VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Hľadanie koreňov komplexných funkcií

On locating clusters of zeros of analytic functions

2016

Erika Straková

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Erika Straková**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika

Téma: Hledání kořenů komplexních funkcí
On Locating Clusters Of Zeros Of Analytic Functions

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Práce bude zaměřena na hledání (komplexních) kořenů (ležících ve vnitřku jisté Jordanovy křivky) analytických funkcí.
Výsledky bude možné později použít na hledání vlastních čísel matic.
Pro zdárné pochopení tématu si student bude muset - kromě jiného - osvojit teorii komplexních funkcí komplexní proměnné - a to především teorii reziduí.

Seznam doporučené odborné literatury:

P. Kravanja, T. Sakurai, M. Van Barel: On Locating Clusters Of Zeros Of Analytic Functions
L.M. Delves, J.N. Lyness: A Numerical Method for Locating the Zeros of an Analytic Function

dále dle pokynů vedoucího práce

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2015
Datum odevzdání: 29.04.2016

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Fakulta elektrotechniky a informatiky

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne. Uviedla som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpala.

V Ostrave 28. apríla 2016 ....Straková..........

Rada by som sa poďakovala vedúcemu práce, Mgr. Petrovi Vodstrčilovi, Ph.D. za ochotu, čas venovaný konzultáciám a cenné rady pri tvorbe tejto práce. Taktiež by som sa rada poďakovala doc. Ing. Daliborovi Lukášovi, Ph.D za rady a poskytnutie potrebnej literatúry.

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá hľadaním koreňov holomorfných funkcií. V prvej časti práce pripomenieme niektoré pojmy z komplexnej analýzy, ktoré budú v práci často používané. Potom sa zameriame na známe vety z komplexnej analýzy, týkajúce sa koreňov holomorfných funkcií. Z týchto viet bude v druhej časti práce dôležitý dôsledok Reziduovej vety. Prvá časť práce taktiež obsahuje niektoré dôkazy Základnej vety algebry. Druhá časť práce popisuje metódy hľadania koreňov holomorfných funkcií - metódu Newtonových súm a metódu založenú na formálnych ortogonálnych polynómoch.

Kľúčové slová: korene holomorfnej funkcie, reziduum, Reziduová veta, Základná veta algebry, Newtonove sumy, formálny ortogonálny polynóm

Abstract

This thesis deals with the locating zeros of holomorfic functions. In the first part of thesis some concepts of complex analysis are mentioned, which will be frequently used in this thesis. Then, we devote to known theorems of complex analysis relating to zeros of holomorfic functions. From these theorems will be important the consequence of Residue theorem, but it will be shown in the second part of thesis. The first part of thesis also contains some proofs of Fundamental theorem of algebra. The second part of thesis describes methods for locating zeros of analytic functions - method of Newton sums and method based on formal orthogonal polynomials.

Keywords: zeros of holomorfic function, residue, Residue theorem, Fundamental theorem of algebra, Newton sums, formal orthogonal polynomial

Obsah

1 Úvod

Táto práca je zameraná na hľadanie koreňov analytickej (holomorfnej) funkcie, ktoré ležia vo vnútri istej krivky.
Prvá kapitola obsahuje prehľad pojmov z komplexnej analýzy, ktoré sú potrebné pre formuláciu ďalších viet, ktoré sú obsiahnuté v ďalších kapitolách. Druhá kapitola je venovaná vlastnostiam koreňov komplexných funkcií. Obsahuje známe vety spolu z dôkazmi z komplexnej analýzy, ktoré častokrát v reálnom obore neplatia. Na dôsledkoch známej Reziduovej vety sú potom založené metódy hľadania koreňov komplexných funkcii, popísané v posledných dvoch kapitolách. Tretia kapitola obsahuje dôkazy Základnej vety algebry, využívajúce tvrdenia z predchádzajúcej kapitoly.
Posledné dve kapitoly predstavujú metódy hľadania koreňov holomorných funkcií vo vnútri danej krivky. Prvá metóda je založená na Newtonových vzorcoch, ktoré využívajú súčty mocnín všetkých koreňov vo vnútri uvažovanej krivky. Druhá metóda je založená na formálnych ortogonálnych polynómoch. Tieto polynómy sú istým spôsobom kolmé na všetky polynómy nižšieho stupňa. Korene formálneho ortogonálneho polynómu stupňa n, kde n je počet navzájom rôznych koreňov uvažovanej funkcie f vo vnútri danej krivky, budú potom rovnaké ako korene f.
Posledné dve kapitoly obsahujú tiež numerické výsledky a porovnanie oboch metód.

2 Prehľad pojmov z komplexnej analýzy

Predtým, ako začneme rozoberať problematiku hľadania koreňov analytických (holomorfných) funkcií, pripomeňme si niektoré zo základných pojmov či viet z komplexnej analýzy. Omnoho viac nájdeme v [1].

Definícia 2.1. *Množinu* $\mathbb{C}_\infty$ *definujeme*

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Poznámka 2.2. Existuje vzájomne jednoznačný vzťah medzi bodmi $\mathbb{R}^2$ a bodmi $\mathbb{C}$:

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy.$$

Definícia 2.3. ***Okolím bodu*** $z_0 \in \mathbb{C}$ *resp.* ∞ *s polomerom* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *budeme rozumieť množinu*

$$U(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

resp. množinu

$$U(\infty, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}.$$

Prstencovým okolím bodu $z \in \mathbb{C}_\infty$ *s polomerom* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *rozumieme množinu*

$$P(z, \varepsilon) := U(z, \varepsilon) \setminus \{z\}.$$

Pokiaľ nezáleží na konkrétnej hodnote ε*, píšeme* $U(z)$ *resp.* $P(z)$*.*

Definícia 2.4. ***(Hromadný bod)***
Nech $M \subset \mathbb{C}_\infty$*. Bod* $z \in \mathbb{C}_\infty$ *nazveme* ***hromadným bodom*** *množiny* M*, pokiaľ v každom jeho okolí leží nekonečne mnoho bodov množiny* M*.*

Poznámka 2.5. Pripomeňme, že $z \in \mathbb{C}_\infty$ je hromadným bodom množiny $M \subset \mathbb{C}_\infty$ práve vtedy keď existuje postupnosť (z_n) v $M \setminus \{z\}$ taká, že $z_n \to z$.

Definícia 2.6. *Nech* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*. Funkciu*

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ resp. } v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definovanú predpisom

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy) \text{ resp. } v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$$

nazývame ***reálnou*** *resp.* ***imaginárnou*** *časťou funkcie* f*.*
Skutočnosť, že u *resp.* v *je reálnou resp. imaginárnou časťou funkcie* f *budeme zapisovať symbolom*

$$f = u + iv.$$

Definícia 2.7. *Hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ má v bode $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ limitu $a \in \mathbb{C}_\infty$ a píšeme $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a$, pokiaľ platí implikácia*

$$z_0 \neq z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to a$$

(to znamená, že pre každú postupnosť (z_n) takú, že $z_0 \neq z_n \to z_0$, platí, že $f(z_n) \to a$).

Definícia 2.8. *Hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ je spojitá v bode $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, pokiaľ platí*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na množine $M \subset \mathbb{C}_\infty$, pokiaľ platí pre každé $z_0 \in M$ implikácia

$$\left.\begin{array}{c} z_n \to z_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : z_n \in M \end{array}\right\} \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0).$$

Hovoríme, že funkcia f je spojitá, pokiaľ je spojitá na svojom definičnom obore.

Definícia 2.9. *Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_\infty$ má v bode $t_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{C}_\infty$ a píšme $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = a$, pokiaľ platí*

$$t_0 \neq t_n \to t_0 \ (v\ \mathbb{R}) \ \Rightarrow f(t_n) \to a.$$

Funkcia f je spojitá v bode $t_0 \in \mathbb{R}$, pokiaľ platí

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0).$$

Funkcia f je spojitá na množine $M \subset \mathbb{R}$, pokiaľ pre každé $t_0 \in M$ platí

$$\left.\begin{array}{c} t_n \to t_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} :\ t_n \in M \end{array}\right\} \Rightarrow f(t_n) \to f(t_0).$$

Funkcia f je spojitá, pokiaľ je spojitá na svojom definičnom obore.

Definícia 2.10. ***Krivka*** *v $\mathbb{C}_\infty$ (resp. v $\mathbb{C}$) je spojitá komplexná funkcia reálnej premennej*

$$\gamma : I \to \mathbb{C}_\infty \quad (\textit{resp.}\ \gamma : I \to \mathbb{C}),$$

kde $I = D_\gamma \subset \mathbb{R}$ je interval. Množinu

$$\langle\gamma\rangle := \gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{C}_\infty$$

nazývame ***geometrickým obrazom*** *krivky γ. (Poznamenajme, že rôzne krivky môžu mať rovnaké geometrické obrazy).*

Krivku $\gamma : I \to \mathbb{C}_\infty$ nazývame

- ***jednoduchou****, pokiaľ γ je prosté na I*
- ***uzatvorenou****, pokiaľ $I = \langle a, b\rangle$ $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$ a naviac $\gamma(a) = \gamma(b)$,*

- ***jednoduchou uzatvorenou***, *pokiaľ* $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}_\infty$ *je uzatvorená a platí*

$$\forall t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle : [0 < |t_1 - t_2| < b - a \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)].$$

Pokiaľ $I = \langle a, b\rangle$*, bod* $\gamma(a)$ *nazývame počiatočným bodom a bod* $\gamma(b)$ *nazývame koncovým bodom krivky* γ*.*

Krivku opačne orientovanú *ku krivke* $\gamma : I \to \mathbb{C}_\infty$ *rozumieme krivku*

$$-\gamma : J \to \mathbb{C}_\infty, \quad \textit{kde } J = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\} \quad \textit{a} \quad (-\gamma)(t) := \gamma(-t).$$

Poznámka 2.11. Krivku $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ môžme písať v tvare

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2,$$

kde $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definícia 2.12. *Deriváciou krivky* γ *v intervale* $\langle a, b\rangle$ *rozumieme funkciu* $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ *definovanú predpisom*

$$g(t) = \begin{cases} \gamma'_+(a) = (\gamma_1)'_+(a) + i(\gamma_2)'_+(a), & t = a; \\ \gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t), & t \in (a, b); \\ \gamma'_-(b) = (\gamma_1)'_-(b) + i(\gamma_2)'_-(b), & t = b. \end{cases}$$

Pokiaľ je takto definovaná derivácia spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$*, hovoríme, že krivka* γ *je* ***regulárna****. Krivka* γ *sa nazýva* ***po častiach regulárna****, pokiaľ existuje delenie*

$$D : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

intervalu $\langle a, b\rangle$ *také, že pre každé* $i \in \{1, ..., n\}$ *je krivka*

$$\psi_i := \gamma|_{\langle t_{i-1}, t_i\rangle}$$

regulárna.

Poznámka 2.13. Dĺžkou krivky $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ budeme rozumieť $\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Dohoda 2.14. Pokiaľ nebude povedané inak, ďalej v texte pojem krivka bude znamenať vždy po častiach regulárna krivka.

Definícia 2.15.

- ***Uzáver množiny*** $M \subset \mathbb{C}_\infty$ *je množina*

$$\overline{M} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \textit{ existuje postupnosť } (z_n) \subset M \textit{ taká, že } z_n \to z\}.$$

- *Množiny* $A, B \subset \mathbb{C}_\infty$ *nazývame* ***oddelenými****, pokiaľ platí*

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

- *Množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$ sa nazýva **súvislá**, pokiaľ ju nejde napísať ako zjednotenie dvoch neprázdnych oddelených množín. Tzn.*

$$\left.\begin{array}{c} M = A \cup B \\ \overline{A} \cap B = \emptyset,\ A \cap \overline{B} = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow [A = \emptyset \vee B = \emptyset].$$

Definícia 2.16. *Množina $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ sa nazýva **oblasť**, pokiaľ súčasne platí*

(i) Ω je otvorená množina (tzn. s každým bodom obsahuje aj okolie tohoto bodu),

(ii) Ω je súvislá množina (v prípade otvorenej množiny to znamená, že každé dva body v Ω je možno spojiť krivkou v Ω).

Definícia 2.17. *Nech $M \subset \mathbb{C}_\infty$. Množinu $K \subset M$ nazývame **komponentou množiny** M, pokiaľ súčasne platí*

(i) K je súvislá množina,

(ii) pokiaľ $\widetilde{K} \subset M$ je súvislá množina taká, že $K \subset \widetilde{K}$, potom $K = \widetilde{K}$.

Definícia 2.18. *Oblasť $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ taká, že množina $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ má práve n rôznych komponent, sa nazýva n-**násobne súvislá oblasť**. V prípade $n = 1$, sa oblasť Ω nazýva **jednoducho súvislá oblasť**.*

Definícia 2.19. *Nech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*
Deriváciu funkcie f v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme ako

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

ak existuje limita vpravo a je konečná.
*Hovoríme, že funkcia f je **holomorfná na otvorenej množine** $\Omega \subset \mathbb{C}$, ak $f'(z)$ existuje pre každé $z \in \Omega$.*
*Hovoríme, že funkcia f je **holomorfná v bode** $z_0 \in \mathbb{C}$, ak je holomorfná na nejakom okolí bodu z_0.*

Poznámka 2.20. Existencia derivácie funkcie f v nejakom bode z_0 nie je to isté ako holomorfnosť funkcie f v bode z_0. Napríklad funkcia $f(z) = |z|^2$ má deriváciu v bode $z_0 = 0$ (má deriváciu len v bode $z_0 = 0$), ale nie je v bode z_0 holomorfná.

Veta 2.21. *Funkcia $f = u + iv$ má v bode $z_0 = x_0 + iy_0$ deriváciu práve vtedy, pokiaľ platia nasledujúce podmienky:*

(i) u a v sú diferencovateľné v bode (x_0, y_0),

*(ii) u a v splňujú v bode (x_0, y_0) **Cauchy-Riemannove podmienky**:*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Pokiaľ $f'(z_0)$ existuje, potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Veta 2.22. *Nech $f = u + iv$ je holomorfná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Potom pre všetky $(x, y) \in \Omega$ platí:*

(i) *u a v majú v bode (x, y) spojité všetky parciálne derivácie až do druhého rádu vrátane,*

(ii)

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} =: \Delta v(x, y).$$

(Pokiaľ funkcie u, v splňujú vyššie uvedené podmienky, budeme hovoriť, že u, v sú harmonické na Ω.)

Definícia 2.23. *Nech funkcia f je holomorfná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a nech $p \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že z_0 je* ***p-násobným koreňom funkce*** *f, ak platí*

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = ... = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(p)}(z_0).$$

Príklad 2.24. Majme funkciu f definovanú predpisom

$$f(z) = z - \sin z.$$

Bod $z_0 = 0$ je $3-$násobný koreň funkcie f, pretože $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ a $f'''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$.

Veta 2.25. ***(Jordanova)***
Nech γ je jednoduchá uzatvorená krivka v $\mathbb{C}$. Potom

$$\mathbb{C}_\infty \setminus \langle\gamma\rangle = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde Ω_1 a Ω_2 sú dve disjunktné, neprázdne a jednoducho súvislé oblasti, ktorých spoločnou hranicou je $\langle\gamma\rangle$.

Tú z oblastí Ω_1, Ω_2, ktorá neobsahuje ∞, budeme nazývať ***vnútrom krivky*** *γ a budeme značiť $\operatorname{int}\gamma$, a tú, ktorá obsahuje ∞, budeme nazývať* ***vonkajšok krivky*** *γ a budeme značiť $\operatorname{ext}\gamma$.*

Definícia 2.26. *Nech funkcia $f = u+iv : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$. Potom definujeme*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t :\overset{\text{def.}}{=} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 2.27. Predchádzajúca definícia funguje aj pre po častiach spojitú funkciu f.

Definícia 2.28. ***(Krivkový integrál)***
Nech $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ je krivka a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle\gamma\rangle$. ***Integrál z funkcie f pozdĺž krivky*** *γ definujeme rovnosťou*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z :\overset{\text{def.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Veta 2.29. *Nech $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ je krivka a nech funkcia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle\gamma\rangle$. Platí:*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \text{dĺžka}(\gamma) \max_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)|.$$

Dôkaz.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{\max_{z\in\langle\gamma\rangle}|f(z)|}_{\text{konst.}}\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \max_{z\in\langle\gamma\rangle}|f(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{\text{dĺžka }(\gamma)} = \max_{z\in\langle\gamma\rangle}|f(z)|\,\text{dĺžka}(\gamma).$$

□

Poznámka 2.30. V dôkaze predchádzajúcej vety 2.29 využívame skutočnosť, že pokiaľ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, potom platí

$$\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Pre $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nerovnosť (2.1) dobre známa. Ukážeme si, že nerovnosť (2.1) platí aj pre $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Definujme $I := \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}$. Potom platí

$$|I|^2 = I \cdot \overline{I} = \overline{I}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \overline{I}g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re}\left(\overline{I}g\,(t)\right)\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \int_a^b |\overline{I}g(t)| = \int_a^b |\overline{I}|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t = |\overline{I}|\int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t = |I|\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t,$$

z čoho plynie dokazovaná nerovnosť.

Veta 2.31. ***(Cauchyho integrálne vzorce)***
Nech γ je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka v $\mathbb{C}$ a nech funkcia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná na $\Omega = \operatorname{int}\gamma$ a spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\gamma\rangle$. Potom pre každé $z_0 \in \Omega$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z.$$

Naviac, pokiaľ je $n \in \mathbb{N}$, existuje $f^{(n)}(z_0)$ pre každé $z_0 \in \Omega$ a platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

Definícia 2.32. ***Mocninnou radou o strede*** *$z_0 \in \mathbb{C}$ nazývame funkční radu v tvare*

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

kde $a_0, a_1, a_2, ...$ sú komplexné čísla.

Veta 2.33. ***(O rozvoji holomorfnej funkcie do Taylorovej rady)***
Nech funkcia f je holomorfná na okolí $U(z_0, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.
Potom existuje práve jedna mocninná rada (Taylorova rada) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tak, že pre každé $z \in U(z_0, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Pokiaľ je ρ také ľubovoľné reálne číslo, že $0 < \rho < R$, potom pre koeficienty Taylorovho rozvoja funkcie f platí, že

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \rho \, \mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Definícia 2.34. ***Laurentovou radou o strede*** *$z_0 \in \mathbb{C}$ nazývame radu v tvare*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \tag{2.2}$$

kde $..., a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, ...$ sú komplexné čísla (koeficienty Laurentovej rady).
Mocninnú radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

budeme nazývať ***regulárnou časťou Laurentovej rady*** (2.2) *a funkčnú radu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

hlavnou časťou Laurentovej rady (2.2).
Laurentova rada (2.2) ***konverguje na množine*** *$\Omega \subset \mathbb{C}$, pokiaľ konverguje na Ω jej regulárna aj hlavná časť. V takom prípade potom funkciu f definovanú na Ω predpisom $f(z) := f_1(z) + f_2(z)$, kde f_1 resp. f_2 je súčtom regulárnej resp. hlavnej časti Laurentovej rady* (2.2)*, nazývame* ***súčtom Laurentovej rady*** (2.2).

Veta 2.35. ***(O rozvoji holomorfnej funkcie do Laurentovej rady)***
Nech je funkcia f holomorfná na medzikruží $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$.
Potom existuje práve jedna Laurentova rada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tak, že pre každé $z \in P(z_0, r, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Pokiaľ je ρ také ľubovoľné reálne číslo, že $r < \rho < R$, potom pre koeficienty Laurentovho rozvoja funkcie f platí, že

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \rho \, \mathrm{e}^{it}, \; t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Definícia 2.36. ***Izolovanou singularitou funkcie*** *f nazveme taký bod $z_0 \in \mathbb{C}$, pre ktorý sú splnené podmienky:*

- *funkcia f nie je holomorfná v bode z_0,*
- *existuje prstencové okolí $P(z_0)$, kde je funkcia f holomorfná.*

Pokiaľ je bod z_0 izolovanou singularitou funkcie f, existuje kladné reálne číslo R také, že f je holomorfná na $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$ a preto funkciu f u na tomto okolí rozvinúť do Laurentovej rady (viď vetu 2.35). To znamená, že pre všetky $z \in P(z_0, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Podľa počtu nenulových koeficientov Laurentovej rady rozlišujeme 3 typy singularít:

(1) v prípade, že všetky koeficienty hlavnej časti Laurentovej rady sú nulové (tzn. $\forall n \in \mathbb{N} : a_{-n} = 0$), bod z_0 nazveme ***odstrániteľnou singularitou funkcie*** *f,*

(2) v prípade, že existuje aspoň jeden ale najviac konečne mnoho nenulových koeficientov hlavnej časti Laurentovej rady (tzn. existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-n} \neq 0$ a pre každé $k \in \mathbb{N}, k > n$, je $a_{-k} = 0$), bod z_0 nazveme ***pólom (násobnosti n) funkcie*** *f (pól násobnosti 1 nazývame tiež jednoduchý pól),*

(3) v prípade, že existuje nekonečne mnoho nenulových koeficientov hlavnej časti Laurentovej rady, bod z_0 nazveme ***podstatnou singularitou funkcie*** *f.*

Veta 2.37. *Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkcie f. Potom platí:*

(i) z_0 je odstraniteľnou singularitou funkcie f práve vtedy, keď

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C},$$

(ii) *z_0 je pólom funkcie f (resp. pólom násobnosti n funkcie f) práve vtedy, keď*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

$$\Big(\text{resp. keď } \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)] \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\Big),$$

(iii) *z_0 je podstatnou singularitou funkcie f práve vtedy, keď $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.*

Definícia 2.38. *Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita funkcie f a*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Laurenov rozvoj funkcie f na nejakom prstencovom okolí bodu z_0. Číslo a_{-1} nazveme reziduum funkcie f v bode z_0 a označujeme $\operatorname{res} f(z_0)$, resp. $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

Poznámka 2.39. Pre a_{-1} koeficient Laurentovho rozvoja funkcie f podľa vety 2.35 platí

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Veta 2.40. *Platí:*

(i) *Ak je funkcia f holomorfná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkcia g má v bode z_0 jednoduchý pól, potom*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\,(f(z)g(z)) = f(z_0)\operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

(ii) *Ak je bod $z_0 \in \mathbb{C}$ pólom násobnosti k funkcie f, potom*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left(f(z)\,(z-z_0)^k\right)\right).$$

(iii) *Ak sú funkcie f, g holomorfné v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a ak je bod z_0 jednonásobným koreňom funkcie g, potom*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Poznámka 2.41. Špeciálne, ak je $z_0 \in \mathbb{C}$ jednoduchý pól funkcie f, potom z vety 2.40 (ii) plynie

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\,(f(z)(z-z_0)).$$

Veta 2.42. ***(Reziduová)***
Nech γ je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je holomorfná v $\operatorname{int}\gamma\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$ a spojitá v $\overline{\operatorname{int}\gamma}\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$ a nech body $z_1,\dots,z_n \in \operatorname{int}\gamma$ sú navzájom rôzne izolované singularity funkcie f. Potom platí:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z_i).$$

3 Vlastnosti koreňov komplexných funkcií

Veta 3.1. *(O jednoznačnosti holomorfnej funkcie)*
Nech $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblasť, f a g sú funkcie holomorfné na Ω a $G \subset \Omega$ je taká množina, ktorá má hromadný bod v oblasti Ω. Nech $f(z) = g(z)$ pre všetky $z \in G$. Potom $f(z) = g(z)$ pre všetky $z \in \Omega$.

Dôkaz. Označme

$$h \overset{\text{ozn.}}{:=} f - g.$$

Potom $h(z) = 0$ pre všetky $z \in G$. Označme

$$H \overset{\text{ozn.}}{:=} \{z \in \Omega : h(z) = 0\} \supset G,$$

$$\widetilde{H} \overset{\text{ozn.}}{:=} \{z \in \Omega : z \text{ je hromadný bod množiny } H\}.$$

Z predpokladov vety je zrejme $\widetilde{H}$ neprázdna. Taktiež platí, že $\widetilde{H} \subset H$. Pretože pokiaľ $x \in \widetilde{H}$, potom existuje postupnosť $(x_n) \in H \setminus \{x\}$ tak, že $x_n \to x$. Zo spojitosti funkcie h potom plynie, že $0 = h(x_n) \to h(x)$, teda $h(x) = 0$, preto $x \in H$.

Dokážeme, že množina $\widetilde{H}$ je uzatvorená v Ω, tzn. platí

$$\big((x_n) \subset \widetilde{H} \wedge x_n \to x \in \Omega\big) \Rightarrow x \in \widetilde{H},$$

a zároveň otvorená, tzn. platí

$$(\forall z_0 \in \widetilde{H})(\exists U(z_0)) : U(z_0) \subset \widetilde{H}.$$

- **uzatvorenosť**
  Nech $(x_n) \subset \widetilde{H}$, $x_n \to x \in \Omega$ a zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Z definície konvergencie postupnosti (x_n) k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje bod x_{n_0} tak, že $x_{n_0} \in U\big(x, \frac{\varepsilon}{2}\big)$.
  Bod x_{n_0} je hromadný bod množiny H. Z definície hromadného bodu plynie, že $U\big(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2}\big)$ obsahuje nekonečne mnoho bodov z množiny H.
  Keďže platí
  $$U\Big(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2}\Big) \subset U(x, \varepsilon),$$
  taktiež množina $U(x, \varepsilon)$ musí obsahovať nekonečne mnoho bodov množiny H. Vzhľadom k tomu, že $\varepsilon > 0$ je zvolené ľubovoľne, v každom okolí bodu x leží nekonečne mnoho bodov množiny H. Preto je x hromadný bod H, tzn. $x \in \widetilde{H}$.

- **otvorenosť**
  Pokiaľ $z_0 \in \widetilde{H}$ a $U_1(z_0) \subset \Omega$, potom podľa vety 2.33 pre všetky $z \in U_1(z_0)$ platí
  $$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Ukážeme, že $h \equiv 0$ na $U_1(z_0)$.
Sporom predpokladajme, že $h \not\equiv 0$ na $U_1(z_0)$. Potom musí existovať $p \in \mathbb{N}$ tak, že $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1} = 0$ a $a_p \neq 0$ (z_0 bude $p-$ násobný koreň funkcie h), tzn.

$$h(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^p \varphi(z),$$

kde

$$\varphi(z) :\overset{\text{def.}}{=} \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-p}$$

je holomorfná a nenulová v bode z_0. Odtiaľ plynie, že existuje $U_2(z_0)$ také, že $\varphi(z) \neq 0$ pre všetky $z \in U_2(z_0)$. Preto pre všetky $z \in U_2(z_0) \setminus \{z_0\}$ je h nenulová. To je spor, pretože $z_0 \in \widetilde{H}$. Preto $h(z) = 0$ pre všetky $z \in U_1(z_0)$. Z toho vyplýva, že $U_1(z_0) \subset \widetilde{H}$.

Označme

$$A :\overset{\text{ozn.}}{=} \widetilde{H},$$
$$B :\overset{\text{ozn.}}{=} \Omega \setminus \widetilde{H}.$$

Keďže $\Omega = A \cup B$ je oblasť (teda súvislá množina), množiny A a B nemôžu byť oddelené a zároveň neprázdne.
Dokážeme, že A, B sú oddelené množiny, tzn. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ a zároveň $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

- $\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} = \emptyset$
  Sporom predpokladajme, že existuje x tak, že $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in B$. Pokiaľ $x \in \overline{A}$, potom musí existovať postupnosť $(x_n) \subset A = \widetilde{H}$ tak, že $x_n \to x \in B \subset \Omega$. Pretože množina $\widetilde{H}$ je uzatvorená v Ω, platí že $x \in \widetilde{H}$. To je spor s tým, že $x \in B = \Omega \setminus \widetilde{H}$. Preto $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

- $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} = \emptyset$
  Taktiež sporom predpokladajme, že existuje x tak, že $x \in A$ a zároveň $x \in \overline{B}$. Pokiaľ $x \in A = \widetilde{H}$, potom pretože $\widetilde{H}$ je otvorená, existuje $U(x)$, také že $U(x) \subset \widetilde{H}$. Pokiaľ $x \in \overline{B}$, potom musí existovať postupnosť $(x_n) \subset B = \Omega \setminus \widetilde{H}$ taká, že $x_n \to x$. To je spor s tým, že $U(x) \subset \widetilde{H}$. Preto $A \cap \overline{B} = \emptyset$, teda množiny A, B sú oddelené.

Keďže $A = \widetilde{H}$ je neprázdna, potom musí platiť $B = \Omega \setminus \widetilde{H} = \emptyset$. To však znamená, že $\Omega = \widetilde{H}$. Platí

$$\Omega = \widetilde{H} \subset H \subset \Omega.$$

Teda, $\Omega = H$, čím je veta dokázaná. □

Veta 3.2. *Nech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná v oblasti Ω a $f \not\equiv 0$ v Ω. Nech existuje $z_0 \in \Omega$ tak, že $f(z_0) = 0$. Potom existuje $r \in \mathbb{R}^+$ také, že*

$$\left(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}\right) : f(z) \neq 0.$$

Dôkaz. Bod z_0 nie hromadným bodom množiny $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, pretože pokiaľ by to hromadný bod bol, z vety o jednoznačnosti 3.1 by funkcia f bola nulová na Ω. Preto musí existovať $d \in \mathbb{R}^+$ také, že

$$\left(\forall z \in U(z_0, d) \setminus \{z_0\}\right) : f(z) \neq 0.$$

Pokiaľ zvolíme $r \in (0, d)$ dostaneme tvrdenie vety. □

Veta 3.3. *Nech Ω je oblasť, f je holomorfná na Ω, $K \subset \Omega$ je kompaktná množina a nech $f \not\equiv 0$ na Ω. Potom má funkcia f na množine K konečný počet koreňov.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že množina

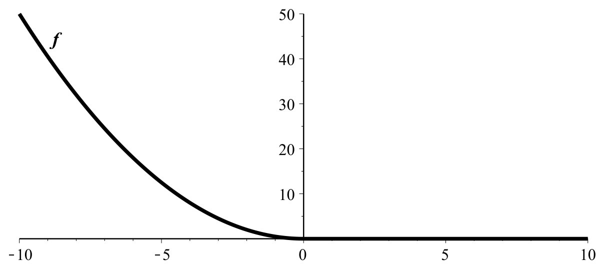
$$\{z \in K : f(z) = 0\} \overset{\text{ozn.}}{=}: \widetilde{K}$$

je nekonečná. Potom množina $\widetilde{K}$ má hromadný bod v množine $K \subset \Omega$ (každá nekonečná podmnožina kompaktu K má v K hromadný bod). Z vety 3.1 plynie, že $f(z) = 0$ pre všetky $z \in \Omega$, čo je spor, pretože $f \not\equiv 0$ na Ω. Množina $\widetilde{K}$ musí byť preto konečná. □

Poznámka 3.4. V reálnom obore predchádzajúca veta 3.3 neplatí. Napríklad pre funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \leq 0; \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

(viď obr. 3.1), existuje $f'(x)$ na celom $\mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$ na $\mathbb{R}$ a na kompakte $\langle 2, 3\rangle \subset \mathbb{R}$ má nekonečný počet koreňov.



Obr. 3.1: Funkcia f, ktorá ma na kompakte nekonečný počet koreňov

Veta 3.5. ***(Princíp argumentu)***
Nech $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť, γ je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka ležiaca v Ω a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná v Ω s výnimkou konečne mnoho pólov. Nech $s_1, ..., s_m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sú všetky navzájom rôzne body ležiace v $\operatorname{int}\gamma$, v ktorých má funkcia f pól a $\beta_1, ..., \beta_m$ sú príslušné násobnosti k týmto pólom. Nech $z_1, .., z_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sú všetky navzájom rôzne korene funkcie f ležiace v $\operatorname{int}\gamma$ a $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sú ich príslušné násobnosti. Ďalej nech pre všetky body $z \in \langle\gamma\rangle$ platí, že funkcia f je nenulová v týchto bodoch a ani nemá v týchto bodoch pól.

Potom platí:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=1}^{m}\beta_i. \tag{3.1}$$

(Výraz na pravej strane rovnosti (3.1) *znamená počet koreňov mínus počet pólov vrátane násobností funkcie f v $\operatorname{int}\gamma$.)*

Dôkaz. Keďže pre $i \in \{1, ..., n\}$ je α_i násobnosť koreňa z_i a funkcia f je holomorfná v bode z_i, existuje $U(z_i)$ také, že pre všetky $z \in U(z_i)$ platí:

$$f(z) = \sum_{n=\alpha_i}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_i)}{n!}(z-z_i)^n = (z-z_i)^{\alpha_i}\varphi(z), \tag{3.2}$$

kde

$$\varphi(z) :\overset{\text{def.}}{=} \sum_{n=\alpha_i}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_i)}{n!}(z-z_i)^{n-\alpha_i}$$

je nenulová a holomorfná na okolí $U(z_i)$.
Keďže pre $i \in \{1, ..., m\}$ je β_i násobnosť pólu s_i, existuje $P(s_i)$ také, že pre všetky $z \in P(s_i)$ platí:

$$f(z) = \sum_{n=-\beta_i}^{\infty} a_n(z-s_i)^n = \frac{1}{(z-s_i)^{\beta_i}}\theta(z), \tag{3.3}$$

kde

$$\theta(z) :\overset{\text{def.}}{=} \sum_{n=-\beta_i}^{\infty} a_n(z-s_i)^{n+\beta_i}$$

je nenulová a holomorfná na okolí $U(s_i)$.
Keďže $z_1, ..., z_n$ a $s_1, ..., s_m$ sú izolované singularity funkcie $\frac{f'(z)}{f(z)}$ a jediné body v $\operatorname{int}\gamma$ v ktorých nie je funkcia $\frac{f'(z)}{f(z)}$ holomorfná, podľa vety 2.42 platí:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}2\pi i\left(\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) + \sum_{i=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=s_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\right).$$

Pre funkciu $\frac{f'(z)}{f(z)}$ na $P(z_i)$ po dosadení (3.2) platí:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_i(z-z_i)^{\alpha_i-1}\varphi(z) + (z-z_i)^{\alpha_i}\varphi'(z)}{(z-z_i)^{\alpha_i}\varphi(z)} = \frac{\alpha_i}{z-z_i} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

z čoho plyne, že
$$\lim_{z\to z_i}\left((z-z_i)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=\alpha_i\neq 0,$$
a preto podľa 2.37 (ii) je bod z_i jednoduchý pól funkcie $\frac{f'(z)}{f(z)}$.
Pre jednoduchý pól z_i funkcie $\frac{f'(z)}{f(z)}$ podľa 2.41 platí
$$\operatorname*{res}_{z=z_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=\lim_{z\to z_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\,(z-z_i)\right)=\alpha_i.$$
Pre funkciu $\frac{f'(z)}{f(z)}$ na $P(s_i)$ po dosadení (3.3) platí:
$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-\beta_i(z-s_i)^{-\beta_i-1}\theta(z)+(z-s_i)^{-\beta_i}\theta'(z)}{(z-s_i)^{-\beta_i}\theta(z)}=\frac{-\beta_i}{z-s_i}+\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}.$$
Bod s_i je jednoduchý pól funkcie $\frac{f'(z)}{f(z)}$ a platí
$$\operatorname*{res}_{z=s_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=\lim_{z\to s_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\,(z-s_i)\right)=-\beta_i.$$
Tým sme dokázali, že
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i=1}^{m}\beta_i.$$
□

Veta 3.6. *Nech $\Omega\subset\mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť, γ je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka ležiaca v Ω a $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je holomorfná v Ω taká, že $f(z)\neq 0$ pre všetky $z\in\langle\gamma\rangle$. Nech $z_1,\dots,z_n, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ sú všetky navzájom rôzne korene funkcie f ležiace v $\operatorname{int}\gamma$ (tzn. $f(z_i)=0$, kde $i\in\{1,\dots,n\}$) a $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sú ich príslušné násobnosti. Ďalej nech $\psi,\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ sú polynómy. Potom platí*
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi(z_i)\phi(z_i).$$

Dôkaz. Body $z_1,\dots,z_n$ sú izolované singularity funkcie $\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ a jediné body v $\operatorname{int}\gamma$ v ktorých nie je funkcia $\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ holomorfná, podľa vety 2.42 platí:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_i}\left(\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$
Keďže z_i je jednoduchý pól funkcie $\frac{f'(z)}{f(z)}$, platí (viď dôkaz vety 3.5)
$$\operatorname*{res}_{z=z_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=\alpha_i.$$

Funkcia $\psi(z)\phi(z)$ je holomorfná v bode z_i , preto podľa 2.40 (i) platí

$$\operatorname*{res}_{z=z_i}\left(\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \psi(z_i)\phi(z_i)\operatorname*{res}_{z=z_i}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \psi(z_i)\phi(z_i)\alpha_i.$$

Tým sme dokázali, že

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi(z_i)\phi(z_i).$$

□

Poznámka 3.7. Pre $\psi(z) = 1$ a $\phi(z) = 1$ z vety 3.6 vyplýva, že počet koreňov (vrátane ich násobností) holomorfnej funkcie f, ktoré ležia vo vnútri krivky γ (ktorá má predpoklady z vety 3.6) sa dá vyjadriť ako

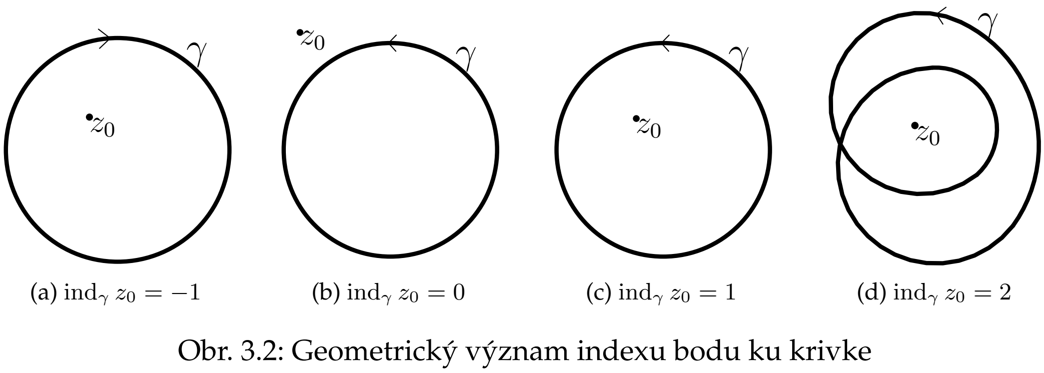
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Definícia 3.8. ***(Index bodu ku krivke)***
Nech γ je uzatvorená krivka v $\mathbb{C}$ a bod $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle\gamma\rangle$. Číslo

$$\operatorname{ind}_\gamma z_0 :\overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

*sa nazýva **index bodu** z_0 ku krivke γ.*

Index bodu je definovaný pre každý bod, ktorý neleží na $\langle\gamma\rangle$ a udáva koľkokrát krivka γ „obehne“ v kladnom zmysle bod z_0.



(a) $\operatorname{ind}_\gamma z_0 = -1$ (b) $\operatorname{ind}_\gamma z_0 = 0$ (c) $\operatorname{ind}_\gamma z_0 = 1$ (d) $\operatorname{ind}_\gamma z_0 = 2$

Obr. 3.2: Geometrický význam indexu bodu ku krivke

Všimnime si, ako súvisí index bodu ku krivke s vetou 3.5. Pokiaľ sú splnené predpoklady vety 3.5, potom

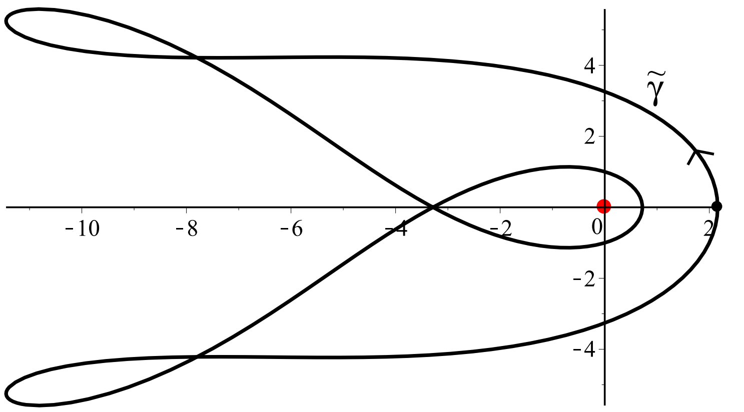
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = K - P,$$

kde K je počet koreňov vrátane násobností a P je počet pólov vrátane násobností funkcie f, ležiacich vo vnútri krivky $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$. Z využitím definície krivkového integrálu 2.28 a definície indexu bodu ku krivke 3.8 platí:

$$K - P = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\widetilde{\gamma}'(t)}{\widetilde{\gamma}(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{ind}_{\widetilde{\gamma}}\, 0,$$

kde $\widetilde{\gamma} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$, $\widetilde{\gamma}(t) :\overset{\text{def.}}{=} f(\gamma(t))$.
Vyššie definovaná krivka $\widetilde{\gamma}$ „obehne“ v kladnom zmysle bod 0 $(K-P)-$krát.

Príklad 3.9. Nech $f(z) = \frac{(z-1)^2(z+1)^3 z}{(z^2+1)^2}$ a $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{2\pi i t},\ t \in \langle 0, 1\rangle$. Potom f má v $\mathrm{int}\,\gamma$ 6 koreňov (2-násobný koreň 1, 3-násobný koreň -1 a jednonásobný koreň 0) a 4 póly (2-násobný pól i a 2-násobný pól $-i$). Preto krivka $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ bod 0 obehne 2-krát ako je vidieť na obrázku 3.3.



Obr. 3.3: Geometrický význam princípu argumentu

Veta 3.10. ***(Rouchèova veta)***
Nech $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť, γ je jednoduchá uzatvorená krivka v Ω a funkcie f, g sú holomorfné v Ω. Nech platí

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{pre všetky } z \in \langle\gamma\rangle.$$

Potom funkcia $f + g$ a funkcia f majú v $\mathrm{int}\,\gamma$ rovnaký počet koreňov vrátane násobností.

Dôkaz. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že γ je naviac kladne orientovaná. Keďže funkcie f, g sú holomorfné na Ω (derivácie f', g' sú tiež na Ω holomorfné), potom funkcie $|f(z)| - |g(z)|$ a $|f(z)g'(z) - f'(z)g(z)|$ sú spojité na $\langle\gamma\rangle$. Keďže $\langle\gamma\rangle$ je kompaktná množina, potom musí existovať

$$\begin{aligned} \min_{z\in\langle\gamma\rangle}(|f(z)| - |g(z)|) &\overset{\text{ozn.}}{=} m, \\ \max_{z\in\langle\gamma\rangle}(|f(z)g'(z) - f'(z)g(z)|) &\overset{\text{ozn.}}{=} M. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Z predpokladov vety plynie, že $m > 0$.
Pre $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ definujme

$$f_\lambda(z) :\stackrel{\text{def.}}{=} f(z) + \lambda g(z).$$

Keďže pre $z \in \langle\gamma\rangle$ platí:

$$|f(z) + \lambda g(z)| \geq |f(z)| - \lambda|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| \geq m > 0, \tag{3.5}$$

funkcia f_λ je nenulová na $\langle\gamma\rangle$.
Definujme $K : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ predpisom

$$K(\lambda) :\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z)}\,\mathrm{d}z.$$

K je vzhľadom k (3.5) definovaná korektne. Ukážeme, že K je spojitá na $\langle 0, 1\rangle$.
Z využitím existencie m a M (viď (3.4)), z využitím nerovnosti (3.5) a vety 2.29, pre všetky $\lambda, \mu \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$|K(\lambda) - K(\mu)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \left| \int_\gamma \frac{(\lambda - \mu)\,(f(z)g'(z) - f'(z)g(z))}{(f(z) + \lambda g(z))\,(f(z) + \mu g(z))}\,\mathrm{d}z \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\text{dĺžka}(\gamma)}_{\text{konst.}} \max_{z\in\langle\gamma\rangle} \frac{|\lambda - \mu||f(z)g'(z) - f'(z)g(z)|}{|f(z) + \lambda g(z)||f(z) + \mu g(z)|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\text{dĺžka}(\gamma)}_{\text{konst.}} |\lambda - \mu| \underbrace{\frac{M}{m^2}}_{\text{konst.}} = \text{konst.}\,|\lambda - \mu|.$$

Pokiaľ $|\lambda_n - \lambda_0| \to 0$, potom $|K(\lambda_n) - K(\lambda_0)| \leq konst.\,|\lambda_n - \lambda_0| \to 0$. To znamená, že K je spojitá na $\langle 0, 1\rangle$. (K je dokonca na $\langle 0, 1\rangle$ lipschitzovsky spojitá.)
K zároveň nadobúda na intervale $\langle 0, 1\rangle$ len celočíselných hodnôt (jej hodnoty sú počty koreňov funkcie f_λ vo vnútri krivky γ, viď poznámku 3.7). Musí byť teda na intervale $\langle 0, 1\rangle$ konštantná. Preto $K(0) = K(1)$, čo znamená, že počet koreňov vo vnútri krivky γ funkcie $f_0 = f$ je rovnaký ako počet koreňov funkcie $f_1 = f + g$. □

Veta 3.11. *Nech Ω je jednoducho súvislá oblasť, γ je jednoduchá uzatvorená krivka ležiaca v Ω, funkcia f je holomorfná v Ω a bod $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$. Nech platí*

$$\min_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)| > |f(z_0)|. \tag{3.6}$$

Potom existuje $z \in \operatorname{int}\gamma$ tak, že $f(z) = 0$.

Dôkaz. Pre všetky $z \in \langle\gamma\rangle$ platí

$$|f(z)| \geq \min_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)| > |f(z_0)|.$$

Definujme konštantnú funkciu $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ predpisom

$$g(z) :\overset{\text{def.}}{=} -f(z_0).$$

Potom pre všetky $z \in \langle\gamma\rangle$ platí

$$|f(z)| > |g(z)|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie f a $f + g = f - f(z_0)$ majú v $\operatorname{int}\gamma$ rovnaký počet koreňov. Keďže $f - f(z_0)$ má v $\operatorname{int}\gamma$ koreň z_0, funkcia f musí mať v $\operatorname{int}\gamma$ tiež koreň. $\square$

Príklad 3.12. Nech $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$ pre $t \in \langle 0, 1\rangle$, $z_0 = 0$ a $f(z) = z^5 + 4z + 1 + i$. Potom $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$ a pre všetky $z \in \langle\gamma\rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ platí

$$|f(z)| = |z^5 + 4z + 1 + i| \geq |4z| - |z^5 + 1 + i| \geq 4|z| - |z|^5 - |1 + i| = 3 - \sqrt{2} > \sqrt{2} = |f(0)|,$$

čím je splnená nerovnosť (3.6). Musí preto existovať koreň f ležiaci v $\operatorname{int}\gamma$. Funkcia f má koreň v bode $z \doteq -0.250996 - 0.250996i \in \operatorname{int}\gamma$.

Veta 3.13. ***(O otvorenom zobrazení holomorfnej funkcie)***
Nech funkcia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je nekonštantná a holomorfná v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Potom f je otvorené zobrazenie z Ω do $\mathbb{C}$. Tzn. pokiaľ množina $G \subset \Omega$ je otvorená, potom množina $f(G) = \{f(z) : z \in G\}$ je taktiež otvorená.

Dôkaz. Pokiaľ by mala byť množina $f(G)$ otvorená, potom musí pre každé $w_0 \in f(G)$ existovať $\delta \in \mathbb{R}^+$ tak, že $U(w_0, \delta) \subset f(G)$.
Ak $w_0 \in f(G)$, potom existuje bod $z_0 \in G$ taký, že $f(z_0) = w_0$. Z vety 3.2 (aplikujeme ju na funkciu $f - w_0$) a otvorenosti G plynie, že existuje $r \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a naviac

$$\big(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}\big) : f(z) \neq w_0. \tag{3.7}$$

Označme množinu

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Zrejme platí (vďaka (3.7))

$$\delta :\overset{\text{def.}}{=} \min_{z \in M} |f(z) - w_0| > 0.$$

Zvoľme $u \in U(w_0, \delta)$ ľubovoľne. Potom pre všetky $z \in M$ platí

$$|w_0 - u| < \delta = \min_{z \in M} |f(z) - w_0| \leq |f(z) - w_0|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie $f - w_0$ a $f - w_0 + w_0 - u = f - u$ majú na množine $U(z_0, r)$ rovnaký počet koreňov. Keďže $f - w_0 = f - f(z_0)$ má koreň v z_0, funkcia $f - u$ bude mať tiež koreň v bode $\widetilde{z} \in U(z_0, r) \subset G$. To ale znamená, že $f(\widetilde{z}) = u$, odkiaľ $u \in f(G)$. $\square$

Poznámka 3.14. V reálnom obore predchádzajúca veta neplatí. Napríklad pre funkciu $f(x) = \sin(x)$, existuje $f'(x)$ na celom $\mathbb{R}$ a taktiež je f nekonštantná na $\mathbb{R}$. Množina $(0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ je otvorená, pričom obraz $f\big((0, 2\pi)\big) = \langle -1, 1\rangle$ je uzatvorená množina.

Veta 3.15. ***(Princíp maxima modulu)***
Nech $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblasť a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná a nekonštantná v Ω. Potom funkcia $|f|$ nenadobúda v Ω lokálneho maxima.

Dôkaz. Sporom budeme predpokladať, že $|f|$ nadobúda v Ω lokálneho maxima v bode $c \in \Omega$. Potom musí existovať $U(c) \subset \Omega$ tak, že

$$|f(z)| \leq |f(c)| \text{ pre } z \in U(c).$$

Potom

$$f\big(U(c)\big) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(c)|\} =: W.$$

Dokážeme, že množina $f\big(U(c)\big)$ nie je otvorená a to tak, že dokážeme, že pre $f(c) \in f\big(U(c)\big)$ a ľubovoľné $\delta \in \mathbb{R}^+$, množina $U\big(f(c), \delta\big)$ nie je podmnožinou množiny $f\big(U(c)\big)$.
Zvoľme $\delta > 0$ ľubovoľne a zvoľme bod x

$$x = \begin{cases} f(c) + \frac{\delta}{2}, & \text{pokiaľ } \operatorname{Re} f(c) \geq 0; \\ f(c) - \frac{\delta}{2}, & \text{pokiaľ } \operatorname{Re} f(c) < 0. \end{cases}$$

Bod x určite patrí do množiny $U\big(f(c), \delta\big)$, ale nepatrí do množiny W ($|x| > |f(c)|$) a teda ani do množiny $f\big(U(c)\big)$ z čoho plynie, že $f\big(U(c)\big)$ nie je otvorená. Podľa vety 3.13 musí byť funkcia f konštantná v Ω, čo je spor z predpokladmi vety. $\square$

Poznámka 3.16. Veta 3.15 v reálnom obore neplatí. Majme funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom $f(x) := \sin x$. Pre všetky $x \in (0, \pi)$ existuje $f'(x)$ a f je nekonštantná na $(0, \pi)$. V bode $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ má $|f|$ lokálne maximum.

Poznámka 3.17. Pokiaľ sú splnené predpoklady vety 3.15, f nenadobúda v Ω ani globálneho maxima.

Veta 3.18. *Nech $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblasť a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná a nekonštantná v Ω. Potom funkcia* $\operatorname{Re} f$ $\big($*resp.* $\operatorname{Im} f\big)$ *nenadobúda v Ω lokálneho maxima.*

Dôkaz. Definujme $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ prepisom

$$h(z) = \operatorname{Re} f(z).$$

$$\big(\text{resp. } h(z) = \operatorname{Im} f(z)\big).$$

Sporom budeme predpokladať, že h nadobúda v Ω lokálneho maxima v bode $c \in \Omega$. Potom musí existovať $U(c) \subset \Omega$ tak, že

$$h(z) \leq h(c) \text{ pre } z \in U(c).$$

Potom

$$f\big(U(c)\big) \subset \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq h(c)\} =: W.$$

$$\Big(\text{resp. } f\big(U(c)\big) \subset \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \leq h(c)\} =: W.\Big)$$

Dokážeme, že množina $f\big(U(c)\big)$ nie je otvorená a to tak, že dokážeme, že pre $f(c) \in f\big(U(c)\big)$ a ľubovoľné $\delta \in \mathbb{R}^+$ množina $U\big(f(c), \delta\big)$ nie je podmnožinou množiny $f\big(U(c)\big)$.
Zvoľme $\delta > 0$ ľubovoľne a zvoľme bod $x = f(c) + \frac{\delta}{2}$. $\Big($resp. $x = f(c) + \frac{\delta}{2}i.\Big)$
Bod x určite patrí do množiny $U\big(f(c), \delta\big)$, ale nepatrí do množiny W a teda ani do množiny $f\big(U(c)\big)$ z čoho plynie, že $f\big(U(c)\big)$ nie je otvorená. Podľa vety 3.13 musí byť funkcia f konštantná v Ω, čo je spor z predpokladmi vety. □

Poznámka 3.19. Dá sa ukázať, že pokiaľ sú splnené predpoklady vety 3.18, funkcia $\mathrm{Re}\, f$ (resp. $\mathrm{Im}\, f$) nenadobúda v Ω ani lokálneho minima (stačí aplikovať tvrdenie vety 3.18 na funkciu $-f$).

Veta 3.20. ***(O lokálnej inverzii)***
Nech f je holomorfná v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nech existuje $z_0 \in \Omega$ tak, že $f'(z_0) \neq 0$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f je prostá na $U(z_0, \varepsilon)$.

Dôkaz. Keďže funkcia $f - f(z_0)$ je holomorfná v Ω, nulová v bode z_0 a kôli nenulovej derivácii funkcie f v bode z_0 je $f - f(z_0) \not\equiv 0$ na Ω, z vety 3.2 a z otvorenosti Ω plynie, že existuje $r \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\overline{U(z_0, r)} \subset \Omega$ a

$$\big(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}\big) : f(z) \neq f(z_0). \tag{3.8}$$

Označme množinu

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Zrejme platí (vďaka (3.8))

$$\delta \overset{\text{def.}}{:=} \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

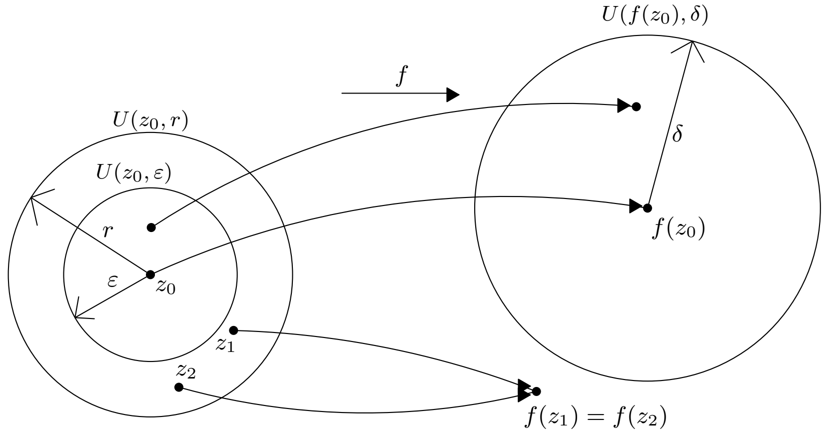
Zvoľme $u \in U\big(f(z_0), \delta\big)$ ľubovoľne. Potom pre všetky $z \in M$ platí

$$|f(z_0) - u| < \delta = \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie $f - f(z_0)$ a $f - f(z_0) + f(z_0) - u = f - u$ majú na množine $U(z_0, r)$ rovnaký počet koreňov. Keďže $f - f(z_0)$ má jednonásobný koreň v z_0 (násobnosť koreňa z_0 plynie z predpokladu, že $f'(z_0) \neq 0$) a zároveň funkcia $f - f(z_0)$ nemá v $U(z_0, r)$ žiadne iné korene(viď (3.8)), funkcia $f - u$ bude mať v $U(z_0, r)$ práve jediný koreň. Teda

$$\Big(\forall u \in U\big(f(z_0), \delta\big)\Big)\Big(\exists! z \in U(z_0, r)\Big) : f(z) = u. \tag{3.9}$$

To ešte ale neznamená, že f je prostá na $U(z_0, r)$. Môže nastať situácia, že pre $z_1, z_2 \in U(z_0, r), z_1 \neq z_2$ je $f(z_1) = f(z_2) \notin U\big(f(z_0), \delta\big)$, ako je vidieť na obrázku 3.4.



Obr. 3.4: Dôkaz vety 3.20, funkcia f nie je prostá na $U(z_0, r)$

Zo spojitosti funkcie f v bode z_0 plynie, že existuje $\varepsilon > 0$ také, že $U(z_0, \varepsilon) \subset U(z_0, r)$ a naviac

$$\big(\forall u \in U(z_0, \varepsilon)\big) : f(z) \in U\big(f(z_0), \delta\big). \tag{3.10}$$

Z (3.9) a (3.10) už plynie, že f je na $U(z_0, \varepsilon)$ prostá. □

Poznámka 3.21. V reálnom obore predchádzajúca veta neplatí. Majme funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom

$$f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Potom

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 1 + 2x \sin \frac{1}{x} = 1 \neq 0$$

a $f'(x)$ existuje pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
Nech $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, tak že $0 \in (a, b)$ a zvoľme $k \in \mathbb{N}$ tak dostatočne veľké, že $\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{(2k+1)\pi} \in (a, b)$.
Keďže $f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = 3$ a $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = -1$, potom musí existovať $\varepsilon \in \left(\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right)$ tak, že

$$f(\varepsilon) = \max_{x \in \left\langle \frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi} \right\rangle} f(x).$$

Zrejme $f\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ a $f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \frac{1}{2k\pi}$. Preto zo spojitosti f musí existovať $\delta \in \left(\frac{1}{(2k+1)\pi}, \varepsilon\right)$ tak, že $f(\delta) = f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \frac{1}{2k\pi}$.

Pre f teda platí, že $f'(0) \neq 0$ a f nie je prostá na žiadnom intervale (a, b) takom, že $0 \in (a, b)$.

Veta 3.22. *Nech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfná a prostá v oblasti Ω. Potom $f'(z) \neq 0$ pre všetky $z \in \Omega$.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že existuje $z_0 \in \Omega$ taký, že $f'(z_0) = 0$.
Keďže funkcia $f - f(z_0)$ je holomorfná v Ω, nulová v bode z_0 a $f - f(z_0) \not\equiv 0$ na Ω (plynie z toho, že f je na Ω prostá), podľa vety 3.2 existuje $r_1 \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\overline{U(z_0, r_1)} \subset \Omega$ a

$$\big(\forall z \in \overline{U(z_0, r_1)} \setminus \{z_0\}\big) : f(z) \neq f(z_0).$$

Funkcia f' je taktiež holomorfná v Ω, nulová v z_0 a $f' \not\equiv 0$ na Ω (f je prostá na Ω), preto podla vety 3.2 existuje $r_2 \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\overline{U(z_0, r_2)} \subset \Omega$ a

$$\big(\forall z \in \overline{U(z_0, r_2)} \setminus \{z_0\}\big) : f'(z) \neq 0.$$

Nech $r = \min\{r_1, r_2\}$. Potom

$$\big(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}\big) : \big[f(z) \neq f(z_0) \wedge f'(z) \neq 0\big]. \tag{3.11}$$

Označme množinu

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Zrejme platí

$$\delta \overset{\text{def.}}{:=} \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

Zvoľme $u \in P\big(f(z_0), \delta\big)$ ľubovoľne. Potom pre všetky $z \in M$ platí

$$|f(z_0) - u| < \delta = \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie $f - f(z_0)$ a $f - f(z_0) + f(z_0) - u = f - u$ majú na množine $U(z_0, r)$ rovnaký počet koreňov. Keďže $f - f(z_0)$ má koreň v z_0, ktorého násobnosť je minimálne 2 (násobnosť koreňa z_0 plynie z predpokladu, že $f'(z_0) = 0$), funkcia $f - u$ bude mať v $U(z_0, r)$ minimálne 2 rôzne korene (pokiaľ má $f - u$ v $U(z_0, r)$ koreň, bude to vzhľadom k (3.11) jednonásobný koreň).
To znamená, že pokiaľ $u \in P\big(f(z_0), \delta\big)$, potom existuje $z_1 \in U(z_0, r)$ tak, že $f(z_1) = u$ a zároveň existuje $z_2 \in U(z_0, r)$ tak, že $z_2 \neq z_1$ a $f(z_2) = u$. To však znamená, že f nie je prostá v Ω, čo je spor z predpokladom vety. Preto pre všetky $z \in \Omega$ musí byť $f'(z) \neq 0$. □

Poznámka 3.23. V reálnom obore veta 3.22 neplatí. Napríklad funkcia $f(x) = x^3$ je na $\mathbb{R}$ prostá a pre všetky $x \in \mathbb{R}$ existuje $f'(x)$. Ale neplatí, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) \neq 0$ (v bode $x_0 = 0$ je $f'(x_0) = 0$).

4 Základná veta algebry

Na začiatku tejto kapitoly uveďme niektoré pomocné vety a lemmy, ktoré budú užitočné pri dôkazoch Základnej vety algebry.

Veta 4.1. ***(Liouvillova)***
Nech f je holomorfná a ohraničená na $\mathbb{C}$ (existuje kladná reálna konštanta M tak, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je $|f(z)| \leq M$). Potom je f konštantná na $\mathbb{C}$.

Dôkaz. Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné. Z vety 2.31 plynie, že pre každé $\rho \in (0, +\infty)$ je

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \rho \, \mathrm{e}^{it}, \; t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Potom z využitím vety 2.29 a z využitím ohraničenosti f (pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je $|f(z)| \leq M$) platí

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\max_{z \in \langle \gamma \rangle} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right|}_{\leq \frac{M}{\rho^2}} 2\pi\rho \leq \frac{M}{\rho} \to 0, \quad \text{pre } \rho \to \infty.$$

Preto $f'(z_0) = 0$. Pretože z_0 bolo zvolené ľubovoľne, znamená to, že f je na $\mathbb{C}$ konštantná. □

Lemma 4.2. *Nech f je holomorfná v oblasti Ω. Potom platí*

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2.$$

Dôkaz. Položme $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Potom

$$|f(x + iy)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y).$$

Spočítame druhé parciálne derivácie $|f|^2$:

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

podobne

$$\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Keďže f je na Ω holomorfná, z využitím vety 2.22 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\right)$ platí

$$\Delta(|f|^2) = \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2. \tag{4.1}$$

Z vety 2.21 platí

$$|f'|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Dosadením do 4.1 dostaneme

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2.$$

$\square$

Lemma 4.3. *Nech pre* $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *existuje* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *tak, že* $\frac{\partial^2 w(x_0,y_0)}{\partial x^2}$ *a* $\frac{\partial^2 w(x_0,y_0)}{\partial y^2}$ *existujú a zároveň nech platí*

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} w(x,y) = w(x_0,y_0).$$

Potom platí

$$\Delta w(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 w(x_0,y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x_0,y_0)}{\partial y^2} \le 0.$$

Dôkaz. Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \overset{\text{def.}}{=} w(x, y_0)$ nadobúda maxima v bode x_0. Preto $\frac{\partial^2 w(x_0,y_0)}{\partial x^2} \le 0$.
Taktiež $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) \overset{\text{def.}}{=} w(x_0, y)$ nadobúda maxima v bode y_0. Preto $\frac{\partial^2 w(x_0,y_0)}{\partial y^2} \le 0$, čím je lemma dokázaná. $\square$

Lemma 4.4. *Každý polynóm stupňa* $n \in \mathbb{N}$ *má v* $\mathbb{C}$ *maximálne* n *rôznych koreňov.*

Dôkaz. Označme

$$p_n(z) \overset{\text{ozn.}}{=}: a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$.
Dôkaz vykonáme pomocou indukcie.
Pre $n = 1$ je

$$p_1(z) = a_1 z + a_0,$$

z čoho plynie, že p_1 má jediný koreň v bode $z_0 = \frac{-a_0}{a_1}$. Teda veta pre $n = 1$ platí.
Prepokladajme, že polynóm stupňa n má maximálne n koreňov. Potom polynóm stupňa $n + 1$,

$$p_{n+1}(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$$

nemá žiadny koreň (čím je veta dokázaná) alebo má koreň v nejakom bode z_0. V tomto prípade pre polynóm p_{n+1} platí

$$p_{n+1}(z) = (z - z_0) q_n(z),$$

kde q_n je polynóm stupňa n.
Keďže predpokladáme, že $q_n(z)$ má v $\mathbb{C}$ maximálne n koreňov, polynóm p_{n+1} musí mať v $\mathbb{C}$ maximálne $n + 1$ koreňov. Tým je veta dokázaná. $\square$

Veta 4.5. ***(Základná veta algebry)***
Každý polynóm kladného stupňa má v $\mathbb{C}$ *aspoň jeden koreň. Tzn. pre každú funkciu* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definovanú predpisom*

$$p(z) :\stackrel{\text{def.}}{=} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$, *existuje* $z \in \mathbb{C}$ *tak, že* $p(z) = 0$.

Dôkaz 1. Budeme predpokladať sporom, že p nemá v $\mathbb{C}$ žiadny koreň.
Definujme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ predpisom

$$f(z) :\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{p(z)}. \tag{4.2}$$

Funkcia f je holomorfná na $\mathbb{C}$ $\left(\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) = -\frac{p'(z)}{p^2(z)}\right)$. Keďže

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + ... + a_0\frac{1}{z^n}\right)} = 0,$$

pre $K_1 > 0$ existuje $P(\infty)$ tak, že pre všetky $z \in P(\infty)$ je $|f(z)| \leq K_1$. Množina $\mathbb{C} \setminus P(\infty)$ je kompaktná množina a f je spojitá, preto musí existovať $K_2 > 0$ tak, že pre všetky $z \in \mathbb{C} \setminus P(\infty)$ je $|f(z)| \leq K_2$.
Preto pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je $|f(z)| \leq \max\{K_1, K_2\}$, čo znamená, že f je na $\mathbb{C}$ ohraničená. Podľa vety 4.1 musí byť funkcia f (taktiež i p) na $\mathbb{C}$ konštantná, čo je spor s definíciou f a nekonštantnosťou p.

$\square$

Dôkaz 2. Sporom budeme znova predpokladať, že p nemá žiadny komplexný koreň. Funkcia $f = \frac{1}{p}$ je holomorfná v $\mathbb{C}$. Pre $R \in \mathbb{R}^+$ definujme integrál

$$I_R \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z}\, \mathrm{d}z,$$

kde $\gamma_R : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{C}, \gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{2\pi i t}$.
Jedinou izolovanou singularitou funkcie $\frac{f(z)}{z}$ v $\operatorname{int}\gamma_R$ je bod 0. Z využitím reziduovej vety 2.42 a vety 2.40 (iii) platí

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{\frac{1}{p(z)}}{z}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \left(\frac{\frac{1}{p(z)}}{z}\right) = 2\pi i \frac{1}{p(0)},$$

potom $|I_R| = \frac{2\pi}{|p(0)|}$, čo je nejaké kladné číslo, ktoré nezávisí na R.
Taktiež platí (z využitím vety 2.29)

$$|I_R| \leq \underbrace{\text{dĺžka}(\gamma_R)}_{konst.=2\pi R} \max_{z\in\langle\gamma_R\rangle} \frac{1}{|zp(z)|} = 2\pi R \frac{1}{R} \max_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|} =$$

$$= 2\pi \max_{|z|=R} \frac{1}{|z^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right|} \to 0 \quad \text{pre } R \to \infty.$$

Teda pre $R \to \infty$ je $|I_R| \to 0$ a zároveň $|I_R| \to \frac{2\pi}{|p(0)|}$, čo je spor. Preto musí mať polynóm kladného stupňa v $\mathbb{C}$ aspoň jeden koreň.

□

Dôkaz 3. [10] Predpokladajme sporom, že p nemá žiadny komplexný koreň. Funkcia $f = \frac{1}{p}$ je holomorfná v $\mathbb{C}$. Definujme funkciu $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ predpisom

$$w(x, y) :\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} |f(x + iy + k)|^2,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je stupeň polynómu p.

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|a_n(x + iy + k)^n + ... + a_0|^2} \to 0 \quad \text{pre } x + iy \to \infty,$$

a keďže $w(0, 0) > 0$, existuje $P(\infty)$ tak, že pre všetky $(x, y) \in P(\infty)$ platí

$$|w(x, y)| = w(x, y) < w(0, 0). \tag{4.3}$$

Množina $\mathbb{R}^2 \setminus P(\infty)$ je kompakt, preto existuje $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus P(\infty)$ také, že

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus P(\infty)} w(x, y) =: w(x_0, y_0).$$

Vzhľadom k (5.6) je

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} w(x, y) = w(x_0, y_0).$$

Z využitím lemmy 4.2 a 4.3 plynie

$$\Delta w(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{n} \Delta(|f(x_0 + iy_0 + k)|^2) = \sum_{k=1}^{n} 4|f'(x_0 + iy_0 + k)|^2 \leq 0.$$

Preto pre všetky $k \in \{1, ..., n\}$ musí platiť

$$f'(x_0 + iy_0 + k) = -\frac{p'(x_0 + iy_0 + k)}{p^2(x_0 + iy_0 + k)} = 0.$$

Polynóm p' bude mať stupeň $n - 1$ a n navzájom rôznych koreňov, čo je spor s lemmou 4.4. (Polynóm stupňa $n - 1$ môže mať maximálne $n - 1$ navzájom rôznych koreňov.)

□

Dôkaz 4. Definujme

$$f(z) :\stackrel{\text{def.}}{=} a_n z^n, \; g(z) :\stackrel{\text{def.}}{=} a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

Zrejme $p(z) = f(z) + g(z)$. Položme

$$\gamma(t) = R\mathrm{e}^{it} \quad \text{pre}\, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

kde R je tak dostatočne veľké, že

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{pre}\, |z| \geq R.$$

Také R existuje, pretože keďže

$$\lim_{z \to \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0,$$

existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(\forall z \in P(\infty, \delta)) : \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1.$$

Stačí teda zvoliť $R = \frac{1}{\tilde{\delta}}$, kde $0 < \tilde{\delta} < \delta$.
Keďže

$$|p(z)| = |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \quad \text{pre}\, |z| \geq R,$$

tak pokiaľ p má nejaký koreň, tak len vo vnútri krivky γ. Podľa vety 3.10 má funkcia $f + g = p$ a funkcia f rovnaký počet koreňov vo vnútri krivky γ. Počet koreňov f v $\operatorname{int} \gamma$ je práve n (f má n-násobný koreň 0) a polynóm p má korene len v $\operatorname{int} \gamma$, čo znamená, že p má v $\mathbb{C}$ práve n koreňov. Keďže n je kladné, p musí mať v $\mathbb{C}$ aspoň jeden koreň, čím je veta dokázaná (dokonca v silnejšej verzii, pretože viem i presný počet koreňov).

$\square$

5 Metóda Newtonových súm

5.1 Newtonove vzťahy

Nech f a γ spĺňajú predpoklady vety 3.6, $z_1, \cdots, z_n$ sú všetky navzájom rôzne korene f ležiace v $\operatorname{int}\gamma$ a $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sú ich príslušné násobnosti. Podľa vety 3.6 platí (stačí zvoliť $\psi(z) = 1$ a $\phi(z) = z^k$, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^k \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^k =: s_k. \tag{5.1}$$

Je zrejmé, že hodnota s_k, pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je súčet $k-$tých mocnín všetkých koreňov f ležiacich v $\operatorname{int}\gamma$. Počet koreňov (vrátane násobností) N zadanej funkcie f bude udávať hodnota s_0. Cieľom bude skonštruovať polynóm $P_N(z)$ stupňa N

$$P_N(z) \overset{\text{def.}}{=} z^N + \sigma_1 z^{n-1} + ... + \sigma_N, \tag{5.2}$$

ktorý má rovnaké korene (vrátane násobností) ako zadaná funkcia f vo vnútri danej krivky γ.
Medzi koeficientami polynómu $P_N(z)$ a súčtami $k-$tých mocnín koreňov polynómu platia Newtonovy vzťahy:

Veta 5.1. ***(Newtonove vzťahy)***
Nech $\sigma_1, ..., \sigma_N$ sú koeficienty polynómu (5.2)*, $s_k = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i z_i^k$, kde $k \in \{1, ..., N\}$ a $z_1, ..., z_n$ sú všetky navzájom rôzne korene polynómu* (5.2) *a α_i príslušné násobnosti. Potom platí*

$$\begin{gathered} s_1 + \sigma_1 = 0 \\ s_2 + s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0 \\ \vdots \\ s_N + s_{N-1}\sigma_1 + ... + s_1\sigma_{N-1} + N\sigma_N = 0. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Dôkaz. Viď [6]. □

Keďže chceme aby polynóm $P_N(z)$ mal rovnaké korene ako zadaná funkcia f vo vnútri krivky γ, podľa (5.1) bude pre s_k, kde $k \in \{1, ..., N\}$, platiť

$$s_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^k \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z. \tag{5.4}$$

Dosadením s_k do (5.3) a vyriešením vzniknutej sústavy dostaneme koeficienty $\sigma_1, ..., \sigma_N$ polynómu (5.2). Nájdením koreňov tohto polynómu dostaneme hľadané korene funkcie f vo vnútri γ.

Problém hľadania koreňov f v $\operatorname{int}\gamma$ pomocou metódy Newtonových súm je zvyčajne zle podmienený - to znamená, že pokiaľ v sústave (5.3) zmeníme známe hodnoty s_k, kde

$k \in \{1, ..., N\}$ veľmi málo, dostaneme veľké zmeny v koreňoch polynómu, ktorého koeficienty sú riešením takto zmenenej sústavy.
Napríklad pre nejakú funkciu f, ktorá má 10 jednonásobných koreňov

$$z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3, z_4 = 4, z_5 = 5, z_6 = 6, z_7 = 7, z_8 = 8, z_9 = 9, z_{10} = 10.$$

Pre s_k, $k \in 1, .., 10$ platí

$$s_1 = 55, s_2 = 385, s_3 = 3025, s_4 = 25333, s_5 = 220825, s_6 = 1978405,$$

$$s_7 = 18080425, s_8 = 167731333, s_9 = 1574304985, s_{10} = 14914341925.$$

Sústava (5.3) bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 8 & 0 & 0 \\ s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 9 & 0 \\ s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \\ \sigma_9 \\ \sigma_{10} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \end{bmatrix}.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme koeficienty polynómu $P_{10}(z)$ (viď (5.2)):

$$P_{10}(z) = z^{10} - 55z^9 + 1320z^8 - 18150z^7 + 157773z^6$$

$$-902055z^5 + 3416930z^4 - 8409500z^3 + 12753576z^2 - 10628640z + 3628800,$$

ktorého korene sú $z_i = i, i = 1, \cdots, 10$.
Zmeňme s_3 tak, že $s_3 = 3024.999$. Riešením takto zmenenej sústavy, dostaneme koeficienty polynómu stupňa 10, ktorý má korene

$$z_1 = 0.9947825715, z_2 = 2.036400896, z_3 = 2.901261805, z_4 = 4.239676379, z_5 = 4.722947806,$$

$$z_6 = 6.212115904, z_7 = 6.857684497, z_8 = 8.044887010, z_9 = 8.989170762, z_{10} = 10.00107237.$$

Keďže problém hľadania koreňov f metódou Newtonových súm je takto zle podmienený, v prípade, že f bude mať vnútri danej krivky veľa koreňov, budeme musieť integrály (5.4) aproximovať s veľkou presnosťou.

5.2 Numerická integrácia

Pre aproximáciu integrálov (5.4) použijeme **lichobežníkové pravidlo**.

Nech $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ je krivka a nech g je spojitá na $\langle\gamma\rangle$.
Zvoľme pre $n \in \mathbb{N}$ ekvidistantné delenie

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b.$$

Z využitím definície 2.28 a 2.26 platí

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \underbrace{g\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma'\left(t\right)}_{=:h(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re} h(t)}_{=:h_{Re}(t)}\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \underbrace{\operatorname{Im} h(t)}_{=:h_{Im}(t)}\,\mathrm{d}t \approx$$

$$\approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[\frac{h_{Re}(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h_{Re}(t_i) + \frac{h_{Re}(t_n)}{2}\right]}_{=:L_n(h_{Re};a,b)} + i\underbrace{\frac{b-a}{n}\left[\frac{h_{Im}(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h_{Im}(t_i) + \frac{h_{Im}(t_n)}{2}\right]}_{=:L_n(h_{Im};a,b)}$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[\frac{h(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h(t_i) + \frac{h(t_n)}{2}\right]}_{=:L_n(h;a,b)}.$$

Pripomeňme si vetu, ktorá sa týka od odhadu chyby lichobežníkového pravidla pre reálne funkcie.

Veta 5.2. *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Nech $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$ je ekvidistantné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme chybu lichobežníkového pravidla*

$$l_n(f; a, b) := \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + \frac{f(t_n)}{2}\right]}_{=:L_n(f;a,b)} - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Potom pre chybu lichobežníkového pravidla platí:

$$|l_n(f; a, b)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t\in\langle a,b\rangle} |f''(t)|.$$

Dôkaz. veď [12]. □

Pokiaľ g je holomorfná v každom bode z $\langle\gamma\rangle$ a $\gamma \in C^3(\langle a, b\rangle)$, potom pre $h_{Re} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (resp. $h_{Im} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$) platí, že $h_{Re} \in C^2\left(\langle a, b\rangle\right)$ (resp. $h_{Im} \in C^2\left(\langle a, b\rangle\right)$). Potom podľa vety 5.2 pre

$$l_n(h_{Re}; a, b) := L_n(h_{Re}; a, b) - \int_a^b h_{Re}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\text{resp. } l_n(h_{Im}; a, b) := L_n(h_{Im} - \int_a^b h_{Im}(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

platí

$$|l_n(h_{Re}; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Re}(t)|.$$

$$\left(\text{resp. } |l_n(h_{Im}; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Im}(t)\right).$$

Zrejme

$$\underbrace{|\, L_n(h; a, b) - \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\,|}_{=:l_n(h;a,b)} = |l_n(h_{Re}; a, b) + i\; l_n(h_{Im}; a, b)| \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(\frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Re}(t)|\right)^2 + \left(\frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Im}(t)|\right)^2} =$$

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\sqrt{\left(\max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Re}(t)|\right)^2 + \left(\max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Im}(t)|\right)^2}.$$

Zvoľme presnosť $\varepsilon_{pr} > 0$. Pokiaľ pre $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\sqrt{\left(\max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Re}(t)|\right)^2 + \left(\max_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Im}(t)|\right)^2} < \varepsilon_{pr},$$

to znamená, že platí

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3\sqrt{\left(\max\limits_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Re}(t)|\right)^2 + \left(\max\limits_{t\in\langle a,b\rangle} |h''_{Im}(t)|\right)^2}}{12\varepsilon_{pr}}}, \tag{5.5}$$

potom

$$|l_n(h; a, b)| < \varepsilon_{pr}.$$

Pre dosiahnutie požadovanej presnosti ε_{pr} je (5.5) len postačujúca podmienka. To znamená, že v skutočnosti môže nastať, že na dosiahnutie požadovanej presnosti ε_{pr} lichobežníkového pravidla, budeme potrebovať menej dielkov ako n určeným pomocou (5.5).

V tejto a v ďalšej kapitole budeme potrebovať aproximáciu integrálu

$$\int_\gamma \frac{1}{2\pi i}\phi(z)\psi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z, \tag{5.6}$$

kde f, γ splňujú predpoklady vety 3.6 a ψ, ϕ sú komplexné polynómy.
Pokiaľ hľadáme korene funkcie f vo vnútri kruhu s polomerom ρ a stredom c (tzn. $\gamma(t) = c + \rho e^{2\pi i t},\ t \in \langle 0, 1\rangle$), potom pre integrál (5.6) platí

$$\int_\gamma \frac{1}{2\pi i}\phi(z)\psi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \underbrace{\rho\phi(c+\rho e^{2\pi i t})\psi(c+\rho e^{2\pi i t})\frac{f'(c+\rho e^{2\pi i t})}{f(c+\rho e^{2\pi i t})}e^{2\pi i t}}_{=:h(t)}\,\mathrm{d}t \approx$$

$$\approx \underbrace{\frac{1}{n}\left[\frac{h(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{h(1)}{2}\right]}_{=:L_n(h;0,1)}.$$

Keďže $h : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{C}$ je periodická s periódou 1 (tzn. $h(0) = h(1)$) platí

$$L_n(h; 0, 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right).$$

Taktiež platí

$$L_{2n}(h; 0, 1) = \frac{1}{2}L_n(h; 0, 1) + \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{2i+1}{2n}\right).$$

To znamená, že postupným zdojnásobovaním dielkov využívame hodnoty použité v predchádzajúcom kroku. Začneme s $n = 1$ a n zdojnásobujeme dovtedy, kým $|L_{2n}(h; 0, 1) - L_n(h; 0, 1)| < \varepsilon_{int}$, kde ε_{int} je dostatočne malé.

Integrály (5.6) budeme aproximovať lichobežníkovým pravidlom. Pokiaľ však budeme chcieť aproximovať integrály s požadovanou presnosťou, nepotrebujeme na to až taký počet dielkov (také n) ako je určený v (5.5). V takomto prípade by sme museli naviac vyhodnotiť maximum absolútnej hodnoty druhej derivácie reálnej i imaginárnej zložky komplexnej funkcie reálnej premennej, čo môže byť náročné. Pokiaľ budeme hľadať korene funkcie vo vnútri kruhu, integrály (5.6) budeme vo väčšine prípadov aproximovať lichobežníkovým pravidlom so zdvojnásobovaním dielkov až kým $|L_{2n}(h; 0, 1) - L_n(h; 0, 1)|$ nebude dostatočne malé.

5.3 Numerické výsledky

Príklad 1. Majme funkciu

$$f(z) = \sin z - z^3 - i.$$

Chceme zistiť všetky korene funkcie f vo vnútri krivky $\gamma(t) := 4\,e^{2\pi i t}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.
Počet koreňov vo vnútri tejto krivky udáva hodnota s_0 daná vzťahom (5.4). Keďže počet koreňov je nezáporné celé číslo, integrál s_0 (s_0 predstavuje počet koreňov vo vnútri danej krivky) stačí aproximovať lichobežníkovým pravidlom s presnosťou $\varepsilon_{pr} = 0.5$. Počet dielkov lichobežníkového pravidla potrebných pre túto presnosť určíme zo vzťahu (5.5).

Na to ale potrebujeme určiť maximum absolútnej hodnoty druhej derivácie reálnej i imaginárnej zložky komplexnej funkcie reálnej premennej, čo určíme pomocou mapleovskej funkcie `Maximize`.

Pre výpočet integrálu s_0 s presnosťou $\varepsilon_{pr} = 0.5$ je potrebných $n = 6$ dielkov. Dostaneme

$$\mathtt{s}_0 \;=\; +2.96800225961383871576 4032 \quad +0.\mathtt{i},$$

z čoho je zrejmé, že funkcia f má v danom kruhu 3 korene.
Integrály s_1, s_2, s_3 aproximujeme lichobežníkovým pravidlom s presnosťou $\varepsilon_{pr} = 0.01$. Počet dielkov potrebných pre aproximáciu s_1 je $n = 129$, pre s_2 je $n = 330$ a pre s_3 je $n = 939$.

$$\begin{array}{lcll}
\mathtt{s}_1 & = & +4.67 \cdot 10^{-24} & -0.0059826257016148413476 03\mathtt{i}; \\
\mathtt{s}_2 & = & +1.724835744235194203292190 & +2.017 \cdot 10^{-24}\mathtt{i}; \\
\mathtt{s}_3 & = & +2.41 \cdot 10^{-23} & -2.602520042656087556699959\mathtt{i}.
\end{array}$$

Dosadením s_1, s_2, s_3 do (5.3) a vyriešením vzniknutej sústavy, získame koeficienty $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Korene polynómu $P_3(z) = z^3 + \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z + \sigma_3$, sú korene funkcie f vo vnútri krivky γ (pre výpočet koreňov polynómu použijeme mapleovský príkaz `solve`):

$$\begin{array}{lcll}
\mathtt{z}_1 & = & +\underline{1.0920101557840113934089}84 & -\underline{0.33368801461735790456237}02\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & -8.7326493989259481154288 27 \cdot 10^{-24} & +\underline{0.66139340353310096777714}75\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & -\underline{1.09201015578401139340897}4 & -\underline{0.33368801461735790456237}92\mathtt{i}.
\end{array}$$

Pokiaľ pre aproximáciu integrálov s_0, s_1, s_2 a s_3 použijeme lichobežníkové pravidlo so zdojnásobovaním dielkov tak, že začneme so 150 dielkami a ako zastavovacie kritérium použijeme použijeme hodnotu $\varepsilon_{int} = 0.01$, počet dielkov potrebných pre výpočet s_0 až s_3 bude $n = 150$. Dostaneme aproximáciu

$$\begin{array}{lcll}
\mathtt{s}_0 & = & +3.000000000000000000000001 & -3.94 \cdot 10^{-26}\mathtt{i}; \\
\mathtt{s}_1 & = & -1.0 \cdot 10^{-25} & -0.005982625701616148413476 0\mathtt{i}; \\
\mathtt{s}_2 & = & +1.724835744235194203292185 & +6.70 \cdot 10^{-24}\mathtt{i}; \\
\mathtt{s}_3 & = & +3.1 \cdot 10^{-23} & -2.602520042656087556699 94\mathtt{i}.
\end{array}$$

Dosadením s_1, s_2, s_3 do (5.3) a vyriešením vzniknutej sústavy, získame koeficienty polynómu P_3, ktorého korene budú hľadané korene funkcie f v danom kruhu. Získame korene

$$\begin{array}{lcll}
\mathtt{z}_1 & = & +\underline{1.09201015578401139340897}5 & -\underline{0.3336880146173579045623}66\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & -2.9292929651033254415812 45 \cdot 10^{-24} & +\underline{0.6613934035331009677771}35\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & -\underline{1.09201015578401139340897}3 & -\underline{0.33368801461735790456237}3\mathtt{i}.
\end{array}$$

V porovnaní s koreňmi f získanými mapleovskou funkciu `fsolve`, dostaneme v obidvoch prípadoch takmer rovnakú aproximáciu z_1, z_2, z_3. Počet zhodných desatinných miest je podčiarknutých. V prípade aproximácie pomocou lichobežníkového pravidla so zadanou presnosťou je výpočet časovo náročný, kôli vyhodnocovaniu maxima absolútnej hodnoty druhej derivácie reálnej a imaginárnej zložky komplexnej funkcie reálnej premennej.

Poznámka 5.3. Mapleovská funkcia `fsolve(`$\sin(z)-z^3-I, z$`, complex)` nájde len jeden koreň funkcie

$$f(z) = \sin(z) - z^3 - i$$

a to

$$1.09201015578401139340897 7 - 0.333688014617357904562371 3i.$$

Pokiaľ však zadáme `fsolve(`$\sin(z)-z^3-I, z, \{z = 1.0-0.5\cdot I..1.5+0.1\cdot I\}$`, complex)`, získame koreň

$$1.092010155784011393408977 - 0.3336880146173579045623713i.$$

Pre `fsolve(`$\sin(z)-z^3-I, z, \{z = -1.5-0.5\cdot I..-1+0.1\cdot I\}$`, complex)` získame koreň

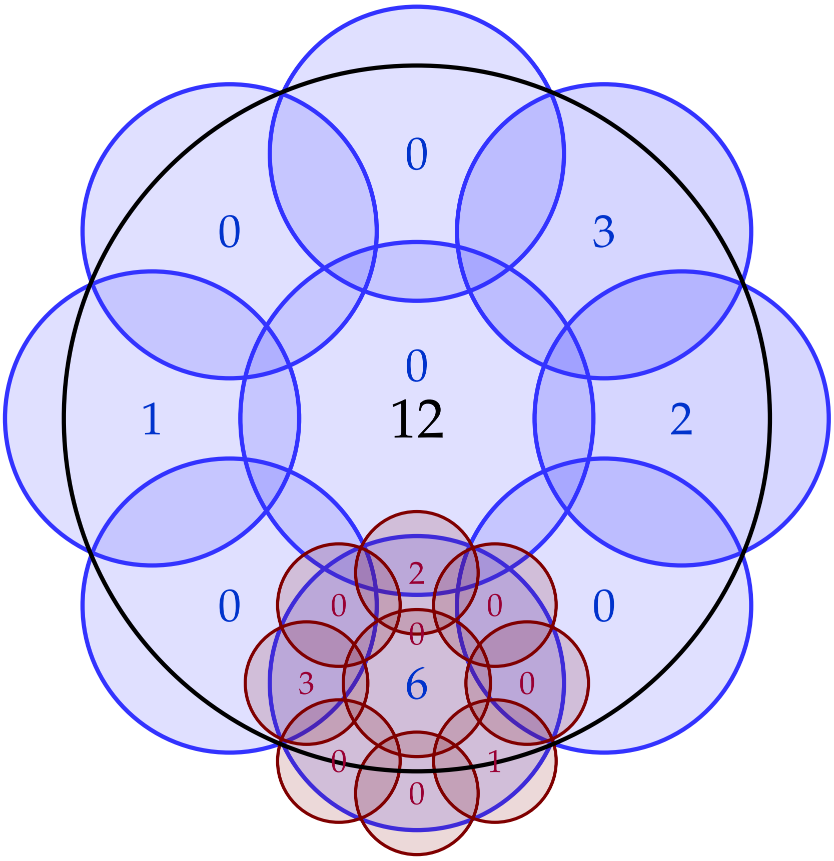
$$-1.092010155784011393408977 - 0.3336880146173579045623713i.$$

A pre `fsolve(`$\sin(z) - z^3 - I, z, \{z = -0.5 + 0.5 \cdot I..0.5 + 1.0 \cdot I\}$`, complex)` získame koreň

$$7.077527391670644616151113 \cdot 10^{-48} + 0.6613934035331009677771403i.$$

Teda, pokiaľ chceme získať koreň f musíme sa „trafiť“ do správneho „obdĺžnika“, v ktorom sa vyskytuje aspoň jeden koreň f. Maple však vždy vypíše len jeden koreň.

Pokiaľ má funkcia f vo vnútri danej krivky veľa koreňov, polynóm $P_N(z)$ bude vysokého stupňa a bude zle podmienený (tzn. malé zmeny hodnôt v sústave (5.3) vyvolajú veľkú zmenu v koreňoch polynómu $P_N(z)$, ktorého koeficienty sú riešením sústavy (5.3)). Pokiaľ chceme, aby polynóm bol nízkeho stupňa(maximálne nejaká prednastavená konštanta M), vnútro danej krivky rozdelíme na niekoľko podoblastí a skúmame koľko koreňov má funkcia v danej podoblasti. Danú podoblasť delíme až dovtedy, kým nezistíme, že vo vnútri sa nachádza maximálne M koreňov. Potom pre každú podoblasť vytvoríme polynóm stupňa maximálne M, ktorý má rovnaké korene ako funkcia f, viď obr. 5.1.



Obr. 5.1: Rozklad kruhu

Na obrázku 5.1 je kruh, v ktorej má nejaká funkcia 12 koreňov. Tento kruh delíme na menšie kruhy dovtedy, kým v každom kruhu nebude mať funkcia maximálne 3 korene.

V prípade, že hľadáme korene danej funkcie vo vnútri kruhu a chceme tento kruh deliť na menšie kruhy, môže nastať, že nejaký menší kruh nebude celý ležať v pôvodnom kruhu. (viď obr.5.1. Preto je potrebné aby funkcia f ktorej korene hľadáme, bola holomorfná i v kruhu s o niečo väčším polomerom, ako má pôvodný kruh, na ktorom hľadáme korene f.

V prípade delenia kruhov, keďže môže nastať, že po delení kruhu na menšie kruhy, koreň f nachádzajúci sa v menšom kruhu nepadne do povodného kruhu (viď obr. 5.1, môže sa stať, že menší kruh nepadne celý do pôvodného kruhu a f má koreň v tomto menšom kruhu, ale nie v pôvodnom) je potrebné kontrolovať, či sa všetky korene v menšom kruhu (určenom delením pôvodného kruhu) nachádzajú taktiež v pôvodnom kruhu. Môže tiež nastať, že niektoré menšie kruhy budú mať rovnaké korene (niektoré menšie kruhy niesu disjunktné).

Príklad 2. Majme funkciu

$$f(z) = (z - 0.5)(z - 1)(z - 1.5)(z - 2)(z - 2.5)(z - 3)(z - 3.5)(z - 4)(z - 4.5)(z - 5).$$

Funkcia f má v kruhu $\gamma(t) := \frac{11}{2}\mathrm{e}^{2\pi i t}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ 10 jednonásobných koreňov (sú to korene $0.5, 1, ..., 4.5, 5$).

Najprv daný kruh nedeľme a hľadajme korene f v pôvodnom kruhu.Vytvorme teda polynóm (5.2) stupňa 10 (jeho koeficienty získame riešením sústavy (5.3)), ktorý má rovnaké korene ako f. Pre aproximáciu integrálov (5.4) potrebných v sústave použijeme lichobežníkové pravidlo, dielky, teda n, budeme zdojnásobovať až kým $|L_{2n} - L_n| < 0.01$. Korene výsledného polynómu a teda i funkcie f sú

$$
\begin{aligned}
\mathtt{z}_1 &= +\mathtt{5.00546761146377071119444} && +\mathtt{3.72147705709028844673642} \cdot 10^{-22}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_2 &= +\mathtt{4.18406071664870321483930}\mathtt{1} && +\mathtt{3.18960010118506768114683}\mathtt{7} \cdot 10^{-20}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_3 &= +\mathtt{1.17972218579246853797384}\mathtt{1} && +\mathtt{0.07016631469064592492384}\mathtt{0i};\\
\mathtt{z}_4 &= +\mathtt{3.31317961639235473125312}\mathtt{3} && +\mathtt{0.36964354390453451390485}\mathtt{3i};\\
\mathtt{z}_5 &= +\mathtt{2.20362038803072767649832}\mathtt{9} && +\mathtt{0.40326285242386679814952}\mathtt{2i};\\
\mathtt{z}_6 &= +\mathtt{2.20362038803072767668554}\mathtt{7} && -\mathtt{0.40326285242386679813998}\mathtt{6i};\\
\mathtt{z}_7 &= +\mathtt{3.31317961639235473135589}\mathtt{9} && -\mathtt{0.36964354390453451386503}\mathtt{1i};\\
\mathtt{z}_8 &= +\mathtt{1.17972218579246853850692}\mathtt{9} && -\mathtt{0.07016631469064592498045}\mathtt{9i};\\
\mathtt{z}_9 &= +\mathtt{0.48931770466374465725921}\mathtt{9} && -\mathtt{1.01953243613512344242025}\mathtt{0} \cdot 10^{-20}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_{10} &= +\mathtt{4.42811267756883109502465}\mathtt{9} && -\mathtt{1.48135189494021153153898}\mathtt{6} \cdot 10^{-20}\mathtt{i}.
\end{aligned}
$$

Môžme si všimnúť, že korene nie sú presné. Rozdeľme pôvodný kruh na menšie kruhy tak, aby v každom menšom kruhu boli maximálne 2 korene (viď obr. 5.1). Dostaneme 13 rôznych kruhov, v ktorých má f maximálne 2 korene. Integrály potrebné pri výpočte koreňov aproximujeme lichobežníkovým pravidlom s rovnakým zastavovacím kritériom ako sme použili pri hľadaní koreňov v celom (pôvodnom) kruhu.

V kruhu $\gamma_1(t) = \frac{649}{384} + \frac{1375}{3456}\mathrm{e}^{2\pi i t}$ má f 2 korene:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{z}_1 &= +\mathtt{1.9999999999718351616946}\mathtt{75} && +\mathtt{3.3000000008505781169177}\mathtt{31} \cdot 10^{-24}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_2 &= +\mathtt{1.5000000000563296766066}\mathtt{82} && -\mathtt{5.9000000008505781169177}\mathtt{31} \cdot 10^{-24}\mathtt{i}.
\end{aligned}
$$

V kruhu $\gamma_2(t) = \frac{1199}{384} + \frac{1375}{3456}\mathrm{e}^{2\pi i t}$ má f 2 korene:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{z}_1 &= +\mathtt{3.4965098521290387893163}\mathtt{35} && +\mathtt{8.8008604799775844429534}\mathtt{76} \cdot 10^{-23}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_2 &= +\mathtt{3.0048718406340159254506}\mathtt{34} && -\mathtt{7.4675271466442511096201}\mathtt{43} \cdot 10^{-23}\mathtt{i}.
\end{aligned}
$$

V kruhu $\gamma_3(t) = \frac{77}{32} + \frac{275}{576}\mathrm{e}^{2\pi i t}$ má f 2 korene:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{z}_1 &= +\mathtt{2.4999999998785304341023}\mathtt{05} && +\mathtt{3.6933333335761026288735}\mathtt{351} \cdot 10^{-24}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_2 &= +\mathtt{2.0000000001821949714876}\mathtt{96} && -\mathtt{4.2000000024276929554020}\mathtt{17} \cdot 10^{-24}\mathtt{i}.
\end{aligned}
$$

V kruhu $\gamma_4(t) = \frac{187}{32} + \frac{275}{288}\mathrm{e}^{2\pi i t}$ má f 1 koreň:

$$\mathtt{z}_1 = +\mathtt{5.00000004365228412990228}\mathtt{4} \quad -\mathtt{1.11266666666666666666666}\mathtt{7} \cdot 10^{-23}\mathtt{i}.$$

V kruhu $\gamma_5(t) = \frac{209}{64} + \frac{275}{576}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 2 korene:

$$\begin{aligned} z_1 &= +3.500000000000000000000051 && +1.050666666666666666666415 \cdot 10^{-23}\,i; \\ z_2 &= +2.999999999999999999999942 && -1.237999999999999999999748 \cdot 10^{-23}\,i. \end{aligned}$$

V kruhu $\gamma_6(t) = \frac{319}{64} + \frac{275}{576}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 1 koreň:

$$z_1 = +4.999223070122890065937302 \quad -4.116666666666666666666666 \cdot 10^{-25}\,i.$$

V kruhu $\gamma_7(t) = \frac{33}{8} + \frac{55}{96}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 2 korene:

$$\begin{aligned} z_1 &= +4.500033803428197840323641 && +2.132995797511017228535959 \cdot 10^{-23}\,i; \\ z_2 &= +3.999958684065607485681519 && -2.339662464177683895202626 \cdot 10^{-23}\,i. \end{aligned}$$

V kruhu $\gamma_8(t) = \frac{77}{64} + \frac{275}{576}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 2 korene:

$$\begin{aligned} z_1 &= +1.500000000000000000000004 && +1.026666666666666666666650 \cdot 10^{-24}\,i; \\ z_2 &= +0.999999999999999999999996 && -1.053333333333333333333317 \cdot 10^{-24}\,i. \end{aligned}$$

V kruhu $\gamma_9(t) = \frac{187}{64} + \frac{275}{576}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 2 korene:

$$\begin{aligned} z_1 &= +2.999999945436428398062791 && +4.833334702073770482610237 \cdot 10^{-24}\,i; \\ z_2 &= +2.500000076388518751668380 && -5.506668035407103815943571 \cdot 10^{-24}\,i. \end{aligned}$$

V kruhu $\gamma_{10}(t) = \frac{209}{128} + \frac{275}{1152}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 1 koreň:

$$z_1 = +1.500000000000000000000003 \quad -1.706666666666666666666666 \cdot 10^{-25}\,i.$$

V kruhu $\gamma_{11}(t) = \frac{319}{128} + \frac{275}{1152}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 1 koreň:

$$z_1 = +2.500000000000000000000000 \quad +1.600000000000000000000000 \cdot 10^{-25}\,i.$$

V kruhu $\gamma_{12}(t) = \frac{33}{16} + \frac{55}{192}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 1 koreň:

$$z_1 = +2.000000000000000000000006 \quad +1.066666666666666666666667 \cdot 10^{-25}\,i.$$

A v kruhu $\gamma_{13}(t) = \frac{11}{8}\mathrm{e}^{2\pi it}$ má f 2 korene:

$$\begin{aligned} z_1 &= +0.9999983901720609398181382 && +1.840001008857159709889752 \cdot 10^{-24}\,i; \\ z_2 &= +0.4999983901824270570430038 && -1.526667675523826376556419 \cdot 10^{-24}\,i. \end{aligned}$$

Niektoré kruhy majú rovnaké korene. Delením sme dosiahli o niečo lepšej presnosti koreňov, čo je spôsobené tým, že výsledný polynóm s rovnakými koreňmi ako f bude stupňa najviac 2 a teda nebude až tak „zle podmienený“.

Príklad 3. Majme funkciu

$$f(z) = (z-1)^{10}(z-5)^5.$$

Funkcia f má v kruhu $\gamma(t) := 6e^{2\pi i t}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ $10-$ násobný koreň $z_1 = 1$ a $5-$násobný koreň $z_2 = 5$.

V takomto prípade, keďže f má korene vysokých násobností, delenie daného kruhu nie je vhodné. Preto budeme hľadať korene f vo vnútri pôvodného kruhu. Integrály (5.4) aproximujeme lichobežníkovým pravidlom so zdojnásobovaním dielkov a ukončujúcou podmienkou $\varepsilon_{int} = 0.01$.
Dostaneme aproximáciu

$$
\begin{array}{rcll}
\mathtt{z}_1 & = & +\mathtt{5.0363811868562466056781 14} & -\mathtt{1.476779389096175805163141} \cdot \mathtt{10}^{-14}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & +\mathtt{4.969812874803225759598847} & +\mathtt{0.022466934217978947752386i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & +\mathtt{5.011996634094454287411142} & +\mathtt{0.034820449273170665356415i}; \\
\mathtt{z}_4 & = & +\mathtt{1.388006013656406723020177} & +\mathtt{0.133864366643701020647969i}; \\
\mathtt{z}_5 & = & +\mathtt{0.642231104374253529707394} & +\mathtt{0.111361117153161045024819i}; \\
\mathtt{z}_6 & = & +\mathtt{1.221493984332641107622560} & +\mathtt{0.334147838750157175700973i}; \\
\mathtt{z}_7 & = & +\mathtt{0.766490291208436283866059} & +\mathtt{0.299268611641491883815825i}; \\
\mathtt{z}_8 & = & +\mathtt{0.981778504119421323123416} & +\mathtt{0.388495512411860476955731i}; \\
\mathtt{z}_9 & = & +\mathtt{0.981778504119206473411307} & -\mathtt{0.388495512411845165468035i}; \\
\mathtt{z}_{10} & = & +\mathtt{0.766490291208274624361723} & -\mathtt{0.299268611641361168829738i}; \\
\mathtt{z}_{11} & = & +\mathtt{1.221493984332449943985735} & -\mathtt{0.334147838750277054981473i}; \\
\mathtt{z}_{12} & = & +\mathtt{0.642231104374194210911394} & -\mathtt{0.111361117152966014912480i}; \\
\mathtt{z}_{13} & = & +\mathtt{1.388006013656327394851686} & -\mathtt{0.133864366643922197491739i}; \\
\mathtt{z}_{14} & = & +\mathtt{5.011996634094425838207090} & -\mathtt{0.034820449273181101311866i}; \\
\mathtt{z}_{15} & = & +\mathtt{4.969812874803206477003833} & -\mathtt{0.022466934217953744464894i}.
\end{array}
$$

Aproximácia koreňov je pri veľkom počte koreňov je dosť nepresná.

Metóda Newtonových súm funguje dobre len v prípade, že daná funkcia má vo vnútri danej krivky málo koreňov. V prípade, že koreňov bude veľa, polynóm (5.2) bude zle podmienený a aproximácia koreňov nebude taká, akú by sme očakávali. Vnútro danej krivky môžeme rozdeliť na menšie krivky, v ktorých bude mať funkcia len „malý“ počet koreňov. Toto je však nevhodná voľba v prípade, že korene ležia blízko seba alebo sú viacnásobné.

V ďalšej kapitole si predstavíme formálne ortogonálne polynómy a následne algoritmus, ktorý určí všetky navzájom rôzne korene danej funkcie vo vnútri krivky a následne ich príslušné násobnosti. Aproximácia koreňov bude omnoho presnejšia.

6 Formálne ortogonálne polynómy

V tejto kapitole si zadefinujeme formálne ortogonálne polynómy a na základe nich zostavíme algoritmus, ktorý dáva dobrú aproximáciu koreňov hľadanej holomorfnej funkcie. Uveďme, že poznatky tejto kapitoly sú prevzaté z článkov [2], [3], [4] a [5].

6.1 Vlastnosti formálnych ortogonálnych polynómov

Nech $\mathcal{P}$ je lineárny priestor polynómov s komplexnými koeficientami. Nech f, γ spĺňajú predpoklady vety 3.6, $z_1, \cdots, z_n$ sú všetky navzájom rôzne korene f v $\operatorname{int} \gamma$ a $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sú ich príslušné násobnosti. Definujme symetrickú bilineárnu formu $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ podľa predpisu

$$\langle \phi, \psi \rangle :\overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \phi(z)\psi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(z_i)\psi(z_i), \tag{6.1}$$

pre každé dva polynómy $\phi, \psi \in \mathcal{P}$, kde f splňuje vlastnosti vety 3.6, $z_1, \cdots, z_n$ sú navzájom rôzne korene funkcie f, ktoré ležia vo vnútri krivky γ, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sú ich príslušné násobnosti.

Potom pre $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$s_p := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^p = \langle 1, z^p \rangle .$$

Označme H_t maticu $t \times t$

$$H_t :\overset{\text{ozn.}}{=} \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} \\ s_1 & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} \end{bmatrix},$$

a $H_t^{(1)}$ maticu $t \times t$

$$H_t^{(1)} :\overset{\text{ozn.}}{=} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_t \\ s_2 & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} \end{bmatrix}.$$

Poznámka 6.1. Maticu $A = [a_{p,q}]_{p,q=0}^{t-1} \in \mathbb{C}^{t \times t}$ budeme nazývať Hankelova matica, pokiaľ existuje $b_0, \cdots, b_{2t-2} \in \mathbb{C}$ tak, že $a_{p,q} = b_{p+q}$.

Je zrejmé, že matice H_t a $H_t^{(1)}$ sú Hankelove matice.

Definícia 6.2. *Pokiaľ monický polynóm (jeho vedúci koeficient je rovný* 1*)* φ_t *stupňa* $t \geq 0$ *definovaný predpisom*

$$\varphi_t(z) \overset{\text{def.}}{=}: u_{0,t} + u_{1,t}z + ... + u_{t-1,t}z^{t-1} + z^t, \tag{6.2}$$

splňuje

$$\left\langle z^k, \varphi_t(z) \right\rangle = 0 \quad \textit{pre každé } k \in \{0, 1, \cdots, t-1\}, \tag{6.3}$$

budeme ho nazývať ***formálny ortogonálny polynóm (FOP)*** *stupňa* t.

FOP φ_t nemusí existovať alebo nemusí byť jednoznačný pre každé $t > 0$. Pokiaľ je φ_t podmienkami (6.3) určený jednoznačne, budeme ho nazývať **regulárny formálny ortogonálny polynóm** a t **regulárny index**.

Keďže FOP φ_t má splňovať (6.3), jeho koeficienty získame vyriešením sústavy

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} \\ s_1 & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,t} \\ u_{1,t} \\ \vdots \\ u_{t-1,t} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_t \\ s_{t+1} \\ \vdots \\ s_{2t-1} \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Regulárny FOP supňa $t \geq 1$ bude existovať len vtedy, keď matica H_t bude regulárna.

Veta 6.3. *Pokiaľ je* $t \geq 1$ *regulárny index, potom platí*

$$\varphi_t(z) = \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \iddots & \vdots & z \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix}.$$

Dôkaz. Nech t je regulárny index. Potom funkcia $\theta_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovaná predpisom

$$\theta_t(z) := \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \iddots & \vdots & z \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix},$$

je zrejme monický polynóm stupňa t. Pokiaľ polynóm θ_t splňuje podmienky (6.3), potom keďže t je regulárny index (FOP φ_t je určený jednoznačne), musí platiť, že $\theta_t = \varphi_t$.

Pre každé $k \in \{0, \cdots, t-1\}$ platí

$$\left\langle \theta_t, z^k \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \iddots & \vdots & z \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix}, z^k \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\det H_t} \left\langle \sum_{j=0}^{t} (-1)^{t-j} z^j \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} \\ \vdots & \iddots & & \iddots & \vdots \\ s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} & \cdots & s_{t+j-2} \\ s_{j+1} & \cdots & s_t & \cdots & s_{t+j} \\ \vdots & \iddots & & \iddots & \vdots \\ s_t & \cdots & s_{t+j} & \cdots & s_{2t-1} \end{vmatrix}, z^k \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\det H_t} \sum_{j=0}^{t} (-1)^{t-j} \left\langle z^j, z^k \right\rangle \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} \\ \vdots & \iddots & & \iddots & \vdots \\ s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} & \cdots & s_{t+j-2} \\ s_{j+1} & \cdots & s_t & \cdots & s_{t+j} \\ \vdots & \iddots & & \iddots & \vdots \\ s_t & \cdots & s_{t+j} & \cdots & s_{2t-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & \left\langle 1, z^k \right\rangle \\ s_1 & & \iddots & \vdots & \left\langle z, z^k \right\rangle \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & \left\langle z^{t-1}, z^k \right\rangle \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & \left\langle z^t, z^k \right\rangle \end{vmatrix} = \frac{1}{\det H_t} \underbrace{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & s_k \\ s_1 & & \iddots & \vdots & s_{k+1} \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & s_{k+t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & s_{k+t} \end{vmatrix}}_{=0, \text{ pre } k \in \{0, \cdots, t-1\}},$$

čo znamená, že θ_t splňuje podmienky (6.3). Preto $\theta_t = \varphi_t$. $\square$

S využitím vety 6.3 a dá dokázať nasledujúca veta.

Veta 6.4. *Pokiaľ je $t \geq 1$ regulárny index, potom platí*

$$\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \frac{\det H_{t+1}}{\det H_t}.$$

Dôkaz. Keďže φ_t splňuje podmienky (6.3), platí

$$\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \left\langle \varphi_t, z^t + u_{t-1,t} z^{t-1} + \cdots + u_{0,t} \right\rangle = \left\langle \varphi_t, z^t \right\rangle.$$

Keďže t je regulárny index, podľa vety 6.3 platí

$$\left\langle \varphi_t, z^t \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \iddots & \vdots & z \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix}, z^t \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & \left\langle 1, z^t \right\rangle \\ s_1 & & \iddots & \vdots & \left\langle z, z^t \right\rangle \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & \left\langle z^{t-1}, z^t \right\rangle \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & \left\langle z^t, z^t \right\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & s_t \\ s_1 & & \iddots & \vdots & s_{t+1} \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & s_{2t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & s_{2t} \end{vmatrix} = \frac{\det H_{t+1}}{\det H_t}.$$

$\square$

Veta 6.5. *Nech n je počet navzájom rôznych koreňov funkcie f vo vnútri danej krivky. Potom pre každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je hodnosť matice H_{n+p} rovná n.*

Dôkaz. Nech $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, n je počet navzájom rôznych koreňov funkcie f v $\operatorname{int} \gamma$ a h je hodnosť matice H_{n+p}.
Matica H_{n+p} bude mať tvar

$$H_{n+p} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n+p-1} \\ s_1 & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ s_{n+p-1} & \cdots & \cdots & s_{2n+2p-2} \end{bmatrix}.$$

Majme n vektorov $\Upsilon_1, \cdots, \Upsilon_n$ definovaných predpisom

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &:= \left[1,\ z_1,\ z_1^2,\ \cdots,\ z_1^{n+p-1}\right]; \\ \Upsilon_2 &:= \left[1,\ z_2,\ z_2^2,\ \cdots,\ z_2^{n+p-1}\right]; \\ &\ \ \vdots \\ \Upsilon_n &:= \left[1,\ z_n,\ z_n^2,\ \cdots,\ z_n^{n+p-1}\right], \end{aligned}$$

kde $z_1, \cdots, z_n$ sú navzájom rôzne korene f v $\operatorname{int} \gamma$.

Každý riadok matice H_{n+p} sa dá vyjadriť lineárnou kombináciou vektorov $\Upsilon_1, \cdots, \Upsilon_n$, preto $h \leq n$.

Nech D_n je diagonálna matica $D_n := \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ a V_n je Vandermondova matica definovaná predpisom

$$V_n := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Maticu H_n môžeme rozložiť na tvar

$$H_n = V_n D_n V_n^T.$$

Matice D_n, V_n sú regulárne, preto H_n je taktiež regulárna a jej hodnosť je n. H_n je submatica matice H_{n+p}, preto $h \geq n$.

Dokázali sme, že hodnosť matice H_{n+p} je n. □

Definícia 6.6. *Nech A, B sú štvorcové matice. Vlastným číslom dvojice (A, B) nazveme také $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktoré je splnená rovnosť*

$$\det\,(A - \lambda B) = 0.$$

Vlastným vektorom dvojice (A, B) odpovedajúcemu vlastnému číslu λ nazveme nenulový vektor x, pre ktorý platí

$$(A - \lambda B)x = 0.$$

(Pripomeňme, že pokiaľ $B = E$, číslo λ je vlastné číslo matice A a x jeho odpovedajúci vlastný vektor).

Veta 6.7. *Nech $t \geq 1$ je regulárny index. Korene regulárneho FOP φ_t stupňa t sú vlastné čísla dvojice $(H_t^{(1)}, H_t)$.*

Dôkaz. Nech

$$\varphi_t(z) = u_{0,t} + u_{1,t}z + \cdots + u_{t-1,t}z^{t-1} + z^t.$$

Definujme $C_t \in \mathbb{C}^{t \times t}$ predpisom

$$C_t := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -u_{0,t} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -u_{1,t} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -u_{t-2,t} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -u_{t-1,t} \end{bmatrix}.$$

Korene polynómu φ_t sú práve vlastné čísla matice C_t $\left(\det\left(C_t-\lambda E\right)=(-1)^t\,\varphi_t\left(\lambda\right)\right)$.

Nech λ je vlastné číslo matice C_t a x jeho odpovedajúci vlastný vektor. Keďže H_t je regulárna, platí

$$C_t x=\lambda x \Leftrightarrow H_t C_t x=\lambda H_t x.$$

S využitím (6.4) platí $H_t C_t = H_t^{(1)}$, čo vetu dokazuje. □

Veta 6.8. *Nech $z_1,\cdots,z_n$ sú korene FOP φ_n a nech $t\geq n$. Potom vlastné čísla dvojice $(H_t^{(1)},H_t)$ sú $z_1,\cdots,z_n$ a o zvyšných vlastných číslach (bude ich $t-n$) nemáme žiadnu informáciu.*

Korene polynómu φ_n (n je počet navzájom rôznych koreňov f v $\operatorname{int}\gamma$, n je regulárny index) získame podľa vety 6.7 spočítaním vlastných čísel dvojice $(H_n^{(1)},H_n)$. Príslušné násobnosti k týmto koreňom, získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Veta 6.7 a 6.5 nám dáva možný prístup ako určiť n a $z_1,...,z_n$. Začneme určením N, čo je počet koreňov vrátané násobností. Túto hodnotu udáva $s_0=\langle 1,1\rangle$, ktorú určíme pomocou numerickej integrácie. Spočítame momenty $s_1,...,s_{2N-2}$ taktiež pomocou numerickej integrácie. Počet navzájom rôznych koreňov n je určený hodnosťou matice H_N. Vlastné čísla dvojice $(H_n^{(1)},H_n)$ budú hľadané korene $z_1,\cdots,z_n$. Tento prístup má však nevýhody:

- Teoreticky, $N-n$ vlastných čísel matice H_N je rovných nule (pretože hodnosť matice $H_N=n$ je počet nenulových vlastných čísel matice H_N). Prvky matice H_N, teda $s_k=\left\langle 1,z^k\right\rangle$, kde $k=0,\cdots,2N-2$ získame numerickou integráciou. V praxi je náročné určiť hodnosť H_N v prípade, že rozdiel aproximácie nulových vlastných čísel a aproximácie nenulových vlastných čísel matice H_N je veľmi malý.

- Aproximácia koreňov $z_1,...,z_n$ (získaných ako vlastné čísla dvojice $(H_n^{(1)},H_n)$) nemusí byť veľmi presná. Problém hľadania koreňov ako vlastných čísel dvojice $(H_n^{(1)},H_n)$ je zvyčajne zle podmienený (čím viac navzájom rôznych koreňov má f, tým je „horšie“ podmienený).

Ilustrujme túto „zlú“ podmienenosť na príkladoch.

Príklad 4. Majme funkciu

$$f(z)=(z-1)^{10}(z-5)^5.$$

Táto funkcia má koreň $z_1=1$ a jeho násobnosť je $\alpha_1=10$ a koreň $z_2=5$ s násobnosťou $\alpha_2=5$ (korene uvažujeme v kruhu so stredom v počiatku a s polomerom 6).
Prepokladajme, že poznáme n (počet navzájom rôznych koreňov), teda $n=2$.

Korene tejto funkcie sú dané koreňmi φ_2, ktoré získame nájdením vlastných čísel dvojice $(H_2^{(1)}, H_2)$. Prvky týchto matíc aproximujme lichobežníkovým pravidlom (s ukončujúcou podmienkou na zdvojnásobovanie dielkov $\varepsilon_{int} = 0.01$).
Získame korene

$$\begin{array}{lcll}
\mathtt{z}_1 & = & +4.999999999999999999999999 & -2.754999999996344601779805 \cdot 10^{-24}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & +0.999999999999999999999987 & -2.075000000000000000000006 \cdot 10^{-24}\mathtt{i};
\end{array}$$

a ich násobnosti získame riešením sústavy (6.5)

$$\begin{array}{lcll}
\alpha_1 & = & +5.000000000006634116552123 & +8.131250000000000000000008 \cdot 10^{-24}\mathtt{i}; \\
\alpha_2 & = & +9.999999999999999999999977 & -7.031250000000000000000008 \cdot 10^{-24}\mathtt{i}.
\end{array}$$

Pokiaľ je $n = 2$, získame celkom presné výsledky. V porovnaní s metódou Newtonových súm (viď príklad 3) získame omnoho lepšiu aproximáciu koreňov. Poznamenajme, že pre výpočet vlastných čísel sme použili (a vo všetkých nasledujúcich príkladoch budeme používať) mapleovskú funkciu `Eigenvalues`.

Príklad 5. Majme funkciu

$$f(z) = (z - 0.5)(z - 1)(z - 1.5)(z - 2)(z - 2.5)(z - 3)(z - 3.5)(z - 4)(z - 4.5)(z - 5).$$

Táto funkcia má korene $z_i = 0.5 \cdot i$, $i = 1, \cdots, 10$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{10} = 1$ (korene uvažujeme v kruhu so stredom v počiatku a s polomerom $\frac{11}{2}$) .
Taktiež prepokladajme, že n poznáme, teda $n = 10$. Korene tejto funkcie sú vlastné čísla dvojice $(H_{10}^{(1)}, H_{10})$, kde prvky týchto matíc aproximujeme lichobežníkovým pravidlom taktiež s ukončujúcou podmienkou na zvojnásobovanie dielkov $\varepsilon_{int} = 0.01$.
Dostaneme korene

$$\begin{array}{rcll}
\mathtt{z}_1 & = & +4.999754031135463329706464 & -1.811467584682572494836457 \cdot 10^{-17}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & -0.482619656959052981618906 & +0.520112986694905901508153\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & -0.482619656958911278275370 & -0.520112986694860316257578\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_4 & = & -0.595622008950668060429002 & -2.462996662781811357859398 \cdot 10^{-12}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_5 & = & +0.651860363889341962516125 & -4.731183266067822156384385 \cdot 10^{-15}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_6 & = & +1.504605617024623463289221 & -4.221220797908450884506024 \cdot 10^{-14}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_7 & = & +2.375661301782675644001266 & -8.726713069376213657790394 \cdot 10^{-15}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_8 & = & +3.196581781270087687752912 & -6.647969593400840433500260 \cdot 10^{-15}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_9 & = & +4.488679269302090335922404 & -5.909771789345582354069187 \cdot 10^{-16}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_{10} & = & +3.907634474652973811576471 & -3.137477890967151445118315 \cdot 10^{-15}\mathtt{i};
\end{array}$$

a ich príslušné násobnosti

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha_1 & = & +1.0025549285725452976067771 & +2.3584141105348188689839 15 \cdot 10^{-15}\mathtt{i}; \\
\alpha_2 & = & +0.0060312194441707533087 98 & -0.0095747779052601596945 99\mathtt{i}; \\
\alpha_3 & = & +0.0060312194441918062733 87 & +0.0095747779053756563795 21\mathtt{i}; \\
\alpha_4 & = & +0.0213883807374845702118 77 & -1.7107856185227567505174 58 \cdot 10^{-13}\mathtt{i}; \\
\alpha_5 & = & +1.6018882453552300554616 58 & +0.6003773839325918454605 98 \cdot 10^{-14}\mathtt{i}; \\
\alpha_6 & = & +1.7510755014679188216411 60 & -1.1180763729021223423346 57 \cdot 10^{-13}\mathtt{i}; \\
\alpha_7 & = & +1.7132546335287435649841 51 & +1.4700441138597383848744 95 \cdot 10^{-13}\mathtt{i}; \\
\alpha_8 & = & +1.5492972826917850598033 22 & -7.4466130440615536909975 40 \cdot 10^{-14}\mathtt{i}; \\
\alpha_9 & = & +1.0629543130681958368168 57 & -1.1335899379631069936781 42 \cdot 10^{-14}\mathtt{i}; \\
\alpha_{10} & = & +1.2855248938449730100227 38 & +4.7824944705163984245426 62 \cdot 10^{-14}\mathtt{i}.
\end{array}
$$

Môžeme si všimnúť, že aproximácia niektorých koreňov je dosť nepresná. V porovnaní s metódou Newtonových súm (viď príklad 2) nedostaneme lepšiu aproximáciu koreňov.

Ďalším cieľom tejto kapitoly bude predstaviť algoritmus, ktorý dáva lepšiu aproximáciu hľadaných koreňov.

Neznáme korene funkcie f, počet navzájom rôznych koreňov s príslušnými násobnosťami teda $n, z_1, ..., z_n, \alpha_1, ...\alpha_n$ môžeme vypočítať pomocou formy $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ktorá obsahuje ľubovoľné polynómy.
Nech ψ_k je ľubovoľný monický polynóm stupňa k, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pripomeňme, že

$$\langle \psi_p, \psi_q \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \psi_p(z)\psi_q(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_p(z_i)\psi_q(z_i),$$

pre $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nech $M_k \in \mathbb{C}^{k \times k}$ je Gramova matica definovaná predpisom $M_k := [\langle \psi_p, \psi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1}$, teda

$$M_k = \begin{bmatrix} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_0, \psi_{k-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_{k-1}, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle \end{bmatrix},$$

a matica $M_k^{(1)} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ je definovaná predpisom $M_k^{(1)} := [\langle \psi_p, \psi_1 \psi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1}$, teda

$$M_k^{(1)} = \begin{bmatrix} \langle \psi_0, \psi_1 \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_0, \psi_1 \psi_{k-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_{k-1}, \psi_1 \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_{k-1}, \psi_1 \psi_{k-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

Definujme polynóm φ_n stupňa n

$$\varphi_n(z) := \psi_n(z) + \sigma_{n-1}\psi_{n-1}(z) + \cdots + \sigma_0 \psi_0(z).$$

Chceme, aby tento polynóm mal rovnaké korene ako funkcia f. Pre takýto polynóm musí platiť

$$\langle \psi_k, \varphi_n \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{6.6}$$

Vzhľadom k podmienke (6.6), koeficienty polynómu φ_n získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} \langle\psi_0,\psi_0\rangle & \cdots & \langle\psi_0,\psi_{n-1}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\psi_{n-1},\psi_0\rangle & \cdots & \langle\psi_{n-1},\psi_{n-1}\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \langle\psi_0,\psi_n\rangle \\ \vdots \\ \langle\psi_{n-1},\psi_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Nasledujúca veta zovšeobecňuje vetu 6.5.

Veta 6.9. *Nech n je počet navzájom rôznych koreňov funkcie f vo vnútri danej krivky. Potom pre každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je hodnosť matice M_{n+p} rovná n.*

Vzhľadom k vete 6.9 polynóm φ_n bude mať tvar

$$\varphi_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

Poznamenajme, že v prípade keby $\psi_k(z) = z^k$ pre $k = 0, ..., n-1$, koeficienty polynómu φ_n získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \cdots & \left\langle 1,z^{n-1}\right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \left\langle z^{n-1},1\right\rangle & \cdots & \left\langle z^{n-1},z^{n-1}\right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \langle 1,z^n\rangle \\ \vdots \\ \left\langle z^{n-1},z^n\right\rangle \end{bmatrix},$$

čo odpovedá sústave

$$\begin{bmatrix} s_0 & \cdots & s_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_n \\ \vdots \\ s_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Keďže korene polynómu φ_n poznáme, násobnosti týchto získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} \psi_0(z_1) & \cdots & \psi_0(z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{n-1}(z_0) & \cdots & \psi_{n-1}(z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\psi_0,\psi_0\rangle \\ \vdots \\ \langle\psi_{n-1},\psi_0\rangle \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Veta 6.10. *Nech $t \in \mathbb{N}$. Potom λ^* je vlastné číslo dvojice $(H_t^{(1)}, H_t)$ práve vtedy keď $\psi_1(\lambda^*)$ je vlastné číslo dvojice $(M_t^{(1)}, M_t)$.*

Dôkaz. Nech $\psi_k = z^k + u_{k-1,k}z^{k-1} + \cdots + u_{0,k}$, kde $u_{k-1,k}, ..., u_{0,k} \in \mathbb{C}$.
Definujme maticu $A_t \in \mathbb{C}^{t\times t}$

$$A_t := \begin{bmatrix} 1 & u_{0,1} & \cdots & \cdots & u_{0,t-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{t-2,t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kde $u_{i,j}$ sú koeficienty polynómu ψ_j, pre $j = 1, ..., t-1$, $i = 0, ..., j-1$.
Matice $M_t = [\langle\psi_p, \psi_q\rangle]_{p,q=0}^{t-1}$ a $[\langle\psi_p, z\psi_q\rangle]_{p,q=0}^{t-1}$ môžeme rozložiť

$$M_t = A_t^T H_t A_t, \quad [\langle\psi_p, z\psi_q\rangle]_{p,q=0}^{t-1} = A_t^T H_t^{(1)} A_t.$$

Nech $\psi_1(z) = z - \beta$ ($\beta = -u_{0,1}$). Potom platí

$$M_t^{(1)} = [\langle\psi_p, (z-\beta)\psi_q\rangle]_{p,q=0}^{t-1} = [\langle\psi_p, z\psi_q\rangle]_{p,q=0}^{t-1} - [\langle\psi_p, \beta\psi_q\rangle]_{p,q=0}^{t-1} =$$

$$A_t^T H_t^{(1)} A_t - \beta M_t = A_t^T (H_t^{(1)} - \beta H_t) A_t.$$

Nech λ^* je vlastné číslo dvojice $(H_t^{(1)}, H_t)$, x je odpovedajúci vlastný vektor a keďže A_t je regulárna, nech $y = A_t^{-1}x$. Vektory x, y sú nenulové, platí

$$H_t^{(1)} x = \lambda^* H_t x \Leftrightarrow (H_t^{(1)} - \beta H_t)x = (\lambda^* - \beta) H_t x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_t^T (H_t^{(1)} - \beta H_t) A_t y = \psi_1(\lambda^*) A_t^T H_t A_t y \Leftrightarrow M_t^{(1)} y = \psi_1(\lambda^*) M_t y.$$

Z čoho plynie, že $\psi_1(\lambda^*)$ je vlastné číslo dvojice $(M_t^{(1)}, M_t)$. □

Z vety 6.10 a 6.7 plynie, že korene regulárneho FOP φ_n sa dajú získať pomocou vlastných čísel dvojice $(M_n^{(1)}, M_n)$, kde prvky matice $M_n^{(1)}$ a M_n sú $\langle\psi_p, \psi_k\rangle$, kde $p, q = 0, \cdots, n-1$.
Otázkou však zostáva, ako voliť polynómy ψ_k, kde $k = 0, \cdots, n-1$, aby sme dosiahli najlepšiu aproximáciu hľadaných koreňov. Pokiaľ ψ_k volíme ako $\psi_k(z) = z^k$, problém hľadania koreňov, ako sme ukázali, bude zle podmienený. Pokiaľ budeme voliť polynómy ψ_k ako formálne ortogonálne polynómy, neskôr ukážeme, že dostaneme veľmi presnú aproximáciu koreňov. Predstavme si ešte ďalšie vlastnosti FOP.

V prípade, že H_n je silno regulárna, čo znamená, že všetky matice $H_1, \cdots, H_n$ sú regulárne (tieto matice nazvime bloky matice H_n), všetky FOP $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ budú regulárne. Definujme Gramovu maticu G_n predpisom

$$G_n := [\langle\varphi_p, \varphi_q\rangle]_{p,q=0}^{n-1} = \begin{bmatrix} \langle\varphi_0, \varphi_0\rangle & \cdots & \langle\varphi_0, \varphi_{n-1}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\varphi_{n-1}, \varphi_0\rangle & \cdots & \langle\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle \end{bmatrix}.$$

V prípade, že H_n je silno regulárna, matica G_n bude diagonálna, pretože vzhľadom k (6.3) platí

$$\langle\varphi_k, \varphi_t\rangle = \langle\varphi_t, \varphi_k\rangle = \left\langle \varphi_t, z^k + z^{k-1}u_{k-1,k} + ... + u_{0,k} \right\rangle = 0,$$

pre $t = 0, ..., n-1$ a $k = 0, .., t-1$. Tzn. G_n bude mať v prípade, že H_n je silno regulárna tvar

$$G_n = \begin{bmatrix} \langle\varphi_0, \varphi_0\rangle & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \langle\varphi_1, \varphi_1\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \langle\varphi_{n-2}, \varphi_{n-2}\rangle & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \langle\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle \end{bmatrix}.$$

Definujme maticu $G_n^{(1)}$ predpisom

$$G_n^{(1)} := [\langle \varphi_p, \varphi_1 \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{n-1} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_1 \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_1 \varphi_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_{n-1}, \varphi_1 \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_1 \varphi_{n-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

V prípade, že H_n je silno regulárna, matica $G_n^{(1)}$ bude tridiagonálna, pretože vzhľadom k (6.3) platí

$$\langle \varphi_1 \varphi_k, \varphi_t \rangle = \langle \varphi_t, \varphi_1 \varphi_k \rangle = \left\langle \varphi_t, (z + u_{0,1})(z^k + z^{k-1} u_{k-1,k} + ... + u_{0,k}) \right\rangle =$$

$$\left\langle \varphi_t, z^{k+1} + z^k (u_{k-1,k} + u_{0,1}) + ... + u_{0,1} u_{0,k} \right\rangle = 0,$$

pre $t = 0, ..., n-1$ a $k = 0, .., t-2$. Tzn. $G_n^{(1)}$ bude mať v prípade, že H_n je silno regulárna tvar

$$G_n^{(1)} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \langle \varphi_{n-2}, \varphi_{n-3} \rangle & \langle \varphi_{n-2}, \varphi_{n-2} \rangle & \langle \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1} \rangle \\ 0 & \cdots & 0 & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2} \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

V prípade, že H_n nebude silno regulárna, vytvorme množinu regulárnych indexov $\{i_k\}$, $k = 0, ..., K$, kde K je počet regulárnych blokov matice H_n (to znamená, počet regulárnych matic v množine $\{H_1, ..., H_n\}$). Pokiaľ $n \geq 1$, polynómy $\varphi_0(z) = 1$ a $\varphi_1(z) = z - \mu$, kde $\mu = \frac{s_1}{s_0}$ (μ je aritmetický priemer koreňov), budú regulárne a φ_n bude vzhľadom k vete 6.5 posledný regulárny polynóm. Preto platí $i_0 = 0, i_1 = 1$ a $i_K = n$.

Definujme postupnosť $\{\varphi_t\}_{t=0}^{\infty}$ tak, že pokiaľ t je regulárny index, φ_t bude regulárny FOP (určený jednoznačne) a pokiaľ t nie je regulárny index, $\varphi_t(z) = z^{t-r} \varphi_r(z)$, kde r bude najväčší regulárny index menší ako t. V prípade, že t nie je regulárny index, budeme φ_t nazývať **vnútorný polynóm**. Takto vytvorené polynómy môžme rozdeliť do blokov tak, že každý blok bude začínať regulárnym polynómom a zvyšné polynómy v danom bloku budú vnútorné

$$\begin{aligned} \Theta^{(0)} &:= [\varphi_0] \\ \Theta^{(1)} &:= [\varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \cdots \;\; \varphi_{i_2 - 1}] \\ \Theta^{(2)} &:= [\varphi_{i_2} \;\; \varphi_{i_2 + 1} \;\; \cdots \;\; \varphi_{i_3 - 1}] \\ \vdots & \quad\; \vdots \\ \Theta^{(K-1)} &:= \left[\varphi_{i_{K-1}} \;\; \varphi_{i_{K-1}+1} \;\; \cdots \;\; \varphi_{i_K - 1}\right] \\ \Theta^{(K)} &:= [\varphi_n \;\; \varphi_{n+1} \;\; \cdots]. \end{aligned}$$

Položme pre každý $p-$ tý blok dĺžku bloku $l_p := i_{p+1} - i_p$, kde $p = 0, ..., K-1$ a nech

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \begin{bmatrix} \langle \phi_0, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_0, \psi_q \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_p, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_p, \psi_q \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p+1)\times(q+1)}$$

pre každé dva vektory

$$\Phi := [\phi_0 \;\; \phi_1 \;\; \cdots \;\; \phi_p] \quad \Psi := [\psi_0 \;\; \psi_1 \;\; \cdots \;\; \psi_q] .$$

Nasledujúca veta popisuje štruktúru G_n v prípade, že H_n nie je silno regulárna.

Veta 6.11.

$$\left\langle \Theta^{(p)}, \Theta^{(q)} \right\rangle = \begin{cases} 0_{l_p \times l_q} & ak \quad p \neq q \\ \delta_p & ak \quad p = q \end{cases} \qquad pre \;\; p, q = 0, ..., K-1,$$

kde matica $\delta_p \in \mathbb{C}^{l_p \times l_p}$ je regulárna, symetrická, nulová nad vedľajšou diagonálou a na vedľajšej diagonále rovná $\left\langle z^{i_p + l_p - 1}, \varphi_{i_p} \right\rangle$, kde $p = 0, ..., K-1$. δ_p bude mať Hankelovu štruktúru.

Dôkaz. Vetu dokážeme pomocou indukcie vzhľadom k $\max\{p, q\}$. Pre nultý blok, teda $\Theta^{(0)} = [\varphi_0]$ platí

$$\left\langle \Theta^{(0)}, \Theta^{(0)} \right\rangle = [\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle] = [\langle 1, 1 \rangle] = [s_0] = \delta_0.$$

δ_0 je splňuje požadované vlastnosti. Prepokladajme, že veta platí pre $p, q = 0, 1, ..., k-1$, kde $k \in \{1, ..., K-1\}$. Označme prvý polynóm v bloku $\Theta^{(k)}$ ako φ_r a dĺžku toho bloku l, tzn.

$$\Theta^{(k)} = [\varphi_r \;\; \varphi_{r+1} \;\; \cdots \;\; \varphi_{r+l-1}] = \left[\varphi_r \;\; z\varphi_r \;\; \cdots \;\; z^{l-1}\varphi_r\right].$$

Keďže polynóm φ_r je regulárny a zvyšné polynómy v danom bloku sú vnútorné, matice H_r a H_{r+l} sú regulárne a matice $H_{r+1}, H_{r+2}, ..., H_{r+l-1}$ sú singulárne. Cieľom je dokázať, že

$$L := \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_0, z\varphi_r \rangle & \cdots & \left\langle \varphi_0, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_1, z\varphi_r \rangle & \cdots & \left\langle \varphi_1, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_{r-1}, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_{r-1}, z\varphi_r \rangle & \cdots & \left\langle \varphi_{r-1}, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle \end{bmatrix} = 0_{r \times l}.$$

a

$$\delta := \begin{bmatrix} \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_r, z\varphi_r \rangle & \cdots & \left\langle \varphi_r, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle \\ \langle z\varphi_r, \varphi_r \rangle & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ \left\langle z^{l-1}\varphi_r, \varphi_r \right\rangle & \cdots & \cdots & \left\langle z^{l-1}\varphi_r, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle \end{bmatrix}$$

je regulárna a má vyššie uvedené vlastnosti. δ bude mať Hankelovu štruktúru (plynie to zo symetričnosti δ a z vlastnosti, že pre ľubovoľné dva polynómy ψ, ϕ platí $\langle \psi, z\phi \rangle = \langle z\psi, \phi \rangle$).

Keďže φ_r je regulárny FOP, z (6.3) plynie

$$\left\langle \varphi_s, z^t \varphi_r \right\rangle = \left\langle z^t \varphi_s, \varphi_r \right\rangle = 0, \quad \text{pre } t + s < r.$$

Inými slovami, polynóm φ_r je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako r. Z toho plynie, že matica L bude mať

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \left\langle \varphi_{r-l+1}, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle^{\times} \\ \vdots & & & \overset{\times}{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & \left\langle \varphi_{r-l+2}, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle^{\otimes} \\ \vdots & & \overset{\times}{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & \overset{\otimes}{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & \vdots \\ 0 & \left\langle \varphi_{r-1}, z\varphi_r \right\rangle^{\times} & \left\langle \varphi_{r-1}, z^2\varphi_r \right\rangle^{\otimes} & \cdots & \left\langle \varphi_{r-1}, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle^{*} \end{bmatrix}.$$

Keďže φ_r je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako r, tzn. $\langle \varphi_t, \varphi_r \rangle = 0$, pre $t < r$ platí

$$\langle \varphi_{r-1}, z\varphi_r \rangle = \left\langle \varphi_{r-2}, z^2\varphi_r \right\rangle = \cdots = \left\langle \varphi_{r-l+1}, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle = \langle z^r, \varphi_r \rangle = \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle . \tag{6.8}$$

Keďže matica H_{r+1} je singulárna a platí $\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = \frac{\det H_{r+1}}{\det H_r}$ musí platiť, že $\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = 0$. Prvok $\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = 0$ je prvý prvok matice δ a keďže platí (6.8), je tomuto prvku, teda nule rovná prvá „antidiagonála" matice L (teda „antidiagonála", ktorá obsahuje prvky označené znakom $\times$). Polynóm φ_r je teda kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako $r + 1$, preto platí

$$\left\langle \varphi_{r-1}, z^2\varphi_r \right\rangle = \left\langle \varphi_{r-2}, z^3\varphi_r \right\rangle = \cdots = \left\langle \varphi_{r-l+2}, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle = \left\langle z^{r+1}, \varphi_r \right\rangle = \langle z\varphi_r, \varphi_r \rangle . \tag{6.9}$$

Definujme maticu R_r

$$R_r := \begin{bmatrix} 1 & u_{0,1} & \cdots & \cdots & u_{0,r-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{r-2,r-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

kde $u_{i,j}$ sú koeficienty polynómu φ_j, $j = 1, ..., r-1$, $i = 0, ..., j-1$. Dá sa ukázať, že platí

$$R_{r+2}^T H_{r+2} R_{r+2} = [\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{r+1} = G_{r+2} =$$
$$= \begin{bmatrix} \delta_0 & & & & & \\ & \delta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \delta_{k-1} & & \\ & & & & 0 & \langle z^{r+1}, \varphi_r \rangle \\ & & & & \langle z^{r+1}, \varphi_r \rangle & \langle z\varphi_r, z\varphi_r \rangle \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

Keďže matica H_{r+2} je singulárna, z predpokladu $\delta_0, ..., \delta_{k-1}$ sú regulárne a platí (6.11), potom musí platiť $\langle z^{r+1}, \varphi_r \rangle = 0$. Tomu to prvku je vzhľadom k (6.9) rovný druhý prvok prvého stĺpca a prvý prvok druhého stĺpca matice δ a zároveň celá druha „antidiagonála" matice L (teda „antidiagonála", ktorá obsahuje prvky označené znakom $\otimes$).

Polynóm φ_r je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako $r+2$. Podobne pokračujeme ďalej, zistíme, keďže $H_{r+3}, ..., H_{r+l-1}$ sú singulárne, H_{r+l} je regulárna, že platí

$$\langle z^{r+2}, \varphi_r \rangle = \langle z^{r+3}, \varphi_r \rangle = \left\langle z^{r+l-2}, \varphi_r \right\rangle = 0.$$

Prvok $\langle z^{r+l-2}, \varphi_r \rangle$ teda nula, je rovná prvku označeného znakom $*$ v matici L a prvkom na prvej vedľajšej diagonále matice δ (to je diagonála nachádzajúca sa tesne nad vedľajšou diagonálou). Polynóm φ_r je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako $r+l-1$, bude platiť

$$\left\langle z^{l-1}\varphi_r, \varphi_r \right\rangle = \left\langle z^{l-2}\varphi_r, z\varphi_r \right\rangle = \cdots = \left\langle \varphi_r, z^{l-1}\varphi_r \right\rangle = \left\langle z^{r+l-1}, \varphi_r \right\rangle \neq 0.$$

Teda prvky na vedľajšej diagonále matice δ budú rovné $\langle z^{r+l-1}, \varphi_r \rangle$. Matica δ bude regulárna, čo plynie z toho, že H_{r+l} je regulárna. $\square$

Poznamenajme, že v prípade, keď H_n nebude silno regulárna, matica $G_n = [\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{n-1}$ bude regulárna a blokovo diagonálna, $G_n = \mathrm{diag}(\delta_0, \delta_1, ..., \delta_{K-1})$.

Poznámka 6.12. Maticu $A = [a_{p,q}]_{p,q=0}^{l-1} \in \mathbb{C}^{l \times l}$ budeme nazývať dolná anti-Hessenbergova matica, pokiaľ $a_{p,q} = 0$, pre $p + q < l - 2$.

Nasledujúca veta popisuje štruktúru $G_n^{(1)}$ v prípade, že H_n nie je silno regulárna.

Veta 6.13.

$$\left\langle \Theta^{(p)}, \varphi_1 \Theta^{(q)} \right\rangle = \begin{cases} 0_{l_p \times l_q} & \textit{ak} \quad |p-q| > 1 \\ \varrho_p & \textit{ak} \quad p = q+1 \\ \varrho_q^T & \textit{ak} \quad p = q-1 \\ \delta_p^{(1)} & \textit{ak} \quad p = q \end{cases} \qquad \textit{pre} \;\; p, q = 0, ..., K-1,$$

kde matica $\delta_p^{(1)} \in \mathbb{C}^{l_p \times l_p}$ *je symetrická, dolná anti-Hessenbergova matica, na prvej nenulovej vedľajšej diagonále rovná* $\left\langle z^{i_p+l_p-1}, \varphi_{i_p} \right\rangle$*, kde* $p = 0, ..., K-1$*.* $\delta_p^{(1)}$ *má Hankelovu štruktúru.*$\delta_0^{(1)} = 0$*. Prvky matice* ϱ_p*, kde* $p = 1, ..., K-1$ *sú nulové okrem prvkov v pravom dolnom rohu, ktoré sú rovné* $\left\langle z^{i_p+l_p-1}, \varphi_{i_p} \right\rangle$*.*

Matica $G_n^{(1)} = [\langle \varphi_p, \varphi_1 \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{n-1}$ bude blokovo tridiagonálna a bude mať tvar

$$G_n^{(1)} := \begin{bmatrix} \delta_0^{(1)} & \varrho_1^T & & & \\ \varrho_1 & \delta_1^{(1)} & \varrho_2^T & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \varrho_{I-2} & \delta_{I-2}^{(1)} & \varrho_{I-1}^T \\ & & & \varrho_{I-1} & \delta_{I-1}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Napríklad, pre $n = 10$ a bloky

$$\begin{aligned} \Theta^{(0)} &= [\varphi_0] \\ \Theta^{(1)} &= [\varphi_1 \ \ \varphi_2 \ \ \varphi_3 \ \ \varphi_4] \\ \Theta^{(2)} &= [\varphi_5 \ \ \varphi_6 \ \ \varphi_7] \\ \Theta^{(3)} &= [\varphi_8 \ \ \varphi_9] \end{aligned}$$

budú mať matice G_n a $G_n^{(1)}$ tvar

$$G_n = \begin{bmatrix} \odot & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \odot & & & & & \\ & 0 & 0 & \odot & \oplus & & & & & \\ & 0 & \odot & \oplus & \oplus & & & & & \\ & \odot & \oplus & \oplus & \oplus & & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & \odot & & \\ & & & & & 0 & \odot & \oplus & & \\ & & & & & \odot & \oplus & \oplus & & \\ & & & & & & & & 0 & \odot \\ & & & & & & & & \odot & \oplus \end{bmatrix},$$

$$G_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \odot & & & & & \\ & 0 & 0 & \odot & \oplus & & & & & \\ & 0 & \odot & \oplus & \oplus & & & & & \\ & \odot & \oplus & \oplus & \oplus & & & & & \\ \odot & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & & & \odot & & \\ & & & & & 0 & \odot & \oplus & & \\ & & & & & \odot & \oplus & \oplus & & \\ & & & & \odot & \oplus & \oplus & \oplus & & \odot \\ & & & & & & & & \odot & \oplus \\ & & & & & & & \odot & \oplus & \oplus \end{bmatrix}.$$

Prvky označené $\odot$ sú nenulové a v každom bloku rovnaké.

Z vety 6.7 a 6.10 (matica M_t bude mať tvat G_t a matica $M_t^{(1)}$ bude mať tvar $G_t^{(1)}$) plynie, že pokiaľ $t \geq 1$ je regulárny index a $z_1, \cdots, z_t$ sú korene φ_t, potom vlastné čísla dvojice $(G_t^{(1)}, G_t)$ sú $z_1 - \mu, \cdots, z_t - \mu$, kde $\mu = \frac{s_1}{s_0}$ je aritmetický priemer koreňov. Obzvlášť, vlastné čísla dvojice $(G_n^{(1)}, G_n)$ sú $z_1 - \mu, \cdots, z_n - \mu$.

Veta 6.14. *Nech* $k \in \mathbb{N}$. *Potom* $\det G_k = \det H_k$ *a* $\det G_k^{(1)} = \det (H_k^{(1)} - \mu H_k)$*, kde* $\mu = \frac{s_1}{s_0}$ *je aritmetický priemer koreňov.*

Dôkaz. Nech $R_k \in \mathbb{C}^{k\times k}$ je definovaná podľa (6.10). Potom ako už bolo spomenuté G_k sa dá rozložiť ako

$$G_k = R_k^T H_k R_k.$$

Keďže R_k je horná trojuholníková matica s jednotkovými prvkami na diagonále, platí $\det R_k = \det R_k^T = 1$. Preto platí

$$\det G_k = \det H_k.$$

Keďže $\varphi_1(z) = z - \mu$ (μ je aritmetický priemer koreňov), platí

$$G_k^{(1)} = [\langle \varphi_p, z\varphi_q\rangle]_{p,q=0}^{k-1} - [\langle \varphi_p, \mu\varphi_q\rangle]_{p,q=0}^{k-1} = [\langle \varphi_p, z\varphi_q\rangle]_{p,q=0}^{k-1} - \mu G_k.$$

Matica $[\langle \varphi_p, z\varphi_q\rangle]_{p,q=0}^{k-1}$ sa dá (podobne ako G_k) rozložiť

$$[\langle \varphi_p, z\varphi_q\rangle]_{p,q=0}^{k-1} = R_k^T H_k^{(1)} R_k,$$

a preto

$$G_k^{(1)} = R_k^T H_k^{(1)} R_k - \mu R_k^T H_k R_k = R_k^T (H_k^{(1)} - \mu H_k) R_k.$$

Z čoho plynie

$$\det G_k^{(1)} = \det (H_k^{(1)} - \mu H_k).$$

□

Nasledujúca veta zovšeobecňuje vetu 6.8.

Veta 6.15. *Nech* $t \geq 1$, r *je najväčší regulárny index menší alebo rovný ako* t. *Potom vlastné čísla dvojice* $(G_t^{(1)}, G_t)$ *sú vlastné čísla dvojice* $(G_r^{(1)}, G_r)$ *a o zvyšných vlastných číslach (bude ich* $t - r$*) nemáme žiadnu informáciu.*

6.2 Algoritmus

Neznáme korene f môžeme spočítať pomocou vlastných čísel dvojice $(G_n^{(1)}, G_n)$. Potrebujeme však poznať n (počet navzájom rôznych koreňov) a FOP $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$. Pokiaľ $t \in \{0, \cdots, n-1\}$ bude regulárny index (tzn. matica G_t a teda i H_t bude regulárna), určíme korene φ_t pomocou vlastných čísel dvojice $(G_t^{(1)}, G_t)$. V opačnom prípade bude φ_t vnútorný polynóm. Na príklade si ilustrujme, ako by mohol algoritmus vypadať.

Najprv spočítame $N = s_0 = \langle 1, 1 \rangle$, teda počet všetkých koreňov funkcie f. Prepokladajme, že $N = 10$. Spočítame $\mu = \frac{s_1}{s_0} = \frac{\langle 1,z \rangle}{\langle 1,1 \rangle}$. Polynóm φ_0 a φ_1 týmto už poznáme, $\varphi_0(z) = 1$ a $\varphi_1 = z - \mu$. Otázkou je, či $n = 1$ alebo $n > 1$. Pokiaľ by $n = 1$, potom by matica H_{1+t+1} a teda i G_{1+t+1} bola singulárna pre všetky $t \geq 0$. Keďže φ_1 je regulárny FOP a platí $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \frac{\det H_2}{\det H_1}$ (viď veta 6.4), H_2 a teda i G_2 bude singulárna práve vtedy keď $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 0$. Predpokladajme, že $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \neq 0$. V tom prípade G_2 bude regulárna, teda φ_2 bude regulárny FOP a $n > 1$. Spočítaním vlastných čísel dvojice $(G_2^{(1)}, G_2)$, kde $G_2^{(1)}$ a G_2 budú vyzerať (viď štruktúru $G_k^{(1)}, G_k$ z vety 6.11 a 6.13)

$$G_2 = \begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{bmatrix} \quad G_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1^2 \rangle \end{bmatrix},$$

získame φ_2. Teda $\varphi_2(z) = (z - (\lambda_1 + \mu))(z - (\lambda_2 + \mu))$, kde λ_1, λ_2 sú vlastné čísla dvojice $(G_2^{(1)}, G_2)$. Spočítame $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle$ (určuje nám, či je G_3 regulárna, a teda či bude φ_3 regulárny FOP). Prepokladajme, že $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 0$. To znamená, že φ_3 bude vytvorený ako vnútorný polynóm. Ešte predtým musíme rozhodnúť, či $n = 2$ alebo $n > 2$. V prípade, že $n = 2$, G_{2+t+1} bude singulárna pre všetky $t \geq 0$. G_{2+t+1} je singulárna práve vtedy keď $\left\langle z^t \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle = 0$ (viď dôkaz vety 6.13). Vieme, že n môže byť najviac N. Preto, pokiaľ $G_3, \cdots, G_N$ budú singulárne, bude $n = 2$. Hľadáme teda $\tau \leq N - 2 - 1 = 7$ tak, aby $\langle z^\tau \varphi_2, \varphi_2 \rangle \neq 0$ a $\left\langle z^t \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle = 0$, pre $t = 0, \cdots, \tau - 1$. Pokiaľ také τ nenájdeme, $n = 2$. V prípade, že nájdeme také τ, znamená to, že $G_{2+\tau+1}$ je regulárna a $G_3, \cdots, G_{2+\tau}$ sú singulárne. $\tau + 1$ určuje dĺžku bloku, ktorý začína regulárnym FOP φ_2 a zvyšné polynómy sú vnútorné. Predpokladajme, že $\langle z\varphi_2, \varphi_2 \rangle = 0$ a $\left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle \neq 0$. To znamená, že polynómy φ_3 a φ_4 budú vnútorné a φ_5 bude regulárny. Preto $\varphi_3(z) = z\varphi_2(z)$, $\varphi_4(z) = z^2\varphi_2(z)$ a korene φ_5 získame pomocou vlastných čísel dvojice $(G_5^{(1)}, G_5)$, kde $G_5^{(1)}$ a G_5 budú vypadať

$$G_5 = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle \\ 0 & 0 & 0 & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^3 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle \\ 0 & 0 & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^3 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^4 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle \end{bmatrix},$$

$$G_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1^2 \rangle & 0 & 0 & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle \\ 0 & 0 & 0 & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \right\rangle \\ 0 & 0 & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^3 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \right\rangle \\ 0 & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^2 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^3 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \right\rangle & \left\langle z^4 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \right\rangle \end{bmatrix}.$$

φ_5 bude mať tvar
$\varphi_5(z) = (z-(\lambda_1+\mu))(z-(\lambda_2+\mu))(z-(\lambda_3+\mu))(z-(\lambda_4+\mu))(z-(\lambda_5+\mu))$, kde $\lambda_1, \cdots, \lambda_5$ sú vlastné čísla dvojice $(G_5^{(1)}, G_5)$. Ďalej spočítame $\langle \varphi_5, \varphi_5 \rangle$. Predpokladajme, že $\langle \varphi_5, \varphi_5 \rangle = 0$, tzn. G_6 bude singulárna. Hľadáme $\tau \leq N - 5 - 1 = 4$ tak, aby $\langle z^\tau \varphi_5, \varphi_5 \rangle \neq 0$ a $\left\langle z^t \varphi_5, \varphi_5 \right\rangle = 0$, pre $t = 0, ..., \tau - 1$. Prepokladajme, že
$\langle z\varphi_5, \varphi_5 \rangle = \left\langle z^2 \varphi_5, \varphi_5 \right\rangle = \left\langle z^3 \varphi_5, \varphi_5 \right\rangle = \left\langle z^4 \varphi_5, \varphi_5 \right\rangle = 0$. To znamená, že G_{10} bude singulárna, a preto $n = 5$. Našli sme teda 5 navzájom rôznych koreňov f, ktoré sú koreňmi φ_5. Násobnosti k týmto koreňov, určíme riešením sústavy (6.7).

V praxi však algoritmus tak „jednoducho" fungovať nebude. Pre regulárne FOP φ_t platí, že determinant matice G_t je nenulový a v prípade vnútorného polynómu je nulový. Keďže determinant G_t je určený formou $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ktorú získame pomocou numerickej integrácie (v našom prípade lichobežníkovým pravidlom), dostaneme jeho aproximáciu, ale nie skutočnú hodnotu. Preto, pokiaľ by sme vyhodnocovali tento determinant ako „byť rovný nule", dostali by sme len regulárne FOP. Môže sa preto zdať, že vnútorné polynómy nie sú potrebné pre výpočet. Nazvime regulárny FOP φ_t dobre podmienený, ak príslušný problém hľadania koreňov tohoto polynómu, teda vlastných čísel dvojice $(H_t^{(1)}, H_t)$ je dobre podmienený. Pre stabilný algoritmus je rozhodujúce generovať len dobre podmienené regulárne FOP. V tomto prístupe sú bloky $\langle \Theta, \Theta \rangle$ „jemne" väčšie ako je nutné nato, aby sme sa vyhli zle podmieneným blokom. Inými slovami, podmienka nato, aby bol φ_t regulárny, bude „jemne" silnejšia, čím dostaneme viac vnútorných polynómov a tým aj väčšie bloky. Má to nasledujúcu nevýhodu. Nech
$\Theta = \left[\varphi_r \;\; z\varphi_r \;\; \cdots \;\; z^{l-1}\varphi_r\right]$ je blok dĺžky l, ktorý začína dobre podmieneným regulárnym FOP. Matica $\langle \Theta, \Theta \rangle$ nebude dolná trojuholníková, tzn. budeme teda musieť pridať prvky do matice G a $G^{(1)}$, pretože $\langle z^\alpha \varphi_r, \varphi_q \rangle$ pre $\alpha = 0, 1, \cdots, l-1$, bude nula len v prípade, že $q = 0, 1, \cdots, r - \alpha - 1$ a $\langle z^\alpha \varphi_r, \varphi_1 \varphi_q \rangle$ pre $\alpha = 0, 1, \cdots, l-1$, bude nula len prípade, že $q = 0, 1, \cdots, r - \alpha - 2$. [5].

Na vstupe algoritmu požadujeme tri hodnoty. Prvou bude forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (viď (6.1), teda integrál zahŕňajúci funkciu f a krivku γ, vo vnútri ktorej hľadáme korene f) a hodnoty ε_{cond} a ε_{stop} tak, aby $\varepsilon_{stop} < \varepsilon_{cond}$. Hodnota ε_{cond} určuje dĺžku bloku a ε_{stop} určuje, kedy má algoritmus skončiť, teda pre nejaký polynóm φ_r bude $r = n$. Predpokladajme, že algoritmus vygeneruje nejaký regulárny FOP (prvý regulárny FOP je φ_0). Pokiaľ $|\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle| \geq \varepsilon_{cond}$, potom φ_{r+1} bude vygenerovaný ako regulárny FOP. V opačnom prípade hľadáme najmenšie t také, že $t \leq N - 1 - r$ a $\left|\left\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \right\rangle\right| > \varepsilon_{cond}$. Hodnota tohto t bude dĺžka bloku (teda presnejšie, dĺžka bloku bude $t+1$, t bude počet vnútorných polynómov v bloku). Pokiaľ také t nenájdeme, a zároveň $\left|\left\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \right\rangle\right| < \varepsilon_{stop}$ pre všetky $t \in \{0, \cdots, N-1-r\}$, bude $n = r$ a hľadané korene budú korene φ_r. Pokiaľ také t nenájdeme, a zároveň $\left|\left\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \right\rangle\right| \geq \varepsilon_{stop}$ pre nejaké $t \in \{0, \cdots, N-1-r\}$, použijeme ako dĺžku bloku hodnotu m, pre ktorú platí $|\langle z^m \varphi_r, \varphi_r \rangle| = \max\limits_{0 \leq t \leq N-1-r} \left|\left\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \right\rangle\right|$.

Algoritmus bude vypadať následovne:

Vstup: $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ε_{cond}, ε_{stop}, *tak aby* $\varepsilon_{cond} > \varepsilon_{stop}$
Výstup: n, korene
  $N \leftarrow \langle 1, 1\rangle$
  if $N = 0$ **then**
    $n \leftarrow 0$ korene $\leftarrow \emptyset$
  else
    $\varphi_0(z) \leftarrow 1$
    $\mu \leftarrow \langle z, 1\rangle \backslash N$; $\varphi_1(z) \leftarrow z - \mu$
    $r \leftarrow 1$
    while $r < N$ **do**
      if $|\langle\varphi_r, \varphi_r\rangle| \geq \varepsilon_{cond}$ **then**
        vygenerovať φ_{r+1} *ako regulárny FOP pomocou vlastných čísel dvojice* $(G_r^{(1)}, G_r)$
        $r \leftarrow r + 1$
      else
        vsetky_male $\leftarrow 1$; t_nenajdene $\leftarrow 1$; maximum $\leftarrow 0$; $t \leftarrow 0$
        while t_nenajdene $= 1$ **and** $t \leq N - 1 - r$ **do**
          el $\leftarrow |\langle z^t\varphi_r(z), \varphi_r(z)\rangle|$
          if vsetky_male $= 1$ **and** (el $< \varepsilon_{stop}$) **then**
            vsetky_male $\leftarrow 1$
          else
            vsetky_male $\leftarrow 0$
          end if
          if (el $\geq \varepsilon_{cond}$) **then**
            t_nenajdene $\leftarrow 0$; t_large $\leftarrow t$
          end if
          if (el $>$ maximum) **then**
            maximum $\leftarrow$ el; t_max $\leftarrow t$
          end if
          $t \leftarrow t + 1$
        end while
        if t_nenajdene $= 1$ **then**
          if vsetky_male $= 1$ **then**
            $n \leftarrow r$; korene $\leftarrow$ korene(φ_r); **stop**
          else
            dlzka_bloku $\leftarrow$ t_max
          end if
        else
          dlzka_bloku $\leftarrow$ t_large
        end if
        for $i = 1$: dlzka_bloku **do**
          $\varphi_{r+i}(z) \leftarrow z^i\varphi_r(z)$
        end for
        vygenerovať $\varphi_{r+\text{dlzka\_bloku}+1}$ *ako regulárny FOP pomocou vlastných čísel dvojice* $(G^{(1)}_{r+\text{dlzka\_bloku}}, G_{r+\text{dlzka\_bloku}})$
        $r \leftarrow r + \text{dlzka\_bloku} + 1$

end if
end while
$n \leftarrow N$; korene $\leftarrow$ korene(φ_N); **stop**
end if

6.3 Numerické výsledky

Vo všetkých následujúcich príkladoch budeme formu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aproximovať lichobežníkovým pravidlom s ukončujúcou podmienkou na zdojnásobovanie dielkov $\varepsilon_{int} = 0.01$, počínajúc 150 dielkami.

Príklad 6. Majme funkciu

$$f(z) = (z - 0.5)(z - 1)(z - 1.5)(z - 2)(z - 2.5)(z - 3)(z - 3.5)(z - 4)(z - 4.5)(z - 5).$$

Táto funkcia má korene $z_i = 0.5 \cdot i$, $i = 1, \cdots, 10$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{10} = 1$ (korene uvažujeme v kruhu so stredom v počiatku a s polomerom $\frac{11}{2}$) .
Aplikujme algoritmus FOP. Zvoľme ε_{cond} (určujúci dĺžku bloku), $\varepsilon_{cond} = 1$ a $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$. Algoritmus vygeneruje len regulárne FOP, rozhodne, že $n = 10$ a určí aproximáciu koreňov pomocou vlastných čísel dvojice $(G_{10}^{(1)}, G_{10})$. Aproximácia bude celkom presná:

$$\begin{aligned}
\mathtt{z}_1 &= +4.9999999999999950887822831 &&+2.2365350018585655438145 70 \cdot 10^{-14}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_2 &= +0.4999999999999895029008910 &&+4.7624718706021713600633 38 \cdot 10^{-14}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_3 &= +4.4999999999995536126672912 &&+1.9956092190480993042734 01 \cdot 10^{-12}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_4 &= +0.9999999999992112028176322 &&+3.7131841364202959555672 67 \cdot 10^{-12}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_5 &= +3.9999999999921349794339356 &&+3.5249600735961535086024 00 \cdot 10^{-11}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_6 &= +1.4999999999883118456208806 &&+5.5936827288891982828695 36 \cdot 10^{-11}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_7 &= +3.4999999999533539946776575 &&+2.1223345071668948101555 82 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_8 &= +1.9999999999410742714758237 &&+2.8205841807394322753915 97 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_9 &= +2.9999999998863309276275573 &&+5.2772334991720382525461 13 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_{10} &= +2.4999999998772024033290489 &&+5.8091894000568307603259 72 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};
\end{aligned}$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= +1.0000006181557225217936 86 &&-2.5739729102788765701430 31 \cdot 10^{-13}\mathtt{i};\\
\alpha_2 &= +0.9999999999998827547595634 &&+5.3654521483629510836133 41 \cdot 10^{-13}\mathtt{i};\\
\alpha_3 &= +1.0000000000031687555447961 &&-1.4102415537244401078889 73 \cdot 10^{-11}\mathtt{i};\\
\alpha_4 &= +0.9999999999947001798808047 &&+2.5141711475998677725493 27 \cdot 10^{-11}\mathtt{i};\\
\alpha_5 &= +1.0000000000357963845258963 &&-1.6114593627495144627086 30 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\alpha_6 &= +0.9999999999507057559590359 &&+2.3676767007877588442205 48 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\alpha_7 &= +1.0000000001227101587195130 &&-5.6628988315007440056765 90 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\alpha_8 &= +0.9999999998636941611416995 &&+6.4875441040788018857373 54 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\alpha_9 &= +1.0000000001086867450406649 &&-5.2622345077081778350178 24 \cdot 10^{-10}\mathtt{i};\\
\alpha_{10} &= +0.9999999999206067298617283 &&+3.5681874584662777324656 37 \cdot 10^{-10}\mathtt{i}.
\end{aligned}$$

V porovnaní s metódou Newtonových súm (viď príklad 2) alebo v porovnaní s aproximáciou koreňov pomocou vlastných čísel dvojice príslušných matíc $(H_{10}^{(1)}, H_{10})$ (viď príklad 5) získame omnoho lepšiu aproximáciu koreňov.

Príklad 7. Majme funkciu

$$f(z) = (z - 0.5 + 2i)^4 (z - 1)^2 (z - 0.25i)^2 (z + 2 - 0.75i)^4.$$

Chceme nájsť korene f v kruhu so stredom v počiatku a polomerom 3. Zvoľme $\varepsilon_{cond} = 1$ a $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$. Algoritmus vygeneruje len regulárne FOP, získame aproximáciu

$$\begin{array}{lcll}
\mathtt{z}_1 & = & -\mathtt{2.000000000000000000000014} & +\mathtt{0.749999999999999999999991i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & +\mathtt{0.500000000000000000000013} & -\mathtt{2.000000000000000000000014i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & +\mathtt{0.999999999999999999999919} & +\mathtt{6.37} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_4 & = & +\mathtt{7.54} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}} & +\mathtt{0.249999999999999999999975i};
\end{array}$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$\begin{array}{lcll}
\alpha_1 & = & +\mathtt{3.999999999999999999999689} & +\mathtt{2.291058066781989871996152} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}}\mathtt{i}; \\
\alpha_2 & = & +\mathtt{3.999999999999999999999857} & -\mathtt{5.622227528386813756245476} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}}\mathtt{i}; \\
\alpha_3 & = & +\mathtt{2.000000000000000000000186} & -\mathtt{4.001799151763282504352822} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{22}}\mathtt{i}; \\
\alpha_4 & = & +\mathtt{2.000000000000000000000009} & +\mathtt{5.542116097923764892777754} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{22}}\mathtt{i}.
\end{array}$$

Skúsme zmeniť ε_{cond} a zvoľme ho $\varepsilon_{cond} = 100$. Hodnotu ε_{stop} nechajme rovnakú, teda $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$. Algoritmus rozhodne, že $n = 5$. Polynómy φ_0, φ_1 a φ_5 vygeneruje ako regulárne a polynómy φ_2, φ_3 a φ_4 vygeneruje ako vnútorné. Aproximácia koreňov bude

$$\begin{array}{lcll}
\mathtt{z}_1 & = & +\mathtt{0.500000000000000000000005} & -\mathtt{2.000000000000000000000003i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & -\mathtt{1.999999999999999999999988} & +\mathtt{0.749999999999999999999996i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & +\mathtt{0.999999999999999999999936} & +\mathtt{7.42} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_4 & = & +\mathtt{2.903} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{22}} & +\mathtt{0.250000000000000000000130i}; \\
\mathtt{z}_5 & = & -\mathtt{2.131583461684562238443964} & +\mathtt{1.390740562817270034221598i};
\end{array}$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$\begin{array}{lcll}
\alpha_1 & = & +\mathtt{3.999999999999999999999939} & -\mathtt{6.451447086575132784547315} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}}\mathtt{i}; \\
\alpha_2 & = & +\mathtt{3.999999999999999999999908} & +\mathtt{1.975802708480941913481389} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{22}}\mathtt{i}; \\
\alpha_3 & = & +\mathtt{2.000000000000000000000080} & -\mathtt{5.443605472493482165264987} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{22}}\mathtt{i}; \\
\alpha_4 & = & +\mathtt{1.999999999999999999999818} & +\mathtt{6.028015079966965501285023} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}}\mathtt{i}; \\
\alpha_5 & = & -\mathtt{1.473377105460921655956087} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}} & -\mathtt{7.108676072969119710466932} \cdot \mathtt{10}^{-\mathtt{23}}\mathtt{i}.
\end{array}$$

Posledný „falošný" koreň z_5 môže byť jednoducho odstránený s určením násobností. Falošný koreň sa objavil preto, lebo hodnota ε_{cond} bola príliš veľká, preto algoritmus vygeneroval v skutočnosti regulárny φ_4 ako vnútorný polynóm. Veta 6.15 hovorí, pokiaľ 4 je najväčší regulárny index menší ako rovný 5, vlastné čísla dvojice $(G_5^{(1)}, G_5)$ budú vlastné vlastné čísla dvojice $(G_4^{(1)}, G_4)$ a jedno vlastné číslo bude ľubovoľné. Preto sa objavil ľubovoľný falošný koreň, ktorého násobnosť bude 0.

Čo by sa stalo keby, bola hodnota ε_{stop} príliš malá? Zvoľme $\varepsilon_{stop} = 10^{-20}$ a $\varepsilon_{cond} = 1$. Algoritmus vygeneruje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ a φ_4 ako regulárne FOP. Potom zistí, že pre všetky $t \in \{0, 1, \cdots, , 7\}$ je $\left\langle z^t\varphi_4, \varphi_4 \right\rangle < \varepsilon_{cond}$, ale existuje nejaké $t \in \{0, 1, \cdots, 7\}$ také, že $\left\langle z^t\varphi_4, \varphi_4 \right\rangle \geq \varepsilon_{stop}$. Taktiež zistí, že pre $t = 7$ je hodnota $\left\langle z^t\varphi_4, \varphi_4 \right\rangle$ najväčšia, vyhodnotí $t = 7$ ako počet vnútorných polynómov v danom bloku. Preto bude následujúcich 7 polynómov, teda $\varphi_5, \cdots, \varphi_{11}$ vnútorných a φ_{12} bude regulárny FOP. Keďže $N = 12$ (teda počet všetkých koreňov f v uvažovanom kruhu), vyhodnotí korene f ako korene φ_{12}. Aproximácia koreňov je nasledovná:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{z}_1 &= -1.99999999999999999999996 && +0.74999999999999999999989\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_2 &= -2.96873941361222312175187 && +3.40734595615579677322908\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_3 &= -3.58010727341591339894124 && +1.55720567226280842790861\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_4 &= +2.62921727834366864296753 && -0.71622681276701376005593\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_5 &= +0.49999999999999999999997 && -2.00000000000000000000034\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_6 &= +0.99999999999999999999846 && +6.052 \cdot 10^{-22}\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_7 &= -0.71724310250178225891843 && -2.12309067949307018152210\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_8 &= -1.50923919177012358815778 && -1.60881697953183740293822\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_9 &= -4.034 \cdot 10^{-22} && +0.25000000000000000000486\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_{10} &= +1.94945488851553182832940 && +1.32643551598149558509303\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_{11} &= -0.55601382557957046949468 && +2.71727011960189436766648\mathtt{i};\\
\mathtt{z}_{12} &= +0.25214650981909689471423 && +0.83500372949276835666874\mathtt{i};
\end{aligned}
$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= +3.99999999999999999999777 && -1.91658282290375698838483 \cdot 10^{-23}\mathtt{i};\\
\alpha_2 &= -4.43313936435519765096543 \cdot 10^{-25} && +2.33726043453453187113049 \cdot 10^{-25}\mathtt{i};\\
\alpha_3 &= +1.38574342302840265298493 \cdot 10^{-24} && +2.19569191013534332595310 \cdot 10^{-24}\mathtt{i};\\
\alpha_4 &= +6.10678838364077698030662 \cdot 10^{-24} && +7.48968207440692653655311 \cdot 10^{-25}\mathtt{i};\\
\alpha_5 &= +3.99999999999999999999731 && +4.96586082674690402991614 \cdot 10^{-23}\mathtt{i};\\
\alpha_6 &= +2.00000000000000000000794 && -3.04229430250373157451475 \cdot 10^{-21}\mathtt{i};\\
\alpha_7 &= -1.51901386214137288293447 \cdot 10^{-24} && +4.10854564384716704733464 \cdot 10^{-23}\mathtt{i};\\
\alpha_8 &= +3.59541397858408372643756 \cdot 10^{-23} && -2.29898062397025195455148 \cdot 10^{-23}\mathtt{i};\\
\alpha_9 &= +1.99999999999999999998194 && +4.52398170630724713342537 \cdot 10^{-21}\mathtt{i};\\
\alpha_{10} &= -4.68255449438165057092949 \cdot 10^{24} && -1.46675973946292700912575 \cdot 10^{-24}\mathtt{i};\\
\alpha_{11} &= +5.37158243397266169236940 \cdot 10^{-24} && -8.84500661916339018668499 \cdot 10^{-24}\mathtt{i};\\
\alpha_{12} &= +1.21212276348410250800426 \cdot 10^{-21} && -1.40309578717645268555801 \cdot 10^{-21}\mathtt{i}.
\end{aligned}
$$

„Falošné“ korene môžeme odhaliť určením násobností.

Príklad 8. Majme funkciu

$$f(z) = \mathrm{e}^{3z} + 2z\cos(z) - 1$$

Uvažujme korene f v kruhu so stredom v počiatku a polomerom 2. Korene tejto funkcie nepoznáme, preto pre porovnanie s našou nájdenou aproximáciou, použijeme korene nájdené pomocou mapleovskej funkcie `fsolve`. Na podčiarknutých desatinných miestach sa budú aproximované korene zhodovať s koreňmi nájdenými Mapleom. Zvoľme

$\varepsilon_{cond} = 0.1$ a $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$. Algoritmus vygeneruje len regulárne FOP a rozhodne, že $n = 4$.
Aproximované korene budú

$$
\begin{array}{lcll}
\mathtt{z}_1 & = & -\underline{\mathtt{1.8}}\mathtt{155999675277623299446 11} & +\mathtt{7.3727438345694436208595 60} \cdot 10^{-21}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & +\underline{\mathtt{0.5}}\mathtt{092879144652801615245 01} & -\underline{\mathtt{1.3}}\mathtt{021590228593304744647 08i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & +\underline{\mathtt{0.5}}\mathtt{092879144652801615395 03} & +\underline{\mathtt{1.3}}\mathtt{021590228593304744540 04i}; \\
\mathtt{z}_4 & = & +\underline{\mathtt{0.0}}\mathtt{168080197763929753611 02} & +\mathtt{2.9075828959559055731969 06} \cdot 10^{-21}\mathtt{i};
\end{array}
$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$
\begin{array}{lcll}
\alpha_1 & = & +\mathtt{1.0552303426139918198398 79} & +\mathtt{1.4394369602409525029226 23} \cdot 10^{-20}\mathtt{i}; \\
\alpha_2 & = & +\mathtt{1.0746773980533103403099 33} & +\mathtt{0.0097578684721972747805 21i}; \\
\alpha_3 & = & +\mathtt{1.0746773980533103403162 75} & -\mathtt{0.0097578684721972747405 72i}; \\
\alpha_4 & = & +\mathtt{0.7954200840977118001975 83} & -\mathtt{5.4343110667555353979609 45} \cdot 10^{-20}\mathtt{i}.
\end{array}
$$

Pokiaľ zvolíme $\varepsilon_{cond} = 1$ a $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$, algoritmus rozhodne, že $n = 4$, vygeneruje φ_0, φ_1 ako regulárny FOP, φ_2 vygeneruje ako vnútorný polynóm, φ_3 a φ_4 ako regulárne FOP. Aproximácia koreňov je nasledovná:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathtt{z}_1 & = & -\underline{\mathtt{1.8442339532622133749159 2}}\mathtt{7} & +\mathtt{2.3491756822786907961032 35} \cdot 10^{-25}\mathtt{i}; \\
\mathtt{z}_2 & = & +\underline{\mathtt{0.5308949302929305324718 3}}\mathtt{8} & +\underline{\mathtt{1.3317918767511209294339}}\mathtt{32i}; \\
\mathtt{z}_3 & = & +\underline{\mathtt{0.5308949302929305324718 3}}\mathtt{4} & -\underline{\mathtt{1.3317918767511209294339}}\mathtt{31i}; \\
\mathtt{z}_4 & = & -\mathtt{7.1} \cdot 10^{-24} & +\mathtt{9.7377507745795610088800 85} \cdot 10^{-24}\mathtt{i};
\end{array}
$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$
\begin{array}{lcll}
\alpha_1 & = & +\mathtt{1.0000052228183243006640 46} & +\mathtt{2.7369624282911076976439 89} \cdot 10^{-24}\mathtt{i}; \\
\alpha_2 & = & +\mathtt{0.9999999999999999999997 91} & +\mathtt{7.1946404943317372588178 67} \cdot 10^{-23}\mathtt{i}; \\
\alpha_3 & = & +\mathtt{0.9999999999999999999997 98} & -\mathtt{6.4632570298744570457410 21} \cdot 10^{-23}\mathtt{i}; \\
\alpha_4 & = & +\mathtt{1.0000000000000000000000 32} & -\mathtt{1.0290797072863909828412 45} \cdot 10^{-23}\mathtt{i}.
\end{array}
$$

Tento príklad ilustruje ako je dôležité generovať len dobre podmienené regulárne FOP. Ako už bolo spomenuté, je vhodné zvoliť bloky „jemne“ väčšie, aby sa predišlo zle podmieneným regulárnym FOP. V tomto prípade, keby bolo $\varepsilon_{cond} = 0.1$, každý blok by mal dĺžku jedna - teda boli by v ňom len regulárne FOP. V prípade, že $\varepsilon_{cond} = 1$, druhý blok bude mať dĺžku dva - bude sa v ňom vyskytovať regulárny FOP φ_1 a vnútorný polynóm φ_2. Aproximácia koreňov bude tým o niečo presnejšia.

7 Záver

Táto práca sa zaoberala vlastnosťami koreňov holomorfných funkcií a následne metódami pre aproximáciu týchto koreňov. Cieľom práce bolo zoznámiť sa s teóriou komplexných funkcií, predovšetkým teóriou reziduí. To sme využili pri odvodení metód hľadajúcich neznáme korene.
Všetky korene funkcie f vo vnútri krivky γ nie je tak jednoduché získať. Software Maple alebo Matlab vždy určia len jeden koreň danej funkcie, pokiaľ sa nejedná o polynóm. Táto práca obsahuje metódy, ktoré aproximujú všetky korene f v $\operatorname{int} \gamma$.
Metóda Newtonových súm je založená na vytvorení polynómu stupňa N (N je počet všetkých koreňov vrátane násobností funkcie f v $\operatorname{int} \gamma$), majúceho rovnaké korene ako f. Koeficienty tohto polynómu získame riešením sústavy obsahujúcej hodnoty získané numerickou integráciou. Problém hľadania koreňov pomocou tejto metódy je zle podmienený v tom zmysle, že pokiaľ zmeníme hodnoty danej sústavy veľmi malo, dostaneme veľké zmeny v koreňoch polynómu, ktorého koeficienty sú riešením tejto sústavy. Čím väčšie bude N, tým horšie bude podmienený problém hľadania koreňov f. Táto zlá podmienenosť sa dá čiastočne vyriešiť tým, že vnútro danej krivky rozdelíme na niekoľko podoblastí, v ktorých sa vyskytuje len predom zvolený malý počet koreňov. Pokiaľ má však f koreň veľkej násobnosti, delenie vnútra krivky neprinesie úspech.
Metóda založená na formálnych ortogonálnych polynómoch spočíva vo vytvorení polynómu stupňa n (n je počet všetkých navzájom rôznych koreňov f v $\operatorname{int} \gamma$), ktorý má rovnaké korene ako f. Korene tohto polynómu sú vlastné čísla dvojice istých matíc. V porovnaní s metódou Newtonových súm nám táto metóda dáva lepšiu aproximáciu koreňov.
Možným pokračovaním práce by mohol byť odhad chyby aproximovaných koreňov pomocou oboch metód.

8 Literatúra

[1] BOUCHALA J. *Funkce komplexní proměnné*, Skripta Vysoká škola Báňská-Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

[2] KRAVANJA P., SAKURAI T., VAN BAREL M. *On Locating Clusters Of Zeros Of Analytic Function*, [online]. dostupné z: `http://www.kravanja.eu/pdf_files/Kravanja-1999-clusters.pdf`.

[3] DELVES L.M., LYNESS J.N. *A Numerical Method for Locating the Zeros of an Analytic Function*, [online]. dostupné z: `http://www.ams.org/journals/mcom/1967-21-100/S0025-5718-1967-0228165-4/S0025-5718-1967-0228165-4.pdf`.

[4] KRAVANJA P., VAN BAREL M., HAEGEMANS A. *Computing zeros of analytic functions via modified moments based on formal orthogonal polynomials*, [online]. dostupné z: `http://www.cs.kuleuven.be/publicaties/rapporten/tw/TW246.pdf`.

[5] KRAVANJA P., VAN BAREL M., HAEGEMANS A. *On Computing Zeros of Analytic Functions and Related Problems in Structured Numerical Linear Algebra*, [online]. dostupné z: `http://www.kravanja.eu/pdf_files/Kravanja-1999-PhD.pdf`

[6] KOŘÍNEK V. *Základy algebry*, Praha: NČAV, 1956.

[7] VESELÝ J. *Komplexní analýza pro učitele*, Praha: Karolinum, 2000.

[8] LAZER A.C. *From the Cauchy-Riemann Equations to the Fundamental Theorem of Algebra*, Mathematics Magazine, Volume 79, Number 3, 210-213(4), June 2006.

[9] VODSTRČIL P. *Čemu vděčíme za základní větu algebry?*, [online]. dostupné z: `http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/zakladni_veta_algebry_vodstrcil.pdf` .

[10] BOUCHALA, J. *Čemu vděčíme za základní větu algebry?*, [online]. dostupné z: `http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/zakladni_veta_algebry_bouchala.pdf`.

[11] KALAS J. *Analýza v komplexním oboru*, Brno, Masarykova univerzita, 2006, ISBN 80-210-4045-9.

[12] BOUCHALA J., VODSTRČIL P. *Drobná překvapení spojená s numerickou integrací. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Jednota českých matematiků a fyziků.*, [online]. dostupné z: `http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141970/PokrokyMFA_55-2010-4_2.pdf`.

A Prílohy na CD

Priložené CD obsahuje nasledujúce súbory:

- `metoda_newtonovych_sum.mw` - mapleovský súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Metóda Newtonových súm
- `metoda_newtonovych_sum.pdf` - vyexportovaný súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Metóda Newtonových súm
- `formalne_ortogonalne_polynomy.mw` - mapleovský súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Formálne ortogonálne polynómy
- `formalne_ortogonalne_polynomy.pdf` - vyexportovaný súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Formálne ortogonálne polynómy