

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Faktorizace kompletních grafů na pulce
Factorizations of complete graphs into
tadpoles

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Tom Raiman**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika

Téma: **Faktorizace kompletních grafů na pulce**
Factorizations of complete graphs into tadpoles

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Faktorizace kompletních grafů na vzájemně izomorfní grafy je klasické téma teorie grafů.

Pulci jsou zvláštní případy unicyklických souvislých grafů, tedy grafů s jediným cyklem. Pulec na n vrcholech vznikne tak, že do jednoho vrcholu cyklu délky k připojíme cestu délky $n-k$. Souvislé unicyklické grafy na n vrcholech mají přesně n hran.

Hovoříme-li o faktorizaci kompletních grafů na unicyklické grafy, pak musíme žádat, aby počet hran unicyklů dělil počet hran kompletního grafu. Protože počet hran v kompletním grafu K_n je $n(n-1)/2$ a má být dělitelný n , musí být n liché.

V této práci se tedy budeme zabývat faktorizacemi kompletních grafů K_{2n+1} na pulce s $2n+1$ vrcholy. Využijeme znalosti faktorizací kompletních grafů K_{2n} na kostry. Měli bychom plně charakterizovat všechny pulce na $2n+1$ vrcholech, kteří faktorizují příslušný kompletní graf pro n liché.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] D. Fronček, P. Kovář, T. Kovářová, M. Kubesa: Factorizations of Complete Graphs into Caterpillars of Diameter 5, *Discrete Mathematics*, č. 310, 2010, str. 537-556
- [2] P. Kovář: Necessary conditions for factorizations of complete graphs into spanning trees, 2011, manuscript
- [3] H. Nedošínská: Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6, bakalářská práce, VŠB-TU Ostrava 2013
- [4] T. Raiman: Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6 a třemi bohatými vrcholy, bakalářská práce, VŠB-TU Ostrava 2014

Dále články, podle pokynů vedoucího bakalářské práce.


Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Michael Kubesa, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2015

Datum odevzdání: 29.04.2016





doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

vedoucí katedry

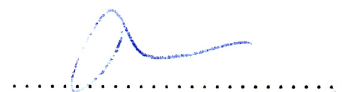


prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.

děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 26.4.2016



Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému vedoucímu diplomové práce panu RNDr. Michaelu Kubesovi, Ph.D. za odborné vedení, ochotu, trpělivost a rady, které mi velmi pomohly k napsání této diplomové práce.

Abstrakt

V této diplomové práci zkoumáme faktorizace na kompletních grafech K_{4k+3} na pulce pro $k \geq 1$ (pulec je graf G , který vznikne ztotožněním libovolného vrcholu cyklu C_m s koncovým vrcholem cesty délky $|V(G)| - m$, kde $3 \leq m \leq |V(G)| - 1$).

Ukážeme, že každý pulec na $4k + 3$ vrcholech faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} , je-li délka cyklu $m = 3, 4, \dots, 2k + 2, 2k + 4, \dots, 4k + 2$ pro k liché resp. $m = 3, 4, \dots, 2k + 1, 2k + 3, \dots, 4k + 2$ pro k sudé. Všimneme si, že chybí délky cyklů $m = 2k + 3$ pro k liché resp. $m = 2k + 2$ pro k sudé. Důkazy pro tyto délky ještě nejsou zcela dokončené, ale určitě se objeví v článku, který bude navazovat na tuto práci.

Klíčová slova: faktorizace, kompletní graf, unicyklický graf, pulec

Abstract

In this master thesis we investigate factorizations of complete graphs K_{4k+3} into tadpoles for $k \geq 1$ (a tadpole is a graph G that arise if we glue one terminal vertex of path of length $|V(G)| - m$ to an arbitrary vertex of cycle C_m for $3 \leq m \leq |V(G)| - 1$).

We show that every tadpole with $4k + 3$ vertices factorizes a complete graph K_{4k+3} if lengths of cycles are $m = 3, 4, \dots, 2k + 2, 2k + 4, \dots, 4k + 2$ for k odd resp. $m = 3, 4, \dots, 2k + 1, 2k + 3, \dots, 4k + 2$ for k even. We see that lengths of cycles $m = 2k + 3$ for k odd resp. $m = 2k + 2$ for k even are missing. Proofs of this lengths of cycles are not finished yet. But they will be featured in the article that follows this thesis.

Keywords: factorization, complete graph, unicycle graph, tadpole

Obsah

1	Úvod	9
2	Základní pojmy	10
2.1	Graf	10
2.2	Stupeň vrcholu a stupňová posloupnost	11
2.3	Základní třídy grafů	11
2.4	Podgrafy	12
2.5	Isomorfismus	14
2.6	Sled, tah a cesta	15
2.7	Souvislost grafu	16
2.8	Vzdálenost v grafu	16
2.9	Stromy a kostry	17
2.10	Unicyklický graf	18
3	Dekompozice a faktorizace grafů	19
3.1	Nutné podmínky dekompozice	19
3.2	Postačující podmínky dekompozice	21
3.3	Nutné podmínky faktorizace	22
3.4	Postačující podmínky faktorizace	23
3.5	Faktorizace kompletního bipartitního grafu	23
3.6	Smíšené ρ -ohodnocení	23
3.7	Přepínací ohodnocení	26
4	Faktorizace kompletních grafů na pulce	28
4.1	Nutné podmínky faktorizace kompletních grafů na unicyklické grafy	28
4.2	Postačující podmínky faktorizace kompletních grafů K_{2n+1} na unicyklické grafy, pro liché n	28
4.3	Pulci na $2n + 1$ vrcholech pro n liché	28
5	Závěr	47
	Reference	48

Seznam obrázků

1	Příklad grafu	10
2	Graf G , kde $\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 5, \deg(v_3) = 2, \deg(v_4) = 4, \deg(v_5) = 2, \deg(v_6) = 3, \deg(v_7) = 4, \deg(v_8) = 4, \delta(G) = 2, \Delta(G) = 5$	11
3	Příklady základních tříd grafů	12
4	Graf G a jeho: faktor F , podgraf H a indukovaný podgraf I	13
5	Isomorfní grafy G a H s isomorfismem $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_4, f(u_3) = v_2, f(u_4) = v_5, f(u_5) = v_3, f(u_6) = v_6$	14
6	$G \not\cong H$, protože G obsahuje C_3 na rozdíl od H	15
7	Ukázka sledu, tahu a cesty	16
8	Vzdálenosti od vrcholu u	17
9	Strom	17
10	Unicklycký graf	18
11	Příklad pulce $TP(6, 3)$	18
12	G -faktorizace kompletního grafu K_6 housenkou $(2, 3, 2)$	19
13	Cyklická G -dekompozice grafu H , je-li $G \cong C_3$ a $H \cong K_7$	20
14	Příklad ohodnocení vrcholů v K_6, K_8 a délek hran incidntních s vrcholem v_5 a v_7	21
15	ρ -ohodnocení v C_6	22
16	Strom T se smíšeným ohodnocením	24
17	Bicyklická T -faktorizace K_{10}	25
18	Přepínací ohodnocení housenky $(2, 4, 2, 2)$	26
19	Bicyklická faktorizace K_8 na housenky $(2, 4, 2, 2)$	27
20	Konstrukce pro $k = 3$	30
21	Konstrukce pro $k = 4$	31
22	Konstrukce pro $k = 7$	32
23	Konstrukce pro $k = 8$	33
24	Konstrukce pro $k = 3$	34
25	Konstrukce pro $k = 4$	35
26	Konstrukce pro $k = 7$	36
27	Konstrukce pro $k = 8$	37
28	Konstrukce pro $k = 3$	38
29	Konstrukce pro $k = 7$	39
30	Konstrukce pro $k = 3$	40
31	Konstrukce pro $k = 7$	41
32	Konstrukce pro $k = 4$	43
33	Konstrukce pro $k = 8$	44
34	Konstrukce pro $k = 4$	45
35	Konstrukce pro $k = 8$	46

1 Úvod

Faktorizace kompletních grafů představuje klasický problém nejen v teorii grafů, ale i teorii designů. Toto téma je zkoumáno od 60. let 20. století. Co se týče faktorizace kompletních grafů na kostry byly známy do přelomu tisíciletí pouze zřejmé výsledky (faktorizace na hamiltonovské cesty a dvojhvězdy). Díky práci týmu kolem prof. Frončka (Kovář, Kovářová, Kubesa) se podařilo úplně charakterizovat kostry s nejvýše čtyřmi nelistovými vrcholy, které faktorizují a které ne ([2], [3], [6], [5], [7], [9], [10]). Dále byly nalezeny některé faktorizující kostry s pěti nelistovými vrcholy ([13], [14]).

Ukazuje se, že pro faktorizace na unicyklické grafy lze s výhodou použít metod faktorizace na kostry. Unicyklickými grafy lze faktorizovat pouze kompletní grafy s lichým počtem vrcholů, tzn. K_{2n+1} . V práci chceme nalézt co největší třídu pulců, kteří faktorizují K_{2n+1} , pro n liché.

2 Základní pojmy

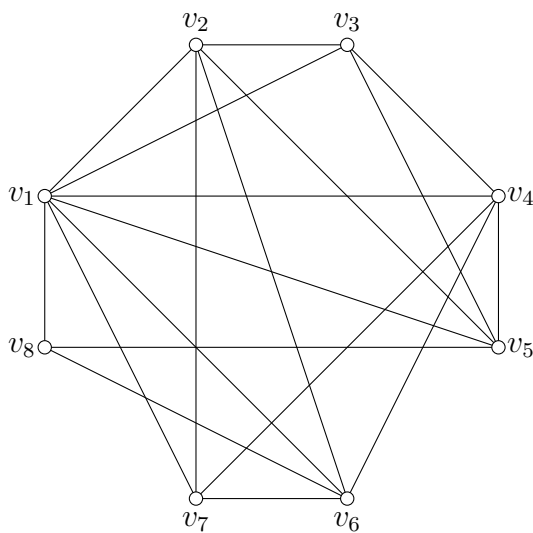
V rámci této kapitoly zavedeme základní pojmy z teorie grafů, které budeme potřebovat pro tuto práci. Většina definic je převzata z následujících skript [4].

2.1 Graf

2.1. Definice Graf G (také jednoduchý graf nebo obyčejný graf) je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran - množina dvouprvkových podmnožin množiny V .

Množině V nebo také $V(G)$ (chceme-li zdůraznit, že se jedná o graf G) říkáme *vrcholová* a množině E nebo také $E(G)$ říkáme *hranová*. Graf G lze také označit $G(V, E)$, nebo $G = (V, E)$. K zobrazení grafu lze využít diagram. Ten je výhodný pro zobrazení malých grafů. Vrcholy zobrazíme jako body v rovině (malá prázdná kolečka). Hrana $\{x, y\}$ bývá znázorněná v diagramu křivkou (nejčastěji úsečka nebo oblouk) spojující vrcholy x a y . Vrcholy x a y jsou *koncové vrcholy* hrany a říkáme, že vrchol x resp. y je *incidentní* s hranou $\{x, y\}$. Hranu $\{x, y\}$ značíme zkráceně xy . Jako *sousední* vrcholy označujeme vrcholy spojené hranou, jinak říkáme, že jsou vrcholy *nesousední* nebo *nezávislé*.

Pro popis hran používáme nejčastěji písmena e nebo f , vrcholy označujeme písmeny u, v, x, y . Incidentní hranu e s vrcholy u, v popisujeme jako $e = uv$, případně jen uv . Ukázka grafu je na obr. 1



Obr. 1: Příklad grafu

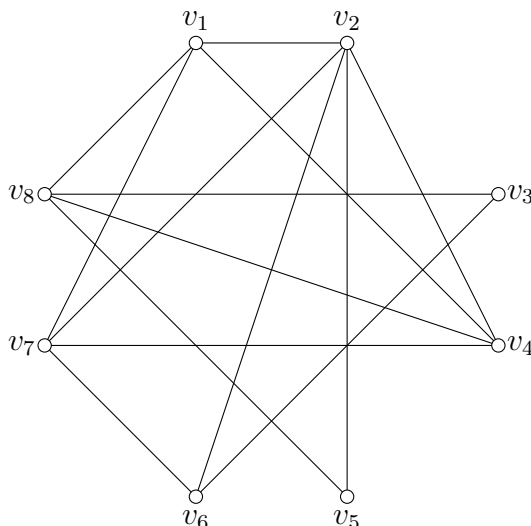
Grafy lze definovat i mnohem obecněji. V takových grafech se vyskytují *násobné hrany* (mezi dvěma vrcholy může být více hran) nebo *smyčky* (koncové vrcholy hrany jsou identické). Takové grafy označujeme jako *multigrafy*. Grafy bez smyček a násobných hran označujeme jako *jednoduché grafy*. V práci se zabýváme pouze jednoduchými grafy.

2.2 Stupeň vrcholu a stupňová posloupnost

2.2. Definice *Stupeň vrcholu* $v \in V(G)$ je počet hran, se kterými je vrchol v incidentní.

Stupeň vrcholu v grafu G značíme $\deg(v)$ respektive $\deg_G(v)$, chceme-li určit, kterému grafu patří vrchol v .

V grafu rozlišujeme *nejmenší stupeň vrcholu* a *největší stupeň vrcholu*, které značíme $\delta(G)$ respektive $\Delta(G)$, kde $\delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ a $\Delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$. Viz obr. 2



Obr. 2: Graf G , kde $\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 5, \deg(v_3) = 2, \deg(v_4) = 4, \deg(v_5) = 2, \deg(v_6) = 3, \deg(v_7) = 4, \deg(v_8) = 4, \delta(G) = 2, \Delta(G) = 5$

2.3. Definice Necht' $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $d_1 = \deg v_1 \geq d_2 = \deg v_2 \geq \dots \geq d_n = \deg v_n$. Potom posloupnost (d_1, d_2, \dots, d_n) je *stupňová posloupnost* grafu G .

2.3 Základní třídy grafů

2.4. Definice Graf na n vrcholech, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran, se nazývá *kompletní graf* a značí se K_n .

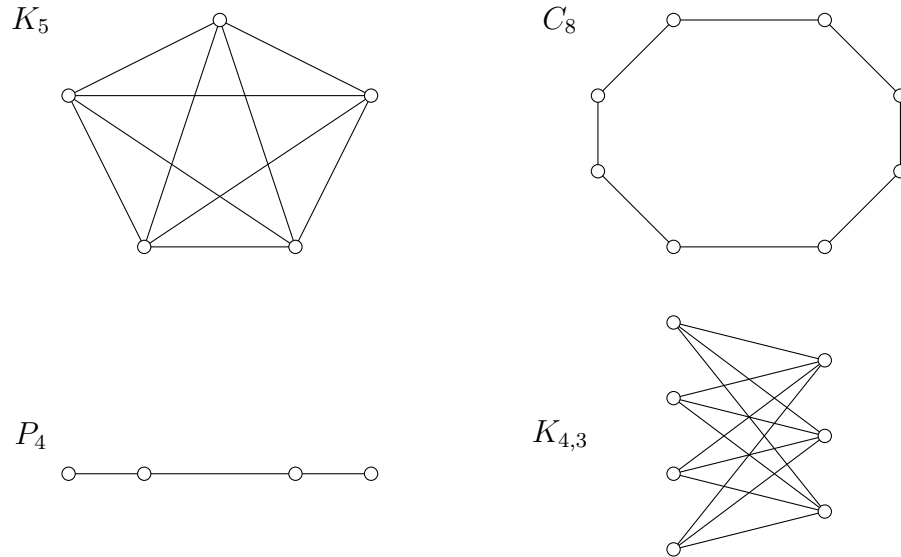
2.5. Definice Mějme graf G na n vrcholech, $n \geq 3$, a $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pokud $E(G) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{v_n v_1\}$, pak se graf G nazývá *cyklus* a značíme jej C_n . Číslo n je délka cyklu C_n .

2.6. Definice Mějme graf G na n vrcholech a $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pokud $E(G) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1\}$, pak se graf G nazývá *cesta* a značíme ji P_n . Číslo n je počet vrcholů cesty P_n . Počet hran v cestě P_n je délka cesty.

2.7. Definice Graf, který má vrcholovou množinu rozdělenou na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny M a N ($|M| = m, |N| = n$), a který obsahuje jen hrany uv , kde

$u \in M$ a $v \in N$, nazýváme *bipartitní graf*. Pokud bipartitní graf s partitami M a N obsahuje všech $m \cdot n$ hran, tak se nazývá *kompletní bipartitní graf* a značíme jej $K_{m,n}$.

Příklady základních tříd grafů vidíme na obr. 3



Obr. 3: Příklady základních tříd grafů

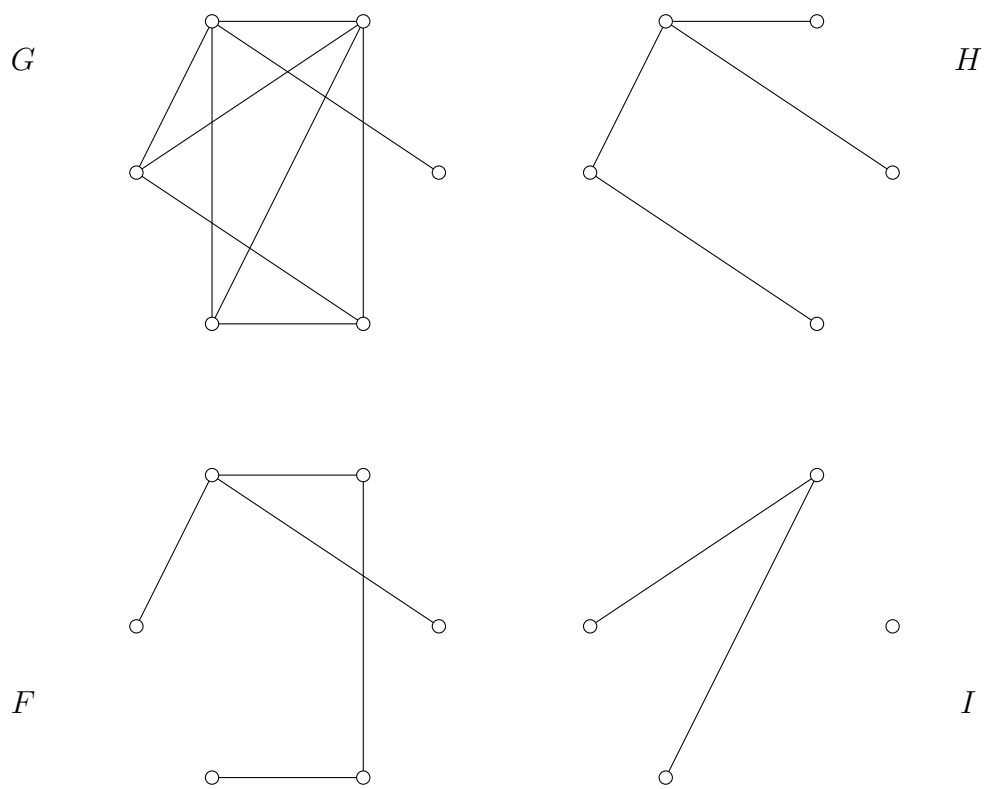
2.4 Podgrafy

2.8. Definice Graf H nazveme *podgrafem* grafu G , jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.

2.9. Definice Podgraf F grafu G nazveme *faktorem* G , jestliže $V(F) = V(G)$.

Podgraf H grafu G je *vlastním podgrafem*, pokud $V(G) \neq V(H)$ nebo $E(G) \neq E(H)$.

2.10. Definice *Indukovaný podgraf* H grafu G obsahuje všechny hrany grafu G , které jsou incidentní s vrcholy z $V(H)$. Příklady podgrafů si předvedeme na obr. 4

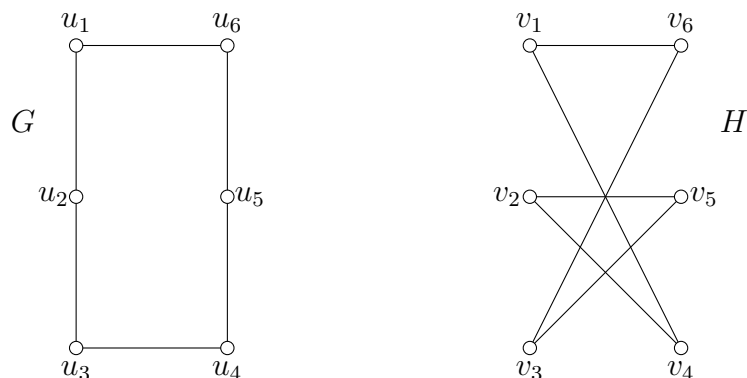


Obr. 4: Graf G a jeho: faktor F , podgraf H a indukovaný podgraf I

2.5 Isomorfismus

2.11. Definice *Isomorfismus* grafů G a H je bijektivní zobrazení $f : V(G) \rightarrow V(H)$, pro které platí, že každé dva vrcholy u, v v grafu G jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední jejich obrazy $f(u), f(v)$ v grafu H . Isomorfní grafy značíme $G \cong H$.

Je zřejmé, že hledané zobrazení f z definice zachovává strukturu grafu. Jsou-li $G \cong H$, pak diagramy grafu mohou vypadat jinak, ale struktura grafu je nezměněná. Ukázka je na obr. 5

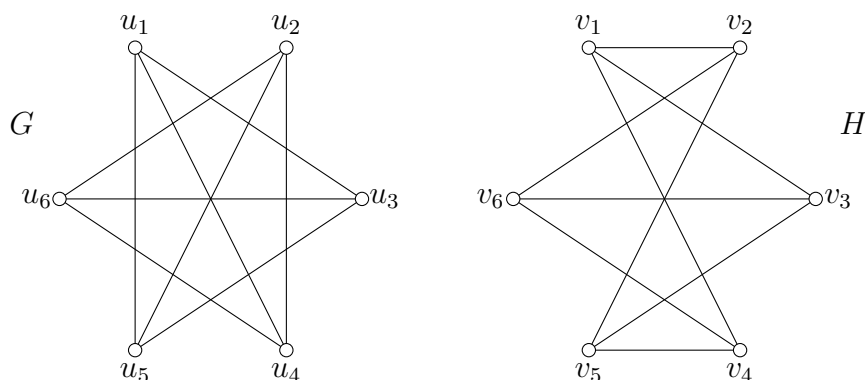


Obr. 5: Isomorfní grafy G a H s isomorfismem $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_4, f(u_3) = v_2, f(u_4) = v_5, f(u_5) = v_3, f(u_6) = v_6$

Uveďme některé nutné podmínky isomorfismu dvou grafů. Důkazy těchto podmínek lze nalézt zde [4]. Jsou-li G a H isomorfní, pak platí:

- $|V(G)| = |V(H)|$,
- $|E(G)| = |E(H)|$,
- G a H mají stejnou stupňovou posloupnost,
- má-li G podgraf N , pak H má podgraf N' , který je isomorfní s N .

Vzhledem k tomu, že výše uvedené podmínky jsou nutné, tak je lze výhodně použít abychom ukázali, že $G \not\cong H$. Pokud jsou splněny nelze říct, že $G \cong H$. Na obr. 6 je příklad neisomorfních grafů. G a H , které splňují první tři nutné podmínky, ale nespĺňují podmínku čtvrtou.



Obr. 6: $G \not\cong H$, protože G obsahuje C_3 na rozdíl od H

2.6 Sled, tah a cesta

2.12. Definice (v_0, v_n) -*sledem* v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n),$$

kde $v_i, i = 0, 1, \dots, n$ jsou vrcholy grafu G a $e_j, j = 1, 2, \dots, n$ jsou hrany grafu G , přičemž každá hrana e_j má koncové vrcholy v_{j-1} a v_j .

Při „procházení grafu sledem“, můžeme opakovat vrcholy i hrany. Vrchol v_0 je *počáteční* a vrchol v_n je *koncový* vrchol (v_0, v_n) -sledu. Ostatní vrcholy jsou *vnitřní*. Jestliže $v_0 = v_n$, pak je sled *uzavřený*. Protože používáme jednoduché grafy lze hrany v zápisu sledu vynechávat. *Délka sledu* je počet hran, které se nachází ve sledu včetně jejich opakování.

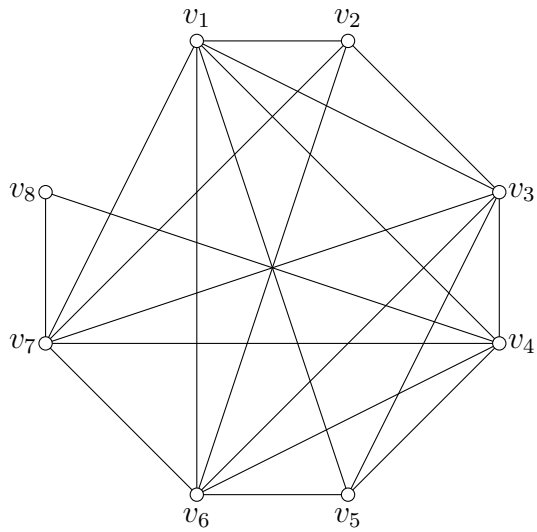
2.13. Definice *Tah* je sled, ve kterém se žádné hrany neopakují. Tah s počátečním vrcholem v_0 a koncovým vrcholem v_n nazveme (v_0, v_n) -*tahem*.

Tah je speciální sled, proto jsou definice počátečních, koncových a vnitřních vrcholů stejné. Definice délky tahu je rovněž stejná, ale nevyskytují se zde opakující se hrany. *Uzavřeným tahem* nazveme tah, kde počáteční a koncový vrchol splývají.

2.14. Definice *Cesta* je sled, ve kterém se neopakují vrcholy. Cestu s počátečním vrcholem v_0 a koncovým vrcholem v_n nazveme (v_0, v_n) -*cestou*.

V rámci této definice chápeme cestu jako „putování“ grafem, výše jsme definovali cestu jako graf.

Definice sledu, tahu a cesty si demonstrujeme na obr. 7. Posloupnost $v_1, v_2, v_3, v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_7, v_8$ je (v_1, v_8) -sled (opakuje se hrana v_1v_2 a její koncové vrcholy), posloupnost $v_1, v_2, v_3, v_1, v_6, v_5, v_4, v_8$ je (v_1, v_8) -tah (opakuje se vrchol v_1) a posloupnost $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ je (v_1, v_8) -cestou.



Obr. 7: Ukázka sledu, tahu a cesty

2.7 Souvislost grafu

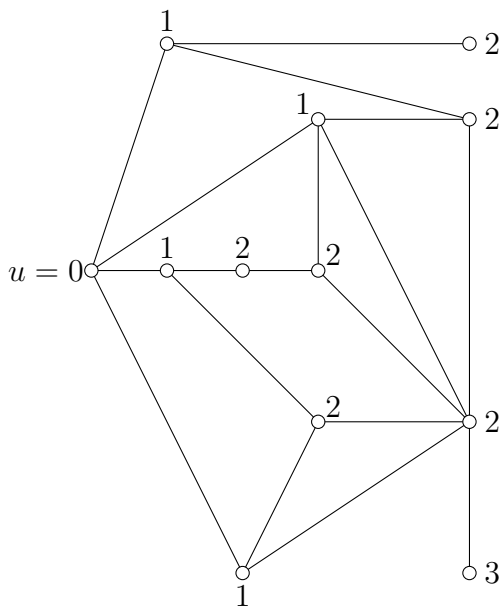
2.15. Definice Řekneme, že vrchol v je dosažitelný z vrcholu u , jestliže v grafu existuje sled z vrcholu u do vrcholu v . Graf nazveme *souvislý*, jestliže pro každé dva vrcholy u, v je vrchol v dosažitelný z vrcholu u . V opačném případě je graf *nesouvislý*.

Komponenta grafu G je maximální souvislý podgraf grafu G . Slovo „maximální“ znamená, že neexistuje souvislý podgraf grafu G takový, že komponenta je jeho vlastní podgraf.

2.8 Vzdálenost v grafu

2.16. Definice *Vzdálenost vrcholu u od vrcholu v* je délka nejkratší cesty z vrcholu u do vrcholu v . Vzdálenost budeme značit jako $\text{dist}(u, v)$ nebo $\text{dist}_G(u, v)$. V případě, že jsou u, v nedosažitelné, tak $\text{dist}_G(u, v) = \infty$.

Lze dokázat, že takto definovaná vzdálenost splňuje vlastnosti metriky. Definici si ilustrujeme na obr. 8. Čísla u vrcholů představují vzdálenost vrcholů od vrcholu u .



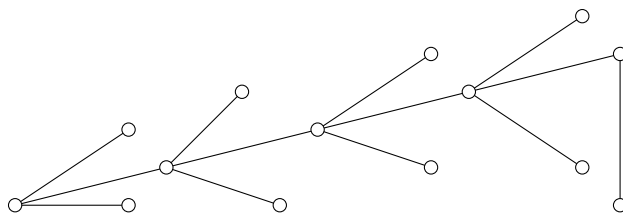
Obr. 8: Vzdálenosti od vrcholu u

2.9 Stromy a kostry

2.17. Definice *Strom* je acyklický (bez cyklů), souvislý graf.

2.18. Věta *Strom s n vrcholy má přesně $n - 1$ hran.*

Důkaz věty 2.18 lze nalézt zde [4]. Z definice stromu je zřejmé, že strom je graf, který obsahuje nejmenší počet hran na daném počtu vrcholů tak, aby byl souvislý. V každém stromu je mezi dvojicí vrcholů právě jedna cesta. Ve stromu lze porušit jeho souvislost odebráním jakékoliv hrany (každá hrana je tzv. *most*). Stromy označujeme symbolem T_n (z anglického *tree*), kde n představuje počet vrcholů. Příklad stromu je na obr. 9.



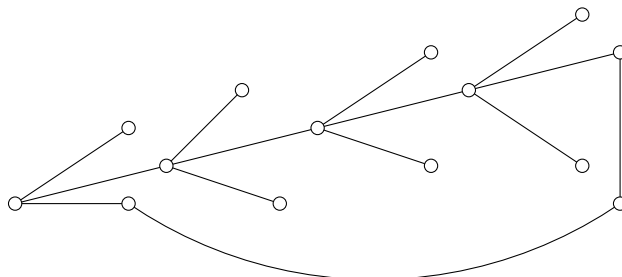
Obr. 9: Strom

2.19. Definice *Kostrou* souvislého grafu G rozumíme takový faktor grafu G , který je stromem.

2.10 Unicyklický graf

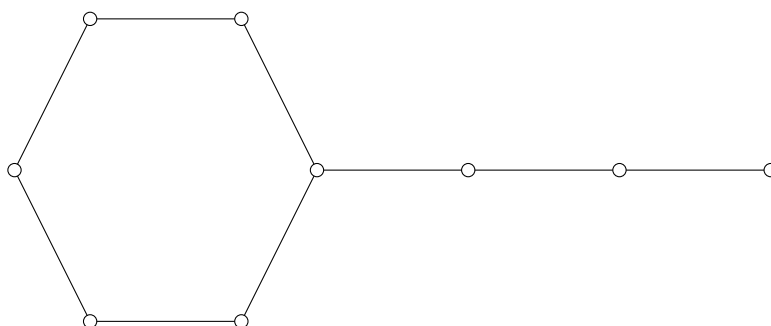
2.20. Definice *Unicyklický graf* G je graf s jediným cyklem.

Ukázka unicyklického grafu je na obr. 10



Obr. 10: Unicyklický graf

2.21. Definice *Pulcem* na n vrcholech budeme rozumět graf, který vznikne z cyklu C_m , tak, že z jednoho vrcholu vede netriviální cesta délky $n - m$, kde $m = 3, 4, \dots, n - 1$. Pulce značíme $TP(m, n - m)$. Zkratka TP je z anglického slova tadpole (pulec).

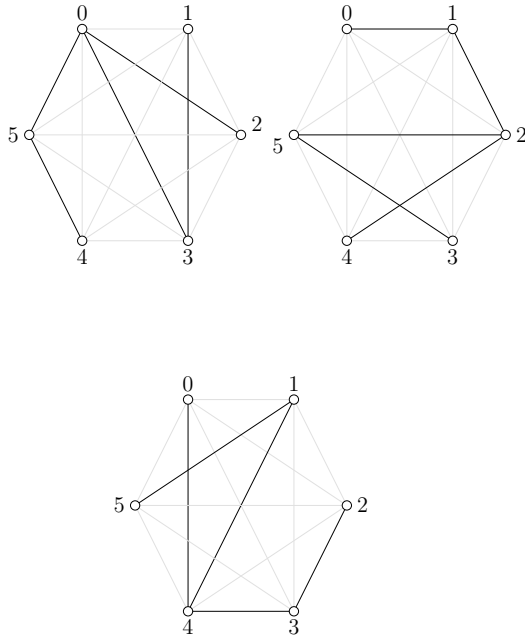


Obr. 11: Příklad pulce $TP(6, 3)$

3 Dekompozice a faktorizace grafů

V rámci této kapitoly si nadefinujeme pojmy dekompozice a faktorizace grafů.

3.1. Definice Mějme graf H na n vrcholech. Dekompozice grafu H je množina navzájem hranově disjunktálních podgrafů G_1, G_2, \dots, G_s grafu H taková, že každá hrana grafu H je obsažena v právě jednom podgrafu G_r , kde $r \in \{1, 2, \dots, s\}$. Jestliže je každý podgraf G_r isomorfní s grafem G , pak se jedná o G -dekompozici grafu H . Jestliže je G souvislý faktor grafu H , pak G -dekompozici nazveme G -faktorizací (viz obr. 12).

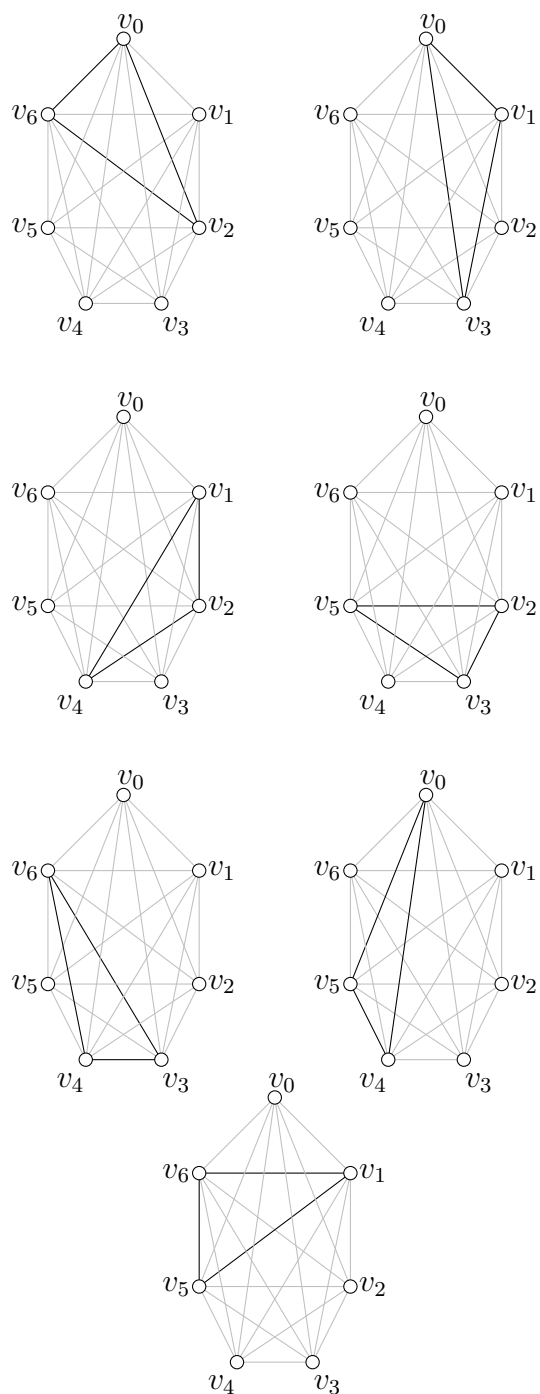


Obr. 12: G -faktorizace kompletního grafu K_6 housenkou $(2, 3, 2)$

3.1 Nutné podmínky dekompozice

Z definice 3.1 je okamžitě zřejmá první nutná podmínka G -dekompozice. Ta tvrdí, že počet hran $|E(G)|$ musí dělit počet hran $|E(H)|$, neboť každá hrana grafu H patří do právě jedné kopie grafu G . Dále existuje nutná podmínka, která omezuje nejvyšší stupeň vrcholu v grafu G . Její konkrétní podobu uvedeme později.

3.2. Definice G -dekompozice grafu H s n vrcholy na podgrafy G_0, G_1, \dots, G_s je cyklická, pokud existuje uspořádání $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ vrcholů v grafu H a pokud existuje isomorfismus $\phi_i : G \rightarrow G_i$, pro $i = 0, 1, 2, \dots, s$ takový, že $\phi_i(x_j) = x_{j+i}$ pro každé $j = 0, 1, \dots, n-1$, přičemž součty $j+i$ jsou brány modulo n a $|E(H)|/|E(G)| = s+1$ (viz obr. 13).



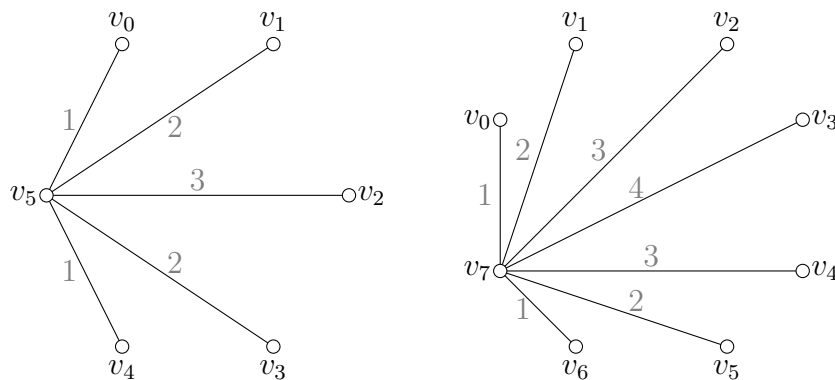
Obr. 13: Cyklická G -dekompozice grafu H , je-li $G \cong C_3$ a $H \cong K_7$

Z výše uvedené definice cyklické G -dekompozice je zřejmé, že celý problém je najít vhodné umístění první kopie grafu G v grafu H a zbylých s kopií grafu G získáme postupnou rotací první kopie v grafu H . Rotací grafu G s vrcholovou množinou $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ o jedničku, rozumíme přemístění každého jeho vrcholu $v_i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, do vrcholu v_{i+1} , kde součty jsou brány modulo n . Z předchozího je také zřejmé, že během rotace nemůže být žádná hrana grafu G totožná se svým předchozím umístěním.

3.2 Postačující podmínky dekompozice

Pro graf G , který rozkládá graf H , nejsou známy žádné zcela obecné postačující podmínky pro dekompozici a to ani v případě, že je H kompletní. Proto byly nalezeny postačující podmínky pouze pro některé třídy grafů. V našem případě se věnujeme rozkladům kompletních grafů, tedy $H \cong K_n$.

G -dekompozici kompletního grafu převádíme na problém hledání určitého *ohodnocení* grafu G . Pro pochopení dekompozice kompletního grafu pomocí ohodnocení označíme vrcholy kompletního grafu K_n v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . Dále zavedeme tzv. *délku hrany* v kompletním grafu K_n jako menší z čísel $|j - i|, n - |j - i|$ (viz obr. 14). Z toho lze ukázat, že v kompletním grafu s lichým počtem vrcholů je každá délka hrany $l, l = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$, zastoupena n krát. V případě, že kompletní graf má sudý počet vrcholů, pak je délka hrany $l, l = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$ zastoupena n krát a hrana délky $\frac{n}{2}$ je zastoupena $\frac{n}{2}$ krát. Ohodnocení grafu G , které je používáno k dekompozicím, je pouze prosté zobrazení vrcholové množiny grafu G do množiny M po sobě jdoucích nezáporných celých čísel, kde z ohodnocení vrcholů stanovujeme délky hran podle výše uvedených pravidel.

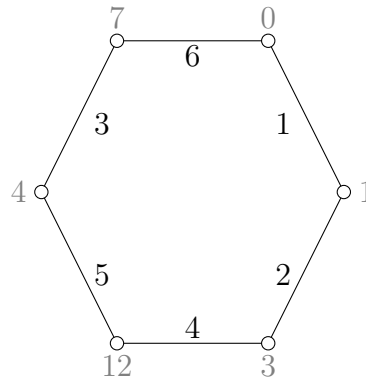


Obr. 14: Příklad ohodnocení vrcholů v K_6, K_8 a délek hran incidentních s vrcholem v_5 a v_7

Nyní nadefinujeme tzv. ρ -ohodnocení grafu G . Existují i další ohodnocení a to α, β, σ . Ty ovšem nebudeme zde uvádět, neboť pro nás nejsou důležitá. Jejich definice lze nalézt zde [11].

3.3. Definice Mějme graf G s n hranami a nejvýše $2n + 1$ vrcholy. Nechť existuje prosté zobrazení $\rho : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, 2n\}$ takové, že množina všech délek hran grafu G je

$\{1, 2, \dots, n\}$ a délka l hrany $uv \in E(G)$, kde $\rho(u) = i, \rho(v) = j$ je definována vztahem $l(ij) = \min\{|i + j|, 2n + 1 - |i + j|\}$. Potom graf G umožňuje ρ -ohodnocení (viz obr. 15).



Obr. 15: ρ -ohodnocení v C_6

3.4. Věta *Nechť G je graf s n hranami a nejvýše $2n + 1$ vrcholy. Potom existuje cyklická G -dekompozice kompletního grafu K_{2n+1} právě tehdy, když G umožňuje ρ -ohodnocení [11].*

Kompletní graf K_{2n+1} má $n(2n+1)$ hran s tím, že každá hrana délky $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ je obsažena v K_{2n+1} přesně $2n + 1$ krát. Když nyní budeme rotovat graf G s ρ -ohodnocením, jenž má každou hrana délky $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ přesně jedenkrát, pak pokryjeme každou hrana K_{2n+1} přesně jednou. Tím vznikne $2n+1$ kopií grafu G , které definují G -dekompozici K_{2n+1} .

3.3 Nutné podmínky faktorizace

G -faktorizace je speciálním případem G -dekompozice. Díky tomu jsou nutné podmínky G -faktorizace přísnější než-li u G -dekompozice. V rámci tohoto textu se budeme zabývat faktorizací kompletních grafů K_n na kostry, a proto uvedeme pouze dvě, a to nejdůležitější, nutné podmínky takové faktorizace. Další podmínky lze nalézt zde [12].

Nechť T je kostra grafu K_n , potom T je strom na n vrcholech s $n - 1$ hranami. Jak jsme již uvedli u G -dekompozice počet hran grafu T musí dělit počet hran grafu K_n . Protože K_n má $\frac{1}{2}n(n - 1)$ hran a T má $n - 1$ hran, lze uvažovat o G -faktorizaci, resp. T -faktorizaci pouze v případě, že n je sudé. Proto dále uvažujeme pouze kompletní grafy K_{2n} .

Mějme kompletní graf K_{2n} , který má $n(2n - 1)$ hran a strom T_{2n} , který má $2n - 1$ hran. Každá T_{2n} -faktorizace K_{2n} obsahuje n faktorů. Předpokládejme, že by kostra T_{2n} měla vrchol x stupně vyššího než n . Ztotožňme tedy vrchol x s některým z vrcholů v K_{2n} , tím pokryjeme více než n hran incidentních s tímto vrcholem. Dále víme, že každý vrchol v T_{2n} má stupeň alespoň jedna. Z toho plyne, že každý ze zbylých $n - 1$ faktorů pokryje alespoň jednu hrana incidentní s vrcholem x v K_{2n} . To ovšem znamená, že n faktory pokryjeme více než $2n - 1$ hran incidentních s vrcholem x . Pak by ovšem některá hrana incidentní s x musela být pokryta vícekrát, neboť $\deg_{K_{2n}}(x) = 2n - 1$.

Proto existuje-li T_{2n} -faktorizace K_{2n} , pak $\Delta(T_{2n}) \leq n$. Tuto podmínku nazýváme *stupňovou podmínkou*.

3.4 Postačující podmínky faktorizace

Postačující podmínky faktorizace jsou relativně neprozkoumané. Dlouho byly známy pouze triviální výsledky faktorizace K_{2n} na hamiltonovské cesty a na dvojhvězdy (dvojhvězda vznikne tak, že spojíme hranou centrální vrcholy dvou hvězd $K_{1,n-1}$). Všechny postačující podmínky faktorizace na kostry jsou založeny na ohodnocení. Nejznámější taková ohodnocení jsou ρ -symetrické ohodnocení, smíšené ρ -ohodnocení a přepínací ohodnocení. V rámci této práce se budeme věnovat pouze smíšenému ρ -ohodnocení a přepínacímu ohodnocení.

3.5. Definice G -dekompozice grafu H s $2n$ vrcholy na G_0, G_1, \dots, G_s je *bicyklická*, jestliže existuje uspořádání $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ vrcholů H a isomorfismus $\phi_i : G \rightarrow G_i$, pro $i = 0, 1, 2, \dots, s$, takový, že $\phi_i(x_j) = x_{j+i}$ a $\phi_i(y_j) = y_{j+i}$ pro každé $j = 0, 1, \dots, n-1$, kde součty $j+i$ jsou brány modulo n .

3.6. Poznámka Z definice plyne, že $2n$ vrcholů grafu H musíme rozdělit do dvou stejně velkých množin, např. X a Y , kde $|X| = |Y| = n$, dále musíme vhodně umístit první kopii G_0 a zbývající kopie grafu G získáme postupným otáčením G_0 tak, že vrcholy z G_0 umístěné do X , rotujeme v rámci X a vrcholy z G_0 , umístěné do Y , rotujeme v rámci Y .

3.5 Faktorizace kompletního bipartitního grafu

Pro dekompozici pravidelných kompletních bipartitních grafů zavedl Fronček bipartitní ρ -ohodnocení.

3.7. Úmluva Hranu xy , tedy hranu mezi vrcholy x a y , budeme pro případ ohodnocení vrcholů čísla $\lambda(x)$ a $\lambda(y)$ označovat $(\lambda(x), \lambda(y))$.

3.8. Definice Nechť G je bipartitní graf s množinou vrcholů $V(G) = X_0 \cup X_1$ a n hranami. Dále nechť je ρ prosté zobrazení $\rho : X_i \rightarrow S_i$, kde S_i je podmnožinou množiny $V_i = \{0_i, 1_i, \dots, (n-1)_i\}$, pro $i = 0, 1$. Pak je délka hrany (x_0, y_1) pro $x_0 \in V_0$ a $y_1 \in V_1$ definována jako $l_{01}(x_0, y_1) = y - x$, kde rozdíl $y - x$ je brán modulo n . Jestliže množina všech délek hran je rovna $\{0, 1, \dots, n-1\}$, potom je ρ *bipartitní ρ -ohodnocení*.

Existuje-li bipartitní ρ -ohodnocení, pak je zaručena bicyklická dekompozice kompletního grafu $K_{n,n}$. To bylo dokázáno zde [3].

3.9. Věta *Nechť má bipartitní graf G s n hranami bipartitní ρ -ohodnocení. Pak existuje bicyklická dekompozice kompletního grafu $K_{n,n}$ na n kopií grafu G .*

Tato věta je významná pro další ohodnocení, která umožňují faktorizaci kompletních grafů na kostry.

3.6 Smíšené ρ -ohodnocení

Smíšené ρ -ohodnocení, budeme nazývat krátce *smíšené ohodnocení*. Smíšené ohodnocení bylo definováno Frončkem v [3].

3.10. Definice Nechť je graf G s $V(G) = V_0 \cup V_1$, $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ a $|V_0| = |V_1| = n$. Nechť je λ prosté zobrazení $\lambda : V_i \rightarrow \{0_i, 1_i, \dots, (n-1)_i\}$, pro $i = 0, 1$. Čistá délka hrany (x_i, y_i) ,

kde $x_i, y_i \in V_i, i \in \{0, 1\}$, pro $\lambda(x_i) = p_i$ a $\lambda(y_i) = q_i$ je definována jako

$$l_{ii}(x_i, y_i) = \min\{|p - q|, n - |p - q|\}.$$

Smíšená délka hrany (x_0, y_1) , kde $x_0 \in V_0, y_1 \in V_1$, pro $\lambda(x_0) = p_0$ a $\lambda(y_1) = q_1$, je definována jako

$$l_{01}(x_0, y_1) = (q - p) \pmod{n},$$

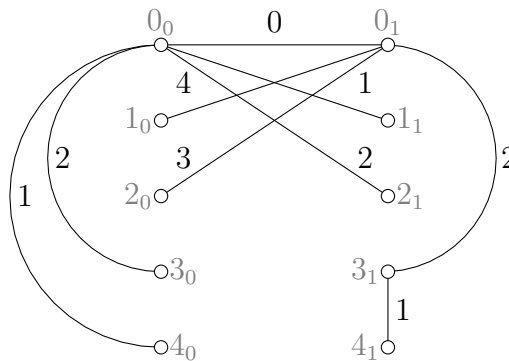
kde $p, q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ jsou ohodnocení vrcholů bez indexů. Hrany (x_i, y_i) , kde $i = 0, 1$, s čistou délkou l_{ii} jsou *čisté ii -hrany* a hrany (x_0, y_1) se smíšenou délkou l_{01} jsou *smíšené hrany*.

3.11. Definice Nechť G je graf se $4n + 1$ hranami, $V(G) = V_0 \cup V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset$, a $|V_0| = |V_1| = 2n + 1$. Nechť λ je prosté zobrazení $\lambda : V_i \rightarrow \{0_i, 1_i, \dots, (2n)_i\}$, pro $i = 0, 1$, a nakonec nechť délky hran jsou počítány dle Definice 3.10. Pak řekneme, že G má smíšené ρ -ohodnocení, pokud:

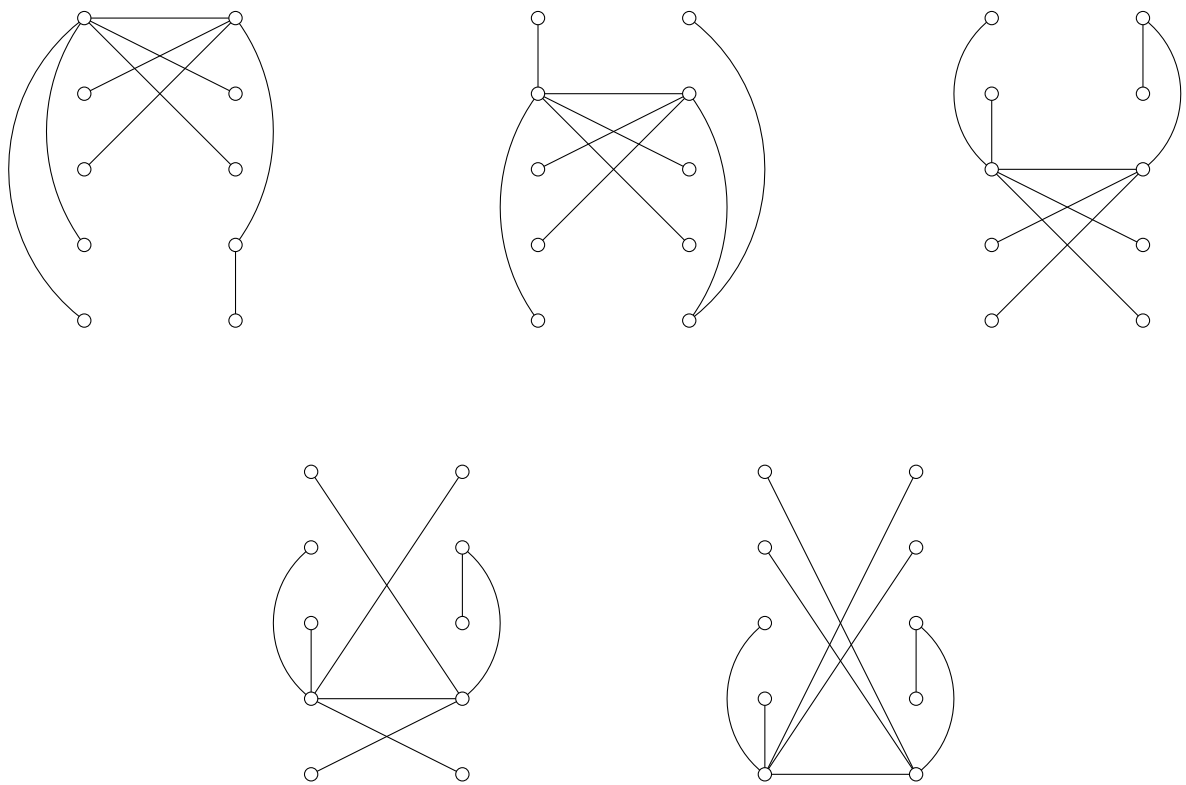
1. $\{l_{ii}(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in E(G)\} = \{1, 2, \dots, n\}$, pro $i = 0, 1$,
2. $\{l_{01}(x_0, y_1) : (x_0, y_1) \in E(G)\} = \{0, 1, \dots, 2n\}$.

Z definice je zřejmé, že kostra T musí mít $4n+2$ vrcholů, aby měla smíšené ohodnocení. Je tedy zřejmé, že smíšené ohodnocení nelze použít v případě, že kostra má $4n$ vrcholů. Má-li kostra T smíšené ohodnocení, pak je její vrcholová množina rozdělena na dvě stejně velké množiny V_0, V_1 . Celý graf je potom složen ze tří podgrafů a to H_0, H_1 a H_{01} , s tím, že H_0 je indukovaný na V_0 (má n hran), H_1 je indukovaný na V_1 (má n hran) a H_{01} je bipartitní graf s partitami $X_0 \subseteq V_0$ a $X_1 \subseteq V_1$. Podgrafy H_0 a H_1 splňují podmínky ρ -ohodnocení a H_{01} splňuje podmínky bipartitního ρ -ohodnocení. Smíšené ohodnocení tedy můžeme chápat jako „slepení“ dvou grafů s ρ -ohodnocení a bipartitního grafu s bipartitním ρ -ohodnocení (viz obr. 16, obr. 17). Následující věta byla dokázána v [3].

3.12. Věta Nechť je G graf s $4n + 1$ hranami, který má smíšené ρ -ohodnocení. Potom existuje bicyklická dekompozice kompletního grafu K_{4n+2} na $2n + 1$ kopií grafu G .



Obr. 16: Strom T se smíšeným ohodnocením



Obr. 17: Bicyklická T -faktorizace K_{10}

3.7 Přepínací ohodnocení

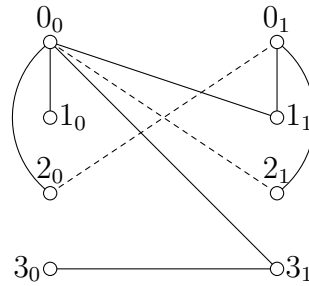
Na závěr této kapitoly uvedeme přepínací ohodnocení, které zajišťuje T -faktorizaci kompletních grafů K_{4n} . Důkaz v [9].

3.13. Věta Graf G s $4n - 1$ hranami má přepínací smíšené ohodnocení, jestliže splňuje následující podmínky:

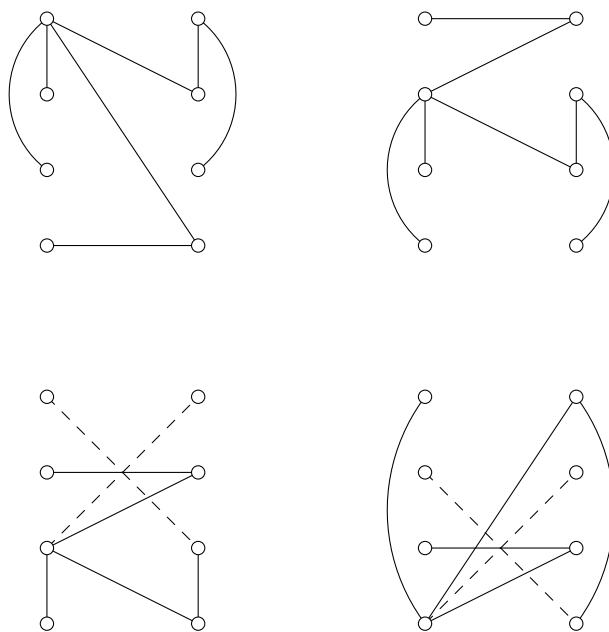
Množina vrcholů $V(G) = V_0 \cup V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset, |V_0| = |V_1| = 2n$. Nechť je λ prosté zobrazení $\lambda : V_i \rightarrow \{0_i, 1_i, \dots, (2n - 1)_i\}$, pro $i = 0, 1$ (délky hran jsou definovány stejně jako v Definicí 3.10), potom:

1. $\{l_{ii}(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in E(G)\} = \{1, 2, \dots, n\}$, pro $i = 0, 1$,
2. existuje isomorfismus ϕ takový, že G je isomorfní s G' , kde $V(G') = V(G)$ a $E(G') = (E(G) \setminus \{(k_0, (k + n)_0), (l_1, (l + n)_1)\}) \cup \{(k_0, (l + n)_1), ((k + n)_0, l_1)\}$,
3. $\{l_{01}(x_0, y_1) : (x_0, y_1) \in E(G)\} = \{0, 1, \dots, 2n - 1\} \setminus \{l_{01}(k_0, (l + n)_1), l_{01}((k + n)_0, l_1)\}$.

3.14. Věta Nechť G je graf na $4n$ vrcholech s $4n - 1$ hranami, mající přepínací smíšené ohodnocení. Potom existuje G -dekompozice kompletního grafu K_{4n} na $2n$ isomorfních kopií G (viz obrázky 18, 19).



Obr. 18: Přepínací ohodnocení housenky $(2, 4, 2, 2)$



Obr. 19: Bicyklická faktorizace K_8 na housenky $(2, 4, 2, 2)$

Problém dekompozice kompletních grafů poutá pozornost matematiků přes padesát let. Výzkum v této oblasti inspirovala Ringelova hypotéza z roku 1963, která říká, že každý strom T s m hranami rozkládá kompletní graf K_{2m+1} . Se silnější hypotézou poté přišel Kotzig. Ta tvrdí, že každý strom má graciózní ohodnocení, což je postačující podmínka pro T -dekompozici K_{2m+1} . Dosud nebyla hypotéza ani potvrzena ani vyvrácena.

Výsledky ohledně graciózních a ρ -ohodnocení lze nalézt v [8], jedná se o skoro úplný a kvalitní přehled. Eldergill v diplomové práci [1] z roku 1997 uvedl nutnou a postačující podmínku pro cyklickou faktorizaci K_{2n} na symetrické kostry a úplně klasifikoval stromy řádu 10 (rozhodl o všech stromech řádu 10, zda faktorizují nebo nefaktorizují K_{10}).

Další krok ve výzkumu T -faktorizací kompletních grafů udělal D. Fronček tím, že definoval smíšené ρ -ohodnocení [2], [3]. Touto metodou objevil širší třídu stromů na $4n + 2$ vrcholech, které faktorizují K_{4n+2} . To je postačující podmínka pro T -faktorizaci kompletních grafů K_{4n+2} , i když strom T není symetrický. Pro faktorizaci stromů na $4n$ vrcholech bylo zavedeno přepínací ohodnocení [9]. Nevýhodou přepínacího ohodnocení je ovšem požadavek na silný automorfismus faktorizujícího grafu.

Rovněž byla provedena klasifikace všech housenek diametru 4 a 5 [10] a [5]. Také byla nalezena faktorizace pro některé housenky diametru 6 [13] a [14]. Klasifikace všech stromů s nejvýše čtyřmi nelistovými vrcholy uvádí ve své práci Fronček, Kovář, Kubesa [6].

4 Faktorizace kompletních grafů na pulce

Nejprve připomeneme, že unicyklický graf je graf s právě jedním cyklem a pulec je graf, který se skládá z cyklu, kde z jednoho vrcholu vede netriviální cesta.

4.1 Nutné podmínky faktorizace kompletních grafů na unicyklické grafy

Nechť G je souvislý unicyklický graf na n vrcholech a K_n je kompletní graf na n vrcholech. Víme, že $|E(K_n)| = \frac{1}{2}n(n-1)$ a $|E(G)| = n$. Aby G faktorizoval K_n , tak musí být číslo $\frac{1}{2}n(n-1)$ dělitelné číslem n . Tedy číslo $\frac{n-1}{2}$ musí být přirozené, proto je číslo n liché. Dále budeme tudíž uvažovat kompletní grafy a souvislé unicyklické grafy na $2n+1$ vrcholech. Je zřejmé, že unicyklický graf různý od cyklu musí mít alespoň 4 vrcholy, proto stanovíme $n \geq 2$.

4.2 Postačující podmínky faktorizace kompletních grafů K_{2n+1} na unicyklické grafy, pro liché n

Mějme souvislý unicyklický graf G takový, že obsahuje vrchol v , který leží na cyklu a $\deg(v) = 2$. Označme sousedy vrcholu v jako x, y . Vytvořme strom $T = G - v$.

4.1. Věta *Nechť strom $T = G - v$ bicyklicky faktorizuje kompletní graf K_{2n} s tím, že $\phi_0(x) \in \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ a $\phi_0(y) \in \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ (viz definice 3.5). Potom souvislý unicyklický graf G faktorizuje kompletní graf K_{2n+1} .*

Důkaz. Nechť $V(K_{2n+1} - v) = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ a $K_{2n} = K_{2n+1} - v$. Předpokládejme, že strom $T = G - v$ bicyklicky faktorizuje kompletní graf K_{2n} , přičemž T_0, T_1, \dots, T_{n-1} jsou jednotlivé faktory této faktorizace a $\phi_i : T \rightarrow T_i$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$ jsou příslušné isomorfismy.

Stanovme $\phi_0(x) = x_i$ a $\phi_0(y) = y_j$.

Protože $\{\phi_j(x) = x_{i+j} : j = 0, 1, \dots, n-1\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ a $\{\phi_i(y) = y_{j+i} : i = 0, 1, \dots, n-1\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$, tak množina $\{\phi_j(x)v : j = 0, 1, \dots, n-1\} \cup \{\phi_i(y)v : i = 0, 1, \dots, n-1\}$ je množina všech hran incidentních v K_{2n+1} s vrcholem v .

Přidáme-li ke každému faktoru $T_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ vrchol v a hrany $v\phi_i(x), v\phi_i(y)$ dostáváme G -faktorizaci kompletního grafu K_{2n+1} .

□

4.3 Pulci na $2n+1$ vrcholech pro n liché

Protože uvažujeme kompletní grafy K_{2n+1} pro n liché, tak položíme $n = 2k+1$ a dostaneme kompletní graf K_{4k+3} , kde k je alespoň 1.

Nyní si jediný vrchol stupně 3 v pulci $TP(m, 4k+3-m)$ označíme jako y . Souseda vrcholu y ležícího na cyklu označíme jako v . Souseda vrcholu v , který je stupně 2 označíme jako x . Pokud z pulce $TP(m-4k+3)$ odebereme vrchol v , vznikne cesta P . Ve všech

následujících důkazech ukážeme, že cesta P umožňuje smíšené ohodnocení takové, že $\phi_0(x) \in V_0$ a $\phi_0(y) \in V_1$ a $\text{dist}(\phi_0(x), \phi_0(y)) = m - 2$. Potom totiž z vět 3.12 a 4.1 plyne, že pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje K_{4k+3} .

4.2. Věta *Každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = 3k + 3, 3k + 4, \dots, 4k + 2$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že cesta P umožňuje smíšené ohodnocení. Cestu P rozdělíme na tři na sebe navazující cesty P_{00}, P_{01} a P_{11} , přičemž P_{00} obsahuje čisté 00-hrany, cesta P_{01} obsahuje smíšené 01-hrany a cesta P_{11} čisté 11-hrany.

- Nechť k je liché, $k = 2q + 1$.

$$P_{00} = q_0, (q + 1)_0, (q - 1)_0, (q + 2)_0, \dots, (2q)_0, 0_0, (2q + 1)_0,$$

$$P_{01} = (2q + 1)_0, (4q + 2)_1, (2q + 2)_0, (4q + 1)_1, \dots, (3q + 3)_1, (3q + 1)_0, (3q + 2)_1, (3q + 2)_0, (3q + 1)_1, (3q + 3)_0, \dots, (4q + 1)_0, (2q + 2)_1, (4q + 2)_0, (2q + 1)_1,$$

$$P_{11} = q_1, (q + 1)_1, (q - 1)_1, (q + 2)_1, \dots, (2q)_1, 0_1, (2q + 1)_1.$$

Pak:

$$P_{00} \text{ obsahuje čisté 00-hrany délek: } 1, 2, 3, \dots, 2q, 2q + 1 = k,$$

$$P_{00} \text{ obsahuje smíšené 01-hrany délek: } 2q + 1 = k, 2q, 2q - 1, \dots, 2, 1, 0, 4q + 2 = 2k, 4q + 1 = 2k - 1, \dots, 2q + 4, 2q + 3, 2q + 2 = k + 1,$$

$$P_{11} \text{ obsahuje čisté 11-hrany délek: } 1, 2, 3, \dots, 2q, 2q + 1 = k.$$

- Nechť k je sudé. Označíme $k = 2q$.

$$P_{00} = q_0, (q - 1)_0, (q + 1)_0, (q - 2)_0, \dots, (2q - 1)_0, 0_0, (2q)_0,$$

$$P_{01} = (2q)_0, (4q)_1, (2q + 1)_0, (4q - 1)_1, \dots, (3q - 1)_0, (3q + 1)_1, (3q)_0, (3q)_1, (3q + 1)_0, (3q - 1)_1, \dots, (4q - 1)_0, (2q + 1)_1, (4q)_0, (2q)_1,$$

$$P_{11} = q_1, (q - 1)_1, (q + 1)_1, (q - 2)_1, \dots, (2q - 1)_1, 0_1, (2q)_1.$$

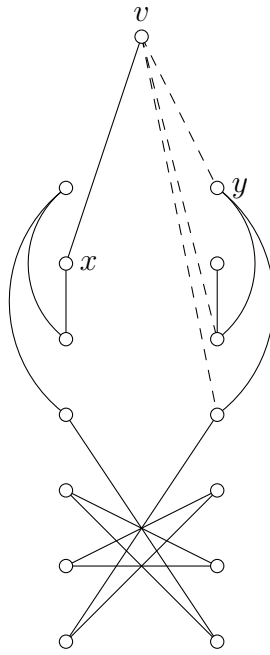
Pak:

$$P_{00} \text{ obsahuje čisté 00-hrany délek: } 1, 2, 3, \dots, 2q - 1, 2q = k,$$

$$P_{00} \text{ obsahuje smíšené 01-hrany délek: } 2q = k, 2q - 1, 2q - 2, \dots, 2, 1, 0, 4q = 2k, 4q - 1 = 2k - 1, \dots, 2q + 3, 2q + 2, 2q + 1 = k + 1,$$

$$P_{11} \text{ obsahuje čisté 11-hrany délek: } 1, 2, 3, \dots, 2q - 1, 2q = k.$$

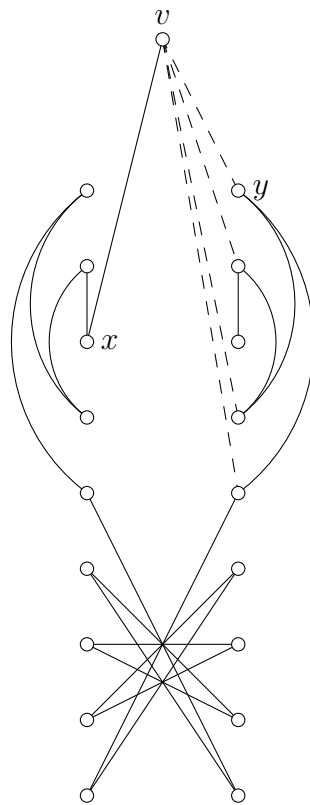
Vidíme, že jak pro k liché, tak pro k sudé umožňuje cesta P na $4k + 2$ vrcholech smíšené ohodnocení. Tomuto smíšenému ohodnocení cesty P říkáme *základní*. Tedy existuje bicyklická faktorizace kompletního grafu K_{4k+2} na faktory P_0, P_1, \dots, P_{2k} , kde $P_r \cong P$ pro každé $r = 0, 1, \dots, 2k$. Nyní ztotožníme vrchol x s vrcholem $q_0 \in V_0$ ($\phi_0(x) = q_0$) cesty P a interní vrchol y cesty P postupně ztotožníme s vrcholy $i_1 \in V_1$ ($\phi_0(y) = i_1$), kde $i \in \{0, 1, \dots, q - 2, q - 1, q + 1, q + 2, \dots, k - 1, k\}$. Jestliže ke každému faktorů P_r přidáme



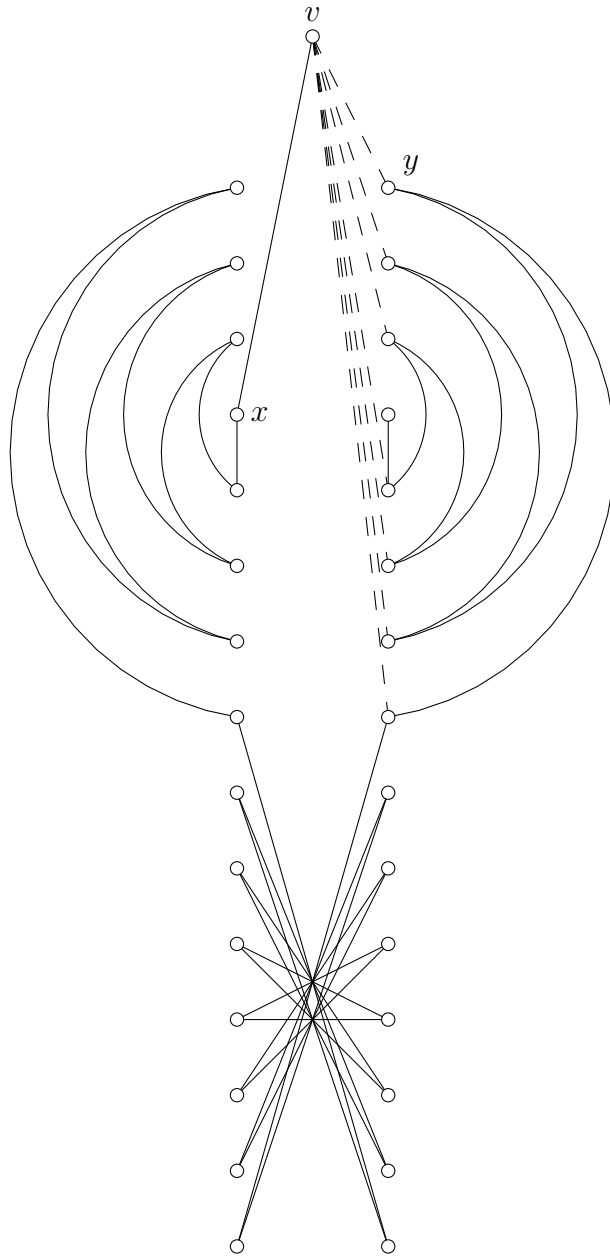
Obr. 20: Konstrukce pro $k = 3$

vrchol v a hrany $(q+r)_0v, (i+r)_1v$ (součty $q+r, i+r$ jsou brány modulo $(2k+1)$), tak dostáváme $TP(m, 4k+3-m)$ -faktORIZACE K_{4k+3} pro $m = 3k+3, 3k+4, \dots, 4k+2$, neboť vzdálenosti vrcholů $i_1, i \in \{0, 1, \dots, q-2, q-1, q+1, q+2, \dots, k-1, k\}$ od vrcholu q_0 jsou $3k+1, 3k+2, \dots, 4k$.

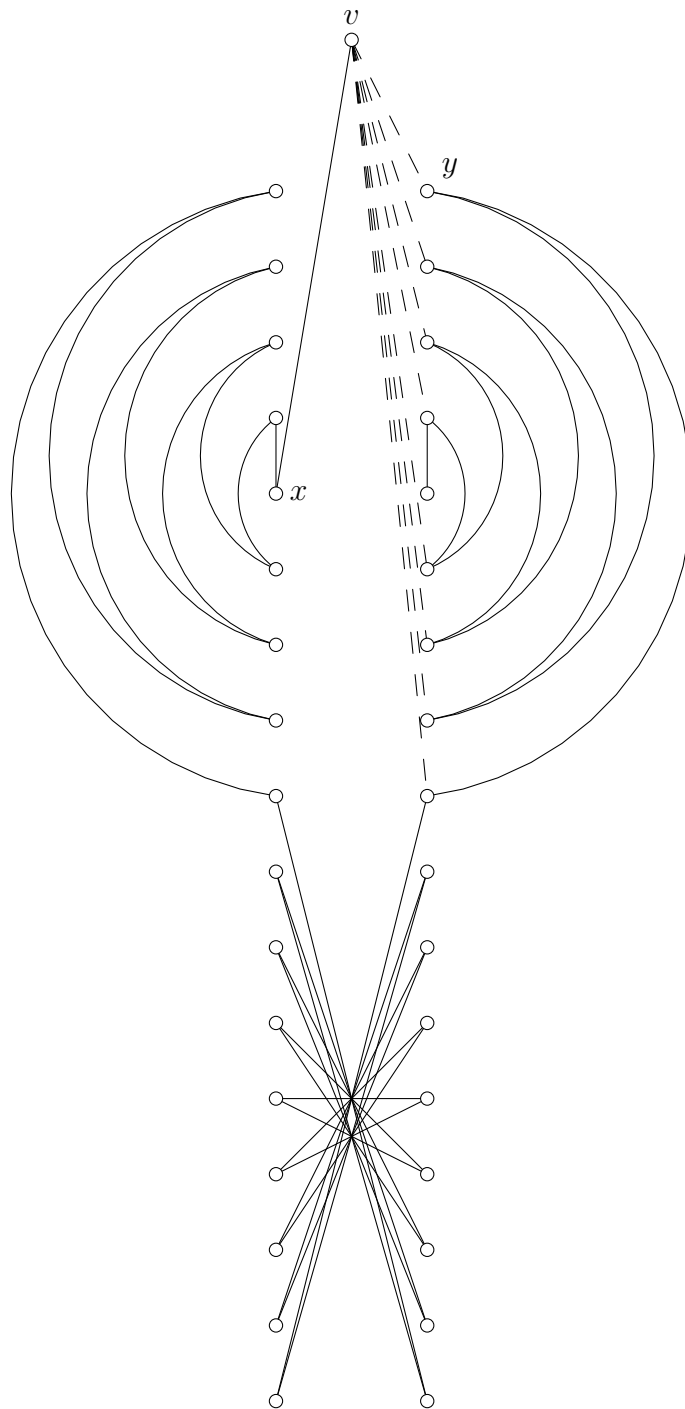
□



Obr. 21: Konstrukce pro $k = 4$



Obr. 22: Konstrukce pro $k = 7$



Obr. 23: Konstrukce pro $k = 8$

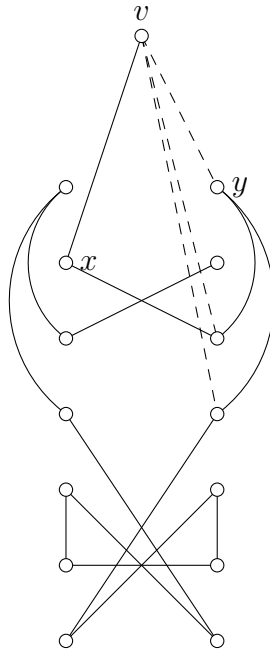
4.3. Věta Každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = 3, 4, \dots, k + 2$.

Důkaz. Odebereme ze základního smíšeného ohodnocení cesty P na $4k+2$ vrcholech čisté hrany $(q_0, (q+1)_0)$ a $(q_1, (q+1)_1)$ délky 1 pro $k = 2q+1$, resp. $(q_0, (q-1)_0)$ a $(q_1, (q-1)_1)$ pro $k = 2q$ délky 1 a smíšené hrany $((3q+2)_0, (3q+1)_1)$ a $((3q+1)_0, (3q+2)_1)$ pro $k = 2q+1$ resp. $((3q)_0, (3q+1)_1)$ a $((3q+1)_0, (3q)_1)$ pro $k = 2q$ délek 1 a $2k$.

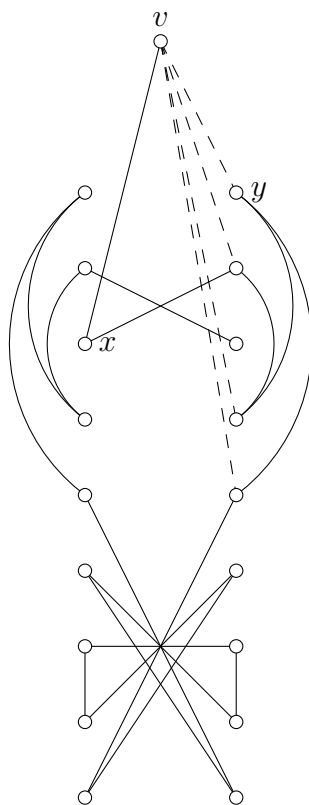
Následně přidáme čisté hrany $((3q+1)_0, (3q+2)_0)$ a $((3q+1)_1, (3q+2)_1)$ pro $k = 2q+1$ resp. $((3q)_0, (3q+1)_0)$ a $((3q)_1, (3q+1)_1)$ pro $k = 2q$ délky 1 a smíšené hrany $(q_0, (q+1)_1)$ a $((q+1)_0, q_1)$ pro $k = 2q+1$ resp. $((q-1)_0, q_1)$ a $(q_0, (q-1)_1)$ pro $k = 2q$ délek 1 a $2k$.

Dostáváme jiné smíšené ohodnocení cesty P . Tedy existuje bicyklická faktorizace kompletního grafu K_{4k+2} na faktory P_0, P_1, \dots, P_{2k} , kde $P_r \cong P$ pro každé $r = 0, 1, \dots, 2k$. Nyní ztotožníme vrchol x s vrcholem $q_0 \in V_0$ ($\phi_0(x) = q_0$) cesty P a interní vrchol y cesty P postupně ztotožníme s vrcholy $i_1 \in V_1$ ($\phi_0(y) = i_1$), kde $i \in \{0, 1, \dots, q-2, q-1, q+1, q+2, \dots, k-1, k\}$. Jestliže ke každému faktoru P_r přidáme vrchol v a hrany $(q+r)_0v, (i+r)_1v$ (součty $q+r, i+r$ jsou brány modulo $(2k+1)$), tak dostáváme $TP(m, 4k+3-m)$ -faktorizace K_{4k+3} pro $m = 3, 4, \dots, k+2$, neboť vzdálenosti vrcholů $i_1, i \in \{0, 1, \dots, q-2, q-1, q+1, q+2, \dots, k-1, k\}$ od vrcholu q_0 jsou $1, 2, \dots, k$.

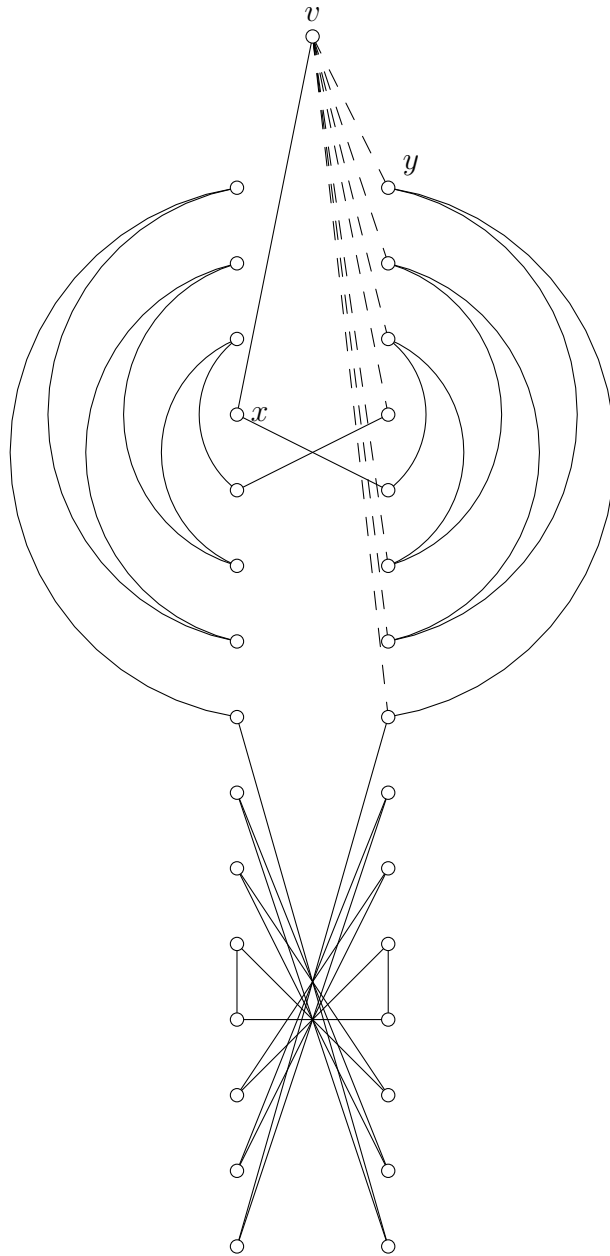
□



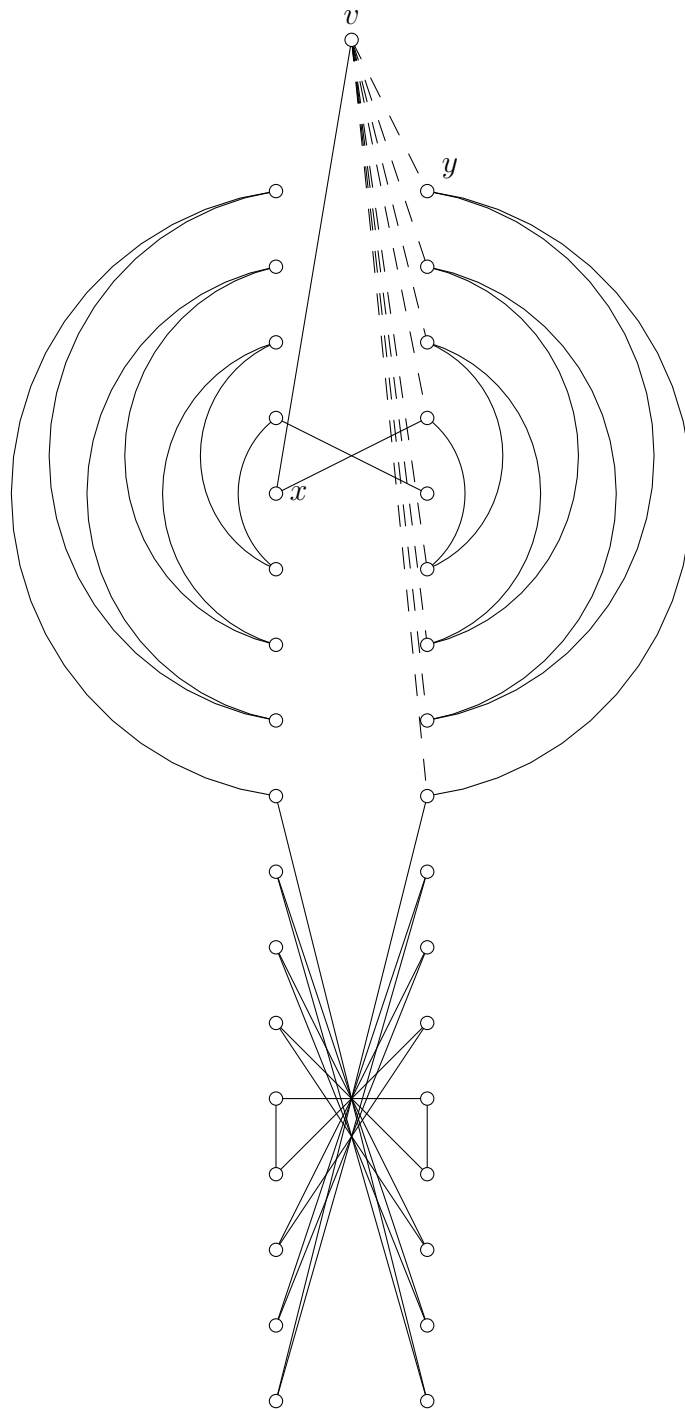
Obr. 24: Konstrukce pro $k = 3$



Obr. 25: Konstrukce pro $k = 4$



Obr. 26: Konstrukce pro $k = 7$



Obr. 27: Konstrukce pro $k = 8$

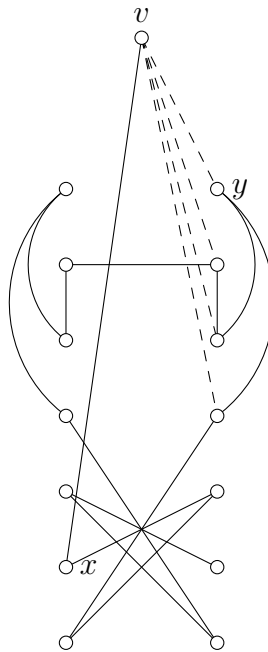
4.4. Věta *Nechť k je liché. Pak každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = k + 2, k + 3, \dots, 2k + 2$.*

Důkaz. Označíme $k = 2q + 1$.

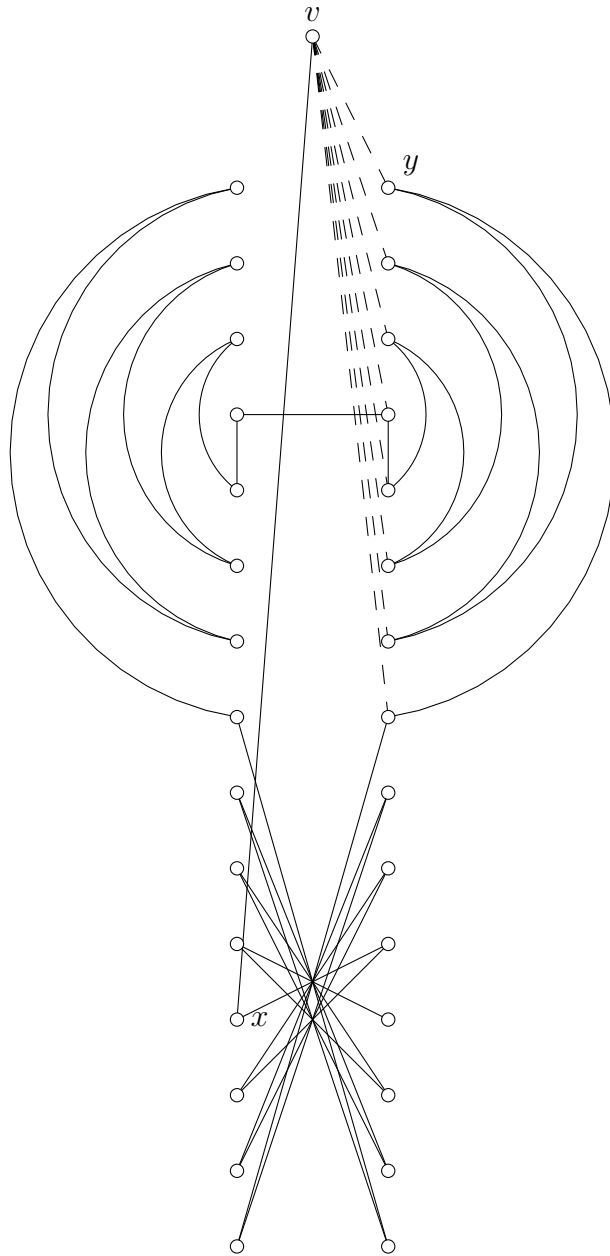
Odebereme ze základního smíšeného ohodnocení P smíšenou hranu $(3q+2)_0, (3q+2)_1$ délky 0 a následně přidáme smíšenou hranu (q_0, q_1) délky 0.

Dostáváme jiné smíšené ohodnocení cesty P . Tedy existuje bicyklická faktorizace kompletního grafu K_{4k+2} na faktory P_0, P_1, \dots, P_{2k} , kde $P_r \cong P$ pro každé $r = 0, 1, \dots, 2k$. Nyní ztotožníme vrchol x s vrcholem $(3q + 2)_0 \in V_0$ ($\phi_0(x) = (3q + 2)_0$) cesty P a interní vrchol y cesty P postupně ztotožníme s vrcholy $i_1 \in V_1$ ($\phi_0(y) = i_1$), kde $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Jestliže ke každému faktoru P_r přidáme vrchol v a hrany $(q + r)_0v, (i + r)_1v$ (součty $q + r, i + r$ jsou brány modulo $(2k + 1)$), tak dostáváme $TP(m, 4k + 3 - m)$ -faktorizace K_{4k+3} pro $m = k + 2, k + 3, \dots, 2k + 2$, neboť vzdálenosti vrcholů $i_1, i \in \{0, 1, \dots, k\}$ od vrcholu $(3q + 2)_0$ jsou $k, k + 1, \dots, 2k$.

□



Obr. 28: Konstrukce pro $k = 3$



Obr. 29: Konstrukce pro $k = 7$

4.5. Věta *Nechť k je liché. Pak každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = 2k + 4, 2k + 5, \dots, 3k + 3$.*

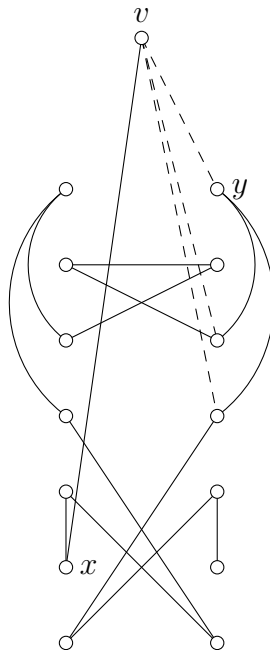
Důkaz. Označíme $k = 2q + 1$.

Odebereme ze základního smíšeného ohodnocení cesty P na $4k+2$ vrcholech čisté hrany $(q_0, (q+1)_0)$ a $(q_1, (q+1)_1)$ délky 1 a smíšené hrany $((3q+2)_0, (3q+1)_1), ((3q+1)_0, (3q+2)_1)$ a $((3q+2)_0, (3q+2)_1)$ délek 1, $2k$ a 0.

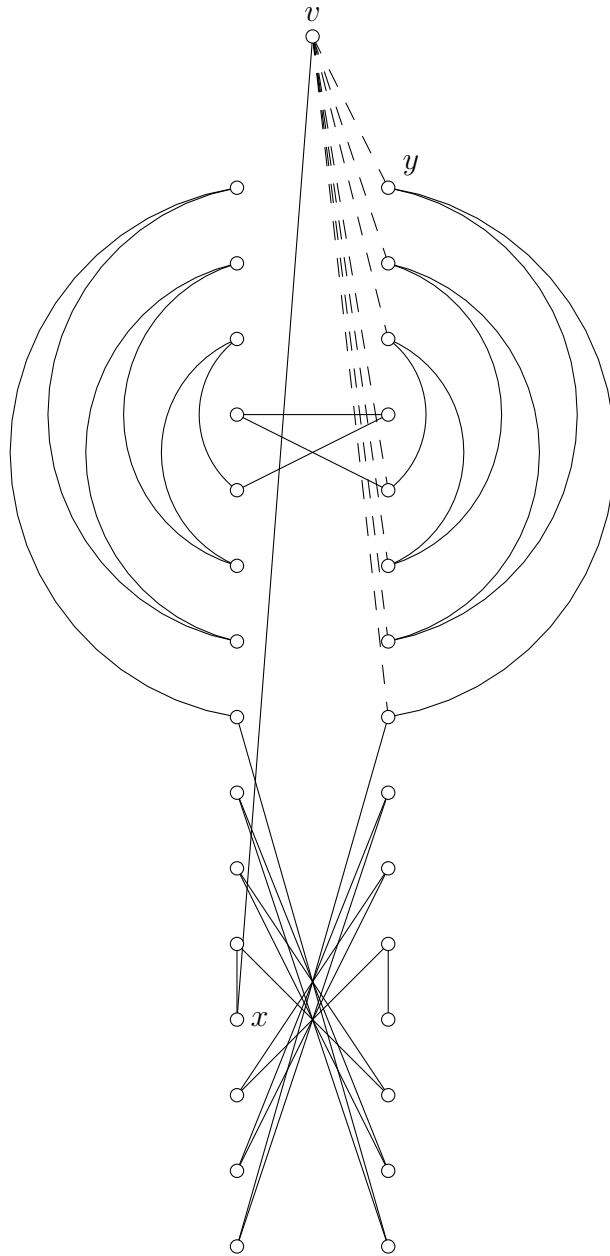
Následně přidáme čisté hrany $((3q+1)_0, (3q+2)_0)$ a $((3q+1)_1, (3q+2)_1)$ délky 1 a smíšené hrany $(q_0, (q+1)_1), ((q+1)_0, q_1)$ a (q_0, q_1) délek 1, $2k$ a 0.

Dostáváme jiné smíšené ohodnocení cesty P . Tedy existuje bicyklická faktorizace kompletního grafu K_{4k+2} na faktory P_0, P_1, \dots, P_{2k} , kde $P_r \cong P$ pro každé $r = 0, 1, \dots, 2k$. Nyní ztotožníme vrchol x s vrcholem $(3q+2)_0 \in V_0$ ($\phi_0(x) = (3q+2)_0$) cesty P a interní vrchol y cesty P postupně ztotožníme s vrcholem $i_1 \in V_1$ ($\phi_0(y) = i_1$), kde $i \in \{0, 1, \dots, q-2, q-1, q+1, q+2, \dots, k-1, k\}$. Jestliže ke každému faktoru P_r přidáme vrchol v a hrany $(q+r)_0v, (i+r)_1v$ (součty $q+r, i+r$ jsou brány modulo $(2k+1)$), tak dostáváme $TP(m, 4k+3-m)$ -faktorizace K_{4k+3} pro $m = 2k+4, 2k+5, \dots, 3k+3$, neboť vzdálenosti vrcholů $i_1, i \in \{0, 1, \dots, q-2, q-1, q+1, q+2, \dots, k-1, k\}$ od vrcholu $(3q+2)_0$ jsou $2k+2, 2k+3, \dots, 3k+1$.

□



Obr. 30: Konstrukce pro $k = 3$



Obr. 31: Konstrukce pro $k = 7$

4.6. Věta *Nechť k je sudé. Pak každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = k + 2, k + 3, \dots, 2k + 1$.*

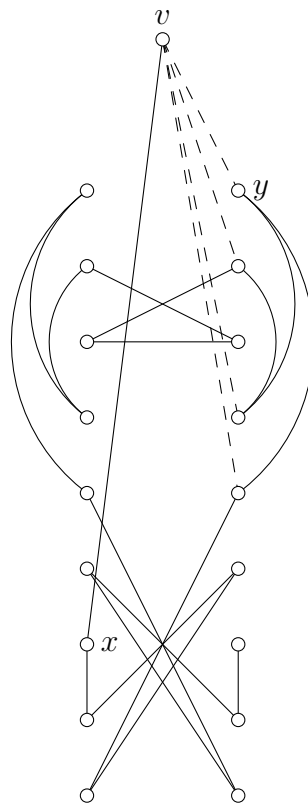
Důkaz. Označíme $k = 2q$.

Odebereme ze základního smíšeného ohodnocení cesty P na $4k + 2$ vrcholech čisté hrany $(q_0, (q - 1)_0)$ a $(q_1, (q - 1)_1)$ pro $k = 2q$ délky 1 a smíšené hrany $((3q)_0, (3q + 1)_1), ((3q + 1)_0, (3q)_1)$ a $((3q)_0, (3q)_1)$ délek 1, $2k$ a 0.

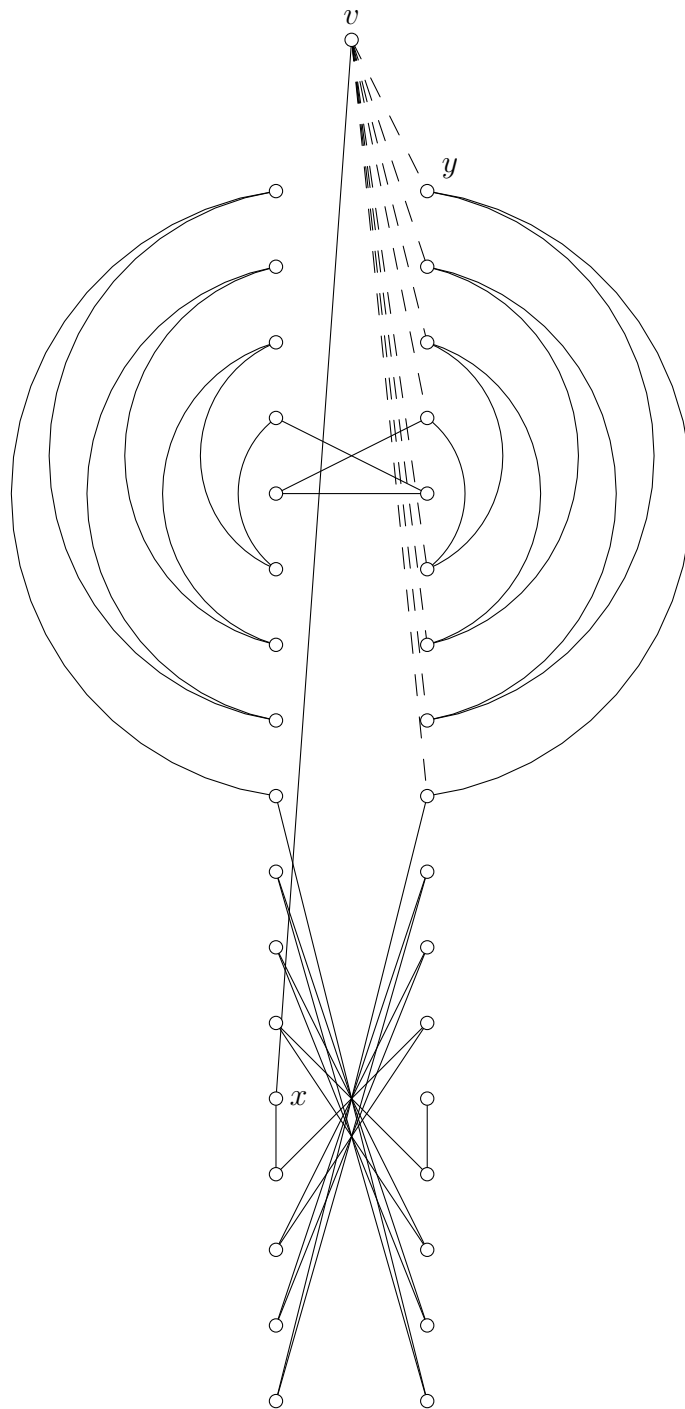
Následně přidáme čisté hrany $((3q)_0, (3q + 1)_0)$ a $((3q)_1, (3q + 1)_1)$ délky 1 a smíšené hrany $((q - 1)_0, q_1), (q_0, (q - 1)_1)$ a (q_0, q_1) délek 1, $2k$ a 0.

Dostáváme jiné smíšené ohodnocení cesty P . Tedy existuje bicyklická faktorizace kompletního grafu K_{4k+2} na faktory P_0, P_1, \dots, P_{2k} , kde $P_r \cong P$ pro každé $r = 0, 1, \dots, 2k$. Nyní ztotožníme vrchol x s vrcholem $(3q)_0 \in V_0$ ($\phi_0(x) = (3q)_0$) cesty P a interní vrchol y cesty P postupně ztotožníme s vrcholy $i_1 \in V_1$ ($\phi_0(y) = i_1$), kde $i \in \{0, 1, \dots, q - 2, q - 1, q + 1, q + 2, \dots, k - 1, k\}$. Jestliže ke každému faktoru P_r přidáme vrchol v a hrany $(q + r)_0v, (i + r)_1v$ (součty $q + r, i + r$ jsou brány modulo $(2k + 1)$), tak dostáváme $TP(m, 4k + 3 - m)$ -faktorizace K_{4k+3} pro $m = k + 2, k + 3, \dots, 2k + 1$, neboť vzdálenosti vrcholů $i_1, i \in \{0, 1, \dots, q - 2, q - 1, q + 1, q + 2, \dots, k - 1, k\}$ od vrcholu $(3q)_0$ jsou $k, k + 1, \dots, 2k - 1$.

□



Obr. 32: Konstrukce pro $k = 4$



Obr. 33: Konstrukce pro $k = 8$

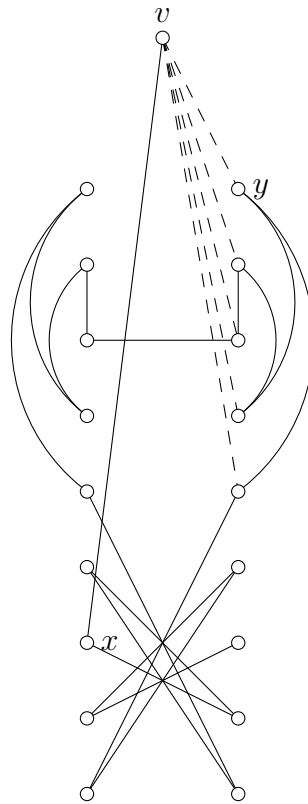
4.7. Věta *Nechť k je sudé. Pak každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = 2k + 3, 2k + 4, \dots, 3k + 3$.*

Důkaz. Označíme $k = 2q$.

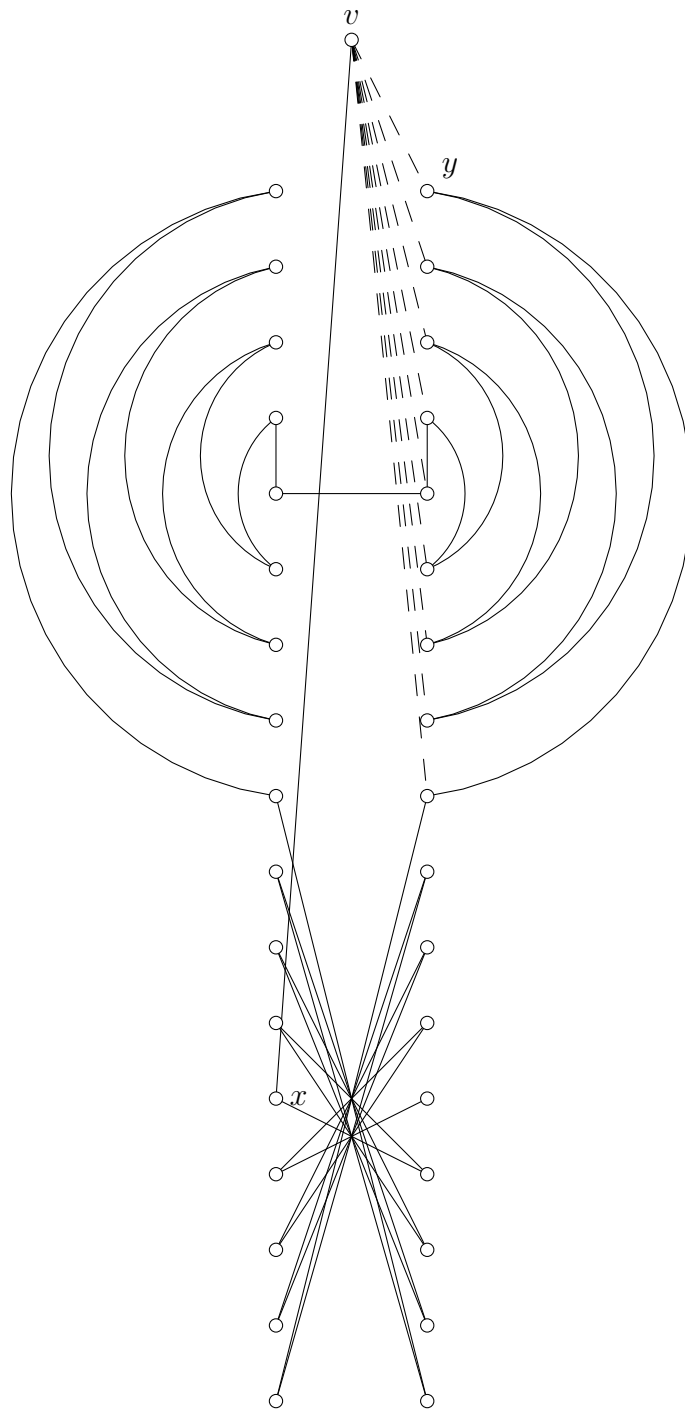
Odebereme ze základního smíšeného ohodnocení P smíšenou hranu $(3q)_0, (3q)_1$ délky 0 a následně přidáme smíšenou hranu (q_0, q_1) délky 0.

Dostáváme jiné smíšené ohodnocení cesty P . Tedy existuje bicyklická faktorizace kompletního grafu K_{4k+2} na faktory P_0, P_1, \dots, P_{2k} , kde $P_r \cong P$ pro každé $r = 0, 1, \dots, 2k$. Nyní ztotožníme vrchol x s vrcholem $(3q)_0 \in V_0$ ($\phi_0(x) = (3q)_0$) cesty P a interní vrchol y cesty P postupně ztotožníme s vrcholy $i_1 \in V_1$ ($\phi_0(y) = i_1$), kde $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Jestliže ke každému faktoru P_r přidáme vrchol v a hrany $(q+r)_0v, (i+r)_1v$ (součty $q+r, i+r$ jsou brány modulo $(2k+1)$), tak dostáváme $TP(m, 4k+3-m)$ -faktorizace K_{4k+3} pro $m = 2k+3, 2k+4, \dots, 3k+3$, neboť vzdálenosti vrcholů $i_1, i \in \{0, 1, \dots, k\}$ od vrcholu $(3q)_0$ jsou $2k+1, 2k+2, \dots, 3k+1$.

□



Obr. 34: Konstrukce pro $k = 4$



Obr. 35: Konstrukce pro $k = 8$

5 Závěr

V kapitole 4 jsme dokázali následující věty:

5.1. Věta *Nechť k je liché. Pak každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = 3, 4, \dots, 2k + 1, 2k + 2, 2k + 4, 2k + 5, \dots, 4k + 2$.*

5.2. Věta *Nechť k je sudé. Pak každý pulec $TP(m, 4k + 3 - m)$ faktorizuje kompletní graf K_{4k+3} pro $m = 3, 4, \dots, 2k, 2k + 1, 2k + 3, 2k + 4, \dots, 4k + 2$.*

Důkazy vět 5.1 a 5.2 plynou z vět dokázaných v kapitole 4 a věty 3.12. Je patrné, že jak v případě, kdy k je liché, tak v případě, kdy k je sudé, chybí jedna délka cyklu.

Ve všech důkazech odebíráme z pulce vrchol cyklu tak, aby vznikla cesta. Pro takto vzniklou cestu pak hledáme vhodné smíšené ohodnocení. V případě, že máme pulce $TP(2k + 3, 2k)$ pro k liché resp. $TP(2k + 2, 2k + 1)$ pro k sudé, tak odebereme vrchol cyklu tak, že vznikne tzv. kometa (kometa je graf, který vznikne ztotožněním koncových vrcholů alespoň tří cest). A pak opět hledáme vhodné smíšené ohodnocení takové komety. V tuto chvíli ještě není proveden přesný důkaz pro kometu, která vznikne z pulce $TP(2k + 2, 2k + 1)$. Tento důkaz bude určitě součástí navazujícího odborného článku.

Přirozeným pokračováním této práce je plnění následujících úkolů:

- dokončit faktorizace K_{4k+3} pro pulce $TP(2k + 3, 2k)$, kde k je liché a $TP(2k + 2, 2k + 1)$, kde k je sudé,
- výzkum faktorizace K_{4k+1} na pulce $TP(m, 4k + 1 - m)$, kde $m = 3, 4, \dots, 4k$, s využitím přepínacího ohodnocení,
- s využitím věty 4.1, hledat faktorizace K_{2n+1} na jiné unicyklické grafy.

Reference

- [1] Eldergill, P.: *Decompositions of the complete graph with an even number of vertices*. M.Sc. Thesis, McMaster University, Hamilton (1997)
- [2] Fronček, D.: *Cyclic decompositions of complete graphs into spanning trees*. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24, No.2, 345–353 (2004)
- [3] Fronček, D.: *Bi-cyclic decompositions of complete graphs into spanning trees*. *Discrete Math.*, **307**, 1317–1322 (2007)
- [4] Kovář, P.: *Teorie grafů*. VŠB-TU Ostrava (2012)
- [5] Fronček, D., Kovář, P., Kovářová, T., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into caterpillars of diameter 5*. *Discrete Math*, **310**, 537–556 (2010)
- [6] Fronček, D., Kovář, P., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into trees with at most four non-leave vertices*.
- [7] Fronček, D., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into spanning trees*. *Congressus Numerantium*, **154**, 125–134 (2002)
- [8] Gallian, J.A.: *A dynamic survey of graph labeling*. *Electronic Journal of Combinatorics*, DS 6 (2009)
- [9] Kovářová, T.: *Spanning Tree Factorizations of Complete Graphs, Ph.D. Thesis*. VŠB – Technical University of Ostrava (2004)
- [10] Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into caterpillars of diameter four and five*. Ph.D. Thesis, VŠB – Technical University of Ostrava (2004)
- [11] Rosa, A.: *On certain valuations of the vertices of a graph*. *Theory of Graphs (Intl. Symp. Rome 1966)*, Gordon and Breach, Dunod, Paris, 349–355 (1967)
- [12] Kovář, P.: *Necessary conditions for factorizations of complete graphs into spanning trees*. VŠB-TU Ostrava (2011)
- [13] Nedošínská, H.: *Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6, bakalářská práce*. VŠB-TU Ostrava (2013)
- [14] Raiman, T.: *Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6 a třemi bohatými vrcholy, bakalářská práce*. VŠB-TU Ostrava (2014)