposant que la charge totale d'anyons souffre de décohérence sur une échelle de temps beaucoup plus courte que l'échelle de temps sur laquelle les autres processus de bruit agissent. Nous anticipons donc que ce modèle est approprié sur de courtes périodes de temps pour de basses températures.

À des températures plus élevées où sur des échelles de temps plus longues (lorsque les processus de bruit sont dominés par la diffusion), cette approximation peut ne plus être valide. Un exemple de processus pour lequel ce modèle ne simule pas la bonne physique est montré sur la figure 3.1.

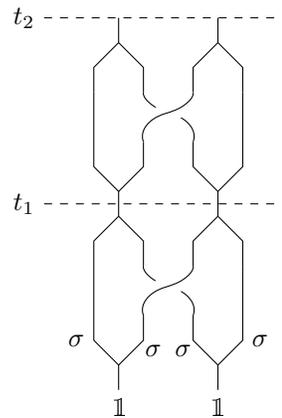


FIGURE 3.1 – Deux paires d'anyons de charge  $\sigma$  créées à partir du vide forment une tresse en échangeant un anyon de chaque paire à deux reprises. Le fait de fusionner les charges (événement de décohérence) au temps  $t_1$  puis au temps  $t_2$  ne donne pas le même résultat que de fusionner les anyons seulement au temps  $t_2$ . Figure tirée de [37].

Dans ce cas, les mesures de la charge au temps  $t_1$  donnent le vide pour les deux processus de fusion avec une probabilité de  $1/2$ , alors que deux anyons de charge  $\epsilon$  sont mesurée avec une probabilité de  $1/2$ . Les charges mesurées au temps  $t_2$  donnent les mêmes probabilités que celles au temps  $t_1$ . Par contre, si la charge n'est pas mesurée au temps  $t_1$ , alors les charges observées au temps  $t_2$  sont  $\epsilon$  pour les deux paires, et ce de manière déterministe.

Il est donc possible qu'une simulation semi-classique projetant la charge totale d'anyons à chaque pas de temps ne corresponde pas à la «vraie» situation physique, notamment si le taux de création de particules est élevé par rapport au temps de décohérence. Les résultats de simulation numérique présentés doivent être interprétés en étant conscient du fait que

les simulations ont été effectuées dans la limite où il y a peu d'excitations créées pendant la durée typique du processus de décohérence.

### 3.3 La correction d'erreurs pour le code topologique d'Ising

---

Nous imaginons encoder un état quantique dans l'espace topologique au temps  $t = 0$ . Le système est par la suite mis en contact avec un environnement thermique, qui aura pour effet de créer des erreurs (créations d'anyons). Une fois créées, ces excitations peuvent diffuser, effectuer des opérations de tressage ainsi que fusionner avec d'autres excitations. Ces processus de bruit sont simulés pour un temps  $t_{sim}$ , en utilisant l'une des méthodes présentées à la section 3.2. Une fois atteint le temps  $t_{sim}$ , nous supposons qu'il est possible de mesurer la charge topologique totale de chacun des sites du réseau. Nous ignorons à ce stade-ci les erreurs de mesure ; la charge rapportée dans chacun des sites correspond à la charge physique présente. Un algorithme de correction est par la suite utilisé, ayant pour but de ramener le système dans l'espace encodé (ou encore le sous-espace fondamental du système), et ce en s'assurant que le processus de bruit combiné à l'opération de correction ait un effet trivial sur l'espace encodé. Évidemment, l'algorithme de décodage n'a pas accès à l'historique des processus ayant mené à la configuration au temps  $t_{sim}$  ; il ne connaît que la position des anyons au temps  $t_{sim}$ .

#### 3.3.1 La détermination du seuil du code topologique d'Ising

Le seuil d'un code de correction d'erreur est une valeur critique pour un paramètre d'un modèle de bruit tel que dans la limite thermodynamique (en faisant tendre la taille du système vers l'infini), l'on peut s'assurer que l'opération de correction déterminée par le décodeur renversera de manière exacte les processus de bruit, pourvu que le paramètre en question se trouve sous la valeur critique. L'état quantique encodé sera donc retrouvé avec certitude pour un code de taille infini. Notons que le seuil dépend à la fois du décodeur et du modèle de bruit considéré.

Le paramètre qui nous intéresse pour nos modèles de bruit est  $t_{sim}$ , le temps de simulation du contact entre le système et un environnement thermique. Le système est tout d'abord initialisé dans un état encodé  $|\phi_0\rangle_C$ . On fait ensuite évoluer le système selon la méthode d'échantillonnage à taux fixe ou celle de Metropolis pour  $T$  pas de temps. Pour un réseau de taille linéaire  $L$  (avec  $L = \sqrt{|E|/2}$ , où  $|E|$  est le nombre d'arêtes),  $T$  est choisi selon une distribution de Poisson avec pour moyenne de  $T_0 = t_{sim}|E|$ . Si, après avoir appliqué

l'algorithme de décodage, nous retrouvons l'état  $|\phi_0\rangle_C$ , alors l'opération de décodage a réussie; dans le cas contraire, une erreur logique est survenue. Le seuil est donc dans ce cas-ci la valeur critique  $t^*$  telle que pour tout  $t_{\text{sim}} < t^*$  le taux d'erreur logique décroît de manière asymptotique vers 0 en fonction de la taille linéaire  $L$ , et ce pour tout état  $|\phi_0\rangle_C$  dans l'espace des états encodés.

### 3.3.2 L'algorithme d'appariement optimal (AAO)

L'algorithme de correction que nous considérons est basé sur l'algorithme d'Edmonds [62] et ses descendants [63], aussi utilisé dans le contexte du code torique, un code topologique supportant des anyons abéliens [18]. Cet algorithme se base sur la distance métrique entre les anyons sur la surface afin de déterminer quels anyons fusionner deux à deux. Cet algorithme génère un appariement des anyons tel que la somme des distances entre toutes les paires est globalement minimisée. La distance utilisée est celle dite de «Manhattan» : la distance entre deux sommets du réseau est le nombre minimal d'arêtes les séparant. Il est à noter qu'il ne s'agit pas d'un algorithme local; l'ensemble du système est considéré afin de déterminer l'appariement optimal.

Plusieurs complications surviennent par rapport au cas abélien. Dans le cas abélien, il est toujours possible de déterminer le canal de fusion de deux anyons, alors que ce n'est pas le cas pour les anyons non abéliens. L'opération de correction doit donc procéder de manière itérative, où l'algorithme propose tout d'abord un appariement (opérations de fusion), et demande par la suite au système le résultat des opérations de fusion. Lorsque certains de ces produits de fusion diffèrent du vide, une seconde ronde d'appariement entre les produits résiduels doit être effectuée, et ainsi de suite. De plus, la trajectoire précise des anyons non abéliens qui vont être fusionnés peut modifier les résultats des opérations de fusion, ce qui ne se produit pas dans le cas abélien. Ainsi, le décodeur ne prescrit pas uniquement un appariement, mais également un ensemble de trajectoires réalisant ces appariements.

Notre adaptation de cette méthode au code topologique d'Ising est très proche en termes algorithmiques de l'implémentation standard utilisée pour les systèmes donnant lieu à des anyons abéliens, mais il y a quelques différences qualitatives dans son implémentation. Ceci est dû à la nature probabiliste des résultats d'opérations de fusion pour les anyons non abéliens.

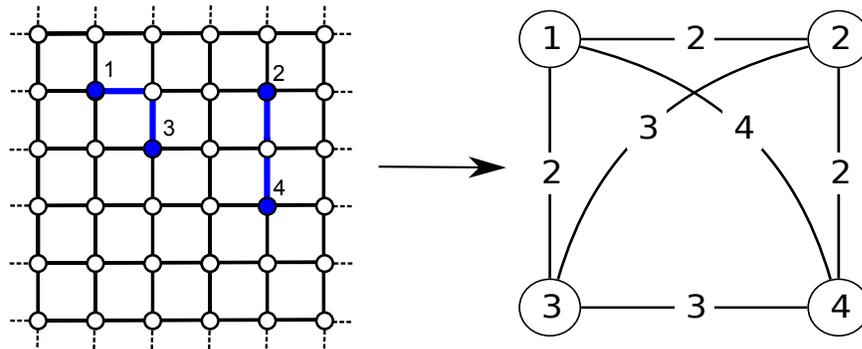


FIGURE 3.2 – Le graphe  $K_q$  (à droite) est construit à partir de la configuration d’anyons  $n_q^s$  (à gauche). Un sommet est associé à chaque anyon. Les deux sommets d’une paire sont connectés par une arête, avec un poids correspondant à la plus petite distance (de Manhattan) entre les anyons. Dans cet exemple, des conditions frontière périodiques sont utilisées.

Notre algorithme de correction est basé sur l’utilisation de la routine AAO\_élémentaire. Étant donné une charge  $q$  et une configuration des anyons de cette espèce  $n_q^s$ , cette routine construit tout d’abord un graphe complet  $K_q$ , tel qu’illustré sur la figure 3.2. Pour chaque anyon de charge  $q$ , un sommet est créé. Les sommets d’une paire sont reliés par une arête ayant comme poids la distance (minimale) séparant les deux anyons. L’algorithme AAO est par la suite utilisé afin de trouver un appariement optimal sur  $K_q$ . Chaque paire d’anyons appariés est par la suite fusionnée, en déplaçant l’un des anyons vers son partenaire le long du chemin le plus court les reliant (choisi au hasard s’il existe plus d’un tel chemin), comme on peut le voir sur la figure 3.3. Les paires d’anyons sont fusionnées dans un ordre aléatoire. Cette routine est résumée par le pseudo-code suivant :

---



---

**function** AAO\_ÉLÉMENTAIRE(charge  $q$ , configuration des anyons  $n_q^s$ )

1. Construction du graphe complet  $K_q$ .
2. Calcul d’un appariement optimal sur  $K_q$
3. Fusion des paires d’anyons correspondants appariés.

**end function**

---

Notons que l’implémentation de l’algorithme d’appariement optimal que nous utilisons est Blossom V [64], un programme dont le code source est ouvert et facilement accessible en ligne.

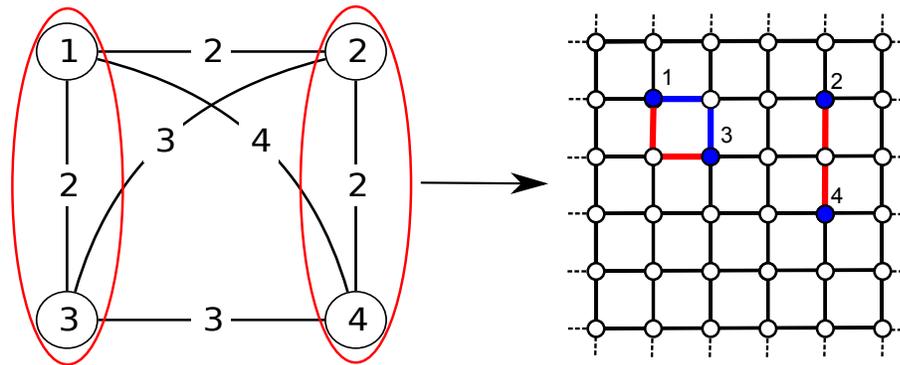


FIGURE 3.3 – L’algorithme d’appariement optimal permet de déterminer une opération de correction. Cet algorithme produit un appariement des sommets de  $K_q$  (à gauche) tel que le poids total des arêtes sélectionnées est minimal. Dans cet exemple, les appariements sont identifiés en rouge sur  $K_q$ , et une opération de fusion des anyons est ensuite effectuée (à droite).

Dans notre algorithme de correction, appelé AAO\_Ising, la routine précédente est appelée de manière séquentielle afin de tout d’abord faire fusionner les anyons de charge  $\sigma$  deux à deux, pour ensuite appairer et faire fusionner les anyons de charge  $\epsilon$ . Pour ce qui est des anyons de charge  $\sigma$ , le résultat de la fusion d’une paire peut être probabiliste, mais nous sommes assurés d’obtenir soit le vide, soit une particule de charge  $\epsilon$ . Une fois tous les anyons  $\sigma$  fusionnés, il ne peut y rester que des particules de type  $\epsilon$ . Si le nombre est impair, alors on sait que le système a subi une opération le faisant sortir de l’espace encodée, et donc une erreur logique a été commise. Si, au contraire, un nombre pair de particules  $\epsilon$  sont présentes dans le système, alors la routine AAO\_Élémentaire est encore une fois utilisée pour les appairer, et retourner dans l’espace encodé. On vérifie par la suite si une opération non triviale a été effectuée dans le sous-espace des états encodés. Cet algorithme est résumé par le pseudo-code suivant :

---

```

function AAO_ISING
  Mesure de la charge sur chaque site  $s$ 
  Appel de AAO_Élémentaire ( $\sigma, n_\sigma^s$ )
  Mesure de la charge sur chaque site  $s$ 
  if  $\sum n_\epsilon^s$  est pair then
    Appel de OOA_Élémentaire ( $\epsilon, n_\epsilon^s$ )
  end if
end function

```

---

Notons que la complexité de l’algorithme d’appariement optimal est de  $O(N^3)$ , avec  $N$  le nombre de sommets du graphe [65, 66]. Compte tenu du fait que la simulation des processus topologiques est efficace (de manière polynomiale avec  $N$  [55]), l’application de

l'algorithme AAO\_Ising est efficace.

### 3.4 Résultats numériques

Des simulations numériques ont d'abord été effectuées avec un échantillonnage à taux fixe pour des taux relatifs tels que  $\gamma_c^e = \gamma_c^c$ , avec tous les autres taux  $\gamma = 0$ , et dans le cas où il n'y a pas de décohérence avant la mesure de la charge de tous les sites par le décodeur ( $p_d = 0$ ). Bien que seules les simulations pour ce modèle de bruit pour l'échantillonnage à taux fixe sont montrées, plusieurs simulations numériques effectuées tendent à démontrer que les détails de modèles de bruit utilisé n'ont que peu d'influence sur les résultats obtenus. Il y a notamment toujours présence d'un seuil. Ceci peut s'expliquer de manière heuristique par le fait que l'on peut toujours exprimer les processus de saut et d'échange en termes de créations de paires sur des sites voisins.

La figure 3.4 montre le taux d'erreur logique en fonction du temps de simulation pour des codes de différentes tailles linéaires. La présence d'un seuil autour de  $t_{\text{sim}} \sim 0,20$  est clairement visible.

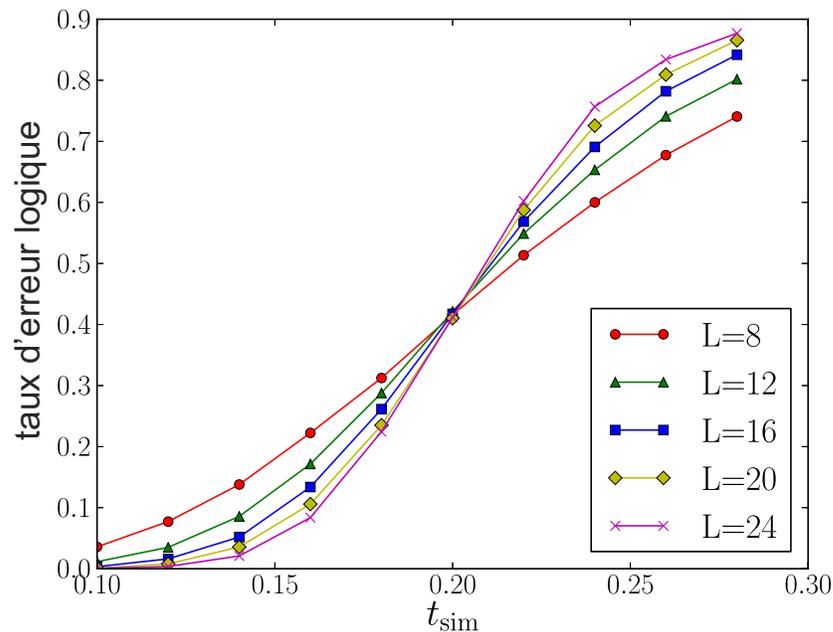


FIGURE 3.4 – Le taux d'erreur logique en fonction du temps de simulation  $t_{\text{sim}}$  pour des codes de différentes tailles linéaires de  $L = 8$  jusqu'à  $L = 24$ . Les barres d'erreurs ne sont pas visibles, étant plus petites que la taille des points. Graphe tiré de [37].

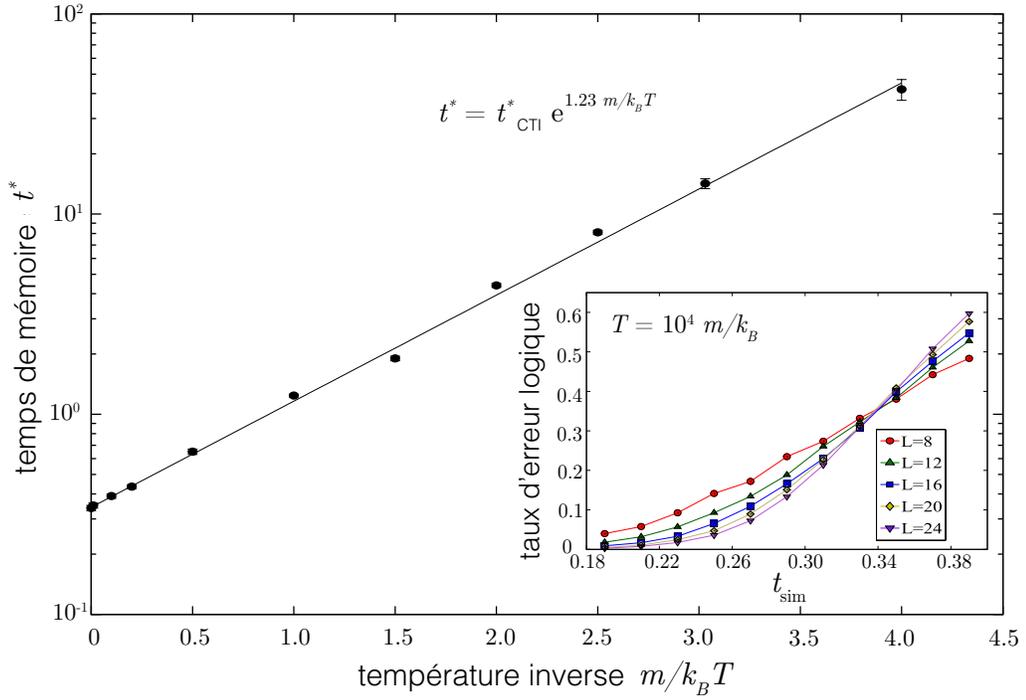


FIGURE 3.5 – Le temps de mémoire  $t^*$  croît de manière exponentielle avec l’inverse de la température. La régression linéaire est  $t^* = 0,343e^{1,23m/k_B T}$ . Les simulations thermiques utilisées afin de déterminer le temps de mémoire  $t_{\text{CTI}}^* \sim 0,343$  pour une température de  $T = 10^4 m/k_B$  et sont montrées dans l’encadré. Des simulations similaires (pour des tailles linéaires de  $L = 20, 16, 12$  et  $8$  ont été effectuées pour des valeurs de  $T = 10^4; 100; 10; 5; 2; 1; 0,75; 0,5; 0,4; 0,33$  et  $0,25$  afin de déterminer le temps de mémoire en fonction de la température. Graphe tiré de [37].

Pour ce qui est des simulations d’un gaz d’anyons d’Ising en contact avec un environnement thermique, le taux des différents mécanismes de bruit ne sont pas constants, mais dépendent de l’état du système et de la température. Nous avons fixé de manière arbitraire la masse des anyons de type  $\epsilon$  et  $\sigma$  à  $m = 1$ , déterminant ainsi l’énergie requise pour créer un anyon. Le seuil  $t^*$  est estimé à une température  $T$  donnée en faisant varier la taille linéaire du système  $L$  et en identifiant le point d’intersection des courbes, comme dans le cas de la figure 3.4. En trouvant le seuil pour différentes températures, on obtient les résultats de la figure 3.5. Notons que pour relier les résultats de ces simulations à des expériences, il faudra connaître le coût énergétique de la création d’anyons des différentes charges topologiques et tenir compte du temps de décohérence. Le pas de temps de ces simulations correspond essentiellement au temps de décohérence.

Nous trouvons que le temps de mémoire croît de manière exponentielle avec l’inverse

de la température, nous assurant ainsi de pouvoir garder l'information encodée intacte plus longtemps en réduisant la température du système. En supposant une densité de particule qui soit faible, à chaque étape la règle de Métropolis crée une paire de particules avec une probabilité de  $e^{-2m/k_B T}$ . Le temps de mémoire étant donné par  $t^* = 0,343e^{1,23m/k_B T}$  selon la figure 3.5, nous concluons que la densité de particule moyenne au temps  $t^*$  est proportionnelle à  $e^{-0,77m/k_B T}$ . La densité d'anyons nécessaire avant de ne plus pouvoir retrouver l'information encodée dans le système diminue donc avec la température. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'à basse température, les processus de diffusions (les processus déplaçant les anyons existants) deviennent dominants puisqu'il en coûte moins d'énergie que pour créer des paires d'anyons. Les anyons se déplaçant sur de plus grandes distances, une plus faible densité d'excitations est nécessaire pour atteindre le point où il devient impossible de retrouver l'information encodée. Remarquons que les processus topologiques influencent la diffusion des excitations dans le système. En effet, lorsque deux paires d'anyons  $\sigma$  sont créés sur des arêtes voisines, la fusion de deux anyons provenant de chacune des paires résulte en un fermion avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , augmentant l'énergie du système et donc ce qui diminue la probabilité qu'un tel événement survienne. Il pourrait être intéressant d'étudier les effets de modifier le ratio du coût énergétique de la création d'anyons de différentes charges topologiques sur le temps de mémoire. On pourrait par exemple imaginer que le fait d'avoir des fermions très massifs aurait pour conséquences de non seulement supprimer leur formation à partir du vide, mais également de grandement défavoriser le canal de fusion de paires d'anyons de charge  $\sigma$  vers une excitation fermionique. Ceci pourrait influencer la dynamique du système en «écranant» de manière effective les interactions topologiques des anyons non abéliens.

## Chapitre 4

# Correction d'erreur tolérante aux fautes pour les anyons non abéliens

Le chapitre précédent traite de la correction d'erreur pour les anyons non abéliens lorsque la mesure de la charge topologique en un site peut être effectuée de manière parfaite. Or, dans le cas où les erreurs de mesure sont présentes, il est impossible d'utiliser la même stratégie. Des erreurs de mesures peuvent créer des défauts fantômes, des résultats de mesure indiquant la présence de charge alors qu'il n'y en a pas. L'algorithme de correction interprète ces défauts comme des anyons présents dans le système, et donc essaiera de les apparier avec d'autres excitations. En essayant de déplacer une excitation qui n'existe pas vraiment, la procédure de correction peut donc elle-même créer des erreurs. Qui plus est, si une telle erreur de mesure est loin d'autres anyons détectés (qu'ils soient fantômes ou réels), la procédure de correction peut créer de longues chaînes d'erreurs.

Dans le cas des anyons abéliens, et plus spécifiquement dans le cas du code torique, le même problème se pose. Une stratégie possible repose sur la mesure de manière répétée dans le temps de la présence des différentes charges topologiques présentes sur le réseau. On peut donc imaginer disposer les résultats de mesures effectués aux différents temps sur un réseau tridimensionnel. On identifie par la suite les changements dans le temps de la charge topologique mesurée sur chacun des sites. Un changement de charge peut correspondre à la création d'une paire d'anyons (un site qui était non-chargé le devient), au déplacement d'un anyon ou d'un déplacement d'anyon suivi d'un processus de fusion (un site chargé se vide) ou encore d'une erreur de mesure (un site est vide, mais une charge est mesurée de manière ponctuelle ou vice-versa). Ainsi, en considérant ces changements de mesure comme des «excitations élémentaires» dans un espace tridimensionnel, il devient

possible de traiter les erreurs de mesure sur le même pied d'égalité que les erreurs affectant le système. Un algorithme d'appariement parfait peut par la suite être utilisé pour créer des couples d'excitations, permettant d'identifier les erreurs de mesures, et d'ainsi être capable de réparer l'effet du bruit. Notons que dans le cas abélien, il n'est pas nécessaire de corriger les erreurs, il suffit de pouvoir déterminer la classe d'équivalence des événements de bruit ayant mené à la configuration des défauts observés.

Or, cette stratégie précédente ne convient pas aux modèles d'anyons non abéliens. On pourrait garder en mémoire les positions des anyons *détectés* en fonction du temps, pour ensuite tenter de les appairer deux à deux pour les faire s'annihiler. Le fait de répéter les mesures dans le temps pourrait nous permettre de détecter les erreurs de mesure, et donc d'en tenir compte dans notre algorithme d'appariement. Contrairement au cas abélien, il faut absolument faire fusionner les anyons, comme il est impossible de prédire le résultat de fusion d'anyons non abéliens sans connaître précisément la topologie de leur trajectoire dans l'espace-temps. Le fait de déplacer des anyons peut cependant entraîner des tresses et des processus de fusion, influençant de manière irréversible l'état du système. De plus, la mesure des charges résultant des différents processus de fusion sera susceptible au bruit, et donc il faudra effectuer plusieurs rondes de mesure afin de déterminer les différentes charges mesurées avec confiance. Durant ce temps, d'autres anyons de charge  $\sigma$  seront créés, et le processus de correction de ces derniers devra être repris. Il ne s'agit donc plus simplement d'appairer les anyons deux à deux, mais de déterminer une trajectoire en «arbre» donnant lieu aux résultats de mesures observés les plus probables. Malheureusement, il n'y a pas d'algorithme classique connu permettant d'effectuer cette tâche de manière efficace [67].

Harrington [2], généralisant au cas bidimensionnel l'analyse de Gács [1, 68], a montré qu'étant donné un modèle de bruit probabiliste tel que ceux que nous considérons, les erreurs s'organisent naturellement en une structure hiérarchique, pourvu que la probabilité qu'une arête soit affectée par une erreur se situe sous une valeur critique. Cette structure hiérarchique comprend également les erreurs de mesures.

Cette classification des erreurs suggère fortement la structure pour un algorithme de correction d'erreur tolérant aux fautes basée sur l'utilisation de règles de correction locales et l'idée de renormalisation. Cette structure est également à la base de l'analyse de notre algorithme, et les points importants sont donc présentés. Il est à noter qu'il s'agit essentiellement de la même construction que celle présentée dans la thèse de doctorat de Harrington [2], qui est appliquée au cas du code torique (donnant lieu à des anyons abéliens). Le défi principal est de démontrer que cet algorithme permet de décoder les erreurs produisant des anyons non abéliens. Les contributions principales de cette thèse sont de présenter des résultats de simulation numérique démontrant le bon fonctionnement de l'algorithme pour

les anyons d'Ising ainsi qu'une analyse détaillée de l'algorithme démontrant l'existence d'un seuil pour les anyons non cycliques.

## 4.1 Classification du bruit

---

Puisque l'on considère un système admettant des erreurs de mesure, il est utile d'introduire une variante plus flexible que la méthode d'échantillonnage à taux fixe présentée à la section 3.2.1. Par ailleurs, ce modèle de bruit simplifie légèrement l'analyse de l'algorithme. On suppose qu'au temps  $t = 0$ , l'état du système se trouve dans le sous-espace des états fondamentaux, et qu'un état quantique  $y$  est encodé. L'évolution temporelle du système est discrétisée. À chaque pas de temps, on applique tout d'abord un bruit de charge, créant des excitations dans le système. Par la suite, la charge totale sur chaque site du réseau est mesurée et rapportée. La charge rapportée est susceptible au bruit.

Pour ce qui est du bruit de charge, on choisit tour à tour chaque arête connectant une paire de sites du système, dans un ordre aléatoire et différent pour chaque pas de temps. Pour chacune de ces arêtes  $(r, r')$ , un seul processus est sélectionné parmi l'ensemble  $\mathcal{P} = \{e_{c,c'}\}$  avec probabilité  $P(e_{c,c'})$  où le processus  $e_{c,c'}$  consiste en la création des anyons de charge  $c$  et  $c'$  (où l'on inclut le vide) qui sont par la suite placés dans les sites  $r$  et  $r'$  respectivement. Évidemment, par conservation de la charge locale, on a que  $c' = \bar{c}$ . On définit le taux de création de particules  $p = \sum_{c,c' \neq 1} P(e_{c,c'})$ .

Après avoir créé des excitations, une mesure de la charge topologique sur chaque site est effectuée, entraînant la fusion de la charge totale. Par la suite, la charge physique (celle véritablement présente dans le site) est rapportée avec une probabilité  $(1 - q)$ , alors qu'avec probabilité  $q$ , la charge rapportée est erronée. Dans ce dernier cas, une des autres charges topologiques admises par le modèle anyonique,  $\{c_i\}$ , est rapportée avec probabilité  $q_i$ . Nous imposons la contrainte  $\sum_i q_i = 1$ , c.-à-d. une charge topologique est toujours rapportée. Notons au passage qu'on peut interpréter une erreur de mesure comme affectant une arête verticale reliant le site  $i$  au temps  $t$  et le site  $i$  au temps  $t + 1$ , ce qui donne naturellement naissance à un réseau tridimensionnel où les arêtes «spatiales» supportent les erreurs affectant le système alors que les arêtes «temporelles» supportent les erreurs de mesure.

### 4.1.1 Définitions de base

On considère le réseau carré  $\Lambda$  évoluant dans le temps, constituant donc une structure tridimensionnelle cubique. On imagine distribuer les erreurs dans l'espace-temps, agissant soit sur des arêtes spatiales, soit sur des arêtes temporelles. Les erreurs agissant sur les arêtes horizontales sont celles créant des charges non triviales, tandis que les arêtes verticales sont des erreurs de mesures affectant les syndromes correspondants rapportés. Pour chaque erreur  $e$  survenant, on lui associe comme représentant le point  $p(e) = (r, t)$ , avec  $r$  la position du centre de l'arête sur laquelle  $e$  agit, et  $t$  le temps caractérisant le centre de l'arête. Les erreurs de charge sont donc décrites par des temps entiers, et une des deux coordonnées spatiales est un demi-entier, tandis que les erreurs de mesures sont décrites par une coordonnée temporelle demi-entière, et des coordonnées spatiales entières.

Selon le contexte, on associe un ensemble d'erreurs  $E$  à l'ensemble des points qui leurs correspondent (tous les points d'une arête constituant une erreur sont considérés), et l'on dénote par  $\mathcal{E}$  l'ensemble de toutes les erreurs.

L'on définit également deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $a, b \geq 2$ , et l'on choisit  $Q \geq 4(a + 2)$  et  $U = b^2 \geq 4(b + 2)$ . Deux ensembles de points (erreurs)  $A$  et  $B$  sont  $(l, m, n)$ -liés s'il existe une boîte dont les coordonnées sont  $[x, x + l) \times [y, y + m) \times [z, z + n)$  contenant au moins un élément de  $A$  et un élément de  $B$ . Si  $A$  et  $B$  ne sont pas  $(l, m, n)$ -liés, alors ils sont  $(l, m, n)$ -séparés.

### 4.1.2 Le bruit de niveau 0

L'ensemble non vide d'erreurs  $S \subset \mathcal{E}$  est une erreur potentielle de niveau 0 si  $S$  est contenue dans une boîte avec coordonnées  $[x, x + 1) \times [y, y + 1) \times [t, t + 1)$ . Notons que cela implique que  $S$  ne contient que des erreurs de mesure ou encore des erreurs de charge.  $S$  est une véritable erreur de niveau 0 si de plus elle est  $(a, a, b)$ -séparé de  $\mathcal{E} \setminus S$ . L'union de toutes les véritables erreurs de niveau 0 est appelée bruit de niveau 0, dénoté par le symbole  $E_0$ .

### 4.1.3 Le bruit de niveau $n$

Les erreurs potentielles et les véritables erreurs de niveau  $n$  sont définies de manière inductive. On suppose pour se faire que les erreurs potentielles, les véritables erreurs et le bruit de niveau  $k$  sont tous bien définis pour tout  $k < n$ . Un ensemble non vide  $S \subset \mathcal{E} \setminus E_{n-1}$  est une erreur potentielle de niveau  $n$  si les deux conditions suivantes sont remplies :

- (i)  $S$  est contenue dans une boîte de taille  $Q^n \times Q^n \times U^n$ , et
- (ii)  $S$  contient au moins 2 erreurs potentielles de niveau  $n - 1$  disjointes qui soient  $(aQ^{n-1}, aQ^{n-1}, bU^{n-1})$ -liées.

$S$  est une véritable erreur de niveau  $n$  si les deux conditions suivantes sont également remplies :

- (iii)  $S$  ne contient pas deux erreurs potentielles de niveau  $n$  qui soient  $(4(a+2)Q^{n-1}, 4(a+2)Q^{n-1}, 4(b+2)U^{n-1})$ -séparées, et
- (iv)  $S$  et  $\mathcal{E} \setminus (S \cup E_{n-1})$  sont  $(aQ^n, aQ^n, bU^n)$ -séparées.

$E_n$ , le bruit de niveau  $n$ , est défini comme étant l'union de toutes les véritables erreurs de niveau  $n$  et du bruit de niveau  $n - 1$ ,  $E_{n-1}$ . Avec ces définitions, il est possible de prouver qu'une véritable erreur de niveau  $n$  est toujours contenue dans une boîte de taille  $\min\{Q, 7(a+2)\}Q^{n-1} \times \min\{Q, 7(a+2)\}Q^{n-1} \times \min\{U, 7(b+2)\}U^{n-1}$  [2].

#### 4.1.4 Le taux d'erreur renormalisé $\epsilon_n$

On définit le taux d'erreur de niveau  $n$ ,  $\epsilon_n$ , comme étant la probabilité qu'une boîte de taille  $Q^n \times Q^n \times U^n$  possède une intersection non vide avec au moins une erreur potentielle de niveau  $n$ . Étant donné les définitions précédentes, il est possible de borner  $\epsilon_n$ .

**Lemme 1.** *Le taux d'erreur de niveau  $n$ ,  $\epsilon_n$ , est bornée supérieurement par  $(4Q^4U^2(p+q))^{2^n}$ .*

*Démonstration.* On considère d'abord la probabilité qu'il y ait au moins une erreur potentielle de niveau  $n - 1$  ayant une intersection non vide avec une boîte de taille  $Q^n \times Q^n \times U^n$ . Cette probabilité est bornée supérieurement par  $(Q^2U) \epsilon_{n-1}$ , en utilisant l'inégalité de Boole [69]. Comme chaque erreur potentielle de niveau  $n$  est composée d'au moins 2 erreurs potentielles de niveau  $n - 1$ , on trouve en utilisant le théorème de Reimer<sup>1</sup> que  $\epsilon_n \leq (Q^2U\epsilon_{n-1})^2$ . En utilisant cette équation récursive et le fait que le taux d'erreur de niveau 0 est borné par  $\epsilon_0 \leq 4(p+q)$ , on arrive à borner le taux d'erreur de niveau  $n$  par

$$\epsilon_n \leq \left(4Q^4U^2(p+q)\right)^{2^n}. \quad (4.1)$$

□

---

1. Le théorème de Reimer [70] stipule que si  $A$  et  $B$  sont des événements distincts se réalisant simultanément (dénoté par  $A \cdot B$ ), alors  $P(A \cdot B) \leq P(A)P(B)$ .

Pour que cette classification des erreurs en véritables erreurs soit utile, on doit s'assurer qu'elle englobe chacune des erreurs individuelles.

**Lemme 2.** *Si  $p + q < \frac{Q^{-4}U^{-2}}{4}$ , alors chaque erreur  $e$  fait partie d'une et une seule véritable erreur de niveau  $n$ , pour un  $n \in \mathbb{N}$  fini, avec probabilité 1.*

*Démonstration.* On montre d'abord que chaque erreur  $e$  fait partie d'au plus une seule véritable erreur. On considère d'abord  $S \subset \mathcal{E} \setminus E_{n-1}$ , une véritable erreur de niveau  $n$ . Par définition,  $S$  et  $\mathcal{E} \setminus (S \cup E_{n-1})$  sont  $(aQ^n, aQ^n, bU^n)$ -séparés (en considérant que  $E_{-1} = \emptyset$ ). Donc, si une erreur individuelle  $e$  fait partie de  $S$ , alors  $e$  ne peut pas faire partie d'une autre véritable erreur  $S'$  de niveau  $n$  ou supérieure, comme  $S$  est contenue dans une boîte de taille  $Q^n \times Q^n \times U^n$ .

On montre ensuite que chaque erreur  $e$  fait partie d'une véritable erreur. Soit  $\mathcal{E}_n$  l'événement qu'il existe une boîte de taille  $Q^n \times Q^n \times U^n$  ayant une intersection non vide avec au moins une erreur potentielle de niveau  $n$ . Le lemme 1 montre que  $P(\mathcal{E}_n) = \epsilon_n \leq \alpha^{2^n}$ , avec  $0 \leq \alpha < 1$ . On a donc que  $\sum_i^\infty P(\mathcal{E}_i)$  converge.

Supposons qu'il existe une erreur  $e$  telle qu'elle ne fasse partie d'aucune véritable erreur. Par définition,  $e$  est une erreur potentielle de niveau 0. Comme ce n'est pas une véritable erreur de niveau 0,  $e$  n'est pas  $(a, a, b)$ -séparée de  $\mathcal{E} \setminus \{e\}$ . De plus, il existe  $\{s\} \subset \mathcal{E}$  telle que  $s$  et  $e$  sont  $(a, a, b)$ -liées. Considérons  $S = \{e\} \cup \{s\}$ . Par définition,  $S$  est contenue dans une boîte de taille  $Q \times Q \times U$ , et contient 2 erreurs potentielles de niveau 0 disjointes qui sont  $(a, a, b)$ -liées.  $S$  est donc une erreur potentielle de niveau 1. Comme  $e$  ne fait pas partie d'une véritable erreur de niveau 1, la condition (iv) doit être violée puisque  $S$  satisfait la condition (iii) par construction. On peut donc trouver  $S'$  telle que  $S \cap S' = \emptyset$ , et tel que  $S'$  est  $(aQ, aQ, bU)$ -lié avec  $S$ . De plus,  $S'$  peut être choisi tel qu'il soit assez petit pour former une erreur potentielle de niveau 1. Par construction,  $S \cup S'$  est contenu dans une boîte de taille  $(a+2)Q \times (a+2)Q \times (b+2)U$ , qui est plus petite que  $Q^2 \times Q^2 \times U^2$ . Cette boîte contient 2 erreurs potentielles de niveau 1 qui sont disjointes et qui sont  $(aQ, aQ, bU)$ -liées.  $S \cup S'$  est donc une erreur potentielle de niveau 2. Il est clair que ce raisonnement peut être répété inductivement sur  $n$ . Nous avons donc que  $\{e\}$  fait partie d'une erreur potentielle de niveau  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le lemme de Borel-Cantelli stipule qu'une telle erreur a une probabilité 0 de survenir,<sup>2</sup> une contradiction.  $\square$

2. Le lemme de Borel-Cantelli [71, 72] stipule que si une séquence d'événements  $\mathcal{E}_n$  est telle que  $\sum_{n=0}^\infty P(\mathcal{E}_n)$  converge, alors  $P(\bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty \mathcal{E}_k) = 0$ .

#### 4.1.5 Exemple de classification des erreurs

Les véritables erreurs étant définies de manière inductive et de façon plutôt aride, il est utile de donner un exemple explicite. Afin de simplifier la représentation, seules les erreurs de charge affectant un seul pas de temps sont considérées. Dans le cas où plusieurs pas de temps sont considérés, une généralisation au cas tridimensionnel est directe.

La figure 4.1 illustre une partie d'un réseau étant affecté par du bruit à un temps donné. Les arêtes surlignées en rouge de la figure 4.1a sont les arêtes affectées par des erreurs de charge, et donc les sites en rouge sont les sites qui contiennent potentiellement des anyons non triviaux. Notons que les erreurs créant des paires d'anyons de différentes charges ne sont pas identifiées par souci de simplicité, seulement la présence d'erreur est indiquée. Pour cet exemple particulier, les paramètres  $a = 2$  et  $Q = 3$  ont été choisis. Par ailleurs, nous ne considérons qu'un seul pas de temps pour simplifier la représentation.

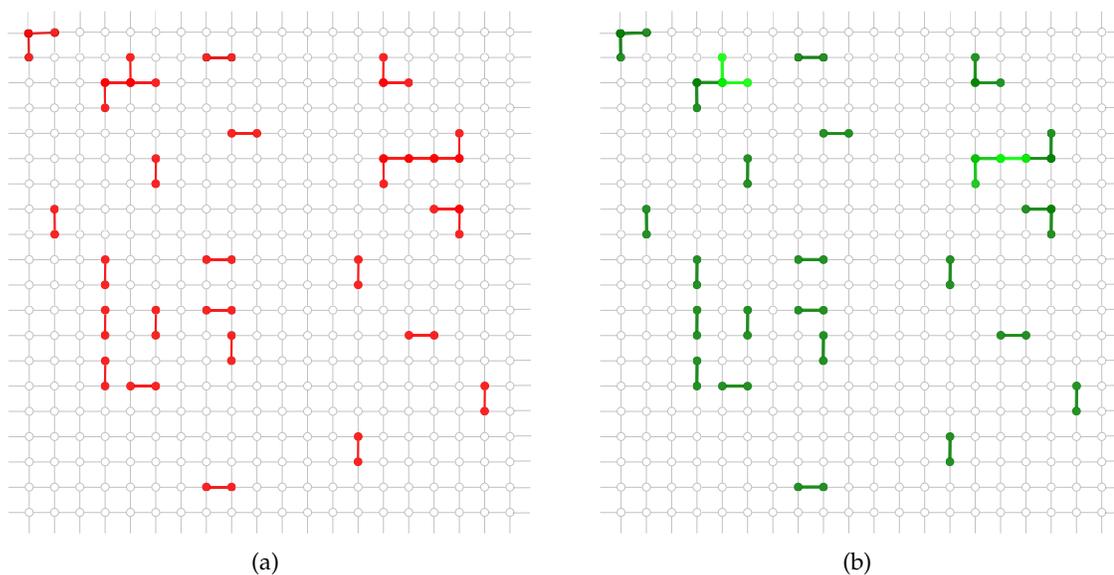


FIGURE 4.1 – (a) Les erreurs «atomiques» affectant une partie du réseau à un temps donné sont indiqués en rouges dans la figure. (b) Une décomposition possible de toutes les erreurs «atomiques» en erreurs potentielles de niveau 0 est montrée en vert. Différents tons de vert sont utilisés pour identifier différentes erreurs potentielles lorsqu'il y a une ambiguïté possible.

Afin de classifier les erreurs «atomiques» en véritables erreurs, on commence par identifier un choix d'erreurs potentielles de niveau 0, indiqués en vert sur la figure 4.1b. Dans le cas où des amas d'erreurs peuvent être séparées en différents ensembles d'erreurs potentielles

de niveau 0, les différentes teintes de vert indiquent un choix possible.

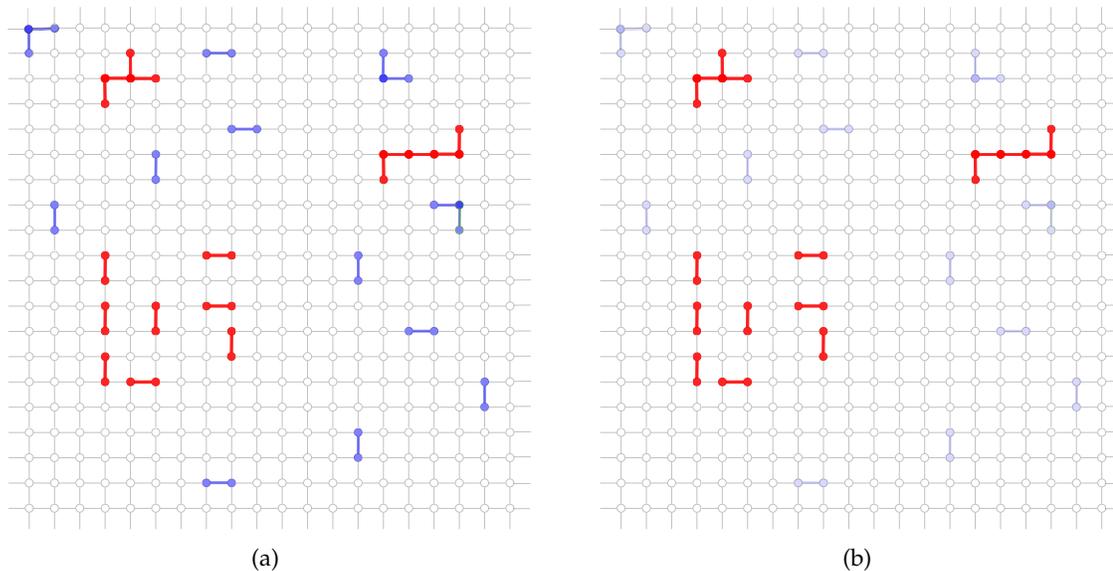


FIGURE 4.2 – (a) Parmi les erreurs potentielles de niveau 0, celles qui sont des véritables erreurs de niveau 0 sont identifiées en bleu. (b) L'ensemble des véritables erreurs de niveau 0 forment collectivement le bruit de niveau 0 (identifiés en bleu pâle), et les erreurs les formant sont ignorées afin de déterminer les véritables erreurs des niveaux supérieurs.

Les véritables erreurs de niveau 0 sont ensuite identifiées parmi les erreurs potentielles de niveau 0. Dans notre exemple, il s'agit des erreurs potentielles qui sont  $(2, 2)$ -séparées de toute autre erreur atomique, tel qu'illustré sur la figure 4.2a. L'ensemble des véritables erreurs de niveau 0 est appelé le bruit de niveau 0,  $E_0$ , et ces erreurs sont ignorées en ce qui a trait à l'identification des véritables erreurs des niveaux supérieurs.

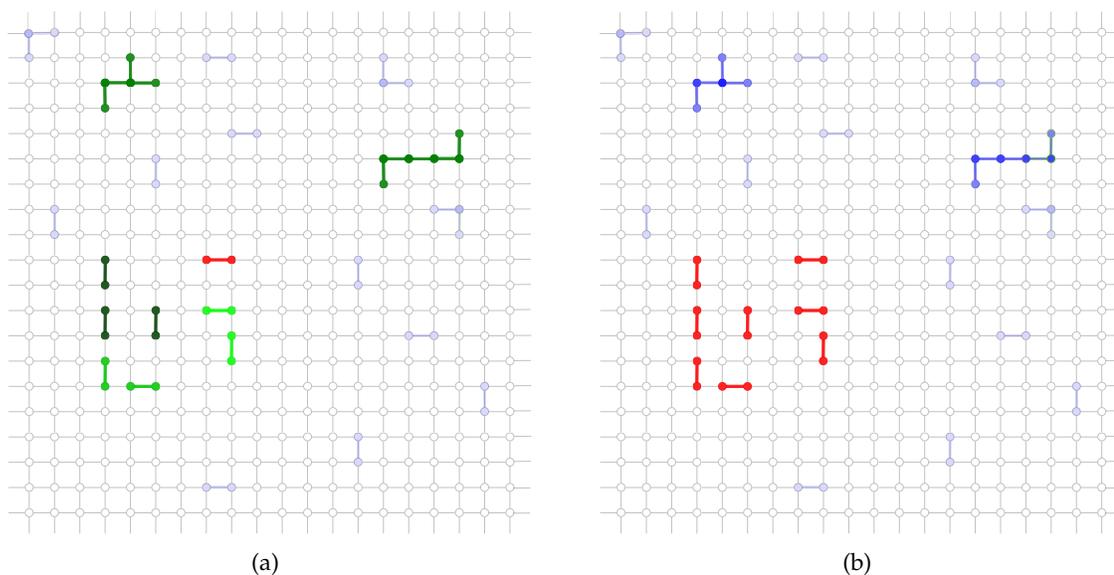


FIGURE 4.3 – (a) Un choix possible pour les erreurs potentielles de niveau 1 est montré en vert. Différentes teintes sont utilisées afin d’identifier différentes erreurs potentielles, lorsqu’elles sont rapprochées. Notons qu’il est possible d’inclure l’erreur en rouge dans une erreur potentielle de niveau 1, mais qu’il faudrait alors y ajouter d’autres erreurs étant dans l’une ou l’autre des erreurs potentielles de niveau 1 déjà identifiées. Nous n’indiquons donc pas un tel choix par souci de clarté. (b) Les véritables erreurs de niveau 1 sont identifiées en bleu foncé. Les erreurs potentielles n’en faisant pas partie sont trop rapprochées et ne satisfont pas au critère (iv).

Les erreurs ne faisant pas partie du bruit de niveau 0 sont regroupés en erreurs potentielles de niveau 1, chacune étant contenue dans une boîte de taille  $3 \times 3$  et étant formé d’au moins deux erreurs potentielles de niveau 0, et donc d’au moins deux erreurs atomiques. Un choix possible est montré à la figure 4.3a. Les véritables erreurs de niveau 1 sont par la suite trouvées ; elles sont éloignées les unes des autres et des erreurs atomiques ne faisant pas partie du bruit de niveau 0 par une distance d’au moins  $aQ = 6$ , voir figure 4.3b. L’ensemble des véritables erreurs de niveau 1 et de niveau 0 forment le bruit de niveau 1,  $E_1$ .

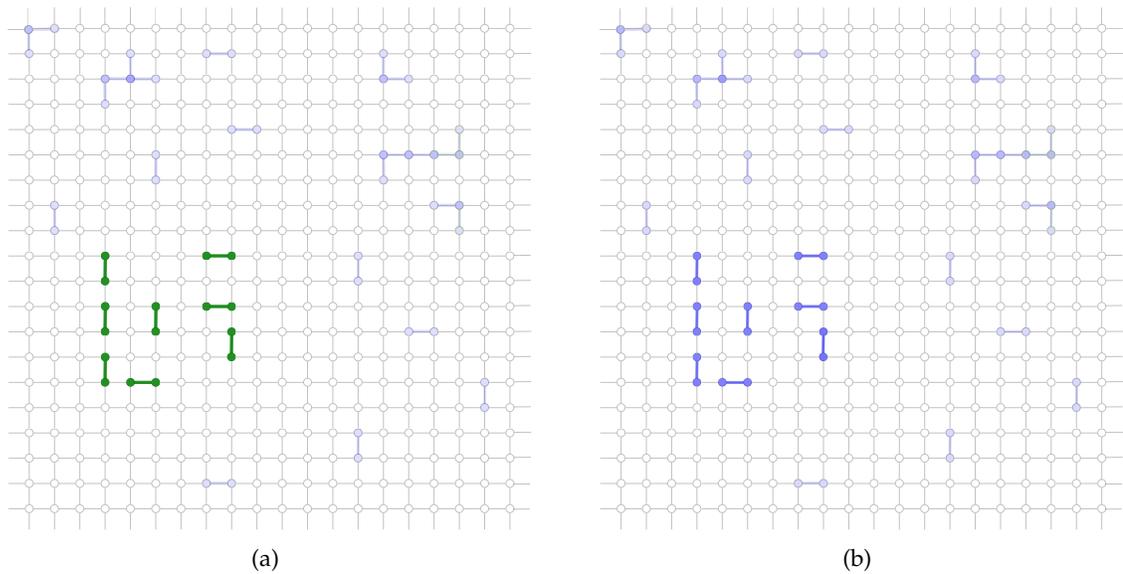


FIGURE 4.4 – (a) Une erreur potentielle de niveau 2 est montrée en vert, incluant toutes les erreurs atomiques ne faisant pas partie du bruit de niveau 1. (b) Il est aisé de vérifier qu’il s’agit en fait d’une véritable erreur de niveau 2, indiqué en bleu foncé.

Parmi les erreurs n’étant pas dans  $E_1$ , les erreurs potentielles de niveau 2 sont identifiées. Dans l’exemple illustré à la figure 4.4a, toutes ces erreurs peuvent être regroupées en une seule erreur potentielle de niveau 2, montrée en vert, puisqu’elles forment 3 erreurs potentielles de niveau 1, et sont contenues dans une boîte de taille  $3^2 \times 3^2$ . De plus, il est facile de vérifier qu’il s’agit également d’une véritable erreur de niveau 2, cette dernière étant éloignée de  $E \setminus \{S \cup E_1\}$  et ne contenant pas d’erreur potentielle de niveau 1 qui soit suffisamment éloignée pour ne pas satisfaire le critère (iv). Dans cet exemple, toutes les erreurs font donc partie d’une erreur de niveau 2 ou moins.

## 4.2 La procédure de correction d’erreur

### 4.2.1 Les automates cellulaires

La méthode de correction que nous décrivons est basée sur l’utilisation d’automates cellulaires classiques. Bien que la théorie des automates cellulaires classiques en présence d’erreurs soit bien développée, nous ne considérons que le cas idéal : c’est-à-dire que nous supposons le dispositif quantique ainsi que les mesures effectuées sur celui-ci sont bruyantes,

mais que l'automate cellulaire (classique) utilisé pour les corriger est parfait. Il a été démontré que pourvu que le taux d'erreur soit assez faible, il est toujours possible d'implémenter des automates cellulaires classiques de manière tolérante aux fautes en 2 dimensions spatiales [73], donc nous ne voyons pas d'obstacle fondamental à incorporer de telles erreurs dans notre architecture dans un deuxième temps. Considérons un réseau de sites  $\Lambda$ , dans lequel chaque site  $i$  peut prendre un état parmi un ensemble fini  $\mathcal{S}(i) = \{s_i\}$ . Pour chaque site  $i$ , on définit son voisinage  $\mathcal{V}(i)$ , contenant le site  $i$  et un nombre restreint de sites voisins. On peut par exemple choisir le site  $i$  et ses plus proches voisins. Les règles de transition  $\mathcal{T}$  sont des fonctions qui pour chaque site  $i$ , appliquent un opérateur  $\hat{O}_i$  affectant le voisinage local du site  $i$ . L'opérateur appliqué dépend de l'état des sites dans son voisinage. Mathématiquement, cela peut être illustré par  $\mathcal{T}_i : \mathcal{V}(i) \rightarrow \hat{O}(i)$ . Notons que les règles de transition peuvent différer pour différents sites.

Notons que  $\mathcal{S}(i)$  peut contenir non seulement la charge topologique rapportée, mais aussi une série de variables pouvant servir à communiquer de manière locale avec les automates cellulaires voisins de façon à ce que le calcul réalisé soit une simulation du même automate cellulaire. Dans cette simulation, une petite colonie de sites agit comme un site virtuel de l'automate cellulaire. Cette auto similarité sera inévitablement présente dans la simulation elle-même, c'est-à-dire que le calcul effectué par l'automate cellulaire dans la simulation sera lui-même une simulation d'un automate cellulaire, et ainsi de suite.

La théorie générale des automates cellulaires classiques n'est pas abordée ici, l'automate cellulaire spécifique utilisé par notre algorithme ainsi que ses propriétés les plus importantes sont décrites dans les sections suivantes. En particulier, nous ne nous attardons pas à la structure interne des automates cellulaires permettant la simulation des niveaux de renormalisation supérieurs, ni de l'effet d'erreurs classique affectant le fonctionnement des automates cellulaires. Nous sommes cependant confiants à l'effet qu'il soit possible de construire un tel réseau d'automates cellulaires en utilisant des ressources finies, étant donné les résultats rapportés ci-haut.

#### 4.2.2 L'idée générale de l'algorithme

La conjecture du «taux positif» (positive rate conjecture en anglais) stipule qu'un réseau d'automates cellulaires unidimensionnel ne possède pas de seuil, c'est-à-dire qu'un tel réseau ne peut pas être utilisé afin d'encoder de l'information de manière robuste. Cette idée est supportée par le fait qu'un système physique unidimensionnel avec couplage à courte portée invariant sous translation ne peut produire une transition de phase ordonnée-désordonnée.

L'idée est que lorsqu'une erreur survient, elle crée un petit domaine dans lequel l'état du système est modifié de manière cohérente. À l'intérieur de ce domaine, les règles de l'automate cellulaire sont appliquées de manière consistante, et donc ne peuvent pas détecter la présence de l'erreur. C'est à la frontière du domaine d'erreur que l'on peut détecter que quelque chose cloche. Or, en une dimension, lorsqu'on identifie la frontière d'un domaine d'erreur, on ne peut pas déterminer de quel côté de la frontière se trouve l'erreur ; on ne peut donc pas la corriger.

Gács montre que cette conjecture est fautive en présentant une construction explicite. Cette construction se base sur l'utilisation d'automates cellulaires pouvant corriger de petites erreurs, et doués de la capacité à s'auto simuler à un niveau «renormalisé». Le travail de Gács est notoirement complexe : il lui a fallu plus de 15 ans pour écrire une version accessible aux experts après la parution originale et le résumé de sa preuve fait 35 pages ! Ainsi, la preuve que nous présentons ne va pas dans le même niveau de détails ; on se concentre sur les différences principales entre les cas abélien et non abélien.

L'organisation hiérarchique des erreurs est parfaitement adaptée aux algorithmes proposés par Gács [1, 68], et plus tard Harrington [2]. L'idée est d'utiliser des automates cellulaires implémentant des règles de transitions locales basées sur la mesure de syndromes, eux aussi locaux. Les règles de transition déplacent les anyons afin de les apparier et d'ainsi les faire fusionner vers le vide. Ces règles sont bâties de sorte qu'elles peuvent corriger toute véritable erreur de niveau 0, simplement en appliquant les règles de transition locales à chaque pas de temps. Ceci est possible puisque les véritables erreurs de niveau 0 sont contenues dans des boîtes contenant au plus  $2 \times 2$  sites à un temps unique, et sont espacées de toute autre erreur dans l'espace et le temps. Pour les chaînes d'erreurs ayant une extension spatiale trop grande pour être de niveau 0, l'idée est d'organiser les automates cellulaires en *colonies*, de taille  $Q \times Q$ . Si les règles de transition au niveau physique sont incapables d'apparier un anyon avec un autre dans son voisinage, alors les règles sont construites de manière à concentrer les anyons d'une colonie vers le centre de celle-ci. À chaque  $U$  pas de temps, les automates cellulaires des différentes colonies se synchronisent pour appliquer des règles de transitions «renormalisées». Chaque colonie est traitée comme un site physique, et un syndrome renormalisé est déclaré, suivant des règles qui sont spécifiées plus loin. À partir des syndromes rapportés, des règles de transition renormalisées sont appliquées, qui correspondent aux mêmes règles que celles appliquées au niveau physique, mais cette fois appliquées au niveau des colonies. Ces règles déplacent des anyons de charges appropriés du centre d'une colonie à l'autre, toujours dans le but d'apparier les anyons de charges opposées afin de les faire fusionner vers le vide. Le but est de faire en sorte qu'au premier niveau de renormalisation, les véritables erreurs de niveau 1 soient corrigées. Cette procé-

ture de renormalisation est aussi répétée pour les niveaux supérieurs. Pourvu que le taux d'erreur soit assez bas, le lemme 2 nous assure que la structure d'erreurs véritables est valide. Dans ces conditions, le lemme 1 stipule que le taux d'erreur de niveau  $n$  tombe doublement exponentiellement avec  $n$ . Étant donné qu'une erreur logique sur l'espace encodé nécessite une erreur physique couvrant l'ensemble du système, cette stratégie permet de diminuer la probabilité qu'une erreur logique survienne simplement en augmentant la taille linéaire du système (voir équation (4.1)).

### 4.2.3 Description sommaire de la procédure

Considérons la variable  $c(\mathbf{r}, t)$  décrivant la *vraie* charge topologique présente au site  $\mathbf{r}$ , au temps  $t$ , avec  $t$  pouvant prendre des valeurs entières et demie entières. Les valeurs demi-entières de  $t$  décrivent la charge présente dans le site après un processus de mesure, tandis que les valeurs entières décrivent la charge présente après l'application des règles de transition. Le syndrome  $s_0(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})$ , avec  $t$  entier, décrit la charge rapportée après que la mesure eut été effectuée au temps  $t + \frac{1}{2}$ . Cette mesure diffère de la vraie charge  $c(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})$  avec probabilité au plus  $q$ . L'indice 0 se réfère au fait que  $s_0(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})$  décrit le syndrome d'un site physique, ce qui correspond au niveau 0 dans la méthode de renormalisation utilisée par les automates cellulaires. Les variables  $c$  et  $s_0$  peuvent toutes deux prendre  $|\mathcal{A}|$  valeurs différentes, correspondant au nombre de charges topologiques possibles dans le modèle anyonique considéré.

Le réseau est séparé en colonies carrées de taille  $Q \times Q$ , où nous choisissons  $Q$  impair, afin de simplifier l'analyse. Les règles de transition sont appliquées à chaque pas de temps, et dépendent des syndromes rapportés. Une colonie est séparée en 11 régions différentes (voir figure 4.5), chacune possédant des règles de transition différentes. Les règles de transition appliquées dépendent à la fois du syndrome d'un site donné, et de celui des sites voisins contenus dans une boîte de taille  $3 \times 3$  centrée autour du site considéré. Les règles de transitions sont bâties de manière à ramener ensemble les excitations ayant été créées localement, dans l'espoir de les faire fusionner vers le vide. Si une charge non triviale est détectée dans un site, deux cas de figure sont possibles. Tout d'abord, si une autre charge non triviale est détectée dans le voisinage du site, les règles de transitions chercheront à faire fusionner les anyons. Si aucune autre charge n'est détectée dans le voisinage de l'anyon détecté, alors les règles de transition déplaceront l'excitation vers le centre de la colonie.

À la fin de chaque période de  $U = b^2$  pas de temps, les sites sont regroupés en « colonies renormalisées », de taille  $Q^2 \times Q^2$ , comme le montre la figure 4.6. Deux nouveaux syndromes

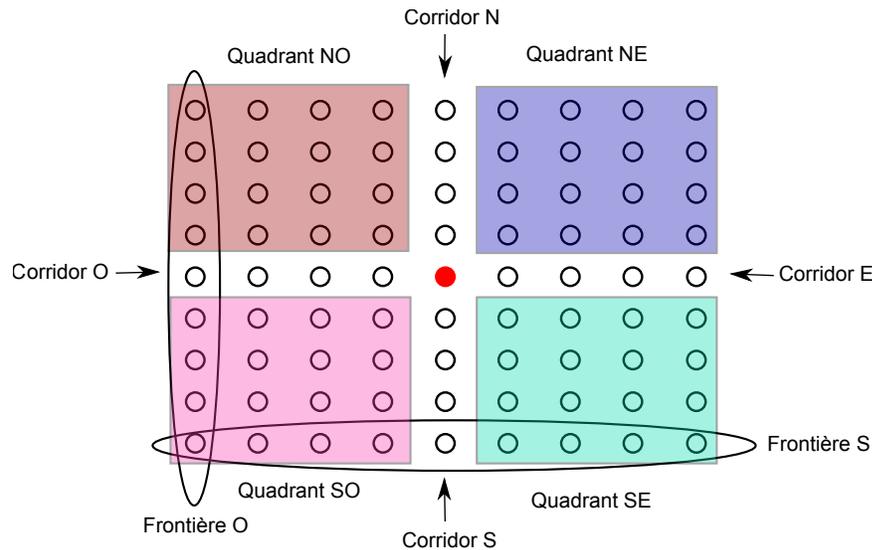


FIGURE 4.5 – Une colonie est formée de 11 régions distinctes. Les bordures sud et ouest sont encerclées par des ellipses. Les quatre quadrants sont identifiés par des couleurs différentes, alors que les quatre corridors centraux sont en blanc. Finalement, le centre de la colonie est identifié en rouge.

sont définis, soient  $s_{1,c}(\rho_1, \tau_1)$  et  $s_{1,n}(\rho_1, \tau_1)$ , avec  $(\rho_1, \tau_1)$  les coordonnées dans l'espace-temps du réseau renormalisé. La  $\tau_1^{\text{ème}}$  période de travail couvre le temps  $t = \tau_1 U$  jusqu'au temps  $(\tau_1 + 1) U - 1$ . Pour chaque intervalle de  $b$  pas de temps, une charge topologique non triviale est déclarée comme présente au centre de la colonie si une charge non triviale y est rapportée pour au moins  $f_c b$  pas de temps. Si une fraction d'au moins  $f_c$  des  $b$  intervalles ont un syndrome non trivial, alors  $s_{1,c}(\rho_1, \tau_1)$  prend la valeur correspondant à la dernière charge différente du vide ayant été rapportée durant l'intervalle de  $b$  pas de temps. La même procédure est utilisée afin de déterminer la valeur de  $s_{1,n}(\rho_1, \tau_1)$ , cette fois en utilisant la fraction  $f_n$ . Les indices  $c$  et  $n$  se réfèrent à «center» et «neighbour» respectivement.

L'application des règles de transition au premier niveau de renormalisation est similaire à celles des règles de transition au niveau physique, en utilisant  $s_{1,c}$  comme syndrome au centre d'une colonie, et en utilisant  $s_{1,n}$  pour les 8 autres colonies dans le voisinage. Dans le cas où une règle de niveau 1 stipule qu'un anyon doit être déplacé d'une colonie vers une autre voisine, l'anyon est déplacé séquentiellement du site physique au centre de la colonie de départ vers le site au centre de la colonie voisine.

Les règles de transition renormalisées sont nécessaires afin de corriger les véritables erreurs de niveau 1 qui peuvent s'étendre au-delà d'une seule colonie. L'idée est que les excitations présentes dans une colonie vont se concentrer au centre de la colonie et fusionner. Si le résultat de la fusion est une charge non triviale, le syndrome de niveau 1 correspondant

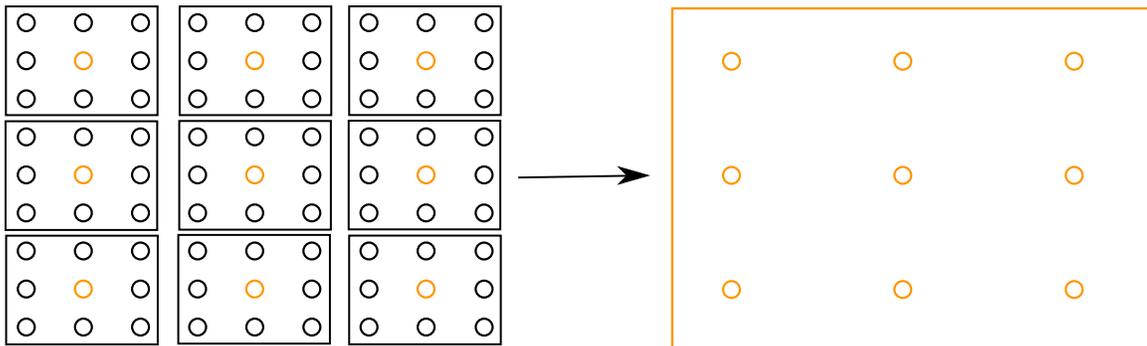


FIGURE 4.6 – Un ensemble de  $Q \times Q$  colonies sont regroupées pour former une seule colonie renormalisée, en utilisant le centre des anciennes colonies pour les sites de la colonie renormalisée.  $Q = 3$  dans cet exemple. Figure tirée de [35].

sera éventuellement détecté. Comme les véritables erreurs de niveau 1 sont supportées dans un groupe d'au plus  $2 \times 2$  colonies de niveau 1, une fois les charges détectées correctement, les règles de transition renormalisées ramèneront toutes les charges non triviales restantes sur un seul site, s'assurant ainsi de corriger l'erreur. Ceci fonctionnera pourvu que la taille du système soit assez grande pour s'assurer que ce processus ne couvre pas le système en entier.

Cette même procédure est répétée pour les niveaux de renormalisation plus élevés, de manière à corriger les véritables erreurs des niveaux supérieurs. À chaque  $U^k$  pas de temps (appelé une période de travail de niveau  $k$ ), des règles du niveau de renormalisation  $k$  sont appliquées, en formant des colonies de niveau  $k$  de taille  $Q^{k+1} \times Q^{k+1}$ . Les syndromes de niveau  $k$ ,  $s_{k,c}$  et  $s_{k,n}$ , sont déterminés à partir des syndromes de niveau  $k - 1$  des colonies au centre de la colonie de niveau  $k$ .

Une colonie de niveau  $k$  peut être identifiée par  $C_{\rho_k}^k$ , où  $\rho_k$  dénote la position de la colonie de niveau  $k$  dans le réseau renormalisé de niveau  $k$ . Une période de travail de niveau  $k$  couvrant la période de temps  $[\tau_k U^k, (\tau_k + 1) U^k)$  est identifiée par  $\tau_k$ . La même procédure basée sur la séparation d'une période de travail de niveau  $k$  en  $b$  intervalles de  $b$  période de travail de niveau  $k - 1$  est utilisée afin de déterminer les syndromes de niveau  $k$ ,  $s_{k,c}(\rho_k, \tau_k)$  et  $s_{k,n}(\rho_k, \tau_k)$ , en utilisant les mêmes seuils  $f_c$  et  $f_n$ .

Si le site physique  $r$  est au centre de la colonie  $C_{\rho_k}^k$  de niveau  $k$ , nous référons à  $\rho_k$  comme à  $\rho_k(r)$  lorsque nous considérons la colonie de niveau  $k$  en relation avec le site physique en son centre. Pour ce qui suit, nous n'écrivons pas explicitement le niveau de renormalisation pour  $\rho$  et  $\tau$  lorsque ce dernier est évident par le contexte. Nous réservons l'utilisation du symbole  $\tau$  afin d'identifier une période de travail renormalisée, alors que  $t$  se réfère au

temps «physique» (ou temps de niveau 0).

La procédure décrite précédemment peut être résumée par le pseudo-algorithme suivant, dans lequel  $t_{fin}$  est le nombre de pas pour lequel l'algorithme est appliqué et où  $n_{max} = \log_Q(L)$ , avec  $L$  la taille linéaire du système :

---

**Algorithm 1** L'algorithme de correction tolérant aux fautes

---

```

t = 0;
while t < tfin do
  Application du bruit de charge;
  t ← t + 1/2
  mesure bruyante de la charge à chaque site;
  for n = 0; n ≤ nmax; n = n + 1 do
    if (t + 1/2) modulo Un = 0 then
      application des règles de transition de niveau n basé sur les syndromes;
    end if
  end for
  t ← t + 1/2
end while

```

---

#### 4.2.4 Description qualitative des règles de transition

Une description détaillée des règles de transition est fastidieuse, et peut être trouvée dans l'article en appendice. Il est néanmoins instructif de décrire qualitativement l'action de celles-ci.

Au niveau 0, les règles appliquées sont basées sur les syndromes physiques rapportés, pour un seul pas de temps. Pour un site donné, si le syndrome rapporté est le vide, aucune règle de transition déplaçant un anyon hors de ce site n'est appliquée. Dans le cas où un syndrome non trivial est détecté, il est possible qu'une règle de transition soit appliquée, tout dépendamment de la position du site au sein de sa colonie, et des syndromes rapportés dans son voisinage.

Les règles de transition dans une colonie sont tout d'abord appliquées sur les frontières sud et ouest de la colonie (voir figure 4.5). Si un anyon est détecté sur ses frontières, les règles de transition appliquées dépendent de la présence de charges dans les colonies voisines. Si une charge  $y$  est détectée, alors les anyons sur les frontières seront déplacés vers les colonies voisines. Ceci est afin de s'assurer qu'une erreur locale ayant lieu à la frontière de 2 colonies ne s'agrandisse pas en cherchant à envoyer chaque anyon au bout d'une courte chaîne d'erreurs vers le centre de leurs colonies respectives.

Pour une excitation détectée dans un des quatre quadrants (nord-est, nord-ouest, sud-est et sud-ouest), deux cas de figure peuvent se produire. S'il y a détection d'une excitation dans le voisinage immédiat, alors les règles de transition sont telles que l'excitation la plus éloignée du centre de la colonie (en utilisant la distance de Manhattan), sera déplacée de manière à la faire fusionner avec sa voisine (donc les règles pour les autres excitations voisines sont appliquées en conséquence). Si aucun autre anyon n'est détecté dans le voisinage, alors l'excitation est déplacée vers l'un des corridors bordant le quadrant.

Pour ce qui est d'une excitation qui est présente dans un corridor, la situation est similaire dans le cas où une excitation est détectée dans un site voisin : l'excitation la plus éloignée sera déplacée de façon à faire fusionner les excitations. Si aucune excitation n'est rapportée dans son voisinage, alors l'excitation sera déplacée vers le centre de la colonie, en suivant le corridor.

Finalement, une excitation présente au centre de la colonie ne sera pas déplacée, peu importe les syndromes des sites voisins.

Étant donné ces règles, il est clair que pour une distribution de charges donnée dans une colonie et en l'absence d'erreur, toutes les charges vont éventuellement se retrouver au centre de la colonie.

Supposons que le syndrome d'un site indique la présence d'une excitation, mais que le site n'en contienne pas. Si la règle de transition prescrite dicte le déplacement de l'excitation mesurée, alors une paire d'excitations est créée à partir du vide, de la charge topologique indiquée par le syndrome et de charge opposée. L'excitation ayant la charge rapportée est ensuite déplacée par la règle de transition, alors que celle de charge opposée est placée dans le site initial.

Il est aussi possible qu'une charge non triviale soit présente dans un site et qu'une règle de transition soit appliquée, mais que la charge topologique rapportée par le syndrome ne corresponde pas à la charge topologique de l'excitation présente dans le site. Dans ce cas, une paire d'excitations de la charge topologique rapportée et de sa charge opposée sont créées à partir du vide et sont placées comme il est décrit au paragraphe précédent.

Pour ce qui est des niveaux plus élevés, supposons qu'à un temps approprié les syndromes de niveau  $k$  prescrivent l'application d'une règle de transition déplaçant un anyon de la colonie  $C_{\rho(r)}^k$  vers la colonie voisine  $C_{\rho(r)+\alpha}^k$ . Dans ce cas, la procédure décrite précédemment est appliquée séquentiellement de site en site, à partir du centre  $r$  de  $C_{\rho(r)}^k$  jusqu'au centre de  $C_{\rho(r)+\alpha}^k$ . Si plus d'un anyon est présent dans le site voisin, alors il y a fusion de ceux-ci. Un anyon de la charge topologique appropriée est par la suite déplacé vers le site

voisin de la même manière. Ce processus est répété jusqu'à ce que l'excitation déplacée atteigne le centre de la colonie  $C_{\rho(r)+\alpha}^k$ . Afin de simplifier à la fois les simulations numériques et l'analyse de l'algorithme, nous tenons pour acquis que ce processus s'effectue durant un seul pas de temps physique. Nous ignorons également le délai de communication associé à l'implémentation locale d'un réseau d'automates cellulaires.

### 4.3 Simulations numériques pour les anyons d'Ising

---

Des simulations numériques ont été effectuées pour un système donnant lieu à des anyons d'Ising et sont présentées à la figure 4.7. Le réseau consiste en un tore de taille  $L \times L$ , où les tailles linéaires considérées sont  $L = Q^n$  pour  $Q = 3$  et  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Il a été empiriquement déterminé que le temps de renormalisation  $U = b^2$  de  $U = 49$  fonctionne le mieux. Les fractions  $f_c = 0,8$  et  $f_n = 0,2$  ont été choisies, ayant trouvé numériquement que ces valeurs fonctionnent bien. Les différentes probabilités  $P(e_{c,c'})$  sont données par

$$\begin{aligned} P(e_{1,1}) &= 1 - p \\ P(e_{\epsilon,\epsilon}) &= \frac{p}{2} \\ P(e_{\sigma,\sigma}) &= \frac{p}{2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le taux d'erreur des mesures  $q$  a quant à lui été choisi égal à  $p$ . Si une mesure est affectée par une erreur (avec probabilité  $q$ ), une des deux autres charges topologiques que celle présente est rapportée de manière aléatoire, chacune avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

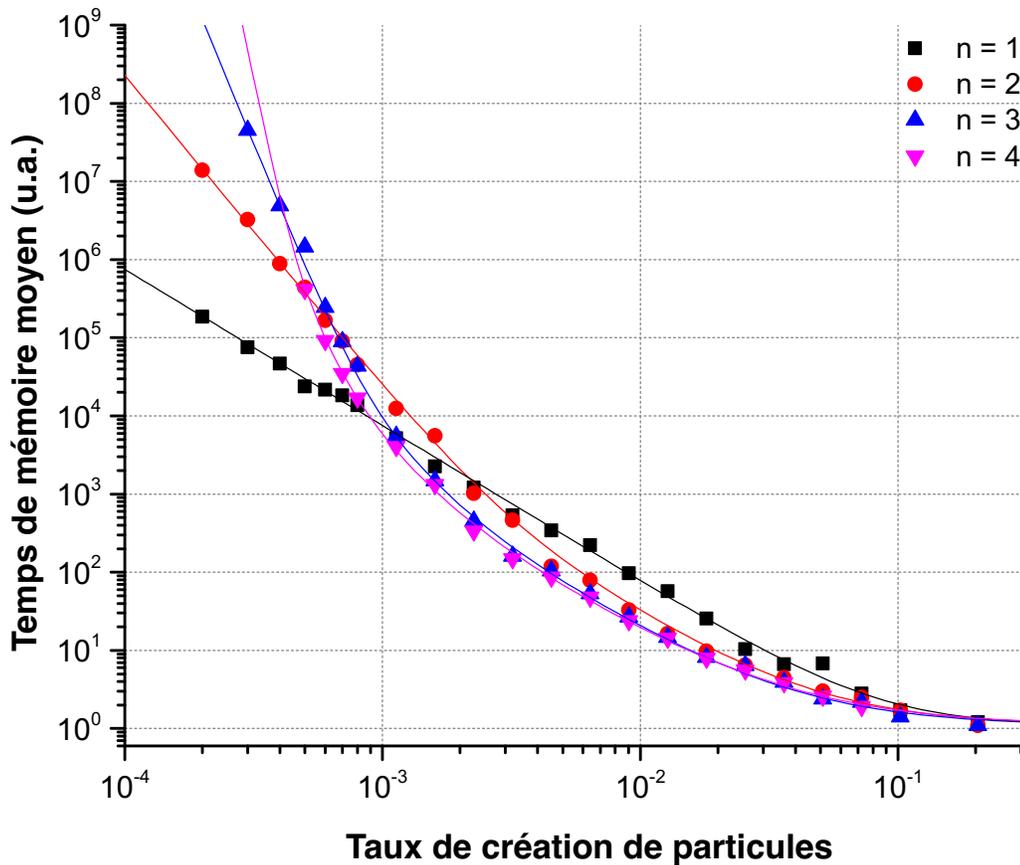


FIGURE 4.7 – Résultats de simulations numériques d’un système d’anyons d’Ising sur un tore de taille linéaire de  $3^n \times 3^n$  pour des valeurs de  $n = 1, 2, 3$  et  $4$ , en utilisant un temps de renormalisation de  $U = b^2 = 49$ . Les fractions  $f_c$  et  $f_n$  sont de  $0,8$  et  $0,2$  respectivement. Le taux d’erreur de mesure  $q$  est égal au taux de création de particules  $p$ . Les courbes solides suivent des équations polynomiales de l’argument  $\left(\frac{1}{p(1-p)}\right)$  et d’ordre  $2^n$ . Figure tirée de [35].

Notre but est d’estimer le temps de vie de la mémoire quantique en fonction de sa taille et des taux d’erreurs. À chaque pas de temps, nous devons ainsi déterminer si l’information initialement encodée dans le système y est toujours accessible en principe. Pour répondre à cette question, nous utilisons l’algorithme de correction d’erreur utilisant l’appariement parfait décrit à la section 3.3.1. Pour ce faire, nous fournissons à l’algorithme de correction d’erreur la configuration réelle des charges topologiques. Le nombre de pas de temps requis avant qu’une opération non triviale sur l’espace encodé soit effectuée est appelé le temps de mémoire de cette instance. Notons que comme l’algorithme de correction utilise une

procédure heuristique sous optimale, ce temps de vie devrait être interprété comme une borne inférieure du vrai temps de mémoire. Le temps de mémoire moyen en fonction du taux de création de particules  $p$  est montré à la figure 4.7.

Des courbes polynomiales d'ordre  $2^n$  de la variable  $\left(\frac{1}{p(1-p)}\right)$  sont montrés en ligne solide. Le comportement asymptotique en  $\sim p^{-2^n}$  aux faibles valeurs de  $p$  est en accord avec les bornes de la section 4.1.3 et la notion intuitive qu'une véritable erreur de niveau  $n$  ou plus est nécessaire afin d'effectuer une opération non triviale sur l'espace encodé. Notons que le comportement asymptotique pour  $n = 4$  ne peut pas bien être déterminé, mais les résultats sont cohérents avec un temps de mémoire décrit par  $\sim p^{-2^4}$ . Les courbes des systèmes de différentes tailles ne se croisent pas précisément en un point, mais plutôt dans une région entre  $p = 10^{-4}$  et  $p = 10^{-3}$ , et les points de croisement des courbes des niveaux plus élevés semblent se rapprocher et tendre vers une valeur asymptotique, c'est-à-dire la véritable valeur du seuil. Ceci est probablement partiellement dû au fait que la taille d'une colonie est très faible,  $Q = 3$ , limitée par la croissance exponentielle de la taille du réseau avec le niveau  $n$ , et pourrait également être lié à l'utilisation d'automates cellulaires. Il est donc difficile d'identifier avec une bonne précision un seuil critique d'erreur, mais les données sont en accord avec un seuil supérieur à  $10^{-4}$ . Par ailleurs, des simulations avec d'autres valeurs plus faibles pour  $q$  donnent des résultats très similaires. Par exemple, une valeur de  $Q = 5$  avec  $n = 1$  et  $n = 2$  donnent également des résultats similaires au cas  $Q = 3$  avec  $n = 1$  et  $n = 3$  respectivement.

Notons que pour cette taille de colonie utilisée, la classification des erreurs en *véritables* erreurs de divers niveaux telle que définie dans la section 4.1.1 n'est pas valide à strictement parler, puisque les conditions  $a \geq 2$  et  $Q \geq 4(a + 2)$  ne sont pas respectées. On peut tout de même s'attendre à ce qu'à de faibles taux d'erreur, cette classification soit valide en bonne approximation, décrivant adéquatement la plupart des configurations d'erreurs. Les résultats des simulations numériques montrent d'ailleurs que cette classification arrive à bien décrire (au moins de manière qualitative) le taux effectif d'erreurs ne pouvant pas être corrigées par les règles de transition d'un niveau donné.

Ces résultats montrent qu'il est en principe possible de préserver un état quantique encodé dans le sous-espace fondamental d'un système donnant lieu à des anyons d'Ising sur un tore en utilisant l'algorithme de correction de Harrington généralisé, en autant que le taux de création de particules et des erreurs de mesure soient sous  $p \sim 10^{-4}$ . Un temps de mémoire moyen arbitrairement long peut être atteint simplement en augmentant la taille du système. Le modèle de bruit considéré dans ces simulations est idéalisé, et un modèle plus réaliste risque de modifier la valeur de seuil obtenu, sans toutefois en compromettre

l'existence en autant que le modèle de bruit soit suffisamment local. Finalement, notons que bien que l'information encodée puisse être en principe préservée, nous n'avons pas abordé la question d'effectuer une mesure sur l'état en présence de bruit.

## Chapitre 5

# Analyse de l'algorithme tolérant aux fautes

Les simulations numériques présentées au chapitre précédent pour les anyons d'Ising supportent de l'existence d'un seuil, bien que les courbes ne se croisent pas en un seul point, tel que l'on s'y attendrait normalement. On peut également s'intéresser à d'autres modèles anyoniques plus complexes permettant d'effectuer un ensemble de portes logiques universel par des opérations topologiquement protégées, comme les anyons de Fibonacci. Or, de tels anyons ne peuvent pas être simulés classiquement de manière efficace de par leur nature universelle pour le calcul quantique. Une meilleure compréhension de la correction d'erreur tolérante aux fautes pour les anyons non abéliens est également souhaitable. Cela pourrait permettre de concevoir des codes plus performants, de mieux saisir les propriétés ou encore de construire des codes de correction d'erreur servant non seulement à préserver l'information encodée, mais également à appliquer des opérations de tresses de manière tolérante aux fautes. De façon plus fondamentale, cela nous permettrait de déterminer s'il est en principe possible de réaliser un calcul quantique arbitrairement long de façon topologique à température non nulle. Dans ce chapitre, nous nous attardons donc à une analyse théorique de l'algorithme présenté précédemment.

L'algorithme s'inspire de la classification hiérarchique des erreurs en véritables erreurs de divers niveaux. De manière intuitive, on s'attend à ce que les anyons créés par une véritable erreur d'un niveau  $n$  se concentrent au centre des colonies de niveau  $n$ , sous l'influence des règles de transitions des niveaux inférieurs. Une fois les anyons concentrés, on espère que le syndrome de niveau  $n$  rapporte la charge totale, et que les règles de transitions de niveau  $n$  appropriés seront appliquées afin de ramener tous les anyons de la véritable erreur en un seul site physique. Comme les véritables erreurs de niveau  $n$  sont éloignées les unes des autres, et pourvu que la taille du système soit plus grande que l'extension d'une véritable erreur de niveau  $n$ , la charge totale des anyons devrait être le vide, corrigeant ainsi l'erreur.

Étant donné que la probabilité d'apparition d'une véritable erreur de niveau  $n$  décroît de manière doublement exponentielle avec  $n$ , on s'attend donc à l'existence d'un seuil : en augmentant la taille du système, le niveau d'une erreur requise pour effectuer une opération logique augmente, diminuant la probabilité qu'une telle véritable erreur survienne.

Le raisonnement précédent est cependant simpliste, et de nombreuses complications se présentent. La classification hiérarchique des erreurs ne tient pas en compte de l'algorithme de correction. Les erreurs de charges représentent des processus menant à la création d'excitations dans le système, mais ces excitations peuvent être déplacées par des règles de transition. Plusieurs anyons peuvent fusionner entre eux pour donner une charge topologique qu'il est impossible en général de prédire, et le déplacement des anyons par les règles de transition peut tresser des anyons, modifiant ainsi leur canal de fusion. Quant à elles, les erreurs de mesures influencent non seulement le déplacement des excitations créées par des erreurs de charge en modifiant les divers syndromes, mais elles peuvent également avoir pour effet de créer des excitations.

Les règles de fusion d'anyons non abéliens ne sont pas déterministes. La notion de charge renormalisée doit donc être définie avec soins, puisqu'en général une telle charge totale n'est bien définie qu'une fois que l'ensemble des anyons considérés ont fusionné. La charge totale dépend en outre de la trajectoire des anyons impliqués. Il n'est donc pas du tout évident que la notion de syndrome renormalisé telle que définie dans le chapitre précédent corresponde à la charge totale d'une colonie.

Même dans le cas où une particule et son antiparticule sont correctement identifiées, il peut rester une charge topologique non triviale après leur fusion. Pour chaque événement de fusion, nous devons donc traiter tous les cas possibles. Pour cette raison, il faut introduire la notion de domaine des trajectoires d'une erreur, qui correspond à quelques nuances près à l'ensemble des sites ayant une probabilité non nulle de contenir une charge non triviale en raison de la présence d'une erreur donnée, en prenant les règles de transition en compte.

Les relations de tressage non abéliennes ont des conséquences plus profondes sur la classification des erreurs présentée à la section 4.1. Considérons la situation où une véritable erreur de bas niveau,  $E$  est isolée, dans l'espace et le temps, de toute autre véritable erreur. Les règles de transition auront tendance à vouloir concentrer toutes les excitations créées par les erreurs appartenant à  $E$  vers un seul site physique. La fusion de toutes ces excitations devrait donner le vide, et donc corriger l'erreur  $E$ . Il est cependant possible qu'une règle de transition de niveau élevé entraîne un anyon appartenant à une véritable erreur de niveau supérieur à travers le nuage d'excitations créées par  $E$ . La classification des erreurs en niveaux hiérarchiques n'empêche pas ce phénomène : les véritables erreurs sont éloignées

les unes des autres, mais les excitations créées par celles-ci peuvent être déplacées par les règles de transitions et faire interagir des excitations provenant de différentes erreurs de plusieurs niveaux. Cela peut causer des tresses modifiant le canal de fusion total des excitations appartenant à  $E$ , leur charge totale n'étant plus le vide. Les deux erreurs sont donc devenues intriquées. Il n'est plus possible de corriger de manière indépendante  $E$  et l'erreur de plus haut niveau, il faut une stratégie de correction conjointe. Cette intrication entre les erreurs de différents niveaux motive la définition d'*amas d'erreurs causalement lié*. Ces derniers sont des collections de véritables erreurs qui deviennent potentiellement intriquées sous l'effet des règles de transition appliquées par l'algorithme.

Une analyse minutieuse montre que pour les anyons non cycliques, la notion de charge renormalisée est bien définie. De plus, les syndromes rapportés correspondent à la charge renormalisée d'une colonie. Malgré les nouveaux mécanismes pouvant potentiellement prévenir la correction des erreurs, l'application répétée des règles de transition fonctionne assurément. En effet, chaque tentative de fusion vers le vide échouée transforme la charge topologique totale présente dans une colonie plus près d'une charge abélienne dans le graphe du modèle anyonique non cyclique. Lorsque la charge topologique devient abélienne, la prochaine itération fonctionne assurément, puisque les processus de fusion et de tressage deviennent alors triviaux. On peut de plus montrer que les amas d'erreurs causalement liés restent bien séparés les uns des autres, et sont bornés dans l'espace et le temps. L'effet net est donc au plus un ralentissement du processus de correction, qui peut être compensé par un taux d'erreur critique plus bas.

## 5.1 Concepts de base pour la correction d'erreur des anyons non abéliens

---

Nous débutons par définir quelques concepts afin d'analyser l'algorithme de décodage. Nous supposons dorénavant que  $p + q < \frac{Q^{-4}U^{-2}}{4}$ , et donc que chaque erreur individuelle fait partie d'une seule véritable erreur d'un niveau fini, et la notion de bruit de niveau  $k$  est bien définie  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Par ailleurs, nous utilisons le terme *erreur de niveau  $k$* , en omettant le vocable «véritable», afin d'alléger le texte.

### 5.1.1 L'évolution d'état

La classification des erreurs en erreurs de divers niveaux ne permet pas de décrire par elle seule l'évolution du système. L'application des règles de transition causée par l'apparition des erreurs doit également être prise en compte. Soit  $|\psi_0\rangle$  l'état du système au temps  $t = 0$ . On suppose que cet état est dans le sous-espace fondamental. On sépare l'ensemble des erreurs affectant le système  $\mathcal{E} = \{E(t)\}$ , avec  $t \geq 0$ , en sous-ensembles d'erreurs  $E(t)$  affectant le système au temps  $t$ . En général,  $E(t)$  n'est pas un ensemble de véritables erreurs.

L'évolution du système du temps  $t \in \mathbb{N}$  au temps  $t + 1$  étant donné un ensemble spécifique de résultats de fusions est décomposé en deux étapes élémentaires. La première étape correspond à l'application des erreurs de charges dont la coordonnée temporelle est  $t$ , et à la fusion subséquente de la charge topologique ayant comme résultats physiques  $c(r, t + \frac{1}{2})$ , pour chacun des sites  $r$  du réseau. La seconde étape comprend l'application des règles de transition basées sur les syndromes rapportés  $s_0(r, t)$ , suivi de la fusion des charges contenues dans chacun des sites vers l'état  $c(r, t + 1)$ . Les erreurs de charge caractérisées par le temps  $t$  sont appliquées durant l'intervalle  $(t, t + \frac{1}{2})$ , et donc l'état du système au temps  $t$  ne les inclut pas. Similairement, la mesure des syndromes et l'application des règles de transitions ont lieu durant l'intervalle  $(t + \frac{1}{2}, t + 1)$ .

Pour tout entier  $t \geq 0$ , l'état du système est donné par  $|\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle$ , avec  $c(t)$  l'ensemble des charges topologiques mesurées (et non pas rapportées) pour chacun des sites du réseau  $\Lambda$  jusqu'au temps  $t$ , et  $\mathcal{E}$  est l'ensemble de toutes les erreurs affectant le système. On définit  $s(t)$  de manière similaire pour l'ensemble des syndromes de niveau 0 aux temps inférieurs ou égaux à  $t$ . La dépendance de l'état du système  $|\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle$  par rapport aux règles de transition est implicite dans cette notation; ces dernières sont déterminées par  $s(t)$ , qui dépend des résultats de fusion  $c(t)$  et des erreurs de mesures, spécifiées par  $\mathcal{E}$ .

L'équation décrivant l'étape élémentaire couvrant l'application du bruit de charge est donnée par

$$|\psi(c(t + 1/2), \mathcal{E})\rangle = \frac{\prod_{r \in \Lambda} P_r^{c(r, t + 1/2)} \hat{E}(t) |\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle}{\sqrt{P(c(t + 1/2) | c(t), \mathcal{E})}}, \quad (5.1)$$

$$P(c(t + 1/2) | c(t), \mathcal{E}) = \langle \psi(c(t), \mathcal{E}) | \hat{E}(t)^\dagger \prod_{r \in \Lambda} P_r^{c(r, t + 1/2)} \hat{E}(t) |\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle, \quad (5.2)$$

où  $P_r^{c(r,t+1/2)}$  est le projecteur des anyons présents au site  $r$  au temps  $t + 1/2$  sur la charge totale  $c(r, t)$  et où  $\hat{E}(t)$  est l'opérateur appliquant les erreurs de  $E(t)$ . La probabilité de mesurer une charge  $P(c(t + 1/2) | c(t), \mathcal{E})$  est simplement donnée par la règle de Born.

Notons au passage que la probabilité de mesurer un canal de fusion peut dépendre de l'état fondamental dans lequel le système a été préparé. Ceci se produit lorsque l'ensemble des processus d'erreur et d'opérations de corrections causent une opération non triviale dans le sous-espace fondamental. Cette dépendance n'est pas incluse de manière explicite dans notre notation afin d'éviter un encombrement. Il est par ailleurs possible de contourner ce problème plus formellement en supposant que l'état initial du système est dans le sous-espace fondamental, mais est autrement complètement mixte.

La seconde étape est similairement décrite par

$$|\psi(c(t+1), \mathcal{E})\rangle = \frac{\prod_{r \in \Lambda} P_r^{c(r,t+1)} \hat{T}(s(t)) |\psi(c(t+1/2), \mathcal{E})\rangle}{\sqrt{P(c(t+1) | c(t+1/2), \mathcal{E})}}, \quad (5.3)$$

$$P(c(t+1) | c(t+1/2), \mathcal{E}) = \langle \psi(c(t+1/2), \mathcal{E}) | \hat{T}^\dagger(s(t)) \prod_{r \in \Lambda} P_r^{c(r,t+1)} \hat{T}(s(t)) |\psi(c(t+1/2), \mathcal{E})\rangle, \quad (5.4)$$

où  $\hat{T}(s(t))$  représente l'opérateur appliquant les règles de transitions basées sur les syndromes bruyants rapportés jusqu'au temps  $t$ . Nous utilisons ici le fait que les syndromes de niveau 1 et supérieurs sont ultimement déterminés par les syndromes de niveau 0, et donc les règles de transitions sont considérées comme étant fonction des syndromes de niveau 0 uniquement.

Étant donné l'ensemble d'erreurs  $\mathcal{E}$ , il n'est pas possible en général de prédire de manière déterministe la charge dans un site spécifique. Il est cependant possible de décrire cette charge par une variable aléatoire  $C(r, t)$  et la distribution de probabilité associée  $P(C(r, t), \mathcal{E})$ . Cette dernière peut être calculée en utilisant la règle de multiplication :

$$P(C(r, t) = c_0, \mathcal{E}) = \sum_{c(t) | c(r,t)=c_0} \prod_{t'=0}^{t-1/2} P(c(t'+1/2) | c(t'), \mathcal{E}). \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Les régions causales

Les erreurs sont des processus physiques causant l'apparition d'excitations dans le système. Ces excitations sont mesurées de manière imparfaite et déplacées par des règles de transition, qui sont prédéterminées par la définition des automates cellulaires. Les règles de transitions n'agissent pas directement sur les erreurs, mais plutôt sur les excitations causées par les erreurs. Intuitivement, les différentes véritables erreurs sont traitées de manière indépendante, étant isolées les unes des autres. Cependant, il est possible pour des anyons créés par différentes véritables erreurs d'interagir *via* des tresses et des processus de fusion, ou encore de modifier l'application de règles de transition. Le fait que les anyons soient non abéliens rend impossible le traitement indépendant des véritables erreurs. Les définitions suivantes nous permettent de traiter toutes les excitations qui peuvent venir de différentes véritables erreurs, mais qui interagissent néanmoins et de les traiter comme une entité commune.

L'ensemble des erreurs affectant le système  $\mathcal{E}$  peut être décomposé en une collection de véritables erreurs. Jusqu'à la fin du chapitre, nous adoptons la convention que  $\mathcal{E}$  est la collection de toutes les véritables erreurs, et donc  $E \in \mathcal{E}$  signifie que  $E$  est une véritable erreur faisant partie de l'ensemble  $\mathcal{E}$ . Lorsque le contexte est clair, nous référons à  $E$  comme à un ensemble de points dans l'espace-temps, décrivant la position des erreurs individuelles de  $E$ .

La région causale d'une erreur est définie comme étant l'ensemble des sites tel que la distribution de probabilité de la charge topologique est influencée par la présence de la véritable erreur.

**Définition 1.** Soient  $E \in \mathcal{E}$  et  $\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{E}$ . On définit  $\mathcal{Z}(\{E_{(i)}\}, E; t)$  comme étant l'ensemble des points dans l'espace temps  $\mathbf{p} = (\mathbf{r}, t_0)$  avec  $t_0 \leq t$  tel que  $P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\}) \neq P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\} \setminus \{E\})$ . La région causale de  $E$  au temps  $t$  est définie par  $Z(E; t) = \bigcup_{\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{E}} \mathcal{Z}(\{E_{(i)}\}, E; t)$ , où l'union est faite sur tous les sous-ensembles possibles  $\{E_{(i)}\}$  de  $\mathcal{E}$ .

Si les régions causales au temps  $t$  de  $E$  et  $E'$  ont des points en commun, on dit que  $E$  et  $E'$  ont interagi au temps  $t$ . L'ensemble des véritables erreurs ayant interagi ensemble, soit directement, soit indirectement avec  $E$  est appelé l'amas d'erreurs causalement liées de  $E$ .

**Définition 2.** Soit  $E \in \mathcal{E}$ . On définit  $\mathcal{C}_0(E; t) = \{E\}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{C}_{i+1}(E; t) = \{E' \in \mathcal{E} \mid Z(E''; t) \cap Z(E'; t) \neq \emptyset \text{ pour } E'' \in \mathcal{C}_i(E; t)\}$ . L'amas causalement lié de la véritable

erreur  $E$  au temps  $t$  est  $\mathcal{C}(E; t) = \bigcup_i \mathcal{C}_i(E; t)$ . Lorsque le temps n'est pas spécifié, l'amas causalement lié de  $E$ ,  $\mathcal{C}(E)$  est défini par  $\bigcup_t \mathcal{C}(E; t)$ .

Notons que chaque véritable erreur  $E \in \mathcal{E}$  fait partie d'au moins un amas causalement lié, étant donné que  $E \in \mathcal{C}(E; t)$  pour tout  $t$ . De plus, on démontre aisément la proposition suivante.

**Proposition 1.** *En tout temps, toute véritable erreur fait partie d'un seul amas.*

L'idée principale derrière la preuve de cette proposition est de supposer qu'il existe une véritable erreur  $E$  faisant partie de deux amas causalement liés distincts. Considérons  $\mathcal{C}(E'; t)$  et  $\mathcal{C}(E''; t)$ , avec  $E'$  et  $E''$  deux véritables erreurs distinctes. Étant donnée la définition 2, il existe une série de véritables erreurs interagissant directement 2 à 2, telle que la première interagit avec  $E$ , et la dernière interagit avec  $E'$ . Il est également possible de trouver une telle chaîne liant  $E$  à  $E''$ . On peut donc former une chaîne d'erreurs liant  $E'$  à  $E''$ . Par définition d'un amas causalement lié, on trouve donc que  $E'$  et  $E''$  font partie du même amas, en contradiction avec notre hypothèse de départ.

Ces propriétés impliquent donc que si deux véritables erreurs  $E'$  et  $E''$  font partie du même amas causalement lié au temps  $t$ , alors  $\mathcal{C}(E'; t) = \mathcal{C}(E''; t)$ . Nous sommes donc libres de choisir n'importe quelle erreur faisant partie de l'amas comme représentante. Le même résultat est valide lorsque le temps n'est pas spécifié.

Il est utile de remarquer qu'un point  $p = (r, t)$  est contenu dans au plus un seul amas causalement lié. Pour le voir, supposons que  $p$  appartienne à la fois à  $\mathcal{C}(E; t)$  et à  $\mathcal{C}(E'; t)$ , où  $E$  et  $E'$  sont deux différentes erreurs. En utilisant la liberté de choix d'un représentant pour un amas, nous pouvons supposer que  $p \in Z(E; t)$  et que  $p \in Z(E'; t)$ . En utilisant la définition d'amas causalement lié (définition 2), on trouve que  $E \in \mathcal{C}(E'; t)$ . Finalement, en utilisant la proposition 1, on trouve que  $\mathcal{C}(E; t) = \mathcal{C}(E'; t)$ , ce qui est une contradiction.

La région causale de l'amas causalement lié  $\mathcal{C}(E; t)$  est définie comme étant l'union des régions causales de chacune des véritables erreurs faisant partie de l'amas,  $\bigcup_{F \in \mathcal{C}(E; t)} Z(F; t)$ . Tout dépendamment du contexte, nous verrons  $\mathcal{C}(E; t)$  comme une collection d'erreurs ou encore comme une région dans l'espace-temps, correspondant à la région causale de  $\mathcal{C}(E; t)$ . Lorsqu'un site du réseau faisant partie de  $\mathcal{C}(E; t)$  contient une charge non triviale, nous écrivons que cet anyon appartient à  $\mathcal{C}(E; t)$ , ou encore qu'il a été causé par cet amas. Finalement, nous définissons le niveau d'un amas causalement lié au temps  $t$  par le niveau le plus élevé d'une erreur faisant partie de l'amas à ce temps ;  $\text{lvl}(\mathcal{C}(E; t)) = \max_{E' \in \mathcal{C}(E; t)} \text{lvl}(E')$ , où  $\text{lvl}(E')$  est la fonction donnant le niveau de la véritable erreur  $E'$ . Une définition similaire est utilisée lorsque le temps n'est pas spécifié.

On vérifie également qu'on peut enlever des véritables erreurs d'un amas causalement lié sans affecter les sites à l'extérieur de sa région causale. Considérons un point  $p = (\mathbf{r}, t_0)$  tel qu'il n'est pas dans la région causale de  $\mathcal{C}(E; t)$ . Nous avons donc que  $P(\mathcal{C}(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\}) = P(\mathcal{C}(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\} \setminus F)$  et ce pour tout sous-ensemble  $\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{E}$  et toute erreur  $F \in \mathcal{C}(E; t)$ . En choisissant le sous-ensemble particulier  $\mathcal{C}_S \subseteq \mathcal{C}(E; t)$ , nous trouvons que  $P(\mathcal{C}(\mathbf{r}, t_0), (\{E_{(i)}\} \setminus \mathcal{C}_S) \setminus F) = P(\mathcal{C}(\mathbf{r}, t_0), (\{E_{(i)}\} \setminus \mathcal{C}_S))$ . Nous pouvons donc enlever une à une toutes les véritables erreurs de  $\mathcal{C}(E; t)$  sans que la distribution de probabilité de charge au point  $p$  ne soit affectée. Les amas causalement liés peuvent donc être étudiés indépendamment les uns des autres. Notons en particulier qu'un site ne faisant partie d'aucune région causale contient nécessairement le vide, puisqu'on peut alors enlever toutes les erreurs sans affecter la charge présente.

La preuve de l'existence d'un seuil pour notre algorithme nécessite l'analyse de l'effet d'une véritable erreur  $E$  en l'absence d'erreurs de niveaux plus élevés. Ceci nous incite à définir la notion d'historique restreint d'une erreur  $\tilde{\mathcal{E}}(E) = \{E' \in \mathcal{E} \mid \text{lvl}(E') < \text{lvl}(E)\} \cup \{E\}$ , et d'amas restreints.

**Définition 3.** Pour toute véritable erreur  $E' \in \tilde{\mathcal{E}}(E)$  et tout sous-ensemble  $\{\tilde{E}_{(i)}\} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}(E)$ , soit  $\tilde{\mathcal{Z}}_E(\{\tilde{E}_{(i)}\}, E'; t)$  l'ensemble des points dans l'espace-temps  $\mathbf{p} = (\mathbf{r}, t_0)$ , avec  $t_0 \leq t$  tel que  $P(\mathcal{C}(\mathbf{r}, t_0), \{\tilde{E}_{(i)}\}) \neq P(\mathcal{C}(\mathbf{r}, t_0), \{\tilde{E}_{(i)}\} \setminus E')$ . Nous appelons  $\tilde{\mathcal{Z}}_E(E'; t) = \bigcup_{\{\tilde{E}_{(i)}\} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}(E)} \tilde{\mathcal{Z}}_E(\{\tilde{E}_{(i)}\}, E'; t)$  la région causale restreinte de  $E'$  par rapport à  $E$  au temps  $t$ .

Nous pouvons également définir la notion d'amas causalement lié restreint  $\tilde{\mathcal{C}}(E; t)$ . Cette notion est définie comme dans le cas d'amas causalement lié (voir définition 2), à la différence qu'elle utilise les historiques restreints d'erreurs et les régions causales restreintes.

La notion d'amas restreint nous permettra d'analyser les effets d'erreurs véritables de niveau inférieur par rapport au niveau de l'amas auquel elles appartiennent. Par définition, la région causale d'une erreur de petit niveau peut s'étendre sur une très grande région, de par les interactions avec les anyons créés par des erreurs de plus haut niveau dans l'amas. La notion d'amas restreint permet d'isoler les effets directs d'une erreur de bas niveau sur les trajectoires d'anyons appartenant à l'amas et étant déplacés par des règles de transition de niveau élevé.

Finalement, l'analyse de notre procédure de correction d'erreur en niveau hiérarchique a besoin de la notion d'amas renormalisé.

**Définition 4.** On définit  $\mathcal{C}^{(k)}(t) = \bigcup_{E \mid \text{lvl}(E) \geq k} \mathcal{C}(E; t)$ , l'amas renormalisé de niveau  $k$ .

$\mathcal{C}^{(k)}(t)$  est essentiellement l'ensemble des amas causalement liés de niveau  $k$  et plus. Cette

notion est utile afin de définir de manière rigoureuse la charge topologique renormalisée dans une colonie de niveau  $k$ .

### 5.1.3 Les trajectoires

L'étendue spatiale d'un amas d'erreurs causalement liées  $\mathcal{C}(E; t)$  évolue dans le temps. Les erreurs logiques étant causées par des erreurs produisant des excitations dont les trajectoires forment des boucles homologiquement non triviales, l'on cherchera à borner l'évolution des différents amas. Pour y parvenir, la notion de trajectoire d'un amas d'erreurs  $\mathcal{T}(\mathcal{C}(E; t) | c(t), \mathcal{E})$  est introduite. Cette dernière est essentiellement l'ensemble des points dans l'espace-temps, jusqu'au temps  $t$ , qui contiennent des anyons non triviaux ayant été causés par  $\mathcal{C}(E; t)$ . Évidemment, la trajectoire dépend des résultats de fusion obtenus, mais également des règles de transition. La trajectoire est donc une fonction explicite des résultats de fusion et des erreurs affectant le système, le tout déterminant les règles de transition appliquées.

Soit  $e$  une erreur «atomique» survenant au temps  $t_0$  et qui fait partie d'une des erreurs véritables d'un amas causalement lié  $\mathcal{C}(E; t_f)$ , dont le niveau est  $k$ . Pour  $t$  tel que  $t_0 \leq t \leq t_f$ , l'emplacement  $\mathcal{L}_t(e | c(t), \mathcal{E})$  (en anglais «location») est un ensemble de points ayant comme coordonnée temporelle  $t$  et construit de manière inductive. Si  $e$  est une erreur de charge, alors l'emplacement  $\mathcal{L}_{t_0}(e | c(t_0), \mathcal{E})$  est composé des deux sites connectés par l'arête sur laquelle se produit l'erreur  $e$ , et qui contiennent un anyon et son antiparticule. Si  $e$  est une erreur de mesure, alors  $\mathcal{L}_{t_0}(e | c(t_0), \mathcal{E})$  contient un seul site, celui où l'erreur de mesure s'est produite.

Supposons donc que  $\mathcal{L}_{t'}(e | c(t'), \mathcal{E})$  est bien défini pour tout  $t'$  tel que  $t_0 \leq t' \leq t$ . Alors le point  $(i, j, t + 1)$  est inclus dans  $\mathcal{T}_{t+1}(e | c(t + 1), \mathcal{E})$  si le site  $(i, j)$  contient un anyon non trivial au temps  $t + 1$  et si au moins une des trois conditions suivantes est satisfaite :

1. Le site  $(i, j)$  au temps  $t$  est inclus dans  $\mathcal{L}_t(e | c(t), \mathcal{E})$ ;
2. Une règle de transition de niveau  $k' \leq k$  a été appliquée au temps  $t + 1/2$  à partir d'un site  $(i_0, j_0)$  inclus dans  $\mathcal{L}_{t'}(e | c(t'), \mathcal{E})$  vers le site  $(i, j)$ , et où  $t'$  fait partie de la même période de travail de niveau  $k'$  que  $t$ ;
3. Une règle de transition de niveau  $k'$  est appliquée au temps  $t + 1/2$  à partir du site  $(i, j)$ , et le site  $(i, j)$  fait partie de  $\mathcal{L}_{t'}(e | c(t'), \mathcal{E})$  avec  $t'$  dans la même période de travail de niveau  $k'$  que  $t$ .

La première condition correspond au cas où un anyon n'est pas déplacé par une règle de transition. La deuxième correspond au cas où l'anyon présent dans un site vient d'y être

amené par une règle de transition, et la dernière décrit la situation où l'application d'une règle de transition crée une charge ou essaie de déplacer un anyon de la mauvaise charge.

On note au passage que dans les conditions précédentes, les règles de transition de niveau plus élevées que  $k$  (le niveau de  $\mathcal{C}(E; t)$ ) ne sont pas considérées. Ce choix est motivé par le fait qu'on peut démontrer que pour les anyons non cycliques, un amas de niveau  $k$  ne peut pas causer l'application de règles de transition de niveau supérieur à  $k$ . Par ailleurs, si le niveau des règles de transition n'est pas restreint, la notion d'emplacement d'un amas perd son sens. Imaginons le cas où un amas de niveau 0 apparaisse au temps  $t_0$ , et qu'il soit corrigé (toutes ses excitations fusionnent vers le vide) au temps  $t_0 + 1$ , sans interagir avec une autre véritable erreur. Compte tenu de la manière dont les syndromes des niveaux supérieurs sont déterminés, il est impossible qu'une telle erreur affecte les syndromes de niveau 1 ou plus. Or, il se peut qu'un amas de niveau  $n$  beaucoup plus grand que 0 apparaisse à un temps  $t_n > t_0$ , mais qui soit dans la même période de travail de niveau  $n$  que  $t_0$ . Si l'amas de niveau  $n$  cause l'application d'une règle de transition, alors l'emplacement de l'amas de niveau 0 contiendrait le site vers lequel une telle règle de transition déplace un anyon. L'on veut éviter cette situation, car notre but est de lier les notions d'emplacement et de région causale.

La trajectoire de l'erreur  $e$  au temps  $t_f$  est définie comme étant l'ensemble des emplacements que  $e$  a occupé jusqu'au temps  $t_f$ , ou plus formellement  $\mathcal{T}_{t_f}(e \mid c(t_f), \mathcal{E}) = \bigcup_{t \in [t_0, t_0+1, \dots, t_f]} \mathcal{L}_t(e \mid c(t), \mathcal{E})$ . Nous pouvons également définir la trajectoire d'un ensemble de véritables erreurs  $\{E_{(i)}\}$  par l'union des trajectoires de chacune des erreurs  $y$  appartenant. Donc formellement, on a  $\mathcal{T}_t(\{E_{(i)}\} \mid c(t), \mathcal{E}) = \bigcup_{e \in E \mid E \in \{E_{(i)}\}} \mathcal{T}_t(e \mid c(t), \mathcal{E})$ .

Pour  $\mathcal{C}(E; t)$  un amas de niveau  $k$ , en l'absence de l'application de règles de transition de niveau  $k$ , on trouve par définition que la trajectoire de  $\mathcal{C}(E; t)$ ,  $\mathcal{T}_t(\mathcal{C}(E; t) \mid c(t), \mathcal{E})$  contient tous les points de l'espace-temps jusqu'au temps  $t$  contenant des anyons non triviaux causés par l'amas en question. Évidemment, la trajectoire dépend du résultat des opérations de fusion. Il est donc nécessaire de définir le domaine des trajectoires d'un amas d'erreurs, qui incorpore toutes les trajectoires possibles découlant des différents canaux de fusion qui peuvent survenir.

**Définition 5.** Le domaine des trajectoires  $\mathcal{D}_{t'}(\mathcal{C}(E; t) \mid \mathcal{E})$  d'un amas d'erreurs causalement lié  $\mathcal{C}(E; t)$ , avec  $t' \geq t$ , est défini comme étant l'union sur toutes les historiques de fusion  $c(t)$  et sur tous les sous-ensembles de véritables erreurs  $\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{C}(E; t)$  des trajectoires  $\mathcal{T}_{t'}(\mathcal{C}(E; t) \setminus \{E_{(i)}\} \mid c(t'), \mathcal{E} \setminus \{E_{(i)}\})$ .

On peut imaginer le domaine des trajectoires d'un amas comme étant un ensemble contenant tous les sites ayant un anyon non trivial causé par la présence de l'amas, en prenant

en compte les erreurs et les règles de transition. On considère de plus tous les résultats de fusion possible, lorsque plus d'un anyons se retrouvent sur un même site. On inclut dans la définition le fait de considérer l'amas en question amputé d'une partie de ses véritables erreurs, et ce pour tous les choix possibles. Cette dernière exigence est nécessaire afin de pouvoir faire le lien entre le domaine des trajectoires et la région causale d'un amas, présenté dans la prochaine proposition. Cette condition apparaît naturellement, en considérant la définition 1 de la région causale d'une véritable erreur. Ce lien est au cœur de la preuve que nous présentons à l'effet que notre algorithme admet un seuil pour les anyons non cycliques.

**Proposition 2.** *En l'absence de règles de transition de niveau supérieur à  $k$ , la région causale de  $\mathcal{C}(E; t)$  jusqu'au temps  $t$  est contenue dans son domaine des trajectoires.*

L'idée derrière la preuve de la proposition 2 est de supposer qu'elle est fautive, *i.e.* qu'il existe un point  $p$  tel qu'il fasse partie de la région causale de l'amas  $\mathcal{C}(E; t)$ , mais qu'il ne soit pas dans son domaine des trajectoires. On remarque tout d'abord qu'en ne faisant pas partie du domaine des trajectoires,  $p$  ne contient aucun anyon appartenant à l'une ou l'autre des trajectoires considérées. Or, en utilisant la définition 1 de région causale, on trouve une contradiction; la distribution de probabilité de la charge anyonique au point  $p$  ne change pas si l'on enlève n'importe quelle erreur appartenant à  $\mathcal{C}(E; t)$ .

Finalement, l'analyse hiérarchique de notre décodeur nécessite la notion de trajectoire renormalisée  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau)$ , qui est essentiellement du même esprit que la notion d'amas renormalisé.  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau)$  est l'ensemble des colonies de niveau  $k$  contenant des excitations qui appartiennent à des amas causalement liés de niveau  $k$  ou supérieur durant la  $\tau^{\text{ème}}$  période de travail renormalisée, contenant des excitations persistant après le temps  $\tau U^k + (1 - f_c) b U^{k-1}$ . Cette dernière condition est requise afin de ne pas tenir en compte des erreurs de faibles niveaux qui pourraient interagir avec l'amas de niveau  $k$ , sans toutefois avoir d'effets sur les niveaux supérieurs. Considérons le cas où une règle de transition de niveau  $k$  déplace un anyon en dehors de la colonie  $C_\rho^k$  au temps  $\tau U^k$ , et tel qu'il interagisse avec une erreur véritable de plus bas niveau. Il est possible dans ce cas que le système évolue de manière à ce que tous les anyons créés par la petite erreur fusionnent vers le vide sur une échelle de temps trop petite pour influencer les syndromes de niveau  $k$  de la colonie. Nous souhaitons dans ce cas ne pas inclure  $C_\rho^k$  dans  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau)$  afin d'être cohérent avec la définition d'une règle de transition réussie (définie plus loin). La valeur de temps  $(1 - f_c) b U^{k-1}$  est choisie en prévision de la propriété de  $k$ -fidélité, que notre algorithme possède lorsqu'il est appliqué aux anyons non cycliques. Cette dernière nous assure essentiellement qu'en l'absence d'erreurs de niveau  $k$  ou plus, tous les anyons dans une colonie de niveau  $k$  se concentrent au site au centre de la colonie rapidement (dans un temps borné par  $(1 - f_c) b U^{k-1}$ ). De manière plus formelle, la notion de trajectoire renormalisée est définie ci-après.

**Définition 6.** Pour tout  $\tau \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau) = \{C_\rho^k \mid C_\rho^k \cap \mathcal{T}_t(\mathcal{C}^{(k)})(t) \mid c(t), \mathcal{E} \neq \emptyset\}$  tel que  $t$  est contenu dans l'intervalle  $[\tau U^k + (1 - f_c)bU^{k-1}, (\tau + 1)U^k)$ .

#### 5.1.4 Les syndromes renormalisés

Pour un modèle non abélien, la charge totale d'un sous-ensemble d'anyons n'est en général pas précisément définie avant de les avoir tous fusionnés. Bien que l'intuition derrière un syndrome de niveau  $k$  est de rapporter la charge totale présente dans une colonie de niveau  $k$ , il est nécessaire de formellement définir lorsqu'un syndrome rapportant une charge est valide. En particulier, on s'attend à ce que les erreurs appartenant à des amas de niveaux inférieurs soient corrigées par les règles de transitions des niveaux correspondants, on veut s'assurer que la présence d'anyons créés par de telles erreurs n'influencent pas les syndromes de niveau  $k$ .

Supposons que le système ait évolué jusqu'au temps  $t$  et qu'il est décrit par l'état quantique  $|\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle$ . On considère l'état  $|\psi'(c'(t), \mathcal{E}')\rangle$  avec  $\mathcal{E}' = \mathcal{C}^{(k)}(t)$  et tel que pour tout  $t_0 \leq t$ ,  $c'(r, t_0) = c(r, t_0)$  si  $(r, t_0)$  est dans la région causale de l'un des amas dans  $\mathcal{C}^{(k)}(t)$ , sinon  $c'(r, t_0) = \mathbb{1}$ . On peut dénoter par  $\{a_1, \dots, a_n\}$  les charges des anyons dans une colonie  $C_\rho^k$  au temps  $t$  et par  $\Pi_a^{a_1, \dots, a_n}$  le projecteur de leur canal de fusion sur la charge totale  $a$ . Nous définissons la distribution de charge de niveau  $k$  par  $\rho_\rho^k(a, t) = \langle \psi'(c'(t), \mathcal{E}') \mid \Pi_a^{a_1, \dots, a_n} \mid \psi'(c'(t), \mathcal{E}') \rangle$ . Dans le cas où il n'y a pas d'anyon présent dans la colonie, alors  $\rho_\rho^k(a, t) = \delta_{\mathbb{1}, a}$ .

La définition précédente suppose implicitement que d'enlever un amas causalement lié d'un niveau inférieur ne modifie pas les charges topologiques présentes dans la région causale de chacune des véritables erreurs de  $\mathcal{C}^{(k)}(t)$ , et ce pour un historique de fusion *particulier*. Notre définition de région causale nous assure que cela ne peut pas avoir d'effet sur la distribution de probabilité décrivant la charge moyennée sur les historiques de fusion. Bien que cela semble peu probable, il est néanmoins possible que le retrait des véritables erreurs d'un amas causalement lié modifie la charge présente dans un site appartenant à la région causale d'un autre amas pour un historique donné. Dans un tel cas, on peut simplement déclarer que les amas en question forment un seul et unique amas causalement lié. Il est également possible de modifier la définition de région causale d'une erreur afin de considérer la distribution de probabilité des différentes charges topologiques dans un site, et ce pour chaque historique de fusion possible. Nous ne considérons cependant pas une telle définition afin d'éviter trop de complications superflues.

La notion de syndromes de niveau  $k$  associé à une colonie telle que définie dans l'algo-

rithme que nous avons précédemment décrit est précisément définie. L'application des règles de transition de niveau  $k$  ainsi que les syndromes de niveaux supérieurs sont déterminés à partir de ces derniers. La définition suivante relie la notion de syndrome de niveau  $k$  à la distribution de probabilité de charge de niveau  $k$ ,  $\rho_\rho^k$ .

**Définition 7.** Si à un temps  $t$  tel que  $t + 1/2 = \tau U^k$ ,  $\rho_\rho^k(a, t) = \delta_{a,c}$  pour une charge topologique  $c$  (incluant le vide), et si le syndrome rapporté  $s_{k,c}(\rho, \tau)$  correspond à la charge  $c$ , alors  $s_{k,c}(\rho, \tau)$  est valide. La même définition tient pour  $s_{k,n}$ .

*A priori*, la notion de syndrome valide peut sembler ne pas être très utile, puisqu'il y aura en général des anyons provenant d'amas de niveaux inférieurs. Or, ces anyons devraient en général être considérés pour déterminer la charge totale des anyons présents dans la colonie. Si tous les anyons d'un amas donné sont présents dans une même colonie de niveau  $k$ , alors cela ne cause pas de problème, puisque leur charge totale est nécessairement le vide. Par contre, lorsque certains de ces amas sont présents à la frontière entre deux (ou plus) colonies de niveau  $k$ , alors la probabilité de la charge totale due à leur présence dans la colonie de niveau  $k$  est sujette à de rapides fluctuations dans le temps, et devient essentiellement aléatoire. Cependant, il sera démontré plus loin que pour les anyons non cycliques, l'algorithme que nous considérons est tel que tous les anyons d'un amas de niveau inférieur à  $k$  fusionnent vers le vide sur une échelle de temps trop courte pour affecter le syndrome de niveau  $k$  rapporté par l'algorithme. Ces derniers peuvent donc être ignorés en ce qui a trait à la charge totale des colonies des niveaux supérieurs.

Il est utile de dénoter une règle de transition de niveau  $k$  déplaçant un anyon du site au centre de la colonie  $C_\rho^k$  vers celui de la colonie  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^k$  par  $M_\rho^{(\alpha,\beta),k}$ . Supposons que la colonie  $C_\rho^k$  a un syndrome  $s_{k,c}$  valide et que les 8 autres colonies du voisinage, dénotées collectivement par  $\{C_{(\rho)}^k\}$ , ont également des syndromes valides  $s_{k,n}$ . Si la règle de transition appliquée au temps  $t_0$  tel que  $t_0 + 1/2 = \tau U^k$  stipule qu'un anyon de charge non triviale contenu au centre de  $C_\rho^k$  est déplacé vers une des colonies voisines  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^k$ , alors la règle est dite *active*. Notons que par définition, une règle de transition n'est pas appelée active lorsque le syndrome de la colonie ou l'un des syndromes des colonies voisines n'est pas valide, ou lorsque la charge renormalisée de niveau  $k$  contenue dans la colonie centrale correspond au vide.

**Définition 8.** La règle de transition active  $M_\rho^{(\alpha,\beta),k}$  est dite avoir été appliquée avec succès si pour la prochaine période de travail de niveau  $k$ ,  $s_{k,c}(\rho, \tau + 1)$  est valide et rapporte le vide.

Dans cette dernière définition, on considère qu'une colonie de niveau 0 correspond à un site physique. Un syndrome de niveau 0 est donc valide s'il rapporte la charge anyonique

présente dans le site physique considéré. Une règle de transition de niveau 0 est dite avoir été appliquée avec succès si après son application, le site physique considéré contient le vide.

## 5.2 Survol du processus de correction d'un amas causalement lié

---

Ayant posé toutes les définitions nécessaires à l'analyse de notre algorithme dans la section 5.1, nous débutons par illustrer les points importants en suivant de manière simplifiée le processus de correction d'un amas causalement lié de niveau 1. Le but est de donner au lecteur une vue d'ensemble du processus de correction, et d'illustrer les caractéristiques principales responsables du bon fonctionnement de l'algorithme.

Il est relativement simple de vérifier explicitement que pour une erreur de niveau 0 isolée des erreurs des niveaux supérieurs et de leurs excitations, les anyons créés sont contenus dans un groupe de  $2 \times 2$  sites et sont tous ramenés en un seul site en au plus 2 pas de temps (fusionnant vers le vide) : les règles de transition sont conçues à cet effet. Ceci permet donc de confiner la région causale d'une telle l'erreur. Les erreurs de niveau 0 étant  $(a, a, b)$ -séparées les unes des autres, les amas causalement liés de niveau 0 contiennent une seule véritable erreur. La considération d'un amas de niveau 0 n'est toutefois pas suffisante, puisqu'il ne peut pas y avoir d'interaction avec des erreurs d'un niveau inférieur.

Considérons donc  $E_1$ , une erreur de niveau 1 isolée dans l'espace et le temps de toute autre véritable erreur. Par définition,  $E_1$  est contenue dans une région  $\mathcal{B}_1$  de  $2 \times 2$  colonies de niveau 1. L'effet de l'erreur est de créer des excitations qui évolueront sous l'effet de l'application des règles de transition, ou encore de causer l'application de règles de transition basées sur des syndromes invalides, qui peuvent donc ainsi créer des excitations. En l'absence d'autres erreurs, les règles de transition de niveau 0 sont telles que les anyons sont confinés à l'intérieur de  $\mathcal{B}_1$ . Les anyons les plus éloignés du centre des différentes colonies sont tout d'abord déplacés vers un corridor (voir figure 4.5), puis vers le centre de leurs colonies respectives. Après la dernière «erreur atomique» de  $E_1$ , les anyons finissent donc par se concentrer au centre de chacune des colonies de  $\mathcal{B}_1$ . Il faut au plus  $Q + 1$  pas de temps pour y arriver, puisque si un anyon est sur la frontière entre deux colonies, ce dernier peut changer de colonie.

À la fin de la période de travail de  $U$  pas de temps, des règles de transition de niveau 1 sont appliqués, basées sur le premier niveau de syndromes renormalisés. Par similarité avec les règles de niveau 0, si les syndromes sont valides, alors après au plus deux périodes de

travail tous les anyons seront concentrés dans un seul site au centre d'une des colonies de  $\mathcal{B}_1$  et fusionneront vers le vide. Il est cependant possible que les syndromes de niveau 1 ne soient pas valides. Ceci pourrait survenir par exemple si  $E_1$  se situe à la fin d'une période de travail, ne laissant pas le temps nécessaire à tous les anyons de se concentrer au centre de la colonie. Le cas où une charge totale non triviale est présente dans une colonie mais que le syndrome indique le vide n'est pas problématique. Aucune règle de transition déplaçant un anyon n'est alors appliquée, et les anyons auront le temps de se concentrer au centre des différentes colonies assez rapidement durant la prochaine période de travail pour assurer la validité des syndromes subséquents.

Par contre, un syndrome non trivial peut causer problème. Dans ce cas, la règle de transition appliquée dépend des syndromes rapportés par les colonies voisines. Si ces derniers représentent fidèlement le fait qu'une charge non triviale est présente où non dans les colonies voisines, alors les règles de transitions appliquées feront en sorte de ne pas déplacer d'anyon en dehors de  $\mathcal{B}_1$ . Le seul cas problématique est celui où une charge totale non triviale est présente dans une colonie voisine, mais qu'un syndrome trivial  $s_{1,n}$  y soit rapporté. Il est alors possible que la règle de transition appliquée déplace un anyon à l'extérieur de  $\mathcal{B}_1$ , dans la direction opposée par rapport à celle requise pour ramener les anyons de l'amas ensemble. Or, si les anyons s'étendent sur une région plus grande que  $2 \times 2$  colonies, on ne peut plus garantir la correction rapide de l'amas par l'application des règles de niveau 1. Plusieurs erreurs de niveau 1 peuvent alors interagir ensemble et ainsi créer un «amas effectif» de plus haut niveau ne pouvant pas être corrigé par l'application des règles de niveau 1 en engendrant l'application de règles de transition de niveaux plus élevés. Pour éviter une telle situation, on peut judicieusement choisir les seuils  $f_c$  et  $f_n$  ainsi que la durée de la période de travail,  $U = b^2$ . On sait qu'une erreur de niveau 1 est contenue dans une période d'au plus  $7(b + 2)$  pas de temps (voir section 4.1.3). L'idée est de choisir  $f_c$  assez grand pour que s'il est possible qu'un syndrome non trivial soit rapporté dans une colonie, alors il reste assez de temps sur la période de travail actuelle pour que les anyons puissent se concentrer dans les sites centraux des colonies voisines sous l'action des règles de transition de niveau 0. On doit donc choisir  $f_n$  assez petit pour que les syndromes  $s_{1,n}$  des colonies voisines indiquent la véritable charge renormalisée. Afin de pouvoir trouver des seuils  $f_c$  et  $f_n$  satisfaisant ces caractéristiques, la période de travail doit être suffisamment longue pour s'assurer que les anyons aient le temps de se concentrer dans les colonies voisines *après*  $E_1$ .

La présence d'erreurs de niveau 0 peut modifier l'évolution de la trajectoire des anyons créés par  $E_1$ . Les erreurs de niveau 0 sont  $(a, a, b)$ -séparées de  $E_1$ , mais les règles de transition peuvent faire déplacer les anyons de  $E_1$  vers des régions affectées par des erreurs de niveau 0, faisant ainsi interagir les erreurs de niveau 0 avec  $E_1$ . Il devient alors impossible de traiter

uniquement de l'erreur  $E_1$  indépendamment. Il faut donc considérer l'amas causalement lié de  $E_1$ ,  $\mathcal{C}(E_1)$ , comprenant toutes les erreurs de niveau 0 interagissant avec  $E_1$ .

Tout d'abord, de telles erreurs peuvent modifier la trajectoire des anyons de  $E_1$  déplacés par les règles de transition de niveau 0. Il est en effet possible que de telles erreurs fassent changer de colonies des anyons de  $\mathcal{C}(E_1)$  avant que ces derniers n'atteignent un corridor, en créant des chaînes d'anyons en interaction vers l'extérieur d'une colonie. Comme les erreurs de niveau 0 sont  $(a, a, b)$ -séparées les unes des autres, on peut néanmoins s'assurer que tous les anyons restent contenus dans  $\mathcal{B}_1$  sous l'évolution des règles de transition de niveau 0 en choisissant une taille de colonie ( $Q$ ) assez grande. Ceci est possible en vertu du fait qu'une fois qu'un anyon a atteint le corridor d'une colonie, ce dernier ne peut plus s'échapper de la colonie le contenant : la séparation entre les erreurs de niveau 0 et la structure des règles de transition nous en assurent. Or, en choisissant  $Q$  assez grand, on peut s'assurer que les anyons ne puissent pas s'étendre aux colonies voisines de  $\mathcal{B}_1$  avant d'atteindre un corridor.

La présence d'erreurs de niveau 0 ont aussi comme effet de ralentir la vitesse avec laquelle les anyons de  $\mathcal{C}(E_1)$  se concentrent au centre des colonies de  $\mathcal{B}_1$ . Nous devons donc considérer le délai ainsi créé dans la sélection des seuils  $f_c$  et  $f_n$ .

Des erreurs de niveau 0 peuvent aussi affecter le centre des colonies une fois que les anyons s'y sont concentrés, changeant ainsi la charge anyonique au centre de la colonie et potentiellement modifiant les syndromes  $s_{1,c}$  et  $s_{1,k}$  de la colonie. Comme les erreurs sont contenues dans un groupe de  $2 \times 2$  sites et sont éloignées les unes des autres, on trouve cependant que les anyons retournent au centre de la colonie au plus deux pas de temps après l'apparition de l'erreur. On doit donc s'assurer de choisir  $f_c$  de manière à ce qu'il ne soit pas trop élevé afin que des erreurs de niveau 0 ne causent pas un syndrome  $s_{1,c}$  indiquant une mauvaise charge. Nous devons également choisir  $f_n$  assez grand pour s'assurer que des erreurs de niveau 0 dont les effets seront rapidement contrecarrés ne puissent pas modifier le syndrome  $s_{1,n}$  rapporté par la colonie.

Les erreurs de niveau 0 peuvent également faire échouer l'application d'une règle de transition. Il peut en effet survenir des erreurs sur la trajectoire d'un anyon déplacé par une règle de transition de niveau 1. Leur présence peut causer des processus de fusion ou de tresse modifiant le canal de fusion totale des anyons des erreurs de niveau 0. La charge totale contenue dans la colonie de niveau 1 pourrait donc ne pas être le vide après l'application de la règle de transition. L'exemple d'un tel processus est illustré à la figure 5.1. Après l'application de la règle de transition ayant échoué, les anyons toujours présents dans la colonie vont cependant être ramenés en son centre par les règles de transition de niveau 0. Ce phénomène peut également se répéter pour les périodes de travail subséquentes, et ainsi

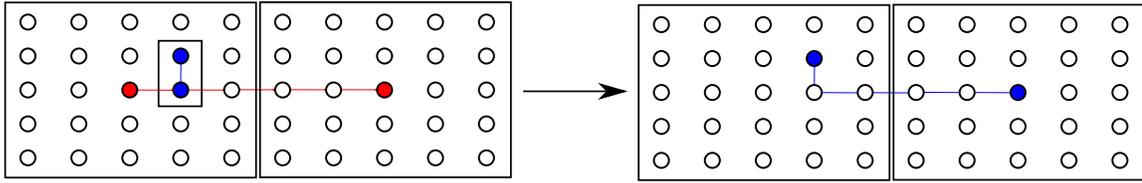


FIGURE 5.1 – Exemple d’une erreur de niveau 0 survenant sur le trajet d’un anyon étant déplacé durant l’application d’une règle de transition de niveau 1 et empêchant la réussite de cette dernière. Dans cet exemple, les excitations sont décrites par des anyons d’Ising. Les anyons en rouge ont la charge  $\sigma$ , alors que les anyons en bleu sont de charge  $\epsilon$ . Les arêtes sur la figure de gauche représentent une série d’erreurs possible menant à une telle configuration de charge, tandis que les colonies de niveau 1 sont encadrées en noir. La figure de droite représente l’état du système après l’application d’une règle de transition de niveau 1 transportant un anyon de charge  $\sigma$  du centre de la colonie de gauche vers la colonie de droite. La charge totale de la colonie de gauche après l’application de la règle de transition est  $\epsilon$ , en raison d’un processus de fusion ayant survenu lorsque l’anyon de charge  $\sigma$  a atteint le site contenant la charge de type  $\epsilon$ . Figure tirée de [35].

prévenir de manière indéfinie l’application de la règle de transition. Pour les anyons non cycliques, il est possible de garantir que ce processus puisse se répéter au plus  $\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) - 1$  fois avant que la charge totale ne devienne abélienne. Une fois la charge totale abélienne, les erreurs de niveau 0 ne peuvent plus interférer avec l’application d’une règle de niveau 1, et cette dernière sera donc réussie.

Après au plus deux rondes d’applications réussies des règles de transition de niveau 1, tous les anyons de l’amas  $\mathcal{C}(E_1)$  seront contenus dans une seule colonie, puisque les règles de transitions de niveau 1 fonctionnent essentiellement de la même manière que celles de niveau 0 pour une erreur de ce niveau. Une fois tous les anyons contenus dans une seule colonie, les règles de niveau 0 se chargeront de concentrer rapidement tous les anyons au centre de la colonie, et de les faire fusionner vers le vide.

Dans l’analyse précédente, nous avons ignoré les erreurs de niveau 1 autres que  $E_1$ . On peut le justifier par le fait que ces dernières sont éloignées les unes des autres, dans l’espace et dans le temps. Le raisonnement précédent montre que tous les anyons de l’amas  $\mathcal{C}(E_1)$  fusionnent vers le vide avant de pouvoir interagir avec une autre erreur de niveau 1.

Nous n’avons pas à considérer les erreurs des niveaux supérieurs non plus. Si  $E_1$  interagit avec une erreur de niveau supérieur, alors par définition,  $E_1$  fait partie d’un amas causalement lié d’un niveau supérieur à 1. Or, nous ne considérons pour l’instant qu’un amas de niveau 1. Pour ce qui est des niveaux supérieurs, la structure auto similaire à chaque niveau de l’algorithme nous incite à penser que le même raisonnement fonctionnera également pour ceux-ci.

### 5.3 Propriétés importantes de l'algorithme

---

L'analyse de la section précédente est grossière, et est présentée afin d'illustrer les caractéristiques principales de l'algorithme. Une analyse détaillée peut être trouvée dans l'article [35] qui est joint en annexe A. Nous nous limitons dans cette section à présenter les propriétés clés permettant de conclure à l'existence d'un seuil pour les anyons non cycliques.

Le succès de l'algorithme dépend crucialement du fait que les syndromes d'une colonie d'un niveau donné représentent la véritable charge totale des anyons des amas de même niveau ou supérieur y étant présent. Or, pour ce faire, il faut que les anyons se concentrent en un seul site physique et y fusionnent. Ce processus doit se produire suffisamment rapidement pour que le syndrome correspondant soit rapporté. En fait, le processus menant à la concentration des anyons au centre de la colonie dépend du bon fonctionnement de l'algorithme aux niveaux inférieurs. Les règles de transition appliquées à tous les niveaux inférieurs doivent être en mesure de bien déplacer la charge totale présente dans chacune des colonies concernées. Ceci nous incite donc à définir la propriété de  $k$ -fidélité :

**Définition 9.** *Supposons qu'une colonie de niveau  $k'$ ,  $C_{\rho}^{k'}$  avec  $k' \leq k$ , et que les 8 colonies du voisinage  $\{C_{\rho}^{k'}\}$  ne supportent pas d'erreurs de niveau  $k'$  ou plus pour une période de travail de niveau  $k'$  complète  $[\tau U^{k'}, (\tau + 1)U^{k'}]$ . S'il existe un temps  $t_c \leq (1 - f_c)bU^{k'-1} + \tau U^{k'}$  tel que pour tout  $t \geq t_c$ , le domaine des trajectoires  $\mathcal{D}_t \left( \mathcal{C}^{(k)}(t_c) | c(t), \mathcal{E} \right)$  restreint à  $C_{\rho}^{k'}$  est contenu dans le site physique en son centre, alors l'algorithme est  $k$ -fidèle.*

De par la nature probabiliste du processus de fusion pour les anyons non abéliens, nous demandons que ce soit le domaine des trajectoires qui soit contenu dans le site physique au centre de la colonie au temps  $t_c$ . Nous notons également que nous n'imposons pas qu'après  $t_c$ , le domaine reste concentré dans le centre de la colonie. Ceci est nécessaire, car il peut se produire des erreurs de niveaux inférieurs affectant le centre de la colonie survenant après  $t_c$ . Et donc, la  $k$ -fidélité n'est pas suffisante pour garantir la validité des syndromes de niveau  $k$  et inférieurs.

Un autre ingrédient essentiel est le fait que les anyons appartenant à un amas de niveau  $k$  restent confinés dans une région de  $2 \times 2$  colonies du même niveau. Ceci s'avère nécessaire afin de s'assurer que l'application des règles de transition de niveau  $k$  puisse concentrer tous les anyons de l'amas en un seul site physique, et donc corriger l'amas. Comme les règles de transition appliquées à partir d'une colonie ne tiennent en compte que des syndromes de cette colonie et de ses voisines directes, il est possible que des anyons s'étendant sur une région plus grande soient déplacés dans des directions opposées, faisant ainsi grandir

l'extension spatiale de l'amas. Ceci pourrait avoir pour effet de faire interagir plusieurs erreurs du même niveau, ou encore de causer l'application de règles de transition de niveau  $k + 1$  et plus, et d'ainsi «artificiellement» créer une erreur d'un niveau supérieur. De plus, la présence d'erreurs des niveaux inférieurs peut influencer la trajectoire des anyons de l'amas, et ces effets doivent être pris en compte pour la détermination des syndromes. Nous définissons donc la propriété de  $k$ -localité de la manière suivante :

**Définition 10.** *Si pour tout temps  $t$  et toute erreur  $E$  de niveau  $k'$  avec  $k' \leq k$ , le domaine des trajectoires  $\mathcal{D}_t(\tilde{\mathcal{C}}(E; t), \tilde{\mathcal{E}}(E))$  est contenu dans un bloc de  $2 \times 2$  colonies de niveau  $k'$ , alors l'algorithme est dit  $k$ -local.*

Notons que la définition de la  $k$ -localité utilise la notion d'amas restreint, et non pas d'amas. Afin de motiver ce choix, l'on note tout d'abord que dans le cas où  $E$  est la seule erreur de niveau  $k$  contenue dans  $\mathcal{C}(E; t)$ , alors  $\tilde{\mathcal{C}}(E; t) = \mathcal{C}(E; t)$ . Dans ce cas, la  $k$ -localité implique que la région causale de  $\mathcal{C}(E; t)$  est contenue dans un groupe de  $2 \times 2$  colonies de niveau  $k$ .

La notion d'amas ne nous permet pas d'isoler dans l'espace les effets directs de  $E'$ , une erreur de plus petit niveau, sur l'évolution des anyons appartenant à  $\mathcal{C}(E; t)$ , un amas de niveau  $k$ . En effet, dès que  $E'$  interagit avec une des erreurs de l'amas de  $E$ , la région causale de  $E'$  et celle de  $E$  se confondent, par définition. Par contre, les effets directs de  $E'$  sur la trajectoire des anyons de  $\mathcal{C}(E; t)$  peuvent être circonscrits dans l'espace en utilisant l'amas restreint de  $E'$ , puisqu'il ne contient pas les effets des erreurs des niveaux supérieurs.

Finalement, un dernier ingrédient essentiel pour le bon fonctionnement de l'algorithme est que les règles de transition doivent pouvoir être appliquées avec succès, afin d'assurer que le transport d'anyons de charge appropriée s'effectue correctement. Il peut survenir des erreurs sur la trajectoire d'un anyon déplacé par une règle de transition d'un niveau plus élevé. Une «interaction topologique» entre l'anyon transporté et ces erreurs peut faire échouer la bonne application de la règle de transition. Cela pourrait avoir pour conséquences de non seulement empêcher la correction d'un amas, mais également de prévenir la concentration des anyons au centre des colonies des différents niveaux, provoquant des syndromes invalides. Nous définissons donc la propriété de la  $k$ -réussite :

**Définition 11.** *Si pour tout  $k' \leq k$ , en l'absence d'erreur de niveau  $k'$  ou supérieur et en l'absence d'application des règles de transitions de niveau supérieur à  $k'$  sur  $C_\rho^{k'} \cup \{C_{(\rho)}^{k'}\}$ , toute règle de transition de la forme  $M_\rho^{(\alpha(\tau), \beta(\tau)), k'}$  qui est appliquée successivement  $\text{diam}(G_A)$  fois est réussie, alors l'algorithme possède la propriété de  $k$ -réussite.*

## 5.4 Les conséquences de la $k$ -localité, de la $k$ -fidélité et de la $k$ -réussite

En supposant que l'algorithme possède ces trois propriétés jusqu'au niveau  $k$ , on peut déduire plusieurs propriétés qui permettront de démontrer l'existence d'un seuil.

Tout d'abord, nous avons qu'en l'absence d'erreur et d'application de règle de transition de niveau supérieur à  $k$ , la trajectoire renormalisée de niveau  $k$  d'un amas causalement lié ne dépend essentiellement que de l'application des règles de transition et des erreurs de niveau  $k$ . Pour ce qui est de l'analyse de l'évolution de la région causale d'un amas, les colonies et les erreurs de niveau  $k$  à ce niveau de renormalisation jouent essentiellement le rôle des sites physiques et des erreurs au niveau 0 respectivement : nous n'avons pas à nous soucier des erreurs ni des règles de transition des niveaux inférieurs.

De plus, toute colonie dans un voisinage n'étant pas affecté par une erreur de même niveau ou plus pour une période de travail donnée présentera des syndromes valides. Ceci est nécessaire pour que les règles de transition appropriées soient appliquées de manière adéquate afin de pouvoir corriger un amas causalement lié de ce niveau. C'est également essentiel pour que les anyons présents dans une colonie d'un niveau supérieur puissent se concentrer au centre de celle-ci, et d'ainsi assurer le bon fonctionnement de l'algorithme à ce niveau également.

Enfin, en utilisant les propriétés de  $k$ -localité, de  $k$ -fidélité et de  $k$ -réussite ainsi que les deux conséquences précédentes, on arrive à borner la région causale d'un amas de niveau  $k$  dans l'espace et le temps. Le fait que la région causale d'un amas soit restreinte dans le temps implique que toutes les excitations créées par cet amas fusionnent vers le vide, et donc que l'amas est corrigé. Les erreurs de niveau  $k$  étant bien séparées les unes des autres, cela permet de conclure que leurs régions causales restent isolées les unes des autres. De plus, la région causale d'un amas de niveau  $k$  est suffisamment restreinte dans le temps pour ne pas influencer les syndromes des niveaux supérieurs, prévenant ainsi l'application de règles de transition à ces niveaux. .

Ces différents résultats sont formalisés par le lemme suivant.

**Lemme 3.** *En supposant que l'algorithme de correction possède les propriétés de  $k$ -localité,  $k$ -fidélité et  $k$ -réussite, alors pour tout  $k' \leq k$ , l'algorithme possède également les propriétés suivantes:*

1. *Si les colonies  $C_\rho^{k'} \cup \{C_{\langle \rho \rangle}^{k'}\}$  ne contiennent pas d'erreurs de niveau  $k'$  ou plus, si  $C_\rho^{k'}$  n'est pas affecté par des règles de transitions de niveau  $k'$  or plus, et si les colonies  $\{C_{\langle \rho \rangle}^{k'}\}$  ne sont pas affectées par des règles de transition de niveau plus élevé que  $k'$  pour une pleine période de niveau  $k'$  dénoté par  $\tau$ , alors nous avons que  $C_\rho^{k'} \in \mathcal{T}_{(k')}(\tau) \iff C_\rho^{k'} \in \mathcal{T}_{(k')}(\tau + 1)$ .*

2. Si  $C_{\rho}^{k'} \cup \{C_{(\rho)}^{k'}\}$  ne contient pas d'erreur de niveau  $k'$  ou plus pour une période de travail de niveau  $k'$  caractérisée par  $\tau$ , alors les syndromes  $s_{k',c}(\rho, \tau + 1)$  et  $s_{k',n}(\rho, \tau + 1)$  sont valides.
3. Si  $E$  est une véritable erreur de niveau  $k'$  et si  $\text{lvl}(C(E; t)) \leq k'$  pour tout temps  $t$ , alors la région causale de  $C(E)$  est contenue dans une boîte d'espace-temps de taille  $2Q^{k'} \times 2Q^{k'} \times (2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3)U^{k'}$ .

Avant de pouvoir conclure à l'existence d'un seuil pour les anyons non cycliques, il reste à montrer que l'algorithme possède les propriétés de  $k$ -localité, de  $k$ -fidélité et de  $k$ -réussite, et ce pour toute valeur de  $k$  jusqu'à couvrir le système au complet. On utilise pour ce faire un argument par induction sur  $k$ . Par examen direct, il est aisé de conclure que l'algorithme est 0-local, 0-fidèle et possède la propriété de 0-réussite. Notons que ces propriétés sont valides quel que soit le modèle anyonique considéré. On utilise par la suite une hypothèse inductive : on suppose que les propriétés de  $k$ -localité,  $k$ -fidélité et de  $k$ -réussite sont toutes trois respectées, et on peut démontrer que la  $(k + 1)$ -fidélité, la  $(k + 1)$ -localité ainsi que la  $(k + 1)$ -réussite le sont aussi pour les anyons non cycliques. On peut donc montrer les lemmes suivants.

**Lemme 4.** *L'algorithme de correction que nous présentons possède les propriétés de 0-localité, 0-fidélité et de 0-réussite.*

**Lemme 5.** *Si l'algorithme possède les propriétés de  $k$ -localité, de  $k$ -fidélité et de  $k$ -réussite, alors il est aussi  $(k + 1)$ -fidèle.*

**Lemme 6.** *Supposons que l'algorithme possède les propriétés de  $k$ -localité,  $k$ -fidélité et de  $k$ -réussite, et que  $Q > 14(k + 2) + 7$ . Alors il existe des fractions  $f_c$  et  $f_n$  ainsi qu'une valeur de  $b_0$  tel que si  $b > b_0$ , alors l'algorithme est  $(k + 1)$ -local.*

**Lemme 7.** *Supposons que l'algorithme soit  $k$ -local,  $(k + 1)$ -fidèle et qu'il possède la propriété de  $k$ -réussite. Si  $\mathcal{A}$  est non cyclique, alors l'algorithme possède également la propriété de  $(k + 1)$ -réussite.*

Nous avons désormais tous les ingrédients en main afin de pouvoir conclure à l'existence d'un seuil, ce qui constitue notre théorème principal.

**Théorème 1.** *Si  $\mathcal{A}$  est un modèle anyonique non cyclique, alors il existe une valeur critique  $p_c > 0$  telle que si  $p + q < p_c$ , alors pour tout nombre arbitraire de pas de temps  $T$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une taille linéaire du système  $L = Q^n \in \mathcal{O}(\log \frac{1}{\epsilon})$  tel que l'état encodé dans le sous-espace fondamental peut être en principe retrouvé après  $T$  pas de temps avec une probabilité d'au moins  $1 - \epsilon$ .*

*Démonstration.* Nous choisissons  $Q > 14(+2) + 7$  et  $b > b_0$  ainsi que des valeurs pour  $f_c$  et  $f_n$  permettant de satisfaire le lemme 6. Nous définissons  $p_c = \frac{Q^{-4}b^{-4}}{4}$ , et nous supposons que  $p + q < p_c$ . Nous choisissons la taille linéaire du système  $L = Q^n$ , en s'assurant que  $n$  soit assez grand pour que  $U^n \geq T$  et que  $\left(\frac{p+q}{p_c}\right)^{2^n} \leq \epsilon$ .

Comme  $p + q < p_c$ , le lemme 2 garantit que toute erreur «atomique» fasse partie d'une véritable erreur, et donc le concept d'amas causalement lié est bien défini. En utilisant le lemme 4, l'algorithme possède les propriétés de 0-localité, 0-fidélité et de 0-réussite. En utilisant les lemmes 5 à 7, nous trouvons de manière récursive que l'algorithme possède les propriétés de  $(n - 1)$ -localité, de  $(n - 1)$ -fidélité et de  $(n - 1)$ -réussite également. Nous trouvons donc en utilisant la conséquence (3) découlant de ces trois propriétés et de la séparation entre les véritables erreurs de même niveau qu'il doit y avoir l'apparition d'au moins un amas causalement lié de niveau  $n$  ou supérieur pour affecter de manière non triviale le sous-espace encodé; par définition, un amas causalement lié de niveau  $n$  nécessite la présence d'une véritable erreur de niveau  $n$ . En utilisant le lemme 1, la probabilité qu'une erreur de niveau  $n$  ou plus ait une intersection non vide avec une boîte d'espace-temps de taille  $Q^n \times Q^n \times U^n$  est d'au plus  $\left(\frac{p+q}{p_c}\right)^{2^n}$ . Nous trouvons donc que si les règles de transition continuent d'opérer dans un environnement sans erreur après  $T$  pas de temps, le système retournera dans son état fondamental original avec une probabilité d'au moins  $1 - \epsilon$ .  $\square$

Finalement, il est possible de déterminer une borne inférieure pour la valeur de  $p_c$ , en utilisant  $a = 3$ ,  $Q = 78$  et  $b = 9(3\text{diam}(G_A) + 1)Q$ , qui respectent toutes les conditions requises pour que le théorème précédent soit valide. La valeur numérique trouvée est alors de  $2,7 \times 10^{-20} \times (3\text{diam}(G_A) + 1)^{-4}$ . En particulier, nous obtenons une borne inférieure pour la valeur de seuil de  $1,1 \times 10^{-23}$  pour un système donnant lieu à la création d'anyons d'Ising, un modèle anyonique non abélien qui est non cyclique et que nous avons étudié numériquement au chapitre précédent.

## 5.5 Discussion

---

La borne inférieure pour la valeur du seuil que nous trouvons de manière analytique est extrêmement faible ( $1,1 \times 10^{-23}$ ) par rapport à celle trouvée numériquement pour des anyons d'Ising, qui se trouve plutôt dans la plage  $10^{-4} \sim 10^{-3}$ . Notons que la taille de colonie dans les simulations numériques est beaucoup plus faible que celle utilisée dans la preuve. Cet écart est probablement dû au fait que nous choisissons des paramètres pour nous assurer que l'algorithme fonctionne bien. En contraste, dans les simulations numériques, nous traitons uniquement les erreurs typiques. Ainsi, une analyse plus détaillée faisant appel à des arguments probabilistes est susceptible de donner une valeur de seuil beaucoup plus proche de la réalité, mais serait également plus complexe.

Pour ce qui est des anyons cycliques, il est impossible de choisir les paramètres de l'algorithme de manière à s'assurer que les régions causales soient toujours bornées. Pour une erreur de niveau  $k$ , on peut toujours trouver un ensemble d'erreurs de niveaux inférieurs tel que leur amas causalement lié s'étire dans le temps de manière indéfinie. Ceci permet l'apparition d'autres erreurs de niveau  $k$  avant que la première ne soit corrigée, et donc peut causer la coalescence des erreurs de ce niveau, ce qui peut ultimement causer l'application d'une opération non triviale sur l'espace encodé. Comme la probabilité qu'une particule et son antiparticule fusionnent pour donner une charge non triviale  $l$  fois de suite décroît de manière exponentielle avec  $l$ , nous pourrions imaginer imposer une limite  $l_{\max}$  au nombre d'applications d'une règle de transition donnée. La même analyse pourrait être effectuée en remplaçant  $\text{diam}(G_{\mathcal{A}})$  par  $l_{\max}$ , laissant une possibilité d'erreur exponentiellement faible par rapport à l'argument  $l_{\max}$ . Le problème avec cette approche est qu'afin de parvenir à une suppression exponentielle des erreurs avec un réseau de taille  $L$ , la limite  $l_{\max}$  devrait augmenter avec  $L$ , donnant lieu à un «seuil mobile». Ceci provient du fait que le bon fonctionnement de l'algorithme à un niveau donné nécessite que les niveaux inférieurs fonctionnent bien, puisque les syndromes en dépendent. Il faut donc laisser assez de temps aux niveaux inférieurs pour que les charges se concentrent aux centres des colonies de plus haut niveau, pour qu'ensuite les règles de transition de plus haut niveau puissent être appliquées avec succès. Des méthodes n'utilisant pas l'idée de renormalisation telles que celles présentées dans les articles [27, 34] seront donc peut-être nécessaires pour étudier la tolérance aux fautes pour les modèles anyoniques cycliques. Des simulations numériques pour des modèles anyoniques cycliques pourraient s'avérer fort utiles, mais il sera beaucoup plus difficile de simuler de tels systèmes puisque les opérations topologiques en général ne peuvent pas être générées par des opérations de Clifford uniquement.

La simplification la plus notable de notre analyse est que l'application des règles de

transition renormalisées s'effectue dans un seul pas de temps. Bien qu'il soit possible de le faire pour les anyons abéliens en effectuant une série d'opérations de fission et de fusion en parallèle et résultant en la téléportation de l'anyon (puisque la fusion d'une particule avec son antiparticule donne toujours le vide dans ce cas), il est impossible d'en faire autant pour des anyons non abéliens. Ces derniers doivent être déplacés lentement. Cette vitesse de déplacement lente requiert la modification des règles de transition afin d'éviter les conflits entre le déplacement d'une charge de haut niveau et l'application des règles de transition des niveaux plus bas. On pourrait par exemple envisager de simplement suspendre l'application des règles de plus bas niveau durant le passage d'une charge de haut niveau. Ces règles de transition «vacantes» peuvent être interprétées comme étant des erreurs additionnelles et être incorporées dans les erreurs de faibles niveaux ayant créé les anyons en jeu. Leur effet net serait donc essentiellement de légèrement faire augmenter le taux d'erreur des niveaux inférieurs. Nous croyons donc que de considérer une vitesse de propagation finie des anyons changera légèrement notre analyse quantitative, mais que les résultats principaux seront toujours valides.

Une autre hypothèse simplificatrice est la communication instantanée des syndromes des colonies voisines. En principe, nous devrions tenir compte d'une vitesse de communication finie, puisque les automates cellulaires communiquent de manière locale (au niveau physique). Pour ce faire, on pourrait légèrement modifier l'algorithme de correction, de manière à déterminer les différents syndromes un peu avant la fin d'une période de travail, et d'ainsi avoir le temps de les envoyer vers les colonies voisines. Il suffit alors de modifier les seuils  $f_c$  et  $f_n$  pour en tenir compte, et de possiblement légèrement augmenter la durée d'une période de travail. Le tout aura pour effet de réduire sensiblement la valeur de  $p_c$ .

Il est également à noter que les règles de transition sont appliquées de manière parfaite, *i.e.* lorsqu'un syndrome donné stipule qu'un anyon est déplacé vers un site voisin, cette opération est toujours effectuée. Il est concevable qu'en pratique, des erreurs d'application des règles de transitions puissent survenir. Or, appliquer une règle de transition déplaçant la mauvaise charge topologique (en incluant le vide) est qualitativement équivalent à soit appliquer une règle de transition sans erreur mais basée sur un syndrome erroné, soit à l'appliquer alors qu'une erreur créant des excitations survient. Le fait de considérer des règles de transition imparfaites ne devrait donc pas remettre en cause l'existence d'un seuil.

# Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse s’inscrivent dans le domaine du calcul quantique topologique qui fait présentement l’objet de nombreuses recherches, dans l’espoir que la création et le contrôle d’anyons non abéliens en laboratoire puissent mener à la réalisation d’un ordinateur quantique. Les systèmes physiques pouvant donner lieu à des anyons non abéliens ont été abondamment étudiés de manière théorique et sont présentement sous la loupe des expérimentateurs. Parmi ceux-ci, pensons spécifiquement aux anyons d’Ising (plus connus sous le nom de fermions de Majorana). L’étude de la correction d’erreurs pour de tels systèmes n’en est encore qu’à ses balbutiements et les résultats fondamentaux du domaine restent à être démontrés, bien que de telles méthodes seront essentielles à terme pour la construction d’un ordinateur quantique à grande échelle.

Dans cette thèse, nous avons montré qu’il est en principe possible de préserver un état quantique encodé dans le sous-espace fondamentale d’un système topologiquement ordonné donnant lieu à un modèle anyonique non cyclique, et une valeur critique pour le taux de créations de particules et d’erreurs de mesure raisonnable (entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$ ) a été trouvé grâce à des simulations numériques pour un système d’anyons d’Ising. Bien qu’il s’agisse d’un résultat fort important pour le domaine, il reste beaucoup à faire avant d’en arriver à un plan réaliste pour l’implémentation d’un algorithme tolérant aux fautes pour un ordinateur quantique basé sur l’utilisation d’anyons non abéliens.

Les outils numériques et analytiques qui ont été développés dans le cadre de cette thèse ne semblent pas bien adaptés au cas des anyons cycliques. Les anyons de Fibonacci, le modèle anyonique le plus simple étant cyclique, permettent d’effectuer du calcul quantique universel en utilisant des opérations de tressage et de fusion ; on ne peut donc pas le simuler efficacement sur un ordinateur classique. Pour ce qui est de l’analyse mathématique du

problème, le fait qu'il soit impossible de borner le nombre d'applications d'une règle de transition d'un niveau renormalisé avant qu'elle ne soit réussie engendre une interaction complexe entre les différents niveaux de renormalisations de l'algorithme de décodage considéré, rendant son analyse beaucoup plus difficile. On peut donc se demander s'il existe une différence fondamentale entre les anyons cycliques et non cycliques dans le cadre de la correction d'erreur tolérante aux fautes, ou s'il ne s'agit-là que de «simples» complications de nature technique. Relier le problème de la correction d'erreur pour les anyons cycliques à un problème de physique statistique pourrait potentiellement contribuer à répondre à cette question. Cette idée a été mise à profit dans le cas de systèmes topologiquement ordonnés, où le problème de la correction d'erreurs d'anyons abéliens peut être mis en correspondance avec un phénomène de transition de phase entre une phase ordonnée et une autre désordonnée pour un modèle de physique statistique judicieusement choisi [18]. Il est donc envisageable de réduire le problème de l'existence d'un seuil pour la correction d'erreur tolérante aux fautes pour les anyons cycliques à celui d'une transition de phase.

En particulier, nous avons montré qu'il est *en principe* possible de préserver l'information encodée, mais la question d'effectuer une mesure sur cet état en présence de bruit n'a pas été abordée. Dans le cas d'anyons abéliens, il est possible de mesurer la phase associée à l'application de différents opérateurs logiques (*i.e.* la phase acquise par une paire d'anyons créée à partir du vide, ceux-ci étant déplacés le long d'une boucle non contractile sur le tore pour ensuite les faire fusionner vers le vide). On peut ensuite en déduire le résultat en tenant compte de la mesure de syndromes associés à la présence d'excitations dans le système. Des complications surviennent pour les systèmes d'anyons non abéliens, liées à la difficulté de reconstituer la trajectoire dans l'espace-temps d'excitations créées par des erreurs en présence d'erreurs de mesures. Il peut également y avoir des subtilités liées aux effets complexes des opérations de tresse et de fusion projective sur l'espace de fusion d'anyons non abéliens déplacés sur des trajectoires homologiquement non triviales.

Dans cette thèse, nous n'avons abordé que la question d'une mémoire quantique. Afin de pouvoir construire un ordinateur quantique, il faudra évidemment pouvoir appliquer des portes logiques. Étant donné la structure d'amas causalement liés qui sont bien séparés les uns des autres pourvu que le taux d'erreur soit suffisamment bas, on pourrait imaginer appliquer une opération logique dans le sous-espace encodé en appliquant une opération unitaire automorphique locale, *i.e.* une opération unitaire laissant la surface sur laquelle le système est défini inchangée tout en conservant la localité des structures. Bien que l'application d'une telle opération pourrait appliquer une opération logique non triviale, il est impossible de constituer ainsi un ensemble de portes logiques universel [74]. Il faudra donc également penser à une autre approche, possiblement en déformant graduellement la

surface du système tout en gardant une notion de localité.

D'un point de vue expérimental, il semble souhaitable d'utiliser l'espace de fusion d'anyons non abéliens plutôt que le sous-espace fondamental d'un système défini sur une surface de genre élevée afin d'encoder de l'information quantique. L'algorithme que nous avons présenté devrait alors évidemment être modifié, possiblement en disposant des anyons aux centres des colonies de haut niveau. Des portes logiques pourraient alors être appliquées, soit en déplaçant physiquement les anyons afin de les tresser, ce qui nécessiterait la modification dans le temps des règles de transition et de la structure des colonies autour des anyons étant déplacés, ou encore en effectuant des opérations de tressage en utilisant uniquement des opérations de mesure et des paires d'anyons ancillaires [47, 48].

L'idée d'encoder de l'information sur une surface de genre 1 ou plus semble difficile à réaliser en pratique. Une manière plus naturelle d'encoder l'information en utilisant des anyons non abéliens et d'utiliser l'espace de fusion, ou encore d'ajouter des perforations sur une surface plane [74]. Cette dernière méthode est couramment utilisée dans le cas des codes de surfaces [75]. Bien que notre algorithme ne s'applique pas directement à de telles situations, nous croyons qu'il pourrait être y adapté en y apportant des modifications mineures. En particulier, pourvu que ces défauts topologiques soient gardés à une distance supérieure à  $Q^n$  les uns des autres, il devrait exister un pavage de colonies les évitant et n'interférant pas avec les règles de transition de niveau  $n$  ou moins. Une technique similaire, peut-être en utilisant un pavage dépendant du temps, pourrait possiblement être utilisée dans un contexte où les anyons sont tressés et fusionnés afin d'effectuer du calcul quantique tolérant aux fautes en utilisant des anyons non abéliens.

Une autre possibilité, sans aucun doute la plus souhaitable, est que le «gap» de systèmes donnant lieu à des anyons non abéliens soit suffisamment grand par rapport aux températures atteignables par les systèmes cryogéniques modernes et aux tailles de systèmes requis pour faire du calcul quantique non trivial pour que la probabilité de trouver des anyons thermiques dans le système soit à toute fin pratique nulle. C'est en fait ce qui se produit pour les ordinateurs conventionnels ; le taux d'erreur des composantes électroniques étant de l'ordre de  $10^{-24}$ , on n'a pas à se soucier de la tolérance aux fautes. Or, le peu de données expérimentales dont nous disposons pour l'instant ne laissent pas entrevoir un très grand «gap», mais plutôt un «gap mou» (soft gap) [76, 77, 78, 79].

# Bibliographie

- [1] P. Gács. *Journal of Computer System Science* **32**, 15–78 (1986).
- [2] J. W. Harrington. *Analysis of quantum error-correcting codes: symplectic lattice codes and toric code*. Thèse de Doctorat, California Institute of Technology, (2004).
- [3] J. M. Leinaas et J. Myrheim. *Il nuovo cimento* **37 B, N. 1**, 1–23 (1977).
- [4] F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.* **49**(14), 957–959 (1982).
- [5] Y.-S. Wu. *Phys. Rev. Lett.* **52**(24), 2103–2106 (1984).
- [6] G. A. Goldin, R. Menikoff, et D. H. Sharp. *Phys. Rev. Lett.* **54**(6), 603 (1985).
- [7] C. C. Adams. *The knot book*. W. H. Freeman and Company, (2004).
- [8] A. Yu. Kitaev. *Annals Phys.* **303**, 2–30 (2003).
- [9] M. H. Freedman, M. Larsen, et Z. Wang. *Commun. Math. Phys.* **227**, 605–622 (2002).
- [10] M. H. Freedman, A. Kitaev, et Z. Wang. *Commun. Math. Phys.* **227**, 587–603 (2002).
- [11] G. Goldstein et C. Chamon. *Phys. Rev. B* **84**, 205109 (2011).
- [12] J. C. Budich, S. Walter, et B. Trauzettel. *Phys. Rev. B* **85**, 121405 (2012).
- [13] M. J. Schmidt, D. Rainis, et D. Loss. *Phys. Rev. B* **86**, 085414 (2012).
- [14] D. Rainis et D. Loss. *Phys. Rev. B* **85**, 174533 (2012).
- [15] F. Konschelle et F. Hassler. *Phys. Rev. B* **88**, 075431 (2013).
- [16] F. L. Pedrocchi, N. E. Bonesteel, et D. P. DiVincenzo. *Phys. Rev. B* **92**, 115441 (2015).
- [17] F. L. Pedrocchi et D. P. DiVincenzo. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 120402 (2015).
- [18] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landhal, et J. Presill. *J. Math. Phys.* **43**, 4452 (2002).
- [19] G. Duclos-Cianci et D. Poulin. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050504 (2010).
- [20] G. Duclos-Cianci et D. Poulin. *Information Theory Workshop*, 1–5 (2010).
- [21] D. S. Wang, A. G. Fowler, A. M. Stephens, et L. C. L. Hollenberg. *Quant. Inf. Comput.* **10**, 456 (2010).
- [22] J. R. Wootton et D. Loss. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 160503 (2012).
- [23] S. Bravyi et J. Haah. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 200501 (2013).
- [24] H. Anwar, B. J. Brown, E. T. Campbell, et D. E. Browne. *New J. Phys.* **16**, 063038 (2014).
- [25] A. Hutter, J. R. Wootton, et D. Loss. *Phys. Rev. A* **89**, 022326 (2014).

- [26] S. Bravyi, M. Suchara, et A. Vargo. *Phys. Rev. A* **90**, 032326 (2014).
- [27] M. Herold, E.T. Campbell, J. Eisert, et M. J. Kastoryano. *Mpj Quantum Information* **1**, 15010 (2015).
- [28] J. R. Wootton. *Entropy* **17**, 1946 (2015).
- [29] R. S. Andrist, J. R. Wootton, et H. G. Katzgraber. *Phys. Rev. A* **91**, 042331 (2015).
- [30] A. G. Fowler, A. M. Stephens, et P. Groszkowski. *Phys. Rev. A* **80**, 052312 (2009).
- [31] G. Duclos-Cianci et D. Poulin. *Quant. Inf. Comp.* **14**(9-10), 0721–0740 (2014).
- [32] F. H. E. Watson, H. Anwar, et Brown D. E. *Phys. Rev. A* **92**, 032309 (2015).
- [33] A. G. Fowler. *QIC* **15**, 0145–0158 (2015).
- [34] M. Herold, M. J. Kastoryano, E. T. Campbell, et J. Eisert. *arXiv:1511.05579* (2015).
- [35] G. Dauphinais et D. Poulin. *arXiv:1607.02159* (2016).
- [36] J. R. Wootton, J. Burri, S. Iblisdir, et D. Loss. *Phys. Rev. X* **4**, 011051 (2014).
- [37] C. G. Brell, S. Burton, G. Dauphinais, S. T. Flammia, et D. Poulin. *Phys. Rev. X* **4**, 031058 (2014).
- [38] S. Burton, C. G. Brell, et S. T. Flammia. *arXiv:1506.03815* (2015).
- [39] J. R. Wootton et A. Hutter. *Phys. Rev. A* **93**, 022318 (2016).
- [40] A. Hutter et J. R. Wootton. *Phys. Rev. A* **93**, 042327 (2016).
- [41] G. C. Wick, A. S. Wightman, et E. P. Wigner. *Physical Review* **88**(1), 101–105 (1952).
- [42] G. Moore et N. Read. *Nuclear Physics* **B360**, 362–396 (1991).
- [43] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, (1991).
- [44] A. Kitaev. *Annals Phys.* **321**, 2–111 (2006).
- [45] P. Bonderson. *Non-Abelian Anyons and Interferometry*. Thèse de Doctorat, California Institute of Technology, (2007).
- [46] C. Levaillant, B. Bauer, M. Freedman, Z. Wang, et P. Bonderson. *Phys. Rev. A* **92**, 012301 (2015).
- [47] P. Bonderson, M. Freedman, et C. Nayak. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010501 (2008).
- [48] P. Bonderson, M. Freedman, et C. Nayak. *Annals Phys.* **324**, 787–826 (2009).
- [49] E. Verlinde. *Nucl. Phys. B* **300**, 360–376 (1988).
- [50] C. Nayak et F. Wilczek. *Nucl. Phys.* **B479**, 529 (1996).
- [51] J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, et M. P. A. Fisher. *Nature Physics* **7**, 412–417 (2011).
- [52] M. M. Salomaa et G. E. Volovik. *Phys. Rev. Lett.* **55**(11), 1184–1187 (1985).
- [53] S. Bravyi. *Phys. Rev. A* **73**, 042313 (2006).
- [54] D. Gottesman. *Proceedings of the XXII International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, 32–44 (1999).
- [55] S. Aaronson et D. Gottesman. *Phys. Rev. A* **70**, 052328 (2004).
- [56] J. S. Birman. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **XXII**, 41–72 (1969).

- [57] R. N. C. Pfeifer, O. Buerschaper, S. Trebst, W.W. Ludwig, M. Troyer, et G. Vidal. *Phys. Rev. B* **86**, 15511 (2012).
- [58] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, et Y.-S. Wu. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **107**, 101–119 (1992).
- [59] C. Nayak, S. H. Simon, M. Freedman, et S. Sarma. *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083 (2008).
- [60] M. Oshikawa, Y. B. Kim, K. Shtengel, C. Nayak, et S. Tewari. *Ann. Phys. (Amsterdam)* **322**, 1477–1498 (2007).
- [61] M. B. Hastings. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 210501 (2011).
- [62] J. Edmonds. *Can. J. Math.* **17**, 449–467 (1965).
- [63] S. Micalis et V. Vazirani. *Proceedings of the 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 17–27 (1980).
- [64] V. Kolmogorov. *Math. Program. Comput.* **1**, 43 (2009).
- [65] H. Gabow. *Implementation of Algorithms for Maximum Matching on Nonbipartite Graphs*. Thèse de Doctorat, Stanford Université, (1973).
- [66] E. L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Holt, Rinehart, and Winston, (1976).
- [67] R. M. Karp. *Complexity of Computer Computations*. Plenum, New York, (1972).
- [68] L. Gray. *J. Statist. Phys.* **103**, 1–44 (2001).
- [69] S. M. Ross. *A first course in probability*. Macmillan Publishing Company, (1994).
- [70] D. Reimer. *Combin. Probab. Comput.* **9**, 27–32 (2000).
- [71] E. Borel. *Rend. Cric. Mat. Palermo (2)* **27**, 247–271 (1909).
- [72] F. P. Cantelli. *Atti Accad. Naz. Lincei* 26:1, 39–45 (1917).
- [73] P. Gács. *Advances in Computing Research* **5**, 223–326 (1989).
- [74] A. Beverland, Buerschaper, R. König, F. Pastawski, J. Preskill, et S. Sijhner. *J. Math. Phys.* **57**, 022201 (2016).
- [75] M. H. Freedman et D. A. Meyer. *Found. Comput. Math.* **1**, 325–332 (2001).
- [76] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. Plissard, E. A. Bakkers, et L. Kouwenhoven. *Science* **336**, 1003 (2012).
- [77] A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, et H. Shtrikman. *Nature Physics* **8**, 887 (2012).
- [78] M.T. Deng, C. L. Yu, G. Y. Huang, M. Larsson, P. Caroff, et H. Q. Xu. *Nano Letters* **12**, 6414 (2012).
- [79] A. D. K. Finck, D. J. Van Harlingen, P. K. Mohseni, K. Jung, et X. Li. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 126406 (2013).

Annexe A

Copie de l'article «Fault-Tolerant Error  
Correction for Non-Abelian Anyons»

# Fault-Tolerant Quantum Error Correction for non-Abelian Anyons

Guillaume Dauphinais and David Poulin

Institut quantique & Département de physique, Université de Sherbrooke

## Abstract

While topological quantum computation is intrinsically fault-tolerant at zero temperature, it loses its topological protection at any finite temperature. We present a scheme to protect the information stored in a system supporting non-cyclic anyons against thermal and measurement errors. The correction procedure builds on the work of Gács [1] and Harrington [2] and operates as a local cellular automaton. In contrast to previously studied schemes, our scheme is valid for both abelian and non-abelian anyons and accounts for measurement errors. We prove the existence of a fault-tolerant threshold and numerically simulate the procedure for a system of Ising anyons. The result of our simulations are consistent with a threshold between  $10^{-4}$  and  $10^{-3}$ .

## 1 Introduction

Non-abelian anyons are hypothetical particles with very exotic properties that defy intuition but that are nonetheless permitted by known laws of physics. These particles have drawn much interest due to their suspected existence in two-dimensional condensed matter systems and for their potential applications in quantum computation [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. In particular, a quantum computation can in principle be realized by braiding and fusing certain non-abelian anyons [10, 11]. These operations are intrinsically robust due to their topological nature. Because systems supporting anyonic excitations have a spectral gap  $\Delta$ , interactions between particles are short-ranged, so the details of braiding operations should not matter as long as the anyons are kept at a sufficiently large distance  $\sim 1/\Delta$  from each other. Moreover, the accuracy of braiding operations can be made arbitrarily good by increasing the distance between computational anyons.

The spectral gap also offers some protection against thermal excitations. Provided the system is kept at a temperature  $T$  lower than the spectral gap, the density of thermal excitations is suppressed by an exponential Boltzmann factor  $e^{-\Delta/T}$ . In contrast to the topological protection, however, this thermal protection is not scalable: thermal excitations do appear at constant density for any non-zero temperatures and so their presence is unavoidable as the size of the computation increases. Thermally activated anyons can corrupt the encoded data by braiding or fusing with the computational anyons [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Schemes have been proposed to physically boost the thermal protection [20, 21, 22], but none of them offers a scalable solution [23, 24]. It thus appears necessary to supplement topological quantum computations with some form of quantum error correction.

Error correction in abelian anyonic models is intrinsically linked to topological quantum error correction with the toric code and has thus been studied extensively [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]. There, it is possible to model the different thermal processes phenomenologically using a particle creation rate and a diffusion rate. Error correction monitors the presence of these thermal excitations by periodically measuring the topological charge at every lattice site. A *decoding algorithm* is used to statistically infer the homology of each particle’s world-line from these snapshots, thus enabling the recovery of the topological information. It is now well established that these systems possess a threshold: below a critical “temperature”, the logical failure rate can be suppressed to arbitrarily low values by increasing the system size.

These error-correction studies assume that the topological charge measurements are perfect. In a realistic setting, a measurement can report the wrong charge—e.g., report a charge when the site is empty or fail to report a charge—and, moreover, it can introduce additional errors. The ability to protect a topologically ordered system using such noisy charge measurements is intrinsically linked to fault-tolerant topological quantum error correction, where fault-tolerance refers to the ability to combat errors with noisy instruments. Again, for abelian anyons, this problem has been studied extensively [2, 25, 28, 37, 38, 39, 40, 41] and is known to possess a fault-tolerance threshold.

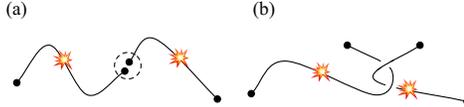


Figure 1: Example of two small errors building up to a larger one. (a) A pair of anyons originating from distinct fission processes collide and fuse into the vacuum. (b) A pair of non-abelian anyons originating from distinct fission processes braids.

The theory of error correction for non-abelian anyons is in contrast far less developed. Specific examples of error correcting schemes for Ising anyons [42], the  $\Phi - \Lambda$  model [19] and Fibonacci anyons [43] have been investigated numerically and found to display threshold behaviours. Additionally, greedy hard-decision renormalization group decoders can error-correct any systems giving rise to anyonic excitations [44, 45]. However, none of these studies have considered the case where the charge measurements are faulty, a serious complication for all the previous methods.

In the present work, we generalize a fault-tolerant scheme introduced by Harrington [2] for the toric-code to the setting of non-cyclic modular anyons. Although non-cyclic anyons are non-abelian in general, they have the property of flowing towards an abelian model under fusion, in a sense that will be made precise below. Thus, our work establishes that fault-tolerant quantum computation can be realized with non-abelian anyons. Moreover, this decoding algorithm builds on the work of Gács [1, 46] and combines ideas of cellular automata and renormalization in two spatial dimensions. The charge measurement information is handled by local rules on a two-dimensional lattice and does not require global processing.

The basic idea of all topological decoding algorithm is to pair up the thermal anyons, bring the anyons of a pair together and hope that they fuse to the vacuum. The details of how the pairs are chosen and how the anyons of a pair are brought together is specific to each decoding algorithm. Non-abelian anyons present novel obstacles to this general decoding strategy. First, the fusion process is intrinsically irreversible for non-abelian anyons. In particular, when two anyons of ‘opposite’ topological charges  $a$  and  $\bar{a}$  are brought together, they may fuse to a non-trivial charge. Observing the outcome of this fusion is an irreversible process (collapse of the wave-function), so the error-correction process itself could introduce physically irreversible changes to the system. Note that such a non-trivial fusion also offers a possible advantage: it provides a clear indication that the two charges were not created from the same thermal process, and this extra piece of information could be used by a decoder. Second, there are many more ways in which small errors involving non-abelian anyons can build up to a larger error. This is illustrated on Fig.1. In contrast to abelian anyons, it is not necessary for particles to meet head-on to ‘sew’ small errors into a larger one; a simple braid will suffice. Because there are many more ways to braid than to fuse, this extra entropic contribution could favour a disordered phase and prevent reliable topological information processing. As we will discuss in Sec. 5, the non-abelian nature of the excitations also presents significant additional obstacles to the analysis of the error correction procedure itself. Despite these complications, we will show that the decoding algorithm possesses a threshold.

In Sec. 2, we review basic concepts of the algebraic theory of anyons. The noise model we consider is presented in Sec. 3, together with a classification of the error events in terms of renormalization levels. Renormalized error rates are defined, and shown to decrease doubly exponentially with the renormalization level. These sections essentially follow Harrington’s work. The correction algorithm is presented in Sec. 4, along with a proof of the existence of a threshold error rate below which the memory lifetime can be increased to arbitrarily long times by increasing the system size. Sec. 7 presents numerical simulations for a system of Ising anyons on a torus, which suggest a threshold between  $10^{-3}$  -  $10^{-4}$ . Concluding remarks are made in Sec. 8.

## 2 Basic Data of the Algebraic Theory of Anyons

In this section we present the key concepts of the algebraic theory of anyons, more details can be found in [47] and [48]. We assume that the system under study is defined on a two-dimensional surface, has short-range interaction and is gapped. Excitations are well localized and it is possible to change their position by applying a suitable local operator along an arbitrary path.

Excitations are classified into superselection sectors. A sector consists of states (excitations) that can be transformed into each other by the application of local operators — operators acting on a homologically trivial region. We also assume that it is possible to measure the topological sector of the excitations (charge

measurement).

Each excitation (which we also refer to as particle or anyon) is described by a label  $l$  denoting its superselection sectors. The various possible labels are also referred to as topological charges. The trivial charge (the vacuum) is denoted herein by 1. The action of bringing two excitations together and to measure the resulting charge is called a fusion process, while a splitting process can be seen as its conjugate process where a single charge is ‘split’ into two charges. With every elementary fusion event is associated the Hilbert space  $V_c^{ab}$ , the space of states of particles of charge  $a$  and  $b$  restricted to have a total charge  $c$ . Correspondingly, the Hilbert space  $V_{ab}^c$  is the space of states of charge  $c$  restricted to come from the fusion of two charges of type  $a$  and  $b$ . Orthonormal basis vectors for the splitting and fusion spaces are labelled by  $|a, b; c, \psi\rangle \in V_c^{ab}$  and  $\langle a, b; c, \psi| \in V_{ab}^c$ , where  $\psi$  denotes the fusion channel. The splitting and fusion operations can be graphically represented by using trivalent vertices with the corresponding charge and fusion channel labels:

$$\left(\frac{d_c}{d_a d_b}\right)^{\frac{1}{4}} \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad / \\ \psi \\ | \\ c \end{array} = |a, b; c, \psi\rangle \in V_c^{ab}; \quad \left(\frac{d_c}{d_a d_b}\right)^{\frac{1}{4}} \begin{array}{c} c \\ | \\ \psi^\dagger \\ / \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} = \langle a, b; c, \psi| \in V_{ab}^c \quad (1)$$

The normalization factors  $d_x$ ’s are introduced so that the diagrams are in the isotopy-invariant convention — bending lines and rotating part of the diagrams change the amplitudes only by unitary transformations.

Fusion multiplicities are defined as  $N_{ab}^c = \dim V_{ab}^c = \dim V_c^{ab}$ . Furthermore, we will assume that the duality axiom holds: for every charge  $a$ , there exist a unique charge  $\bar{a}$  (also called  $a$ ’s antiparticle) such that  $N_{\bar{a}a}^1 = 1$ . It is possible that  $\bar{a} = a$ , such anyons are called self-dual.

Consider the case where charges  $a, b$  and  $c$  are restricted to have total charge  $d$ . There is freedom in terms of the order in which the particles are fused together, corresponding to different orthonormal bases in which a state is represented. Such a change of basis is described by an  $F$ -matrix defined as

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \diagdown \quad / \quad / \\ \quad \quad \quad e \\ \quad \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \quad \quad d \end{array} \longrightarrow \sum_f [F_d^{abc}]_{ef} \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \diagdown \quad / \quad / \\ \quad \quad \quad f \\ \quad \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \quad \quad d \end{array} \quad (2)$$

Another useful quantity is the quantum dimension of a particle,  $d_a$ , which is defined by  $d_a = |[F_a^{a\bar{a}a}]_{11}|^{-1}$ . Physically,  $d_a$  represent the inverse of the probability that two anyons  $a$  and  $\bar{a}$  created from different pairs from the vacuum fuse together to the vacuum.

The exchange of particles in the clockwise direction is defined in terms of braiding operations which can be diagrammatically represented by

$$R^{ab} = \begin{array}{c} \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}, \quad (R^{ab})^{-1} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad / \end{array}. \quad (3)$$

The action of the braiding operators on the fusion spaces can be completely determined in terms of the  $R$ -symbols representing the unitary operator whose action is to exchange two anyons (either in a clockwise or counterclockwise fashion) stemming from a specific fusion channel:

$$R_c^{ab} \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \\ c \end{array} = \begin{array}{c} b \quad a \\ \diagdown \quad / \\ | \\ c \end{array} \quad (4)$$

An arbitrary braiding between two charges that were not created together can be expressed in terms of  $F$ -moves combined with braiding operations  $R_c^{ab}$  and  $(R_c^{ab})^{-1}$ . In general, the braiding of two anyons applies not just a phase, but can change the fusion states of the anyons. If, for each charge  $x \neq 1$ , there is some label  $a$  such that  $R^{ax}R^{xa}$  is different than the identity operator, then braiding is said to be *non-degenerate*. Systems giving rise to anyonic excitations can be defined on closed surfaces of genus higher than 0 if and only if its braiding is non-degenerate [47]. An anyonic theory which is non-degenerate is also said to be *modular*.

Systems of anyons obey the following property, which implies the Yang-Baxter relations [49] :

(5)

That is, one can freely pass lines above or below vertices, without introducing any phase factor.

The inner product of two states, say  $\langle\phi|\psi\rangle$  is diagrammatically represented by connecting the corresponding leaves of the fusion trees associated with the two states  $\langle\phi|$  and  $|\psi\rangle$ , and is diagrammatically given by:

(6)

The topological S-matrix is defined by

(7)

where  $D = \sum \sqrt{d_a^2}$  is such that for modular theories the S-matrix is unitary.

For modular theories, a collective charge projector can be defined [50] by

(8)

where  $\omega_a$  is given by

(9)

The effect of  $\prod_a^{1...n}$  is to project the anyons it encompasses into the collective topological charge  $a$ , and the probability to measure charge  $a$  is given by

$$\langle\psi|\prod_a^{1...n}|\psi\rangle, \quad (10)$$

where  $|\psi\rangle$  is the state of the system [51, 52].

The ground state degeneracy of a system giving rise to modular anyons living on an unpunctured 2-dimensional surface  $\Sigma$  of genus  $g$  is given by  $\sum_a s_{1a}^{2-2g}$  and consists of the vacuum [53]. In the case of a torus, this last expression reduces to  $|\mathcal{A}|$ , the number of different superselection sectors in the anyonic model  $\mathcal{A}$ . The ground space can be seen as a code space [6], and logical operators consist of creating particle and antiparticle from the vacuum, performing an homologically non-trivial loop and fusing the particle and antiparticle back to the vacuum. It is also in general possible to leave the ground space by doing such operations, although in this case the particle/antiparticle pairs fuse to give a non-trivial charge.

## 2.1 Definition of Non-Cyclic Anyon Models

In view of the algorithm presented below, it is relevant to define a family of anyons called *non-cyclic* anyonic models. An anyonic model is non-cyclic if and only if

$$\prod_{i=1}^n N_{x_i \bar{x}_i}^{x_{i+1}} = 0, \quad (11)$$

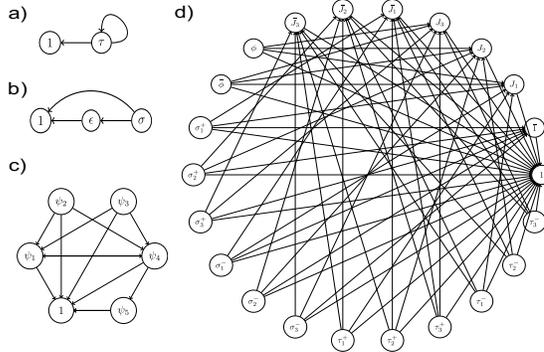


Figure 2: Examples of the graphs associated with Fibonacci anyons (a), Ising anyons (b), the  $SO(5)_2$  anyons (c) and anyons stemming from the quantum double of the quaternion group  $D(\bar{H})$  (d). Among these examples, both Ising and  $D(\bar{H})$  are non-cyclic.

for any value of  $n$  and for any sequence  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = x_1\}$  for which  $x_1 \neq 1$ . An anyonic model which is not non-cyclic is called cyclic. From this definition it is clear that abelian models are all non-cyclic.

A perhaps more enlightening equivalent definition can be formulated using a graphical representation of fusion rules. For any anyonic model  $\mathcal{A}$ , construct the following directed graph  $G_{\mathcal{A}} = (V, E)$ . Associate a vertex  $v \in V$  with each couple of particle/anti-particle denoted by  $v = (a, \bar{a})$ . For all charges  $a$  different than the vacuum, if  $N_{a\bar{a}}^b > 0$  then add a directed edge from node  $(a, \bar{a})$  to node  $(b, \bar{b})$ . Then,  $\mathcal{A}$  is said to be non-cyclic if  $G_{\mathcal{A}}$  does not contain cycles. Otherwise,  $\mathcal{A}$  is cyclic. If  $\mathcal{A}$  is non-cyclic, denote by  $diam(G_{\mathcal{A}})$  the diameter of  $G_{\mathcal{A}}$ . Examples of such graphs are shown on Figure 2.

Although for anyonic models containing less than 5 charges only abelian models and the Ising model (and closely related ones) are non-cyclic [54], there are non-trivial modular non-abelian models with a larger number of charges which are non-cyclic. Examples include  $D(\bar{D}_2)$ , the quantum double constructed from the quaternion group, which contains 22 topological sectors [55, 56]. This model is thought to describe certain phases in a simple spin-1  $SU(2)$  quantum magnet [57]. There also exist families of non-abelian anyons which are non-cyclic by construction [58].

### 3 Errors

In this section we describe the noise model and prove that errors can be organized in a hierarchical manner suitable for a renormalization-type analysis.

#### 3.1 The Noise Model

We consider here a surface  $\Sigma$  of genus  $g = 1$  discretized in a square lattice  $\Lambda$  of size  $Q^n \times Q^n$  with the identification of opposite boundaries and where  $Q$  and  $n$  are both positive integers. We assume that the excitations of the system are described by an anyonic model denoted by  $\mathcal{A}$ . A Wilson loop is present at each lattice site, allowing for local projective charge measurement. Time is also discretized. At every time step, charge noise is applied. In order to do so, all the edges of the graph are sequentially selected in a random order, the order changing at every time step. For each edge  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , a single error process is selected among a set  $\mathcal{P} = \{e_{c,c'}\}$  with probability  $P(e_{c,c'})$ , where  $c$  and  $c'$  label the topological charges (including the vacuum) of the anyons to be added onto sites  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{r}'$ . To properly model local noise processes, we impose that  $c' = \bar{c}$  and that their global charge is the vacuum. We define the particle creation rate  $p = \sum_{c,c' \neq \mathbf{1}} P(e_{c,c'})$ .

Using this noise model, it is possible that many anyons are located on the same site, since a site is connected to four edges. The fusion state of all the anyons on a site is in general described by a superposition of eigenstates of their total charge, since various fusion channels are available to non-abelian anyons. We assume that at time  $t + \frac{1}{2}$ , the excitations located on a given site instantaneously fuse into a superselection sector with appropriate fusion rules and probabilities. This can be viewed as an extra source of decoherence where

the environment monitors the topological charge at each site. Moreover, as discussed in the introduction, the fusion process introduces some intrinsic irreversibility in the noise model, which is a significant departure from abelian models.

After having created thermal excitations and fused the excitations located at a single site into a definite superselection sector, we perform a noisy topological charge measurement at every site. For every site, with probability  $(1 - q)$  the right charge is reported and with probability  $q$ , a measurement error happens. In the case where there is a measurement error, one of the charge  $\{c_i\}$  with  $0 < i < |\mathcal{A}|$  is reported with probability of  $q_i$ . Here,  $|\mathcal{A}|$  denotes the number of topological sectors of  $\mathcal{A}$ . The values of  $q_i$  are subjected to the constraint that  $\sum_i q_i = 1$ .

Another indirect source of errors stems from the error-correction procedure itself. Indeed, based on the reported charge measurements, decisions will be taken to move some excitations from one site of the lattice to another, following some transition rules described in Appendix A. If a measurement reports the wrong charge, the wrong transition rule might be applied. In the case where a transition rule attempts to move an anyon of type  $a$  from a site which does not contain such a charge, the effect of applying the transition rule is to create (from the vacuum) a pair of anyons of type  $a$  and  $\bar{a}$ , to put the  $\bar{a}$  charge in the site where the wrong measurement took place, while the  $a$  anyon will be displaced to the site where the transition rule was attempting to displace the anyon. In this model, faulty measurements are effectively converted into charge errors.

In what follows, let  $\mathcal{E}$  be the set of all errors in the system, both charge errors and measurement errors. The  $t^{\text{th}}$  time step is thus decomposed into four steps. Excitations are created between time  $t$  and  $t + \frac{1}{2}$ . At time  $t + \frac{1}{2}$ , the charge at every site is collapsed onto a superselection sector. Immediately after this collapse, the topological charge at every site is measured in a faulty manner; the outcome of the measurement is called the error syndrome. The transition rules are executed between time  $t + \frac{1}{2}$  and  $t + 1$ . Since the transition rules can also result in multiple particles on a single site, the time step ends with a collapsed onto a superselection sector on every site at time  $t + 1$ .

### 3.2 Noise Classification

Given this noise model, error events can be classified in a hierarchic way as was shown by Harrington [2], generalizing the one-dimensional analysis of Gács [1, 46]. The definitions and results of subsections 3.2 and 3.3 are taken from [2], and are included here for self-containment. In what follows,  $Q$  and  $U$  are chosen such that  $Q \geq 4(a + 2)$  and  $U \geq 4(b + 2)$ , where  $a$  and  $b$  are positive integers greater than 1.

An error  $e$  is defined on an edge of the lattice, which is characterized by a point in space-time denoted by  $p(e) = (\mathbf{r}, t)$ , where  $\mathbf{r} = (x, y)$  denote the spatial position of the midpoint of the edge connecting the two sites on which  $e$  acts, and  $t$  is the midpoint of the time coordinate of the edge.

Two sets of points  $A$  and  $B$  are said to be  $(l, m, n)$ -linked if there exists a space-time box of coordinates  $[x, x + l] \times [y, y + m] \times [t, t + n]$  containing at least one element in  $A$  and one element in  $B$ . If  $A$  and  $B$  are not  $(l, m, n)$ -linked, then they are said to be  $(l, m, n)$ -separated.

#### 3.2.1 Level-0 Noise

The set of errors  $S \subseteq \mathcal{E}$  ( $S \neq \emptyset$ ) is a level-0 error candidate if it does not contain a mixture of charge errors and measurement errors, and if  $S$  fits in a space-time box of size  $[x, x + 1] \times [y, y + 1] \times [t, t]$ . Additionally,  $S$  is an actual level-0 error if it is  $(a, a, b)$ -separated from  $\mathcal{E} \setminus S$ . The union of all actual level-0 errors is called level-0 noise and is denoted by  $E_0$ .

#### 3.2.2 Level- $n$ Noise

Level- $n$  candidate and actual errors are defined inductively. Suppose that level- $k$  candidate errors, actual errors, and level- $k$  noise  $E_k$  are well-defined for any  $k < n$ . A non-empty set  $S \subseteq \mathcal{E} \setminus E_{n-1}$  is a candidate level- $n$  error if

- (i)  $S$  is contained within a box of size  $Q^n \times Q^n \times U^n$ , and
- (ii)  $S$  contains at least 2 disjoint candidate level- $(n - 1)$  errors that are  $(aQ^{n-1}, aQ^{n-1}, bU^{n-1})$ -linked.

$S$  is an actual level- $n$  error if additionally:

- (iii)  $S$  does not contain two candidate level- $n$  errors that are  $(4(a + 2)Q^{n-1}, 4(a + 2)Q^{n-1}, 4(b + 2)U^{n-1})$ -separated, and
- (iv)  $S$  and  $\mathcal{E} \setminus (S \cup E_{n-1})$  are  $(aQ^n, aQ^n, bU^n)$ -separated.

Level- $n$  noise  $E_n$  is defined as the union of the level- $n$  actual errors and of  $E_{n-1}$ . Giving these definitions, one can show that a level- $n$  actual error always fits in a box of size  $\min\{Q, 7(a+2)\}Q^{n-1} \times \min\{Q, 7(a+2)\}Q^{n-1} \times \min\{U, 7(b+2)\}U^{n-1}$  [2].

### 3.3 The renormalized error rate $\epsilon_n$

The level- $n$  error rate  $\epsilon_n$  is defined to be the probability that a box of size  $Q^n \times Q^n \times U^n$  has non-empty intersection with at least one candidate level- $n$  error.

**Lemma 1.** *The level- $n$  error rate  $\epsilon_n$  is upper bounded by  $(4Q^4U^2(p+q))^{2^n}$ .*

*Proof.* Observe that  $\epsilon_n$  is bounded above by the probability that at least one candidate level- $(n-1)$  has non-empty intersection with a box of size  $Q^n \times Q^n \times U^n$ , by definition of level- $n$  candidate errors. By union bound, this probability is bounded by  $(Q^2U)\epsilon_{n-1}$ . Since each level- $n$  candidate error is composed of at least 2 level- $(n-1)$  candidate errors, we conclude that  $\epsilon_n \leq (Q^2U\epsilon_{n-1})^2$ . Now, we can use this recursive equation and the fact that the level-0 error rate is bounded above by  $\epsilon_0 \leq 4(p+q)$ . Given these considerations, we find that

$$\epsilon_n \leq \left(Q^4U^24(p+q)\right)^{2^n}. \quad (12)$$

□

**Lemma 2.** *Let  $p$  and  $q$  be such that  $p+q < \frac{Q^{-4}U^{-2}}{4}$ . Then, any error  $e$  is part of an actual level- $n$  error, for some finite  $n \in \mathbb{N}$ , with probability 1.*

*Proof.* Let  $\mathcal{E}_n$  be the event that there exist a box of size  $Q^n \times Q^n \times U^n$  having non-empty intersection with at least one candidate level- $n$  error. Lemma 1 shown that  $P(\mathcal{E}_n) = \epsilon_n \leq \alpha^{2^n}$ , for some positive constant  $\alpha < 1$ , as long as  $(p+q) < \frac{Q^{-4}U^{-2}}{4}$ .  $\sum_{i=0}^{\infty} P(\mathcal{E}_i)$  thus converges.

Suppose that there exists an error  $e$  which is not part of any actual error. By definition,  $e$  is a level-0 candidate error. Since it is not an actual level-0 error,  $e$  is not  $(a, a, b)$ -separated from  $\mathcal{E} \setminus \{e\}$  and there exists  $\{s\} \subset \mathcal{E}$  which is  $(a, a, b)$ -linked with  $\{e\}$ . Consider next  $S = \{e\} \cup \{s\}$ . By definition, it is included in a box of size  $Q \times Q \times U$ , and contains 2 disjoint level-0 error candidates who are  $(a, a, b)$ -linked.  $S$  is thus a level-1 error candidate. Since  $e$  is not part of a level-1 actual error, condition (iv) must be violated, since  $S$  fulfils condition (iii) by construction. Thus, there exist  $S'$  disjoint from  $S$  such that it is  $(aQ, aQ, bU)$ -linked with  $S$ , and  $S'$  can be chosen to be small enough to be a level-1 candidate error. By construction,  $S \cup S'$  fits in a box of size  $(a+2)Q \times (a+2)Q \times (b+2)U$ , which is smaller than  $Q^2 \times Q^2 \times U^2$ , and contains 2 disjoint level-1 error candidates who are  $(aQ, aQ, bU)$ -linked.  $S \cup S'$  is then a level-2 candidate error. At this point, the same reasoning can simply be repeated. We then see that  $\{e\}$  is part of a candidate error of level- $n$ , for any value of  $n \in \mathbb{N}$ . The Borel-Cantelli lemma tells us that such an error has a probability of 0 of happening.<sup>1</sup> □

## 4 The error-correction procedure

Let the variable  $c(\mathbf{r}, t)$  describes the true topological charge present at site  $\mathbf{r}$  where  $t$  can take both integer and half-integer values, the latter describing the charge in a site after the measurement process, and the former describing the charge after the application of transition rules. The syndrome  $s_0(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})$ , with  $t$  an integer, describes the reported topological charge after the measurement performed at time  $t + \frac{1}{2}$ , which differs from  $c(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})$  with probability at most  $q$ . The subscript 0 refers to the fact that  $s_0(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})$  describes the syndrome of a physical site, which corresponds to the 0<sup>th</sup> level of the renormalization scheme used by the cellular automaton decoder. Both  $c$  and  $s_0$  can take  $|\mathcal{A}|$  unique different values, representing the various admissible topological charges of the model.

The lattice is separated into square colonies of size  $Q \times Q$ , with  $Q$  odd for convenience. Transition rules are applied at every time steps conditioned on the syndrome. A full description of the transition rules is quite lengthy, and can be found in appendix A, together with a description of the structure of a colony. The transition rules applied at a given site depend both on the position of the site in the colony and on the syndrome at the site under consideration and on its 8 nearest neighbours. The idea behind the transition rules at the physical level is essentially to bring non-trivial charges that were created locally together. If a non-trivial charge is detected on a site, then 2 cases are possible: if another non-trivial charge is detected in a

<sup>1</sup>The Borel-Cantelli lemma [59, 60] shows that if a sequence of events  $\mathcal{E}_n$  is such that  $\sum_{n=0}^{\infty} P(\mathcal{E}_n)$  converges, then  $P(\cap_{n=0}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \mathcal{E}_k) = 0$ .

neighbouring site, the transition rules are such that the charges will be brought together, and hopefully fuse to the vacuum. In the case where no neighbouring charges are detected, the rules will make the charge move towards the colony centre, where hopefully the charges stemming from a local error will all fuse together into the vacuum.

To describe the level-1 transition rules, we coarse grain time into  $b$  bins of duration  $b$ . At every  $U = b^2$  time steps ( $b$  bins of  $b$  time steps each), the colony centres are organized into “renormalized colonies” (which we refer to as a level-1 colony) of size  $Q^2 \times Q^2$ , as depicted in Figure 3. For each colony, two other syndrome measurements are defined,  $s_{1,c}(\boldsymbol{\rho}_1, \tau_1)$  and  $s_{1,n}(\boldsymbol{\rho}_1, \tau_1)$ , where  $(\boldsymbol{\rho}_1, \tau_1)$  are the space-time coordinate of the renormalized lattice. The  $\tau_1^{\text{th}}$  working period extending from time  $t = \tau_1 U$  to  $(\tau_1 + 1)U - 1$ . For each time bin, a topological charge is declared to be present at the colony centre if for at least  $f_c b$  time steps of the bin a non-trivial charge was reported at the colony centre. Furthermore, in the case where a non-trivial charge is reported, the reported charge is the one which was reported most often during the time bin. If a fraction at least  $f_c$  of the  $b$  time bins have a non-zero syndromes, then  $s_{1,c}(\boldsymbol{\rho}_1, \tau_1)$  is set to the value corresponding to the last non-trivial charge reported during a bin of  $b$  time steps. The same procedure is used to determine the value of  $s_{1,n}(\boldsymbol{\rho}_1, \tau_1)$ , with the difference that the fraction  $f_n$  is used.

The application of the transition rules at this renormalized level is similar to the physical ones, using  $s_{1,c}$  for the syndrome measurements at the centre position and  $s_{1,n}$  as syndrome measurements for the eight neighbouring positions. The motivation for this renormalization procedure is to deal with errors that spatially extend into more than a single colony. The principle is that the charges present in every colony will eventually be moved to their respective centres, where they will either fuse to the vacuum or eventually activate the corresponding level-1 syndromes. At this point, the non-trivial charges present in the colony centres will be displaced towards the level-2 colony (formed of  $Q \times Q$  level-1 colonies) centre containing them, where all the non-trivial charges will eventually merge and fuse to the vacuum, assuming that the error fits inside a single level-2 colony.

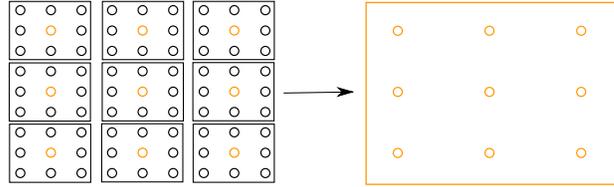


Figure 3: A set of  $Q \times Q$  colonies are renormalized to form a single super-colony, where the old colony centres form the sites of the renormalized colony. Here  $Q = 3$ .

This procedure is repeated for higher levels of renormalizations in a self-similar fashion in order to deal with larger errors. At every  $U^k$  time steps (a level- $k$  working period), the  $k^{\text{th}}$  renormalization step is applied, by forming level- $k$  colonies of size  $Q^{k+1} \times Q^{k+1}$  and by using the centres of the renormalized colonies of the previous level of size  $Q^k \times Q^k$  in order to determine the syndromes  $s_{k,c}$  and  $s_{k,n}$ . A level- $k$  colony can be labelled by  $C_{\boldsymbol{\rho}_k}^k$ , where  $\boldsymbol{\rho}_k$  refers to the position of the level- $k$  colony in the level- $k$  renormalized lattice, and a level- $k$  working period covering the time period  $[\tau_k U^k, (\tau_k + 1)U^k)$  can be labelled by  $\tau_k$ . The same binning procedure is used to determine the level- $k$  syndromes  $s_{k,c}(\boldsymbol{\rho}_k, \tau_k)$  and  $s_{k,n}(\boldsymbol{\rho}_k, \tau_k)$ , using the same thresholds  $f_c$  and  $f_n$ . The transition rules are then applied at the renormalized level, depending on the values of the level- $k$  syndromes.

If  $\mathbf{r}$  is at the centre of the level- $k$  colony  $C_{\boldsymbol{\rho}_k}^k$ , we refer to  $\boldsymbol{\rho}_k$  as  $\boldsymbol{\rho}_k(\mathbf{r})$  when considering the level- $k$  colony in relation with the physical site at its centre. For the remainder of the text, we do not explicitly specify the level of renormalization for  $\boldsymbol{\rho}$  and  $\tau$  when it is clear from the context. We also use  $\tau$  to label the time index of a working period, while  $t$  refers to the actual (or level-0) time. The same goes for  $\boldsymbol{\rho}$  representing the position of a colony in the renormalized lattice and  $\mathbf{r}$  representing a physical site.

The procedure can be summarized by the following pseudo algorithm, in which  $t_{fin}$  is the number of time steps for the algorithm to run and  $n_{max} = \log_Q(L)$  with  $L$  the linear size of the system :

For convenience, we list here the various constants used by the decoding algorithm and the noise model and summarize their purpose.

- $p$  = rate of particle creation.
- $q$  = rate of measurement errors.
- $D = \text{diam}(G_{\mathcal{A}})$  is the maximum number of fusions between a particle and its anti-particle required before the fusion outcome is the vacuum.

---

**Algorithm 1** The fault-tolerant correcting algorithm
 

---

```

t = 0;
while t < tfin do
  apply charge noise;
  t ← t +  $\frac{1}{2}$ 
  measure (in a faulty manner) the charges at every site;
  for n = 0; n ≤ nmax; n = n + 1 do
    if  $(t + \frac{1}{2})$  modulo Un = 0 then
      apply level-n transition rules based on reported syndromes;
    end if
  end for
  t ← t +  $\frac{1}{2}$ 
end while

```

---

- $a, b \geq 2$  are two arbitrary constants.
- $Q \geq 4(a + 2)$  is the linear dimension of a colony. A level- $k$  colony has dimension  $Q^k \times Q^k$  and is formed of  $Q \times Q$  level- $(k - 1)$  colonies.
- $U = b^2 \geq 4(b + 2)$  is the duration of a working period. A level- $k$  working period has length  $U^k$  and is made up of  $b$  bins, each composed of  $b$  level- $(k - 1)$  working periods.
- $f_c$  is the fraction of positive syndrome measurements required to consider applying the local transition rule in a colony. We will later set  $f_c = (b - 4(3D + 1)Q - 1)/b$  to ensure that the correction procedure is correct.
- $f_n$  is the fraction of positive syndrome measurements required to consider that a neighbouring colony should be part of a local transition rule. We will later set  $f_n = (4(3D + 1)Q + 1)/b$  to ensure that the correction procedure is correct.

We note that these cellular automaton transition rules are not strictly local because level  $k > 0$  transition rules involve physical sites that are  $Q^k$  cells apart. Gács deploys considerable efforts to implement these high-level rules in a strictly local fashion, and generalized these results for a two-dimensional array of self-simulating arrays of cellular automata [61]. In addition to implementing  $k$ -level updates rules, the  $k$ -level cells implement additional local operations in order to realize the  $(k + 1)$ -level rules, and so forth. While we have no reasons to doubt that such a strictly local set of rules is possible in the current setting, we do not attempt to develop them here.

## 5 Definition of Basic Concepts for Error-Correction of Non-Abelian Anyons

Gács' proof that one-dimensional cellular automata can process information in a fault-tolerant way is notoriously complex. Harrington builds on this proof by explaining how key concepts need to be adapted to the toric code setting. Similarly, our proof builds on Harrington's proof and focuses on the key novelties introduced by the non-abelian nature of the anyons. The goal of this section is to introduce some basic concepts required to analyse error-correction of non-abelian anyons and to present some of their key properties.

The core idea in Gács and Harrington's approach is to classify errors into distinct levels as in Section 3.2 and to demonstrate that level- $k$  errors are effectively suppressed by level- $k$  transition rules. In a sense, errors of different levels do not interact with each other and can be analyzed independently. The non-trivial braiding relations and fusion rules of non-abelian anyons break this simple structure.

The fusion rules of non-abelian anyons are in general non-deterministic. As in Harrington's approach, we will show that the level- $k$  syndrome will correctly identify the topological charge of a cell. But even when a particle and its anti-particle have been correctly identified, their fusion may result in a non-trivial particle. As a consequence, our proof needs to apply to all possible fusion histories of the anyons. For this purpose, we will introduce the notion of the trajectory domain of an error, which is roughly the set of sites that have a finite amplitude of becoming charged as a consequence of a given error, and where transition rules are taken into account.

The non-abelian braiding relations have a deeper consequences on the error classification. Consider a situation where a low-level actual error  $E$  is well isolated, in space and time, from any other actual error. The

low-level correction rules tend to concentrate all the excitations caused by  $E$  onto a single site, which will result in the vacuum and thus the elimination  $E$ . Suppose, however, that a high-level transition rule drags an anyon through the region containing  $E$ . This is not forbidden by the definition of level- $k$  errors: those need to be well isolated from each other and from higher-level errors, but this does not prevent high-level transition rules from operating in their vicinity. As a consequence of the non-abelian braiding rules, after the passage of the high-level anyon, the excitations created by  $E$  may no-longer fuse to the vacuum: they have become entangled with the high-level error. Thus, neither the error  $E$  nor the higher-level error with which it has become entangled can be corrected individually: they need a joint correction strategy.

This entanglement across errors of different levels requires the definition of causally-linked clusters of errors. These are collections of actual errors of distinct levels that have potentially become entangled through the transition rules applied by the correction algorithm. Despite this new failure mechanism, repeated applications of the correction rules are bound to succeed for non-cyclic anyon models. Indeed, every failed attempt moves the total charge of the anyon which is dragged by the high-level transition rule along the directed acyclic graph defined in Section 2.1. After at most  $\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) - 1$  attempts, that topological charge will become abelian, so the next iteration is guaranteed to succeed as in an abelian model. Thus, the net effect is a possible slow-down of the correction process, which can be compensated by a lower error threshold.

With these motivations in mind, we now give some basic definitions required for the analysis of our decoding algorithm. Henceforth, we assume that  $p + q < \frac{Q^{-4}U^{-2}}{4}$ , so that every error is part of an actual error of a finite level, and the notion of level- $k$  noise is well defined,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

## 5.1 State Evolution

Let  $|\psi_0\rangle$  be a state of the system at time  $t = 0$ , part of the ground space, and let  $\mathcal{E} = \{E(t)\}$  with  $t \geq 0$  be the set of all errors affecting the system, such that  $E(t)$  are the errors affecting the system at time  $t$ . Note that  $E(t)$  is not in general a set of actual errors.

The evolution of the system from integer time  $t$  to time  $t + 1$  given a specific set of fusion outcomes is decomposed in two elementary steps. The first one describes the application of the charge errors that have time coordinate  $t$  and the subsequent fusion of the topological charge with outcomes  $c(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})$  at every site  $\mathbf{r}$  of the lattice. The second step describes the application of the transition rules based on the reported syndromes  $s_0(\mathbf{r}, t)$ , followed by the fusion of the charges contained at every site to  $c(\mathbf{r}, t + 1)$ . The charge errors described by integer time coordinate  $t$  are applied during the time interval  $(t, t + \frac{1}{2})$ , so that the state of the system at time  $t$  does not incorporate them. Similarly, the syndrome measurements and application of the transition rules take place during the time interval  $(t + \frac{1}{2}, t + 1)$ .

For any positive integer time  $t \geq 0$ , the state of the system is given by  $|\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle$ , where  $c(t)$  is the set of measured topological charges (not necessarily the reported ones) at every site of the lattice  $\Lambda$  up to time  $t$ , and  $\mathcal{E}$  is the set of all errors having affected the system.  $s(t)$  is defined similarly for the set of all level-0 syndromes at times prior or equal to  $t$ . Implicit in this notation is the fact that the state  $|\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle$  depends on the transition rules that have been applied to the system, but these are entirely determined by  $s(t)$ , which itself depends on the fusion outcomes  $c(t)$  and the measurement errors, specified by  $\mathcal{E}$ .

The equation describing the first process is

$$|\psi(c(t + \frac{1}{2}), \mathcal{E})\rangle = \frac{\prod_{\mathbf{r} \in \Lambda} P_{\mathbf{r}}^{c(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})} \hat{E}(t) |\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle}{\sqrt{P(c(t + \frac{1}{2}) | c(t), \mathcal{E})}}, \quad (13)$$

$$P(c(t + \frac{1}{2}) | c(t), \mathcal{E}) = \langle \psi(c(t), \mathcal{E}) | \hat{E}(t)^\dagger \prod_{\mathbf{r} \in \Lambda} P_{\mathbf{r}}^{c(\mathbf{r}, t + \frac{1}{2})} \hat{E}(t) |\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle, \quad (14)$$

where  $P_{\mathbf{r}}^{c(\mathbf{r}, t)}$  is the projector of the anyons present in site  $\mathbf{r}$  at time  $t$  onto the total charge  $c(\mathbf{r}, t)$  and  $\hat{E}(t)$  is the operator applying the errors in  $E(t)$ . The probability of a charge measurement outcome  $P(c(t + \frac{1}{2}) | c(t), \mathcal{E})$  is simply given by Born's rule.<sup>2</sup>

The second process is described by

---

<sup>2</sup>The probability of a fusion outcome can in some cases depend on the ground state in which the system was prepared. This happens when the errors+corrections have build up to a logical error. This dependence is not explicitly included by the notation used in Eq. 16 which, to avoid cluttering the notation, shows only the dependence on the previous fusion outcomes and the error history. We can circumvent this issue more formally by assuming that the initial state of the system is in the ground subspace, but otherwise maximally mixed, or equivalently maximally entangled with a reference system.

$$|\psi(c(t+1), \mathcal{E})\rangle = \frac{\prod_{\mathbf{r} \in \Lambda} P_{\mathbf{r}}^{c(\mathbf{r}, t+1)} \hat{T}(s(t)) |\psi(c(t + \frac{1}{2}), \mathcal{E})\rangle}{\sqrt{P(c(t+1) | c(t + \frac{1}{2}), \mathcal{E})}}, \quad (15)$$

$$P(c(t+1) | c(t + \frac{1}{2}), \mathcal{E}) = \langle \psi(c(t + \frac{1}{2}), \mathcal{E}) | \hat{T}^\dagger(s(t)) \prod_{\mathbf{r} \in \Lambda} P_{\mathbf{r}}^{c(\mathbf{r}, t+1)} \hat{T}(s(t)) |\psi(c(t + \frac{1}{2}), \mathcal{E})\rangle, \quad (16)$$

where  $\hat{T}(s(t))$  are the transition rules applied based on the faulty syndromes reported up to time  $t$ . Here we use the fact that level-1 and higher syndromes are entirely determined by level-0 syndromes, so that the transition rules that are applied can be considered to be functions of level-0 syndromes as well.

Given a pattern  $\mathcal{E}$  of actual errors, it is not possible in general to deterministically predict the charge of a specific site due to the probabilistic nature of projecting the total charge of non-abelian anyons. However, it is possible to describe this charge as a random variable  $C(\mathbf{r}, t)$  and the associated probability distribution  $P(C(\mathbf{r}, t), \mathcal{E})$  can be computed using the probability chain rule

$$P(C(\mathbf{r}, t) = c_0, \mathcal{E}) = \sum_{c(t) | c(\mathbf{r}, t) = c_0} \prod_{t'=0}^{t-\frac{1}{2}} P(c(t' + \frac{1}{2}) | c(t'), \mathcal{E}). \quad (17)$$

## 5.2 Causal regions

We are now in a position to define the notion of a causal region of an actual error. As mentioned previously, the noise affecting the system  $\mathcal{E}$  can be decomposed as a collection of actual errors. In the remainder of this section, we work with the convention that  $\mathcal{E}$  is the collection of all the actual errors, and therefore  $E \in \mathcal{E}$  means that  $E$  is an actual error in the set  $\mathcal{E}$ . When the context is clear, we will also view  $E$  as a set of points in space-time, those at which errors in  $E$  are present.

Errors are physical processes which cause anyonic excitations to appear in the system. These excitations are imperfectly monitored and moved following predefined transition rules. The transition rules do not act directly on the errors, but rather on the anyonic excitations. Intuitively, different actual errors are treated independently, as they are isolated from each other. However, it is possible for anyons created by different actual errors to interact together *via* braiding or fusion processes, or by modifying the application of the transition rules. The fact that the anyons are non-abelian makes it impossible to treat actual errors independently. The following definitions allow us to treat all the anyons which may come from different actual errors but that are nevertheless interacting together as a single entity.

**Definition 1.** For  $E \in \mathcal{E}$  and  $\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{E}$ , let  $\mathcal{Z}(\{E_{(i)}\}, E; t)$  be the set of points in space time  $p = (\mathbf{r}, t_0)$  with  $t_0 \leq t$  such that  $P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\}) \neq P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\} \setminus \{E\})$ . The causal region of  $E$  at time  $t$  is defined as  $Z(E; t) = \bigcup_{\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{E}} \mathcal{Z}(\{E_{(i)}\}, E; t)$ , where the union is performed over all possible subsets  $\{E_{(i)}\}$  of  $\mathcal{E}$ .

If  $Z(E; t) \cap Z(E'; t) \neq \emptyset$ , then we say that at time  $t$ ,  $E$  and  $E'$  have interacted together. The set of actual errors that have interacted, either directly or indirectly with  $E$  is called the causally linked cluster of  $E$ , formally defined as follows.

**Definition 2.** For  $E \in \mathcal{E}$ , let  $\mathcal{C}_0(E; t) = \{E\}$ .  $\forall i \in \mathbb{N}$ , define  $\mathcal{C}_{i+1}(E; t) = \{E' \in \mathcal{E} | Z(E''; t) \cap Z(E'; t) \neq \emptyset \text{ for } E'' \in \mathcal{C}_i(E; t)\}$ . The causally-linked cluster of the actual error  $E$  at time  $t$  is  $\mathcal{C}(E; t) = \bigcup_i \mathcal{C}_i(E; t)$ . When no time is specified, the causally-linked cluster of  $E$ ,  $\mathcal{C}(E)$  is defined as  $\bigcup_t \mathcal{C}(E; t)$ .

Any actual error  $E \in \mathcal{E}$  is in at least one causally-linked cluster, since  $E \in \mathcal{C}(E; t)$  for any  $t$ .

**Proposition 1.** At any time  $t$ , any actual error  $E$  is contained within a single causally-linked cluster, which can be denoted by  $\mathcal{C}(E; t)$ .

*Proof.* Suppose it is not the case, i.e. there exists two different causally-linked clusters  $\mathcal{C}(E'; t)$  and  $\mathcal{C}(E''; t)$  such that  $\mathcal{C}(E'; t) \neq \mathcal{C}(E''; t)$  and such that  $E \in \mathcal{C}(E'; t)$  and  $E \in \mathcal{C}(E''; t)$ . We thus have that  $E \in \mathcal{C}_i(E'; t)$  and  $E \in \mathcal{C}_k(E''; t)$ , for  $i, k \in \mathbb{N}$ . But using definition 2, we find that there exists  $F \in \mathcal{C}_{i+1}(E'; t)$  such that

it is also in  $\mathcal{C}_{k-1}(E''; t)$ . This is because if  $E$  is contained in  $\mathcal{C}_i(E'; t)$ , there exists an actual error  $F$  such that it interacts with  $E$  and such that it is contained in  $\mathcal{C}_{i-1}(E'; t)$ . Consequently,  $F$  is contained in  $\mathcal{C}_{k+1}(E''; t)$ . By repeating the same reasoning, we find that  $F \in \mathcal{C}_{k+i}(E''; t)$ . Again, by definition 2, we find that  $\mathcal{C}_i(E'; t) \subset \mathcal{C}_{k+2i}(E''; t)$ . Thus,  $\mathcal{C}(E'; t) \subset \mathcal{C}(E''; t)$ . The above deductions are equally valid by interchanging the roles of  $E'$  and  $E''$ , which show that  $\mathcal{C}(E'; t) \supset \mathcal{C}(E''; t)$  as well, and from which we conclude that  $\mathcal{C}(E'; t) = \mathcal{C}(E''; t)$ , a contradiction.  $\square$

The above implies that if two actual errors  $E'$  and  $E''$  are in the same causally-linked cluster at time  $t$ , then  $\mathcal{C}(E'; t) = \mathcal{C}(E''; t)$ . We are thus free to choose any representative of the causally-linked cluster to identify it. A similar statement holds when the time is not specified.

We say that the causal region of  $\mathcal{C}(E; t)$  is  $\bigcup_{F \in \mathcal{C}(E; t)} Z(F; t)$ . Depending on context, we will view  $\mathcal{C}(E; t)$

as a collection of errors or as a region of space-time, corresponding to the causal region of  $\mathcal{C}(E; t)$ . Also, when a lattice site in  $\mathcal{C}(E; t)$  has a non-trivial charge, we will say that this anyone belongs to  $\mathcal{C}(E; t)$ . Finally, we define the level of a causally-linked cluster at time  $t$  by  $\text{lvl}(\mathcal{C}(E; t)) = \max_{E' \in \mathcal{C}(E; t)} \text{lvl}(E')$ , where  $\text{lvl}(E')$  is the function returning the level of the actual error  $E'$ . Similar definitions holds when time is not specified.

Given these definitions, a point  $p = (\mathbf{r}, t)$  cannot belong to more than a single causally-linked cluster. Suppose that  $p$  belongs to  $\mathcal{C}(E; t)$  and to  $\mathcal{C}(E'; t)$ . Using the freedom of representative error for a given causally-linked cluster, we can assume that  $p \in Z(E; t)$  and  $p \in Z(E'; t)$ . Using definition 2, it is clear that  $E \in \mathcal{C}(E'; t)$ . Using proposition 1, we find that  $\mathcal{C}(E; t) = \mathcal{C}(E'; t)$ .

We also find that removing a causally-linked cluster  $\mathcal{C}(E; t)$  does not affect points outside of its causal region. Consider a point  $p = (\mathbf{r}, t_0)$  such that  $p \notin \mathcal{C}(E; t)$ . We thus have that  $P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\}) = P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\} \setminus F)$  for any set of actual errors  $\{E_{(i)}\}$  and any actual error  $F \in \mathcal{C}(E; t)$ . In particular, for any subset of actual errors  $\mathcal{C}_S \subseteq \mathcal{C}(E; t)$ , we have that  $P(C(\mathbf{r}, t_0), (\{E_{(i)}\} \setminus \mathcal{C}_S) \setminus F) = P(C(\mathbf{r}, t_0), (\{E_{(i)}\} \setminus \mathcal{C}_S))$ . We can thus remove all the actual errors of  $\mathcal{C}(E; t)$  to find that  $C(\mathbf{r}, t_0)$  is left unchanged. Causally-linked cluster can thus be analysed independently. Notice that if a point  $p$  with time coordinte  $t_0 \leq t$  is not in any causally-linked cluster at time  $t$ , then it must contain the vacuum.

Our proof of error-correction requires analyzing the effect of an actual error  $E$  in the absence of errors of higher levels. This motivates the definition of a restricted error history  $\tilde{\mathcal{E}}(E) = \{E' \in \mathcal{E} \mid \text{lvl}(E') < \text{lvl}(E)\} \cup \{E\}$  and their associated connected clusters.

**Definition 3.** For  $E' \in \tilde{\mathcal{E}}(E)$  and  $\{E_{(i)}\} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}(E)$ , let  $\tilde{Z}_E(\{E_{(i)}\}, E'; t)$  be the set of points in space-time  $p = (\mathbf{r}, t_0)$  with  $t_0 \leq t$  such that  $P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\}) \neq P(C(\mathbf{r}, t_0), \{E_{(i)}\} \setminus E')$ . We call  $\tilde{Z}_E(E'; t) = \bigcup_{\{E_{(i)}\} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}(E)} \tilde{Z}_E(\{E_{(i)}\}, E'; t)$  the restricted causal region of  $E'$  with respect to  $E$  at time  $t$ .

We can use this notion of restricted causal region to define restricted causally-linked clusters  $\tilde{\mathcal{C}}(E; t)$ . These are defined as in Definition 2 but incorporate only restricted errors and causal regions, i.e.,  $\tilde{\mathcal{C}}_{i+1}(E; t) = \{E' \in \tilde{\mathcal{E}}(E) \mid Z_E(E''; t) \cap Z_E(E'; t) \neq \emptyset \text{ for } E'' \in \tilde{\mathcal{C}}_i(E; t)\}$ . The notion of restricted clusters will become useful when analyzing the effects of actual errors of level lower than the cluster to which they belong. They do not form independent entities in general, since interactions with actual errors of larger level are not taken into account.

Lastly, our analysis of the hierarchical error-correction procedure will require a coarse-grained notion of the error clusters.

**Definition 4.** Let  $\mathcal{C}^{(k)}(t) = \bigcup_{E \mid \text{lvl}(E) \geq k} \mathcal{C}(E; t)$ .

### 5.3 Trajectories

The shape of a causally-linked cluster  $\mathcal{C}(E; t)$  will generally evolve in time, and to prove error-correction in the next Section, we need to bound this evolution. In order to do so, we introduce the notion of the trajectory of an error cluster  $\mathcal{T}(\mathcal{C}(E; t) \mid c(t), \mathcal{E})$ , which is the set of points in space-time up to time  $t$  containing non-trivial anyons originating from errors in  $\mathcal{C}(E; t)$ . Clearly, this depends on the fusion outcomes and the transition rules, and this is why  $\mathcal{T}$  is explicitly a function of the fusion outcome and the error history (which, combined with the fusion outcomes, determine the syndromes and thus the transition rules).

Let  $e$  be an 'atomic' error which happens at time  $t_0$  and is contained in one of the actual errors of a level- $k$  causally-linked cluster. For  $t$  such that  $t_0 \leq t \leq t_f$ , the locations  $\mathcal{L}_t(e \mid c(t), \mathcal{E})$  is a set of points with

time coordinate  $t$  constructed by induction as follows. If  $e$  is a charge error,  $\mathcal{L}_{t_0}(e|c(t_0), \mathcal{E})$  is composed of the two space-like separated sites adjacent to the error  $e$ , which contain a particle anti-particle pair. If  $e$  is a measurement error, then  $\mathcal{L}_{t_0}(e|c(t_0), \mathcal{E})$  contains a single site where the measurement error occurred.

Suppose that  $\mathcal{L}_{t'}(e|c(t'), \mathcal{E})$  is well defined for any  $t'$  such that  $t_0 \leq t' \leq t$ . Then, the point  $(i, j, t+1)$  is in  $\mathcal{T}_{t+1}(e|c(t+1), \mathcal{E})$  if  $c(i, j, t+1) \neq \mathbb{1}$  and at least one of the following conditions is satisfied

1.  $(i, j, t) \in \mathcal{L}_t(e|c(t), \mathcal{E})$ ;
2.  $(i, j, t+1) = (i_0 + \alpha Q^{k'}, j_0 + \beta Q^{k'}, t+1)$ , where  $(i_0, j_0, t') \in \mathcal{L}_{t'}(e|c(t'), \mathcal{E})$  is at the centre of a level- $k'$  colony and  $M_{\rho^{(i_0, j_0)}}^{(\alpha, \beta), k'}$  is applied at time  $t + \frac{1}{2}$ , with  $k' \leq k$  and  $t - t' < U^{k'}$ ; or
3.  $(i, j, t') \in \mathcal{L}_{t'}(e|c(t'), \mathcal{E})$  is at the centre of a level- $k'$  colony and some transition rule  $M_{\rho^{(i, j)}}^{(\alpha, \beta), k'}$  is applied at time  $t + \frac{1}{2}$  with  $k' \leq k$  and  $t - t' < U^{k'}$ .

The first of these conditions corresponds to an anyon which stays put. The second one represents an anyon which moves due to a level- $k'$  transition rule. The last one represents a level- $k'$  transition rule which has left, or created, a non-trivial charge behind.

The trajectory of the error  $e$  at time  $t_f$  is simply the set of locations it has occupied up to time  $t_f$ :  $\mathcal{T}_{t_f}(e|c(t_f), \mathcal{E}) = \bigcup_{t \in [t_0, t_0+1, \dots, t_f]} \mathcal{L}_t(e|c(t), \mathcal{E})$ . We can define the trajectory of a set of actual errors  $\{E_{(i)}\}$  by  $\mathcal{T}_t(\{E_{(i)}\}|c(t), \mathcal{E}) = \bigcup_{e \in E | E \in \{E_{(i)}\}} \mathcal{T}_t(e|c(t), \mathcal{E})$ .

For a level- $k$  causally-linked cluster  $\mathcal{C}(E; t)$ , in the absence of transition rules of level greater than  $k$ , by definition,  $\mathcal{T}_t(\mathcal{C}(E; t)|c(t), \mathcal{E})$  contains all the points up to time  $t$  that have non-trivial anyons caused by  $\mathcal{C}(E; t)$ . This set clearly depends on fusion outcomes. We next define the trajectory domain of an error cluster, which incorporates the trajectories over all possible fusion outcomes.

**Definition 5.** *The trajectory domain  $\mathcal{D}_{t'}(\mathcal{C}(E; t)|\mathcal{E})$  of an error cluster  $\mathcal{C}(E; t)$  where  $t' \geq t$  is defined as the union over all fusion histories  $c(t')$  and over all  $\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{C}(E; t)$  of the trajectories  $\mathcal{T}_{t'}(\mathcal{C}(E; t) \setminus \{E_{(i)}\}|c(t'), \mathcal{E} \setminus \{E_{(i)}\})$ .*

In the previous section, we introduced the notion of causally-linked cluster, a god's eye view of the error history which speaks about the errors directly. The present section introduces the notion of trajectories, which provide a physicist's perspective on the same history, described in terms of the excitations that are caused by the errors. The following lemma establishes a relation between these two points of view.

**Proposition 2.** *In the absence of transition rules of level greater than  $k$ , the causal region of  $\mathcal{C}(E; t)$  up to time  $t$  is contained in its trajectory domain.*

*Proof.* Suppose the contrary, there exists a point  $p$  with spatial coordinate at most  $t$  in the causal region of  $\mathcal{C}(E; t)$  but which is not in any of the trajectory  $\mathcal{T}_t(\mathcal{C}(E; t) \setminus \{E_{(i)}\}|c(t), \mathcal{E} \setminus \{E_{(i)}\})$ . First, we notice that by definition of a causally-linked cluster, if  $p$  is part of  $\mathcal{C}(E; t)$ , then it cannot be part of any other distinct causally-linked cluster. We can thus consider that  $\mathcal{E} = \mathcal{C}(E)$ . By definition, the causal region of  $\mathcal{C}(E; t)$  is the set of points whose charge distribution is altered when errors are removed from the cluster. These charge distributions are given by Eq. 17. In the absence of transition rules of level greater than  $k$ , by assumption,  $p$  is not part of the trajectory of any error of the form  $\mathcal{C}(E; t) \setminus \{E_{(i)}\}$ . It follows that any term in the sum of equation 17 involved in  $P(\mathcal{C}(p) \neq \mathbb{1}, \mathcal{E} \setminus \{E_{(i)}\})$  is equal to 0. By definition, we thus have that for any  $E' \in \mathcal{C}(E; t)$ ,  $p \notin Z(E')$ , which shows that  $p$  is not in the causal region of  $\mathcal{C}(E; t)$ , a contradiction.  $\square$

Lastly, our analysis of the hierarchical error-correction procedure will require a coarse-grained notion of the trajectory which builds on the coarse-grained error clusters.

**Definition 6.** *For any  $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau) = \{C_{\rho}^k | C_{\rho}^k \cap \mathcal{T}_t(\mathcal{C}^{(k)}(t)|c(t), \mathcal{E}) \neq \emptyset\}$  such that  $t \in [\tau U^k + (1 - f_c) b U^{k-1}, (\tau + 1) U^k]$ .*

Essentially,  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau)$  is the set of level- $k$  colonies containing excitations belonging to a level- $k$  or larger causally-linked clusters during the  $\tau$ th level- $k$  renormalized working period. Importantly, we only consider overlaps that persist beyond time  $\tau U^k + (1 - f_c) b U^{k-1}$  instead of considering the beginning of the working period of  $\tau U^k$ . Consider the case where a level- $k$  transition rule is applied at time  $\tau U^k$ , moving a non-trivial charge outside of  $C_{\rho}^k$ , and such that it interacts with an actual error of lower levels on its path. It is possible that the system nevertheless evolves in a manner such that all the anyons of the smaller actual error fuse to the vacuum in a time scale too short to influence the level- $k$  syndrome of the colony. We do not wish to include  $C_{\rho}^k$  in  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau)$  in order to be coherent with definition 8. The specific choice for the time  $(1 - f_c) b U^{k-1}$  will become clear in light of property 10.

## 5.4 Syndromes

The total charge contained within a fixed region is in general not precisely defined before fusing all the anyons within that region together. While the intuitive idea of a level- $k$  syndrome is to report the total charge of a level- $k$  colony, care must be taken to formally determine when a syndrome reports a valid charge.

Suppose that the system has evolved to time  $t$ , and is described by the state  $|\psi(c(t), \mathcal{E})\rangle$ . Consider the state  $|\psi'(c'(t), \mathcal{E}')\rangle$  with  $\mathcal{E}' = \mathcal{C}^{(k)}(t)$  and such that for any  $t_0 \leq t$ ,  $c'(\mathbf{r}, t_0) = c(\mathbf{r}, t_0)$  if  $(\mathbf{r}, t_0)$  is in the causal region of one of the causally-linked clusters in  $\mathcal{C}^{(k)}(t)$ , and  $c'(\mathbf{r}, t_0) = \mathbb{1}$  otherwise. Let  $\{a_1, \dots, a_n\}$  denotes the charge of the anyons in a level- $k$  colony  $C_{\rho}^k$  at time  $t$  and let  $\Pi_a^{a_1, \dots, a_n}$  be the projector of their fusion outcome onto a total charge  $a$  (by bringing them all at the center of the colony). We define the level- $k$  charge distribution by  $\rho_{\rho}^k(a, t) = \langle \psi'(c'(t), \mathcal{E}') | \Pi_a^{a_1, \dots, a_n} | \psi'(c'(t), \mathcal{E}') \rangle$ . In the case where no anyon is present, then  $\rho_{\rho}^k(a, t) = \delta_{\mathbb{1}, a}$ .

In the above definition, we assumed that removing a causally-linked cluster of lower level does not modify the topological charges present in the causal region of any causally-linked cluster in  $\mathcal{C}^{(k)}(t)$  for a *specific fusion history*. Although our definition of causal region assures us that it cannot have an effect for the charge distribution averaged over all possible fusion outcomes, it is technically possible that for some specific fusion histories, some of the topological charges of a cluster in  $\mathcal{C}^{(k)}(t)$  are modified, even though it seems quite unlikely. To avoid such difficulties, we simply consider that if this happens, then the causally-linked clusters in play are simply merged together. Alternatively, one could modify the definition of the causal region of an actual error to consider the charge probability density of a site for every possible charge history. We do not consider such a definition here to avoid unnecessary complications.

**Definition 7.** *If at a time  $t$  such that  $t + \frac{1}{2} = \tau U^k$ ,  $\rho_{\rho}^k(a, t) = \delta_{a, c}$  for some topological charge  $c$  (including the vacuum), and if the reported syndrome  $s_{k, c}(\rho, \tau)$  corresponds to  $c$ , then we say that  $s_{k, c}(\rho, \tau)$  is valid. The same definition of validity holds for  $s_{k, n}$ .*

*A priori*, this notion of a valid syndrome may not seem very useful, as there can obviously be anyons part of clusters of lower level having support in  $C_{\rho}^k$ . However, it will be shown below that for non-cyclic anyonic models, any such cluster will eventually be corrected on a time scale which is too short to influence higher level syndromes. Furthermore, the total charge of *all* the anyons in  $C_{\rho}^k$  is subject to rapid fluctuations, as anyons part of lower-level clusters can quickly appear and disappear along the border of the colony.

Suppose that a level- $k$  colony  $C_{\rho}^k$  has a valid, non-trivial syndrome  $s_{k, c}$  and that its 8 neighbouring colonies, collectively denoted by  $\{C_{(\rho)}^k\}$ , also have valid syndromes  $s_{k, n}$ . The level- $k$  transitions rules  $M_{\rho}^{(\alpha, \beta), k}$  (using the notation of appendix A) are applied at times  $t_0$  such that  $t_0 + \frac{1}{2} = \tau U^k$ . If, based on this syndrome pattern, the transition rules dictate that the charge contained in the central colony is to be displaced to one of the neighbouring colonies, we say that the transition rule is *active*. Note that by definition, a transition rule is not called active when the syndrome of the central colony or one of its neighbours is invalid, or when the central colony contains the vacuum.

**Definition 8.** *The active transition rule  $M_{\rho}^{(\alpha, \beta), k}$  is said to have been successfully applied if for the next level- $k$  working period,  $s_{k, c}(\rho, \tau + 1)$  is valid and reports the vacuum.*

In the above definitions, level-0 colonies are to be interpreted as single physical sites. A level-0 syndrome is thus valid if it reports the anyonic charge of the physical site under consideration. A level-0 active transition rule is said to have been applied successfully if after its application the physical site under consideration contains the vacuum.

## 6 Threshold for Non-Cyclic Anyonic Models

In this section, we sketch a proof that the error correction procedure described in the previous section and in the appendix has a fault-tolerant threshold for non-cyclic anyonic models. For the remainder of this section, we suppose that  $a \geq 3$  and  $b > 4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1$ , and we choose  $f_c b = b - (4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1)$  and  $f_n b = 4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1$  (assuming that  $b$  is large enough so that  $f_c$  and  $f_n$  are both positive numbers). Note that these values are in accordance with all previous bounds given for  $a$  and  $b$ .

We begin by defining three key properties of a correction algorithm which will be central in proving that it possesses a threshold.

**Definition 9.**  *$k$ -locality. If, for all times  $t$  and all level- $k'$  actual error  $E$  with  $k' \leq k$ , the trajectory domain  $\mathcal{D}_t(\tilde{\mathcal{C}}(E; t), \tilde{\mathcal{E}}(E))$  is contained in a block of  $2 \times 2$  level- $k'$  colonies, we say that the algorithm is  $k$ -local.*

As we will show below, these three properties ensure that the level- $k$  transition rules react to level- $k$  causally-linked clusters essentially the same way as level-0 rules react to level-0 actual error at the physical level. Loosely speaking,  $k$ -locality asserts that local errors are kept local by the updates rules.  $k$ -faithfulness asserts that in the absence of high-level errors, the transition rules will bring all excitations in the centre of the colony rapidly enough to trigger a valid non-trivial syndrome. Note that the excitations caused by low-levels clusters are excluded from this demand since only the coarse grained error cluster is considered, *c.f.*, Def. 4. Lastly,  $k$ -successfulness essentially demands that the transition rules correct errors, but allows repeated attempts to take into account the possibility that a non-abelian anyon and its anti-particle do not fuse to the vacuum. These consequences are stated formally in the following lemma.

**Lemma 3.** *Assuming the correction algorithm is  $k$ -local,  $k$ -faithful, and  $k$ -successful, then for  $k' \leq k$ , it also has the following properties:*

1. *If  $C_{\rho}^{k'} \cup \{C_{\langle \rho \rangle}^{k'}\}$  is free of level- $k'$  or larger actual errors, that  $C_{\rho}^{k'}$  is not affected by transition rules of level  $k'$  or greater, and that  $\{C_{\langle \rho \rangle}^{k'}\}$  are not affected by transition rules of level greater than  $k'$  for a full level- $k'$  working period labelled  $\tau$ , then  $C_{\rho}^{k'} \in \mathcal{T}_{(k')}(\tau) \iff C_{\rho}^{k'} \in \mathcal{T}_{(k')}(\tau + 1)$ .*
2. *If  $C_{\rho}^{k'} \cup \{C_{\langle \rho \rangle}^{k'}\}$  is free of level- $k'$  or larger actual errors for a full level- $k'$  working period labelled  $\tau$ , then  $s_{k',c}(\rho, \tau + 1)$  and  $s_{k',n}(\rho, \tau + 1)$  are valid.*
3. *If  $E$  is a level- $k'$  actual error and  $\text{lvl}(\mathcal{C}(E; t)) \leq k'$  for all  $t$ , then the causal region of  $\mathcal{C}(E)$  is contained within a space-time box of size  $2Q^{k'} \times 2Q^{k'} \times (2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3)U^{k'}$ .*

Note that with our choice of  $b > 4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1$ , the box containing a level- $k'$  causally-linked cluster in the third consequence is sufficiently small to prevent interaction with another level- $k'$  actual error.

*Proof.* We prove these properties recursively: we first show that they each hold individually for  $k' = 0$ , and then assume that they all hold for  $k'$  to prove that they each hold for  $k' + 1$ , up to  $k' + 1 = k$ .

1. Suppose that  $C_{\rho}^0$  is neither affected by any actual errors at time  $t + 1$  nor by any level-0 or higher transition rules at time  $t + \frac{1}{2}$ . The charge state of  $C_{\rho}^0$  at time  $t + 1$  is the same as that at time  $t$ , since there exists no other process that can change the topological charge contained in  $C_{\rho}^0$  between time  $t$  and  $t + 1$ . We thus have that  $C_{\rho}^0 \in \mathcal{T}_{(0)}(t) \iff C_{\rho}^0 \in \mathcal{T}_{(0)}(t + 1)$ .

Consider first the case  $C_{\rho}^{k'+1} \in \mathcal{T}_{(k'+1)}(\tau)$ . Using  $(k' + 1)$ -faithfulness, we first notice that there exists  $t_c \leq (1 - f_c)bU^{k'} + \tau U^{k'+1}$  such that for any  $t' \geq t_c$ , any point in  $\mathcal{T}_{t'}(\mathcal{C}^{(k'+1)}(t_c) | c(t'), \mathcal{E}) \cap C_{\rho}^{k'+1}$  is in the physical site at the centre of  $C_{\rho}^{k'+1}$ . Since  $C_{\rho}^{k'+1} \in \mathcal{T}_{(k'+1)}(\tau)$ , we can always choose  $t_c$  such that  $c(\mathbf{r}_0, t_c) \neq \mathbb{1}$  where  $\mathbf{r}_0$  labels the centre of  $C_{\rho}^{k'+1}$ . We now need to consider how errors of level  $k'$  or less could move the charge away from the colony centre after time  $t_c$ .

Consider the level- $k'$  actual error  $F$  containing at least an error happening at time  $t_f$  with  $t_c \leq t_f < (\tau + 1)U^{k'+1}$ , such that for any  $t'$  and any charge measurements  $c(t')$ , the trajectory

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}(F; t') | c(t'), \mathcal{E}) \cap (C_{\rho}^{k'} \cup \{C_{\langle \rho \rangle}^{k'}\}) = \emptyset, \text{ with } C_{\rho}^{k'} \text{ the level-}k' \text{ colony at the centre of } C_{\rho}^{k'+1}.$$

Using  $k'$ -locality, we know that the trajectory domain of this error will never overlap with  $C_{\rho}^{k'}$ . Moreover, using the inductive hypothesis on the third consequence, we know that this error will be corrected before it can interact with another level- $k'$  error.

Suppose, on the other hand, that there exists  $t'$  and  $c(t')$  such that  $\mathcal{T}(\mathcal{C}(F; t') | c(t'), \mathcal{E}) \cap (C_{\rho}^{k'} \cup \{C_{\langle \rho \rangle}^{k'}\}) \neq$

$\emptyset$ . We first note that  $F$  is  $(aQ^{k'}, aQ^{k'}, bU^{k'})$ -separated from any other level- $k'$  actual error. We thus have that for the  $(b - 1)$  following level- $k'$  working periods after the last error of  $F$ , we need not consider other level- $k'$  actual errors. Using  $k'$ -locality, we find that for any  $t' \in [\tau U^{k'+1}, (\tau + 1)U^{k'+1})$ ,  $\mathcal{T}_{t'}(\mathcal{C}(F; t') | c(t'), \mathcal{E}) \cap C_{\rho}^{k'+1}$  is contained within a block  $\mathcal{B}'$  of  $2 \times 2$  level- $k'$  colonies containing  $C_{\rho}^{k'}$ . Using the inductive hypothesis on the second consequence, we find that at least for the next  $(b - 1)$  level- $k'$  working periods after the last error of  $F$ , the level- $k'$  syndromes are valid in  $\mathcal{B}'$ . Because  $\mathcal{B}'$  is  $2 \times 2$  and using  $k'$ -faithfulness, it will take at most  $2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3$  level  $k'$  working periods before the trajectory  $\mathcal{T}_{t'}(\mathcal{C}(F; t') | c(t'), \mathcal{E}) \cap C_{\rho}^{k'+1}$  is null or contained in the physical site at the centre of  $C_{\rho}^{k'+1}$ . This is because after the level- $k'$  syndromes in  $\mathcal{B}'$  are valid, which can take up to 2 level- $k'$  working period, the application of 2 rounds of successful active level- $k'$  transition rules suffices to bring the trajectory inside  $C_{\rho}^{k'+1}$  (see appendix B). An additional working period ensures that all the non

trivial anyons reach the physical site at the center of  $C_\rho^{k'+1}$ , using  $k'$ -faithfulness. The same analysis works for lower-level errors as well.

The same reasoning can also be used for the case where  $C_\rho^{k'+1} \notin \mathcal{T}_{(k'+1)}(t)$ . In that case, we find that the central site of  $C_\rho^{k'+1}$  contains the vacuum at some time  $t_c$  and will return to the vacuum at most  $2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3$  time steps after the appearance of a level- $k'$  or less error. Moreover, the previous argument shows that errors of level  $k'$  or less cannot transport the charge from the centre of a neighbouring  $(k' + 1)$ -colony into  $C_\rho^{k'+1}$ , so  $C_\rho^{k'+1} \notin \mathcal{T}^{(k'+1)}(t + 1)$ .

2. The property is true for  $k' = 0$ , since if no error affects a site, the reported level-0 syndrome is valid. Suppose next that the property is true for  $k' < k$ , and consider  $C_\rho^{k'+1}$ , a level- $(k' + 1)$  colony. Using  $(k' + 1)$ -faithfulness, there exists  $t_c \leq \tau U^{k'} + (1 - f_c)bU^{k'}$  such that for any charge measurement  $c(t_c)$ , any point in  $\mathcal{T}_{t_c}(\mathcal{C}^{(k'+1)}(t_c) | c(t_c), \mathcal{E}) \cap C_\rho^{k'+1}$  is in the physical site at the centre of  $C_\rho^{k'+1}$ . After time  $t_c$  and up to time  $(\tau + 1)U^{k'+1}$ , if no level- $k'$  actual error affects the level- $k'$  colony at the centre of the level- $(k' + 1)$  colony  $C_\rho^{k'+1}$ , the level- $k'$  syndromes reported at the centre of the level- $(k' + 1)$  colony are valid, by using the inductive hypothesis on property 2. Furthermore, by using the inductive hypothesis of property 1 for  $k'$ , level- $(k' - 1)$  and lower actual errors cannot bring the  $k'$ -trajectory outside of the level- $k'$  colony at the centre of  $C_\rho^{k'+1}$ . Given the procedure to report level- $(k' + 1)$  syndromes used by our algorithm, the level- $(k' + 1)$  syndromes reported by  $C_\rho^{k'+1}$  at the end of the level- $(k' + 1)$  working period  $t$  is thus valid.

Suppose, on the other hand, that a level- $k'$  actual error  $F$  affects the level- $k'$  colony at the centre of  $C_\rho^{k'+1}$  with its first error happening at time  $t_f$  such that  $\tau U^{k'+1} + t_c \leq t_f < (\tau + 1)U^{k'+1}$ . First note that by definition, each of the  $b$  time bin of duration  $bU^{k'}$  of the level- $(k' + 1)$  working period can contain at most one of these errors. While this error can move the charge away from the centre of the colony, using the same argument as above, we know that after at most  $2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3$  level- $k'$  working periods, the trajectory  $\mathcal{T}_{t'}(\mathcal{C}(F; t') | c(t'), \mathcal{E}) \cap C_\rho^{k'+1}$  is null or contained in the physical site at the centre of  $C_\rho^{k'+1}$ . Given our choice of  $f_c b = b - (4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1)$  and  $f_n b = 4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1$ , this leaves enough time in each of the remaining time bins (those after  $t_c$ ) to report a valid syndrome, and hence the level- $(k' + 1)$  syndrome is valid.

3. We first ignore transition rules of level higher than  $(k' + 1)$ . Suppose that  $F$  is the only level- $(k' + 1)$  actual error of  $\mathcal{E}$ , and let  $t_0$  be the time of the first error in  $F$ . In that case,  $\tilde{\mathcal{C}}(F; t') = \mathcal{C}(F; t')$ . Using  $(k' + 1)$ -locality and proposition 2, we find that the causal region of  $\mathcal{C}(F; t')$  is contained within a block  $\mathcal{B}$  of  $2 \times 2$  level- $(k' + 1)$  colonies.

The previous property ensures that for the  $b - 1$  complete level- $(k' + 1)$  working periods after  $F$ , level- $(k' + 1)$  syndromes in  $\mathcal{B}$  and neighbouring level- $(k' + 1)$  colonies are valid. Using property 1 for  $k' + 1$ , the  $(k' + 1)$ -trajectory of  $\mathcal{C}(F; t')$  can only be modified by the application of level- $(k' + 1)$  transition rules. Using  $(k' + 1)$ -successfulness, active level- $(k' + 1)$  transition rules in  $\mathcal{B}$  are successfully applied with at most  $\text{diam}(G_{\mathcal{A}})$  tries. By inspection of the transition rules, for any set of charge measurements  $c$ , after applying at most two rounds of successful level- $(k' + 1)$  transition rules,  $\mathcal{T}_{t'}(\mathcal{C}(F; t') | c(t'), \mathcal{E})$  is contained within a single level- $(k' + 1)$  colony  $C_\rho^{k'+1}$ , where  $t' \geq t_0 + (2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 2)U^k$  (see appendix B). Using  $(k' + 1)$ -faithfulness, we find that there exists  $t_c \leq t_0 + (2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3)U^{k'+1}$  such that  $\mathcal{T}_{t_c}(\mathcal{C}(F; t_c) | c(t_c), \mathcal{E})$  is contained within a single physical site at the centre of  $C_\rho^{k'+1}$ . Provided the linear size of the system is larger than  $2Q^{k'+1}$  (so the worldline of the charges is homologically trivial), the resulting charge is the vacuum by charge conservation. The same reasoning can be repeated using the set of actual errors  $\mathcal{E} \setminus \{E_{(i)}\}$ , for any subset of actual errors  $\{E_{(i)}\} \subseteq \mathcal{C}(F)$ . Using proposition 2, we conclude that the causal region of  $\mathcal{C}(F)$  is contained within a space-time box of size  $2Q^{k'+1} \times 2Q^{k'+1} \times (2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3)U^{k'+1}$ .

If there are more than one such level- $(k' + 1)$  actual errors affecting the system, the previous reasoning can be performed for each of their respective causally-linked clusters. Consider  $F$ , the first such level- $(k' + 1)$  actual error to happen (pick any one if more than one such error happen simultaneously). Since level- $(k' + 1)$  actual errors are  $(aQ^{k'+1}, aQ^{k'+1}, bU^{k'+1})$ -separated and with our choice of  $b > 4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1$ , the above argument shows that no actual error in the causally-linked cluster of  $F$  can have interacted with any other level- $(k' + 1)$  actual error.

We now consider transition rules of level higher than  $(k' + 1)$ . We show that level- $(k' + 1)$  causally-linked clusters cannot cause the application of transition rules of level larger than  $(k' + 2)$ . Consider

a level- $(k' + 2)$  colony  $C_{\rho_{k'+2}}^{k'+2}$  and working period  $\tau_{k'+2}$ . Suppose that no actual error of level larger than  $(k' + 1)$  happens. Using the validity of property 2 for  $(k' + 1)$ , if no level- $(k' + 1)$  actual error affects the level- $(k' + 1)$  colony  $C_{\rho_{k'+1}}^{k'+1}$  at the centre of  $C_{\rho_{k'+2}}^{k'+2}$  during a level- $k' + 1$  working period, the corresponding level- $(k' + 1)$  syndrome reports the vacuum. Suppose, on the other hand, that a level- $(k' + 1)$  actual error affects  $C_{\rho_{k'+1}}^{k'+1}$  during any bin of  $b$  level- $(k' + 1)$  working periods of  $\tau_{k'+2}$ , except the last one. Since a level- $(k' + 2)$  transition rule can only be applied after the last bin of  $b$  level- $(k' + 1)$  working periods, no level- $(k' + 2)$  or higher transition rule can be applied during the considered time bin. We can thus use the previous reasoning and find that the causal region of such a level- $(k' + 1)$  causally-linked cluster is contained within a box of size  $2Q^{k'+1} \times 2Q^{k'+1} \times (2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3)U^{k'+1}$ .

Given the values of  $f_c = \frac{b - (4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1)}{b}$  and  $f_n = \frac{4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1}{b}$ , we thus find that all such bins of  $b$  level- $(k' + 1)$  working periods report the vacuum. Since the  $b - 1$  first level- $k' + 1$  working periods report the vacuum, the reported level- $(k' + 2)$  syndromes for  $C_{\rho_{k'+2}}^{k'+2}$  for working period  $\tau$  rare the vacuum. Noting that no level- $(k' + 2)$  transition rule is applied if the vacuum charge is reported in a level- $(k' + 2)$  colony completes the proof for level- $k' + 2$  transition rules. Since every level- $(k' + 2)$  working period reports the vacuum charge, the same conclusion is reached for higher level transition rules as well.

Lastly, the transition rules of level larger than  $k' + 1$  cannot affect level- $(k' + 1)$  causally-linked clusters. Suppose that a level- $(k' + 1)$  causally-linked cluster is affected by the application of a level- $(k' + 2)$  or larger transition rule. Then previous reasoning shows that transition rule is caused by a level- $(k' + 2)$  or larger causally-linked cluster. By definition of a causally-linked cluster, the actual errors being affected by the transition rule and the actual errors having caused the application of the transition rule are part of the same causally-linked cluster. Since this causally-linked cluster is of level- $(k' + 2)$  or larger, we find a contradiction.  $\square$

**Lemma 4.** *The correction algorithm we present is 0-local, 0-faithful and 0-successful.*

*Proof.* Let  $E$  be a level-0 actual error and let  $\tilde{C}(E; t)$  be its partial causally-linked cluster at time  $t$ . We first note that by definition,  $\tilde{C}(E; t) = E$ , and that  $\tilde{\mathcal{E}}(E) = E$ . It is straightforward to verify that for any time  $t$  and any charge measurement  $c(t)$ , we have that  $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(E|c(t), E)$  is contained within a unique block of  $2 \times 2$  sites (see appendix B). We thus have that our algorithm is 0-local.

Since a level-0 colony  $C_{\rho}^0$  consists of a single site, it is obvious that our algorithm is 0-faithful.

Inspection of level-0 transition rules reveals that an active level-0 transition rule is always applied successfully at its first try, showing 0-successfulness.  $\square$

**Lemma 5.** *Suppose that the algorithm is  $k$ -local,  $k$ -faithful and  $k$ -successful. Then it is also  $(k + 1)$ -faithful.*

*Proof.* In order to follow  $\mathcal{T}_{t'}(C^{(k+1)}(t') | c(t'), \mathcal{E})$  inside  $C_{\rho}^{k+1}$  as a function of time, we begin by considering the temporal evolution of the  $k$ -trajectory  $\mathcal{T}_{(k)}(\tau')$  restricted to the level- $k$  colonies inside  $C_{\rho}^{k+1}$  and neighbouring level- $k + 1$  colonies, with  $t' \in [\tau'U^k + (1 - f_c)bU^{k-1}, (\tau' + 1)U^k)$ . Using property 1, we only need to consider the application of level- $k$  transition rules and the effects of level- $k$  actual errors. We wish to find a bound on the number of applications of rounds of level- $k$  transition rules before  $\mathcal{T}_{(k)}$  is contained within the level- $k$  colony at the centre of  $C_{\rho}^{k+1}$ .

Consider first the case where no level- $k$  actual errors happen during the working period in  $C_{\rho}^{k+1}$  nor any of the neighbouring colonies. After one round of successful application of the level- $k$  transition rules, all the level- $k$  colonies on the border of  $C_{\rho}^{k+1}$  contain no anyons from causally-linked cluster of level- $k$  or higher. Using  $k$ -successfulness, this takes at most  $\text{diam}(G_{\mathcal{A}})$  level- $k$  working periods. Past this stage, one only needs to take into consideration the anyons inside  $C_{\rho}^{k+1}$ . Careful consideration of the transition rules reveals that the anyons in the farthest level- $k$  colony from the centre of  $C_{\rho}^{k+1}$  in Manhattan distance will be moved towards the centre by a single level- $k$  colony every round of successful application of level- $k$  transition rule. Since the farthest level- $k$  colony inside  $C_{\rho}^{k+1}$  is at a distance of at most  $Q$  from the centre, after the application of  $Q$  successful level- $k$  transition rules,  $\mathcal{T}_{(k)}$  restricted to  $C_{\rho}^{k+1}$  will contain only the level- $k$  colony at the centre. Using  $k$ -successfulness, we find that this requires no more than  $(Q + 1)\text{diam}G_{\mathcal{A}}$  level- $k$  working periods.

Now consider the case where level- $k$  actual errors do happen. Suppose first that an anyon is contained within a level- $k$  colony inside a corridor of  $C_{\rho}^{k+1}$  and away from the colony's border. While a level- $k$  error can displace the anyon outside the corridor,  $k$ -locality ensures that it will remain within a box of  $2 \times 2$  level- $k$

colonies containing the original level- $k$  colony. By inspection, we see that one successful application of level- $k$  transition rules will bring the  $k$ -trajectory back towards a corridor (which may be different than the one into which it was initially contained). Given that level- $k$  actual errors are  $(aQ^k, aQ^k, bU^k)$ -separated from each other, the anyon can drift towards the border of  $C_\rho^{k+1}$  at a rate of at most 1 level- $k$  colonies every time it is displaced by 2 level- $k$  colonies towards the corridor perpendicular to the border in question. It is clear that the anyon cannot escape  $C_\rho^{k+1}$ , since it will always get back to a corridor before reaching the border of the level- $(k+1)$  colony. Thus, we see that at worst the anyon spirals towards the colony centre on  $\pi/8$  angle trajectories. Suppose that the farthest anyon from the centre of  $C_\rho^{k+1}$  has reached a corridor and is at a distance of at most  $\lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  from the centre. We seek bounds on the number of applications of successful level- $k$  transition rules before it gets to the level- $k$  colony at the centre of  $C_\rho^{k+1}$ , valid for any set of level- $k$  actual errors happening on its trajectory. The longest path possible for the anyon is to jump onto another corridor, at a distance of at most  $\lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  from the colony centre. This is the farthest distance the anyon can get from the colony centre in another corridor, given the separation between the level- $k$  actual errors. This requires displacing the anyon at a distance of at most  $\lfloor \frac{Q}{2} \rfloor + \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  level- $k$  colonies towards the corridor, considering the fact that a level- $k$  actual error can displace the anyon by one level- $k$  colony in the opposite direction of the corridor. This process can be repeated in order to reach another corridor, at a distance of at most  $\frac{\lfloor \frac{Q}{2} \rfloor}{4}$  from the colony centre, in the same fashion. This process is then repeated until the anyon reaches the colony centre. The required number of applications of successful transition rules successfully displacing the anyon is then bounded above by  $Q \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2Q$ .

Consider next an anyon whose  $k$ -trajectory is such that it will reach a level- $k$  colony in one of the corridors inside  $C_\rho^{k+1}$  (excluding the border). A similar analysis shows that such an anyon needs to be displaced by at most  $2Q$  level- $k$  colonies before reaching a corridor of  $C_\rho^{k+1}$ .

We next find a bound on the number of level- $k$  working periods it takes to displace the farthest anyon in a level- $(k+1)$  colony by a single level- $k$  colony. A level- $k$  actual error can happen in a block of  $2 \times 2$  level- $k$  colonies neighbouring the one under consideration. It is possible that the error affects the syndromes reported by the neighbouring colonies under consideration and report non-trivial syndromes, so that no level- $k$  transition rule will be applied during the first working period. Furthermore, the level- $k$  actual error can put non-trivial charges in all the 4 level- $k$  colonies it affects. Careful consideration of the transition rules shows that it is possible in that case that the non-trivial charges deposited by the level- $k$  actual error prevent the application of the transition rule for the next 2 rounds of application of successful level- $k$  transition rules. Using  $k$ -successfulness and the fact that a non-trivial syndrome  $s_{k,n}$  can be reported for at most a single level- $k$  working period affected by level- $k$  actual error, we find that it can take up to  $(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)U^k$  time steps before the anyon under consideration is properly displaced by a level- $k$  transition rule.

Putting these results together, we find that the maximum time  $t_c$  it takes after the start of the level- $k+1$  working period so that the  $k$ -trajectory restricted to  $C_\rho^{k+1}$  reaches the level- $k$  colony at its centre is bounded above by  $4Q(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)U^k$ .

Finally, we can now use the fact that the algorithm is  $k$ -faithful to conclude that there exists  $t_c^* \leq t_c + (1 - f_c)bU^{k-1}$  such that for any  $t' \geq t_c^*$ , the trajectory  $\mathcal{T}_{t'}(C^{(k+1)}(t_c^*)|c(t'), \mathcal{E}) \cap C_\rho^{k+1}$  is included in the *physical site* at the centre of  $C_\rho^{k+1}$ . Since  $(1 - f_c)bU^{k-1} < U^k$ , and given the value of  $f_c b = b - (4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 1)$ , we conclude that the algorithm is  $(k+1)$ -faithful. This is because the previous reasoning is valid for an arbitrary set of charge measurements and actual error pattern  $\mathcal{E}$ , as long as it satisfies the conditions for the definition of the  $k$ -fidelity to be applicable.  $\square$

**Lemma 6.** *Suppose that the algorithm is  $k$ -local,  $k$ -faithful and  $k$ -successful, and that  $Q > 14(a+2) + 7$ . Then, there exist  $b_0$  such that if  $b > b_0$ , the algorithm is  $(k+1)$ -local.*

*Proof.* Let  $E$  be a level- $(k+1)$  actual error. Since we are only interested in  $\tilde{C}(E; t)$ , we can suppose that  $\mathcal{E} = \tilde{C}(E)$ . We follow  $\mathcal{T}_{(k)}$  as a function of (renormalized) time, given a specific set of measured charges  $c(t')$ . By definition (see Sec. 3.2.2),  $E$  fits in a set of  $7(a+2) + 1 \times 7(a+2) + 1$  level- $k$  colonies. Using our assumption that  $Q > 14(a+2) + 7$ ,  $E$  is contained in the bulk of a block  $\mathcal{B}'$  of  $2 \times 2$  level- $(k+1)$  colonies, it does not overlap with the outer layer of level- $k$  colonies of  $\mathcal{B}'$ .

We begin by ignoring level- $(k+1)$  transition rules and level- $k$  actual errors. Using property 1,  $\mathcal{T}_{(k)}$  depends only on the level- $k$  transition rules. Since  $\mathcal{T}_{(k)}$  does not overlap with the outer layer of  $\mathcal{B}'$ , inspection of the level- $k$  transition rules show that  $\mathcal{T}_{(k)}$  remains contained within the bulk of  $\mathcal{B}'$ .

We now consider the effects of level- $k$  actual errors. As was noted in the proof lemma 5, level- $k$  actual errors can have the effect of displacing an anyon by a distance of at most 1 level- $k$  colonies towards the exterior

of the level- $(k+1)$  colony every time it is displaced by 2 level- $k$  colonies towards a corridor. By choosing  $\lceil \frac{Q}{2} \rceil < \lceil \frac{Q-7(a+2)-3}{2} \rceil$ , basic geometrical considerations (see figure 4) shows that  $\mathcal{T}_{(k)}$  stays contained within the bulk of  $\mathcal{B}'$ . This last constraint ensures that  $\mathcal{T}_{(k)}$  reaches a corridor in the bulk of a level- $(k+1)$  colony of  $\mathcal{B}'$  before it can escape  $\mathcal{B}'$ . As was argued in the proof of the previous lemma, once an anyon has reached the corridor inside a level- $(k+1)$  colony, it cannot escape it if no level- $(k+1)$  transition rule is applied. A bit of algebra reveals that  $Q > 14(a+2) + 7$  always satisfies the previous inequality.

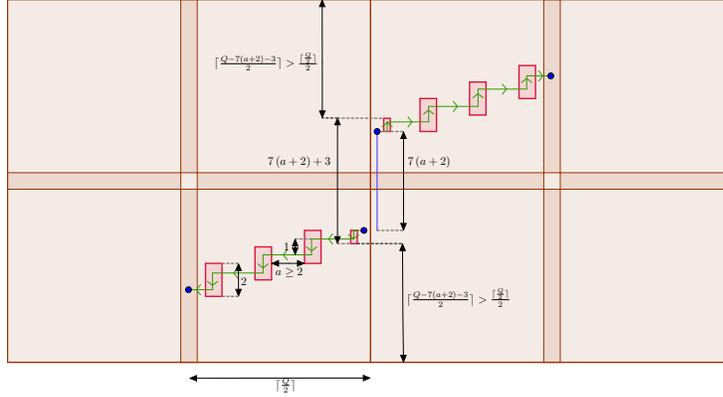


Figure 4: A level- $(k+1)$  actual error ( $E_{(k+1)}$ ), whose spatial extent is represented by a blue segment, fits in a space-time box of size  $7(a+2)Q^k \times 7(a+2)Q^k \times 7(b+2)U^k$ . It leads to the creation of anyons represented by blue dots. In the absence of lower-level errors, each anyon would move towards the central corridors in a straight line. In the presence of actual level- $(k-1)$  and lower errors, represented by red rectangles, the anyon trajectory  $\mathcal{T}_k$ , represented by green arrows, can expand to cover a set of  $[7(a+2)+3] \times [7(a+2)+3]$  level- $(k)$  colonies. Level- $k$  actual errors are  $(aQ^k, aQ^k, bU^k)$ -separated and can affect the spatial extension of a box containing the anyons part of  $E_{(k+1)}$ . However, choosing  $Q > 14(a+2) + 7$  guarantees that any anyon part of the causally-linked cluster of  $E_{(k+1)}$  stay contained within a block of  $2 \times 2$  level- $k+1$  colonies.

We now consider the effect of level- $(k+1)$  transition rules. The level- $(k+1)$  colonies surrounding  $\mathcal{B}'$  have valid level- $(k+1)$  syndromes reporting the vacuum. Indeed, property 3 ensures that the causal region of level- $k$  causally-linked cluster is contained within a box of size  $2Q^{k'} \times 2Q^{k'} \times (2\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 3)U^{k'}$ . Since level- $k$  actual errors are  $(aQ^k, aQ^k, bU^k)$ -separated, there can be at most 1 level- $k$  actual error by bin of  $b$  level- $k$  working periods. Using property 2 for  $k$  and the value of  $f_n = \frac{4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}})+1)Q+1}{b}$ , every bin of  $b$  level- $k$  working period reports the vacuum, ensuring that the level- $(k+1)$  corresponding syndrome reports the vacuum.

Suppose that the level- $(k+1)$  syndromes are all valid within  $\mathcal{B}'$ . By inspecting every possible case (see appendix B), it is clear that  $\mathcal{T}_{(k)}$  will be kept inside  $\mathcal{B}'$ .

On the other hand, if some of the level- $(k+1)$  syndromes in  $\mathcal{B}'$  are invalid, it is possible that the application of a level- $(k+1)$  transition rule brings  $\mathcal{T}_{(k)}$  outside of  $\mathcal{B}'$ . Suppose first that the total charge of the anyons part of  $\tilde{\mathcal{C}}(E)$  in  $C_{\rho}^{k+1} \in \mathcal{B}'$  is non-trivial, but that the corresponding reported syndrome  $s_{k+1,c}$  is the vacuum. This case cannot cause problems, since by design, the level- $(k+1)$  transition rules will not move a charge out of  $C_{\rho}^{k+1}$  when the syndrome is the vacuum. Suppose, however, that the reported syndrome is non-trivial. The transition rule that will be applied depends on the syndromes reported by the neighbouring colonies,  $s_{k+1,n}$ . If the total charge of the anyons part of  $\tilde{\mathcal{C}}(E)$  in a neighbouring colony  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$  is non-trivial but its syndrome  $s_{k+1,n}$  reports the vacuum, then it is possible that the application of a level- $(k+1)$  transition rule causes  $\mathcal{T}_{(k)}$  to grow outside of  $\mathcal{B}'$ . It is in fact the only potentially problematic case.

We thus seek values for  $b$  ensuring that if it is possible for the level- $(k+1)$  colony  $C_{\rho}^{k+1}$  to report a non-trivial syndrome  $s_{k+1,c}(\rho, \tau)$ , then all the syndromes  $s_{k+1,n}(\rho + (\alpha, \beta), \tau)$  of neighboring colonies are valid (with  $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$ ). Suppose that a non-trivial syndrome gets detected with  $T$  level- $k$  working periods left to the current level- $(k+1)$  working period in the colony  $C_{\rho}^{k+1}$ . The latest time after which a non-trivial charge may get detected in a neighbourhood level- $(k+1)$  colony centre is  $7(b+2)U^k + 4(3\text{diam}(G_{\mathcal{A}})Q + 1)U^k$

time steps after that, by using the maximal temporal extension of a level- $(k+1)$  actual error and the proof of lemma 5. Using property 2 for  $k$ , we find that after that point in time, the syndromes for the following bins of  $bU^k$  time steps are valid. We thus require that if  $f_c b \leq \lceil \frac{T}{b} \rceil$ , then  $f_n b \leq \lfloor \frac{T-7(b+2)-4(3 \text{diam}(G_{\mathcal{A}})+1)Q-1}{b} \rfloor$ . In other words, we require that if there is enough time left on the current level- $(k+1)$  working period for a syndrome  $s_{k+1,c}$  to report a non-trivial charge (valid or not), then there is also enough time left to ensure that the syndromes  $s_{k+1,n}$  of the neighbouring colonies are valid. Using the numerical values for  $f_c$  and  $f_n$ , we find that choosing

$$b \geq b_0 \equiv 4(3 \text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 5 + 2 \left( 4(3 \text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)^2 Q^2 + 11(3 \text{diam}(G_{\mathcal{A}}) + 1)Q + 7 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

ensures that it is always the case.  $\square$

**Lemma 7.** *Suppose that our algorithm is  $k$ -local,  $(k+1)$ -faithful and  $k$ -successful. If  $\mathcal{A}$  is non-cyclic, then our algorithm is  $(k+1)$ -successful.*

*Proof.* Consider the active transition rule  $M_{\rho}^{(\alpha,\beta),k+1}$  applied at the end of a level- $(k+1)$  working period labelled by  $\tau$  and moving a non-trivial anyon from colony  $C_{\rho}^{k+1}$  towards  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$ . Suppose first that no actual error happens during the level- $(k+1)$  working periods  $\tau$  and  $\tau+1$ . Using  $(k+1)$ -faithfulness any anyon part of  $\mathcal{C}^{(k+1)}$  is in the physical site at the centre of the level- $(k+1)$  colony for any time  $t' \geq \tau U^{k+1} + (1-f_c)bU^k$ . It is thus clear that  $M$  will move the anyon towards a neighbouring level- $(k+1)$  colony without interacting with any other non-trivial anyon. Furthermore, for the working period  $\tau+1$ , the level- $(k+1)$  syndrome of  $C_{\rho}^{k+1}$  will be valid, since by using property 2 for  $k$ , all the bins of  $b$  level- $k$  working periods will report valid syndromes. Since no actual error nor anyon is present in  $C_{\rho}^{k+1}$  for the working period  $\tau+1$ , the reported charge will be the vacuum.

Consider next the case where actual errors of level- $k$  and lower happens on  $C_{\rho}^{k+1}$  during the working periods  $\tau$  and  $\tau+1$ . Suppose first that the valid level- $(k+1)$  syndrome reports an abelian charge  $a$ . Since the anyon displaced at the end of the working period  $\tau$  is abelian, it cannot interact with any actual error whose causal region intersect its path. The total charge in  $C_{\rho}^{k+1}$  after this process is then clearly the vacuum, since the net effect of the level- $(k+1)$  transition rule is to displace an anyon of topological charge  $a$  from  $C_{\rho}^{k+1}$  towards  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$ . As argued previously, the level- $(k+1)$  syndrome of  $C_{\rho}^{k+1}$  for the working period  $\tau+1$  will report the vacuum as well.

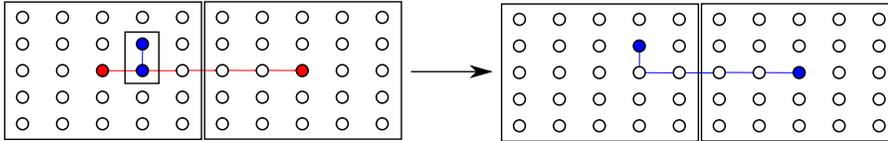


Figure 5: An example of an actual level-0 error (blue line) occurring during the application of a level-1 transition rule (red line). In this example, the application of the transition rule is not successful, as after its application, anyons part of the level-1 actual error are still contained inside the colony to the left. For simplicity,  $Q = 5$  here, and such a process could happen with Ising anyons for example, where the red dots represent  $\sigma$  anyons and the blue dots represent  $\psi$  fermions.

Suppose, on the other hand, that the valid level- $(k+1)$  syndrome reports a non-abelian charge  $a$ . If the site at the centre of  $C_{\rho}^{k+1}$  does not contain an anyon of charge  $a$  when the transition rule is applied, or if the moving anyon crosses the causal region of some actual errors, the application of  $M_{\rho}^{(\alpha,\beta),k+1}$  may be unsuccessful, as illustrated by figure 5.

Consider the case where the anyon of charge  $a$  being moved by  $M_{\rho}^{(\alpha,\beta),k+1}$  interacts with a level- $k$  actual error  $F$ . By  $k$ -locality, the causal region of  $F$ , up to the time at which it interacts with the anyon  $a$ , is contained inside a group of  $2 \times 2$  level- $k$  colonies lying on a corridor of  $C_{\rho}^{k+1}$  or  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$ .

Suppose first that  $F$  is entirely contained within  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$ . In this case, by using property 2 for  $k$ , the level- $k$  colonies containing  $F$  will report valid level- $k$  syndromes once the actual error  $F$  is over. By  $k$ -successfulness and by inspection of the transition rules, we find that after at most  $2 \text{diam}(G_{\mathcal{A}})$  level- $k$  working periods, all the anyons caused by  $F$  will be contained in a single level- $k$  colony on a corridor of  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$ . As argued in

the proof of lemma 5, the  $k$ -trajectory of  $\mathcal{C}^{(k+1)}$  in the colony  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$  is then confined inside of it, until the application of level- $(k+1)$  or larger transition rules. Furthermore, all the anyons part of  $\mathcal{C}^{(k+1)}$  in  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$  will get to the centre of the level- $(k+1)$  colony, using  $(k+1)$ -faithfulness. Hence, the presence of  $F$  does not affect the total charge of the anyons part of  $\mathcal{C}^{(k+1)}$  in  $C_{\rho}^{k+1}$ , nor can it affect its level- $(k+1)$  syndrome for working period  $\tau+1$ .

Next suppose that  $F$  is entirely contained within  $C_{\rho}^{k+1}$ . As in the previous case, all the anyons part of  $\mathcal{C}^{(k+1)}$  inside  $C_{\rho}^{k+1}$  will get to its centre fast enough to ensure that the level- $(k+1)$  syndrome of  $C_{\rho}^{k+1}$  for the next working period will be valid, using the same argument as for property 2. The state of the anyons can diagrammatically be written as a linear combination of terms of the form shown on the left-hand side of the following equation:

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \quad (19)$$

The charge reported at the centre of  $C_{\rho}^{k+1}$  can be measured using the  $\omega$ -loop shown in the left-hand side of equation (19). After the repeated use of the Yang-Baxter equation (5), one gets to the right-hand side of equation (19). Since  $\mathcal{A}$  is non-cyclic, the total charge is different than  $a$ , since it cannot be so for any term in the linear combination.

It is possible that the group of  $2 \times 2$  level- $k$  colonies containing  $F$  overlaps with both  $C_{\rho}^{k+1}$  and  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$ . In this case, one can explicitly check using the transition rules that all the non-trivial anyons part of the causally-linked cluster of  $F$  and in the block of  $2 \times 2$  level- $k$  colonies containing  $F$  will end up in a single level- $k$  colony in a corridor of either  $C_{\rho}^{k+1}$  or  $C_{\rho+(\alpha,\beta)}^{k+1}$ . Both these cases have been considered above.

It is now clear that even in the presence of actual errors of level- $k$  or lower (the above reasoning holds for actual errors of lower levels as well and is readily generalized to the case where many actual errors of various levels lower than  $k+1$  happen), after applying  $M_{\rho}^{(\alpha,\beta),k+1}$  at most  $\text{diam}(G_{\mathcal{A}}) - 1$  times, the charge left in  $C_{\rho}^{k+1}$  is abelian. At this point, the next application of the transition rule will be applied successfully. In the above analysis, we have assumed that the same level- $(k+1)$  transition rule (although based on different syndromes in  $C_{\rho}^{k+1}$ ) is applied at the various level- $(k+1)$  working periods. However this is not crucial and they need not be the same, *i.e.* the non-trivial anyon may be moved towards different neighbouring level- $(k+1)$  colonies in  $\{C_{\rho}^{k+1}\}$  at different level- $(k+1)$  working periods without affecting the previous reasoning.  $\square$

**Theorem 1.** *If  $\mathcal{A}$  is non-cyclic, then there exists a critical value  $p_c > 0$  such that if  $p+q < p_c$ , for any number of time steps  $T$  and any  $\epsilon > 0$ , there exists a linear system size  $L = Q^n \in \mathcal{O}(\log \frac{1}{\epsilon})$  such that with probability of at least  $1 - \epsilon$ , the encoded quantum state can in principle be recovered after  $T$  time steps.*

*Proof.* Let  $a = 3$ ,  $Q > 14(a+2) + 7$  and  $b > b_0$ . Define  $p_c = \frac{Q^{-4}b^{-4}}{4}$ , and let  $p+q < p_c$ . Choose the linear size of the system  $L = Q^n$ , with  $n$  such that  $U^n \geq T$  and  $\left(\frac{(p+q)}{p_c}\right)^{2^n} \leq \epsilon$ .

Since  $p+q < p_c$ , lemma 2 guarantees that with probability 1, any error is part of an actual error and thus the concept of causally-linked clusters is well-defined. Using lemma 4, the correction algorithm is 0-local, 0-faithful and 0-successful. Using lemmas 5 through 7, we recursively find that the algorithm is  $(n-1)$ -local,  $(n-1)$ -faithful and  $(n-1)$ -successful as well. It follows from property 3 and the separation between actual errors of the same level that in order to perform a non-trivial operation on the encoded subspace, at least one causally-linked cluster of level- $n$  or larger is required. By definition, a level- $n$  causally-linked cluster requires the presence of at least one level- $n$  actual error. Using lemma 1, the probability of having at least one level- $n$  or larger actual error having non-empty intersection with a box in space time of size  $Q^n \times Q^n \times U^n$  is at most  $\left(\frac{(p+q)}{p_c}\right)^{2^n}$ . We thus find if the transition rules continue to operate in an error-free way after time  $T$ , the system will return to its initial ground state with probability at least  $1 - \epsilon$ .  $\square$

Setting  $a = 3$ ,  $Q = 78$ , and  $b = 9(3D+1)Q$  respects all the conditions under which the above theorem holds and leads to a threshold lower-bound of  $2,7 \times 10^{-20} \times (3D+1)^{-4}$ . In particular for a system of Ising anyons where  $D = 2$ , we obtain a threshold lower-bound of  $1,1 \times 10^{-23}$ .

## 7 Numerical Simulations of a System of Ising Anyons

The numerical value of the threshold found in the preceding section are extremely low and should be understood as a proof of existence. In practice, the threshold is likely to be much higher, since the proof presented here consider the worst-case scenario, which may differ significantly from the average case. To verify this claim, numerical simulations for a system of Ising anyons living on a torus were performed. The superselection sectors of the theory are  $\{1, \epsilon, \sigma\}$  and the non-trivial fusion rules are given by

$$\epsilon \times \epsilon = 1, \tag{20}$$

$$\sigma \times \epsilon = \sigma, \tag{21}$$

$$\sigma \times \sigma = 1 + \epsilon. \tag{22}$$

A complete description of Ising anyons can be found in [47, 54]. Ising anyons are non-cyclic, with a graph diameter of 2. Moreover, the evolution of a system of Ising anyons restricted to topological operations (*i.e.* splitting, fusion and braiding) can be efficiently simulated classically. This can be achieved by using the spinor representation of the braid group acting on  $2n$   $\sigma$  anyons, described by the  $SO(2n)$  group [42, 62, 63] and by using the algorithm presented in [64].

We have performed numerical simulations of a system of Ising anyons on a  $L \times L$  torus. The various values of  $L$  considered where  $L = Q^n$ , for  $Q = 3$  and  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ . An optimal renormalization time  $U = b^2$  was empirically found to be  $U = 49$  for the parameters presented here. The measurement error rate  $q$  is set equal to the charge creation error rate  $p$ . The fractions  $f_c$  and  $f_n$  were set to 0.8 and 0.2 respectively, and were also empirically found to work best. Using lower measurement error rates  $q$  gives very similar results.

At every time step, after applying both the error model and the local transition rules (on the renormalized levels if at suitable time), the decoding algorithm introduced in [42] was used to verify whether the information could in principle be retrieved. This algorithm acts as a two-step perfect matching algorithm (performed using the blossomV software [65]), first matching pairs of  $\sigma$  anyons which may fuse either to the vacuum or give an  $\epsilon$  fermion, and then matching  $\epsilon$  fermions in pairs, thus always returning to the vacuum. Note that during this virtual verification procedure, measurements were performed perfectly. The number of time steps before this verification procedure reports that the information was corrupted is called the lifetime of this particular instance. Note that because it uses a heuristic, suboptimal verification procedure, this reported lifetime should be interpreted as a lower bound to the real lifetime. Average lifetime as a function of the error rate is shown in Figure 6. Polynomial fittings of degree  $2^n$  in the variable  $\left(\frac{1}{p(1-p)}\right)$  are shown as continuous lines in the plot as well. The asymptotic behaviour for low error rates of  $\sim p^{-2^n}$  is in agreement with the bounds found in Sec. 3.3, even though here  $Q = 3$  only. Note that Figure 6 does not allow to determine the asymptotic region of low error rate for the case of  $n = 4$ , but the simulation results are in agreement with an average lifetime  $\sim p^{-2^4}$ . Such a low value of  $Q$  was used because of the exponential growth of the size of the lattice with the level- $n$ , and larger values of  $Q$  did not allow for simulation in a reasonable time.

While the simulations were limited to values of  $n$  too small to observe a clear threshold behaviour, they are consistent with a threshold in the  $10^{-4} - 10^{-3}$  range. In particular, the data and polynomial fits show that, for values of  $p$  below  $p_c \approx 3 \times 10^{-4}$ , the average memory lifetime increases with the lattice size.

## 8 Discussion

We have shown, both analytically and numerically, that an adaptation of a cellular automaton developed by Gács [1] and Harrington [2] can implement fault-tolerant quantum error correction for a system of non-cyclic modular anyons. The  $\sim 10^{-24}$  threshold lower-bound we found analytically is strikingly low. In contrast, Harrington [2] reports an analytical threshold lower bound  $\sim 10^{-12}$  for Abelian anyons. This difference is explained by the possibility that a low-level error modifies the trajectory of a level- $k$  anyon and make it escape the  $2 \times 2$  block of level- $k$  colonies containing its trajectory; a possibility not accounted for in Harrington's analysis. This possibility forces us to adapt a larger value of  $Q = 78$  compared to  $Q = 16$  used by Harrington.

Despite this prohibitively low lower bound, numerical simulations suggest that a thermal anyon density  $e^{-\frac{\Delta}{k_b T}} \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ , which corresponds to a temperature  $T$  about an order of magnitude below the spectral gap  $\Delta$ , in conjunction with a relatively low measurement error rate (in the range 0.1 – 0.01%) are sufficient. This is the first theoretical demonstration of fault-tolerant quantum error correction for non-abelian anyons which can tolerate faulty measurements; it is likely that other schemes will perform better.

There are indeed many avenues to improve upon our scheme. Most noteworthy, our algorithm does not take into account any specificity of the anyonic models, such as the fusion rules. Its sole objective is to fuse

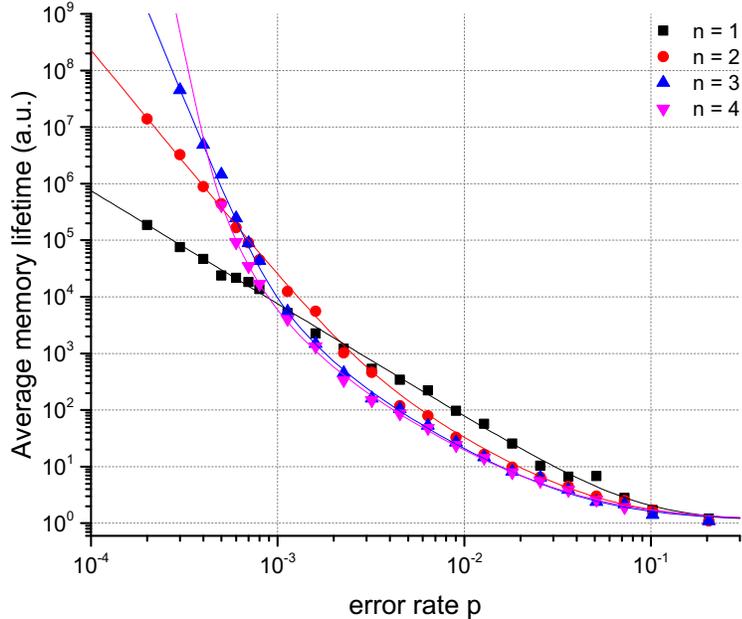


Figure 6: Results of numerical simulations for a system of Ising anyons on a torus of linear size  $3^n \times 3^n$  for values of  $n = 1, 2, 3$  and  $4$ , using a renormalization time  $U = b^2 = 49$ . The thresholds  $f_c$  and  $f_n$  were set to  $0.8$  and  $0.2$ , respectively. Each point represents the average lifetime of  $60$  instances for the given error rate. The measurement error rate  $q$  is set equal to the charge error rate  $p$ . The solid lines are polynomial fittings of the argument  $\left(\frac{1}{p(1-p)}\right)$  of power  $2^n$ .

non-trivial anyons together, irrespective of the possibility that the fusion results in the vacuum. Moreover, the algorithm does not use the partial information it generates about the anyon world-lines. For instance, when displacing a level- $k$  excitation, the algorithm could make use of lower-level information to try to avoid linking the displaced excitation with lower-level errors. An algorithm exploiting this extra information could lead to significant quantitative improvements.

The most important simplification we made in our analysis is that the application of the renormalized transition rules can be performed in a single time step. While it is possible to displace an abelian anyon over an arbitrary large distance in constant time (by a parallel repetition of fissions and fusions teleporting the anyon), non-abelian anyons can only propagate at a finite velocity. This finite velocity requires modifying the transition rules to avoid conflicts between the displacement of a high-level charge and the application of lower-level transition rules. For instance, we could simply “turn off” the lower-level transition rules during the passage of a high-level excitation. These vacant transition rules can be seen as additional errors, so they would essentially have the effect of slightly increasing the error rate of lower levels. Thus, we believe that the finite velocity of non-abelian anyons should only quantitatively change our analysis and simulations, but leave our qualitative conclusions unchanged.

The idea of encoding information on a surface of genus  $1$  or higher seems technically challenging. A more natural way to encode information using non-abelian anyons is to use the fusion space of the non-abelian species or to add punctures on a planar surface [66]. This last procedure is commonly used in the context of surface codes [67]. While our algorithm does not directly apply to such settings, we believe that it should apply with only minor modifications. In particular, provided that these topological defects are kept at a distance

$\geq Q^n$  from each other, there should exist a colony patchwork which avoid them in such a way that they do not interfere with the transition rules of level  $n$  or less. A similar technique, perhaps using a time-dependent patchwork, could be applied in a setting where anyons are braided and fused to realize fault-tolerant anyonic quantum computation.

The analysis we presented fails in the case of cyclic anyonic models, such as Fibonacci anyons. For these models, there is no guarantee that the transition rules can be applied successfully. This leads to the possibility that an actual error fails to get corrected before the appearance of other actual errors of the same or larger level. Since the probability that a particle and its anti-particle fuse to a non-trivial particle  $\ell$  times in a row drops exponentially with  $\ell$ , we could imagine imposing a hard cutoff  $\ell_{\max}$  on the number of fusion attempts. Our analysis would then go through by replacing  $D = \text{diam}(G_{\mathcal{A}})$  by  $\ell_{\max}$ , leaving an error floor exponentially low in  $\ell_{\max}$ . The problem with this approach is that to achieve an exponential error suppression with the lattice size  $L$ , the cutoff  $\ell_{\max}$  would need to scale with  $L$ , resulting in a “drifting threshold”. Hence, constructions that do not use renormalization ideas such as the one presented in [34, 41] may be necessary to study fault-tolerance for cyclic anyons.

## 9 Acknowledgements

We thank Guillaume Duclos-Cianci for valuable discussions as well as Steve Allen for technical assistance. GD was partially supported by the Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies. This work was partially funded by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and the Canadian Institute for Advanced Research. Computations were made on the supercomputer Mammouth from Université de Sherbrooke, managed by Calcul Québec and Compute Canada. The operation of this supercomputer is funded by the Canada Foundation for innovation (CFI), the ministère de l'Économie, de la science et de l'innovation du Québec (MESI) and the Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQ-NT).

## References

- [1] P. Gács. Reliable computation with cellular automata. *Journal of Computer System Science*, 32:15–78, 1986. doi:10.1145/800061.808730.
- [2] J. W. Harrington. *Analysis of quantum error-correcting codes: symplectic lattice codes and toric code*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2004. URL [http://thesis.library.caltech.edu/1747/1/jimh\\_thesis.pdf](http://thesis.library.caltech.edu/1747/1/jimh_thesis.pdf).
- [3] S. Das Sarma, M. Freedman, and C. Nayak. Majorana Zero Modes and Topological Quantum Computation. *npj Quantum Information*, 1:15001, 2015. doi:10.1038/npjqi.2015.1.
- [4] M. Freedman, C. Nayak, and K. Walker. Towards universal topological quantum computation in the  $\nu = \frac{5}{2}$  fractional quantum Hall state. *Phys. Rev. B*, 73:245307, 2006. doi:10.1103/PhysRevB.73.245307.
- [5] P. Bonderson, S Das Sarma, M. Freedman, and C. Nayak. A Blueprint for a Topologically Fault-tolerant Quantum Computer. *arXiv:1003.2856*, 2010. URL <http://arxiv.org/abs/1003.2856>.
- [6] A. Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals Phys.*, 303:2–30, 2003. doi:10.1016/S0003-4916(02)00018-0.
- [7] C. Nayak, S. H. Simon, M. Freedman, and S. Das Sarma. Non-Abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1083, 2008. doi:10.1103/RevModPhys.80.1083.
- [8] S. Trebst, M. Troyer, Z. Wang, and A. W. W. Ludwig. A short introduction to Fibonacci anyon models. *Prog. Theor. Phys. Supp.*, 176:384, 2008. doi:10.1143/PTPS.176.384.
- [9] A. Stern. Non-Abelian states of matter. *Nat. Phys.*, 464:187–193, 2010. doi:10.1038/nature08915.
- [10] M. H. Freedman, M. Larsen, and Z. Wang. A Modular Functor Which is Universal for Quantum Computation. *Commun. Math. Phys.*, 227:605–622, 2002. doi:10.1007/s002200200645.
- [11] M. H. Freedman, A. Kitaev, and Z. Wang. Simulation of Topological Field Theories by Quantum Computer. *Commun. Math. Phys.*, 227:587–603, 2002. doi:10.1007/s002200200635.

- [12] J. C. Budich, S. Walter, and B. Trauzettel. Failure of protection of Majorana based qubits against decoherence. *Phys. Rev. B*, 85:121405, 2012. doi:10.1103/PhysRevB.85.121405.
- [13] M. J. Schmidt, D. Rainis, and D. Loss. Decoherence of Majorana qubits by noisy gates. *Phys. Rev. B*, 86:085414, 2012. doi:10.1103/PhysRevB.86.085414.
- [14] F. L. Pedrocchi, N. E. Bonesteel, and D. P. DiVincenzo. Monte Carlo studies of the properties of the Majorana quantum error correction code: is self-correction possible during braiding? *arXiv:1507.00892*, 2015. URL <http://arxiv.org/abs/1507.00892>.
- [15] F. L. Pedrocchi and D. P. DiVincenzo. Majorana braiding with thermal noise. *arXiv:1505.03712*, 2015. URL <http://arxiv.org/abs/1505.03712>.
- [16] G. Goldstein and C. Channon. Decay rates for topological memories encoded with Majorana fermions. *Phys. Rev. B*, 84:205109, 2011. doi:10.1103/PhysRevB.84.205109.
- [17] F. Konschelle and F. Hassler. Effects of nonequilibrium noise on a quantum memory encoded in Majorana zero modes. *Phys. Rev. B*, 88:075431, 2013. doi:10.1103/PhysRevB.88.075431.
- [18] D. Rainis and D. Loss. Majorana qubit decoherence by quasiparticle poisoning. *Phys. Rev. B*, 85:174533, 2012. doi:10.1103/PhysRevB.85.174533.
- [19] J. R. Wootton, J. Burri, S. Iblisdir, and D. Loss. Error Correction for Non-Abelian Topological Quantum Computation. *Phys. Rev. X*, 4:011051, 2014. doi:10.1103/PhysRevX.4.011051.
- [20] A. Hamma, C. Castelnovo, and C. Chamon. The toric-boson model: Toward a topological quantum memory at finite temperature. *Phys. Rev. B*, 79:245122, 2009. doi:10.1103/PhysRevB.79.245122.
- [21] S. Chesi, B. Röthlisberger, and D. Loss. Self-correcting quantum memory in a thermal environment. *Phys. Rev. A*, 82:022305, 2010. doi:10.1103/PhysRevA.82.022305.
- [22] F. L. Pedrocchi, A. Hutter, J. R. Wootton, and D. Loss. Enhanced thermal stability of the toric code through coupling to a bosonic bath. *Phys. Rev. A*, 88:062313, 2013. doi:10.1103/PhysRevA.88.062313.
- [23] O. Landon-Cardinal and D. Poulin. Local topological order inhibits thermal stability in 2D. *Phys. Rev. Lett.*, 110:090502, 2013. doi:10.1103/PhysRevLett.110.090502.
- [24] O. Landon-Cardinal, B. Yoshida, D. Poulin, and J. Preskill. Perturbative instability of quantum memory based on effective long-range interactions. *Phys. Rev. A*, 91(3):032303, 2015. doi:10.1103/PhysRevA.91.032303.
- [25] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl, and J. Preskill. Topological quantum memory. *J. Math. Phys.*, 43:4452, 2002. doi:10.1063/1.1499754.
- [26] G. Duclos-Cianci and D. Poulin. Fast Decoders for Topological Quantum Codes. *Phys. Rev. Lett.*, 104:050504, 2010. doi:10.1103/PhysRevLett.104.050504.
- [27] G. Duclos-Cianci and D. Poulin. A renormalization group decoding algorithm for topological quantum codes. *Information Theory Workshop*, pages 1–5, 2010. doi:10.1109/CIG.2010.5592866.
- [28] D. S. Wang, A. G. Fowler, M. Stephens, and L. C. Hollenberg. Threshold error rates for the toric and surface codes. *Quant. Inf. Comput.*, 10:456, 2010. URL <https://arxiv.org/abs/0905.0531>.
- [29] J. S. Wootton and D. Loss. High Threshold Error Correction for the Surface Code. *Phys. Rev. Lett.*, 109:160503, 2012. doi:10.1103/PhysRevLett.109.160503.
- [30] S. Bravyi and J. Haah. Quantum Self-Correction in the 3D Cubic Code Model. *Phys. Rev. Lett.*, 111:200501, 2013. doi:10.1103/PhysRevLett.111.200501.
- [31] H. Anwar, B. J. Brown, E. T. Campbell, and D. E. Browne. Efficient Decoders for Qudit Topological Codes. *New J. Phys.*, 16:063038, 2014. doi:10.1088/1367-2630/16/6/063038.
- [32] A. Hutter, J. R. Wootton, and D. Loss. Efficient Markov chain Monte Carlo algorithm for the surface code. *Phys. Rev. A*, 89:022326, 2014. doi:10.1103/PhysRevA.89.022326.

- [33] S. Bravyi, M. Suchara, and A. Vargo. Efficient algorithms for maximum likelihood decoding in the surface code. *Phys. Rev. A*, 90:032326, 2014. doi:10.1103/PhysRevA.90.032326.
- [34] M. Herold, E.T. Campbell, J. Eisert, and M. J. Kastoryano. Cellular-automaton decoders for topological quantum memories. *npj Quantum Information*, 1:15010, 2015. doi:10.1038/npjqi.2015.10.
- [35] J. R. Wootton. A simple decoder for topological codes. *Entropy*, 17:1946, 2015. doi:10.3390/e17041946.
- [36] R. S. Andrist, J. R. Wootton, and H. G. Katzgraber. Error Thresholds for Abelian Quantum Double Models: Increasing the bit-flip Stability of Topological Quantum Memory. *Phys. Rev. A*, 91:042331, 2015. doi:10.1103/PhysRevA.91.042331.
- [37] A. G. Fowler, A. M. Stephens, and P. Groszkowski. High-threshold universal quantum computation on the surface code. *Phys. Rev. A*, 80:052312, 2009. doi:10.1103/PhysRevA.80.052312.
- [38] G. Duclos-Cianci and D. Poulin. Fault-Tolerant Renormalization Group Decoder for Abelian Topological Codes. *Quant. Inf. Comp.*, 14(2-3):0721–0740, 2014. URL <http://epiq.physique.usherbrooke.ca/data/files/publications/DP13a1.pdf>.
- [39] F. H. E. Watson, H. Anwar, and Brown D. E. A fast fault-tolerant decoder for qubit and qudit surface codes. *Phys. Rev. A*, 92:032309, 2015. doi:10.1103/PhysRevA.92.032309.
- [40] A. G. Fowler. Minimum weight perfect matching of fault-tolerant topological quantum error correction in average  $O(1)$  parallel time. *QIC*, 15:0145–0158, 2015. URL <http://arxiv.org/abs/1307.1740>.
- [41] M. Herold, M. J. Kastoryano, E. T. Campbell, and J. Eisert. Fault tolerant dynamical decoders for topological quantum memories. *arXiv:1511.05579*, 2015. URL <http://arxiv.org/abs/1511.05579>.
- [42] C. G. Brell, S. Burton, G. Dauphinais, S. T. Flammia, and D. Poulin. Thermalization, Error Correction, and Memory Lifetime for Ising Anyon Systems. *Phys. Rev. X*, 4:031058, 2014. doi:10.1103/PhysRevX.4.031058.
- [43] S. Burton, C. G. Brell, and S. T. Flammia. Classical Simulation of Quantum Error Correction in a Fibonacci Anyon Code. *arXiv:1506.03815*, 2015. URL <http://arxiv.org/abs/1506.03815>.
- [44] J. R. Wootton and A. Hutter. Active error correction for Abelian and non-Abelian anyons. *Phys. Rev. A*, 93:022318, 2016. doi:10.1103/PhysRevA.93.022318.
- [45] A. Hutter and J. Wootton. Continuous error correction for Ising anyons. *Phys. Rev. A*, 93:042327, 2016. doi:10.1103/PhysRevA.93.042327.
- [46] L. Gray. A reader’s guide to P. Gács’ ”positive rates” paper: ”Reliable cellular automata with self-organization”. *J. Statist. Phys.*, 103:1–44, 2001. URL <http://www.math.umn.edu/~grayx004/pdf/gacs2.pdf>.
- [47] A. Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Annals Phys.*, 321:2–111, 2006. doi:10.1016/j.aop.2005.10.005.
- [48] P. Bonderson. *Non-Abelian Anyons and Interferometry*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2007. URL <http://thesis.library.caltech.edu/2447/2/thesis.pdf>.
- [49] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1991.
- [50] C. Levaillant, B. Bauer, M. Freedman, Z. Wang, and P. Bonderson. Fusion and Measurement Operations for  $SU(2)_4$  Anyons. *Phys. Rev. A*, 92:012301, 2015. doi:10.1103/PhysRevA.92.012301.
- [51] P. Bonderson, M. Freedman, and C. Nayak. Measurement-Only Topological Quantum Computation. *Phys. Rev. Lett.*, 101:010501, 2008. doi:10.1103/PhysRevLett.101.010501.
- [52] P. Bonderson, M. Freedman, and C. Nayak. Measurement-Only Topological Quantum Computation via Anyonic Interferometry. *Annals Phys.*, 324:787–826, 2009. doi:10.1016/j.aop.2008.09.009.
- [53] E. Verlinde. Fusion rules and modular transformations in 2d conformal field theory. *Nucl. Phys. B*, 300:360–376, 1988. doi:10.1016/0550-3213(88)90603-7.

- [54] E. Rowell, R. Stong, and Z. Wang. On Classification of Modular Tensor Categories. *Commun. Math. Phys.*, 292:343–389, 2009. doi:10.1007/s00220-009-0908-z.
- [55] F. A. Bais, P. van Driel, and M. de Wild Propitius. Quantum symmetries in discrete gauge theories. *Phys. Lett. B*, 280:63–67, 1992. doi:10.1016/0370-2693(92)90773-W.
- [56] M. de Wild Propitius and F. A. Bais. Discrete gauge theories. *arXiv:9511201*, 1995. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9511201>.
- [57] C. Xu and A. W. W. Ludwig. Topological Quantum Liquids with Quaternion Non-Abelian Statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 108:047202, 2012. doi:10.1103/PhysRevLett.108.047202.
- [58] D. Tambara and S. Yamagami. Tensor Categories with Fusion Rules of Self-Duality for Finite Abelian Groups. *Journal of Algebra*, 209:692–707, 1998. doi:10.1006/jabr.1998.7558.
- [59] E. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 27:247–271, 1909.
- [60] F. P. Cantelli. Sulla probabilità come limite della frequenza. *Atti Accad. Naz. Lincei 26:1*, pages 39–45, 1917.
- [61] P. Gàcs. Self-correcting two-dimensional array. *Advances in Computing Research*, 5:223–326, 1989. URL <http://www.cs.bu.edu/~gacs/papers/self-correcting-2d.pdf>.
- [62] S. Bravyi. Universal quantum computation with the  $\nu = \frac{5}{2}$  fractional quantum Hall state. *Phys. Rev. A*, 73:042313, 2006. doi:10.1103/PhysRevA.73.042313.
- [63] C. Nayak and F. Wilczek.  $2n$ -quasiholes states realize  $2^{n-1}$ -dimensional spinor braiding statistics in paired quantum Hall states. *Nucl. Phys.*, B479:529, 1996. doi:10.1016/0550-3213(96)00430-0.
- [64] S. Aaronson and D. Gottesman. Improved simulation of stabilizer circuits. *Phys. Rev. A*, 70:052328, 2004. doi:10.1103/PhysRevA.70.052328.
- [65] V. Kolmogorov. Blossom V: A new Implementation of a Minimum Cost Perfect Matching Algorithm. *Math. Program. Comput.*, 1:43, 2009. doi:10.1007/s12532-009-0002-8.
- [66] A. Beverland, R. König, F. Pastawski, J. Preskill, and S. Sijhner. Protected gates for topological quantum field theories. *J. Math. Phys.*, 57:022201, 2016. doi:10.1063/1.4939783.
- [67] M. H. Freedman and D. A. Meyer. Projective plane and planar quantum codes. *Found. Comput. Math.*, 1:325–332, 2001. doi:10.1007/s102080010013.

## A Explicit description of the transition rules

Let  $(\alpha, \beta)$  be a two-dimensional vector in  $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0 - 1)\}$  and  $l_q$  be the label of topological charge  $q$ . The operator  $M_{\mathbf{r}}^{(\alpha, \beta)}(l_q)$  is operationally defined as follows: if there is a particle of topological charge  $q$  at site  $\mathbf{r}$ , then displace that particle from site  $\mathbf{r}$  to the site  $\mathbf{r} + (\alpha, \beta)$  via the edge connecting the two sites; if no such particle is present, then first create a pair of particles of charges  $q$  and  $\bar{q}$  from the vacuum at site  $\mathbf{r}$ , and the particle with charge  $q$  is then displaced to the site  $\mathbf{r} + (\alpha, \beta)$  in the same way.

The level- $k$  operator  $M_{\boldsymbol{\rho}}^{(\alpha, \beta), k}(l_q)$  is defined by  $M_{\boldsymbol{\rho}}^{(\alpha, \beta), k}(l_q) = \prod_{i=0}^{Q^k-1} P_{\mathbf{c}(\boldsymbol{\rho})+i(\alpha, \beta)}^{q_i} M_{\mathbf{c}(\boldsymbol{\rho})+i(\alpha, \beta)}^{(\alpha, \beta)}(l_q)$ , with  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\rho})$  the physical site at the centre of the colony  $C_{\boldsymbol{\rho}}^k$ . It is understood that the operators  $M_{\mathbf{c}(\boldsymbol{\rho})+i(\alpha, \beta)}^{(\alpha, \beta)}(l_q)$  are applied sequentially, each one followed by the application of  $P_{\mathbf{c}(\boldsymbol{\rho})+i(\alpha, \beta)}^{q_i}$ , the projector of the total charge  $q_i$  at site  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\rho}) + i(\alpha, \beta)$ . The measured charges  $\{q_i\}$  are determined probabilistically, using equation (10).

The operator  $M_{\boldsymbol{\rho}}^{(\alpha, \beta), k}(q)$  can be understood as moving an anyon of topological charge  $q$  from the physical site corresponding to centre of the level- $k$  colony lying at renormalized site  $\boldsymbol{\rho}$  all the way to the physical site corresponding to the centre of  $\boldsymbol{\rho} + (\alpha, \beta)$ . If the charge being displaced encounters a non trivial anyon on its path, the total charge at that site is measured. If the resulting charge is  $q$ , then it simply continues on its path. If, however, the resulting charge is different than  $q$ , then a pair of charges  $q$  and  $\bar{q}$  are created from the vacuum, the anyon with charge  $\bar{q}$  is put in the site while the charge  $q$  keeps being displaced.

The level- $k$  transition rules used by our algorithm are explicitly stated below. Since all syndromes are measured at the same time  $t = \tau U^k$ , with  $\tau \in \mathbb{N}$ , it is omitted in the syndrome notation. The notation  $\rho = (\chi, y)$  is used below.

- (West border) IF  $\chi$  modulo  $Q = 0$  THEN
  - if  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else continue below.
- (South border) IF  $y$  modulo  $Q = 0$  THEN
  - if  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (+1, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else continue below.
- (South West quadrant) IF  $\chi$  modulo  $Q < \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q < \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN
  - if  $s_{\rho}^{k,c} = 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,+1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(+1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, -1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,+1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (1, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(+1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else, apply  $M_{\rho}^{(0,+1),k}(s_{k,c}(\rho))$ .
- (West corridor) IF  $\chi$  modulo  $Q < \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q = \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN
  - IF  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, 1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , apply  $M_{\chi,y}^{(+1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, -1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else, apply  $M_{\rho}^{(+1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ .
- (North West quadrant) IF  $\chi$  modulo  $Q < \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q > \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN
  - IF  $s_{\rho}^{k,c} = 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, 1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(+1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 1)) \neq 0$ , apply  $M_{\chi,y}^{(+1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\chi,y}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else, apply  $M_{\rho}^{(+1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ .
- (North corridor) IF  $\chi$  modulo  $Q = \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q > \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN
  - IF  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, 1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 1)) \neq 0$ , do nothing;
  - else, apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ .

- (North East quadrant) IF  $\chi$  modulo  $Q > \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q > \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN  
 IF  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, 1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else, apply  $M_{\rho}^{(0,-1),k}(s_{k,c}(\rho))$ .
- (East corridor) IF  $\chi$  modulo  $Q > \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q = \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN  
 IF  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, 1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, -1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else, apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ .
- (South East quadrant) IF  $\chi$  modulo  $Q > \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q < \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN  
 IF  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, 1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,+1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, -1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, -1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,+1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else, apply  $M_{\rho}^{(-1,0),k}(s_{k,c}(\rho))$ .
- (South corridor) IF  $\chi$  modulo  $Q = \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q < \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN  
 IF  $s_{k,c}(\rho) = 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, 0)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, -1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, 0)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (0, 1)) \neq 0$ , apply  $M_{\rho}^{(0,+1),k}(s_{k,c}(\rho))$ ;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (1, -1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else if  $s_{k,n}(\rho + (-1, -1)) \neq 0$ , do nothing;  
 else, apply  $M_{\rho}^{(0,+1),k}(s_{k,c}(\rho))$ .
- (Colony centre) IF  $\chi$  modulo  $Q = \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  AND  $y$  modulo  $Q = \lfloor \frac{Q}{2} \rfloor$  THEN; update colony syndromes  $s_{k+1,c}(\rho)$  and  $s_{k+1,n}(\rho)$ .

## B Level-0 actual errors getting corrected within 2 time steps

In this section, it is explicitly shown that every actual level-0 error gets corrected within 2 time steps. Figures 7 through 12 list all possible cases (up to rotations) of actual level-0 errors. In these figures, blue dots represent non-trivial topological charges, without distinction for their specific charges. ‘‘M’’ represents a measurement step, with the occupied site corresponding to the reported syndromes, and not necessarily actual charges, while ‘‘U’’ denotes the application of the local rules, based on the previous measurements. The arrows represents the transition rules described above. To simplify notation, we do not distinguish between different topological charges since the transition rules are oblivious to them. In the case where a fusion happens after the first correction step, the corresponding blue dot represent any possible fusion result giving a non-trivial charge. In the case where the fusion result may yield a trivial charge as well, the rest of the process can simply be replaced by the appropriate case. The sites are assumed to be in the south-west quadrant of a colony on the following figures, but errors get corrected in a similar fashion in every quadrant of the colony, since careful

inspection of the transition rules reveal that they are symmetric under rotations of  $\frac{\pi}{4}$  around the colony centre.

Note that the analysis of these cases also works at the  $k^{\text{th}}$  level of renormalization if the algorithm is  $k$ -local,  $k$ -faithful and  $k$ -successful. In this case, the sites correspond to level- $k$  colonies. The  $t = 0$  step represents the possible total charge of the anyons of the level- $k$  causally-linked cluster of a level- $k$  actual error  $E$  at the end of the last level- $k$  working period into which errors part of  $E$  are supported. If the total charge is non-trivial in the corresponding level- $k$  colonies, the  $t = 0.5$  step depicts the corresponding valid level- $k$  syndromes. If no non-trivial level- $k$  charge is present in the  $t = 0$  step, the  $t = 0.5$  step represents the reported syndromes, which are invalid. The step at  $t = 1$  represents the state of the system after the successful application of a round of active level- $k$  transition rules in the case where syndromes were valid, or the resulting state of the system after the application of transition rules if the syndromes were not valid. Steps denoted by  $t = 1.5$  and  $t = 2$  are similarly interpreted, except that the reported syndromes at  $t = 1.5$  are always valid.

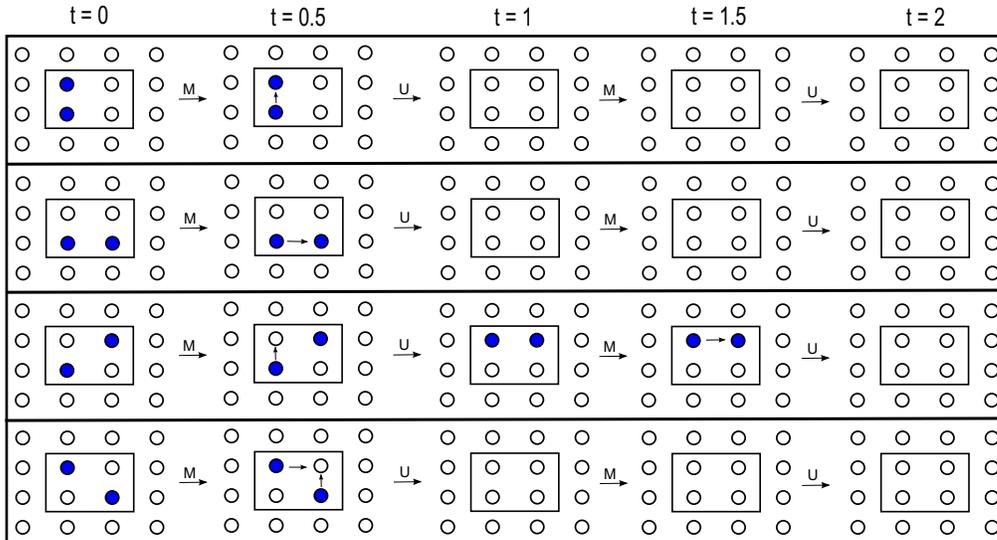


Figure 7: Actual level-0 errors containing 2 non-trivial topological charges get corrected within 2 time steps. Note that the specific charges do not matter, as the total charge must be the vacuum.

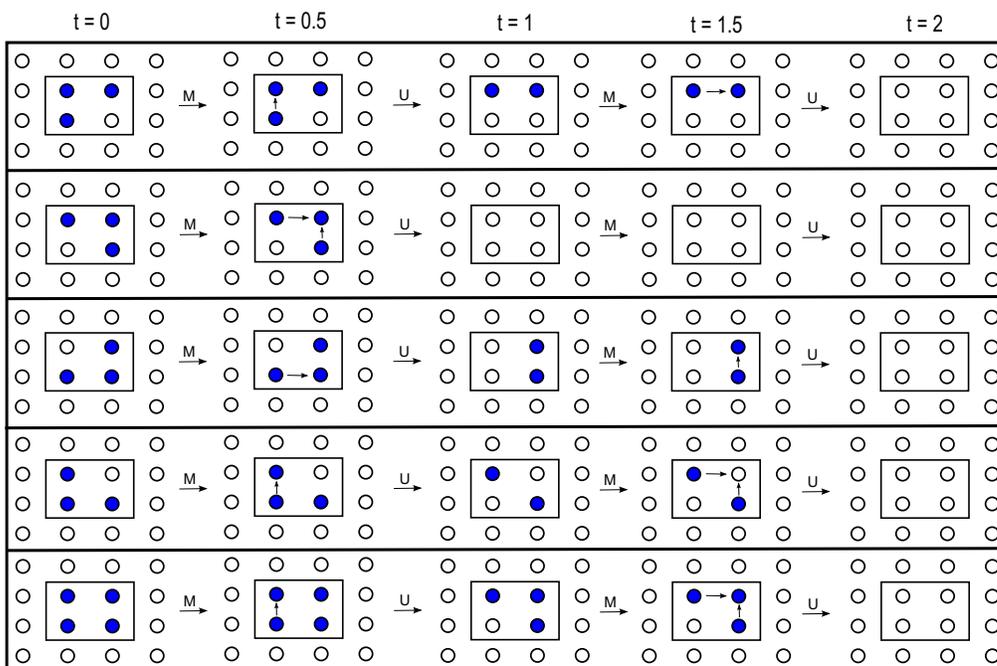


Figure 8: Actual level-0 errors containing 3 or 4 non-trivial topological charges get corrected within 2 time steps.

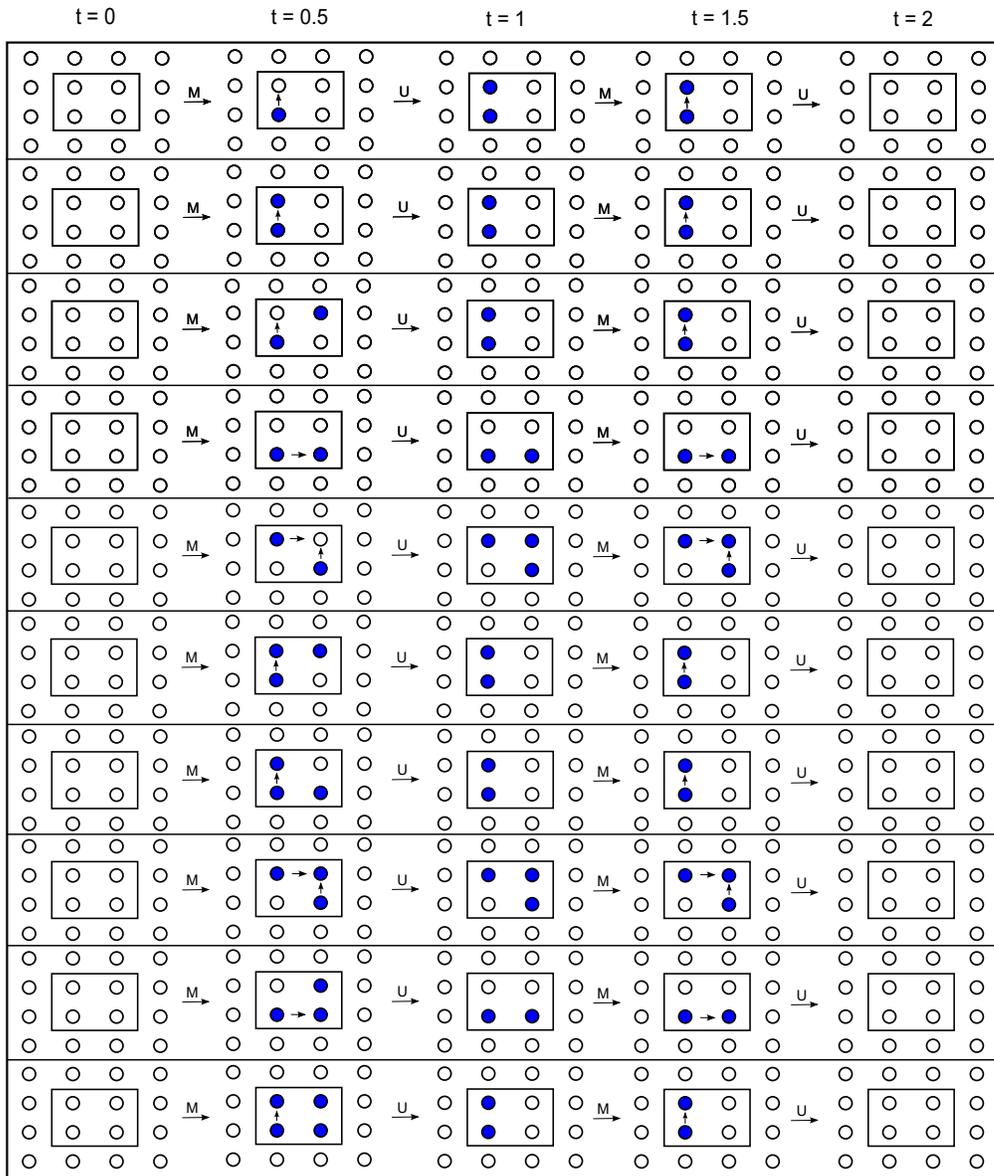


Figure 9: Actual level-0 measurement errors get corrected within 2 time steps. Again, the precise charges measured do not matter here.

The case where a level-0 error lies within 2 colonies is handled slightly differently. All possible such errors lying on the West border of a colony are shown below, and they all get corrected within 2 time steps. By rotational symmetry, the same holds for errors lying on the South border as well.

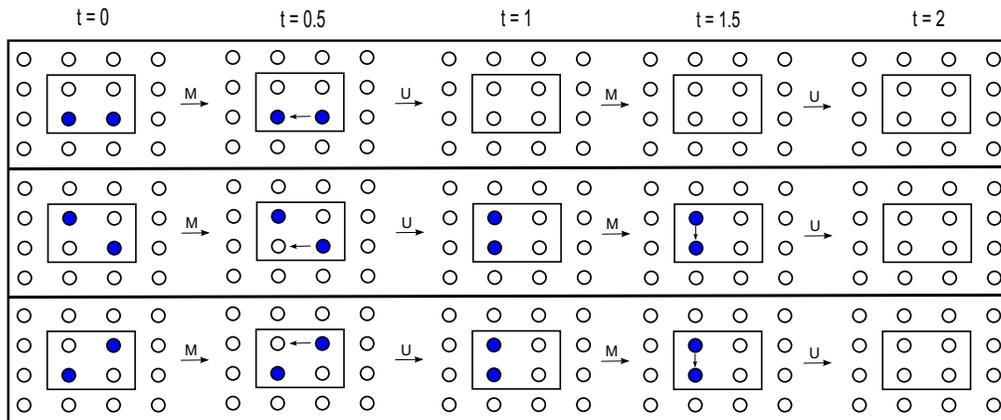


Figure 10: Actual level-0 charge errors lying on the West border get corrected within 2 time steps.

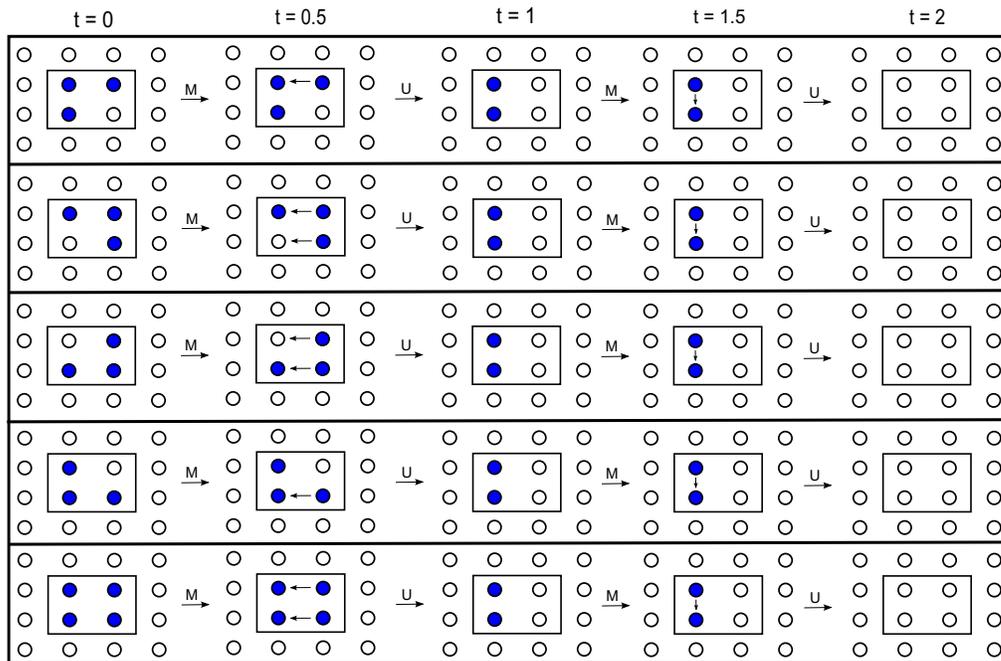


Figure 11: Actual level-0 charge errors lying on the West border of a colony get corrected within 2 time steps.

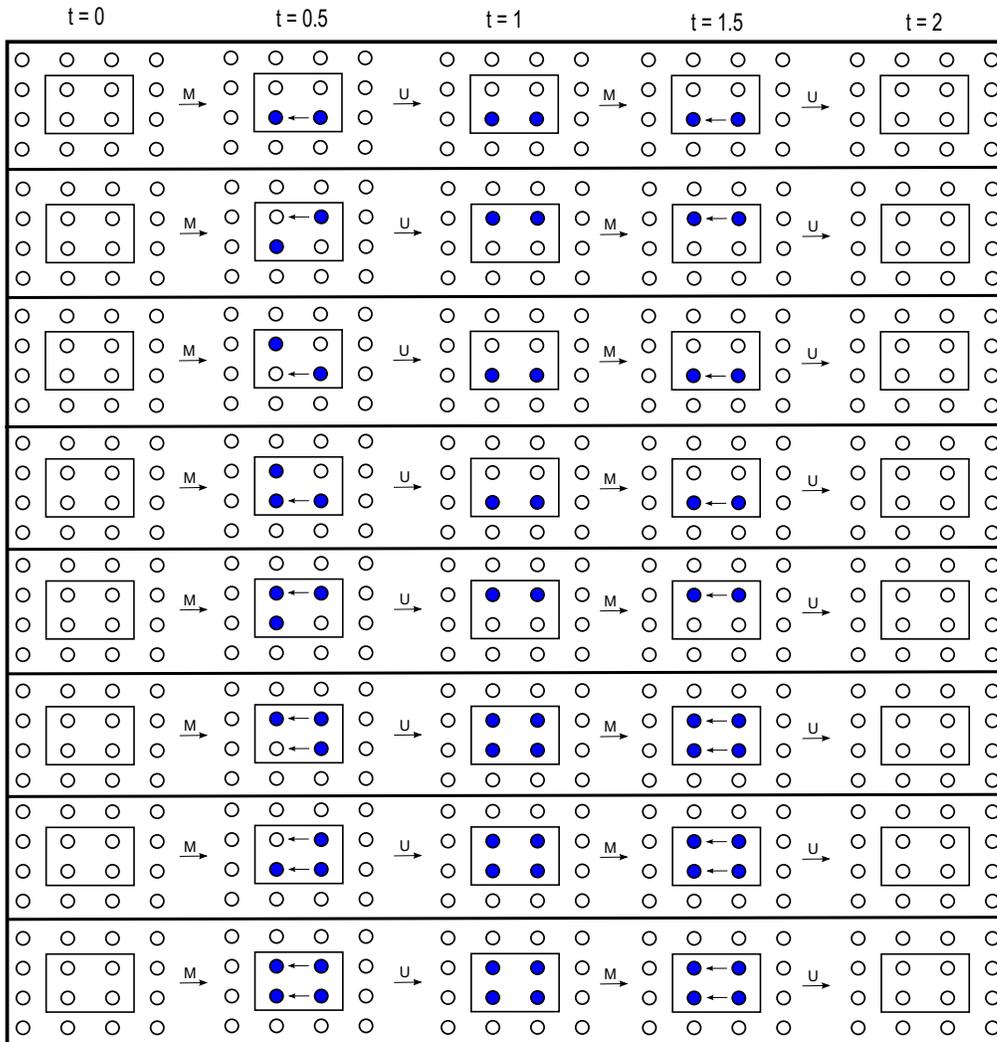


Figure 12: Actual level-0 measurement errors lying on the West border of a colony get corrected within 2 time steps.