

**Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava**

**Fakulta strojní**

**Katedra automatizační techniky a řízení**

---

# **AKTIVNÍ POTLAČOVÁNÍ VIBRACÍ**

**Disertační práce**

|                          |   |
|--------------------------|---|
| <b>Studijní program:</b> | <b>P2346 - Strojní inženýrství</b>        |
| <b>Studijní obor:</b>    | <b>3902V056 - Řízení strojů a procesů</b> |
| <b>Student:</b>          | <b>Ing. Pavel Šuránek</b>                 |
| <b>Školitel:</b>         | <b>prof. Ing. Jiří Tůma, CSc.</b>         |

---

**Ostrava 2016**



## **Anotace**

Disertační práce se zabývá aktivním potlačováním mechanických vibrací. Tato práce pracuje s modelem vetknutého ocelového nosníku. Pro tento nosník je pomocí diskretizace vytvořen odpovídající matematický model, který umožní implementaci do výpočetního zařízení. Chování nosníku je tudíž možné testovat v programovém prostředí MATLAB – Simulink. Na základě matematického modelu lze bezpečně navrhnout a testovat řídicí systém a následně jej použít u původního fyzického modelu. Je řešeno tlumení nosníku v nekolokovaném uspořádání snímače a akčního členu (snímač a akční člen jsou umístěny na různých místech). Řídicí algoritmus tlumí více vlastních frekvencí vetknutého nosníku. Při realizaci na laboratorním modelu se hojně používá piezoelektrických materiálů ve snímačích a akčním členu.

Klíčová slova: aktivní tlumení vibrací, piezoelektrický člen

## **Annotation**

This dissertation thesis deals with an active mechanical vibration control. This thesis works with a laboratory model of steel cantilevered beam. A corresponding mathematical model for a laboratory test rig is derived. It enables the implementation in a computing tool and to test beam's behaviour in MATLAB – Simulink environment. This mathematical model enables to securely design and test a control algorithm and then use this algorithm in a real laboratory model. Active vibration control of non-collocated system is solved with an algorithm that suppresses more than one of vibration modes. Piezoelectric materials are widely used in both sensors and actuators.

Keywords: Active Vibration Control, Piezoelectric Actuator

## Obsah

|   |    |
|---|----|
| Seznam použitého značení  | 6  |
| 1 Úvod  | 8  |
| 2 Cíle disertační práce   | 13 |
| 3 Přehled současného stavu  | 14 |
| 3.1 Vědecké články o laboratorních zařízeních s aktivním tlumením vibrací   | 15 |
| 3.2 Úvod do problematiky kmitání hmotného bodu                              | 15 |
| 3.3 Mechanický oscilátor s tlumením   | 16 |
| 3.4 Rezonance   | 18 |
| 3.5 Euler - Bernoulliho nosníky   | 20 |
| 3.6 Jednostranně vetknutý nosník dle Euler - Bernoulliho teorie             | 22 |
| 4 Laboratorní zařízení  | 27 |
| 4.1 Piezoelektrický akční člen  | 27 |
| 4.2 Snímač zrychlení  | 28 |
| 4.3 Nábojový zesilovač  | 28 |
| 4.4 Modul M32   | 28 |
| 4.5 Systém dSPACE   | 29 |
| 4.6 Budič vibrací   | 29 |
| 4.7 Snímač síly Endevco 2311 - 10   | 30 |
| 4.8 Signálový analyzátor Pulse  | 30 |
| 5 Matematické modelování laboratorního zařízení                             | 31 |
| 5.1 Základní rozměrové a hmotnostní vlastnosti nosníku                      | 31 |
| 5.2 Odvození tuhosti torzní pružiny   | 31 |
| 5.3 Potenciální a kinetická energie diskretizované soustavy                 | 33 |
| 5.4 Soustava pohybových rovnic  | 35 |
| 5.5 Vlastní čísla a vektory   | 37 |
| 5.6 Zavedení tlumení  | 42 |
| 5.7 Simulační model vetknutého nosníku                                      | 43 |
| 5.8 Modelování působení piezoaktuátoru                                      | 44 |
| 5.9 Porovnání matematického modelu s experimentem a úprava parametrů modelu | 46 |
| 6 Řídicí algoritmus   | 53 |
| 6.1 Modální rozklad   | 53 |
| 6.2 Návrh regulačního obvodu  | 56 |

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 6.3 | Návrh pásmových filtrů                 | 57 |
| 6.4 | Výsledky softwarových simulací         | 58 |
| 6.5 | Výsledky měření na laboratorním modelu | 61 |
| 6.6 | Úprava regulace                        | 65 |
|     | Přínos disertační práce                | 72 |
|     | Contribution of dissertation           | 73 |
|     | Závěr                                  | 74 |
|     | Conclusion                             | 75 |
|     | Použitá literatura                     | 76 |
|     | Publikace autora                       | 79 |

## Seznam použitého značení

|              |  |  |
|--------------|--|--|
| $A$          | [m, kg]                                | amplituda, prvek matice hmotnosti            |
| $\mathbf{A}$ | [s <sup>-2</sup> ]                     | transformační matice                         |
| $B$          | [m, kg]                                | amplituda, prvek matice hmotnosti            |
| $\mathbf{D}$ | [kg·s <sup>-1</sup> ]                  | matice tlumení                               |
| $E$          | [Pa]                                   | Youngův modul pružnosti                      |
| $F$          | [N]                                    | síla   |
| $G$          | [různé]                                | přenos v oblasti Laplaceovy proměnné         |
| $\mathbf{I}$ | [-]                                    | jednotková matice                            |
| $I_x$        | [m <sup>4</sup> ]                      | moment setrvačnosti průřezu                  |
| $J_x$        | [kg·m <sup>2</sup> ]                   | moment setrvačnosti kvádrového elementu      |
| $K_\delta$   | [N·m·rad <sup>-1</sup> ]               | tuhost rotační pružiny                       |
| $\mathbf{K}$ | [N·m <sup>-1</sup> ]                   | matice tuhosti                               |
| $L$          | [m, J]                                 | délka nosníku, Lagrangeova funkce            |
| $M$          | [N·m]                                  | moment síly                                  |
| $M_o$        | [N·m]                                  | ohybový moment                               |
| $\mathbf{M}$ | [kg]                                   | matice hmotnosti                             |
| $N$          | [-]                                    | počet diskretizovaných prvků                 |
| $S$          | [J]                                    | funkcionál                                   |
| $T$          | [J]                                    | kinetická energie                            |
| $V$          | [J]                                    | potenciální energie                          |
| $Y$          | [m]                                    | poloha těžiště                               |
| $b$          | [m, kg·s <sup>-1</sup> ]               | šířka nosníku, koeficient viskózního tlumení |
| $d$          | [kg·s <sup>-1</sup> ]                  | modální tlumení                              |
| $f$          | [Hz]                                   | frekvence                                    |
| $\mathbf{f}$ | [N]                                    | vektor sil                                   |
| $h$          | [m]                                    | tloušťka nosníku                             |
| $i$          | [-]                                    | pořadí módu, pořadí diskretizované části     |
| $j$          | [-]                                    | imaginární jednotka                          |
| $k$          | [N·m <sup>-1</sup> , s <sup>-2</sup> ] | tuhost pružiny, modální tuhost, zesílení     |
| $m$          | [kg]                                   | hmotnost                                     |
| $\mathbf{o}$ | [-]                                    | nulový vektor                                |
| $r$          | [m]                                    | poloměr křivosti                             |
| $q$          | [N·m <sup>-1</sup> ]                   | spojité zatížení                             |
| $s$          | [s <sup>-1</sup> ]                     | komplexní proměnná v Laplaceově transformaci |

|                     |   |  |
|---------------------|---|--|
| $t$                 | [s]   | čas                                    |
| $y$                 | [m]   | výchylka, průhyb                       |
| $\mathbf{y}$        | [m]   | vektor příčných vychylek               |
| $z$                 | [m]   | hlavní osa (podélná) nosníku           |
| $\alpha$            | [s <sup>-1</sup> ]                                    | koeficient hmotnostní proporcionality  |
| $\beta$             | [s]   | koeficient tuhostní proporcionality    |
| $\delta$            | [rad]   | úhel natočení                          |
| $\lambda$           | [s <sup>-1</sup> , rad <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ] | konstanta útlumu, vlastní číslo matice |
| $\mu$               | [kg m <sup>-1</sup> , kg]                             | relativní hmotnost, modální hmotnost   |
| $\rho$              | [kg m <sup>-3</sup> ]                                 | hustota materiálu                      |
| $\varphi$           | [rad]   | fáze                                   |
| $\psi$              | [m]   | vlastní tvar kmitů                     |
| $\boldsymbol{\psi}$ | [m]   | vlastní vektor (tvar)                  |
| $\omega$            | [rad s <sup>-1</sup> ]                                | frekvence                              |
| $\Delta\delta$      | [rad]   | přírůstek úhlu natočení                |
| $\Delta L$          | [m]   | délka elementu                         |
| $\Delta m$          | [kg]  | hmotnost elementu                      |
| $\Delta y$          | [m]   | přírůstek výchylky                     |
| $\mathbf{A}$        | [rad <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]                   | matice vlastních čísel                 |
| $\boldsymbol{\Psi}$ | [m]   | matice vlastních vektorů               |

## 1 Úvod

Nepříjemnostem spojenými s mechanickým kmitáním a vlněním čelí lidstvo již od svého vzniku. Již pravěcí lidé pozorovali, že když fouká vítr, stébla trávy se třepetají a stromy ohýbají, když se hodí do vody kámen, vzniknou na její hladině vlny, když přijde zemětřesení, může jim spadnout v jeskyni na hlavu krápník, a že země chvějící se pod náporom rozběhnutého stáda mamutů srstnatých a tygrů šavlozubých, jim nečiní dobře po těle. Z nejstarší literatury se dozvídáme, že ve starověku lidé rovněž čelili hrůzným přírodním úkazům. Nalezneme zde zmínky o potopách, prasklinách v zemi, do kterých se propadávala celá vojska, nebo o projektu prvního mrakodrapu, který však u vyššího úřadu nebyl schválen, stavba byla demolována a byla uložena řádná pokuta. Pravdivosti těchto spisů se dnes budou obtížně prokazovat, ale při jisté míře představivosti lze za těmito událostmi vidět vliv přírodních událostí spojených s vibracemi a rázy zemského povrchu.

Člověku moudrému se zvětšovala mozkovna, nabýval technické zkušenosti, a ty implementoval ihned zejména do válečnictví, a někdy také do stavebnictví. Vynalezl různé luky, praky, stavební stroje. Stále měl tendenci budovat amfiteátry, mosty, gladiátorské arény, chrámy, vysoké sochy, a protože zdaleka nerozuměl tolika fyzikálním zákonům, kolika rozumí dnes, tak se mu občas takovéto dílo zřítilo. Nedostatek znalostí o příčinách mechanického kmitání totiž trval až do 17. století.

Ve čtvrtém století př. n. l. působil řecký filozof Aristoteles, který se pravděpodobně jako první snažil ve své knize „Fyzika“ popsat zákonitosti mechanického pohybu [ARISTOTELES, 350 př. n. l.]. Přestože se ve svých úvahách dopustil mnoha omylů, jeho učení se v Evropě aplikovalo téměř dva tisíce let.

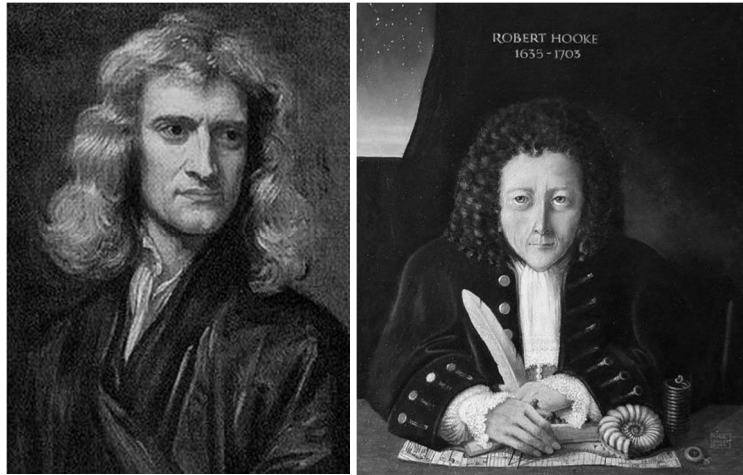


Obr. 1.1 a) Aristoteles [LYSIPPOS, 330 př. n. l.], b) Leonardo da Vinci [LEONARDO, 1505], c) Galileo Galilei [SUSTERMANS, 1636]

O mnoho století později se v toskánském městečku Vinci narodil multidisciplinární vědec a umělec Leonardo. Když se zrovna nezabýval bádáním v oblasti anatomie nebo přínosy v oblasti umění, sestrojoval různá mechanická zařízení, přičemž mnoho z nich bylo poháněno soustavou závaží a pružin. Mimo kreseb tanků, ponorek, obléhacích strojů, letadel se také zachoval náčrt mechanického lva, který se pohyboval pomocí zmíněného mechanického pohonu. Jednalo se sice o stroj sestrojený pro zábavu šlechty, ale jistě demonstroval tehdejší technický vrchol.

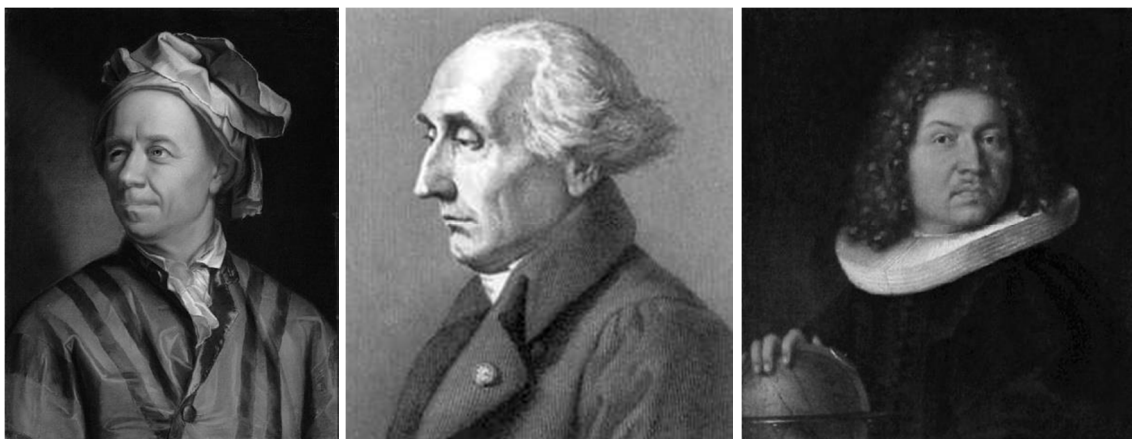


Na přelomu 16. a 17. století Galileo Galilei podrobil zkoumání některé Aristotelovy teoremy. Věnoval se pohybu padajících těles, kdy shazoval koule různé hmotnosti ze šikmé věže v Pise a popsal také základní fyzikální a matematické vlastnosti mechanického kyvadla. Dále se věnoval zkoumání pohybu vesmírných těles, za což byl předvolán do Říma, kde dostal doživotní trest domácího vězení. Měl tak mnoho času na sepisování svých objevů. Své poznatky nejen o mechanice a pohybu shrnul formou rozhovoru v knize „Matematické rozpravy a pokusy“ [GALILEI, 1638]. Tuto knihu mu vydal v Holandsku pan Elzevir, což je jméno dodnes spojené s nakladatelstvím, které se zaměřuje na publikování vědeckých prací.



Obr. 1.2 a) Isaac Newton [KNELLER, 1989], b) Robert Hooke [GREER, 2004]

Asi nejdůležitější studium pohybu těles provedl anglický fyzik a matematik Isaac Newton. Jeho kniha věnovaná tomuto tématu nese název „Matematické principy“. Toto dílo zahrnuje, mimo jiné, všeobecný gravitační zákon, zákon setrvačnosti, zákon síly a zákon akce a reakce [NEWTON, 1687]. Ve stejném období působil v Anglii Robert Hooke, který popsal proporcionální vztah mezi silou působící na pružinu a jejím prodloužením. Hookeův zákon se dodnes aplikuje na popis pružnosti mnoha materiálů [HOOKE, 1679].



Obr. 1.3 a) Leonhard Euler [HANDMAN, 1753], b) Joseph-Louis Lagrange, c) Jacob Bernoulli [BERNOULLI, N., 1867]

Dalším vědeckým velikánem své doby byl Leonhard Euler. Matematiku si bez jeho objevů v oblasti diferenciálního a integrálního počtu dnes dokážeme jen těžko představit. Zavedl používání exponenciální funkce a logaritmů. Ve spolupráci s Joseph-Louisem Lagrangem

vytvořil postup pro sestavení diferenciálních pohybových rovnic systémů s více stupni volnosti. S Jacobem Bernoullim popsali teorii dynamického chování tenkých nosníků [EULER, 1736]. Tato práce zůstávala konstruktéry opomíjena a v praxi ji proslavila až firma Gustava Eiffela na konci devatenáctého století. Dnes také při analýze dat velmi využíváme objevy Lagrangeova žáka Josepha Fouriera, který popsal transformaci mezi časovou a frekvenční oblastí. Zde už je asi dobré s výčtem matematicko-fyzikálních objevů, relevantních pro tuto práci, skončit. Matematika a fyzika se usilovně rozvíjely dále, ale při zkoumání mechanických vibrací zatím není nutné ohýbat časoprostor ani zavírat kočky do krabice s radioaktivním materiálem.

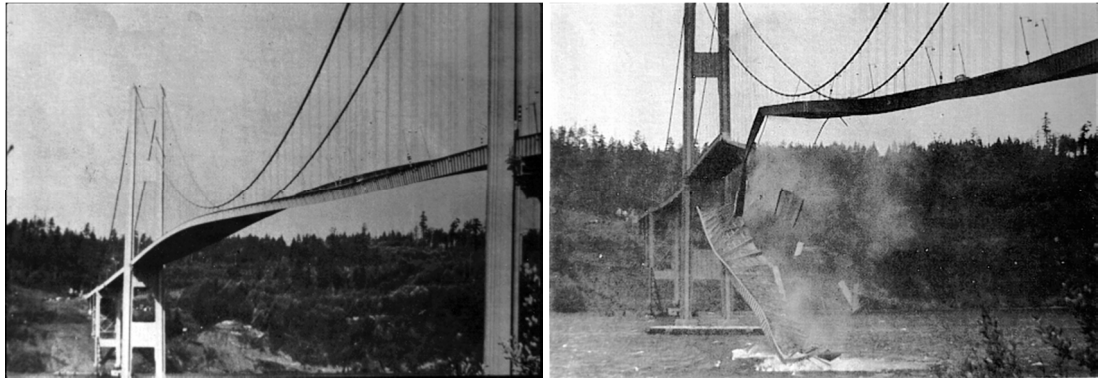


Obr. 1.4 a) Most Maria Pia v Portu, při jehož návrhu byla použita Euler – Bernoulliho teorie nosníků b) „Podpis“ Gustava Eiffela

Těsně před druhou světovou válkou zpopularizovalo problematiku kmitání washingtonské město Tacoma. Tamní radní potřebovali postavit most přes zátoku a vypsali na jeho návrh veřejnou soutěž. Vyhrál nejlevnější projekt designéra Leona Moisseifa. Konstrukce mostu započala roku 1938 a již během stavby se most začal vyznačovat nestabilním chováním, a proto mu dělníci začali přezdívat „Cválající Gertie“. Před otevřením mostu se inženýři pokusili o několik řešení k zabránění oscilacím mostní konstrukce. Například vyzkoušeli připevnit pomocí ocelových lan konstrukci vozovky k pobřeží, ale lana rychle praskala. Dále přidávali k hlavním nosným lanům lana přídatná, která na mostu zůstala, nicméně byla neefektivní. A v poslední řadě se snažili zavést hydraulický systém, který by tlumil příčné vlnění, což lze považovat za druh aktivního tlumení. Účinnost tohoto zařízení ale byla znehodnocena pracovníky, kteří při pískování ocelových dílů takto ošetřili i hydraulický aparát, který poté přestal těsnit a fungovat. A tak byl tedy most dne 1. července 1940 slavnostně otevřen a pyšnil se titulem „třetí nejdelší na světě“. Nicméně, jak lze tušit z předchozích řádků, schylovalo se k inženýrské ostudě. Ta nastala dne 7. listopadu téhož roku. Údolím zavál vítr rychlostí 64 km v hodině a rozhoupal most do takových výchylek, až došlo k totálnímu zničení mostní části. Nehoda naštěstí zůstala bez následků na lidských životech a díky Barney Elliotovi, majiteli místního obchodu s fotografickými pomůckami, byla událost natočena a dodnes přednášející architektury, strojírenství a dalších oborů používají toto video ke zvýšení atraktivity přednášek a k demonstraci účinků mechanické rezonance. (I když se dodnes vedou spory, zda se o rezonanci jednalo [BILLAH, SCANLAN, 1991]).

Den destrukce tohoto mostu jistě není šťastným okamžikem pro město Tacoma, ale pro vědu se jedná o velice slavný den. Zvýšil se zájem o vibrační problémy a postupně byla

přijata opatření, aby se při stavbě mostů už taková situace neopakovala. Událost nepřímo vedla k rozvoji identifikačních procedur, zejména experimentální a operační modální analýzy. Chtělo by se říct, že podobná situace už dnes nemůže nastat, ale není tomu tak. I slavný Millenium Bridge v Londýně byl poprvé otevřen jen krátce a poté podstoupil složitou rekonstrukci, aby se zabránilo jeho houpání.



Obr. 1.5 a), b) Most Tacoma Narrows

Potlačení vibrací se obecně dosahuje několika způsoby, které lze rozdělit na aktivní, pasivní a hybridní metody, jež kombinují prvky aktivní i pasivní.

Jeden z nejnámějších pasivních způsobů snížení úrovně nežádoucích vibrací využívá přídavné hmotnosti (tuned mass damper). Toto zařízení bylo například implementováno do vozu formule 1 Renault na konci sezóny 2005 a na začátku následujícího ročníku. Konstrukteři tímto eliminovali nežádoucí kmitání přední části monopostu připevněním přídavného závaží uchyceného pomocí pružin. Přídavná hmota rozděluje původní rezonanční vrchol na dva menší [LEI, 1996]. Mezi další pasivní metody lze zařadit různé změny konstrukcí za účelem ovlivnění rezonančních frekvencí (různé vzpěry, závaží, pružiny...). V seizmicky aktivních oblastech se aplikují ve stavebnictví různé speciální přístupy. Stavějí se například takzvané „domy v domě“, kdy se vnitřní část upevňuje na soustavu pružin a tlumičů. Za nejstarší budovou se základy izolující zemětřesné síly se považuje Kýrova hrobka v Íránu ze čtvrtého století před naším letopočtem. Z modernější architektury má izolované základy například radnice v San Franciscu.



Obr. 1.6 a) Taipei 101 b) Přídavná hmota na hydraulické podpoře [DU PLESSIS, 2010]

Při konstrukci mrakodrapu Taipei 101 na Taiwanu použili stavitelé přídavnou hmotu jako jeden z několika systémů. Tato výšková budova svého času držela se svými 449 m světový rekord jako nejvyšší obyvatelná budova na světě (2004 – 2010) a samozřejmě musela být navržena tak, aby amplitudy výchylek v nejvyšších patrech, zapříčiněné větrem, nezpůsobovaly závratě, a aby byla budova odolná vůči zemětřesení. Jelikož je hmota doplněna o hydraulické tlumení, lze celý systém označit jako hybridní.

Aktivní systémy tlumení vibrací můžeme také najít například v zařízeních pro stabilizaci obrazu ve fotoaparátech. Fungují většinou tak, že snímače pohybu zaznamenávají výchylku v ose  $x$  a  $y$  a kmitací cívky působí na polohu čočky tak, aby obraz nebyl rozostřený.

Aktivní tlumení vibrací a hluku se rovněž stalo předmětem výzkumu na technických univerzitách celého světa. K tlumení zvuku většinou postačí mikrofony a reproduktory. K rozvoji problematiky tlumení mechanických vibrací přispívá, díky svým výborným dynamickým vlastnostem, také rozmach piezoelektrických akčních členů. O jednom takovém zařízení bude pojednávat tato práce.

## **2 Cíle disertační práce**

Disertační práce je zaměřena na aktivní potlačování mechanických vibrací a navazuje na diplomovou práci „Aktivní tlumení vibrací“ [ŠURÁNEK, 2012]. Na laboratorním modelu s vetknutým nosníkem je poblíž vetknutí umístěn piezoelektrický akční člen, který má sloužit k vyrovnávání vibrací. Kmitání je měřeno snímačem zrychlení, který je umístěn na volném konci nosníku. Jedná se tedy o nekolokované uspořádání. Je představen systém, který umožňuje aktivní tlumení konstrukce při více módech kmitání. Cíle práce lze shrnout v následujících bodech:

- Sestavení matematického modelu laboratorního zařízení a implementace do simulačního prostředí MATLAB/Simulink.
- Validace matematického modelu porovnáním měřených a simulovaných charakteristik zejména v kmitočtových oblastech.
- Osazení laboratorního modelu měřicími řetězci pro účely diagnostiky a za cílem realizace zpětné vazby. Předpokládá se použití piezoelektrických snímačů zrychlení, piezoaktuátorů a systému dSPACE.
- Návrh řídicího algoritmu, který bude realizovat aktivní tlumení a bude schopen tlumit konstrukci při vybuzení více vlastních tvarů kmitání.
- Aplikace řídicího systému na laboratorní model, ověření funkčnosti a vyhodnocení výsledků aktivního tlumení vibrací.

### 3 Přehled současného stavu

Počátek rozvoje problematiky aktivního tlumení vibrací lze datovat do osmdesátých a devadesátých let 20. století, kdy se začalo řešit snížení kmitání anténních konstrukcí nebo velkoplošných solárních panelů na oběžné dráze. Vývojem chytrých materiálů se snížila jejich cena a aktivní tlumení se začalo objevovat v robotice, automobilovém průmyslu, přičemž portfolio aplikací se stále rozšiřuje.

Systém s aktivním tlumením vibrací je regulační obvod, který se skládá z vlastní regulované soustavy, což může být výšková budova, most, uchycení čočky vesmírného dalekohledu atd. Dále musí obvod obsahovat měřicí člen, který snímá vibrace a regulátor, který na základě měřené veličiny vypočítává akční zásah akčního členu na regulovanou soustavu.

Mezi měřicí členy používané pro aktivní tlumení lze řadit téměř všechny druhy snímačů výchylek, rychlosti a zrychlení. Při výběru snímače se klade důraz na měřicí rozsah a frekvenční rozsah snímače. Někdy mohou být také nároky na rozměry hmotnost, bezdrátový přenos dat a jiné. Nejpoužívanější typy měřicích členů jsou piezoelektrické akcelerometry, dopplerovské nebo triangulační lasery, tenzometry, indukční proximitní snímače nebo kmitací cívky.

Akční členy je nutné vybírat podle silových a rychlostních nároků a pro tlumení vibrací lze vyjmenovat celou škálu zařízení od hydraulických a pneumatických pístů přes elektrické motory. Mezi špičkové technologie patří tlumiče s magnetorheologickou kapalinou, která vlivem okolního elektromagnetického pole mění svou viskozitu. Dále piezoelektrické aktuátory, které se deformují v závislosti na přivedeném napětí. Existují pezoaktuátory lineární, náplast'ové, které se deformují ohybově.

Podle vzájemného umístění snímačů akčních členů se systémy rozdělují na kolokované a nekolokované. Při kolokovaném uspořádání jsou akční člen i snímač umístěny ve stejném bodě. Při nekolokovaném uspořádání jsou na jiných místech. Někdy se jako třetí možnost uvádí „téměř kolokované“ uspořádání. Kolokovanost má vliv na popis přenosu soustavy a ovlivňuje přístup k návrhu regulátoru.

Cílem regulace při aktivním tlumení není klasické sledování žádané veličiny. Regulační obvod pro aktivní tlumení vibrací obvykle vůbec neobsahuje vstup pro žádanou veličinu, protože je implicitně nulová, což se týká polohy, rychlosti i zrychlení. Očekávání od regulace je takové, že systém s uzavřenou zpětnou vazbou bude mít větší tlumení než původní mechanická struktura. Regulace je navrhována zejména pro frekvenční oblasti rezonancí tlumené struktury. Literatura [PREUMONT, 2011] uvádí mnoho druhů zpětnovazebního řízení. Mezi nejdůležitější typy patří přímé zavedení rychlostní zpětné vazby (Direct Velocity Control), kdy je snímána rychlost vibrací a tento signál je přiveden k akčnímu členu, který působí zpět silově na konstrukci a snižuje amplitudu kmitání. Dále se uvádí řízení kladnou polohovou zpětnou vazbou (Positive Position Feedback) a integrační silovou zpětnou vazbou (Integral Force Feedback).

### 3.1 Vědecké články o laboratorních zařízeních s aktivním tlumením vibrací

Ve vědeckých člancích lze nalézt mnoho témat zabývajících se aktivním potlačováním mechanických vibrací. Kreuzer et al popisují způsob, kdy na dvou místech snímají postupnou vlnu nosníkem, který podpírá pevné těleso. Mezi nosník a těleso umísťují blíže nespécifikovaný akční člen, který kompenzuje postup vibrací do podepřeného tělesa [KREUZER et al, 2013]. Nigdeli et al řeší tlumení konstrukce pomocí akčního členu, který mění míru napětí podpůrných lan [NIGDELI, BODUROGLU, 2013]. Abe řeší tlumení kyvadla pomocí změny délky závěsného lana a nelineárního řízení [ABE, 2013]. Hickey et al řeší aktivní tlumení kmitání nosníku, kdy používá pár piezoaktuátorů v kolokovaném uspořádání, jeden je použitý jako snímač. K řízení používá PID regulátor. Škoda a Šklíba používají gyroskopy k vyrovnání vibrací desky [ŠKODA, ŠKLÍBA, 2013].

Zde prezentovaná práce je jiná v tom, že bude použit lineární piezoaktuátor k tlumení ocelového nosníku a uspořádání snímače s akčním členem je nekolokované. Systém také bude tlumit více módů kmitání, což se neřeší příliš často, nicméně řešení tohoto problému je užitečné a z hlediska řízení zajímavé. Dále bude unikátní architektura řídicího algoritmu.

### 3.2 Úvod do problematiky kmitání hmotného bodu

Soustavu ideální pružiny a hmotného bodu popíšeme pomocí diferenciální rovnice. V rovnici nalezneme Hookeův zákon o proporcionálním vztahu mezi silou  $F$  [N] a výchylkou (prodloužením pružiny)  $y$  [m] a druhý Newtonův zákon o přímé úměře mezi silou a zrychlením hmotného bodu. Hmotnost je značena  $m$  [kg] a tuhost pružiny  $k$  [N·m<sup>-1</sup>],

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) = F(t). \quad (3.1)$$

Pro problematiku volného kmitání uvažujeme, že vnější síla je nulová. Rovnice poté přechází do tvaru:

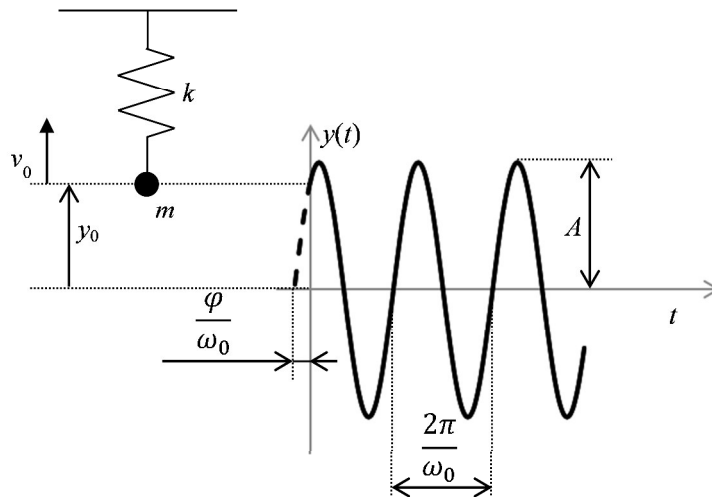
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} y(t). \quad (3.2)$$

Obecné řešení této rovnice je:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (3.3)$$

kde je  $y_0$  počáteční výchylka pružiny,  $v_0$  počáteční rychlost hmotného bodu,  $\omega_0$  vlastní frekvence netlumeného kmitání:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.4)$$



Obr. 3.1 Kmitání hmotného bodu na pružině

Rovnici (3.3) lze také přepsat do tvaru:

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.5)$$

kde amplituda  $A$  je:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad (3.6)$$

a počáteční fáze  $\varphi$ :

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 y_0}\right). \quad (3.7)$$

Hmotný bod na pružině tedy volně kmitá vlivem počátečních podmínek, na kterých závisí amplituda a počáteční fáze kmitání. S vyšší tuhostí pružiny narůstá vlastní frekvence oscilátoru, naopak s rostoucí hmotností se vlastní frekvence snižuje. Soustava hmotného bodu a pružiny neobsahuje žádný prvek, na kterém by se mechanická energie přeměňovala na jinou formu energie, a tudíž dochází pouze k harmonickému předávání celkové energie soustavy z potenciální energie na kinetickou a opačně.

### 3.3 Mechanický oscilátor s tlumením

V reálné pružině se část energie přetváří na teplo a důsledkem toho amplituda kmitání postupem času klesá. Říkáme, že oscilátor je tlumený. V diferenciální rovnici tedy přibude koeficient viskózního tlumení  $b$ . Rovnice bude při volném kmitání opět bez působení vnějších sil:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = 0. \quad (3.8)$$



Zavedeme pojem koeficient poměrného tlumení  $\xi$ :

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{mk}}. \quad (3.9)$$

Tento koeficient určuje chování soustavy. Jestliže  $\xi < 1$ , jedná se o takzvané podkritické tlumení, průběh je kmitavý a rovnice (3.8) má obecné řešení ve tvaru [WEISSTEIN, 2016]:

$$y(t) = e^{-\lambda t} \left[ y_0 \cos(\omega_r t) + \frac{v_0 + \lambda y_0}{\omega_r} \sin(\omega_r t) \right]. \quad (3.10)$$

Tento tvar lze přepsat jako:

$$y(t) = A_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega_r t + \varphi). \quad (3.11)$$

Vlastní frekvence tlumeného kmitání  $\omega_r$  bude oproti vlastní frekvenci netlumeného kmitání menší podle vztahu:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.12)$$

Konstanta útlumu  $\lambda$  definuje rychlost doznívání kmitání podle vztahu:

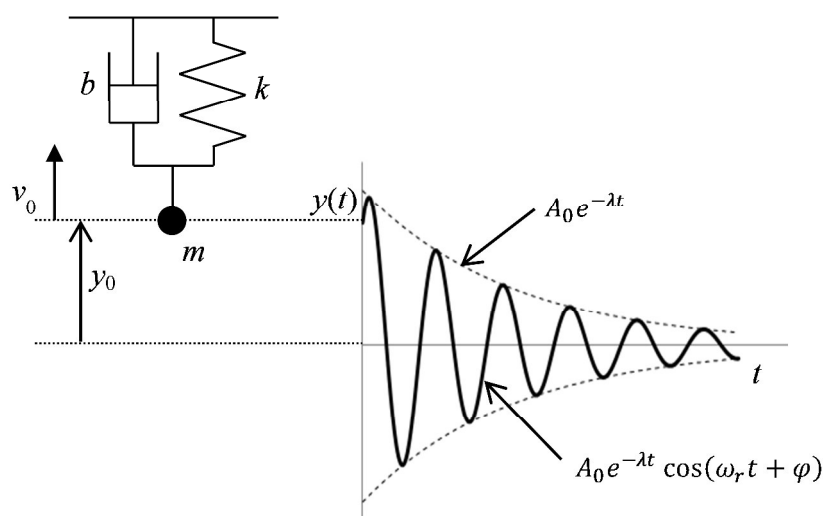
$$\lambda = \frac{b}{2m}. \quad (3.13)$$

Počáteční hodnota obálky kmitání  $A_0$  je definována jako:

$$A_0 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \lambda y_0)^2}{\omega_r^2}}, \quad (3.14)$$

a počáteční fáze vztahem:

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0 + \lambda y_0}{\omega_r y_0}\right). \quad (3.15)$$



Obr. 3.2 Tlumené kmitání hmotného bodu na pružině

Jestliže  $\zeta > 1$ , jedná se o nadkritické tlumení a soustava nebude kmitat. Rovnice (3.8) bude mít v tomto případě řešení ve tvaru [WEISSTEIN, 2016]:

$$y(t) = Ae^{(-\lambda - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1})t} + Be^{(-\lambda + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1})t}. \quad (3.16)$$

Konstanty  $A$  a  $B$  jsou závislé na počáteční poloze a rychlosti dle následujících vzorců:

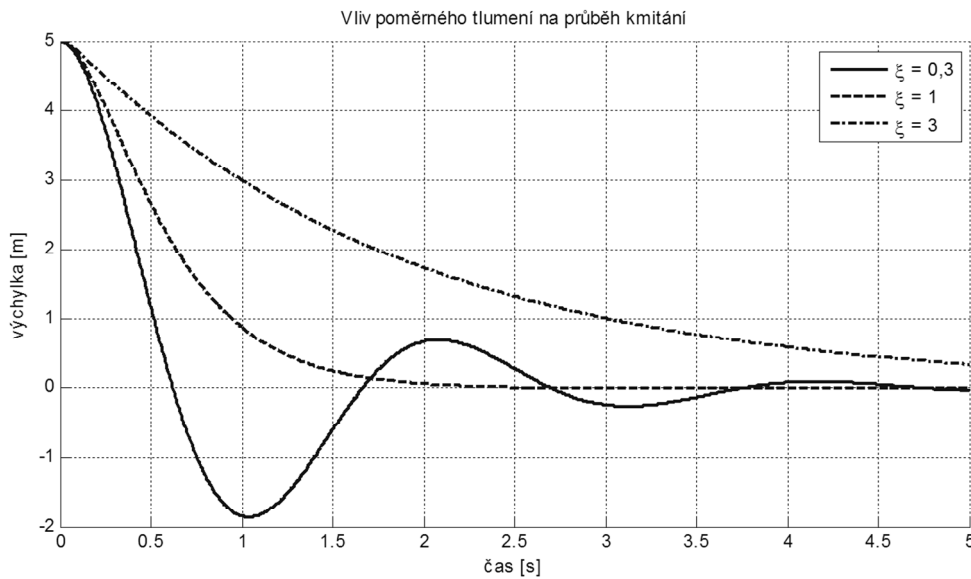
$$A = y_0 - \frac{(\lambda + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1})y_0 + v_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.17)$$

$$B = \frac{(\lambda + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1})y_0 + v_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (3.18)$$

Poslední případ může nastat, jestliže  $\zeta = 1$ . Tlumení v tomto případě nazýváme „kritické“ a rovnice má řešení [WEISSTEIN, 2016]:

$$y(t) = [y_0 + (v_0 + \omega_0 y_0)t]e^{-\omega_0 t}. \quad (3.19)$$

Tato práce se bude dále zabývat výhradně systémy s podkritickým tlumením.



Obr. 3.3 Vliv poměrného tlumení

### 3.4 Rezonance

Tlumenou pružinu s hmotným bodem budeme silově budit harmonickou silou s amplitudou  $F_0$ :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.20)$$

Pohybová rovnice pak je

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.21)$$

Chování systému je v tomto případě závislé na frekvenci působící síly. Řešení rovnice je:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.22)$$

Amplituda  $y_0$  je závislá na frekvenci budící síly podle vztahu:

$$y_0(\omega) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (3.23)$$

Poměr síly a tuhosti vyjadřuje statickou výchylku pro  $\omega = 0$ , takže zavedeme substituci:

$$\frac{F_0}{k} = y_s. \quad (3.24)$$

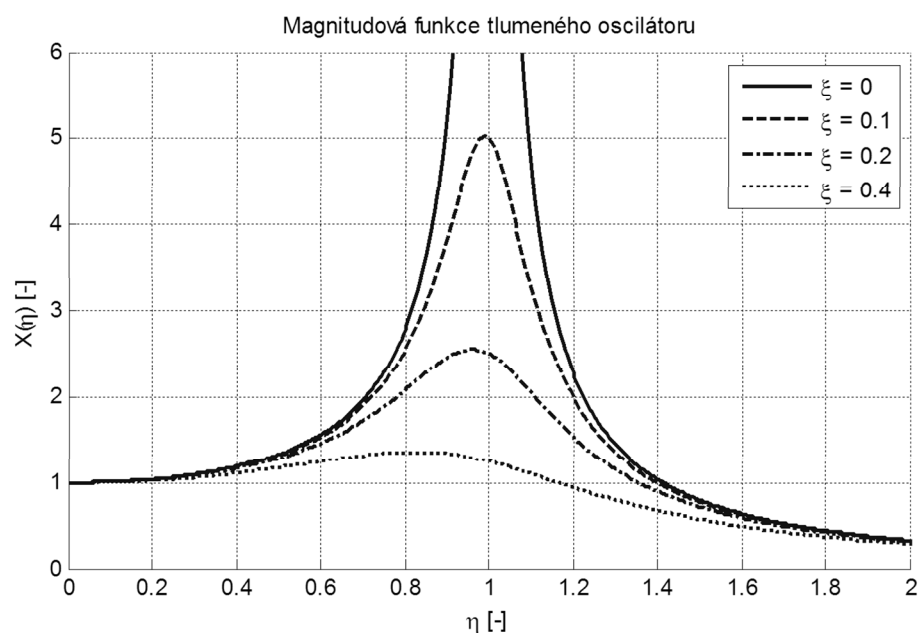
Poměr frekvence budící síly k vlastní frekvenci netlumených kmitů nazveme činitelem naladění:

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (3.25)$$

Nyní je možné zavést pojem amplitudové zesílení

$$X(\eta) = \frac{y_0(\eta)}{y_s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}. \quad (3.26)$$

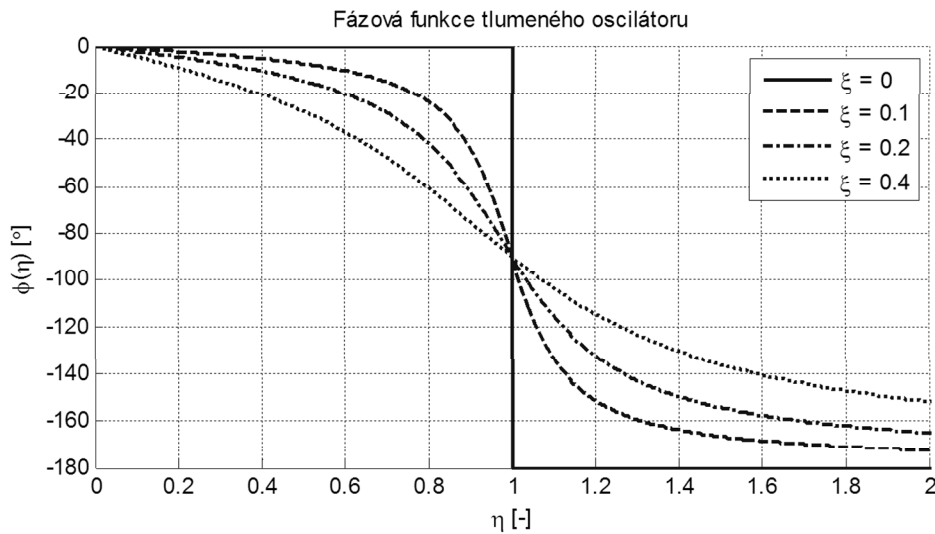
Graf této funkce se v češtině obvykle označuje jako „amplitudová charakteristika“. Toto označení je pro tuto práci celkem nešťastné, protože funkce nevyjadřuje amplitudu, ale poměr dvou amplitud. Pro poměr amplitud v angličtině existuje jednoduchý pojem „magnitude“, a proto bude ve vhodných případech tento termín počestěn. Necht' se tedy následující graf jmenuje „magnitudová funkce“.



Obr. 3.4 Magnitudová funkce tlumeného oscilátoru

Fázová funkce je:

$$\varphi(\eta) = \arctan \frac{-2\xi\eta}{1 - \eta^2}. \quad (3.27)$$



Obr. 3.5 Fázová funkce tlumeného oscilátoru

Z těchto charakteristik je možné shrnout dynamické chování oscilátoru s tlumením. Výstup systému v podobě časově závislé výchylky má největší amplitudu, když se budicí frekvence setká s vlastní frekvencí tlumených kmitů. Tento stav se nazývá rezonance. Důležitost fázové charakteristiky je někdy opomíjena, ale fakt, že se při rezonanci obrací fáze o 180 stupňů, bude v této práci velice důležitý.

### 3.5 Euler - Bernoulliho nosníky

Euler – Bernoulliho rovnice popisuje vztah mezi průhybem  $y(z)$  a statickým zatížením nosníku podél osy  $q(z)$ :

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EI_x \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right) = q(z) \quad (3.28)$$

V případě, že nosník je ze stejného materiálu (Youngův modul  $E$  je konstantní) a má po celé délce stejný průřez, tudíž má konstantní moment setrvačnosti plochy průřezu  $I_x$ , lze rovnici zjednodušit:

$$EI_x \frac{d^4 y(z)}{dz^4} = q(z). \quad (3.29)$$

Pro potřeby zkoumání dynamického chování nosníku, popíšeme jeho funkcional:

$$S = \left[ \int_0^L \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y(z, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI_x \left( \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial z^2} \right)^2 + q(z)y(z, t) \right] dz \quad (3.30)$$

První člen tohoto funkcionalu zastupuje kinetickou energii nosníku, kde je  $\mu$  relativní hmotnost (hmotnost vztažena na jednotku délky), druhý člen vyjadřuje potenciální energii a poslední člen zastupuje potenciální energii vnějších sil.

Minimalizací funkcionálu  $S$  odvodili Euler, Lagrange a Bernoulli pohybovou rovnici pro tenké nosníky:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI_x \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial t^2} = q(z). \quad (3.31)$$

Jestliže na nosník nepůsobí vnější zatížení a ohybová tuhost je konstantní, přechází rovnice do tvaru:

$$EI_x \frac{\partial^4 y(z, t)}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.32)$$

Předpokládáme, že nosník kmitá při vlastní frekvenci  $\omega$  a této frekvenci odpovídá vlastní tvar kmitů  $\psi(z)$ . Řešení tedy bude:

$$y(z, t) = \text{Re}[\psi(z)e^{j\omega t}]. \quad (3.33)$$

Jestliže toto řešení dosadíme do rovnice (3.32), obdržíme:

$$EI_x \frac{\partial^4 \psi(z)}{\partial z^4} + \mu \omega^2 \psi(z) = 0. \quad (3.34)$$

Řešením této rovnice jsou vlastní tvary kmitů nosníku:

$$\psi(z) = A_1 \cosh(\beta z) + A_2 \sinh(\beta z) + A_3 \cos(\beta z) + A_4 \sin(\beta z), \quad (3.35)$$

kde  $\beta$  je konstanta, pro kterou platí:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EI_x}}. \quad (3.36)$$

Jelikož rovnice nebude mít jedno řešení, ale každý nosník bude mít nekonečně mnoho vlastních tvarů kmitů a k nim příslušné vlastní frekvence, říkáme, že může kmitat ve více módech. Připíšeme proto do rovnice (3.35) indexy  $i$ , které budou udávat pořadí módu:

$$\psi_i(z) = A_1 \cosh(\beta_i z) + A_2 \sinh(\beta_i z) + A_3 \cos(\beta_i z) + A_4 \sin(\beta_i z). \quad (3.37)$$

Konstanta  $\beta_i$  pak bude:

$$\beta_i = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega_i^2}{EI_x}}. \quad (3.38)$$

Tyto rovnice platí pro nosník s jakýmkoliv uložením. Typy uložení definují okrajové podmínky, na základě kterých je možno dopočítat vlastní frekvence  $\omega_i$  a konstanty  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  a  $A_4$ .

### 3.6 Jednostranně vetknutý nosník dle Euler - Bernoulliho teorie

Pro jednostranně vetknutý nosník definujeme čtyři okrajové podmínky:

- a) Výchylka vetknutého konce je rovna nule:

$$\psi_i(0) = 0. \quad (3.39)$$

- b) Směrnice tečny v místě vetknutí je nulová:

$$\frac{d\psi_i(0)}{dz} = 0. \quad (3.40)$$

- c) Na volném konci působí nulový ohybový moment, to znamená, že druhá derivace podle délky je rovna nule:

$$\frac{d^2\psi_i(L)}{dz^2} = 0. \quad (3.41)$$

- d) Na volném konci působí nulový střih, to znamená, že třetí derivace je rovna nule:

$$\frac{d^3\psi_i(L)}{dz^3} = 0. \quad (3.42)$$

Jelikož okrajové podmínky obsahují až třetí derivaci, je nutné postupně derivovat funkci vlastního (3.37) tvaru podle délky  $z$ . První derivace je:

$$\frac{d\psi_i(z)}{dz} = A_1\beta_i \sinh(\beta_i z) + A_2\beta_i \cosh(\beta_i z) - A_3\beta_i \sin(\beta_i z) + A_4\beta_i \cos(\beta_i z). \quad (3.43)$$

Druhá derivace:

$$\frac{d^2\psi_i(z)}{dz^2} = A_1\beta_i^2 \cosh(\beta_i z) + A_2\beta_i^2 \sinh(\beta_i z) - A_3\beta_i^2 \cos(\beta_i z) - A_4\beta_i^2 \sin(\beta_i z). \quad (3.44)$$

Třetí derivace:

$$\frac{d^3\psi_i(z)}{dz^3} = A_1\beta_i^3 \sinh(\beta_i z) + A_2\beta_i^3 \cosh(\beta_i z) + A_3\beta_i^3 \sin(\beta_i z) - A_4\beta_i^3 \cos(\beta_i z). \quad (3.45)$$

Jestliže dosadíme první okrajovou podmínku (3.39) do rovnice (3.37), obdržíme:

$$A_1 = -A_3. \quad (3.46)$$

Dosazením (3.40) do (3.43):

$$A_2 = -A_4. \quad (3.47)$$

Dosazením okrajové podmínky (3.41) do rovnice (3.44) s respektováním vztahů (3.46) a (3.47) obdržíme:

$$A_2 = -A_1 \frac{\cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)}{\sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L)}. \quad (3.48)$$

Nakonec dosadíme podmínku (3.42) do (3.45) a se vztahy (3.46) a (3.47) dostaneme:

$$A_1[\sinh(\beta_i L) - \sin(\beta_i L)] + A_2[\cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)] = 0. \quad (3.49)$$

Dosazení (3.48) do (3.49) a roznásobení vede k:

$$2\cosh(\beta_i L)\cos(\beta_i L) + \cos^2(\beta_i L) + \sin^2(\beta_i L) + \cosh^2(\beta_i L) - \sinh^2(\beta_i L) = 0. \quad (3.50)$$

Po úpravách konečně dostáváme:

$$\cosh(\beta_i L)\cos(\beta_i L) + 1 = 0. \quad (3.51)$$

Kořeny této rovnice získáme numericky. Následně lze tyto kořeny dosadit do vztahu pro výpočet vlastní frekvence, který je vyjádřen z (3.38):

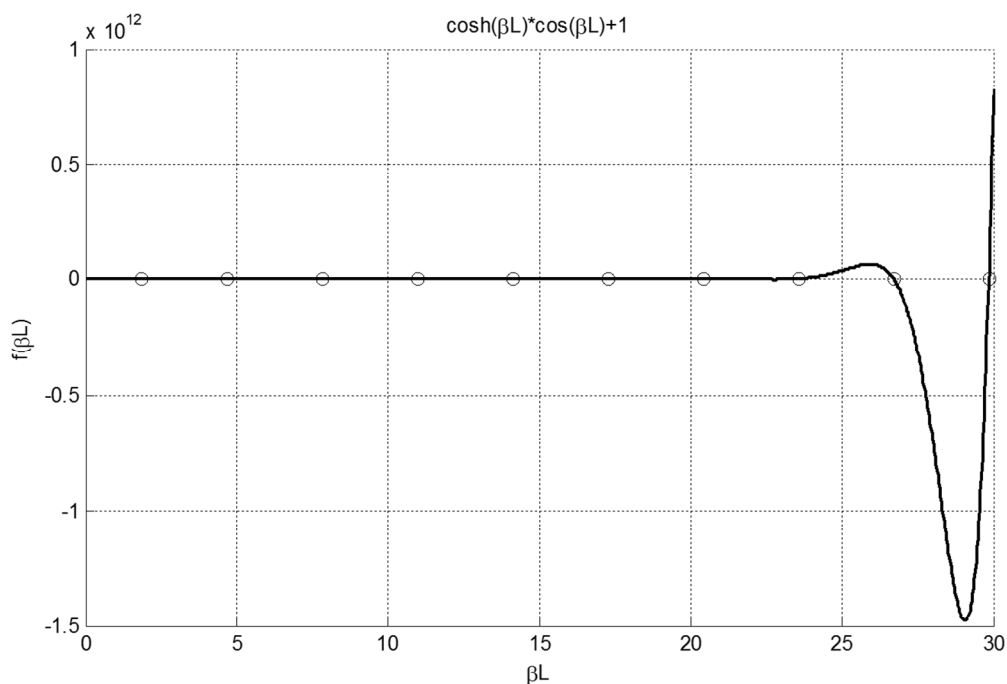
$$\omega_i = \beta_i \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = \frac{(\beta_i L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\rho b h'}} \quad (3.52)$$

kde  $\rho$  je hustota materiálu,  $b$  a  $h$  jsou šířka a výška průřezu nosníku (pro obdélníkový průřez).

Přepočet na frekvenci v jednotkách Hertz provedeme:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}. \quad (3.53)$$

Funkci levé strany rovnice (3.51) a její kořeny znázorňuje následující graf:



Obr. 3.6 Rozložení kořenů rovnice (3.51)

Hodnoty pro rozměry a materiálové vlastnosti jsou zvoleny podle laboratorního modelu použitého v této práci: hustota  $\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , Youngův modul  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ , celková

délka  $L = 0,5$  m, šířka  $b = 0,04$  m, tloušťka  $h = 0,005$  m. Prvních deset vlastních frekvencí netlumených kmitů shrnuje následující tabulka:

Tab. 3.1 Vlastní frekvence vetknutého nosníku

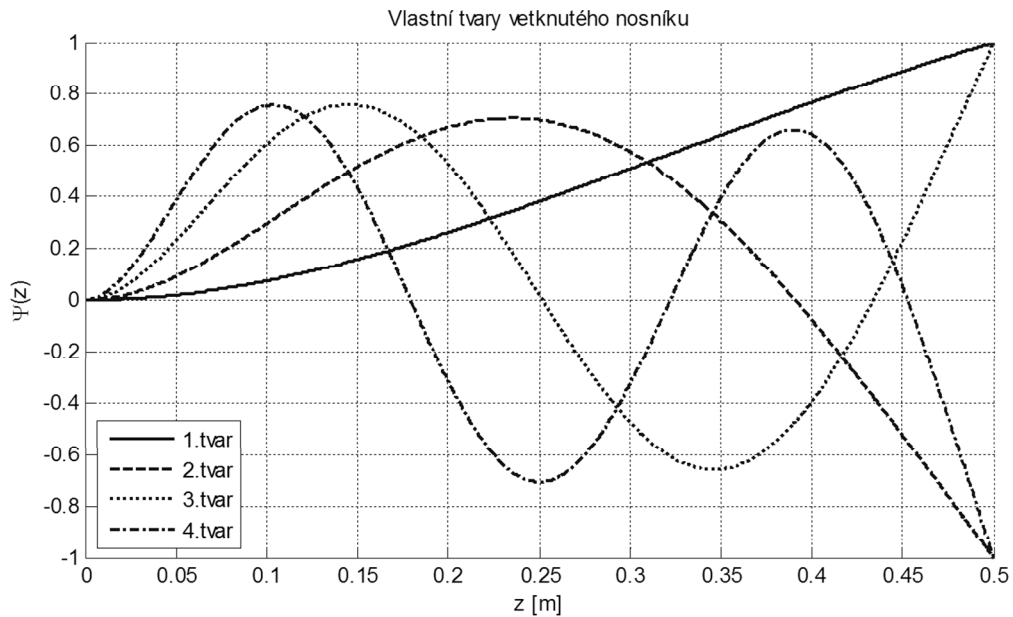
| $i$ | $\beta_i L$ [-] | $\omega_i$ [rad·s <sup>-1</sup> ] | $f_i$ [Hz] |
|-----|-----------------|-----------------------------------|------------|
| 1   | 1,8751          | 104,99                            | 16,710     |
| 2   | 4,6940          | 657,98                            | 104,72     |
| 3   | 7,8547          | 1 842,3                           | 293,22     |
| 4   | 10,995          | 3 610,3                           | 574,60     |
| 5   | 14,137          | 5 968,1                           | 949,85     |
| 6   | 17,278          | 8 915,3                           | 1 418,9    |
| 7   | 20,420          | 12 452                            | 1 981,8    |
| 8   | 23,561          | 16 578                            | 2 638,4    |
| 9   | 26,703          | 21 293                            | 3 389,0    |
| 10  | 29,845          | 26 598                            | 4 233,3    |

Jestliže vztahy (3.46) až (3.48) dosadíme do (3.37), obdržíme vlastní tvary kmitů:

$$\psi_i(z) = A_i \left\{ \frac{\cosh(\beta_i z) - \cos(\beta_i z) + [\sin(\beta_i z) - \sinh(\beta_i z)][\cosh(\beta_i L) - \cos(\beta_i L)]}{[\sin(\beta_i L) - \sinh(\beta_i L)]} \right\}, z \in \langle 0, L \rangle. \quad (3.54)$$

Konstanta  $A_i$  by existovala jiná pro každý mód kmitání, navíc se jedná o komplexní číslo. Aby tyto konstanty bylo možné vyčíslit, je nutné znát počáteční podmínky. Ty by však nebyly v podobě jednoho reálného čísla, které by udávalo počáteční polohu a druhého reálného čísla, které by definovalo počáteční rychlost, jak je tomu u jednoduchého oscilátoru. V případě nosníku by bylo nutné znát celé funkce počátečních výchylek  $y(z,0)$  a rychlostí  $v(z,0)$ , závislých na podélné vzdálenosti na nosníku. Toto v praxi není obvyklé a obdoba amplitudy kmitání se proto v závislosti na počátečních podmínkách nevyjadřuje. Proto se také nemluví o nějaké „amplitudové funkci“ nosníku, ale o „vlastním tvaru kmitů“, protože funkci  $\psi_i(z)$  můžeme vynásobit jakýmkoliv reálným nenulovým číslem a stále poskytne informaci, kde je na nosníku při rezonanční frekvenci kmitna, kde je uzel a jak který bod kmitá vůči jinému bodu nosníku. Na následujícím obrázku jsou znázorněny první čtyři vlastní tvary ohybového kmitání vetknutého nosníku:





Obr. 3.7 Vlastní tvary kmitů jednostranně vetknutého nosníku

Následuje výpis programu, který počítá vlastní frekvence a odpovídající vlastní tvary vetknutého nosníku. Kořeny rovnice  $\beta L$  se nejdříve odhadnou jako místa, kde prvky vektoru  $f$  mění svá znaménka a na přesnou hodnotu se dopočítají funkcí `fsolve()`, do které je nutno zadat předchozí odhady  $x(j)$ . Vlastní vektory jsou násobeny tak, aby kmitna na konci nosníku měla hodnotu 1 nebo -1.

```

%-----
%          EULER - BERNOULLI JEDNOSTRANNĚ VETKNUTÝ NOSNÍK
%          vypočte kořeny rovnice  cos(betaL).*cosh(betaL)+1 = 0
%          vypočte a vykreslí tvary kmitů
%-----
clear all;
close all;

max=30;                %hranice intervalu
body=1001;             %počet bodů
z=linspace(0,max,body); %zkoumaný obor hodnot betaL
f=cos(z).*cosh(z)+1;
ind=find(diff(sign(f))~=0); %index, při kterém je průchod nulou
x=ind/(body/max);      %přibližná hodnota kořenů
i=length(x);          %počet kořenů

%dopočítání kořenů na přesné hodnoty
for j=1:i;
    betaL(j)=fsolve(@(y) cos(y).*cosh(y)+1,x(j));
end
%parametry nosníku
L=0.5;                %délka nosníku [m]:
b=0.04;               %šířka nosníku [m]:
h=0.005;              %tloušťka nosníku [m]:
E=2.1e+11;            %Youngův modul [Pa]
rho=7850;              %hustota [kg/m^3]
Ix=(b*h^3)/12;        %moment setrvačnosti průřezu
omega=betaL.^2/L^2*sqrt(E*Ix/(rho*b*h)); %vlastní frekvence [rad/s]
frek=omega/(2*pi);    %vlastní frekvence [Hz]

%vlastní tvary

```

```

beta=betaL/L;
y=linspace(0,L,body);
for j=1:i;
    psi(j,:)=cosh(beta(j)*y)-cos(beta(j)*y)+(sin(beta(j)*y)-
sinh(beta(j)*y))*(cosh(beta(j)*L)-
cos(beta(j)*L)/(sinh(beta(j)*L)+sin(beta(j)*L));
    pom=abs(psi(j,body)); %úprava grafu, aby max
    psi(j,:)=psi(j,+)/pom; %hodnota byla +-1
end

%vykreslení funkce
figure(1);
hold on
plot(z,f,'-','Linewidth',2);
plot(betaL,zeros,'ro');
hold off;
grid on;
title('cosh(\betaL)*cos(\betaL)+1');
xlabel('\betaL');
ylabel('f(\betaL)');

%vykreslení tvarů
figure(2);
hold on
plot(y,psi(1,:),'-','Linewidth',2);
plot(y,psi(2,),'--','Linewidth',2);
plot(y,psi(3,),':', 'Linewidth',2);
plot(y,psi(4,),'-.','Linewidth',2);
hold off;
grid on;
title('Vlastní tvary kmitů vetknutého nosníku');
xlabel('z [m]');
ylabel('\Psi(z)');
legend('1.tvar','2.tvar','3.tvar','4.tvar','Location','SouthWest');

```

**Obr. 3.8** Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů vetknutého nosníku

## 4 Laboratorní zařízení

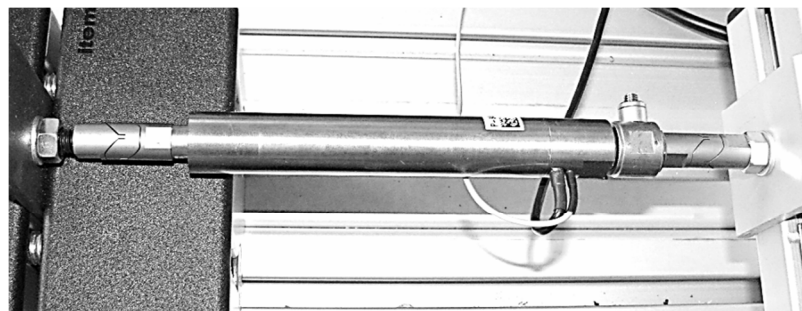
Laboratorní model byl sestaven v rámci diplomové práce „Aktivní tlumení vibrací“ za účelem prvotních experimentů s tlumením pomocí piezoelektrického akčního členu. Základna laboratorního modelu je sestavena ze stavebnicového systému ITEM, do kterého je zakomponován jednostranně vetknutý nosník z pásové oceli o rozměrech 40x5x500 mm. K vetknutému konci nosníku je přišroubován piezoaktuátor. Na volný konec nosníku je přilepen piezoelektrický akcelerometr, který snímá zrychlení volného konce.



Obr. 4.1 Laboratorní model s vetknutým nosníkem

### 4.1 Piezoelektrický akční člen

Piezoaktuátor je výkonný a rychlý akční člen. Jeho schopností je vyvinout velké síly při malém zdvihu. Funguje tak, že je na výbrus piezomateriálu (přírodní křemen nebo keramické materiály) přivedeno napětí, čímž je vyvolána deformace tohoto materiálu. Použitý piezoaktuátor Physik Instrumente P-845.60 má zdvih 90  $\mu\text{m}$ , je schopný vyvinout sílu 3000 N v tlaku a 700 N v tahu. Je připojen k zesilovači E-500.00 do něhož vchází signál 0÷10 V, samotný piezoaktuátor je napájen napětím -20÷120 V. Výhodou pro použití v řízení a regulaci je mimo jiné lineární statická charakteristika mezi napětím a deformací krystalu a vliv zatěžující síly na její deformaci je malý.



Obr. 4.2 Piezoaktuátor Physik Instrumente P-845.60



Obr. 4.3 Zesilovač E-500.00 pro napájení piezoaktuátoru

## 4.2 Snímač zrychlení

Piezelektrický snímač zrychlení v sobě ukrývá setrvačnou hmotu připevněnou na piezelektrickém materiálu. Tato hmotu svou setrvačností vyvíjí sílu na piezelektrický krystal a ten na sobě generuje elektrický náboj. Použitý snímač Ono Sokki NP-2910 má citlivost  $0,306 \text{ pC}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$ , frekvenční rozsah do 20 kHz, maximální měřitelné zrychlení  $20\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a hmotnost je pouze 2 g. Nízká hmotnost snímače je výhodou, protože má malý vliv na hmotnostní vlastnosti měřeného objektu.



Obr. 4.4 Akcelerometr Ono Sokki NP-2910

## 4.3 Nábojový zesilovač

Snímač je použit v kombinaci s nábojovým zesilovačem Ono Sokki CH-6130, který má zesílení  $1 \text{ mV/pC}$ .



Obr. 4.5 Nábojový zesilovač Ono Sokki CH-6130

## 4.4 Modul M32

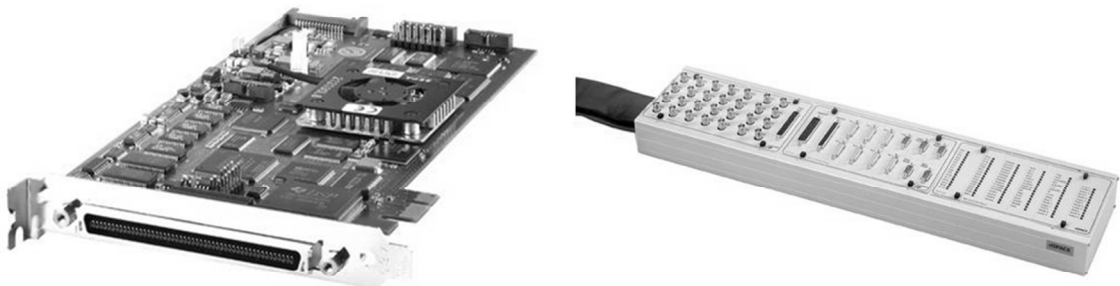
Modul M32 zajišťuje napájení konstantním proudem pro snímače se standardem IEPE. Zkratka IEPE znamená „Integrated Electronic PiezoElectric accelerometer“. Některé měřicí karty jsou schopny tyto snímače napájet, ale při použití karet s obyčejným napěťovým vstupem je nutné měřicí řetězec doplnit o toto napájení.



Obr. 4.6 Převodník M32

#### 4.5 Systém dSPACE

Řídicí karta DS1104 se instaluje na osobní počítač do volného PCI/PCIe slotu a umožňuje přímo navrhovat a testovat řídicí algoritmy (Rapid Control Prototyping). Je plně programovatelná v prostředí Simulink. To znamená, že všechny vstupy a výstupy jsou konfigurovány graficky. Karta obsahuje vlastní procesor, paměti, časovače, obsluhu přerušení, A/D, D/A převodníky, digitální vstupy a výstupy. Vstupy a výstupy jsou vyvedeny na konektorový panel. Systém dSPACE obsahuje také prostředí pro vizualizaci měřených procesů, které má název „ControlDesk“.



Obr. 4.7 Řídicí karta DS1104 a její konektorový panel

#### 4.6 Budič vibrací

Při experimentech bude potřeba nosník rozkmitat na rezonančních frekvencích. Za tímto účelem je ke konstrukci připevněn elektrodynamický budič vibrací Tira TV 52110. Toto zařízení je schopno vyvinout až 100 N při harmonickém buzení. Frekvenční rozsah je 2 až 7000 Hz. Maximální rozkmit 15 mm. Efektivní hmotnost pohybujícího se jádra je 0,2 kg.

K zesílení řídicího signálu a k napájení slouží zesilovač Tira BAA 120.



Obr. 4.8 Budič vibrací Tira TV 52110

#### 4.7 Snímač síly Endevco 2311 - 10

Piezoelektrický snímač síly je připojen k piezoaktuátoru a měří sílu, kterou piezoaktuátor přenáší. Měřicí rozsah je  $\pm 2200$  N. Citlivost snímače výrobce uvádí 10 mV na libru, což je v soustavě SI 2,226 mV/N. Rezonanční frekvence snímače je 70 kHz.



Obr. 4.9 Snímač síly Endevco 2311 - 10

#### 4.8 Signálový analyzátor Pulse

Modulární systém Pulse vyrábí dánská společnost Bruel & Kjaer. Použité diagnostické zařízení obsahuje modul 7537A, který má pět vstupních a jeden výstupní kanál. Dále je obsažen modul 3109, který má čtyři vstupní a dva výstupní kanály. Dodávaný software Pulse LabShop obsahuje mnoho nástrojů, ze kterých jsou pro tuto práci potřebné zejména analýza rychlé Fourierovy transformace a zaznamenávání veličin v čase.



Obr. 4.10 Pulse 7537A + 3109

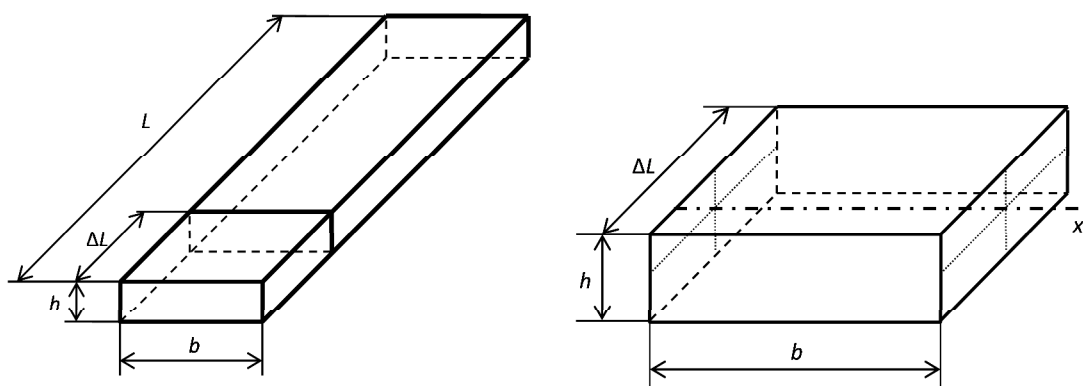
## 5 Matematické modelování laboratorního zařízení

V této kapitole bude podrobně popsána tvorba matematického modelu, který bude simulovat chování použitého laboratorního nosníku. Pro účely sledování dynamického chování nosníku je nutné vytvořit matematickou aproximaci pomocí diskretizace na malý počet prvků. Pružný ocelový nosník tedy bude pomyslně rozdělen na kvádrové úseky, které budou uvažovány jako dokonale pevné a ty budou navzájem spojeny myšlenými rotačními pružinami.

### 5.1 Základní rozměrové a hmotnostní vlastnosti nosníku

Označme, že je  $L$  celková délka nosníku,  $h$  tloušťka a  $b$  šířka.  $N$  je počet prvků, na který uvažujeme nosník rozdělit. Délka jednoho prvku je poté:

$$\Delta L = \frac{L}{N}. \quad (5.1)$$



Obr. 5.1 Značení rozměrů nosníku a diskretizovaného prvku

Při odvozování diferenciálních rovnic využijeme také moment setrvačnosti průřezu nosníku (kolem osy procházející polovinou tloušťky  $h$ ):

$$I_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.2)$$

Při zavedení hustoty  $\rho$  je hmotnost jednoho prvku:

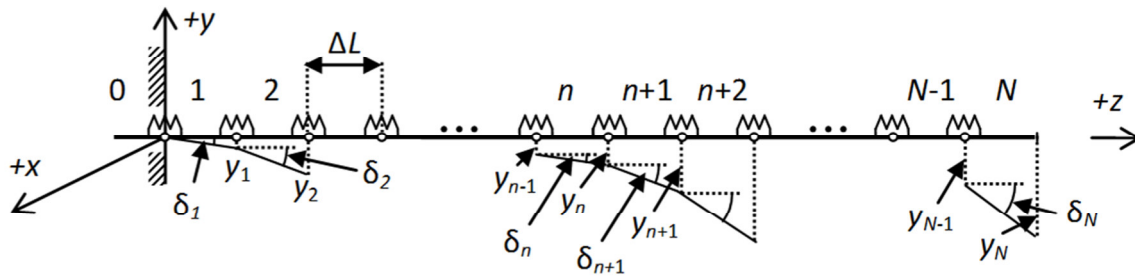
$$\Delta m = \rho \cdot b \cdot h \cdot \Delta L. \quad (5.3)$$

Moment setrvačnosti kvádrového prvku se vypočítá:

$$J_x = \Delta m \frac{\Delta L^2 + h^2}{12}. \quad (5.4)$$

### 5.2 Odvození tuhosti torzní pružiny

Nosník je tedy aproximován soustavou kvádrů a torzních pružin a je nutné odvodit vztah mezi Youngovým modulem  $E$ , který charakterizuje pružnost původního materiálu, a tuhostí rotační pružiny  $K_\delta$ , která bude pružnost zastupovat v diskretizovaném modelu.



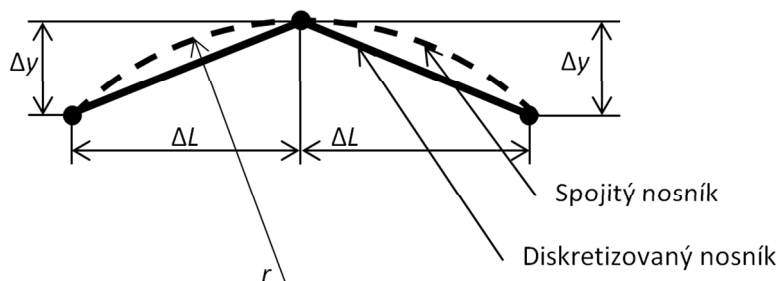
Obr. 5.2 Diskretizovaný nosník

Jednotlivé výchylky nosníku jsou značeny  $y_1$  až  $y_N$ , úhly natočení torzních pružin  $\delta_1$  až  $\delta_N$ .

Z Euler – Bernoulliho teorie pro tenké nosníky platí, že křivost ( $r$  je zde značen poloměr křivosti) je přímo úměrná ohybovému momentu  $M_o$  a nepřímo úměrná ohybové tuhosti (ohybová tuhost je součin Youngova modulu a plošného momentu setrvačnosti  $EI_x$ ). Křivost také odpovídá druhé derivaci průhybu podle vzdálenosti hlavní osy nosníku:

$$\frac{M_o}{EI_x} = \frac{1}{r} = \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \quad (5.5)$$

Tato rovnice obsahuje druhou derivaci. Problém spočívá v tom, že průběh průhybu diskretizovaného nosníku nemá druhou derivaci v bodech spojení prvků, a tudíž je nutno ji aproximovat. Na následujícím obrázku je přerušovanou čarou znázorněn spojitý nosník, který podle Euler – Bernoulliho teorie má poloměr křivosti. Tato část kružnice je nahrazena v diskretizovaném modelu dvěma rovnými prvky.



Obr. 5.3 Aproximaci druhé derivace

Nosník je prohnut symetricky o hodnotu  $\Delta y$ . První derivace prvního a druhého prvku nosníku jsou:

$$\frac{dy_1(z)}{dz} = \frac{\Delta y}{\Delta L}, \quad \frac{dy_2(z)}{dz} = -\frac{\Delta y}{\Delta L}. \quad (5.6)$$

Druhá derivace je aproximována jako rozdíl dvou prvních derivací podělený délkou prvku:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} \approx \frac{\frac{dy_1(z)}{dz} - \frac{dy_2(z)}{dz}}{\Delta L} = \frac{2\Delta y}{\Delta L^2}. \quad (5.7)$$



Předpokládejme, že síla  $F$  působí na element v polovině jeho délky, to znamená v těžišti, a vytváří moment  $M$ :

$$M = \frac{F \cdot \Delta L}{2}. \quad (5.8)$$

Označíme natočení pružiny  $\Delta\delta$  a pro malé hodnoty úhlu natočení lze psát:

$$\cos(\Delta\delta) = \frac{\Delta y}{\Delta L} \approx \Delta\delta. \quad (5.9)$$

Tuhost rotační pružiny je definována jako moment dělený úhlem natočení:

$$K_\delta = \frac{M}{\Delta\delta} = \frac{F \cdot \Delta L^2}{2\Delta y}. \quad (5.10)$$

Po vyjádření síly ze vztahu (5.8) a následném dosazení do (5.10) obdržíme:

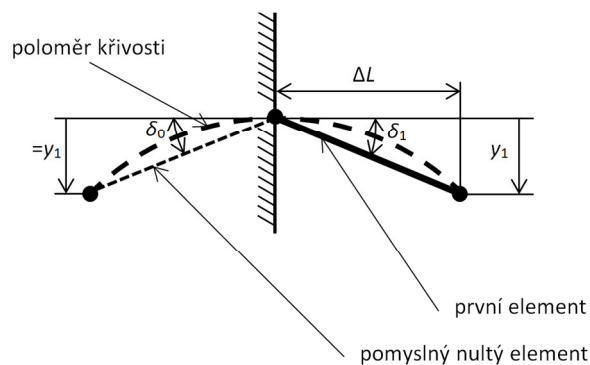
$$K_\delta = \frac{EI_x}{\Delta L}. \quad (5.11)$$

### 5.3 Potenciální a kinetická energie diskretizované soustavy

Vyjádření úhlů natočení jednotlivých prvků dle obr. 5.2:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -\frac{y_1}{\Delta L}, \\ \delta_1 &= \frac{y_1}{\Delta L}, \\ \delta_2 &= \frac{y_2 - y_1}{\Delta L}, \\ \delta_n &= \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta L}, \\ \delta_N &= \frac{y_N - y_{N-1}}{\Delta L}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nultý úhel natočení je vyjádřen kvůli odvozování následujících vztahů a má stejnou velikost jako úhel natočení prvního prvku a opačné znaménko. Odpovídá to Euler – Bernoulliho teorii – v místě vetknutí má nosník poloměr křivosti, který je nutno pomyslně protáhnout do „záporných hodnot“ délky nosníku. Ilustrováno na následujícím obrázku:



Obr. 5.4 Vyjádření úhlů natočení

Úhel, o který je natažená každá pružina vyjádříme jako rozdíl dvou po sobě jdoucích úhlů:

$$\begin{aligned}
 \Delta\delta_0 &= \delta_1 - \delta_0 = \frac{2y_1}{\Delta L}, \\
 \Delta\delta_1 &= \delta_2 - \delta_1 = \frac{y_2 - 2y_1}{\Delta L}, \\
 \Delta\delta_2 &= \delta_3 - \delta_2 = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\Delta L}, \\
 \Delta\delta_n &= \delta_{n+1} - \delta_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta L}, \\
 \Delta\delta_{N-1} &= \delta_N - \delta_{N-1} = \frac{y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{\Delta L}, \\
 \Delta\delta_N &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Dále je zapotřebí vyjádřit ypsilonové souřadnice těžišť jednotlivých prvků:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{y_1}{2}, \\
 Y_n &= \frac{y_n + y_{n-1}}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Potenciální energie uchovaná ve stlačené rotační pružině je pak:

$$V_n = \frac{1}{2} K_\delta (\Delta\delta_n)^2. \tag{5.15}$$

Potenciální energii soustavy získáme jako součet energií naakumulovaných v pružinách:

$$V = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} K_\delta (\Delta\delta_n)^2 = \frac{K_\delta}{2\Delta L^2} \left\{ 2y_1^2 + (y_2 - 2y_1)^2 + \sum_{n=2}^{N-1} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})^2 \right\}. \tag{5.16}$$

Kinetická energie jednoho prvku je dána součtem jeho kinetické energie od pohybu translačního a rotačního:

$$T_n = \frac{1}{2} \Delta m \left( \frac{dY_n}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} J_x \left( \frac{d\delta_n}{dt} \right)^2. \tag{5.17}$$

Celková energie soustavy je součet energií všech prvků:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \Delta m \left( \frac{dY_n}{dt} \right)^2 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} J_x \left( \frac{d\delta_n}{dt} \right)^2 = \\
 &= \frac{\Delta m}{8} \left\{ \frac{dy_1^2}{dt} + \sum_{n=2}^N \frac{d(y_n + y_{n-1})^2}{dt} \right\} + \frac{J_x}{2\Delta L^2} \left\{ \frac{dy_1^2}{dt} + \sum_{n=2}^N \frac{d(y_n - y_{n-1})^2}{dt} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

### 5.4 Soustava pohybových rovnic

Kinetická a potenciální energie byly odvozeny, aby mohly být dosazeny do Euler – Lagrangeových rovnic. Nejdříve se vyjádří Lagrangeova funkce  $L$ , která popisuje dynamiku systému, je definována jako rozdíl kinetické a potenciální energie celé soustavy:

$$L = T - V. \quad (5.19)$$

Obdržíme tedy funkci závislou na  $y_1$  až  $y_N$  a jejich prvních derivacích. Dosadíme tuto funkci do předpisu Euler – Lagrangeových rovnic:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.20)$$

Bude se tedy postupně parciálně derivovat podle  $y_1$  až  $y_N$  a následně se získá soustava pohybových rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} &= \left( \frac{\Delta m}{2} + \frac{2J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_1 + \left( \frac{\Delta m}{4} - \frac{J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_2 + \frac{7K_\delta}{\Delta L^2} y_1 - \\ &- \frac{4K_\delta}{\Delta L^2} y_2 + \frac{K_\delta}{\Delta L^2} y_3 = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} &= \left( \frac{\Delta m}{4} - \frac{J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_1 + \left( \frac{\Delta m}{2} + \frac{2J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_2 + \left( \frac{\Delta m}{4} - \frac{J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_3 - \\ &- \frac{4K_\delta}{\Delta L^2} y_1 + \frac{6K_\delta}{\Delta L^2} y_2 - \frac{4K_\delta}{\Delta L^2} y_3 + \frac{K_\delta}{\Delta L^2} y_4 = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_3} &= \left( \frac{\Delta m}{4} - \frac{J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_2 + \left( \frac{\Delta m}{2} + \frac{2J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_3 + \left( \frac{\Delta m}{4} - \frac{J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_4 + \\ &+ \frac{K_\delta}{\Delta L^2} y_1 - \frac{4K_\delta}{\Delta L^2} y_2 + \frac{6K_\delta}{\Delta L^2} y_3 - \frac{4K_\delta}{\Delta L^2} y_4 + \frac{K_\delta}{\Delta L^2} y_5 = 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_n} &= \left( \frac{\Delta m}{4} - \frac{J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_{n-1} + \left( \frac{\Delta m}{2} + \frac{2J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_n + \left( \frac{\Delta m}{4} - \frac{J_x}{\Delta L^2} \right) \ddot{y}_{n+1} + \\ &+ \frac{K_\delta}{\Delta L^2} y_{n-2} - \frac{4K_\delta}{\Delta L^2} y_{n-1} + \frac{6K_\delta}{\Delta L^2} y_n - \frac{4K_\delta}{\Delta L^2} y_{n+1} + \frac{K_\delta}{\Delta L^2} y_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

⋮





Vztah mezi vlastními čísly matice  $A$  a vlastní frekvencí nosníku je:

$$\lambda_i = \omega_i^2. \quad (5.32)$$

Když je  $A$  reálná symetrická matice, poté existují ortogonální matice  $\Psi$  a diagonální matice  $\Lambda$  takové, že je možné najít spektrální rozklad matice  $A$ :

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1}. \quad (5.33)$$

Matice vlastních čísel obsahuje na diagonále jednotlivá vlastní čísla:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_n & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_{N-1} & \\ & & & & & & \lambda_N \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Matice vlastních vektorů obsahuje vlastní sloupcové vektory:

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n \quad \dots \quad \psi_{N-1} \quad \psi_N] =$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \dots & \psi_{1,n} & \dots & \psi_{1,N-1} & \psi_{1,N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \dots & \psi_{2,n} & \dots & \psi_{2,N-1} & \psi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \psi_{n,1} & \psi_{n,2} & \dots & \psi_{n,n} & \dots & \psi_{n,N-1} & \psi_{n,N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \psi_{N-1,1} & \psi_{N-1,2} & \dots & \psi_{N-1,n} & \dots & \psi_{N-1,N-1} & \psi_{N-1,N} \\ \psi_{N,1} & \psi_{N,2} & \dots & \psi_{N,n} & \dots & \psi_{N,N-1} & \psi_{N,N} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

V MATLABu je vytvořen program pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů. V první části programu se deklarují rozměrové a materiálové vlastnosti, dále se sestavují matice hmotnosti a tuhosti dle odvozených vzorců. Funkce `eig()` provádí rozklad transformační matice  $A$  na vlastní čísla a vlastní vektory. Pro symetrické matice software využívá Choleského rozkladu. Následně je proveden přepočítání z vlastních čísel na vlastní frekvence. Pořadí prvků ve vektoru vlastních frekvencí a pořadí vektorů v matici vlastních vektorů jsou přeskupeny od nejnižší frekvence k nejvyšší (vektor `freq1`) a od nejnižšího vektoru k nejvyššímu (matice `psi1`). Do matice je rovněž vložen nulový řádek, který v každém tvaru kmitů reprezentuje vetknutý konec, to znamená  $y_0 = 0$ . Rozdělení nosníku na 8 prvků bylo zvoleno pouze kvůli tomu, aby bylo možné vypočítané matice prezentovat na formátu A4. Je možné volit jiná přirozená čísla. Dále je nutno vyčíslit vektor pro poměrnou délku nosníku: prvky jsou seřazeny od nuly do jedné s krokem odpovídajícím jednomu diskretizovanému prvku. Vykreslením vlastních vektorů získáváme vlastní tvar kmitů. Pro vykreslení vyhlazeného tvaru se používá kubická interpolační funkce a vektor vzdálenosti je definován s menším krokem.

```

%-----
%               VÝPOČET A VYKRESLENÍ VLASTNÍCH TVARŮ KMITŮ
%-----

clear all;
close all;

%parameters
L=0.5;           %délka nosníku [m]:
b=0.04;         %šířka nosníku [m]:
h=0.005;        %tloušťka nosníku [m]:
N=8;            %počet prvků [-]:

E=2.1e+11;      %Youngův modul [Pa]
rho=7850;       %hustota [kg/m^3]

deltaL=L/N;     %délka prvku
deltam=b*h*deltaL*rho; %hmotnost prvku
Jx=deltam*(deltaL^2+h^2)/12; %moment setrvačnosti kvádrů
Ix=(b*h^3)/12;  %moment setrvačnosti průřezu

a=deltam/4-Jx/deltaL^2; %konstanta v matici
b=deltam/2+2*Jx/deltaL^2; %konstanta v matici
Kdelta=E*Ix/deltaL; %tuhost pružiny

%matice hmotnosti
M=zeros(N,N);
M(N,N)=b/2;
for j=1:N-1,
    M(j,j)=b;
    M(j+1,j)=a;
    M(j,j+1)=a;
end

%matice tuhosti
K=zeros(N,N);
K(N,N)=1;
K(N-1,N-1)=5;
K(N-1,N)=-2;
K(N,N-1)=-2;
for j=1:N-2,
    K(j,j)=6;
    K(j+1,j)=-4;
    K(j,j+1)=-4;
    K(j+2,j)=1;
    K(j,j+2)=1;
end
K(1,1)=7;
K=(Kdelta/(deltaL^2))*K;

%rozklad na vlastní čísla a vektory
[psi,lambda] = eig(inv(M)*K);

%přepočítání na frekvence a přehodnocení pořadí prvků
freq1=fliplr(diag(lambda.^0.5)/(2*pi));

%přehodnocení pořadí prvků od prvního do poslední vektoru
psil=fliplr(psi);

%přidání nulového řádku
psil=[zeros(1,N);psil];

```

```

x=(0:1/N:1);           %vektor poměrné délky
xx = 0:.0025:1;       %vektor délky pro vyhlazený graf

%GRAF VLASTNÍCH TVARŮ KMITŮ
figure(1);
hold on
plot(x,psil(:,1),'r','Linewidth',2);
plot(x,psil(:,2),'g','Linewidth',2);
plot(x,psil(:,3),'b','Linewidth',2);
plot(x,psil(:,4),'c','Linewidth',2);
hold off;
grid on;
title('Vlastní tvary vetknutého nosníku');
xlabel('poměrná délka');
ylabel('poměrná amplituda');
legend('1.tvar','2.tvar','3.tvar','4.tvar','Location','SouthWest');

%VYHLAZENÝ GRAF VLASTNÍCH TVARŮ KMITŮ
figure(2);
hold on
plot(xx,spline(x,psil(:,1),xx),'r','Linewidth',2);
plot(xx,spline(x,psil(:,2),xx),'g','Linewidth',2);
plot(xx,spline(x,psil(:,3),xx),'b','Linewidth',2);
plot(xx,spline(x,psil(:,4),xx),'c','Linewidth',2);
hold off;
grid on;
title('Vlastní tvary vetknutého nosníku');
xlabel('poměrná délka');
ylabel('poměrná amplituda');
legend('1.tvar','2.tvar','3.tvar','4.tvar','Location','SouthWest');

```

Obr. 5.5 Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů v MATLABu

Následuje výpis výsledků jednotlivých matic:

```

M =
    0.0655    0.0163         0         0         0         0         0         0
    0.0163    0.0655    0.0163         0         0         0         0         0
         0    0.0163    0.0655    0.0163         0         0         0         0
         0         0    0.0163    0.0655    0.0163         0         0         0
         0         0         0    0.0163    0.0655    0.0163         0         0
         0         0         0         0    0.0163    0.0655    0.0163         0
         0         0         0         0         0    0.0163    0.0655    0.0163
         0         0         0         0         0         0    0.0163    0.0328

```

Obr. 5.6 Matice hmotností  $M$ 

```

K =
1.0e+006 *
    2.5088   -1.4336    0.3584         0         0         0         0         0
   -1.4336    2.1504   -1.4336    0.3584         0         0         0         0
    0.3584   -1.4336    2.1504   -1.4336    0.3584         0         0         0
         0    0.3584   -1.4336    2.1504   -1.4336    0.3584         0         0
         0         0    0.3584   -1.4336    2.1504   -1.4336    0.3584         0
         0         0         0    0.3584   -1.4336    2.1504   -1.4336    0.3584
         0         0         0         0    0.3584   -1.4336    1.7920   -0.7168
         0         0         0         0         0    0.3584   -0.7168    0.3584

```

Obr. 5.7 Matice tuhosti  $K$



inv(M) \*K =

1.0e+007 \*

|         |         |         |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4.7669  | -3.4575 | 1.5071  | -0.4016 | 0.1071  | -0.0287 | 0.0075  | -0.0014 |
| -3.7697 | 5.1024  | -3.8591 | 1.6142  | -0.4303 | 0.1152  | -0.0300 | 0.0054  |
| 1.5903  | -3.8591 | 5.2094  | -3.8877 | 1.6223  | -0.4343 | 0.1131  | -0.0205 |
| -0.4238 | 1.6142  | -3.8877 | 5.2175  | -3.8918 | 1.6305  | -0.4247 | 0.0769  |
| 0.1130  | -0.4303 | 1.6223  | -3.8918 | 5.2257  | -3.9205 | 1.5939  | -0.2887 |
| -0.0302 | 0.1152  | -0.4343 | 1.6305  | -3.9205 | 5.3327  | -3.7830 | 1.0833  |
| 0.0086  | -0.0327 | 0.1233  | -0.4630 | 1.7375  | -4.3221 | 4.8169  | -1.8668 |
| -0.0043 | 0.0163  | -0.0614 | 0.2304  | -0.8646 | 3.2447  | -4.5849 | 2.0229  |

Obr. 5.8 Transformační matice  $A$ 

psi =

|         |         |         |         |         |         |         |        |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 0.1757  | -0.3357 | 0.4447  | -0.4642 | -0.3847 | 0.2425  | 0.0987  | 0.0171 |
| -0.3044 | 0.4531  | -0.3212 | -0.0389 | -0.3792 | 0.4628  | 0.2733  | 0.0624 |
| 0.4008  | -0.3682 | -0.1152 | 0.4443  | 0.1573  | 0.3586  | 0.4150  | 0.1302 |
| -0.4519 | 0.1133  | 0.4360  | -0.0916 | 0.4387  | -0.0221 | 0.4451  | 0.2147 |
| 0.4520  | 0.1935  | -0.3121 | -0.4209 | 0.0450  | -0.3629 | 0.3297  | 0.3109 |
| -0.4015 | -0.4125 | -0.1330 | 0.2025  | -0.4038 | -0.3610 | 0.0824  | 0.4140 |
| 0.3003  | 0.4297  | 0.4201  | 0.3260  | -0.1733 | 0.0244  | -0.2484 | 0.5204 |
| -0.2364 | -0.3760 | -0.4518 | -0.5029 | 0.5440  | 0.5790  | -0.6067 | 0.6277 |

Obr. 5.9 Matice vlastních vektorů  $\Psi$ 

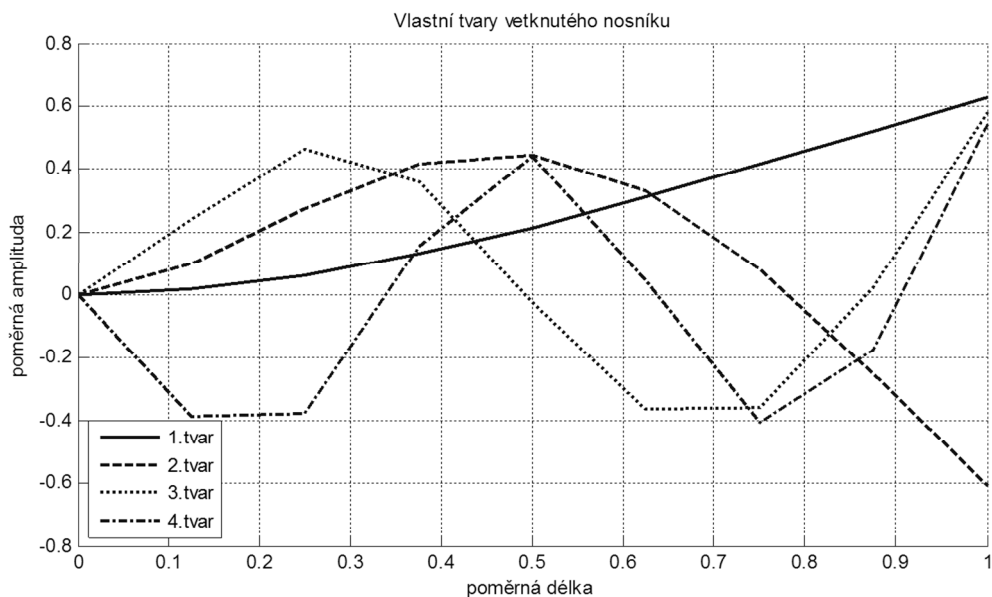
lambda =

1.0e+008 \*

|        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.5582 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 0      | 1.1113 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 0      | 0      | 0.6422 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 0      | 0      | 0      | 0.3058 | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 0      | 0      | 0      | 0      | 0.1163 | 0      | 0      | 0      |
| 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0.0313 | 0      | 0      |
| 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0.0041 | 0      |
| 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0.0001 |

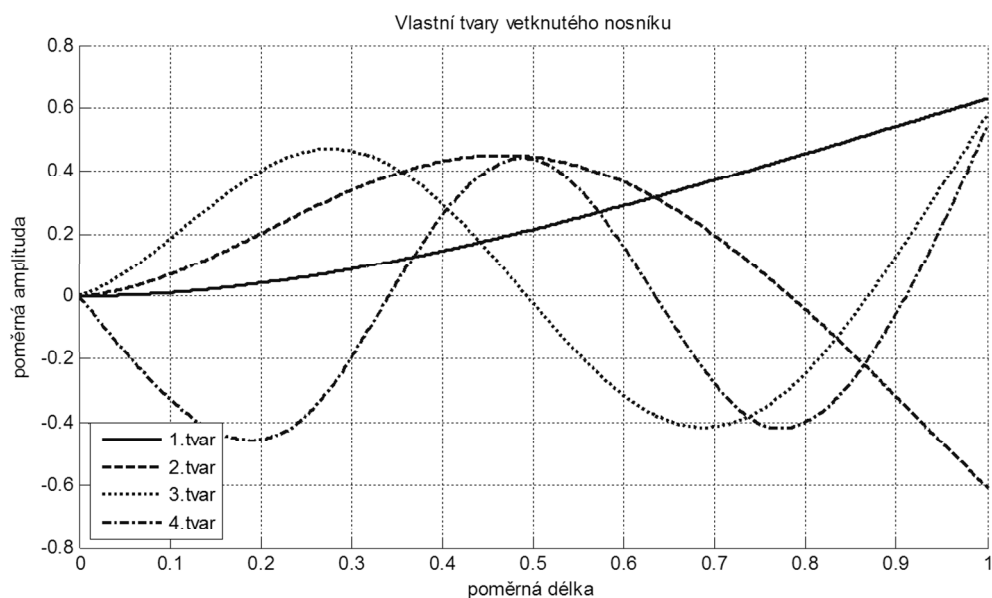
Obr. 5.10 Matice vlastních čísel  $\Lambda$

Následuje vykreslení vlastních vektorů, které představují vlastní tvary použitého vetknutého nosníku:



Obr. 5.11 Zobrazení vlastních vektorů (nevyhlazeno)

Po vyhlazení grafů kubickými vyhlazovacími funkcemi jsou vlastní tvary podobné těm, které byly vytvořeny dle Euler – Bernoulliho teorie:



Obr. 5.12 Zobrazení vlastních vektorů (vyhlazeno)

## 5.6 Zavedení tlumení

Aby byl matematický model nosníku kompletní, je nutné k matici hmotnosti a tuhosti přidat matici tlumení. Neexistuje zcela spolehlivý způsob, jak odvodit matici tlumení, protože tlumení daného laboratorního nosníku je závislé na okolní teplotě, tlaku vzduchu, složení oceli a mnoha dalších okolnostech. Nejčastěji se proto matice definuje jako lineární

kombinace matice hmotnosti a matice tuhosti. Toto tlumení se nazývá Rayleighovo a matici tlumení zavedeme jako:

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (5.36)$$

Rayleighovy konstanty  $\alpha$  a  $\beta$  se následně určí při porovnávání frekvenčních funkcí nosníku a jeho matematického modelu.

## 5.7 Simulační model vetknutého nosníku

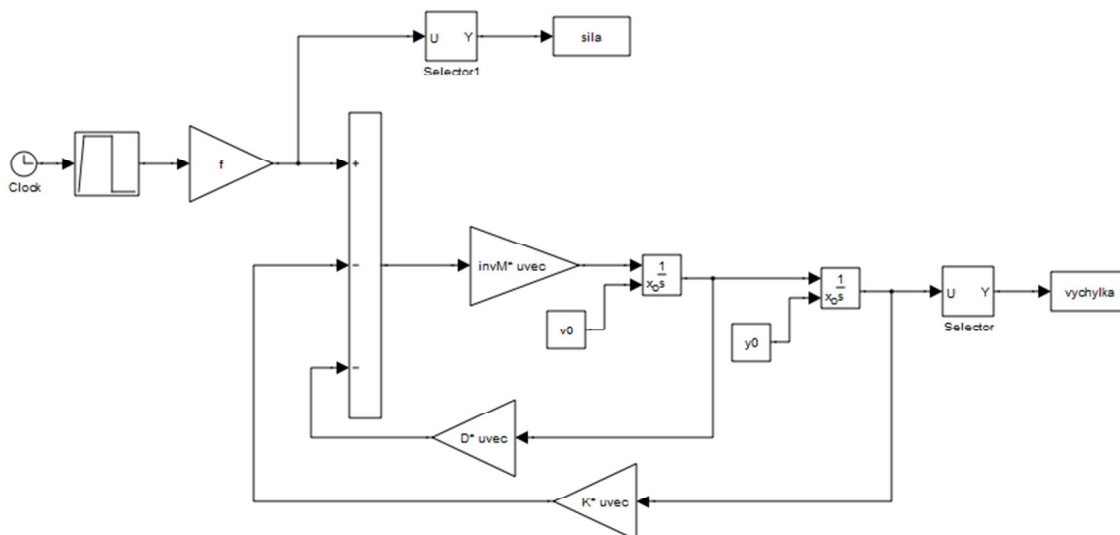
Nyní máme odvozenou soustavu diferenciálních rovnic pro jednostranně vetknutý nosník:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (5.37)$$

Pro vytvoření simulace se vyjádří nejvyšší derivace [Noskiewič, 1999]:

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{f}(t) - \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{y}(t)]. \quad (5.38)$$

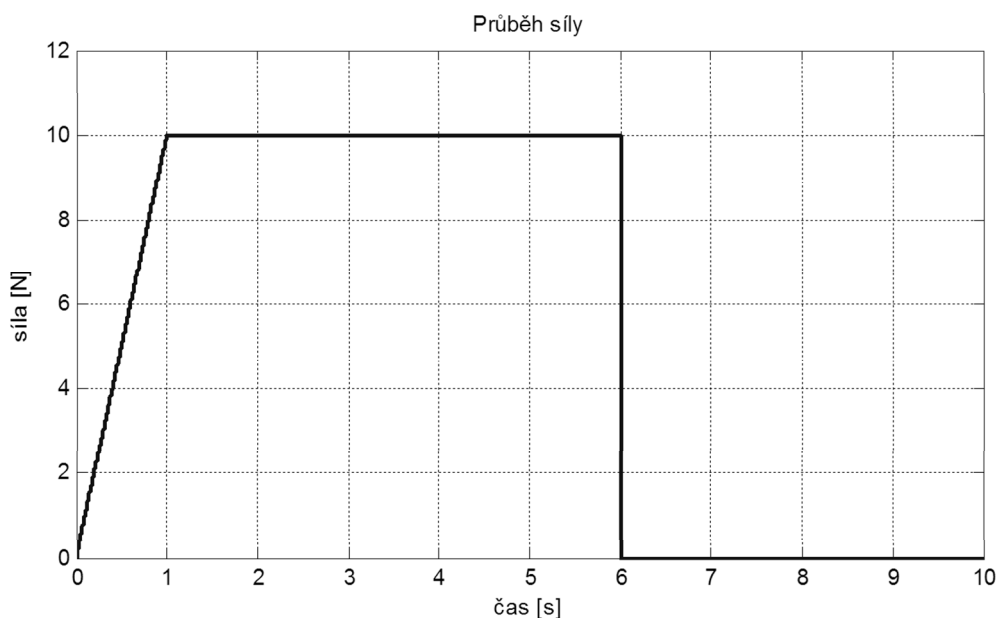
Této rovnici odpovídá následující schéma nastavby MATLABu pro grafické programování diferenciálních rovnic Simulink. Vektor rychlostí se násobí maticí tlumení, vektor výchylek se násobí maticí tuhosti a tyto veličiny vstupují spolu s vektorem vnějších sil do sumačního bloku. Za sumačním blokem se vektor vynásobí inverzní maticí hmotnosti a získá se vektor zrychlení. Průchodem zrychlení přes jeden integrační blok se obdrží rychlost a dalším průchodem zrychlení. Vstupy do systému jsou vektor síly  $\mathbf{F}(t)$  a počáteční podmínky ve formě vektoru počátečních výchylek a vektoru počátečních rychlostí. Tyto podmínky se zadávají do integračních bloků. Výstupy z modelu jsou časové průběhy výchylek, rychlostí a zrychlení.



Obr. 5.13 Simulační schéma vetknutého nosníku

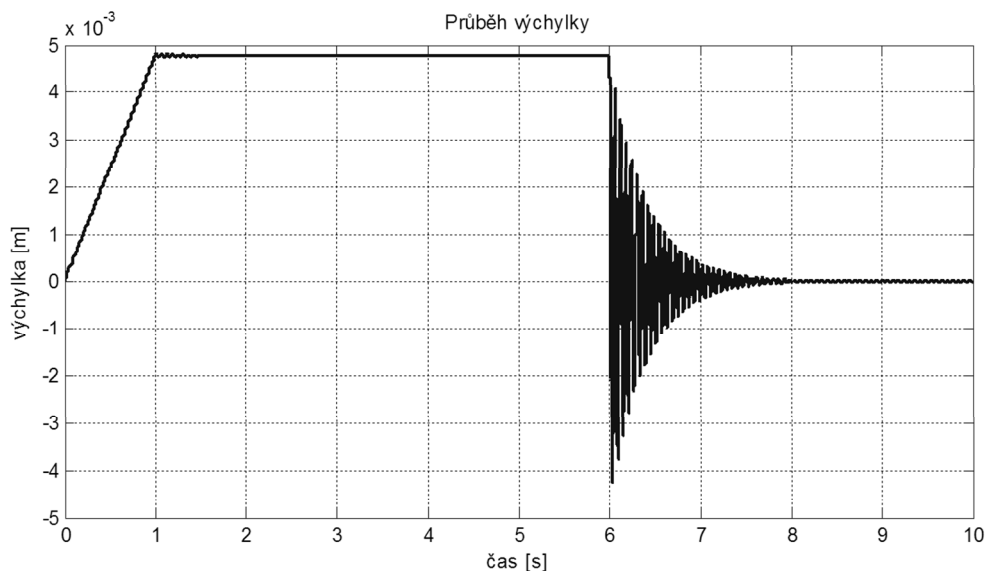
Použití modelu lze demonstrovat na příkladu. Je třeba sledovat dokmitání soustavy po natažení a náhlém uvolnění nosníku, protože cvrnknutí prstem do konce nosníku je v laboratoři velmi dostupný budicí signál. Vektor síly  $\mathbf{f}$  se nastaví tak, že  $N$ -tý prvek bude jednička, ostatní prvky vektoru budou nulové. Tím je simulováno, že vnější síla působí

pouze na konec nosníku. Počáteční podmínky zůstanou nulové. Průběh síly se bude skládat z rampy z nuly na 10 N během jedné sekundy, což simuluje natažení nosníku, dále následuje úsek konstantní funkce a skoková změna na nulu, což napodobuje náhlé uvolnění nosníku. Parametry Rayleighova tlumení byly v této simulaci nastaveny  $\alpha = 5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ . V této fázi to však jsou jen odhady, které budou přesněji vyčísleny později.



Obr. 5.14 Časový průběh síly působící na koncový bod při simulaci dokmitu

Výstupem simulace je časový průběh výchylky.



Obr. 5.15 Časový průběh výchylky koncového bodu při simulaci dokmitu

## 5.8 Modelování působení piezoaktuátoru

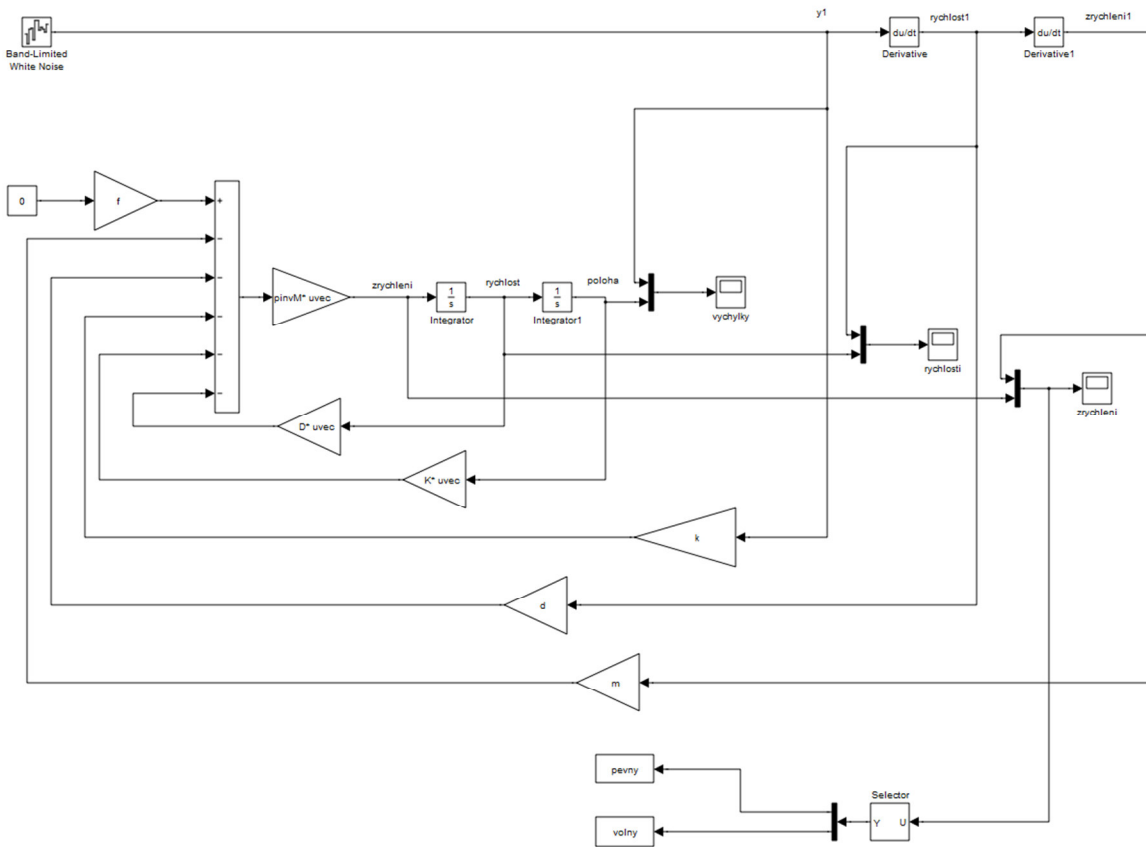
Přípevněním piezoaktuátoru poblíž místa vetknutí dojde k ovlivnění laboratorního modelu. Výchylka bodu nosníku v místě přišroubování (v matematickém modelu se jedná o výchylku  $y_1$ ) bude závislá na protažení piezoaktuátoru. Výchylka  $y_1$  tedy bude vstupem do systému a bude se nazývat „řídící výchylka“. Vektor řízených výchylek  $y_2$  až  $y_N$  bude značen  $\tilde{y}$ .



abychom následně vyjádřili nejvyšší derivaci za účelem tvorby simulačního schématu, kde  $\tilde{\mathbf{M}}^+$  bude značit pseudoinverzní matici hmotnosti:

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{M}}^+ [\mathbf{f}(t) - \mathbf{m}_1 \ddot{y}_1(t) - \tilde{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{d}_1 \dot{y}_1(t) - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{y}(t) - \mathbf{k}_1 y_1(t)]. \quad (5.48)$$

Základ schématu pro výpočet (5.48) zůstává stejný, pouze matice hmotnosti, tlumení a tuhosti přijdou o svůj první sloupcový vektor. Za sumačním blokem bude následovat násobení pseudoinverzní maticí hmotnosti. Výchylka  $y_1$  se stává dalším vstupem do systému a reprezentuje výchylku piezoaktuátoru. Derivací výchylky získáváme rychlost a další derivací zrychlení. Do sumačního bloku navíc vstupuje zrychlení prvního bodu násobeno prvním sloupcovým vektorem matice hmotnosti, rychlost prvního bodu násobena prvním sloupcovým vektorem matice tlumení a výchylka prvního bodu násobena prvním sloupcovým vektorem matice tlumení. Všechny tři se záporným znaménkem.



Obr. 5.16 Simulační schéma vetknutého nosníku s připevněným piezoaktuátorem

## 5.9 Porovnání matematického modelu s experimentem a úprava parametrů modelu

Matematický model je nutné upravit do finální podoby, aby se jeho chování blížilo vlastnostem laboratorního modelu. V laboratoři bylo provedeno několik identifikačních experimentů.

Při prvním experimentu byl piezoaktuátor výjimečně použit jako budič soustavy. Soustava byla buzena bílým šumem a následně bylo měřeno zrychlení na matici, kterou je

piezoaktuátor připevněn k nosníku, a na volném konci nosníku. Pomocí signálového analyzátoru PULSE byla vypočtena magnitudová frekvenční funkce.

Obdobně se postupovalo při simulaci. Na obr. 5.14 je patrný blok bílého šumu připojený na výchylku  $y_1$ , ostatní vstupy do systému jsou nulové. Záznamy zrychlení prvního a posledního prvku modelu byly uloženy do proměnné „pevny“ a „volny“ a exportovány do pracovního prostředí. Nastavení vlastností simulace a zpracování dat, je patrné z následující části kódu. V první části se nastaví krok a délka simulace, následuje spuštění simulace diferenciálních rovnic. Záznamy dat z pevného a volného konce nosníku jsou váženy Hannovým časovým oknem, následně je provedena Fourierova transformace a magnitudová funkce se získá jako podíl obrazu volného a pevného konce. Dále je načtena magnitudová funkce zjištěná při experimentu. Protože je uložena ve formě komplexních čísel, je nutné magnitudu dopočítat jako modul komplexního čísla.

```
%VLASTNOSTI SIMULACE
krok=0.00002; %délka kroku [s]
vzorky=2^18; %počet vzorků
delka_sim=(vzorky-1)*krok; %délka simulace
sim ('B_S_V'); %simulace diferenciální rovnice

%ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ
vaha=hann(vzorky); %váhová funkce
FFTy=fft(volny.*vaha); %Fourierova transformace výstupu
FFTx=fft(pevny.*vaha); %Fourierova transformace vstupu
H=FFTy./FFTx; %výpočet frekvenční
charakteristiky
H=H(1:vzorky/2); %odříznutí zbytečné poloviny
vektoru
freq=(0:(1/vzorky/krok):((vzorky-1)/2/vzorky/krok));%vektor frekvence

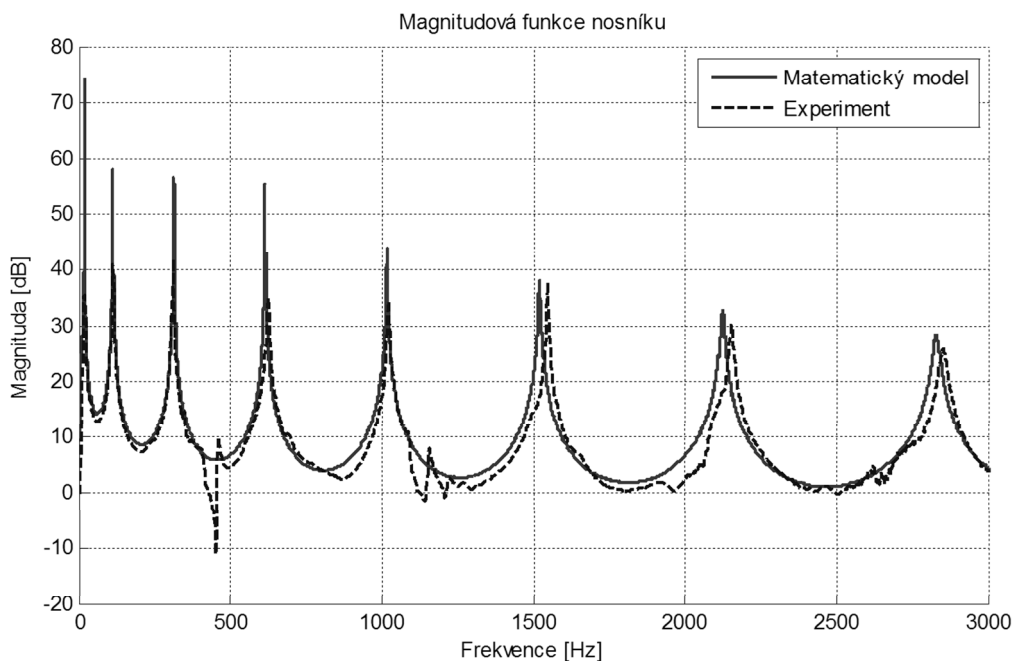
%NAČTENÍ ZMĚŘENÉ CHARAKTERISTIKY Z TEXTOVÉHO SOUBORU
X=nactipulse('prenos_nosnik.txt');
freqmeas=X.data(:,2);
FRFmeas=sqrt((X.data(:,3)).^2+(X.data(:,4)).^2);

%VYKRESLENÍ
figure(1);
hold on;
plot(freq,20*log10(abs(H)), 'r', 'LineWidth',2)
plot(freqmeas,20*log10(abs(FRFmeas)), '--b', 'Linewidth',2)
hold off;
axis([0 3000 -20 80])
title('Magnitudová funkce nosníku')
xlabel('Frekvence [Hz]')
ylabel('Magnituda [dB]')
legend('Matematický model','Experiment')
grid on

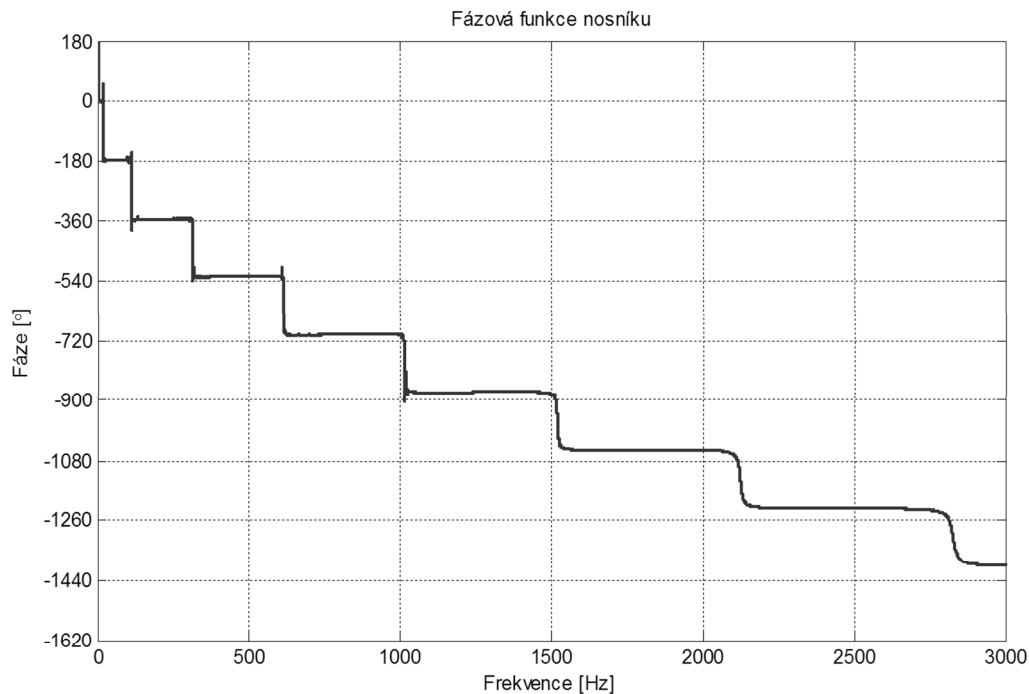
figure(2);
plot(freq,180/pi*phase(H), 'r', 'LineWidth',2)
title('Fázová funkce nosníku')
xlabel('Frekvence [Hz]')
ylabel('Fáze [\circ]')
axis([0 3000 -1620 180])
set(gca,'YTick',-1620:180:180)
grid on
```

Obr. 5.17 Část kódu k výpočtu magnitudové frekvenční funkce

Na následujících grafech je porovnání funkcí matematického modelu a experimentu na zařízení. Fázová funkce byla vykreslena pouze z matematického modelu, protože je problematické správně ji zobrazit při skutečném měření z důvodu velmi rychlého otáčení fáze.



Obr. 5.18 Porovnání magnitudových frekvenčních funkcí skutečného nosníku a jeho matematického modelu

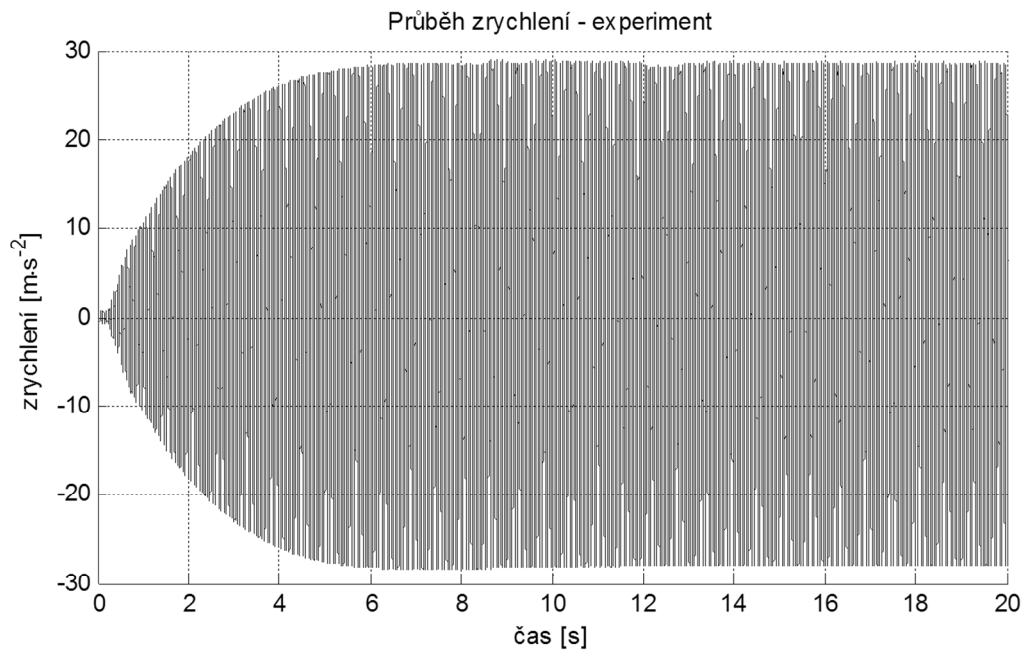


Obr. 5.19 Fázová frekvenční funkce nosníku

Dalším identifikačním experimentem bylo rozkmitání nosníku na jeho rezonanční frekvenci. Do elektrodynamického budiče, připevněného na hliníkovou konstrukci, byl

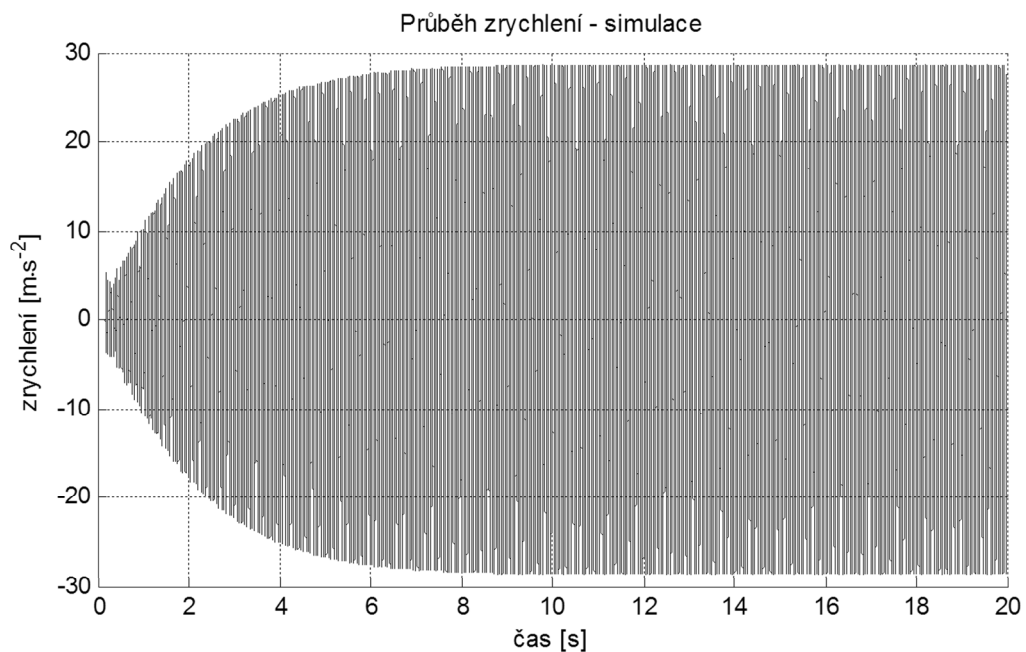


poslán sinusový signál o frekvenci 16,7 Hz. Na volném konci byl zaznamenán následující průběh zrychlení:

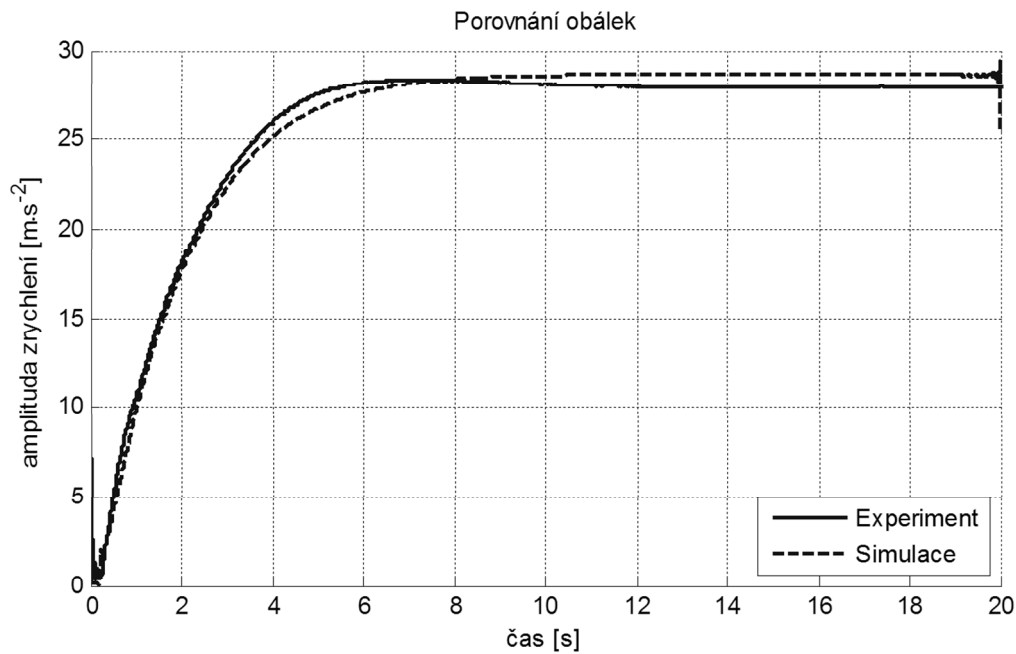


Obr. 5.20 Průběh zrychlení při rozkmitání nosníku

Při simulaci působila síla se sinusovým průběhem na první bod nosníku. Protože má matematický model první rezonanční frekvenci mírně odlišnou, měl budící signál frekvenci 17,8 Hz.

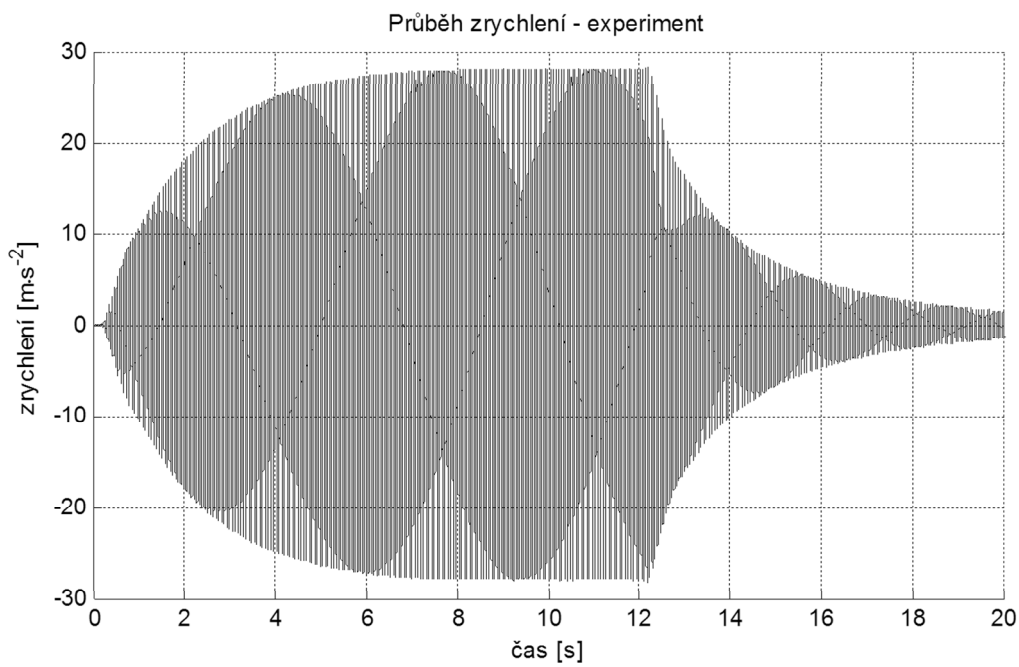


Obr. 5.21 Průběh zrychlení při rozkmitání matematického modelu

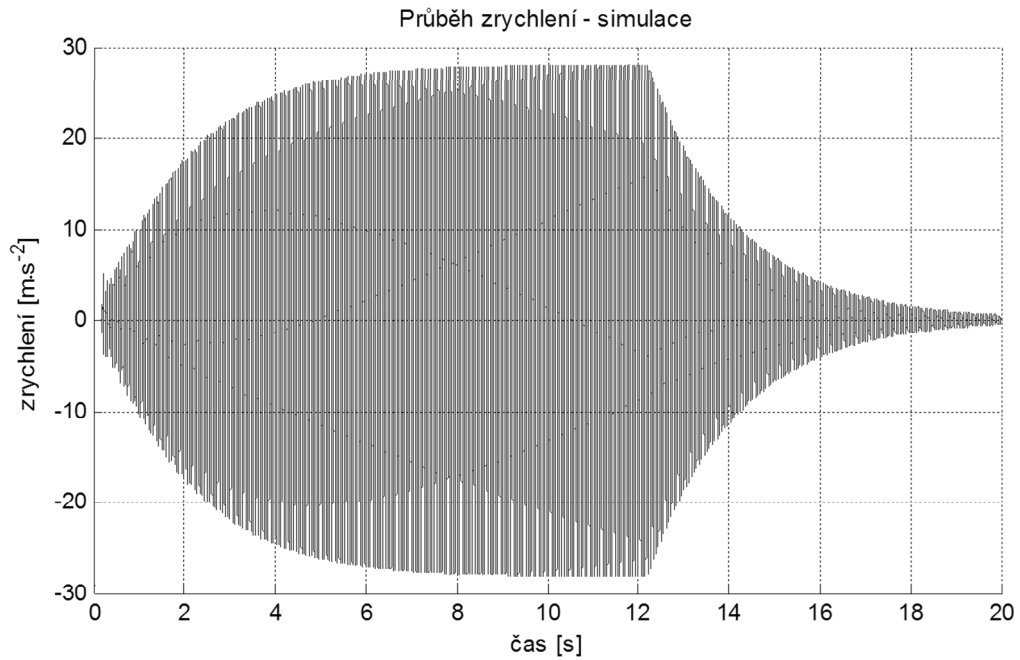


Obr. 5.22 Porovnání obálek dvou předchozích průběhů

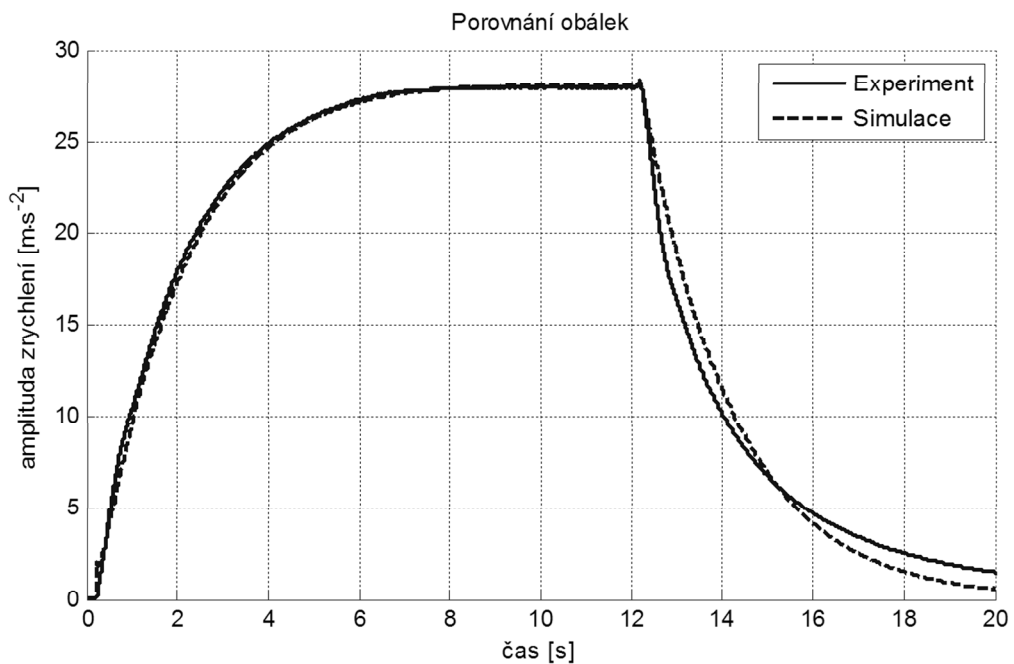
Poslední experiment slouží k porovnání obálky dokmitu. Působení síly bylo vypnuto v čase 12,2 s.



Obr. 5.23 Průběh zrychlení při rozkmitání a dokmitu laboratorního nosníku



Obr. 5.24 Průběh zrychlení při rozkmitání matematického modelu



Obr. 5.25 Porovnání obálek dvou předchozích průběhů

Při zkoumání těchto průběhů simulací bylo zjištěno, že se nosník bude diskretizovat na  $N = 25$  prvků, tloušťka nosníku byla upravena na  $h = 5,3$  mm, aby chování matematického modelu nejlépe odpovídalo předloze. Rayleighovy konstanty jsou  $\alpha = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

Tímto je tedy ukončena procedura tvorby matematického modelu řízeného systému. Vstupem je výchylka  $y_1$  a vektor vnějších sil. Výstupem jsou výchylky  $y_2$  až  $y_N$  a jejich první a druhé derivace. Později, až se do simulace bude přidávat regulační smyčka a schéma již bude dosti obsáhlé, vytvoří se v Simulinku subsystém:



**Obr. 5.26** Subsystem nosníku

## 6 Řídicí algoritmus

Tato kapitola popisuje celý proces návrhu řídicího algoritmu. Nejdříve je proveden modální rozklad, který přetransformuje matice hmotnosti, tuhosti a tlumení do diagonálního tvaru a následně bude možné vyjádřit hmotnost, tlumení a tuhost jednotlivých módů. To umožní získat přenos každého módu zvlášť a následně navrhnout řídicí algoritmus.

### 6.1 Modální rozklad

Pomocí matice vlastních tvarů  $\Psi$  diagonalizujeme matici hmotnosti  $M$  na modální matici hmotnosti  $M_m$ . Výsledná matice na diagonále obsahuje modální hmotnosti  $\mu$  příslušné jednotlivým módům [PREUMONT, SETO, 2008; GAWRONSKI, 2004].

$$M_m = \Psi^T M \Psi = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_N \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Podobně se postupuje při zjišťování modálních tuhostí:

$$K_m = \Psi^T K \Psi = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_N \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

A také při určení modálních tlumení:

$$D_m = \Psi^T D \Psi = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \mu_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\xi_1 \mu_N \omega_N \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Následující tabulka shrnuje vypočtené hodnoty modálních hmotností  $\mu_i$ , modálních tuhostí  $k_i$ , modálních tlumení  $d_i$ , koeficienty poměrného tlumení  $\xi_i$  a vlastní frekvence  $\omega_i$  pro prvních 10 módů kmitání:

Tab. 6.1 Modální vlastnosti

| $i$ | $\mu_i$ [kg] | $k_i$ [N·m <sup>-1</sup> ] | $d_i$ [kg·s <sup>-1</sup> ] | $\xi_i$ [-] | $\omega_i$ [rad·s <sup>-1</sup> ] | $f_i$ [Hz] |
|-----|--------------|----------------------------|-----------------------------|-------------|-----------------------------------|------------|
| 1   | 0,030786     | 380,75                     | 0,030938                    | 0,0045      | 111,20                            | 17,699     |
| 2   | 0,030589     | 14800                      | 0,036509                    | 0,0008      | 695,58                            | 110,70     |
| 3   | 0,030273     | 114416                     | 0,076039                    | 0,0006      | 1944,1                            | 309,40     |
| 4   | 0,029818     | 431035                     | 0,202232                    | 0,0008      | 3802,0                            | 605,11     |
| 5   | 0,029238     | 1150122                    | 0,489287                    | 0,0013      | 6271,8                            | 998,18     |
| 6   | 0,028542     | 2494180                    | 1,026214                    | 0,0019      | 9347,9                            | 1487,7     |
| 7   | 0,027739     | 4705801                    | 1,910059                    | 0,0026      | 13024                             | 2072,9     |
| 8   | 0,026839     | 8028264                    | 3,238144                    | 0,0034      | 17295                             | 2752,6     |
| 9   | 0,025854     | 12685498                   | 5,100053                    | 0,0044      | 22150                             | 3525,3     |
| 10  | 0,024797     | 18862488                   | 7,569793                    | 0,0055      | 27579                             | 4389,4     |

Systém lze nyní popsat pomocí přenosu, který se skládá ze součtu všech jednotlivých módů kmitání.

$$G_S(s) = \sum_{i=1}^N \frac{\psi_{1,i}\psi_{N,i}}{\mu_i\omega_i^2} \frac{1}{\omega_i^2 + \frac{2\xi_i}{\omega_i}s + 1} \quad (6.4)$$

První a  $N$ -tý řádek z matice vlastních tvarů je zvolen proto, že v prvním bodu je umístěn akční člen (piezoaktuátor) a v  $N$ -tém bodu je umístěn snímač. V případě jiného uspořádání akčních členů a snímačů je nutné na toto reagovat. Frekvenční funkce poté mají jiné průběhy.

Obvykle se nemodelují všechny módy, ale jen ty, které jsou zkoumány. Často se do modelu nezahrnují vysokofrekvenční módy, což přináší menší nároky například na krok simulace. Nicméně nevyjádřené prvky se do modelu zakomponují alespoň pomocí takzvaného „rezidua“. Reziduální mód zahrnuje pouze statické vlastnosti potlačených módů. Předchozí rovnici lze tedy v tomto ohledu upravit, reziduální mód je obsažen v druhém sumačním výrazu:

$$G_S(s) = \sum_{i=1}^k \frac{\psi_{1,i}\psi_{N,i}}{\mu_i\omega_i^2} \frac{1}{\omega_i^2 s^2 + \frac{2\xi_i}{\omega_i}s + 1} + \sum_{i=k+1}^N \frac{\psi_{1,i}\psi_{N,i}}{\mu_i\omega_i^2} \quad (6.5)$$

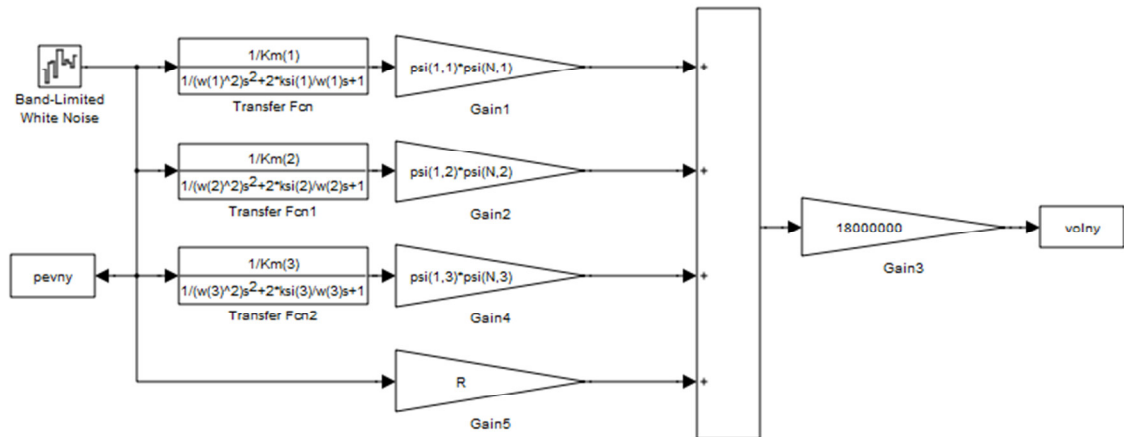
Část kódu v MATLABu, která je zodpovědná za modální rozklad a výpočet rezidua vypadá následovně:

```
[psi,lambda] = eig(inv(M)*K); %rozklad na vlastní čísla a vektory
Mm=flipud(diag(psi'*M*psi)); %modální matice hmotnosti
Km=flipud(diag(psi'*K*psi)); %modální matice tuhosti
Dm=flipud(diag(psi'*D*psi)); %modální matice tlumení
psi=fliplr(psi); %uspořádání matice vlastních tvarů
w=(Km./Mm).^0.5; %vlastní frekvence [rad/s]
f=w/(2*pi); %vlastní frekvence [Hz]
ksi=Dm./(2*Mm.*w); %poměrné tlumení

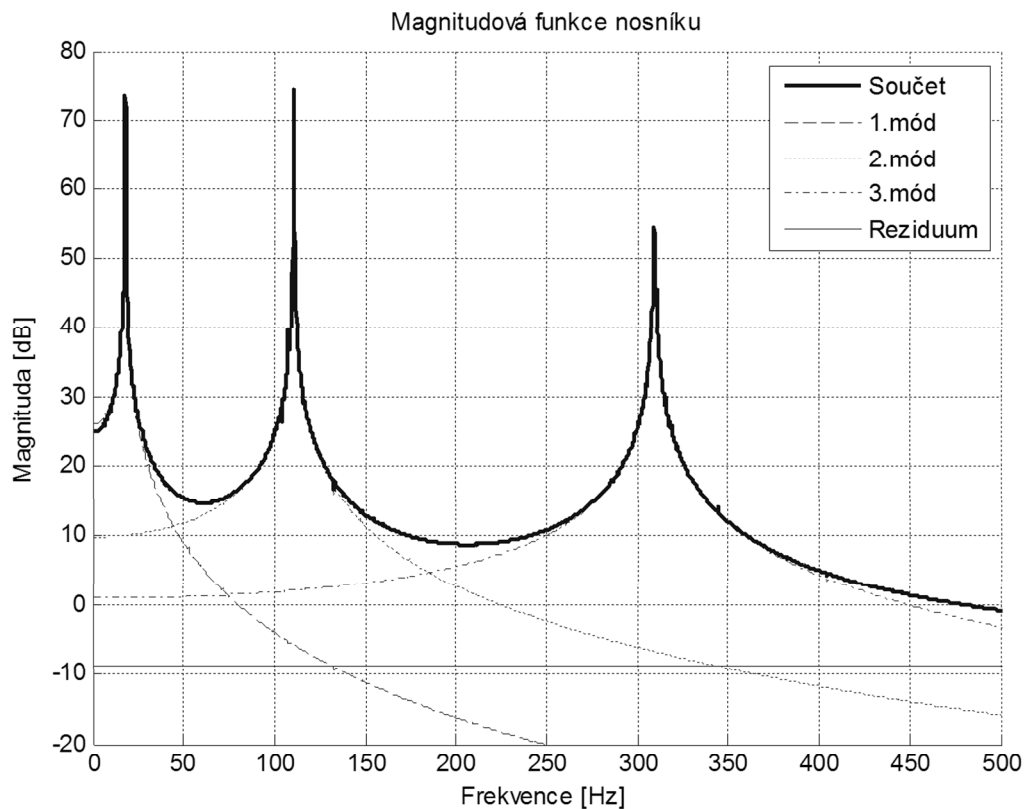
%reziduum
R=0;
for j=4:N,
    R=R+(psi(1,j)*psi(N,j))/Km(j);
end
```

Obr. 6.1 Modální rozklad

Odpovídající schéma v Simulinku obsahuje tři paralelně řazené proporcionální systémy se setrvačností druhého řádu a reziduální mód, které sčítá sumační blok. Celý součet je nutné násobit hodnotou  $1,8 \cdot 10^7$ , aby magnitudová frekvenční funkce začínala ze stejné hodnoty jako na obr. 5.18.



Obr. 6.2 Schéma v Simulinku pro modální rozklad



Obr. 6.3 Magnitudová funkce se znázorněnými příspěvky prvních třech módů

Pro shrnutí: přenos prvního módu kmitání:

$$G_1(s) = \frac{19,64}{8,086 \cdot 10^{-5}s^2 + 8,126 \cdot 10^{-5}s + 1} \quad (6.6)$$

Přenos druhého módu kmitání:

$$G_2(s) = \frac{-3,126}{2,067 \cdot 10^{-6}s^2 + 2,467 \cdot 10^{-6}s + 1} \quad (6.7)$$

Přenos třetího módu kmitání:

$$G_3(s) = \frac{1,110}{2,646 \cdot 10^{-7}s^2 + 6,646 \cdot 10^{-7}s + 1} \quad (6.8)$$

## 6.2 Návrh regulačního obvodu

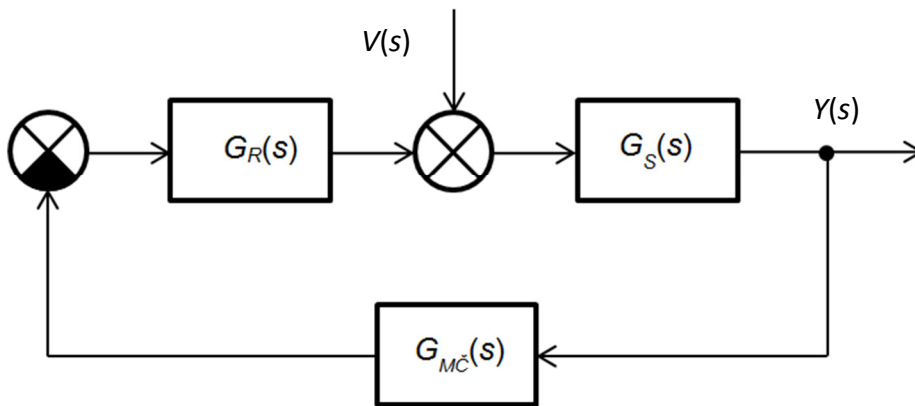
Přenos jednoho módu kmitání je ve tvaru:

$$G_{Si}(s) = \frac{b_i}{a_{2i}s^2 + a_{1i}s + 1} \quad (6.9)$$

Přenos regulátoru bude integrační ve tvaru:

$$G_{Ri}(s) = \frac{k_i}{s} \quad (6.10)$$

Cílem potlačování vibrací je omezit vliv poruchové veličiny  $V(s)$ , která působí na soustavu popsanou přenosem  $G_S(s)$  dle schématu:



Obr. 6.4 Regulační obvod pro tlumení vibrací

Při použití akcelerometru jako měřicího členu se bude měřit druhá derivace výchylky a v Laplaceově obrazu bude mít tento člen přenos:

$$G_{M\check{c}}(s) = s^2 \quad (6.11)$$

Přenos poruchy je [BALÁTĚ, 2003]:

$$G_{vyi}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{Si}(s)}{1 + G_{Ri}(s)G_{Si}(s)G_{M\check{c}}(s)} = \frac{b_i}{a_{2i}s^2 + (a_{1i} + k_i b_i)s + 1} \quad (6.12)$$

Přenos je tedy ve tvaru, který popisuje proporcionalní systém se setrvačností druhého řádu, přičemž člen  $a_1 + kb$  představuje tlumení systému.

Stanovme cíl zvýšit tlumení šestinásobně:

$$a_{1i} + k_i b_i = 6a_{1i} \quad (6.13)$$



Pro zesílení regulátoru pak obdržíme vztah:

$$k_i = \frac{5a_{1i}}{b_i}, \quad (6.14)$$

a vypočtené hodnoty zesílení jsou:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-2}, \\ k_2 &= -4 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-2}, \\ k_3 &= 3 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-2}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

### 6.3 Návrh pásmových filtrů

Protože nosník může kmitat ve více módech zároveň a zesílení je počítáno pro každý mód zvlášť, je nutné signál z akcelerometru roztrždit a danou frekvenci přivést ke svému regulátoru. K tomu se využije pásmových filtrů, které propustí signál v úzkém pásmu blízském dané rezonanci a ostatní frekvence utlumí.

Pásmový filtr má přenos:

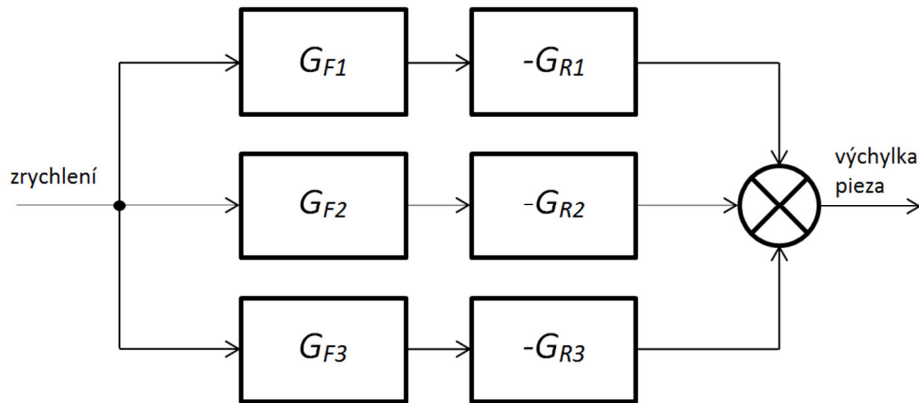
$$G_{Fi}(s) = \frac{2\pi \Delta f_{Bi} s}{s^2 + 2\pi \Delta f_{Bi} s + 4\pi^2 f_i^2}, \quad (6.16)$$

kde  $\Delta f_{Bi}$  je šířka propouštěného pásma a  $f_i$  je střed propouštěného pásma, který bude shodný s rezonanční frekvencí nosníku. Číselné hodnoty jsou zvoleny takto:

Tab. 6.2 Vlastnosti pásmových filtrů

| $i$ | $\Delta f_{Bi}$ [Hz] | $f_i$ [Hz] |
|-----|----------------------|------------|
| 1   | 5                    | 17         |
| 2   | 10                   | 105        |
| 3   | 60                   | 296        |

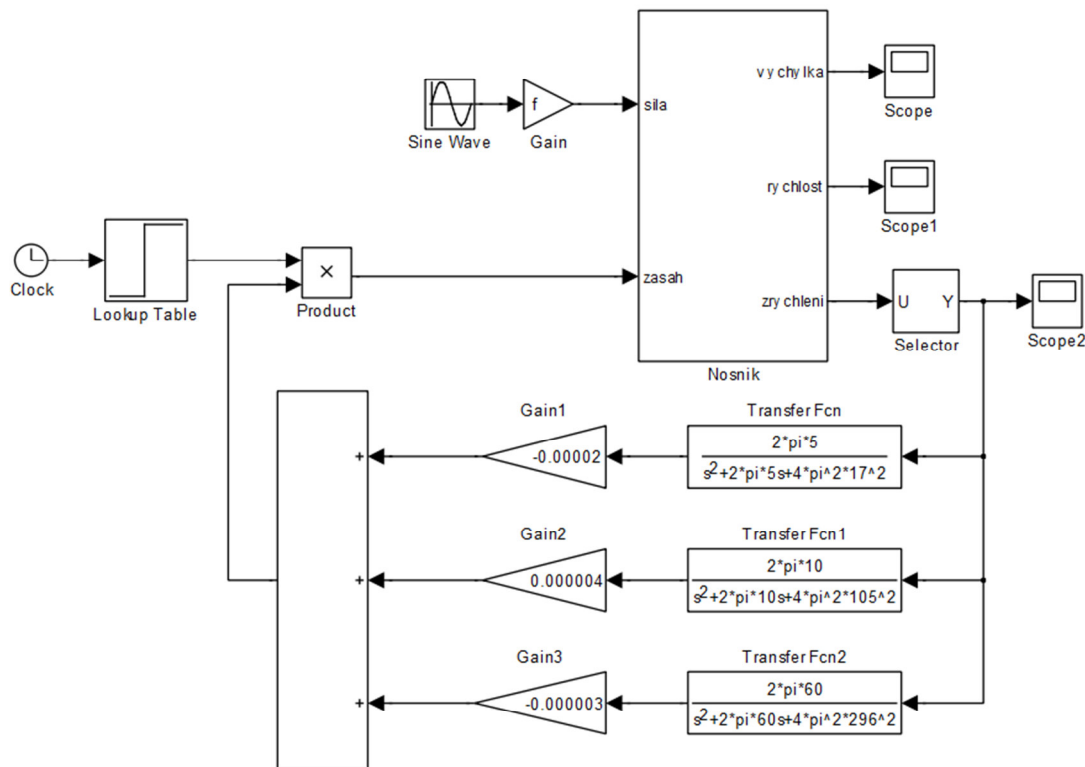
Část regulačního obvodu mezi výstupem z měřicího členu a výstupem z regulátoru tedy lze překreslit pro tlumení tří módů jako paralelní řazení tří větví. V každé větvi je použit pásmový filtr a integrační regulátor. Výsledný akční zásah je součtem příspěvků všech větví. Protože zesílení regulátorů byla vypočtena pro zápornou zpětnou vazbu, je nutné násobit hodnoty zrychlení -1 nebo obrátit polaritu vypočtených zesílení.



Obr. 6.5 Zpětná vazba

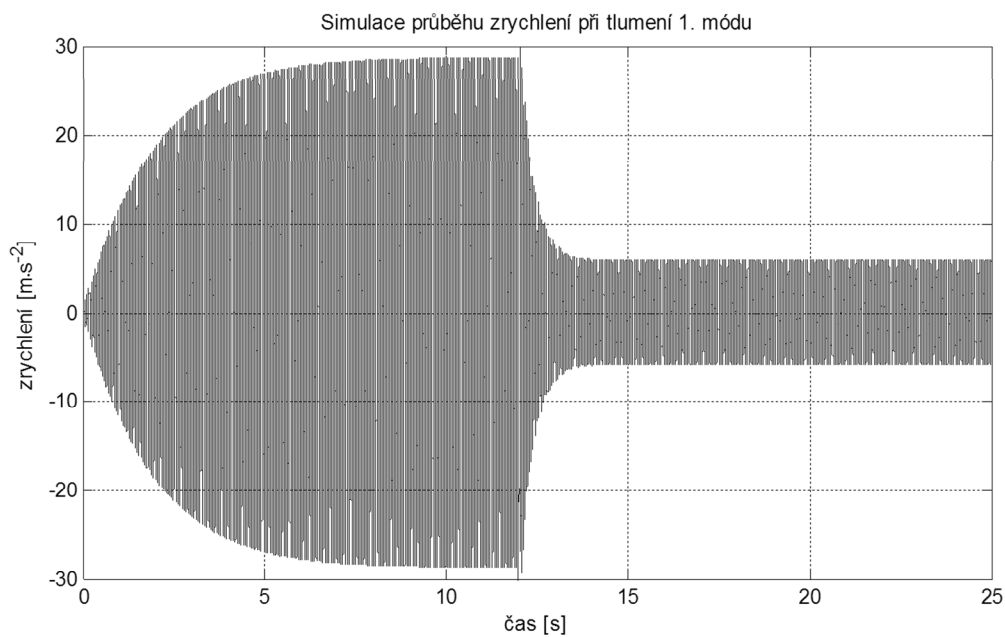
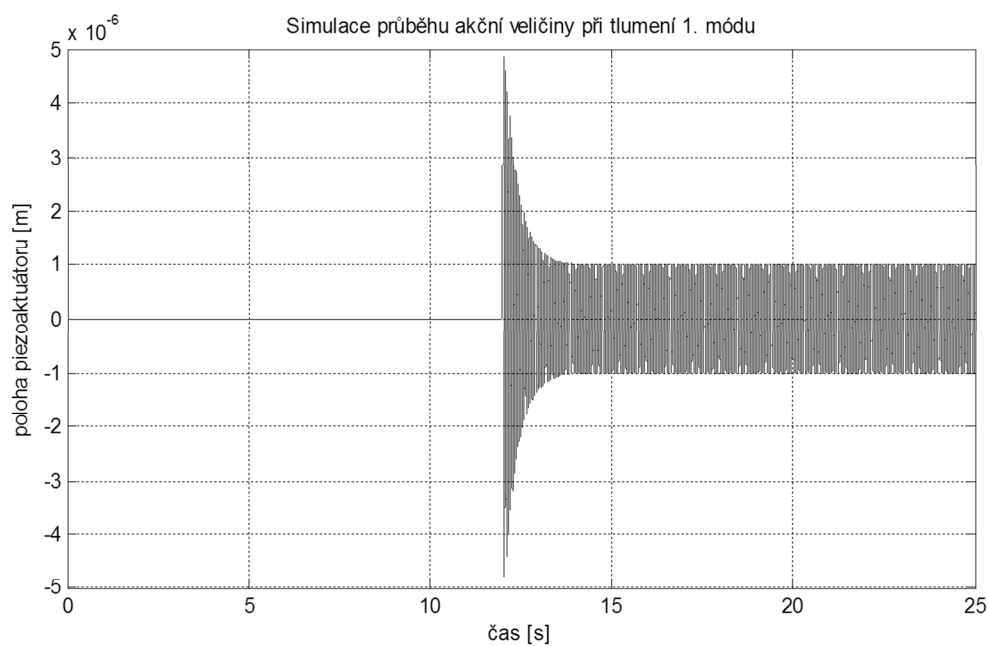
## 6.4 Výsledky softwarových simulací

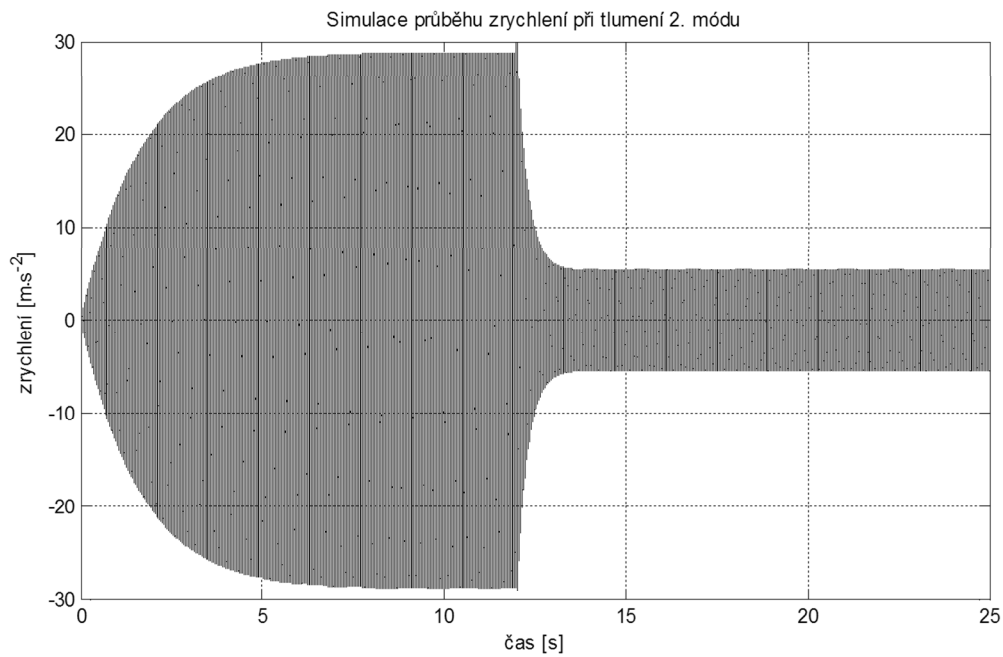
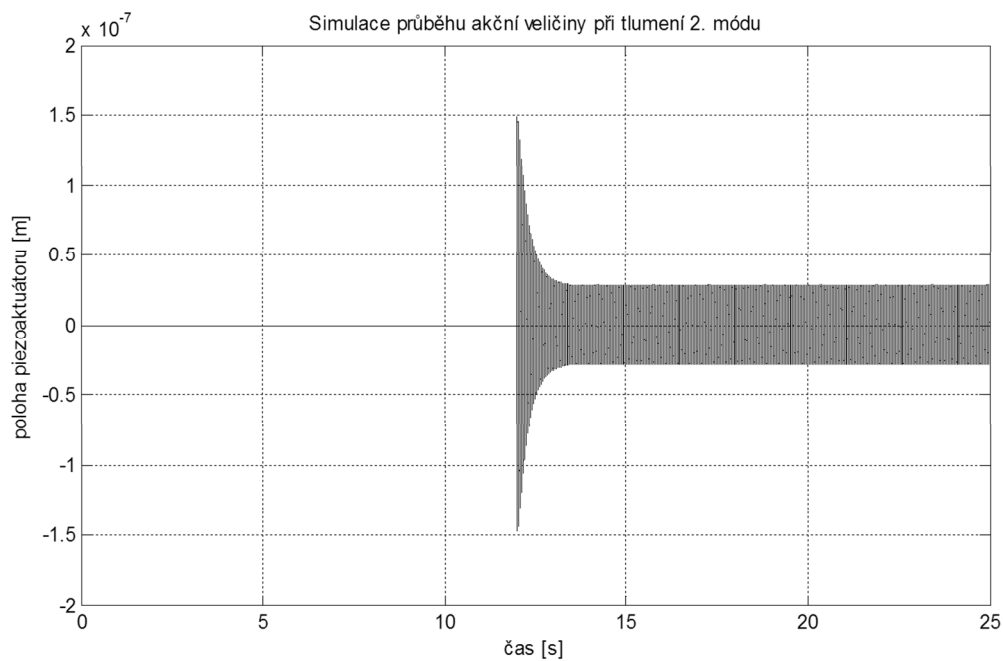
Navržený regulátor byl připojen k modelu nosníku.

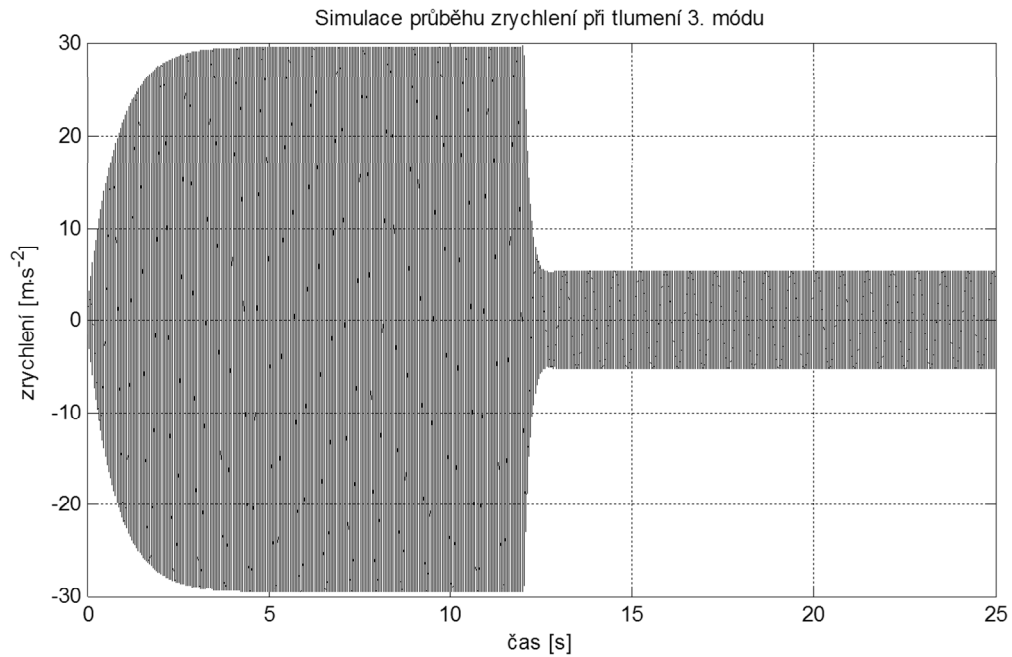


Obr. 6.6 Simulační schéma nosníku s aktivním tlumením

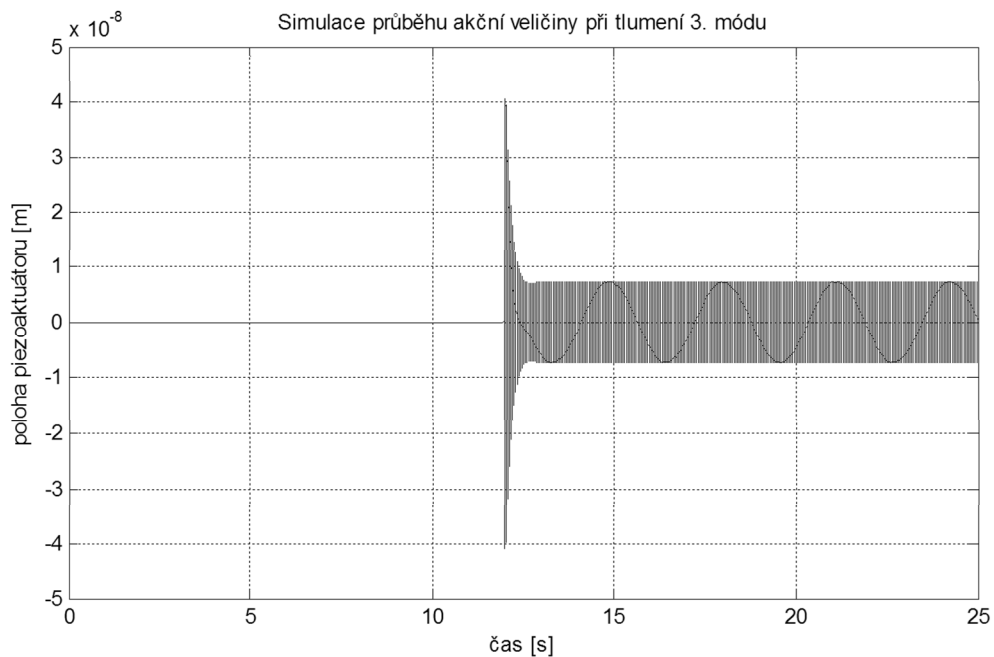
V simulaci byl nosník rozkmitán sinusovým průběhem vnější síly. Po dvanácti sekundách bylo spuštěno působení aktivního tlumení. V následujících grafech jsou záznamy zrychlení koncového bodu nosníku a akčních zásahů v podobě polohy aktuátoru při tlumení prvního, druhého a třetího módu.

**Obr. 6.7 Průběh zrychlení při tlumení 1. módu****Obr. 6.8 Průběh akční veličiny při tlumení 1. módu**

**Obr. 6.9 Průběh zrychlení při tlumení 2. módu****Obr. 6.10 Průběh akční veličiny při tlumení 2. módu**



Obr. 6.11 Průběh zrychlení při tlumení 2. módu

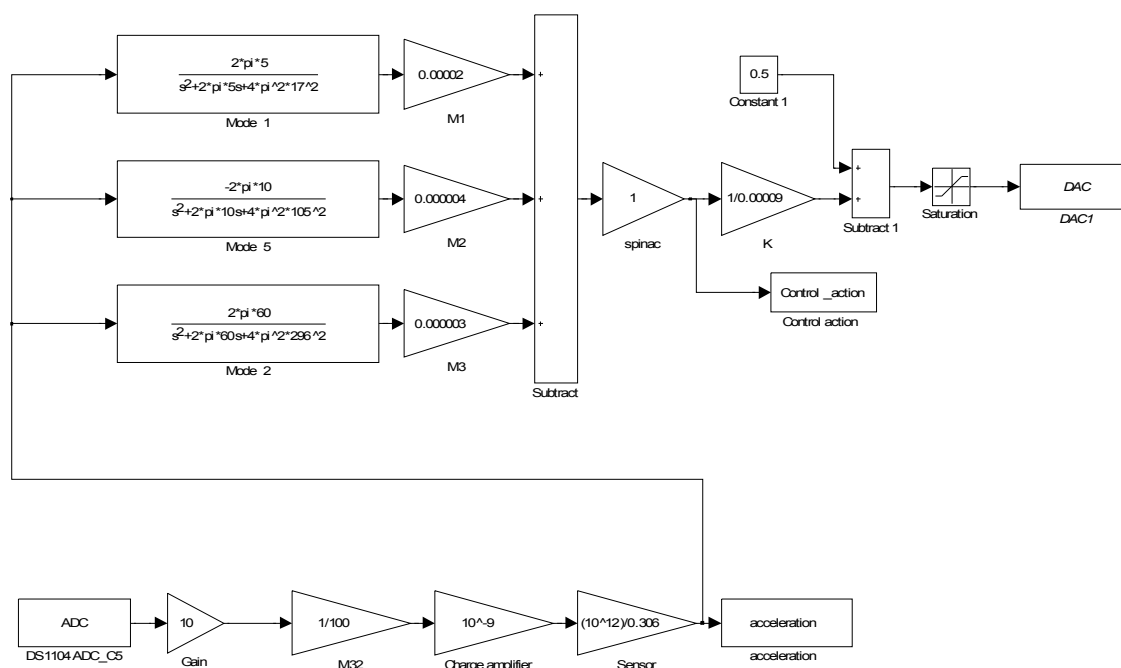


Obr. 6.12 Průběh akční veličiny při tlumení 2. módu

## 6.5 Výsledky měření na laboratorním modelu

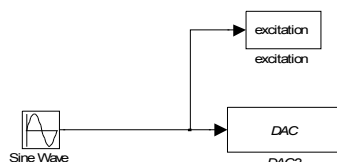
Stejný experiment by proveden na laboratorním modelu. Vstup do Simulinku je normován na hodnotu v rozmezí  $0 \div 1$ , tomu odpovídá  $0 \div 10$  V na vstupu A/D převodníku systému dSPACE. Řetězec ve spodní části schématu zajistí přepočty na zrychlení. Řetězec obsahuje převrácené hodnoty citlivostí A/D převodníku, modulu M32, nábojového zesilovače a vlastního akcelerometru. Regulátor je stejný jako v předchozí simulaci, pouze znaménka jsou opačná, protože akcelerometr je nalepen z opačné strany nosníku. Výstup z tohoto

řetězce musí být upraven tak, aby vysunutí piezoaktuátoru 0,045 mm odpovídalo výstupnímu signálu 1 a záporná výchylka -0,045 mm odpovídala nule.



Obr. 6.13 Schéma aktivního tlumení nosníku v Simulinku následně nahrané do systému dSPACE

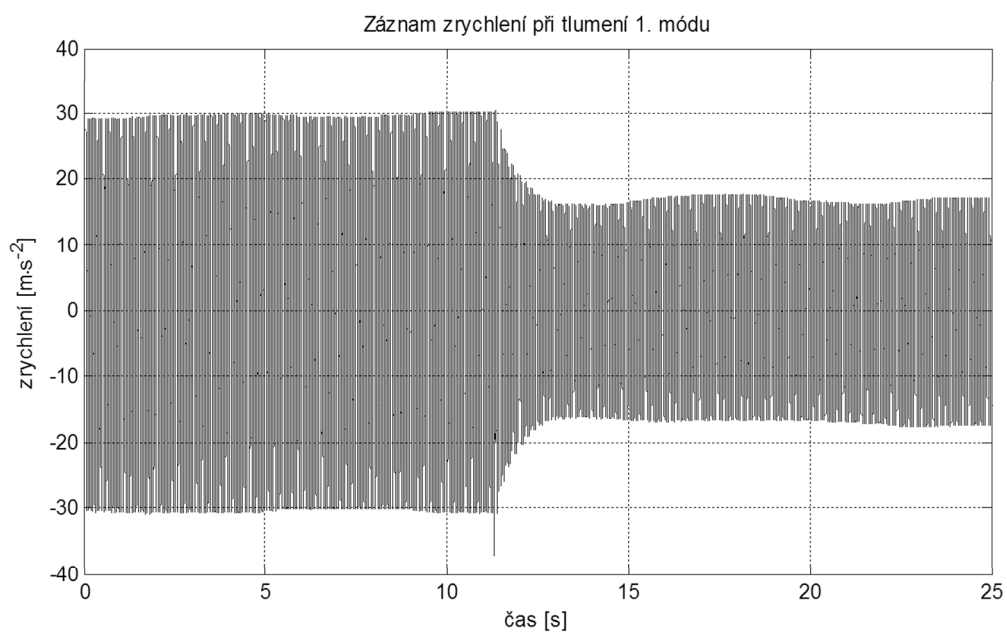
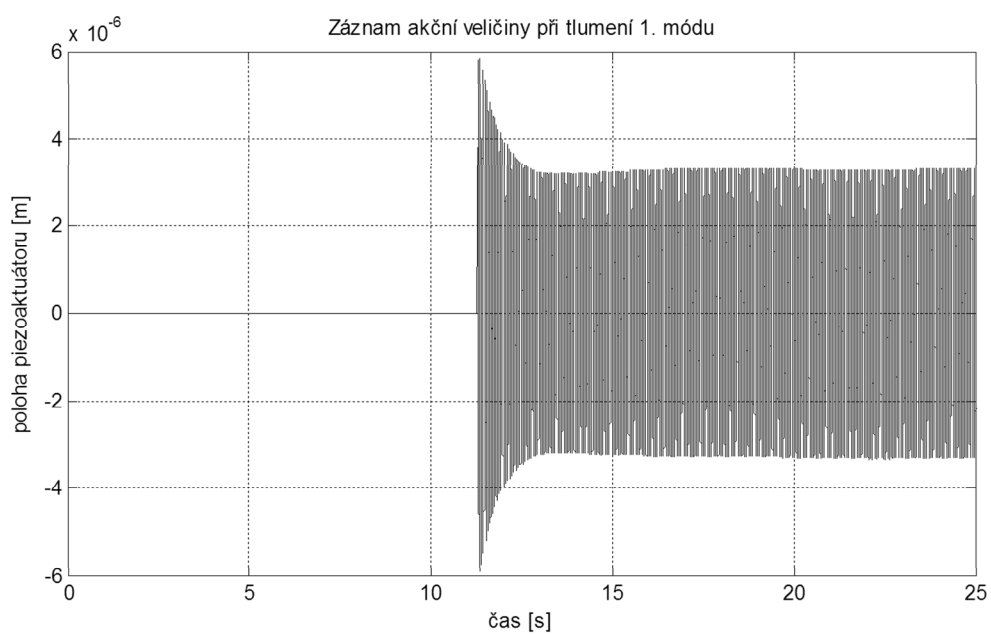
Druhý výstup byl použitý pro rozkmitání budiče:

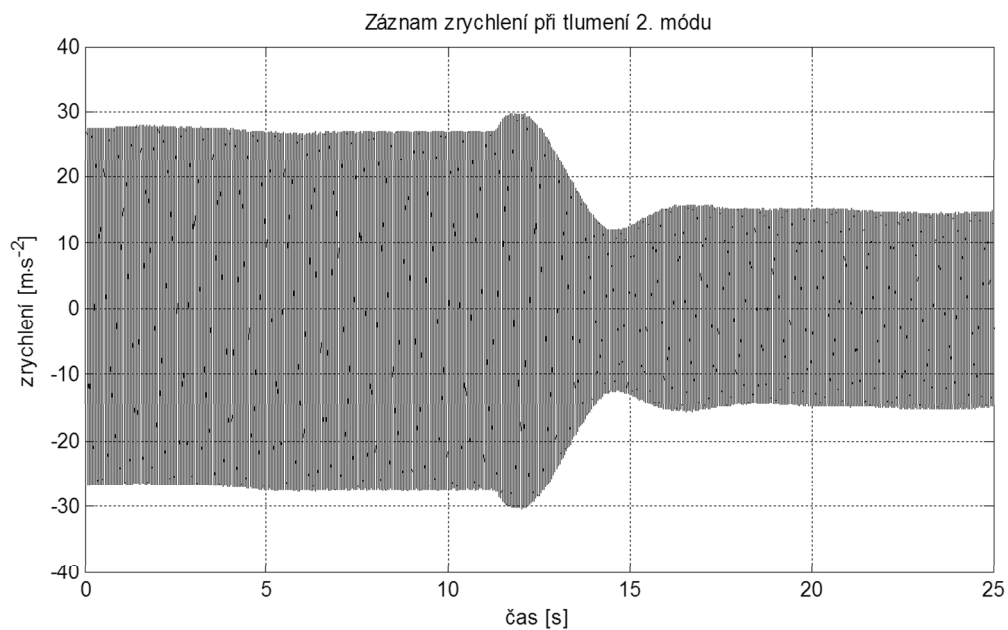
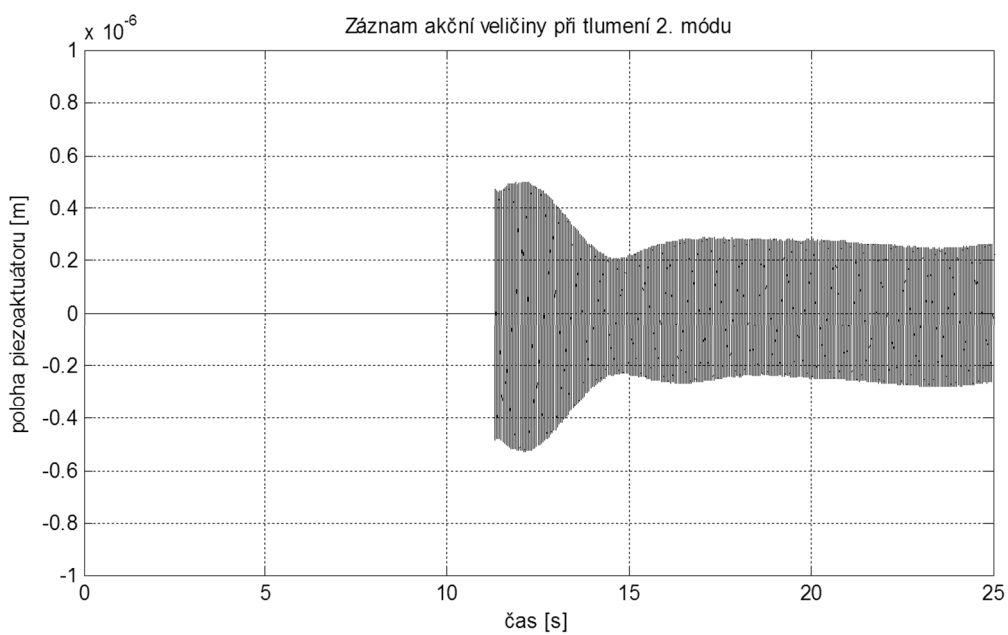


Obr. 6.14 Schéma pro buzení nosníku

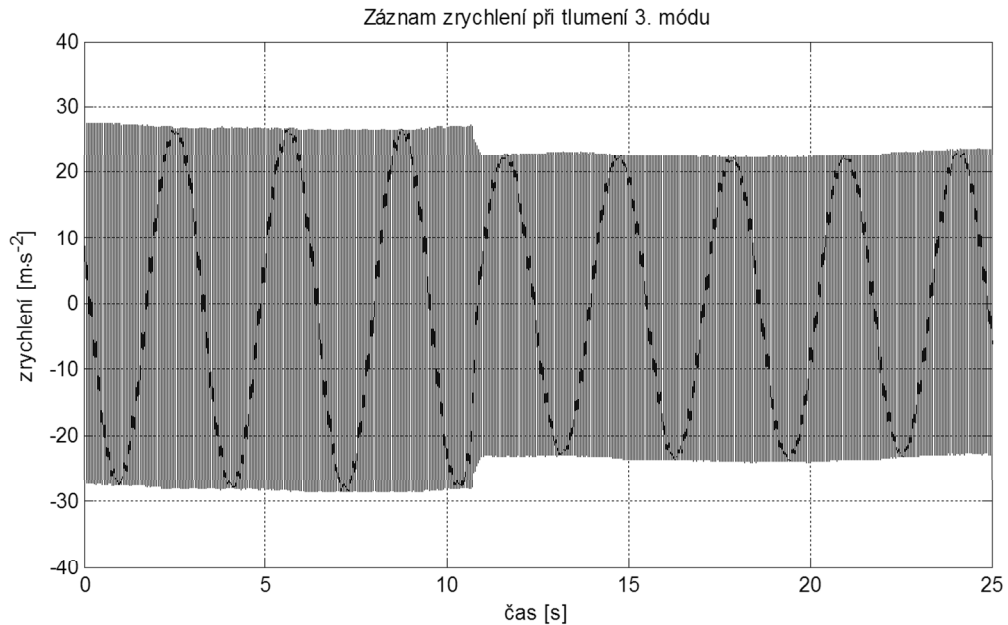
Následují záznamy zrychlení a akčního zásahu piezoaktuátoru. Nosník byl elektrodynamickým budičem, připevněným k rámu laboratorního zařízení, rozkmitán na rezonanční frekvenci. Okolo 12. sekundy bylo zapnuto tlumení.

Fakt, že se průběhy místy výrazně liší od simulací, lze přičíst tomu, že piezoaktuátor byl modelován jako ideální člen bez vlivu síly na zdvih. Rovněž buzení je v simulaci sinusová funkce, skutečný signál z akcelerometru je ovlivněn rušivými vlivy ať už mechanickými či elektrickými. Funkčnost aktivního tlumení na reálném zařízení při tlumení prvních třech módů je však z průběhů patrná.

**Obr. 6.15 Průběh zrychlení při tlumení 1. módu****Obr. 6.16 Průběh akční veličiny při tlumení 1. módu**

**Obr. 6.17 Průběh zrychlení při tlumení 2. módu****Obr. 6.18 Průběh akční veličiny při tlumení 2. módu**





Obr. 6.19 Průběh zrychlení při tlumení 3. módu



Obr. 6.20 Průběh akční veličiny při tlumení 3. módu

## 6.6 Úprava regulace

Při experimentech na laboratorním zařízení bylo zjištěno, že tlumení druhého módu má tendenci rozkmitávat první mód a tlumení třetího módu rozkmitává první i druhý mód kmitání. To se děje při zvyšování zesílení zpětné vazby a mají to na svědomí integrační složky regulátoru. Z tohoto důvodu je algoritmus doplněn o hornopropustné filtry. To následně umožní zvýšit zesílení, což zlepšuje funkci aktivního tlumení.

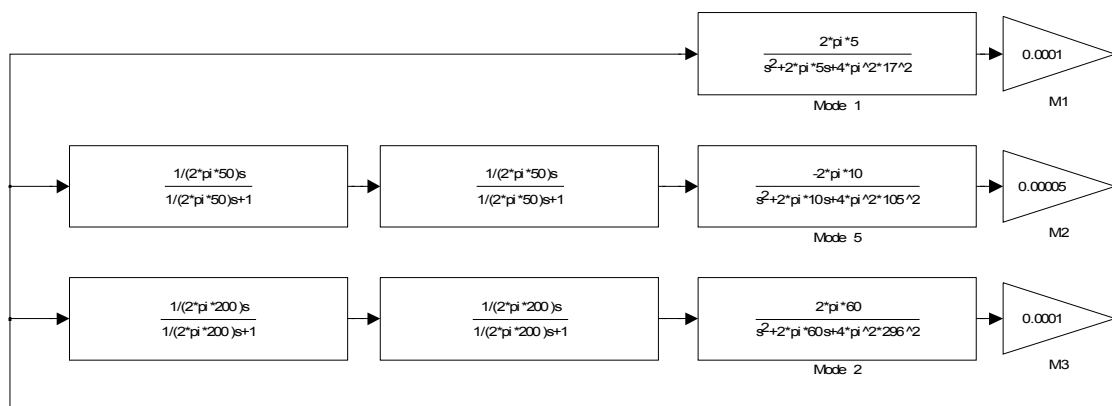
Přenos horní propusti zeslabuje signál s frekvencí nižší než mezní frekvence  $f_H$ :

$$G_{Fi}(s) = \frac{1}{\frac{2\pi f_H}{s} + 1} \quad (6.17)$$

Mezní frekvence byly nastaveny přibližně jako střed rezonančních frekvencí  $f_{H12} = 50$  Hz,  $f_{H23} = 200$  Hz.

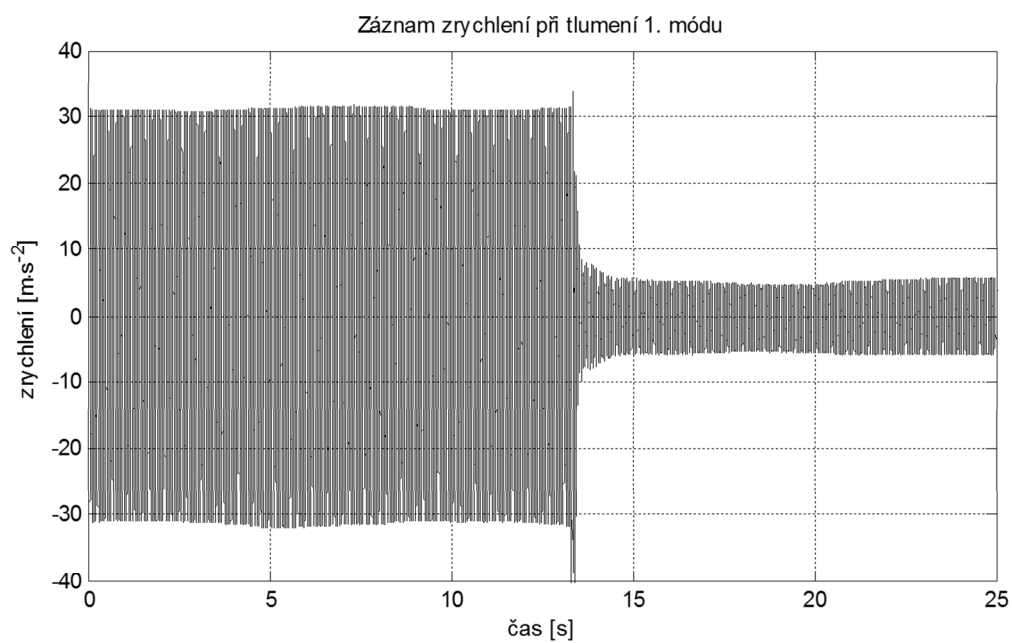
Upravené hodnoty zesílení jsou:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-2}, \\ k_2 &= -5 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-2}, \\ k_3 &= 1 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

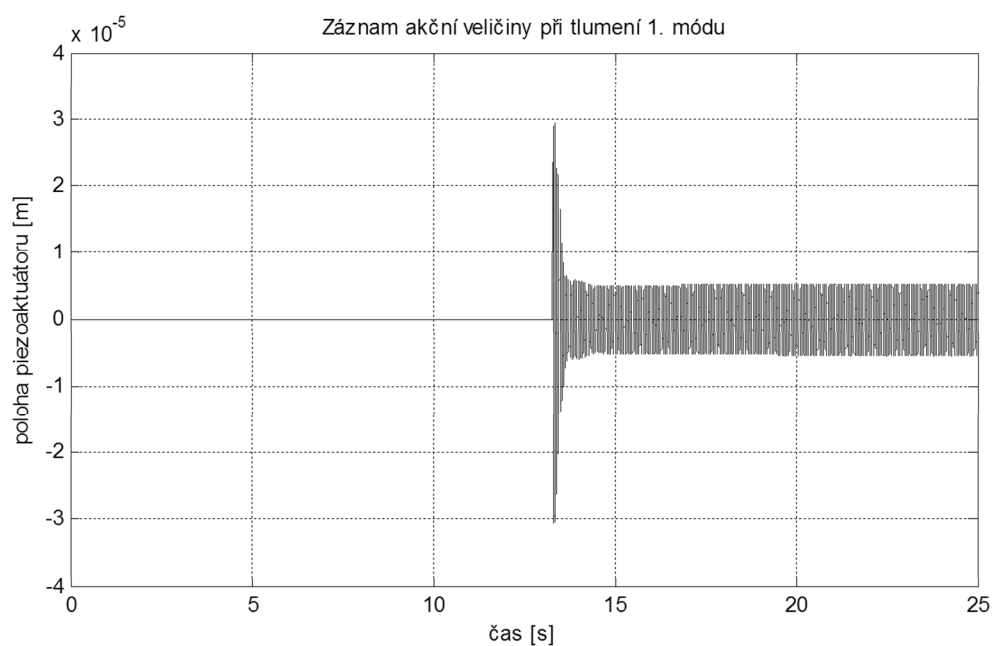


Obr. 6.21 Upravená část schématu pro aktivní tlumení

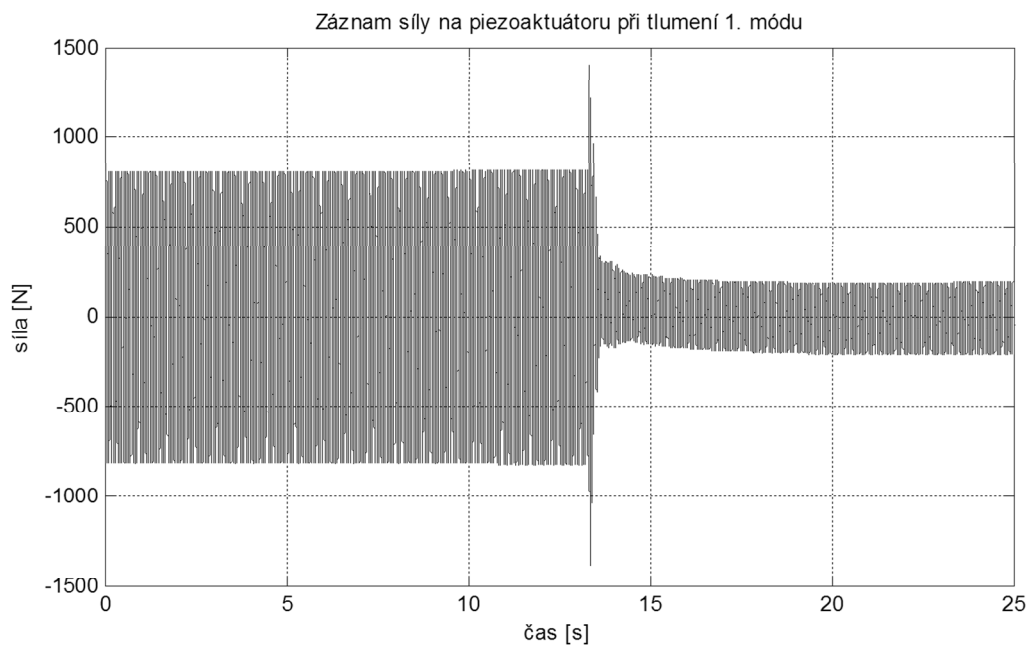
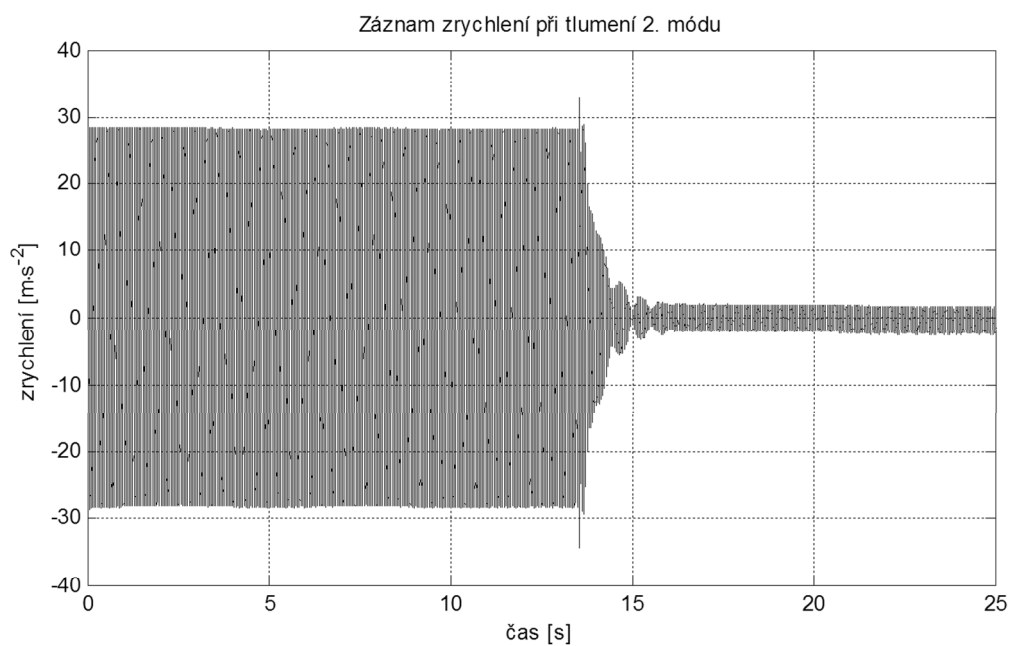
Na následujících průbězích, získaných opakovaným experimentem s upraveným algoritmem, je patrné výrazné zlepšení funkce aktivního tlumení vibrací. Při těchto experimentech byla rovněž měřena síla aktuátoru. Zajímavé je zjištění, že po zapnutí tlumení klesá namáhání akčního členu.

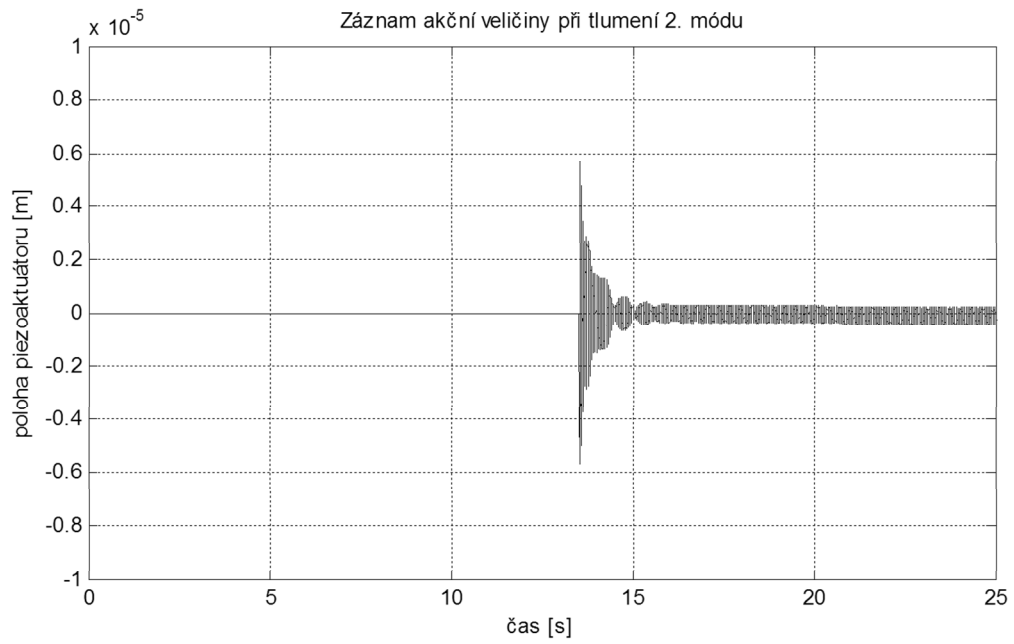
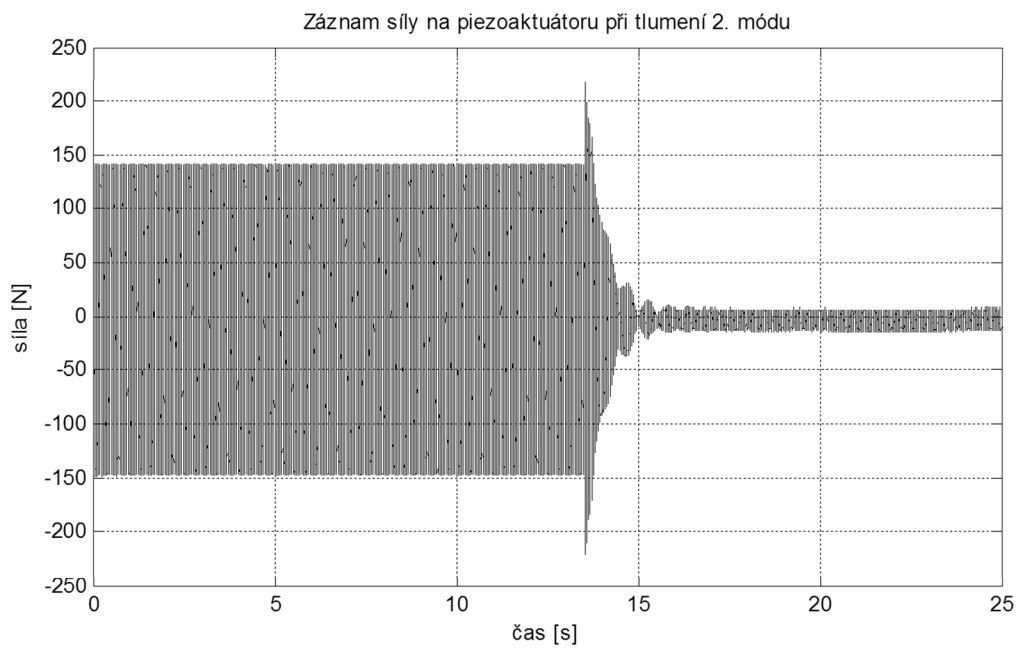


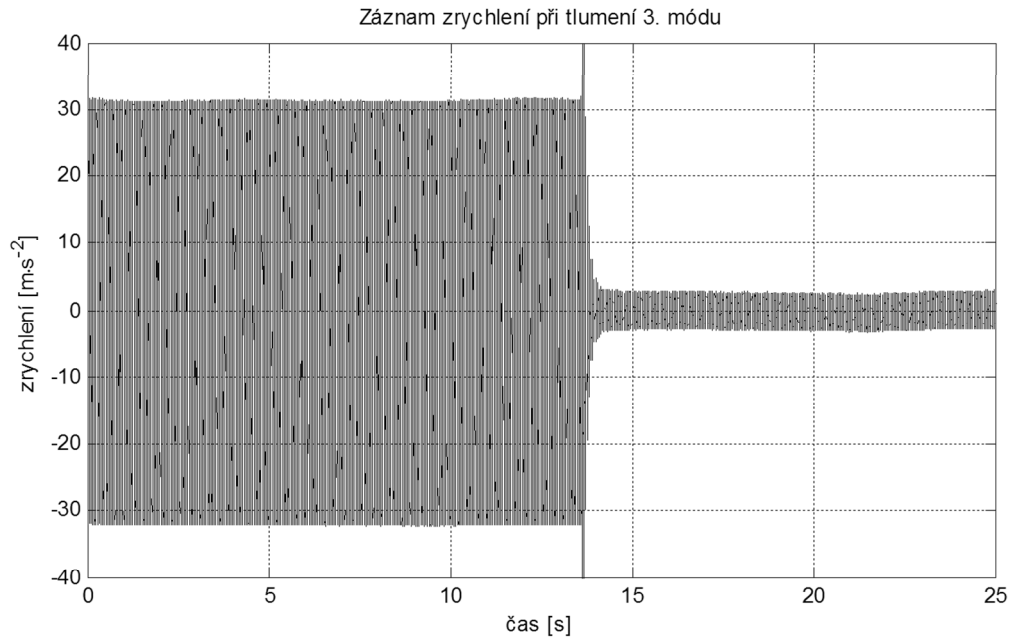
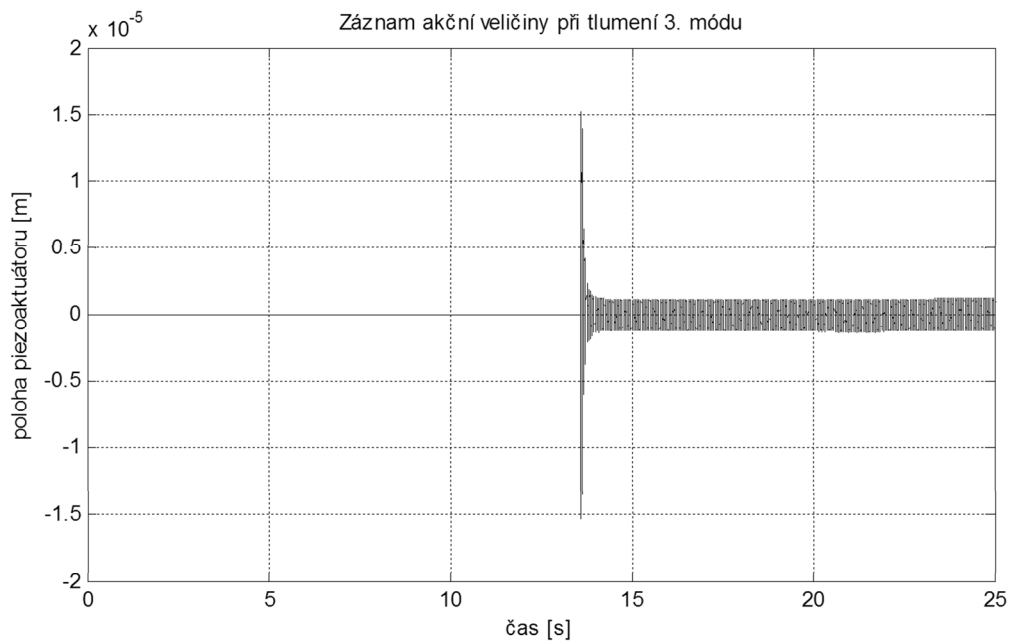
Obr. 6.22 Průběh zrychlení při tlumení 1. módu

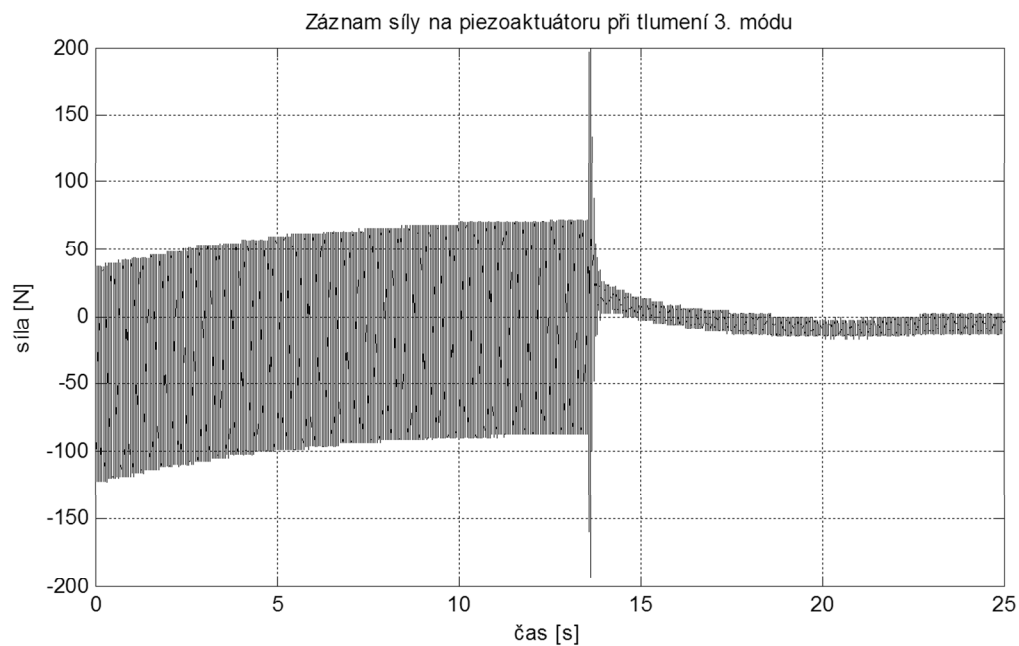


Obr. 6.23 Průběh akční veličiny při tlumení 1. módu

**Obr. 6.24 Průběh síly při tlumení 1. módu****Obr. 6.25 Průběh zrychlení při tlumení 2. módu**

**Obr. 6.26 Průběh akční veličiny při tlumení 2. módu****Obr. 6.27 Průběh síly při tlumení 2. módu**

**Obr. 6.28 Průběh zrychlení při tlumení 3. módu****Obr. 6.29 Průběh akční veličiny při tlumení 3. módu**

**Obr. 6.30 Průběh síly při tlumení 3. módu**

## Přínos disertační práce

Disertační práce je uspořádána do několika kapitol, které se zabývaly konstrukcí a popisem laboratorního modelu vetknutého nosníku, tvorbou matematického modelu nosníku a návrhem a realizací řídicího algoritmu aktivního tlumení vibrací.

Hlavní přínosy disertační práce jsou tyto:

- Odvození diskretizovaného matematického modelu pomocí Lagrangeových rovnic.
- Použití piezoelektrických materiálů při aktivním tlumení vibrací v podobě snímačů i akčních členů.
- Návrh řídicího systému, který zvládá kvalitně tlumit více módů kmitání.
- Tlumení při nekolokovaném uspořádání snímače a akčního členu, to znamená, že oba jsou umístěny na jiném konci konstrukce.

S tlumením vibrací nosníků je spojeno mnoho problémů. Jedna z nejtěžších situací nastává, když jsou snímač vibrací a akční člen umístěny na jiném místě konstrukce a navíc je potřeba tlumit více módů kmitání. Často se pak stává, že tlumení jednoho módu rozkmitává konstrukci v jiném módu. Přístup prezentovaný v této práci tuto problematiku dostatečně řeší. Obsahuje filtraci měřených dat, která přivádí k funkci tu část řídicího algoritmu, která je potřebná pro momentální situaci. Konstrukce regulátoru pro tlumení v nekolokovaném uspořádání může být přínosem pro obor řízení a regulace.

Podobné algoritmy je možné prakticky použít v mnoha odvětvích: kmitání strojů budov mostů, tlumení podvozků aut atd.



## **Contribution of dissertation**

Dissertation thesis is divided into several chapters. These chapters describe construction and instrumentation of a laboratory model, creation of a mathematical model, design and realization of control algorithm.

The main benefits are:

- Derivation of discretized mathematical model using Lagrange equations
- The application of piezoelectrical materials both as sensors and actuators.
- Algorithm which handles to control more than one of vibration modes.
- Vibration control of non-collocated system.

Many problems are connected with an active vibration control. One of the most difficult situations occurs, when a vibration's sensor and actuator are placed in various places, while the suppression of more than one mode is needed in the same time. Then, active vibration control of one mode excites the resonance of another mode frequently. These problems are solved in this thesis. Filtration of measured data, which sorts the signal and triggers the required part of control algorithm, is included. The structure of active vibration control algorithm is the contribution for control discipline.

Similar algorithms could be potentially used in many fields: vibration of machines, buildings, bridges, suppression of cars' chassis etc.

## Závěr

Tato práce se zabývala návrhem a aplikací systému aktivního potlačování vibrací pro mechanické zařízení. Činnost volně navazuje na diplomovou práci „Aktivní tlumení vibrací“, ve které je popsána činnost tlumení prvního vibračního módu vetknutého nosníku.

Původní laboratorní model byl vybaven novým piezoelektrickým akcelerometrem, který snímá vibrace v mnohem širším frekvenčním pásmu, k akcelerometru byl připojen nábojový zesilovač a modul, který tvoří rozhraní mezi signálem IEPE a napěťovým signálem. Rovněž byl použit snímač síly, který byl nainstalován v ose piezoelektrického aktuátoru a bylo možno sledovat síly přenášené akčním členem při zapnutém i vypnutém aktivním tlumení vibrací.

V rámci disertační práce byl sestaven matematický model, který dostatečně přesně napodoboval dynamické chování použitého vetknutého nosníku. Spojitý nosník byl pomyslně rozdělen na kvádry, které byly spojeny rotačními pružinami. Pro tuto soustavu byly odvozeny vztahy pro její kinetickou a potenciální energii. Následně byly pomocí Lagrangeových rovnic získány diferenciální rovnice v maticovém tvaru – matice hmotnosti, tuhosti a po identifikačních procedurách byla také určena matice tlumení.

Zavedení tohoto modelu do prostředí pro simulování diferenciálních rovnic MATLAB – Simulink umožnilo bezpečný návrh řídicího algoritmu pro tlumení více módů kmitání.

Algoritmus pro aktivní tlumení vibrací se skládá z několika větví. Každá větev měla za úkol tlumit jeden mód kmitání. Nejdříve pásmový filtr oddělil část signálu, která reprezentovala kmitání jednoho módu. Získaný signál byl ve formě zrychlení, které bylo následně integrováno a zesíleno. Výsledný modifikovaný signál byl již přiváděn k nosníku ve formě výchylky piezoaktuátoru. Porovnáním původního přenosu nosníku a přenosu uzavřeného obvodu bylo prokázáno, že zpětnovazební řízení má vliv na zvýšení tlumení systému.

V laboratoři bylo zjištěno, že navržený algoritmus má vliv na snížení kmitání, ale výsledky nebyly tak kvalitní jako při počítačové simulaci. Zvýšení zesílení ve zpětné vazbě mělo špatný vliv na ostatní módy. Jelikož zpětná vazba obsahovala integrační složku, při buzení druhého a třetího módu regulátor rozkmitával nižší rezonanční frekvence. Tomu bylo zabráněno implementací hornopropustných filtrů a následně bylo možno zvýšit zesílení a efektivitu aktivního tlumení vibrací. Zajímavé bylo zjištění, že při zapnutém tlumení byl piezoaktuátor méně mechanicky namáhán.

Dále se uvažuje o použití piezoelektrických akčních členů k aktivnímu tlumení vibrací ploch. To by mělo vliv zejména na přenášenou hladinu hluku, což je problém, který lidstvo trápí v mnoha průmyslových i civilních odvětvích.

## **Conclusion**

This thesis deals with design and application of active vibration control for mechanical equipment. Activities follow up my diploma thesis, where problems with damping of cantilevered beam were solved.

The original laboratory test rig was equipped by new piezoelectric accelerometer, which is able to sense vibration in much large frequency range. Charge amplifier is connected to the accelerometer and module which makes an interface between IEPE standard and voltage signal is also included. Force sensor was mounted in the actuator's axis; this enabled the monitoring of force made by actuator during both enabled and disabled active vibration control.

Mathematical model which successfully simulated dynamic behaviour of the cantilevered beam was completed in the framework of this dissertation thesis. The continuous beam was imaginably divided to cuboids connected by rotational springs. Formulas for kinetic and potential energy of this system were derived. Using Lagrange equations, system of differential equations was acquired and it enabled to complete mass and stiffness matrices. Damping matrix was deduced after identification procedures.

Implementation of this mathematical model into MATLAB/Simulink development environment enabled safe design of control algorithm for active control of multiple modes of vibration.

Algorithm for active vibration control is consisting of several parallel branches. Each branch has to damp one mode of vibration. Bandpass filter select the part of measured signal, which represent one mode of vibration at first. This signal is then numerically integrated and amplified. The resulting signal is brought to the beam in the form of actuator's displacement. The increase of damping ratio was proved by comparing the original transfer function of beam and the transfer function of the system with a feedback control.

Derived algorithm was tested on the laboratory model. It was found out, that feedback control reduces the amplitude of vibration but the results were not as good quality as in the case of computer simulation. The increasing of feedback gain in one of branches had bad influence on other modes. It happened because feedback included an integration part and when the second and the third mode of the beam were excited, the controller magnified amplitudes of lower resonant frequencies. This was avoided by using high pass filters and it enabled to intensify the gain of controller and effectivity of active vibration control. Force measurement discovered, that enabled active vibration control strains less the actuator than when the control is switched off.

The application of piezoelectric actuators for active vibration control of surfaces is under consideration. This would have an influence to emitted noise level, which is a problem in many industrial and civil sectors.

## Použitá literatura

- ABE, A. *Vibration Control of Pendulum Via Cable Length Manipulation*, in Z. Dimitrovová, J.R. de Almeida, R. Gonçalves (eds.) “Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2013)”, Lisbon, Portugal, 9-12 September, 2013, AMPTAC, ISBN 978-989-96264-4-7, abstrakt s. 195, článek 9 s.
- ARISTOTELES. *Physica*, 350 př. n. l. Dostupné také na: <http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.html>
- BALÁTĚ, J. *Automtické řízení*. Praha: BEN – technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-020-2
- BILLAH, K., SCANLAN, R. *Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure, and Undergraduate Physics Textbooks*. American Journal of Physics 59 (2): 118–124. [online]. 1991, [2014-08-04]. Dostupné na <http://www.ketchum.org/billah/Billah-Scanlan.pdf>.
- BERNOULLI, N. *Portrét Jacoba Bernoulliho*, 1681. Dostupné také na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob\\_Bernoulli#/media/File:Jakob\\_Bernoulli.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli#/media/File:Jakob_Bernoulli.jpg)
- DOSTÁL, Z. & VONDRÁK, V. *Lineární algrbra*, 2012. Dostupné také na: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni\\_algebra.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra.pdf)
- DU PLESSIS, A. *Tuned mass damper on display in Taipei 101*, 2010. Dostupné také na: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Taipei\\_101\\_Tuned\\_Mass\\_Damper\\_2010.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper_2010.jpg)
- EULER, L. *Mechanica, siue, Motus scientia analytice exposita, 1. díl*. Petrohrad: Ex Typographia Academiae Scientiarum. 1736. Dostupné na <https://archive.org/details/mechanicasiuemot01eule>
- EULER, L. *Mechanica, siue, Motus scientia analytice exposita, 2. díl*. Petrohrad: Ex Typographia Academiae Scientiarum. 1736. Dostupné na <https://archive.org/details/mechanicasiuemot02eule>
- GALILEI, G. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*. Leida: Elzevir, 1638. Dostupné také na <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-3923>
- GAWRONSKI, W. *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*, New York: Springer-Verlag New York, Inc. 2004. ISBN 0-387-40649-2
- GREER, R. *Portrét Roberta Hookea*. 2001. Dostupné také na [https://en.wikipedia.org/wiki/Robert\\_Hooke#/media/File:13\\_Portrait\\_of\\_Robert\\_Hooke.JPG](https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Hooke#/media/File:13_Portrait_of_Robert_Hooke.JPG)
- HANDMAN, J. E. *Portrét Leonharda Eulera*, 1753. Dostupné také na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler#/media/File:Leonhard\\_Euler.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler#/media/File:Leonhard_Euler.jpg)
- HOOKE, R. *Lectiones Cutlerianae, or A collection of lectures, physical, mechanical, geographical & astronomical*. Royal Society. Londýn: John Martyn publisher, 1679. Dostupné také na: <https://archive.org/details/LectionesCutler00Hook>

- HICKEY, D., SEWELL, S., MORTEL, B. & ESAT, I. *A Study to Demonstrate the Potential Benefits of Active Vibration Control in the Engineering Community*, in Z. Dimitrovová, J.R. de Almeida, R. Gonçalves (eds.) “Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2013)”, Lisbon, Portugal, 9-12 September, 2013, AMPTAC, ISBN 978-989-96264-4-7, abstrakt s. 369, článek 9 s.
- KNELLER, G. *Portrét Isaaca Newtona*. 1689. Dostupné také na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton#/media/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton#/media/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg)
- LAI, MING-LAI. MINNESOTA MINING AND MANUFACTURING COMPANY. *Tuned Mass Damper* [patent]. US, 5558191. Uděleno 24. 9. 1996. Dostupné z: <https://docs.google.com/-/viewer?url=patentimages.storage.googleapis.com/pdfs/US5558191.pdf>
- LEONARDO, D. V. *Lucan portrait of Leonardo da Vinci*. 1505. Dostupné také na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Leonardo\\_da\\_Vinci#/media/File:LEONARDO.JPG](https://en.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci#/media/File:LEONARDO.JPG)
- LYSIPPOS. *Busta Aristotela*. 330 př. n l. Dostupné také na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Aristotle#/media/File:Aristotle\\_Altemps\\_Inv8575.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Aristotle#/media/File:Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg)
- MAO, Q. & PIETRZKO, S. *Control of Noise and Structural Vibration*, Londýn: Springer-Verlag London, 2013. ISBN 978-1-4471-5091-6
- NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Londýn: Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater, 1687. Dostupné také na <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-440>
- NIGDELI, S.M. & BODUROGLU M.H. *The Effect of Time Delay on Active Seismic Control of Structures Using PID Controller*, in Z. Dimitrovová, J.R. de Almeida, R. Gonçalves (eds.) “Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2013)”, Lisbon, Portugal, 9-12 September, 2013, AMPTAC, ISBN 978-989-96264-4-7, abstrakt p. 244, článek 10 s.
- NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů*. Ostrava: Montanex, 1999. ISBN 80-7225-030-2
- PREUMONT, A. & SETO, K. *Active Control of Structures*, Chichester: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-0-470-03393-7
- PREUMONT, A. *Vibration Control of Active Structures*, Berlin: Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-94-007-2033-6
- SUSTERMANS, J. *Portrait of Galileo Galilei*. 1636. Dostupné také na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo\\_Galilei#/media/File:Justus\\_Sustermans\\_-\\_Portrait\\_of\\_Galileo\\_Galilei,\\_1636.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei#/media/File:Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg)
- ŠKODA, J. & ŠKLÍBA, J. *Vibration-Isolation System with Gyroscopic Stabilizer*, in Z. Dimitrovová, J.R. de Almeida, R. Gonçalves (eds.) “Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2013)”, Lisbon, Portugal, 9-12 September, 2013, AMPTAC, ISBN 978-989-96264-4-7, abstrakt s. 372, článek 9 s.

- WEISSTEIN, E. W. *Critically Damped Simple Harmonic Motion*. *Mathworld – A Wolfram Web resource*. [online]. [cit. 2016-01-02]. Dostupné také na <http://mathworld.wolfram.com/CriticallyDampedSimpleHarmonicMotion.html>
- WEISSTEIN, E. W. *Damped Simple Harmonic Motion*. *Mathworld – A Wolfram Web resource*. [online]. [cit. 2016-01-02]. Dostupné také na <http://mathworld.wolfram.com/DampedSimpleHarmonicMotion.html>
- WEISSTEIN, E. W. *Overdamped Simple Harmonic Motion*. *Mathworld – A Wolfram Web resource*. [online]. [cit. 2016-01-02]. Dostupné také na <http://mathworld.wolfram.com/OverdampedSimpleHarmonicMotion.html>
- WEISSTEIN, E. W. *Simple Harmonic Motion*. *Mathworld – A Wolfram Web resource*. [online]. [cit. 2016-01-02]. Dostupné také na <http://mathworld.wolfram.com/SimpleHarmonicMotion.html>
- WEISSTEIN, E. W. *Underdamped Simple Harmonic Motion*. *Mathworld – A Wolfram Web resource*. [online]. [cit. 2016-01-02]. Dostupné také na <http://mathworld.wolfram.com/UnderdampedSimpleHarmonicMotion.html>

**Publikace autora**

- ŠURÁNEK, P. *Dynamické vlastnosti silentbloků*: bakalářská práce. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Univerzitní studijní programy, Katedra automatizační techniky a řízení, 2010, 46 s. Vedoucí práce: Tůma, J.
- ŠURÁNEK, P. *Aktivní tlumení vibrací*: diplomová práce. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Univerzitní studijní programy, Katedra automatizační techniky a řízení, 2012, 49 s. Vedoucí práce: Tůma, J.
- ŠURÁNEK, P. & TŮMA, J. *Aktivní tlumení vibrací vetknutého nosníku*. In: Workshop Perspektivní projekty vývoje řídicích a senzorických technologií září 2012. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2012, s. 105-110. ISBN 978-80-214-4547-5.
- ŠURÁNEK, P., TŮMA, J. & MAHDAL, M. *Modální analýza modelu pro aktivní tlumení vibrací*. XXXVII. Seminář ASŘ '2013 „Instruments and Control“. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2013, s. 77-87. ISBN 978-80-248-2967-8.
- ŠURÁNEK, P., TŮMA, J., MAHDAL, M. & ZAVADIL, J. *Modal Analysis of the Cantilever Beam*. In: Proceedings of the 14th International Carpathian Control Conference (ICCC). AGH University of Science and Technology, Krakov, Polsko, 2013, s. 373-376. ISBN 978-1-4673-4489-0.
- ŠURÁNEK, P., TŮMA, J. & MAHDAL, M. *Comparising of Antialiasing Filters in A/D Converters*. In: Proceedings of the 14th International Carpathian Control Conference (ICCC). AGH University of Science and Technology, Krakov, Polsko, 2013, s. 373-376. ISBN 978-1-4673-4489-0.
- ŠURÁNEK, P. & TŮMA, J. *Experiments with the Active Vibration Control of a Cantilever Beam*, Z. Dimitrovová, J.R. de Almeida, R. Gonçalves (eds.) “Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2013)”, Lisabon, Portugalsko, 2013, AMPTAC, ISBN 978-989-96264-4-7, abstrakt s. 391, 7 s.
- ŠURÁNEK, P., TŮMA, J. & MAHDAL, M. *Modelování a simulace aktivně tlumené struktury*. XXXVIII. Seminář ASŘ '2014 “Instruments and Control”. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2014, s. 101-107. ISBN 978-80-248-3398-9.
- ŠURÁNEK, P., TŮMA, J. & MAHDAL, M. *Modelling and Simulation of an Active Damped Structure*. In: Proceedings of the 15th International Carpathian Control Conference (ICCC). VŠB – Technická univerzita Ostrava, Česká republika, 2014, s. 588-591. ISBN 978-1-4799-3527-7.
- ŠURÁNEK, P., TŮMA, J. & MAHDAL, M. *Laboratory model for active vibration control*, in: Proceedings of the 16th International Carpathian Control Conference (ICCC). Szilvasvarad, Maďarsko, 2015. ISBN 978-1-4673-4489-0.
- TŮMA, J., ŠURÁNEK, P. & MAHDAL, M. *Stability of the Active Vibration Control of Cantilever Beams*, in Z. Dimitrovová, J.R. de Almeida, R. Gonçalves (eds.) “Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2013)”, Lisabon, Portugalsko, 2013, AMPTAC, ISBN 978-989-96264-4-7, abstrakt s. 195, 11 s.

- TŮMA, J., MAHDAL, M. & ŠURÁNEK, P. *Simulation Study of the Non-Collocated Control of a Cantilever Beam*, in *Mechanics and Control*, AGH University of Science and Technology, 2013, s. 110-116, ISSN 2300-7079
- TŮMA, J., ŠURÁNEK, P., MAHDAL, M. & BABIUCH, M. *Simulation of the parametric excitation of the cantilever beam vibrations*, 15th International Carpathian Control Conference (ICCC). VŠB – Technická univerzita Ostrava, Česká republika, 2014, s. 588-591. ISBN 978-147997370-5.
- TŮMA, J., ŠURÁNEK, P. & MAHDAL, M., *Vibration damping of the cantilever beam with the use of the parametric excitation*. The 21st International Congress on Sound and Vibration, 2014, Peking, Čína. ISBN 978-163439238-9
- TŮMA, J., FERFECKI, P., ŠURÁNEK, P. & MAHDAL, M. *Modelování vlivu parametrického buzení na kmitání vetknutého nosníku*, in *Automatizace, regulace a procesy : sborník přednášek z 10. technické konference : ČVUT v Praze, Fakulta strojní*, 4.-5.11.2014, DIMART, 2014, s. 7-16, ISBN 978-80-903844-8-4
- TŮMA, J., ŠURÁNEK, P. & MAHDAL, M. *Simulation study on the forced response of the non-stationary second order system*, in *Dynamics of Machines 2014: national colloquium with international participation*. February 4-5, 2014, Prague, Czech Republic: proceedings, Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2014, s. 171-177, ISBN 978-80-87012-50-5
- VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ– TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA. *Způsob aktivního tlumení vibrací mechanických poddajných struktur pro různou polohu aktuátoru a snímače vibrací využívající all-pass filtr druhého řádu*. Autoři: Jiří Tůma, Pavel Šuránek, Miroslav Mahdal. Česká republika. Patentový spis CZ 304958 B6. 4.2.2015
- VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ– TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA. *Způsob aktivního řízení vibrací kluzných ložisek s použitím piezoaktuátorů a zařízení k jeho provádění*. Autoři: Jiří Tůma, Jiří Šimek, Miroslav Mahdal, Jaromír Škuta, Pavel Šuránek, Renata Wagnerová, Vladimír Starý. Česká republika. Patentový spis CZ 305550 B6. 2.12.2015
- VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ– TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA. *Zařízení aktivního řízení vibrací kluzných ložisek s použitím piezoaktuátorů*. Autoři: Jiří Tůma, Jiří Šimek, Miroslav Mahdal, Jaromír Škuta, Pavel Šuránek, Renata Wagnerová, Vladimír Starý. Česká republika. Užitený vzor CZ 27822 U1. 25.2.2015
- ŠURÁNEK, P., MAHDAL, M. *Řídicí systém pro aktivní tlumení vibrací vetknutého nosníku*. Funkční vzorek, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2012.
- ŠURÁNEK, P., MAHDAL, M., TŮMA, J. *Zařízení pro aktivní tlumení vibrací*. Funkční vzorek, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2012.