Bachelorarbeit
IB 111-2012/04

Vergleichende Betrachtung unterschiedlicher Schwenkdämpfermodelle auf die Stabilität eines Rotorblattes

Thorsten Pfeifer

Institut für Flugsystemtechnik
Braunschweig

92 Seiten
30 Bilder
5 Tabellen
29 Referenzen

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Flugsystemtechnik
Lilienthalplatz 7, D-38108 Braunschweig

Stufe der Zugänglichkeit: II, Intern und extern beschränkt zugänglich
Availibility/Distribution: Internally and externally limited distribution

Braunschweig, Januar 2012

Unterschriften:

Institutsdirektor:	Prof. Dr.-Ing. S. Levedag	____________
Betreuer:	Dr.-Ing. C. Keßler	____________
Verfasser:	Thorsten Pfeifer	____________
Verfasser:		____________
Verfasser:		____________

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.
in der Helmholtz-Gemeinschaft

DLR Institut für Flugsystemtechnik
Postfach 32 67, 38022 Braunschweig

DLR

Institut für
Flugsystemtechnik
Prof.Dr.-Ing. S. Levedag

Ihr Zeichen
Ihr Schreiben
Unser Zeichen Ke

Ihr Gesprächspartner Dr. Ch. Keßler
Telefon 0531 295- 2690
Telefax 0531 295- 2641
E-Mail

19.09.2011

Bachelor-Arbeit

für

Herrn cand. mach. Thorsten Pfeifer

Matr.-Nr.: 2971197

Thema:

Vergleichende Betrachtung unterschiedlicher Schwenkdämpfermodelle auf die Stabilität eines Rotorblattes

Erläuterung:

Rotorblätter haben allgemein drei rotatorische Freiheitsgrade: Schlagen (aus der Rotorebene heraus), Schwenken (in der Rotorebene) und Torsion des Blattes. Insbesondere die Schwenkbewegung ist nur unzureichend gedämpft. Damit es bei dem sehr komplexen und extrem schwingungsfähigen Rotor-Zelle System nicht zu aufklingenden Schwingungserscheinungen kommt, werden für die allermeisten Hubschrauber eigene Schwenkdämpfer vorgesehen. Nur einige wenige Hubschrauber, wie die BO105 oder EC145 kommen ohne solche Dämpfer aus. Hier bewirken verschiedene Faktoren ausreichende Schwenkdämpfung. Als Schwenkdämpfer kommen hydraulische Dämpfer, Elastomerdämpfer oder fluidelastische Dämpfer zum Einsatz. Während bei den konventionellen hydraulischen Dämpfern die Dämpfungskraft geschwindigkeitsproportional angenommen werden kann, ist dies bei den beiden letztgenannten Dämpfern nicht mehr der Fall. Hier sind die Modelle nichtlinear und von einer Reihe von Einflussfaktoren abhängig. So treten bei Elastomerdämpfern ausgeprägte Hystereseeffekte und Abhängigkeiten der Dämpfungskonstanten vom Schwenkwinkel auf. Zudem weisen sie eine Eigenschaft auf, die als „dual-frequency-problem“ bekannt ist. Dies ergibt sich aus dem Betrieb des Schwenkdämpfers bei der 1/rev-Frequenz, die aus der Steuerung und der dadurch angeregten Schwenkbewegung im Vorwärtsflug resultiert (homogene Lösung der Differentialgleichung), und der eigentlichen Aufgabe des Dämpfers, nämlich selbstangeregte Schwenkbewegungen (homogene Lösung der Differentialgleichung mit der Schwenkeigenfrequenz als Schwingfrequenz) zu dämpfen.

Aufgabenstellung:

Im Rahmen dieser Arbeit soll die Auswirkung der unterschiedlichen Dämpferarten und die Modellierung dieser Dämpfer auf die Stabilität eines Rotorblattes oder des Gesamtrotors untersucht werden. Weil es vor allem um prinzipielle Untersuchungen und grundlegendes Verständnis der physikalischen Zusammenhänge geht, sind einfache Rotor- und Dämpfermodelle bereitzustellen und anhand dieser Stabilitätsbetrachtungen durchzuführen.

Im Einzelnen sind folgende Aufgabenpunkte zu bearbeiten:

- Einarbeitung in das Thema.
- Herleitung des gekoppelten Bewegungsdifferentialgleichungssystems für ein starres Blatt unter Annahme von Schlag- und Schwenkbewegung mit dezentralem Blattgelenk, elastischer Kopplung und vereinfachter Aerodynamik; ausführliche Dokumentation der Herleitung.
- Herleitung der erforderlichen Trimmgleichungen und ausführliche Dokumentation der Herleitung.
- Zusammenstellung einer Übersicht von für Hubschrauber verwendeter Schwenkdämpfer und ausführliche Beschreibung der Eigenschaften von und Ergebnissen zu Elastomerdämpfern.
- Herleitung eines Modells für Elastomerdämpfer.
- Einbindung eines viskosen Dämpfermodells sowie des hergeleiteten Elastomerdämpfermodells in die Bewegungsgleichungen.
- Vergleichende Betrachtung der Stabilität unter Berücksichtigung der verschiedenen Dämpfermodelle unter Verwendung der Floquettheorie.
- Erweiterung des Modells um einen ausgewählten Effekt für komplexere Aerodynamikmodelle wie z.B. Rückanströmung, Ma-Effekten oder dynamischem Durchfluss etc..
- Einfluss der geänderten Modellierung auf die Stabilität des Rotors.
- Erstellen eines Berichtes gemäß der Hinweisen für die Anfertigung von Bachelor-Arbeiten der TU Braunschweig.

Literatur:

[1] W. Johnson: Helicopter Theory, Dover Publications, Inc., New York, 1994.

[2] H. Strehlow: Dynamik moderner Rotorsysteme, CCG-Kurs LR2.05, 1987.

[3] F. Gandhi, I. Chopra: A time-domain non-linear viscoelastic damper model, Smart Materials and Strutures, Vol. 5, No. 5, pp. 517-528, 1996.

[4] B. Panda, E. Mychalowycz, F.J. Tarzanin: Application of passive dampers to modern helicopters, Smart Materials and Structures, Vol. 5, No. 5, pp. 517-528, 1996.

[5] F. Gandhi, I. Chopra: An analytical model for a non-linear elastomeric lag damper and its effect on aeromechanical stability in hover, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 39, No. 4, pp. 59 – 69, 1994.

[6] F.F. Felker, B.H. Lau, S. McLaughlin, W. Johnson: Non-linear behavior of an elastomeric lag damper undergoing dual-frequency motion and its effect on rotor

dynamics, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 32, No. 4, pp. 45 – 53, 1987.

[7] S. Kottapalli, O.A. Bauchau, C. Ju, S. Ozbay, Y. Mehrotra: Analytical, first principles modeling of elastomeric dampers, American Helicopter Society Aeromechanics Specialists' Conference, San Francisco, Ca, January 20-22, 2010.

[8] C.R. Brackbill: Helicopter rotor aeroelastic analysis using a refined elastomeric damper model, PHD Thesis, The Pennsylvania State University, 2000.

[9] C.R. Brackbill, E.C. Smith, G.A. Lesieutre: Application of a refined time-domain elastomeric damper model to helicopter rotor response and stability, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 47, No. 3, pp. 186 – 197, 2002.

[10] G. Hausmann: Structural analysis and design considerations of elastomeric dampers with viscoelastic material behavior, 12th European Rotorcraft Forum, Garmisch-Partenkirchen, Germany, September 22-25, 1986.

[11] P.P. Friedmann: Rotary-wing aeroelasticity: Currebt status and future work, AIAA Journal, Vol. 42, No. 10, October 2004.

[12] G. Tettenborn: Aeromechanische Stabilitätsuntersuchungen des Hubschrauber unter Einsatz der Einzelblattsteuerung, ZLR-Forschungsbericht 2001-02, TU-Braunschweig, 2001.

[13] D.A. Peters: Flap-lag stability of helicopter rotor blades in forward flight, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 20, No. 4, pp. 2 – 13, 1975.

[14] R.A. Ormiston, D.H. Hodges: Linear flap-lag dynamics of hingeless helicopter rotor blades in hover, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 17, No. 2, pp. 2 – 14, 1972.

[15] R.A. Ormiston, W.G. Bousman: A study of stall-induced flap-lag instability of hingeless rotors, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 20, No. 1, pp. 20 – 30, 1975.

Die Bachelorarbeit wird extern am Institut für Flugsystemtechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR) in Braunschweig bearbeitet. Alle im Laufe der Arbeit zugänglich gemachten Informationen sind vertraulich zu behandeln.

Bearbeitungszeit: 3 Monate

Betreuer: Dr. Christoph Keßler, Institut für Flugsystemtechnik, DLR Braunschweig

Unterschrift: Prof. Dr. Levedag

26. Sep. 2011

Ausgabe: 29. September 2011

Abgabe: 5. Januar 2011

Zusammenfassung

Es wird das einfache Modell eines viskos gedämpften Rotorsystems betrachtet. Die dazugehörigen Differentialgleichungen werden hergeleitet und verifiziert. Anschließend werden Elastomerdämpfer vorgestellt und verschiedene Modelle zur Modellierung dieser erläutert. Ein Modell wird ausgewählt und in das Rotorsystem integriert. Nachfolgend werden Fluidelastikdämpfer erläutert und deren Modellierungsmöglichkeiten dargestellt. Die Integration eines ausgewählten Modells wird vorbereitet.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit "Vergleichende Betrachtung unterschiedlicher Schwenkdämpfermodelle auf die Stabilität eines Rotorblattes" selbstständig verfasst sowie alle benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass die Arbeit nicht bereits als Prüfungsarbeit vorgelegen hat.

Braunschweig, den 05.01.2012

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

a	:	Fiktiver Schlaggelenksabstand
an	:	untere Integrationsgrenze Aerodynamik zur Erfassung Auftriebsanfang
B	:	obere Integrationsgrenze Aerodynamik zur Erfassung Auftriebsabfall
c	:	Profilsehne
$C_{a\alpha}$	:	Auftriebsanstieg
C_{d0}	:	Profilwiderstandsbeiwert
C_{dZ}	:	Zellenwiderstandsbeiwert
d_ζ	:	viskose Dämpfung
f_{dZ}	:	Zellenwiderstandsfläche
F	:	Kraft
g	:	Gravitation
h_d	:	Dämpferhebelarm
h_Z	:	Zellenhebelarm
I	:	Trägheitsmoment
k	:	Federkonstante
m	:	Masse
M	:	Moment
n_{Bl}	:	Blattanzahl
r	:	Schwerpunkt
R	:	Schlag-Schwenk-Koppelung
$\overline{R}$	:	Rotorradius
T	:	Transformationsmatrix,Schub
v	:	Geschwindigkeit
W_Z	:	Zellenwiderstand
x	:	x-Koordinate
y	:	y-Koordinate

Griechische Buchstaben

α	:	Rotoranstellwinkel
β	:	Schlagwinkel
β_{Pc}	:	Precone-Winkel
γ	:	Lock-Zahl
ε	:	Größenordnung
ζ	:	Schwenkwinkel
ϑ, θ	:	Torsionswinkel
λ_{i0}	:	induzierter mittlerer Durchflussgrad
μ	:	Fortschrittsgrad
ρ	:	Dichte
σ	:	Flächendichte
ψ	:	Rotordrehwinkel
Ω	:	Rotordrehfrequenz
ω	:	Eigenfrequenz

Indizes

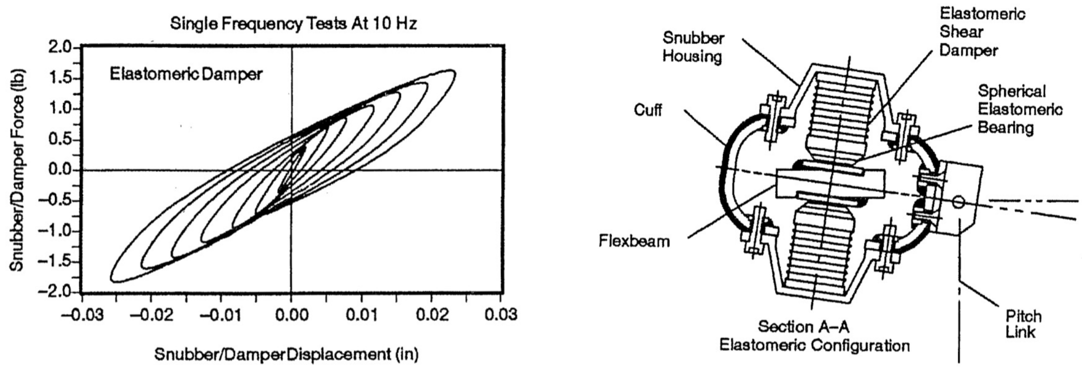
Z	:	Zelle
g	:	Gravitation
Bl	:	Rotorblatt
β	:	schlagen
ζ	:	schwenken
ϑ, θ	:	tordieren
0	:	konstanter Anteil der Trimmung, Anfangswert
s	:	Sinus-Anteil der Trimmung
c	:	Kosinus-Anteil der Trimmung
si	:	Eigenwerte
tr	:	Trimmgrößen

Operatoren

$\overline{(\dots)}$	:	dimensionsbehaftete Größe, bei PETERS Trimmgrößen (Abschnitt 4.1)
$\underline{(\dots)}$	:	Vektor
$\underline{\underline{(\dots)}}$	:	Matrix
$O(\dots)$	:	Größen kleiner oder gleich dieser Größenordnung
$\Re(\dots)$	:	Realteil
$\Im(\dots)$	:	Imaginärteil

1. Einleitung

Der Rotor ist der bedeutendste Bestandteil eines Hubschraubers. Durch ihn wird der Auftrieb sowie die Steuerung des Hubschraubers ermöglicht. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf den Rotorblättern. Ein Rotorblatt kann als biegeweicher Balken abstrahiert werden und besitzt somit drei Freiheitsgrade. Die Auslenkung aus der Rotorebene heraus wird als Schlagen und die Bewegung in der Rotorebene wird als Schwenken bezeichnet. Darüber hinaus kann das Blatt entlang seiner Länge tordieren. Während die Schlagbewegung durch die Aerodynamik gut ausgedämpft ist, fällt die Dämpfung bei der Schwenkbewegung relativ schwach aus. Insbesondere im Boden- und Luftresonanzfall baut sich dadurch eine starke Schwingung auf. Um die nötige Sicherheit zu gewährleisten, muss diese Schwingung mechanisch ausgedämpft werden. Ein erfreulicher Nebeneffekt ist der erhöhte Komfort im Fluggerät.
In den Anfängen wurden hydraulische Dämpfer verwendet. Dieser Dämpfer besteht aus zwei Kammern, die durch einen Kolben voneinander getrennt sind. Eine Auslenkung des Kolbens erzeugt eine Volumenänderung und somit eine Druckänderung in den Kammern. Durch kleine Ausgleichsöffnungen können sich die Drücke der beiden Kammern langsam wieder angleichen. Ein solcher Dämpfer muss an das Hydraulik-System des Hubschraubers angeschlossen sein. Da eine Leckage oder sonstiges Versagen eines Bauteils einen Systemausfall nach sich zieht, werden Schwenkdämpfer regelmäßig kontrolliert. Durch den komplexen Aufbau eines Hydraulikdämpfers reicht eine Sichtprüfung jedoch nicht aus und muss deshalb komplett demontiert werden. Auch wenn mittlerweile zunehmend wartungsarme Elastomer- oder fluidelastische Dämpfer verwendet werden, findet dieser Dämpfertyp aufgrund seiner besonders starken Dämpfungseigenschaften vor allem in Großraumhubschraubern immer noch Verwendung. Als Modellierung für diesen Typ kann ein linearer, viskoser Dämpfungsterm verwendet werden.
Ein Elastomerdämpfer besteht aus einem speziellen Elastomer, das zwischen zwei Grundplatten gegossen wird. Gelegentlich werden aus strukturellen Gründen Lagen aus Aluminiumblech in das Elastomer eingebracht (vgl. Abb.1.1(b)). Das Elastomer wird in seiner Zusammensetzung speziell auf Energiedissipation ausgelegt. Somit unterscheidet es sich grundlegend von Elastomeren, die als Isolator eingesetzt werden. Eine Besonderheit der Elastomere ist das Hysterese-Verhalten, d.h. dass die resultierende Kraft des Elastomers verspätet auf die Auslenkung folgt. Aus diesem Grund wird zur Beschreibung neben dem aktuellen immer auch der vorherige Zustand benötigt. Durch die spezielle Auslegung der Elastomere als Dämpfer fällt die Hysterese besonders nichtlinear aus. Eine wichtige Eigenschaft des Elastomers tritt mit dem DUAL-FREQUENCY-Problem in Erscheinung. Dabei handelt es sich um die Reduktion der Dämpfung bei zwei sich annähernden Erregerfrequenzen. Bei einem Rotorsys-

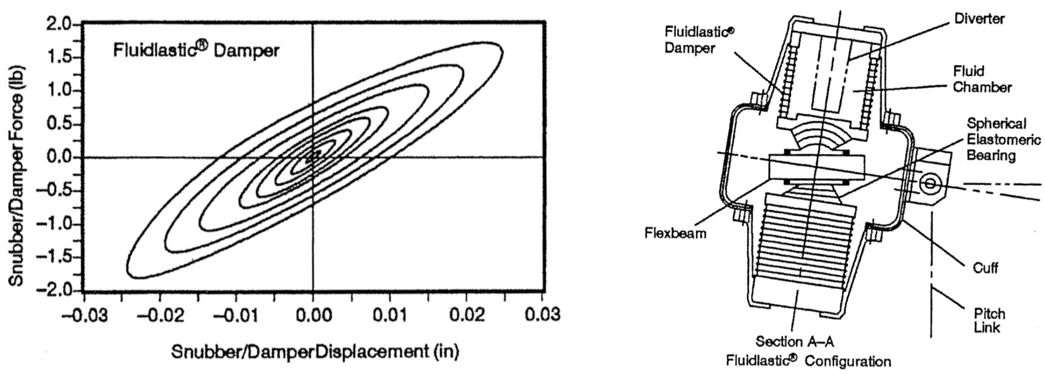


(a) (b)

Abbildung 1.1.: Hysteresen (a) und Aufbau (b) eines Elastomerdämpfers [21]

tem sind dies in der Regel die Rotordreh- und die Schwenkeigenfrequenz [6]. Dabei kann die Dämpfung so stark herabgesetzt werden, dass das System nur noch grenzstabil ist und eine entsprechende Schwingung nicht vollständig ausgedämpft wird. Die verbleibende konstante Restamplitude wird in der englischsprachigen Literatur als LIMIT-CYCLE bezeichnet [21]. Da sich das Versagen eines Elastomer deutlich auf seiner Oberfläche bemerkbar macht, reicht bei einem solchen Dämpfer eine Sichtprüfung aus. In Verbindung mit der geringen Teilezahl ergeben sich für einen Elastomerdämpfer sehr günstige Betriebskosten, die die hohen Entwicklungskosten amortisieren. Allerdings ergeben sich aus dem DUAL-FREQUENCY-Problem und der relativ geringen Dämpfung einige Fälle, in denen dieser Dämpfertyp ungeeignet ist. Zur Modellierung diesen Typs sei auf Kapitel 6 verwiesen.

Die fluidelastischen Dämpfer wurden entwickelt, um die positiven Eigenschaften von Hydraulik- und Elastomerdämpfer zu vereinen. Dazu wird ein Hydraulikdämpfer mit einem Elastomer, der auf chemische Beständigkeit und Elastizität ausgelegt ist, ver-



(a) (b)

Abbildung 1.2.: Hysteresen (a) und Aufbau (b) eines fluidelastischen Dämpfers [21]

siegelt (vgl. Abb.1.2(b)). Die Volumenänderung wird dabei durch das Elastomer realisiert. Dadurch ist das Elastomer der versagenskritische Bestandteil. Bei entsprechender Konstruktion wird eine Sichtprüfung möglich. Da das Elastomer nicht für die Energiedissipation ausgelegt ist, weist es auch eine linearere Hysterese auf (vgl. Abb.1.2(a) und Abb.1.1(a)). Das Verhalten dieses Dämpfers ähnelt somit mehr einem Hydraulikdämpfer als einem Elastomerdämpfer, dennoch darf der Einfluss des Elastomers nicht vernachlässigt werden. Die Beschreibungen zu den Modellierungen finden sich in Kapitel 7.
Um die Stabilitäten der verschiedenen Dämpfertypen vergleichen zu können, werden zunächst die Gleichungen eines viskos gedämpften Rotorsystems hergeleitet und verifiziert. Anschließend wird der viskose Dämpfer mit je einem ausgewählten Modell für Elastomer- und Fluidelastikdämpfer ersetzt und die drei Varianten ausgewertet.

2. Herleitung der Bewegungsgleichungen eines Rotorsystems

Eine Rotorsystem ist sehr komplex. Die verschiedenen Kräfte und Momente, die an einem Rotorblatt angreifen, lassen sich in manchen Koordinatensystemen nur umständlich herleiten. Deshalb wird bei der Herleitung der einzelnen Kräfte und Momente ein jeweils geeignetes Koordinatensystem ausgewählt. Sowohl bei der Nomenklatur als auch bei der Herleitung wird sich hier an TETTENBORN [28, 29] orientiert. Abweichungen werden entsprechend kenntlich gemacht.

2.1. Normierung

Das Rotorsystem wird dimensionslos hergeleitet, d.h. alle vorkommenden Größen müssen auf die selbe Weise normiert werden. In Tabelle 2.1 wird aufgeführt, worauf die einzelnen Einheiten bezogen werden. Sollte doch eine dimensionsbehaftete Größe vorkommen, wird diese mit einem Balken über der Größe kenntlich gemacht. Wird von der Normierung abgewichen wird darauf explizit hingewiesen.

2.2. Ordnungsschema

Da die Gleichungen schnell sehr groß und unübersichtlich werden und viele Terme verhältnismäßig klein sind, wird ein Ordnungsschema angewendet. Dabei werden alle Terme, die zwei Größenordnungen kleiner als der größte Term sind, vernachlässigt. Der Ansatz lautet:

Sekunde [s]	:	$t = \overline{t}\,\overline{\Omega}$
Meter [m]	:	$x = \overline{x}/\overline{R}$
Masse [kg]	:	$m = \overline{m}/\overline{m}_{Bl}$

Tabelle 2.1.: Normierungen

$O(\varepsilon^0)$	:	$\sin(\psi), \cos(\psi), I_{Bl}, M_{Bl}, d_\zeta, h_Z, k_\beta, k_\zeta, R, B, \gamma, \mu, \ddot{\vartheta}$
$O(\varepsilon^{1/2})$	:	$\sin(\vartheta), \vartheta, \dot{\vartheta}$
$O(\varepsilon^1)$	:	$a, an, \lambda_{i0}, \sin(\alpha), \tan(\alpha), \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, \zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \beta_{Pc}$
$O(\varepsilon^{3/2})$	:	$C_{d0}/C_{a\alpha}$
$O(\varepsilon^2)$	:	g

Tabelle 2.2.: Größenordnungen

$$O(\varepsilon^n) + O(\varepsilon^{n+2}) \approx O(\varepsilon^n) \tag{2.1}$$

Dabei wird $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.2$ für kleine Größen gesetzt. Die Größenordnungen der einzelnen Variablen können der Tabelle 2.2 entnommen werden.

2.3. Koordinatensysteme

Die Transformationen werden gemäß der Luftfahrnorm DIN 9300 definiert. Allerdings unterscheiden sich die Definition der Koordinatensysteme von denen in der Luftfahrtnorm.

2.3.1. Schwerpunktkoordinatensystem S

Dieses Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Schwerpunkt einer fiktiven Zelle. Die x-y-Ebene des Systems liegt parallel zur Erdoberfläche, aber im Unterschied zum geodätischen Koordinatensystem weist die z-Achse nach oben und die x-Achse liegt parallel zur Fluggeschwindigkeit in Richtung des Heckauslegers. Vereinfachend wird angenommen, dass der Schwerpunkt senkrecht unter der Rotornabe liegt.

2.3.2. Nichtdrehendes Rotorkoordinatensystem Ro

Dieses Koordinatensystem liegt im Rotorkopf. Zur Transformation aus dem S-System wird zunächst das System um die y-Achse mit dem Rotoranstellwinkel α nach vorne gekippt. Im mathematischen Sinn ist dieses eine negative Drehung. Da aber α konventionell positiv notiert wird, wird hier ein negativer Drehsinn angewendet. Anschließend wird der Ursprung entlang der z-Achse um die Länge h in den Rotorkopf verschoben. Zu beachten ist, dass hier die Transformation in die umgekehrte Richtung notiert wird.

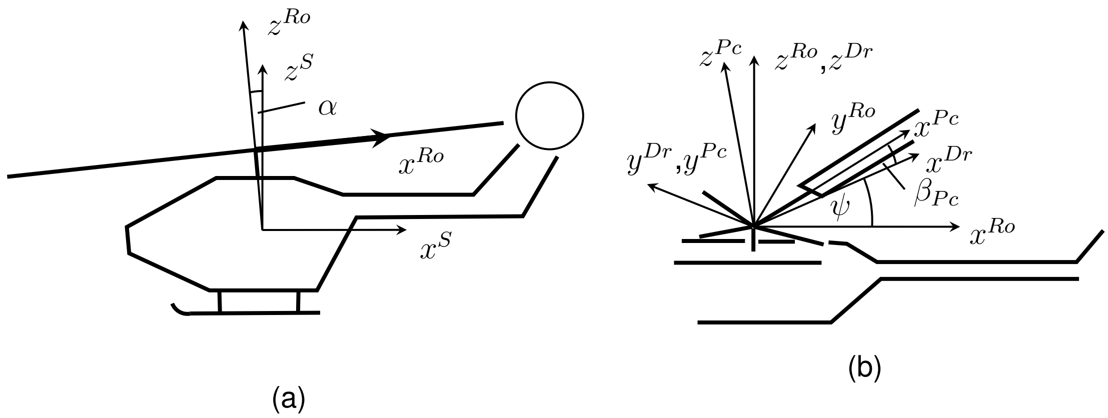


Abbildung 2.1.: Koordinatensysteme, (a) S-Ro, (b) Ro-Dr-Pc

$$\underline{\underline{T}}_{RoS} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\underline{r}_S^{Ro} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h_Z \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

2.3.3. Drehendes Rotorkoordinatensystem Dr

Das Koordinatensystem ist zu Ro nur um den aktuellen Drehwinkel ψ verdreht. Die x-Achse weißt dabei in Richtung eines Rotorblattes.

$$\underline{\underline{T}}_{RoDr} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

2.3.4. Precone-Koordinatensystem Pc

Dieses System ist zum Dr-System nur um den Preconewinkel β_{Pc} angestellt. Der Precone verringert bei Anstellung nach oben die Blattanschlussbiegemomente. Da die Konvention diese Winkel nach oben positiv verwendet, handelt es sich dabei um eine Transformation mit negativen Drehsinn.

$$\underline{\underline{T}}_{DrPc} = \begin{pmatrix} \cos(\beta_{Pc}) & 0 & -\sin(\beta_{Pc}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta_{Pc}) & 0 & \cos(\beta_{Pc}) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

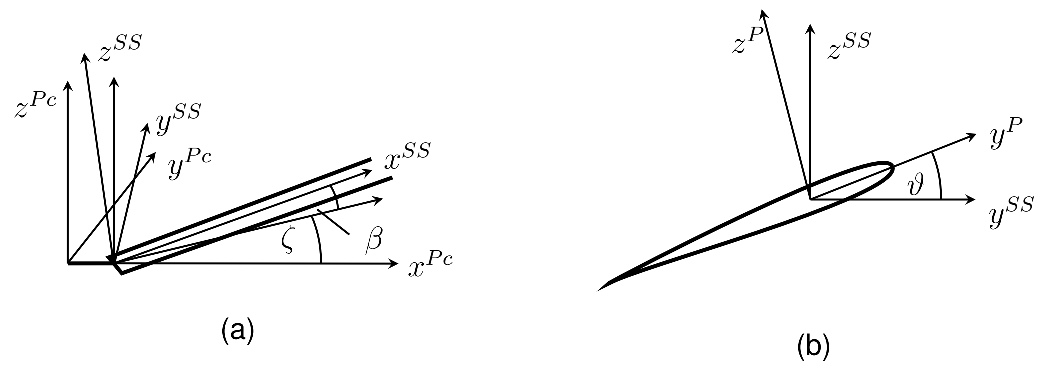


Abbildung 2.2.: Koordinatensysteme, (a) Pc-SS, (b) SS-P

2.3.5. Schlag-Schwenk-Koordinatensystem SS

Dieses System löst die Schlag- und Schwenkbewegungen auf. Dabei wird der Ursprung um die Größe a von der Rotornabe verschoben und liegt somit im fiktiven Schlag-Schwenkgelenk. Dieses System eignet sich besonders zum Aufstellen der Schlag- und Schwenkdifferentialgleichungen. Dabei wird β wie β_{Pc} entgegen der ordentlichen Drehrichtung gewertet.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{T}}_{PcSS} &= \begin{pmatrix}\cos(\zeta) & -\sin(\zeta) & 0\\ \sin(\zeta) & \cos(\zeta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\beta)\cos(\zeta) & -\sin(\zeta) & -\cos(\zeta)\sin(\beta)\\ \cos(\beta)\sin(\zeta) & \cos(\zeta) & -\sin(\beta)\sin(\zeta)\\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\underline{r}_{SS}^{Pc} = \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

2.3.6. Blattprofilkoordinatensystem P

Das Blattprofilkoordinatensystem ist um die Anstellung ϑ zum SS-System verdreht. Der Ursprung des Systems liegt dabei im Profilschwerpunkt, der x_p in x-Richtung vom Schlag-Schwenkgelenk entfernt liegt.

$$\underline{\underline{T}}_{SSP} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)\\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\underline{r}_{Bl}^{P} = \begin{pmatrix}x_p\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

2.4. Kräfte und Momente

In diesem Abschnitt werden die am Blatt angreifenden Kräfte und Momente hergeleitet. Dabei werden die Momente in das SS-System transformiert, um so die Schlag- und Schwenkdifferentialgleichungen zu generieren. Die Kräfte werden ins Ro-System transformiert, da sich dieses System für die Trimmrechnung eignet.

2.4.1. Trägheitskräfte und -momente

Diese Momente ergeben sich aus der Massenträgheit des Blattes. Dazu wird der Massenschwerpunkt des Blattes $\underline{r}_{Bl}^{P}$ ins Inertialsystem Ro transformiert.

$$\underline{r}^{Ro} = \underline{\underline{T}}_{RoDr}\underline{\underline{T}}_{DrPc}\underline{r}_{SS}^{Pc} + \underline{\underline{T}}_{RoDr}\underline{\underline{T}}_{DrPc}\underline{\underline{T}}_{PcSS}\underline{\underline{T}}_{SSP}\underline{r}_{Bl}^{P} \tag{2.10}$$

Anschließend wird (2.10) zweimal abgeleitet. Dabei muss beachtet werden, dass die Näherung kleiner Winkel erst nach den Transformationen durchgeführt werden darf, da sonst die Coreolis-Terme wegfallen.

$$\begin{aligned}\ddot{r}_x^{Ro} = x_p \Big(&\sin(\psi)(\ddot{\beta}\beta\zeta - \ddot{\zeta} + \dot{\beta}^2\zeta + 2\dot{\beta}(\beta + \beta\dot{\zeta} + \beta_{Pc}) + \dot{\zeta}^2\zeta + 2\dot{\zeta}\zeta + \zeta)\\ &- \cos(\psi)(\ddot{\beta}(\beta + \beta_{Pc}) + \ddot{\zeta}\zeta + \dot{\beta}^2(1 - \beta\beta_{Pc}) - 2\dot{\beta}\beta\zeta(1 + \dot{\zeta}) + \dot{\zeta}^2\\ &+2\dot{\zeta} + 1 - \beta\beta_{Pc})\Big) - \cos(\psi)a\end{aligned} \tag{2.11a}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r}_y^{Ro} = -\, x_p \Big(&\sin(\psi)(\ddot{\beta}(\beta + \beta_{Pc}) + \dot{\beta}^2(1 - \beta\beta_{Pc}) - 2\dot{\beta}\beta\zeta + \ddot{\zeta}\zeta + \dot{\zeta}^2 + 2\dot{\zeta}\\ &- 2\dot{\beta}\dot{\zeta}\beta\zeta - \beta\beta_{Pc} + 1) + \cos(\psi)(\ddot{\beta}\beta\zeta - \ddot{\zeta} + 2\dot{\beta}(\beta + \beta\dot{\zeta} + \beta_{Pc})\\ &+\dot{\beta}^2\zeta + \dot{\zeta}^2\zeta + 2\dot{\zeta}\zeta + \zeta)\Big) - \sin(\psi)a\end{aligned} \tag{2.11b}$$

$$\ddot{r}_z^{Ro} = x_p \left(\ddot{\beta} - \dot{\beta}^2(\beta + \beta_{Pc}) - \beta_{Pc}(\dot{\zeta}^2 + \ddot{\zeta}\zeta + \ddot{\beta}\beta) + 2\dot{\beta}\dot{\zeta}\beta\zeta\beta_{Pc}\right) \tag{2.11c}$$

Um die Trägheitskraft zu erhalten wird (2.11) in das gewünschte Koordinatensystem transformiert und über die Blattmasse integriert. Um das Moment um das Schlag-Schwenk-Gelenk zu erhalten, muss der entsprechende Hebelarm eingerechnet werden. Es ist zu beachten, dass die Trägheit sich der Bewegung entgegensetzt.

$$\underline{M}_{Tr}^{SS} = -\int_{m_{Bl}} \underline{\underline{T}}_{SSP}\underline{r}_{Bl}^{P} \times (\underline{\underline{T}}_{RoDr}\underline{\underline{T}}_{DrPc}\underline{\underline{T}}_{PcSS})^{-1}\ddot{\underline{r}}^{Ro}\, dm \tag{2.12}$$

$$\underline{F}_{Tr}^{Ro} = -\int_{m_{Bl}} \ddot{\underline{r}}^{Ro}\, dm \tag{2.13}$$

Für die Integration über die Masse ergeben sich folgende Ersetzungen:

$$\int_{m_{Bl}} x_p^2 \, dm = I_{Bl} \tag{2.14a}$$

$$\int_{m_{Bl}} x_p \, dm = M_{Bl} \tag{2.14b}$$

Somit ergibt sich für das Trägheitsmoment:

$$\underline{M}_{Tr}^{SS} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\ M_{Bl}(\beta + \beta_{Pc}) + I_{Bl}((2\dot{\zeta} + 1)\beta_{Pc} + (2\dot{\zeta} + 1)\beta + \ddot{\beta}) & + & O(\varepsilon^3) \\ -a\ M_{Bl}\zeta + 2\ I_{Bl}(\dot{\beta}(\beta_{Pc} + \beta) - \ddot{\zeta}) & + & O(\varepsilon^3) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Und für die Trägheitskraft ergibt sich:

$$\underline{F}_{Tr}^{Ro} = \begin{pmatrix} a\ \cos(\psi) + M_{Bl}((2\dot{\zeta} + 1)\cos(\psi) + (\ddot{\zeta} - \zeta)\sin(\psi)) & + & O(\varepsilon^2) \\ a\ \sin(\psi) + M_{Bl}((\zeta - \ddot{\zeta})\cos(\psi) + (2\dot{\zeta} + 1)\sin(\psi)) & + & O(\varepsilon^2) \\ -M_{Bl}\ddot{\beta} & + & O(\varepsilon^3) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

2.4.2. Gravitationskraft und -moment

Die Gravitationskraft wird hier nur für ein einzelnes Rotorblatt aufgestellt und ergibt sich aus der Integration über die Masse. Das Moment wird aus der Multiplikation des Hebelarms $\underline{r}_{Bl}^P$ mit der Gravitation $\underline{r}_g^S$ ermittelt. Auf die Integrationen werden die Ersetzungen (2.14) angewendet.
Die Wirkung der Gravitation auf die Zelle wird in der Trimmrechnung gesondert betrachtet.

$$\underline{r}_g^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \underline{M}_g^{SS} &= \int_{m_{Bl}} \underline{\underline{T}}_{SSP}\underline{r}_{Bl}^P \times (\underline{\underline{T}}_{RoDr}\underline{\underline{T}}_{DrPc}\underline{\underline{T}}_{PcSS})^{-1}\underline{\underline{T}}_{RoS}\underline{r}_g^S dm \\ &= g \begin{pmatrix} 0 \\ M_{Bl}((1 - \beta\beta_{Pc})\cos(\alpha) - (\beta + \beta_{Pc})\sin(\alpha)\cos(\psi)) & + & O(\varepsilon^4) \\ M_{Bl}(\cos(\alpha)\zeta\beta_{Pc} + \sin(\alpha)(\sin(\psi) + \zeta\cos(\psi))) & + & O(\varepsilon^5) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\underline{F}_g^{Ro} = \int_{m_{Bl}} \underline{\underline{T}}_{RoS}\underline{r}_g^S dm = -g \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

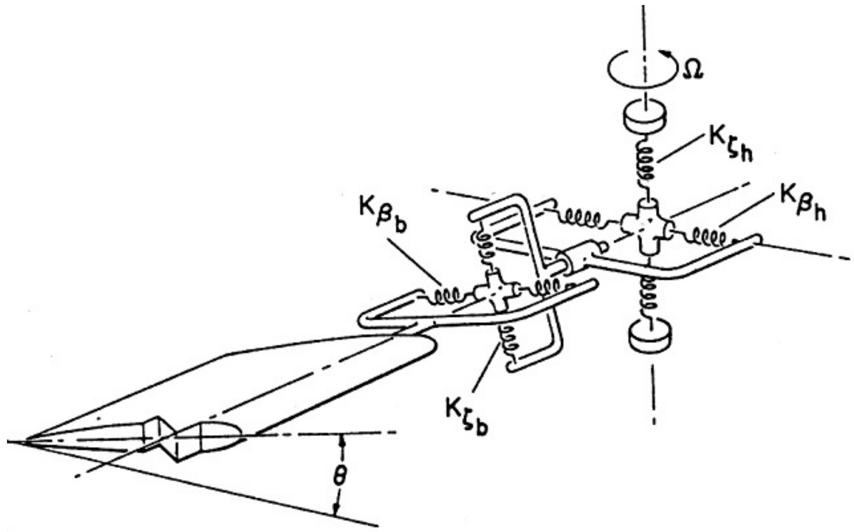


Abbildung 2.3.: Rotorblattanbindung nach Ormiston [20]

2.4.3. Momente aus der Struktur

Diese Momente werden durch die Blattanbindung bestimmt. Hier wird der Ansatz von ORMISTON [20] verwendet. Bei diesem System werden die Elastizitäten im Rotorkopf von denen im Blatt unterschieden (vgl. Abb. 2.3).

Durch den Faktor R wird das jeweilige Elastizitätsverhältnis bestimmt. Ist $R = 0$ bedeutet dies, dass die Elastizität ausschließlich im Rotorkopf liegt und das Rotorblatt steif ist. Wird der Wert zu $R = 1$ liegt die Elastizität im Rotorblatt und die Rotornabe ist steif. Durch den Blatteinstellwinkel ϑ kommt es bei der Elastizität im Rotorblatt zu einer Koppelung der β- und ζ-Anteile. Deshalb wird R auch als Koppelungsfaktor bezeichnet.

$$\Delta = 1 + R(1-R)\frac{(k_\zeta - k_\beta)^2}{k_\zeta k_\beta} \tag{2.20}$$

$$\underline{M}_{el}^{SS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\Delta}[k_\beta + R(k_\zeta - k_\beta)\sin(\vartheta)^2] + \frac{R\zeta}{2\Delta}(k_\zeta - k_\beta)\sin(2\vartheta) \\ -\frac{\zeta}{\Delta}[k_\zeta - R(k_\zeta - k_\beta)\sin(\vartheta)^2] - \frac{R\beta}{2\Delta}(k_\zeta - k_\beta)\sin(2\vartheta) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

mit $k_\beta = \frac{k_{\beta b}k_{\beta h}}{k_{\beta b}+k_{\beta h}}$, $k_\zeta = \frac{k_{\zeta b}k_{\zeta h}}{k_{\zeta b}+k_{\zeta h}}$ und $R = \frac{\frac{1}{k_{\beta b}} - \frac{1}{k_{\zeta b}}}{(\frac{1}{k_{\beta b}}+\frac{1}{k_{\beta h}})-(\frac{1}{k_{\zeta b}}+\frac{1}{k_{\zeta h}})}$.

2.4.4. Aerodynamische Kräfte und Momente

Als Grundlage für dieses System wird eine simple Beschreibung der Aerodynamik herangezogen. Die Herleitung erfolgt im SS-System. Dieser Ansatz wird auch von PETERS [22] und KOOPMANN [17] verwendet.

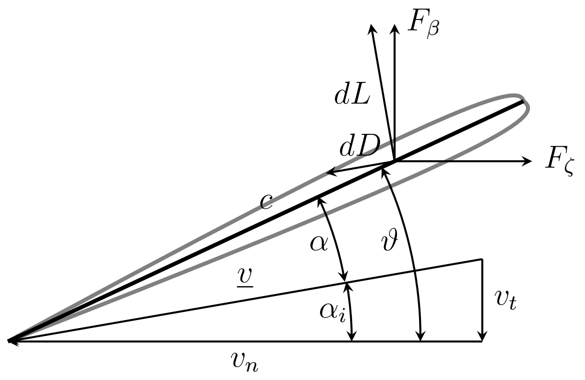


Abbildung 2.4.: Anströmung am Blattprofil

Dabei wird der Widerstand entgegen und der Auftrieb senkrecht zur Anströmung angenommen. Die Anströmgeschwindigkeit v wird dabei durch die Komponenten in senkrechter und horizontaler Richtung beschrieben.

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_n^2} \tag{2.22}$$

Der induzierte Anstellwinkel α_i wird ebenfalls durch die horizontale und senkrechte Komponente der Anströmgeschwindigkeiten definiert.

$$\alpha_i = \arctan(\frac{v_n}{v_t}) \tag{2.23}$$

Der Anstellwinkel α setzt sich aus dem induzierten Anstellwinkel α_i und der Blatteinstellung ϑ zusammen.

$$\alpha = \vartheta - \alpha_i \tag{2.24}$$

Der Auftrieb ist differentiell durch

$$dL = \frac{\rho c C_{a\alpha}}{2} v^2 \sin(\alpha) dx \tag{2.25}$$

geben. Der Widerstand ist durch

$$dD = \frac{\rho c C_{d0}}{2} v^2 dx \tag{2.26}$$

gegeben. Mit (2.25) und (2.26) können die differentiellen Kräfte in y- und z-Richtung hergeleitet werden.

$$\begin{aligned} dF_z &= dL \cos(\alpha_i) - dD \sin(\alpha_i) \\ dF_y &= -dL \sin(\alpha_i) - dD \cos(\alpha_i) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Durch Einsetzen erhält man die differentiellen Kraftgleichungen für Schlagen und Schwenken. Dabei wird die Vereinfachung

$$\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\sqrt{1+\frac{v_n^2}{v_t^2}} \approx \frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\left(1+\frac{v_n^2}{2v_t^2}\right) \tag{2.28}$$

angewendet sowie die Lock-Zahl γ eingeführt. In die Lock-Zahl gehen die Größen zur Normierung ein.

$$\gamma = \frac{\overline{\rho} C_{a\alpha} \overline{c}\, \overline{R}^4}{\overline{I}_{Bl}} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} dF_\beta &= \frac{\gamma}{2}\left[v_t^2 \sin(\vartheta) - v_t v_n \left(\cos(\vartheta) + \frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\right)\right] dx_p \\ dF_\zeta &= \frac{\gamma}{2}\left[v_n^2 \cos(\vartheta) - v_t v_n \sin(\vartheta) - v_t^2 \frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\right] dx_p \end{aligned} \tag{2.30}$$

Um daraus die Kräfte und Momente zu berechnen, müssen zunächst die Geschwindigkeitskomponenten hergeleitet werden. Dazu wird die Drehbewegung mit dem Vortriebs- und dem Rotordurchflussgrad überlagert.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_t \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} - \underline{\dot{r}}^{SS} \\ &= \begin{pmatrix} \mu(\cos(\psi) - \zeta \sin(\psi)) & + & O(\varepsilon^2) \\ -(x_p(1+\dot{\zeta}) + \mu(\zeta\cos(\psi) + \sin(\psi)) + a) & + & O(\varepsilon^2) \\ -(\lambda + \mu\beta(\cos(\psi) - \zeta\sin(\psi)) + x_p(\zeta\beta_{Pc} + \dot{\beta}) + \mu\beta_{Pc}) & + & O(\varepsilon^3) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Der Durchflussgrad λ ist mit

$$\lambda = \mu\tan(\alpha) + \lambda_{i0}(1 + k_c\cos(\psi) + k_s\sin(\psi)) \tag{2.32}$$

gegeben.
Die Kräfte in Schlag- und Schwenkrichtung ergeben sich aus der Integration über die aerodynamische Wirklänge.

$$F_\beta = \int_{an}^{B} dF_\beta \tag{2.33a}$$

$$F_\zeta = \int_{an}^{B} dF_\zeta \tag{2.33b}$$

Anschließend werden die Kräfte in mitdrehende Rotorsystem Dr transformiert.

$$\underline{F}_{aero}^{Ro} = \underline{\underline{T}}_{RoDr}\underline{\underline{T}}_{DrPc}\underline{\underline{T}}_{PcSS}\begin{pmatrix} 0 \\ F_\zeta \\ F_\beta \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Die ausgeschriebene Form findet sich im Anhang (vgl. (A.1)). Die Momente in Schlag- und Schwenkrichtung ergeben sich aus der der Multiplikation mit x_p und der anschließenden Integration über die aerodynamische Wirklänge.

$$M_\beta = -\int_{an}^{B} x_p \, dF_\beta \tag{2.35a}$$

$$M_\zeta = \int_{an}^{B} x_p \, dF_\zeta \tag{2.35b}$$

Für das System werden die Momente zu:

$$\underline{M}_{aero}^{SS} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_\beta \\ M_\zeta \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Die ausgeschriebene Form findet sich ebenfalls im Anhang (vgl. (A.2)).

2.4.5. Moment des Schwenkdämpfers

An dieser Stelle wird zunächst nur ein einfacher viskoser Dämpfer simuliert. Später sollen an dieser Stelle kompliziertere Modelle für Elastomer- und Fluidelastikdämpfer implementiert werden. Um ein System ohne Dämpfer zu simulieren, werden alle Parameter dieses Terms zu Null gesetzt.

$$\underline{M}_{Dae}^{SS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d\dot{\zeta} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

2.5. Trimmrechnung

Mit der Trimmrechnung wird der stationäre Betriebspunkt bestimmt.

2.5.1. Zellengleichungen

Da die Momentengleichungen des Rotorsystems nicht ausreichen um alle Variablen bestimmen zu können, müssen zusätzliche Gleichungen aufgestellt werden. Dafür werden das Kraft- und Momentengleichgewicht um den Rotorkopf mit dem Einfluss der Zelle aufgestellt.
Zunächst werden die Blattkräfte über alle Blätter aufsummiert. Dazu muss ψ in den Gleichungen mit $\psi + \frac{2\pi}{N_{Bl}}(k-1)$ ersetzt werden, wobei N_{Bl} für die Anzahl der Blätter und k für die Nummer des Blattes steht.

Somit ergibt sich die gesamte Blattkraft zu:

$$\underline{F}_{Bl}^{Ro} = \sum_{k=1}^{N_{Bl}} (\underline{F}_{aero,k}^{Ro} + \underline{F}_{Tr,k}^{Ro} + \underline{F}_{g,k}^{Ro}) \tag{2.38}$$

Die Blattmomente ergeben sich aus dem Hebelarm und der Blattkraft, sowie der Einflüsse aus den elastischen und aus den dämpfenden Momenten:

$$\underline{M}_{Bl}^{Ro} = \sum_{k=1}^{N_{Bl}} (\underline{r}_{SS,k}^{Ro} \times \underline{F}_{Bl,k}^{Ro} - \underline{M}_{el,k}^{Ro} - \underline{M}_{Dae,k}^{Ro}) \tag{2.39}$$

Zu beachten ist, dass die Momente der Elastizität und des Dämpfers zunächst ins nicht-drehende Rotorsystem Ro überführt werden.
Als Einfluss der Zelle werden deren schädlicher Widerstand sowie deren Gewicht herangezogen. Die Gravitationskraft der Zelle ergibt sich zu:

$$\underline{F}_{gZ}^{Ro} = \underline{\underline{T}}_{RoS} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_Z g \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Der Zellenwiderstand W_Z ergibt sich unter Berücksichtigung der Normierung $\overline{f} = \frac{f_{dZ} C_{dZ}}{\bar{c}\ R}$ zu:

$$W_Z = \frac{1}{2} I_{Bl} \gamma f_{dZ} \frac{C_{dZ}}{C_{a\alpha}} \mu^2 \tag{2.41}$$

Die Widerstandskraft der Zelle ergibt sich somit zu:

$$\underline{F}_{WZ}^{Ro} = \underline{\underline{T}}_{RoS} \begin{pmatrix} W_Z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

Der Hebelarm der Zelle zum Rotorkopf ist $\underline{r}_Z^{Ro} = (0, 0, -h_Z)^T$. Mit diesem können nun die Momente der Zelle berechnet werden.

$$\underline{M}_{gZ}^{Ro} = \underline{r}_Z^{Ro} \times \underline{F}_{gZ}^{Ro} \tag{2.43}$$

$$\underline{M}_{WZ}^{Ro} = \underline{r}_Z^{Ro} \times \underline{F}_{WZ}^{Ro} \tag{2.44}$$

Aus (2.38), (2.40) und (2.42) ergibt sich das gesamte Kräftegleichgewicht um den Rotorkopf.

$$\underline{F}_Z^{Ro} = \underline{F}_{Bl}^{Ro} + \underline{F}_{gZ}^{Ro} + \underline{F}_{WZ}^{Ro} = \begin{pmatrix} X_Z^{Ro} \\ Y_Z^{Ro} \\ Z_Z^{Ro} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

In diesem System wird kein Rollwinkel angenommen, weshalb hier ohne die Seitenkraft Y_Z^{Ro} gerechnet werden kann.
Ebenso ergibt sich das Momentengleichgewicht um den Rotorkopf aus (2.39), (2.43) und (2.44).

$$\underline{M}_Z^{Ro} = \underline{M}_{Bl}^{Ro} + \underline{M}_{gZ}^{Ro} + \underline{M}_{WZ}^{Ro} = \begin{pmatrix} L_Z^{Ro} \\ M_Z^{Ro} \\ N_Z^{Ro} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Da auch der Gierwinkel zu Null angenommen wird, kann das Giermoment N_Z^{Ro} für die weiteren Berechnungen außer Acht gelassen werden.

2.5.2. Abwindgleichung

Außer den Zellengleichungen wird noch die Abwindgleichung zur Lösung des gesamten Trimmgleichungssystems benötigt. Diese ergibt sich aus der Gleichung für den induzierten Abwind im Schwebeflug.

$$\lambda_{i0} = \frac{C_F}{2\sqrt{\mu^2 + (\mu\tan(\alpha) + \lambda_{i0})^2}} \tag{2.47}$$

Der Schubkoeffizient wird dabei mit

$$C_F = \frac{\sigma C_{a\alpha}}{I_{Bl}\gamma N_{Bl}} \sum_{k=1}^{N_{Bl}} Z_{aero,k}^{Ro} \tag{2.48}$$

berechnet. Somit wird die Abwindgleichung zu:

$$\lambda = 2\lambda_{i0}\sqrt{\mu^2 + (\mu\tan(\alpha) + \lambda_{i0})^2} - C_F = 0 \tag{2.49}$$

Die Koeffizienten der ersten Harmonischen für den induzierten Abwind k_c und k_s werden nach DREES [13] berechnet.

$$k_c = \frac{4}{3}\left[(1 - 1,8\mu^2)\sqrt{1 + \left(\frac{\mu\tan(\alpha) + \lambda_{i0}}{\mu}\right)^2} - \frac{\mu\tan(\alpha) + \lambda_{i0}}{\mu}\right] \tag{2.50}$$

$$k_s = -2\mu \tag{2.51}$$

Dabei gilt für einen Fortschrittsgrad von $\mu = 0$:

$$\lim_{\mu\to 0} k_c = 0 \tag{2.52}$$

2.5.3. Rotorblattgleichungen

Die Rotorblattgleichungen beschreiben die Bewegungen eines einzelnen Rotorblattes. Da mit diesen Gleichungen die Schlagauslenkung β und die Schwenkauslenkung ζ sowie derer Derivate bestimmt werden sollen, bietet es sich an, diese im Schlag-Schwenkgelenk anzusiedeln. Somit ergeben sich die Rotorblattgleichungen zu:

$$\underline{M}^{SS}_{ges} = \underline{M}^{SS}_{tr} + \underline{M}^{SS}_{g} + \underline{M}^{SS}_{el} + \underline{M}^{SS}_{aero} + \underline{M}^{SS}_{dae} = \begin{pmatrix} L^{SS} \\ M^{SS} \\ N^{SS} \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

Da hier ein System ohne Torsionsfreiheitsgrad betrachtet wird, ist die Gleichung L^{SS} für die weitere Betrachtung nicht von Bedeutung.

2.5.4. Harmonische Balance

Die Winkelgrößen β_{tr}, ζ_{tr} und ϑ_{tr} werden durch eine FOURIER-Reihe in Abhängigkeit von ψ angenähert. Hier reicht die Annäherung an die erste Harmonische aus, weshalb die FOURIER-Reihe nach dem ersten Glied abgebrochen wird.

$$\begin{aligned}
\beta_{tr} &= \beta_0 & +\beta_s \sin(\psi) & \quad +\beta_c \cos(\psi) \\
\dot{\beta}_{tr} &= & \beta_s \cos(\psi) & \quad -\beta_c \sin(\psi) \\
\ddot{\beta}_{tr} &= & -\beta_s \sin(\psi) & \quad -\beta_c \cos(\psi) \\
\zeta_{tr} &= \zeta_0 & +\zeta_s \sin(\psi) & \quad +\zeta_c \cos(\psi) \\
\dot{\zeta}_{tr} &= & \zeta_s \cos(\psi) & \quad -\zeta_c \sin(\psi) \\
\ddot{\zeta}_{tr} &= & -\zeta_s \sin(\psi) & \quad -\zeta_c \cos(\psi) \\
\vartheta_{tr} &= \vartheta_0 & +\vartheta_s \sin(\psi) & \quad +\vartheta_c \cos(\psi) \\
\dot{\vartheta}_{tr} &= & \vartheta_s \cos(\psi) & \quad -\vartheta_c \sin(\psi) \\
\ddot{\vartheta}_{tr} &= & -\vartheta_s \sin(\psi) & \quad -\vartheta_c \cos(\psi)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Ebenfalls werden die Rotorblatt-, Zellen und Abwindgleichungen als FOURIER-Reihe mit Abbruch nach dem linearen Glied aufgebaut. Dabei sind für Zellen- und Abwindgleichungen die konstanten Anteile ausreichend, da somit genügend Gleichungen vorhanden sind. Insgesamt ergeben sich so elf Gleichungen für die elf unbekannten Größen $\beta_0, \beta_s, \beta_c, \zeta_0, \zeta_s, \zeta_c, \vartheta_0, \vartheta_s, \vartheta_c, \lambda_{i0}$ und α.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_{ges}^{SS}\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N_{ges}^{SS}\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M_{ges}^{SS}\sin(\psi)\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} N_{ges}^{SS}\sin(\psi)\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M_{ges}^{SS}\cos(\psi)\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} N_{ges}^{SS}\cos(\psi)\,d\psi &= 0 \qquad (2.55)\\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_Z^{Ro}\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_Z^{Ro}\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_Z^{Ro}\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_Z^{Ro}\,d\psi &= 0\\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda\,d\psi &= 0
\end{aligned}$$

2.5.5. Gauß-Newton-Verfahren

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird ein ABLEITUNGSFREIES GAUSS-NEWTON-VERFAHREN verwendet (vgl. [5]). Dabei handelt es sich um ein numerisches Verfahren, durch das das Ergebnis in mehreren Iterationsschritten angenähert wird. Das Verfahren wird auf ein System der Form $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$ angewendet. Zur Berechnung wird das Gleichungssystem nach TAYLOR mit dem Abbruch nach dem linearen Glied entwickelt:

$$F_i(x_1^{(\mu)},\dots,x_n^{(\mu)}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta F_i}{\delta x_k}(x_1^{(\mu)},\dots,x_n^{(\mu)})(x_k^{(\mu+1)} - x_k^{(\mu)}) = 0 \qquad (2.56)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n;\ \mu = 0, 1, 2, ...)$$

Die Größen i und k beschreiben dabei die Dimension der Gleichungen bzw. der Variablen. Der Exponent (μ) beschreibt den jeweiligen Iterationsschritt. Die partiellen Ableitungen ergeben eine JACOBI-Matrix.

$$\underline{\underline{F}}'(\underline{x}^{(\mu)}) = \left(\frac{\delta F_i}{\delta x_k}(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}) \right) \tag{2.57}$$

Die Elemente der JACOBI-Matrix werden durch Differenzenquotienten angenähert.

$$\begin{aligned} &\frac{\delta F_i}{\delta x_k}(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_k^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}) \approx \\ &\qquad \frac{1}{h_k^{(\mu)}} \Big[F_i(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_{k-1}^{(\mu)}, x_k^{(\mu)} + h_k^{(\mu)}, x_{k+1}^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}) \\ &\qquad - F_i(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_k^{\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}) \Big] \\ &\qquad\qquad (i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n; \mu = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Als Schrittweite $h_k^{(\mu)}$ kann bei numerischer Berechnung aus die aktuelle Variablengröße in Verbindung mit der jeweiligen Maschinengenauigkeit ϵ verwendet werden:

$$h_k^{(\mu)} = \sqrt{\epsilon} \left(|x_k^{(\mu)}| + 1 \right) \tag{2.59}$$

Durch Umformen von (2.56) nach $x_k^{(\mu+1)}$ und Einführen der Matrixschreibweise lassen sich die Variablenwerte des nächsten Iterationsschrittes berechnen:

$$\underline{x}^{(\mu+1)} = \underline{x}^{(\mu)} + \underline{\underline{F}}(\underline{x^{(\mu)}})\underline{F}(\underline{x^{(\mu)}}) \tag{2.60}$$

Die Iteration wird wiederholt bis die Änderung relativ sehr klein werden.

2.5.6. Anfangswerte

Die für die Iteration benötigten Anfangswerte werden aus dem Schwebeflug berechnet. Dabei können die harmonischen Anteile, also die Anteile mit Abhängigkeit von ψ, sowie der Rotoranstellwinkel α zu Null gesetzt werden.

Induzierter Abwind λ_{i0}

Für den Abwind im Schwebeflug gilt:

$$\lambda_{i0} = \frac{\overline{\omega}_{i0}}{\overline{R}\,\overline{\Omega}} = \sqrt{\frac{\overline{T}}{2\pi\overline{\rho}\,\overline{R}^2}} \frac{1}{\overline{R}\,\overline{\Omega}} \tag{2.61}$$

Für den Schub $\overline{T}$ kann im Schwebeflug $\overline{T} = \overline{m}_Z\overline{g}$ angenommen werden und somit ergibt sich der Durchfluss zu:

$$\lambda_{i0} = \sqrt{\frac{\overline{m}_Z g}{2\pi\overline{\rho}\,\overline{R}^3}} \tag{2.62}$$

Kollektiver Steuerwinkel ϑ_0

Gemäß der Blattelemententheorie ergibt sich der Zusammenhang von Schub $\overline{T}$ und dem kollektivem Anstellwinkel ϑ_0 [13]:

$$\overline{T} = N_{Bl} C_{a\alpha} \frac{\overline{\rho}}{2} \overline{\Omega}^2 \overline{c} \vartheta_0 \frac{\overline{R}^3}{3} \tag{2.63}$$

Wiederum kann für den Schwebeflug die Näherung $\overline{T} = \overline{m}_Z \overline{g}$ angenommen werden. Mit dieser Näherung und dem Auflösen von (2.63) nach ϑ_0 ergibt sich für den kollektiven Blattanstellwinkel:

$$\vartheta_0 = \frac{6 \overline{m}_Z g}{N_{Bl} C_{a\alpha} \overline{\rho}\, \overline{c}\, \overline{R}^2} \tag{2.64}$$

Kollektiver Schlagwinkel β_0

Die Gleichungen für die entkoppelte, stationäre Schlagbewegung lautet:

$$(I_{Bl} + a M_{Bl} + k_y)\beta_0 = x_{\beta 0} \frac{T}{N_{Bl}} = x_{\beta 0} \frac{m_z g}{N_{Bl}} \tag{2.65}$$

Der Auftrieb soll, vereinfacht betrachtet, bei etwa $0.7\overline{R}$ am Rotorblatt angreifen. Somit ergibt sich der Hebelarm $x_{\beta 0}$ zum Schlag-Schwenkgelenk zu:

$$x_{\beta 0} = \frac{0.7\overline{R} - \overline{a}}{\overline{R}} \tag{2.66}$$

Durch Umformen und Einsetzen von (2.66) in (2.65) erhält man:

$$\beta_0 = \frac{(0.7 - a) m_z g}{N_{Bl}(I_{Bl} + a M_{Bl} + k_y)} \tag{2.67}$$

Die Steifigkeit k_y wird weiter unten hergeleitet.

Kollektiver Schwenkwinkel ζ_0

Ähnlich zur Schlagbewegung ergibt sich die stationäre Schwenkdifferentialgleichung zu:

$$(k_z + a M_{Bl})\zeta_0 = -x_{\zeta 0} W_{\zeta 0} \tag{2.68}$$

Der Widerstand $W_{\zeta 0}$ greift vereinfacht am selben Punkt wie der Auftrieb an. Dabei wirkt er in negative y-Richtung. Das dimensionslose Widerstandsmoment ergibt sich zu:

$$x_{\zeta 0} W_{\zeta 0} = (0.7 - a) \frac{\overline{\rho} C_{d0} (0.7\overline{R})^2 \overline{c}}{2\overline{m}_{Bl}} \tag{2.69}$$

Aus (2.68) und (2.69) folgt:

$$\zeta_0 = -\frac{(0.7 - a)\overline{\rho} C_{d0} (0.7\overline{R})^2 \overline{c}}{2(k_z + aM_{Bl})\overline{m}_{Bl}} \tag{2.70}$$

Steifigkeiten

Die gesuchten Steifigkeiten werden durch die Momentenbilanz der entkoppelten Elastizitäts- und Trägheitsmomente ermittelt.

$$I_\beta \ddot{\beta} + \underbrace{(I_{Bl} + aM_{Bl} + k_y)}_{=I_{Bl}\omega_\beta^2} \beta = 0 \tag{2.71}$$

$$I_\zeta \ddot{\zeta} + \underbrace{(aM_{Bl} + k_z)}_{=I_{Bl}\omega_\zeta^2} \zeta = 0 \tag{2.72}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Schlageigenfrequenz ω_β^2 und die Schwenkeigenfrequenz ω_ζ^2.

$$\omega_\beta^2 = 1 + a\frac{M_{Bl}}{I_{Bl}} + \frac{k_y}{I_{Bl}} \tag{2.73}$$

$$\omega_\zeta^2 = a\frac{M_{Bl}}{I_{Bl}} + \frac{k_z}{I_{Bl}} \tag{2.74}$$

Durch Umformen kann man nun die Steifigkeiten berechnen.

$$k_y = I_{Bl}(\omega_\beta^2 - 1) - aM_{Bl} \tag{2.75}$$

$$k_z = I_{Bl}\omega_\zeta^2 - aM_{Bl} \tag{2.76}$$

2.6. Stabilitätsrechnung

Um die Stabilität der auftretenden Schwingungen zu bestimmen, muss das System zunächst linearisiert werden.

2.6.1. Linearisierung

Die Trimmergebnisse liefern dazu den ersten Schritt, indem der Gleichgewichtszustand ermittelt wurde. Auf dieses Gleichgewicht werden nun Störungen in Abhängigkeit von β und ζ aufgebracht. θ_β und θ_ζ sind Koppelungsgrößen zwischen Blatteinstellwinkel und Schlag- bzw. Schwenkwinkel. Diese Größen werden hier nur für Vergleichszwecke mit PETERS eingeführt (vgl. Kap. 4.1) und nicht weiter verwendet.

$$
\begin{aligned}
\beta &= \beta_{tr} + \Delta\beta \\
\dot{\beta} &= \dot{\beta}_{tr} + \Delta\dot{\beta} \\
\ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_{tr} + \Delta\ddot{\beta} \\
\zeta &= \zeta_{tr} + \Delta\zeta \\
\dot{\zeta} &= \dot{\zeta}_{tr} + \Delta\dot{\zeta} \\
\ddot{\zeta} &= \ddot{\zeta}_{tr} + \Delta\ddot{\zeta} \\
\vartheta &= \vartheta_{tr} + \theta_\beta\Delta\beta + \theta_\zeta\Delta\zeta \\
\dot{\vartheta} &= \dot{\vartheta}_{tr} + \theta_\beta\Delta\dot{\beta} + \theta_\zeta\Delta\dot{\zeta} \\
\ddot{\vartheta} &= \ddot{\vartheta}_{tr} + \theta_\beta\Delta\ddot{\beta} + \theta_\zeta\Delta\ddot{\zeta}
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

Nach dem Einsetzen werden die Produkte der Störungen als sehr klein angenommen und vernachlässigt.

2.6.2. Umformung in Differentialgleichung 1. Ordnung

Die Rotorblattgleichungen werden in ein System 1. Ordnung umgewandelt:

$$
\underline{\underline{G}}(\psi)\underline{\dot{x}} + \underline{\underline{D}}(\psi)\underline{x} = \underline{0} \tag{2.78}
$$

Dabei ist $\underline{x} = (\Delta\dot{\beta}, \Delta\dot{\zeta}, \Delta\beta, \Delta\zeta)^T$. Somit ergibt sich:

$$
\underline{\underline{G}}(\psi) = \begin{pmatrix} \frac{\delta M_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\ddot{\beta}} & \frac{\delta M_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\ddot{\zeta}} & 0 & 0 \\ \frac{\delta N_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\ddot{\beta}} & \frac{\delta N_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\ddot{\zeta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.79}
$$

Die ausgeschriebene Form ist im Anhang aufgeführt (vgl. (A.3)). Ebenso ergibt sich:

$$
\underline{\underline{D}}(\psi) = \begin{pmatrix} \frac{\delta M_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\dot{\beta}} & \frac{\delta M_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\dot{\zeta}} & \frac{\delta M_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\beta} & \frac{\delta M_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\zeta} \\ \frac{\delta N_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\dot{\beta}} & \frac{\delta N_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\dot{\zeta}} & \frac{\delta N_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\beta} & \frac{\delta N_{ges}^{SS}}{\delta\Delta\zeta} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.80}
$$

Auch diese Matrix ist im Anhang aufgelöst (vgl. (A.4)). Durch auflösen von (2.78) nach $\underline{\dot{x}}$ herhält man die Zustandsraumdarstellung.

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}(\psi)\underline{x} \tag{2.81}$$

Dabei berechnet sich die Systemmatrix $\underline{\underline{A}}(\psi)$ wie folgt:

$$\underline{\underline{A}}(\psi) = -\underline{\underline{G}}(\psi)^{-1}\underline{\underline{D}}(\psi) \tag{2.82}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix geben Auskunft über die Stabilität des Systems. Durch den Fortschrittsgrad μ entstehen Kräfte und Momente, die abhängig vom Umlaufwinkel ψ sind. Da die Systemmatrix somit eine periodische Abhängigkeit enthält, können die Eigenwerte nicht einfach berechnet werden. Einen Lösungsansatz für dieses Problem bietet die *Theorie von Floquet*.

2.6.3. Transitionsmatrix

Ein Gleichungssystem der Form $\dot{x} = ax$ wird allgemein mit dem Ansatz $e^{\lambda t}$ gelöst. Daraus ergibt sich für diesen Fall in Matrixschreibweise die spezielle Lösung:

$$\underline{\dot{x}}(\psi) = e^{\underline{\underline{A}}(\psi-\psi_0)}\underline{x}_0 \tag{2.83}$$

Die e-Funktion lässt sich in die sog. Transitionsmatrix umformen.

$$\underline{\underline{\Phi}}(\psi, \psi_0) = e^{\underline{\underline{A}}(\psi-\psi_0)} \tag{2.84}$$

Da für den Fall $\psi = \psi_0$ gilt

$$\underline{\underline{\Phi}}(\psi_0, \psi_0) = e^{\underline{\underline{A}}(\psi_0-\psi_0)} = \underline{\underline{E}} \tag{2.85}$$

ist dies eine besondere Fundamentalmatrix. Somit lässt sich das System umformen nach:

$$\underline{\underline{\dot{\Phi}}}(\psi, \psi_0) = \underline{\underline{A}}(\psi)\underline{\underline{\Phi}}(\psi, \psi_0) \tag{2.86}$$

Für eine 2π-periodische Matrix $\underline{\underline{A}}$ ergibt sich somit:

$$\underline{\underline{\dot{\Phi}}}(\psi + 2\pi, \psi_0) = \underline{\underline{A}}(\psi + 2\pi)\underline{\underline{\Phi}}(\psi + 2\pi, \psi_0) = \underline{\underline{A}}(\psi)\underline{\underline{\Phi}}(\psi + 2\pi, \psi_0) \tag{2.87}$$

Dies bedeutet, dass eine konstante Matrix $\underline{\underline{\Phi}}^*$ existiert, für die gilt:

$$\underline{\underline{\Phi}}(\psi + 2\pi, \psi_0) = \underline{\underline{\Phi}}(\psi, \psi_0)\underline{\underline{\Phi}}^* \tag{2.88}$$

Diese Matrix $\underline{\underline{\Phi}}^*$ wird als Monodromie-Matrix bezeichnet. [16, 17, 28]

2.6.4. Monodromie-Matrix

Die Monodromie-Matrix $\underline{\underline{\Phi}}^*$ wird durch die numerische Integration über eine Periode der homogenen Gleichung bestimmt. Geeignet dazu ist z.B. das Verfahren nach RUNGE-KUTTA. Dabei wird der Startwert ψ_0 zu Null gesetzt. Dies ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich. Somit ergibt sich für eine beliebige Fundamentallösung $\underline{\phi}_i$:

$$\dot{\underline{\phi}}_i(\psi, 0) = \underline{\underline{A}}(\psi)\underline{\phi}_i(\psi, 0) \tag{2.89}$$

Als Startwert wird der i-te Einheitsvektor eingesetzt, bei denen der i-te Eintrag eins und alle anderen Einträge Null betragen. Die Lösung dieser Integration entspricht einem Spaltenvektor der Monodromie-Matrix.

$$\underline{\phi}_i^* = \underline{\phi}_i(2\pi, 0) \tag{2.90}$$

Die Monodromie-Matrix ergibt sich nun aus der Kombination der Spaltenvektoren $\underline{\phi}_i^*$.

$$\underline{\underline{\phi}}^* = (\underline{\phi}_1^*, \ldots, \underline{\phi}_n^*) \tag{2.91}$$

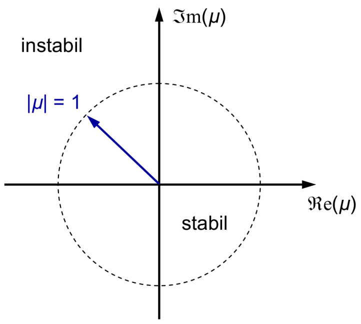
[16, 17, 28]

2.6.5. Charakteristische Multiplikatoren

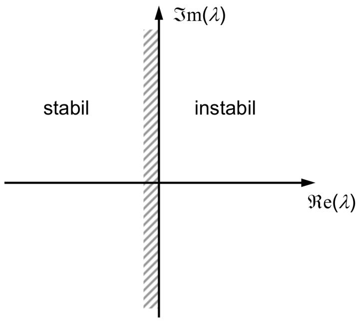
Die Eigenwerte μ_s der Monodromie-Matrix werden charakteristische Multiplikatoren genannt. Sie sind im Allgemeinen komplexe Größen. Schon diese erlauben eine Aussage über die Stabilität der Systemmatrix. Wird der Betrag der charakteristischen Multiplikatoren größer als eins, wird das System instabil. Ist der Betrag genau eins ist das System grenzstabil. Das System ist also beim Betrag kleiner eins der Multiplikatoren stabil [16, 17, 28] (vgl. Abb. 2.5(a)).

2.6.6. Charakteristische Exponenten

Nach dem REDUZIBILITÄTSSATZ VON LJAPUNOW lässt sich das System mit periodischen Koeffizienten in ein konstantes System überführen. Somit ergibt sich für die



a) μ-Ebene



b) λ-Ebene

Abbildung 2.5.: Stabilitätsgrenzen in komplexer Zahlenebene [16]

Systemmatrix $\underline{\underline{R}}$:

$$\underline{\underline{R}} = \frac{1}{T} \ln \underline{\underline{\phi}}^* = \frac{1}{2\pi} \ln \underline{\underline{\phi}}^* \tag{2.92}$$

Aus den Multiplikatoren lassen sich so die Eigenwerte λ_{si} der Matrix $\underline{\underline{R}}$ bestimmen.

$$\sigma_{si} = \Re(\lambda_{si}) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(|\mu_{si}|\right) \tag{2.93}$$

$$\omega_{si} = \Im(\lambda_{si}) = \frac{1}{2\pi}(\arctan(\frac{\Im(\mu_{si})}{\Re(\mu_{si})} \pm 2m\pi) \tag{2.94}$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

Durch die Mehrdeutigkeit der $\arctan$-Funktion kann der Imaginärteil nicht exakt bestimmt werden. Aus dem Realteil kann wieder die Stabilität bestimmt werden. Dabei gilt $\sigma_{si} \leq 0$ als stabil (vgl. Abb. 2.5(b)). Der Imaginärteil gibt die Eigenfrequenz des Systems wieder. [16, 17, 28]

3. Programmierung

Zur symbolischen Herleitung der Gleichungen wird das Open-Source Programm REDUCE verwendet. Zur numerischen Auswertung werden die Gleichungen in MATLAB geladen und berechnet.

3.1. REDUCE-Skripte

Die Skripte sind weitgehend automatisiert. Lediglich in den Dateien `F_aero.red` und `F_traeg.red` muss zur Summation über alle Blätter `PSI` mit `PSI+PHASE` ersetzt werden. Die Größe `PHASE` gibt dabei den Winkel zwischen den Rotorblättern an. Dies kann mit der Ersetzungsfunktion eines beliebigen Texteditors durchgeführt werden. Das Ordnungsschema wird mit Hilfe der `weight`-Funktion automatisch angewendet. Dazu muss im Skript den kleinen Größen ihre jeweilige Wichtung angegeben werden. Dabei gilt je kleiner die Größe, desto größer die Wichtung. Orientieren kann man sich dabei an den Exponenten von ε. Zu beachten ist dabei, dass die Funktion nur ganzzahlige Eingaben zulässt, weshalb die Exponenten entsprechend erweitert werden müssen. Die Wichtung 0 ist dabei als Standartwert gesetzt und muss deshalb nicht explizit definiert werden. Mit der Funktion `wtlevel` wird ab der Position des Aufrufes alles mit einer höheren Wichtung als der Angegebenen herhausgefilltert, d.h. die jeweilige kleinste zugelassene Größenordnung muss angegeben werden.
Die Reihenfolge, in der die Skripte ausgeführt werden müssen, kann Abbildung 3.1 entnommen werden. Dabei weist der gestrichelte Pfeil auf das automatische Generieren dieser Dateien hin. Die Skripte sind im Anhang B abgedruckt. Lediglich bei den Ergebnis-Dateien wird aufgrund von Redundanz und der teilweise enormen Größe darauf verzichtet. In `M_daempf.red` sind bereits die Modelle für Elastomer- und Fluidelastikdämpfer enthalten.

3.2. MATLAB-Dateien

Die MATLAB-Dateien werden von der zentralen Steuerdatei `rotor.m` kontrolliert. In dieser Datei werden alle Konstanten definiert und mit der `global`-Funktion allen Dateien zugänglich gemacht. In dieser Datei werden die Trimmrechnung und die Stabilitätsrechnung gestartet in Abhängigkeit des Fortschrittsgrads μ. Außerdem wird hier die Art der Ausgabeplots definiert und gesteuert.
Die Dateien `trm_glg.m` und `dphidpsi.m` enthalten die Ergebnisse der REDUCE-Skripte und machen diese so den MATLAB-Dateien zugänglich. In der Datei `trimmrechnung.m`

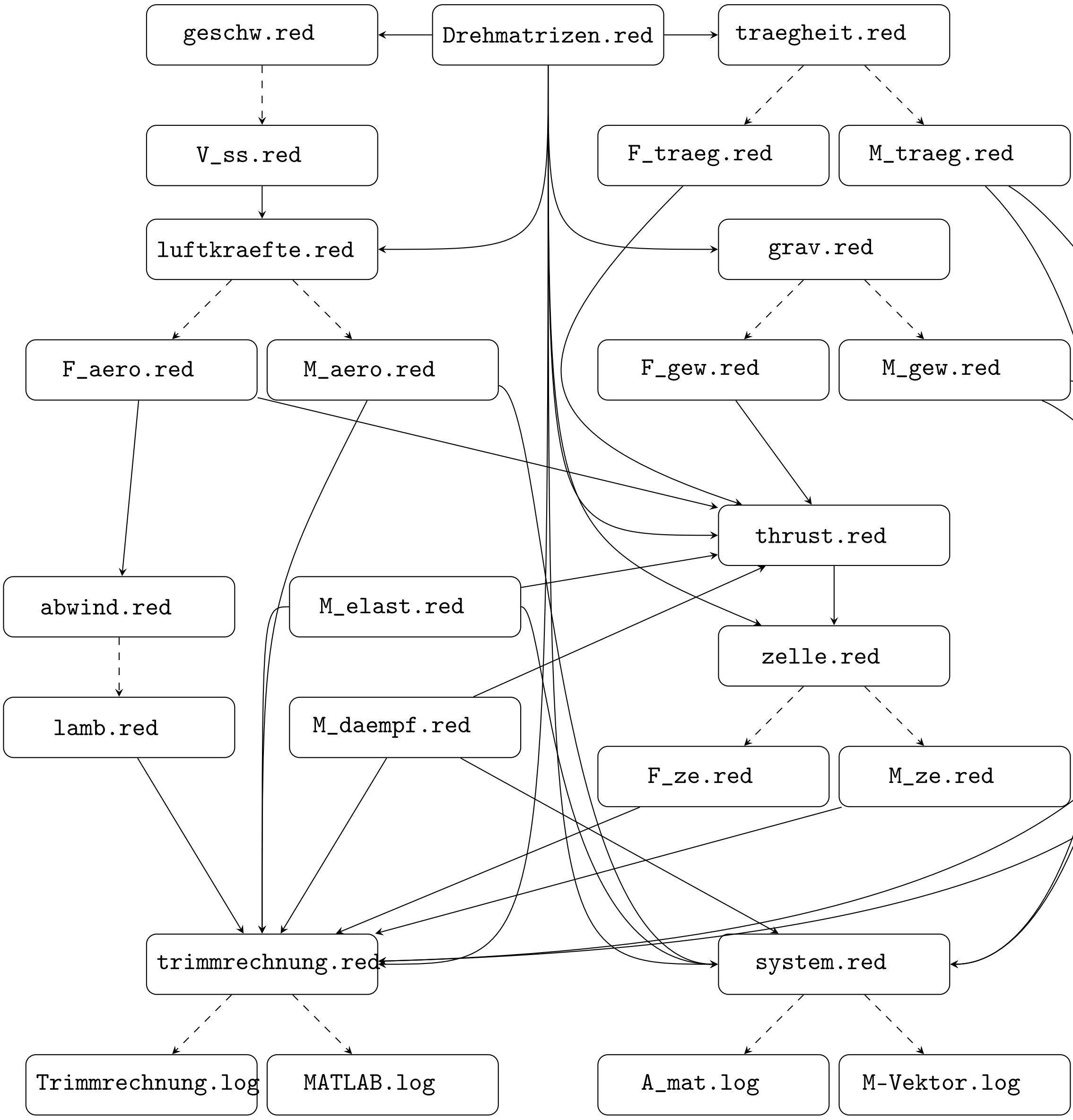


Abbildung 3.1.: Flussdiagramm REDUCE-Skripte

sind die Funktionen zur Berechnung der Trimmgrößen enthalten. Die zur Berechnung benötigten Anfangswerte werden in `rotor.m` definiert und im Funktionsaufruf an `trimmrechnung.m` übergeben. In der Datei `monodromie.m` wird die numerische Integration, die zur Ermittlung der Monodromie-Matrix benötigt wird, durchgeführt und anschließend die Monodromie-Matrix zusammengesetzt.
Die Dateien sind im Anhang C abgedruckt. Lediglich bei `trm_glg.m` und `dphidpsi.m` wird wiederum aus Gründen der Redundanz und Länge darauf verzichtet.

4. Verifikation

Um die Aussagefähigkeit dieses Systems zu bestimmen, wird das System analytisch und numerisch mit bereits veröffentlichten Gleichungssystemen verglichen.

4.1. Analytischer Vergleich

Zur analytischen Verifikation werden die Gleichungen von PETERS [22] herangezogen. In dieser Veröffentlichung sind Fehler enthalten, die durch Nachrechnen leicht zu ermittlen sind. Hier werden die korrigierten Formeln notiert. Da PETERS die selben Ansätze für Aerodynamik und Elastizität verwendet, ist zu erwarten, dass alle Terme von PETERS eine Entsprechung in dem hier hergeleiteten System finden.
Zur Linearisierung seines Systems verwendet PETERS auch den Ansatz:

$$\zeta = \overline{\zeta} + \delta\zeta, \beta = \overline{\beta} + \delta\beta, \theta = \overline{\theta} + \theta_\beta \delta\beta + \theta_\zeta \delta\zeta \tag{4.1}$$

Dabei bedeutet der Überstrich die Trimmergebnisse dieser Größen. Mit (4.1) erstellt er das vereinfachte Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \delta\ddot{\beta} \\ \delta\ddot{\zeta} \end{pmatrix} + C(\psi) \begin{pmatrix} \delta\dot{\beta} \\ \delta\dot{\zeta} \end{pmatrix} + K(\psi) \begin{pmatrix} \delta\beta \\ \delta\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

PETERS gibt die Matrixeinträge für $C(\psi)$ und $K(\psi)$ wie folgt an:

$$C_{11} = \frac{\gamma}{8}\left(1 + \frac{4}{3}\mu\sin(\psi)\right) \tag{4.3a}$$

$$C_{12} = \frac{\gamma}{8}\left(\overline{\phi} + \frac{4}{3}\mu\cos(\psi)\dot{\overline{\beta}}\right) - 2\frac{\gamma}{8}\overline{\theta}\left(1 + \frac{4}{3}\mu\sin(\psi)\right) + 2\overline{\beta} \tag{4.3b}$$

$$C_{21} = -2\frac{\gamma}{8}\left(\overline{\phi} + \frac{4}{3}\mu\cos(\psi)\overline{\beta} + \dot{\overline{\beta}}\right) + \frac{\gamma}{8}\overline{\theta}\left(1 + \frac{4}{3}\mu\sin(\psi)\right) - 2\overline{\beta} \tag{4.3c}$$

$$C_{22} = \frac{\gamma}{8}\overline{\theta}\left(\overline{\phi} + \frac{4}{3}\mu\cos(\psi)\overline{\beta} + \dot{\overline{\beta}}\right) + 2\frac{c_{d_0}}{a}\frac{\gamma}{8}\left(1 + \frac{4}{3}\mu\sin(\psi)\right) - 2\overline{\beta}\,\dot{\overline{\beta}} \tag{4.3d}$$

$$\begin{aligned} K_{11} =& P + \frac{\gamma}{8}\left(\frac{4}{3}\mu\cos(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)\cos(\psi)\right) \\ &- \frac{\gamma}{8}\theta_\beta\left(1 + \frac{8}{3}\mu\sin(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)^2\right) \end{aligned} \tag{4.4a}$$

$$
\begin{aligned}
K_{12} =& Z + \frac{\gamma}{8}\mu\cos(\psi)\left(\frac{3}{2}\overline{\phi} + \frac{4}{3}\dot{\overline{\beta}}\right) \\
&- 2\frac{\gamma}{8}\overline{\theta}\left(\frac{4}{3}\mu\cos(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)\cos(\psi)\right) \\
&+ 2\frac{\gamma}{8}\overline{\beta}\left(\mu^2\cos(\psi)^2 - \mu^2\sin(\psi)^2 - \frac{2}{3}\mu\sin(\psi)\right) \\
&- \frac{\gamma}{8}\theta_\zeta\left(1 + \frac{8}{3}\mu\sin(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.4b}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{21} =& Z - 2\dot{\overline{\beta}} - 2\frac{\gamma}{8}\mu\cos(\psi)\left(\frac{3}{2}\overline{\phi} + \frac{4}{3}\dot{\overline{\beta}}\right) \\
&+ \frac{\gamma}{8}\overline{\theta}\left(\frac{4}{3}\mu\cos(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)\cos(\psi)\right) - 4\frac{\gamma}{8}\overline{\beta}\mu^2\cos(\psi)^2 \\
&+ \frac{\gamma}{8}\theta_\beta\left[\overline{\phi}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\sin(\psi)\right) + \dot{\overline{\beta}}\left(1 + \frac{4}{3}\mu\sin(\psi)\right)\right. \\
&\left.+ \overline{\beta}\left(\frac{4}{3}\mu\cos(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)\cos(\psi)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.4c}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{22} =& W + \frac{\gamma}{8}\left[2\frac{C_{d_0}}{a}\left(\frac{4}{3}\mu\cos(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)\cos(\psi)\right)\right. \\
&+ \mu\cos(\psi)\overline{\theta}\left(\frac{3}{2}\overline{\phi} + \frac{4}{3}\dot{\overline{\beta}}\right) \\
&- \overline{\beta}\,\overline{\theta}\left(\frac{4}{3}\mu\sin(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)^2 - 2\mu^2\cos(\psi)\right) \\
&\left.+2\mu\sin(\psi)\overline{\beta}\left(\frac{3}{4}\overline{\phi} + \frac{4}{3}\dot{\overline{\beta}} + 2\mu\cos(\psi)\overline{\beta}\right)\right] \\
&+ \frac{\gamma}{8}\theta_\zeta\left[\overline{\phi}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\sin(\psi)\right)\right. \\
&+ \overline{\beta}\left(\frac{4}{3}\mu\cos(\psi) + 2\mu^2\sin(\psi)\cos(\psi)\right) \\
&\left.+\dot{\overline{\beta}}\left(1 + \frac{4}{3}\mu\sin(\psi)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.4d}
$$

Dabei gilt $\overline{\phi} = 4/3\lambda$ und $a = C_{a\alpha}$. Die Größen P, W und Z enthalten den Elastizitätsansatz nach ORMISTON:

$$
\begin{aligned}
P &= 1 + \frac{1}{\Delta}\left(\omega_\beta^2 + R(\omega_\zeta^2 - \omega_\beta^2)\sin(\vartheta)^2\right) \\
W &= \frac{1}{\Delta}\left(\omega_\zeta^2 - R(\omega_\zeta^2 - \omega_\beta^2)\sin(\vartheta)^2\right) \\
Z &= \frac{R}{2\Delta}(\omega_\zeta^2 - \omega_\beta^2)\sin(2\vartheta)
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

$\overline{R}$	:	4.9	m	N_{Bl}	:	4		I_{Bl}	:	0.333	
M_{Bl}	:	0.5		$\overline{m}_{Bl}$	:	16.4	kg	I_θ^s	:	0	
a	:	0		c	:	0.0393		y_s	:	0	
$\overline{\Omega}$	:	44.5	Hz	$C_{a\alpha}$	:	5.7		C_{d0}	:	0.01	
γ	:	5		ω_β	:	1.15		ω_ζ	:	1.4	
R	:	0		d	:	0		$\overline{\rho}$	:	1	kg/m^3
h	:	0.3		$\overline{m}_Z$	:	4006.4	kg	C_{dZ}	:	0.8	
f_{dz}	:	0.9		$\overline{g}$	:	9.81	kg/s^2				

Tabelle 4.1.: Datensatz, Konfiguration nach PETERS

Wobei gilt:

$$\Delta = 1 + R(1-R)\frac{(\omega_\zeta^2 - \omega_\beta^2)^2}{\omega_\zeta^2\omega_\beta^2}\sin\vartheta^2 \ , \ \omega_\beta^2 = \frac{k_\beta}{I_{Bl}} \text{ und } \omega_\zeta^2 = \frac{k_\zeta}{I_{Bl}} \qquad (4.6)$$

Auch PETERS vereinfacht das Gleichungssystem indem er die Produkte der Trimmgrößen vernachlässigt, soweit dies in Bezug auf den Wert 1 zulässig ist. Die Entsprechungen in diesem System finden sich in der Matrix (2.80) wieder. In der ausgeschriebenen Form im Anhang (A.4) sind die entsprechenden Terme kenntlich gemacht.
Im Vergleich zeigt sich, dass lediglich der Term $-2\overline{\beta}\,\dot{\overline{\beta}}$ in (4.3d) nicht in dem hier hergeleiteten System auftaucht. Dieser Term stammt aus den Trägheitsmomenten und lautet dort $-2\beta\dot{\beta}\dot{\zeta}$. Somit hat dieser Term die Größenordnung $O(\varepsilon^3)$ und wird bereits in (2.12) vom Ordnungsschema herausgefiltert.

4.2. Numerischer Vergleich

Um dieses System abschließend zu verifizieren, werden die numerischen Ergebnisse mit den Ergebnissen anderer Systeme verglichen.

4.2.1. PETERS

Zunächst wird wieder das System von PETERS [22] herangezogen. Dazu werden die Eingabegrößen angepasst (vgl. Tabelle 4.1).
Aufgetragen wird der negative Realteil $-\sigma_i$ über den Fortschrittsgrad μ. PETERS unterscheidet dabei wie oft in der englischsprachigen Literatur zwischen dem PROPULSIVE und dem MOMENT TRIM. Diese unterscheiden sich im schädlichen Widerstand der Zelle. Der PROPULSIVE TRIM entspricht dabei den hier beschriebenen Trimmgleichungen. Der von PETERS beschriebene Wert $\overline{f} = 0.01$ wird durch die in Tabelle 4.1

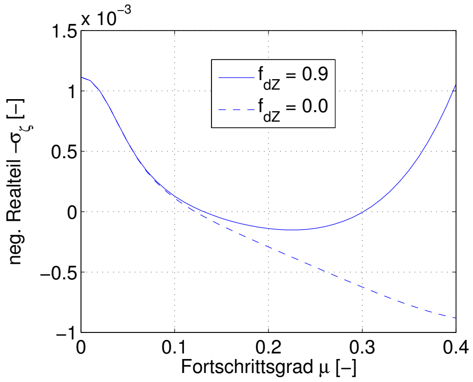


Abbildung 4.1.: Stabilität dieses Systems

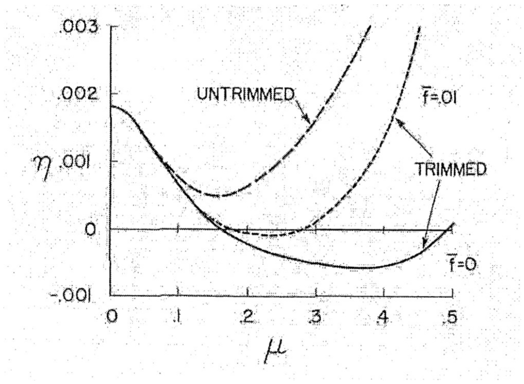


Abbildung 4.2.: Stabilität bei PETERS [22]

definierten Werte erreicht. An dieser Stelle ist zu beachten, dass PETERS die sich unterscheidende Normierung $\overline{f} = \frac{f_{dZ} C_{dZ}}{\pi \overline{R}^2}$ verwendet. Der MOMENT TRIM entspricht dem Fall, wie er im Windkanal vorliegt, d.h. die Zelle wird in einer festen Position gehalten und in eine gewünschte Lage in der Strömung gebracht. Dies entspricht einem schädlichen Widerstand $\overline{f} = 0$, was hier durch eine Widerstandsfläche $f_{dZ} = 0$ erreicht wird. Wie in Abbildungen 4.1 und 4.2 erkennbar, weisen beide System qualitativ denselben Verlauf auf. Zu beachten dabei ist, dass das hier hergeleitete System nur bis zu einem Fortschrittsgrad von $\mu = 0.4$ aufgelöst wird, während PETERS sein System bis $\mu = 0.5$ auflöst. Dies ist hier aber aufgrund der Beschränkungen des hier verwendete Trimmalgorithmus (vgl. Kap. 4.2.2) nicht möglich. Quantitativ weist das hier hergeleitete System einen etwas kleineren Betrag auf. Da PETERS' System analytisch diesem System gleicht und er die Stabilität bis $\mu = 0.5$ aufträgt, wird vermutet, dass ein Unterschied in der Trimmrechnung vorliegt. Dies kann jedoch aufgrund fehlender Angaben nicht abschließend geklärt werden.

4.2.2. TETTENBORN

Im weiteren werden die Trimmergebnisse dieses Systems mit den Trimmergebnissen von TETTENBORN [28] verglichen. Dazu werden die Systemvariablen von TETTENBORN übernommen (vgl. Tabelle 4.2). Die Trimmgrößen werden ebenfalls über den Fortschrittsgrad μ aufgetragen. Dabei wird die Auftragung bis $\mu = 0.4$ begrenzt, da die Trimmgrößen danach sehr stark anwachsen. Ab einem Fortschrittsgrad von $\mu \approx 0.44$ nehmen die Trimmgrößen unsinnige Werte an. Beim Übereinanderlegen der Trimmgrößen dieses Systems mit den Ergebnissen TETTENBORNs fällt auf, dass nur sehr geringe Unterschiede zwischen den Systemen existieren.

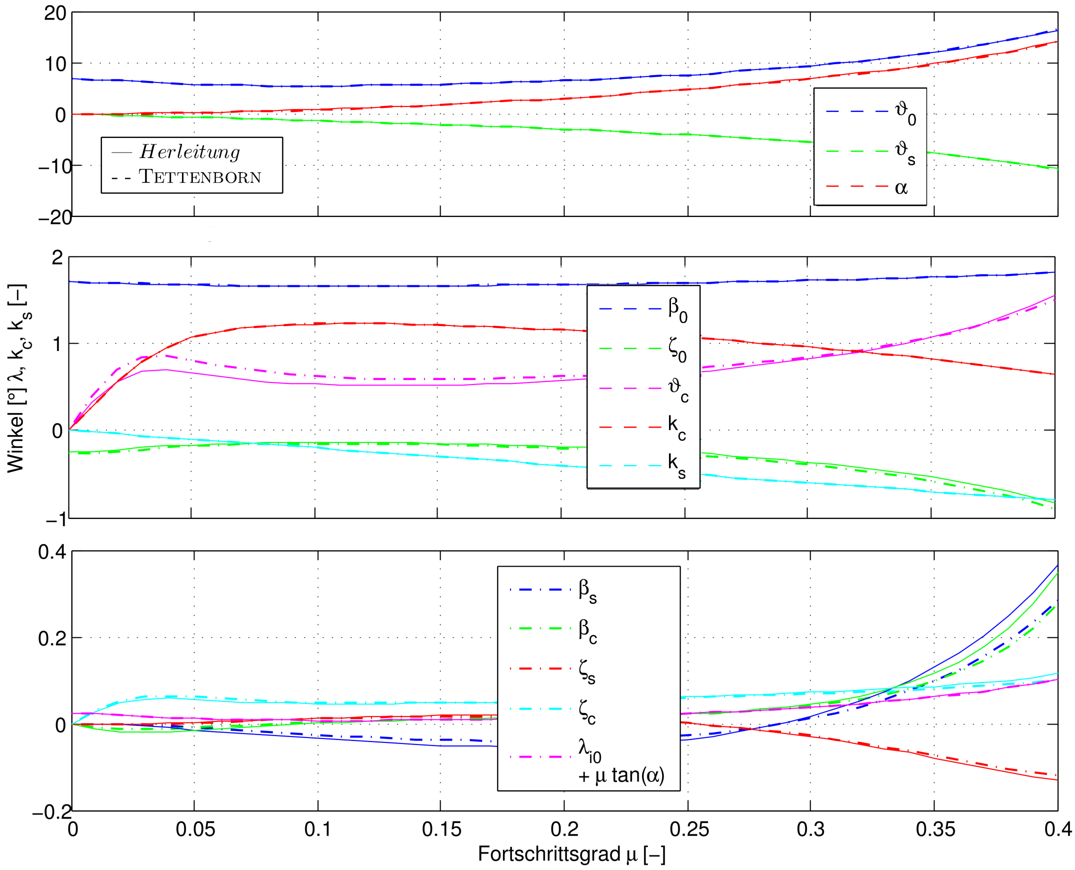


Abbildung 4.3.: Vergleich Trimmrechnungen

$\overline{R}$	:	4.9	m	N_{Bl}	:	4		I_{Bl}	:	0.333
M_{Bl}	:	0.5		$\overline{m}_{Bl}$	:	23.4	kg	I_θ^s	:	0.0002
a	:	0.15		c	:	0.055		y_s	:	0
$\overline{\Omega}$	:	44.5	Hz	$C_{a\alpha}$	:	5.9		C_{d0}	:	0.01
γ	:	5		ω_β	:	1.15		ω_ζ	:	0.67
R	:	0		d	:	0		$\overline{\rho}$	:	1 kg/m^3
h	:	0.3		$\overline{m}_Z$	:	2006.4	kg	C_{dZ}	:	0.8
f_{dz}	:	1.0		$\overline{g}$	:	9.81	kg/s^2			

Tabelle 4.2.: Datensatz, Konfiguration nach TETTENBORN

5. Analyse

Im Weiteren soll das Verhalten des hier hergeleiteten Systems analysiert werden. Dazu werden der Einfachheit halber die Systemgrößen von TETTENBORN (Tab. 4.2) verwendet.

5.1. Trimmrechnung

Zunächst wird der Einfluss der Elastizität und Eigenfrequenz auf die Trimmgrößen betrachtet.

In Abbildung 5.1 wird bei der Rotorkopfelastizit $R = 0$ die Schwenkeigenfrequenz variert. Die Differenz zwischen $\omega_\zeta = 0.7$ und $\omega_\zeta = 1.4$ nimmt mit zunehmendem Fortschrittsgrad μ zu. Insbesondere die Schwenkgrößen ζ_0, ζ_s und ζ_c weisen deutliche Unterschiede auf. Anzumerken ist, dass die Vorzeichen von ζ_s und ζ_c sich umkehren, wobei der Betrag im Fall von $\omega_\zeta = 1.4$ kleiner ist. Der konstante Teil ζ_0 hat in diesem Fall den deutlich größeren Betrag.

Für die Rotorblattelastizität $R = 1$ in Abbildung 5.2 treten die Differenzen ebenfalls mit zunehmendem Fortschrittsgrad μ deutlich hervor. Dabei weisen neben den Schwenkgrößen ζ_0, ζ_s und ζ_c die Trimmgrößen ϑ_c und β_s sehr große Veränderungen auf. Die zyklischen Schwenkgrößen ζ_s und ζ_c ändern wieder ihr Vorzeichen, wobei diesmal der Betrag im Fall von $\omega_\zeta = 1.4$ deutlich größer ist. Dafür veringert sich der Betrag von ζ_0 geringfügig. Die Änderung von ζ_s scheint auch die Änderung von β_s und ϑ_c zu beeinflussen, die sich in ähnlicher Weise ändern. Dabei nimmt der Betrag von β_s stetig zu während der Betrag von ϑ_c ab einem Fortschrittsgrad $\mu = 0.1$ stetig abnimmt bis hin zum Vorzeichenwechsel bei etwa $\mu = 0.39$ und danach in gleicher Form wieder zulegt.

Wie in Abbildung 5.3 erkennbar, unterscheiden sich die Trimmgrößen für Rotorkopfelastizität ($R = 0$) und Rotorblattelastizität ($R = 1$) bei einer Schwenkeigenfrequenz $\omega_\zeta = 0.7$ nur gering. Wie schon zuvor treten die Unterschiede mit zunehmenden μ hervor. Besonders deutlich treten diese Differenz bei den Trimmgrößen ζ_0, ζ_s, β_s und ϑ_c auf. Betragsmäßig legen bei Erhöhung der Schlag-Schwenk-Kupplung alle Trimmgrößen bis auf β_s und β_c stetig zu oder ändern sich scheinbar gar nicht. Der deutlichste Anstieg weist dabei ζ_s auf.

Bei einer Schwenkeigenfrequenz $\omega_\zeta = 1.4$ nimmt die Differenz zwischen $R = 0$ und $R = 1$ mit zunehmenden Fortschrittsgrad μ ebenfalls zu (vgl. Abb. 5.4). Bis auf ϑ_c nimmt der Betrag mit zunehmenden R zu. Dabei treten β_s, ζ_s und ϑ_c deutlich hervor und weisen ein ähnliches Verhalten wie in Abbildung 5.2 auf. Neben ζ_0 und ζ_c nehmen auch β_0 und β_c betraglich mit der Schlag-Schwenk-Kupplung zu.

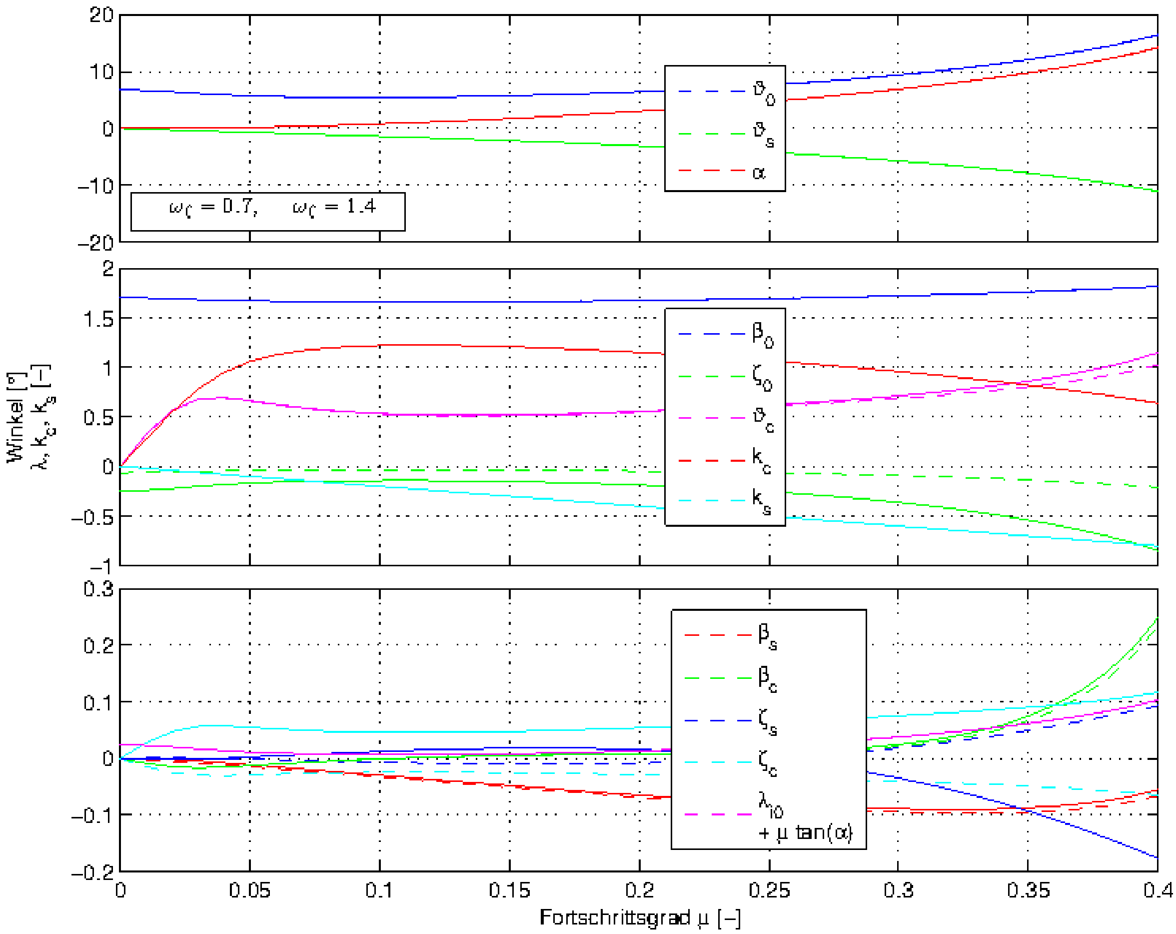


Abbildung 5.1.: Trimmrechnung über μ, $R = 0$

Die Änderung der Schwenkeigenfrequenz ω_ζ nimmt deutlichen Einfluss auf die Trimmgrößen. Insbesondere der Vorzeichenwechsel von ζ_s und ζ_c, welcher mit der Schlageigenfrequenz ω_β in Zusammenhang steht, macht dies erkennbar. Die Schlag-Schwenk-Kupplung R scheint bei kleinen Schwenkeigenfrequenzen einen etwas schwächeren Einfluss zu haben, tritt aber bei größeren Eigenfrequenzen besonders stark in Erscheinung. Im Fall von $R = 1$ und $\omega_\beta < \omega_\zeta$ wird unter Bezugnahme auf die anderen Fälle die Koppelung von Schlag- und Schwenkbewegung mittels Torsion gut erkennbar.

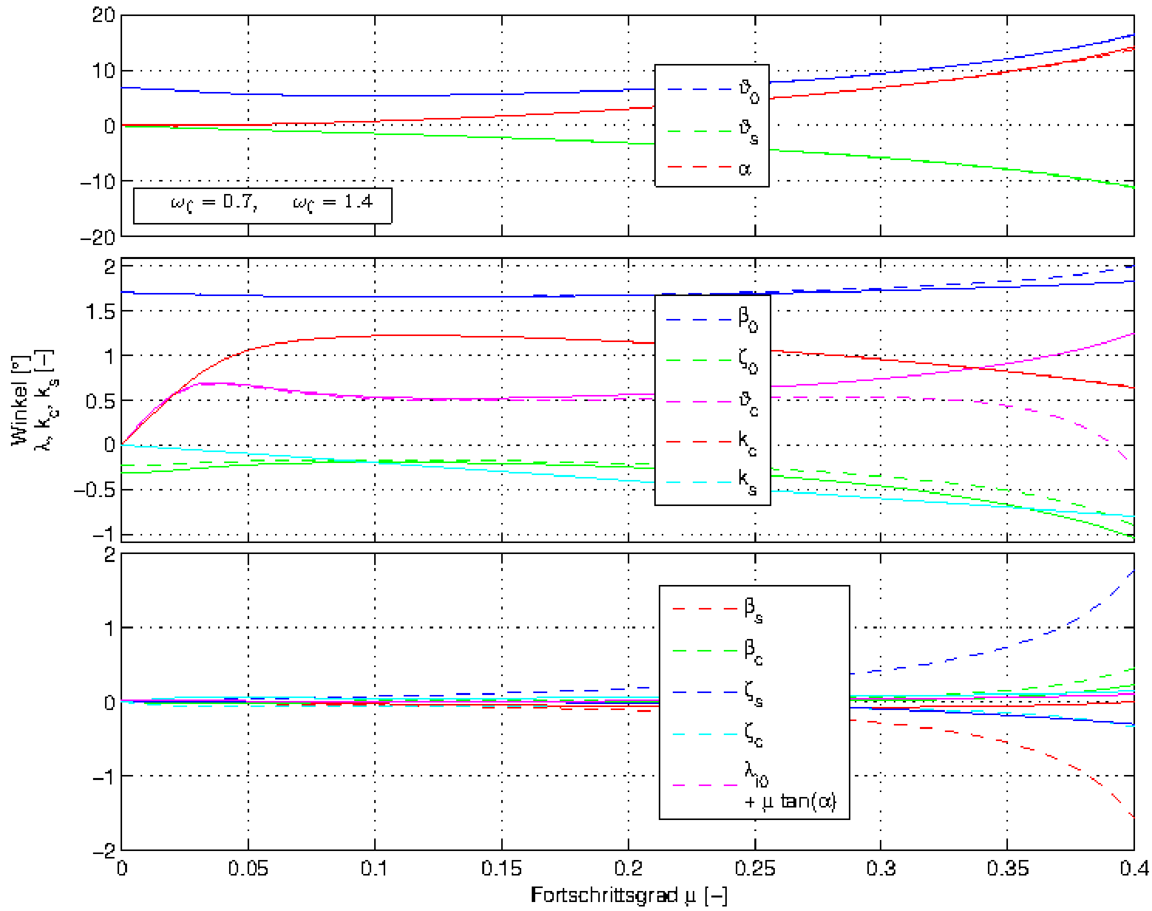


Abbildung 5.2.: Trimmrechnung über μ, $R = 1$

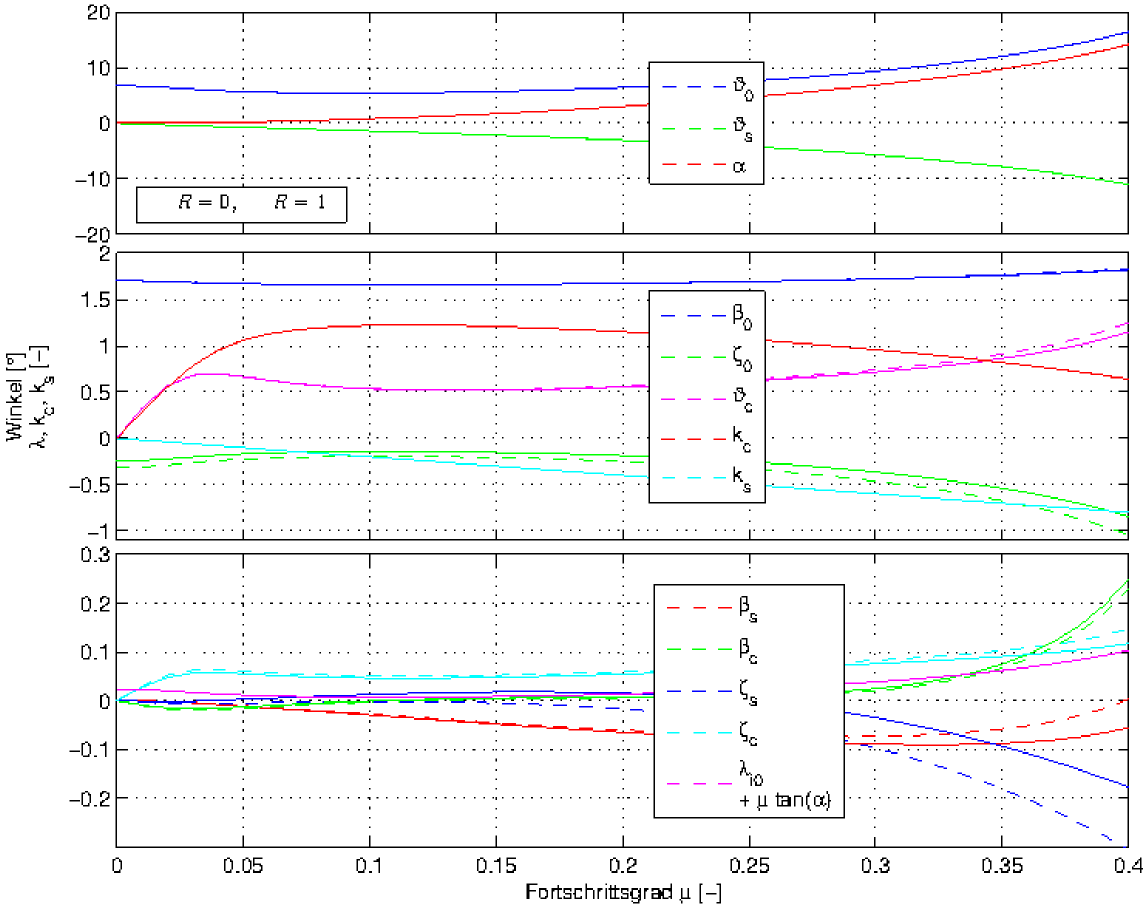


Abbildung 5.3.: Trimmrechnung über μ, $\omega_\zeta = 0.7$

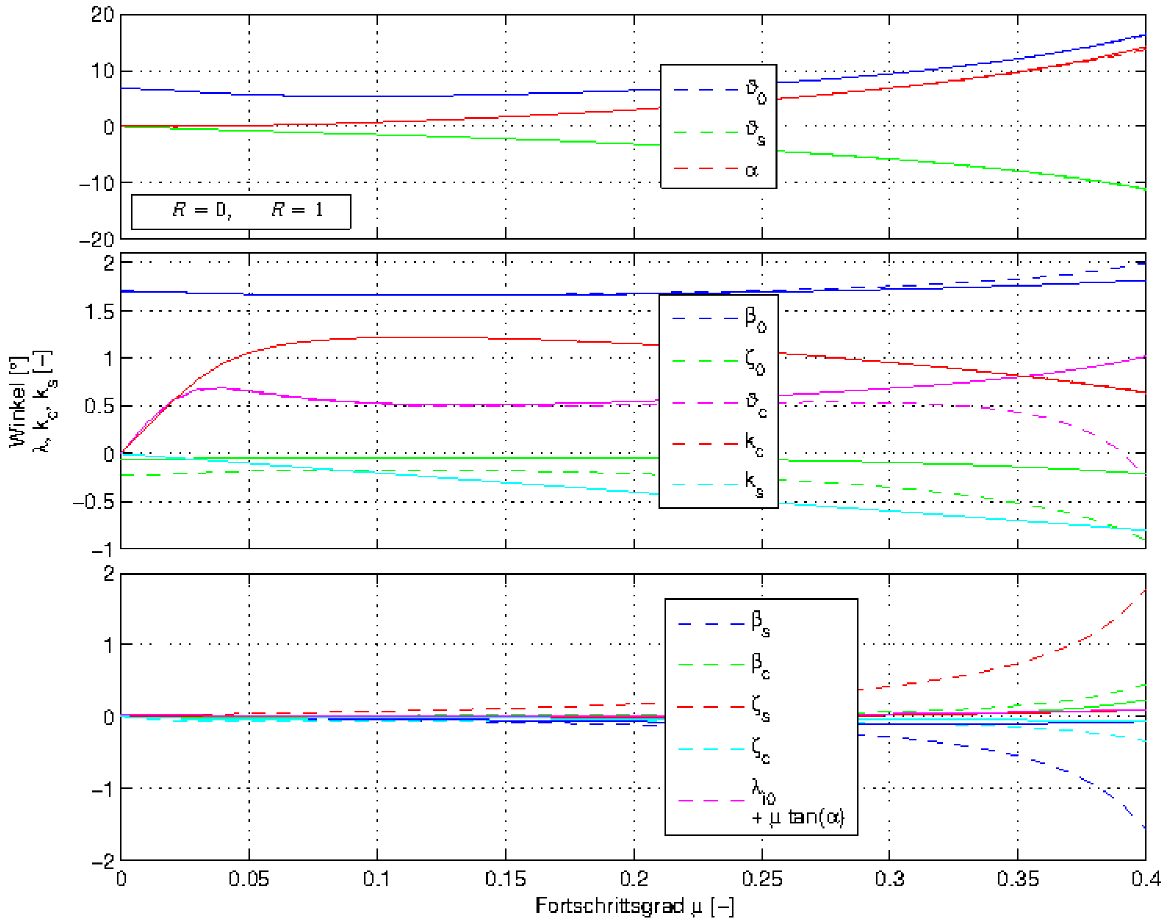


Abbildung 5.4.: Trimmrechnung über μ, $\omega_\zeta = 1.4$

5.2. Stabilität

Hier wird der Einfluss der Schwenkeigenfrequenz ω_ζ und der Einfluss der viskosen Dämpfung d auf die Stabilität betrachtet.

Das System ist mit den verwendeten Parametern im ungedämpften Fall (vgl. Abb. 5.5) über den gesamten Bereich des Fortschrittsgrads μ stabil. Die Stabilität nimmt zunächst mit zunehmendem Fortschrittsgrad μ ab, bis sie etwa bei $\mu = 0.1$ ihr Minimum erreicht. Im weiteren Verlauf steigt der negative Realteil des Schwenkeigenwertes stark an. Die Schwenkeigenfrequenz $\omega_\zeta = 0.7$ ist bis auf den Bereich von $\mu \approx 0.05$ bis $\mu \approx 0.16$ der stabilste Fall. Bei der Schwenkeigenfrequenz von $\omega_\zeta = 1.1$ ist genau das Umgekehrte der Fall. Die noch größere Schlageigenfrequenz von $\omega_\zeta = 1.4$ liegt zwischen den beiden vorherigen Fällen. Im Bereich $0.05 < \mu < 0.16$ ist die Reihenfolge umgekehrt, allerdings mit nur sehr geringen Unterschieden.

Wie Abbildung 5.6 zu entnehmen ist, weist der Fall $\omega_\zeta = 1.15$ die geringste Stabilität auf. Dies ist der besondere Fall, bei der Schlag- und Schwenkeigenfrequenz zusammenfallen.

Im gedämpften Fall (vgl. Abb. 5.7) ist der qualitative Verlauf sehr ähnlich. Die Sta-

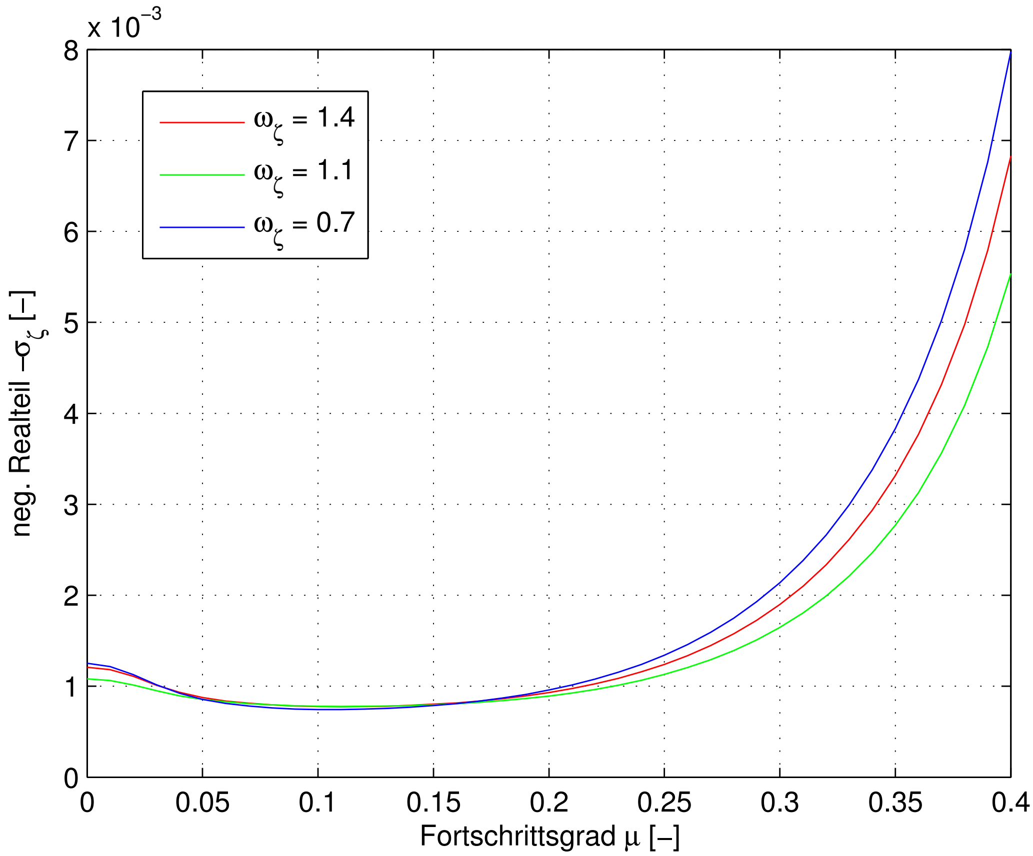


Abbildung 5.5.: negativer Realteil des Schwenkeigenwertes über μ, $d_\zeta = 0, R = 0$

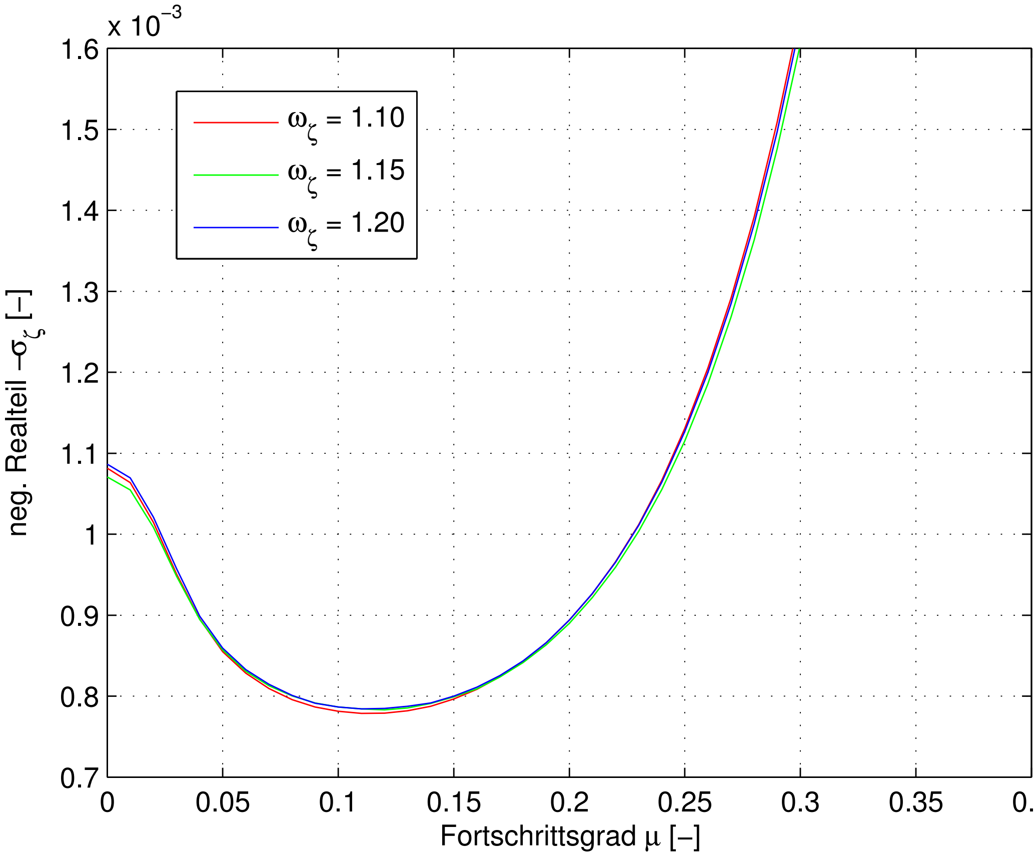


Abbildung 5.6.: minimaler negativer Realteil des Schwenkeigenwertes über μ, $d_\zeta = 0$, $R = 0$

bilität ist generell deutlich höher als der ungedämpfte Fall. Der Anstieg der Stabilität bei höheren Fortschrittsgraden fällt nicht so stark aus wie im ungedämpften Fall. Der Dämpfer stabilisiert das System für alle Eigenfrequenzen gleichermaßen.

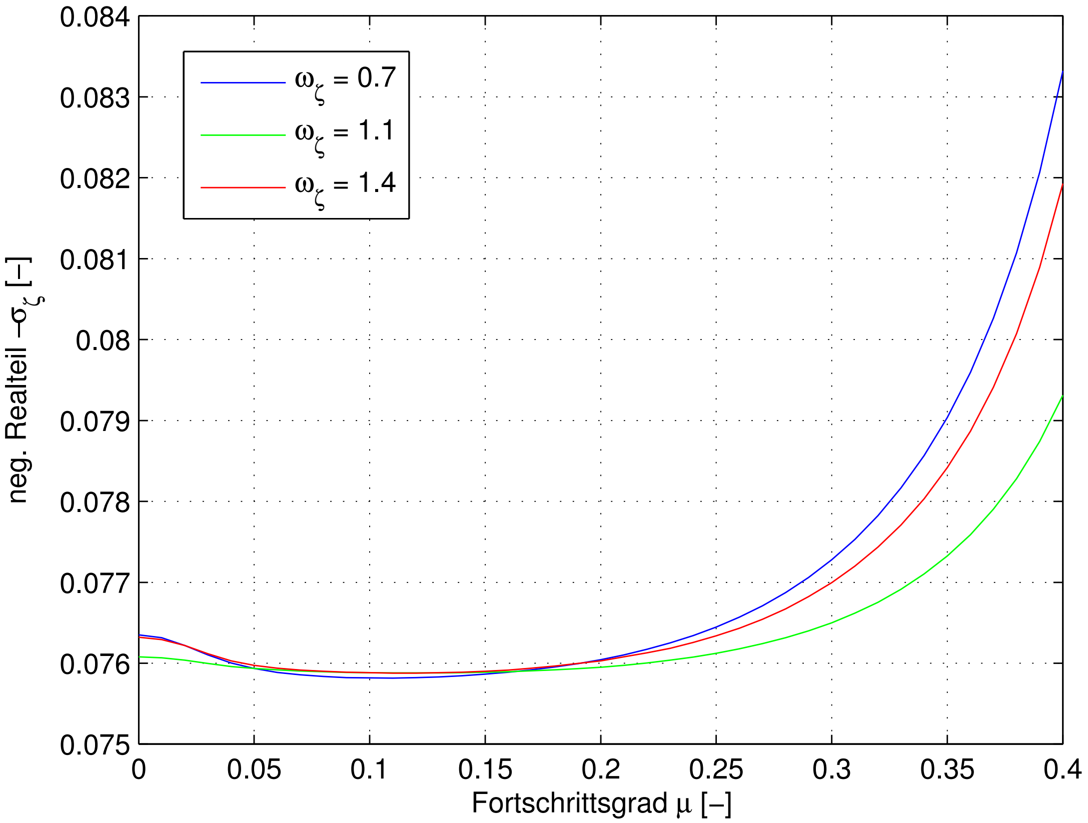


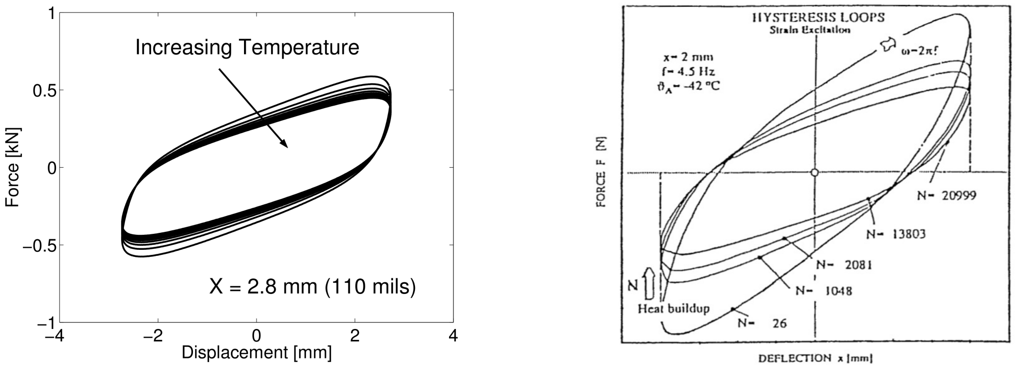
Abbildung 5.7.: negativer Realteil des Schwenkeigenwertes über μ, $d_\zeta = 0.05$, $R = 0$

6. Elastomer Dämpfer

Ein Elastomerdämpfer besteht aus einem Elastomerblock, der in den meisten Fällen auf Schub beansprucht wird. Durch die Schichtung mit Stahl- oder Alublechen kann die Leistungsfähigkeit, die Lebensdauer sowie die Wärmeabfuhr aus dem Inneren gesteigert werden. Die Dämpfer zeichnen sich besonders durch ihre geringe Teilezahl und dem gutmütigen Versagensverhalten aus, welches eine reine Sichtüberprüfung erlaubt. Allerdings weisen Elastomere ein komplexes, viskoelastisches Verhalten auf. D.h. bei der Auftragung von Kraft über Auslenkung bildet sich eine nicht-lineare Hysterese aus, deren Modellierung eine Herausforderung darstellt. Die Ausprägung der Hysterese gibt Auskunft über die Dissipation der Energie in Wärme, also den Dämpfungseigenschaften des Elastomers. Soll das Elastomer als Dämpfer und nicht nur als Lager verwendet werden, wird die Erzeugung einer möglichst großen Hysterese forciert. Ein großes Problem bei der Modellierung ist die starke Abhängigkeit der Hysterese von der Umgebung in Form von Temperatur, Grundlast sowie Art der Beanspruchung. Dies erfordert die Betrachtung von Auslenkung und Anregungsfrequenz [10].

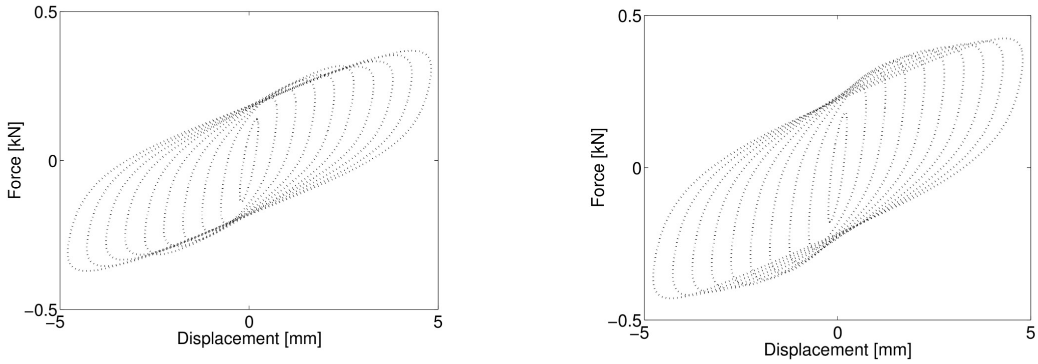
6.1. Eigenschaften

Die Eigenschaften eines Elastomers werden maßgeblich von den zugegebenen Füllstoffen beeinflusst. Füllstoffe sind Partikel die bei der Herstellung in der flüssigen Elastomermasse gelöst werden und sich so durch das gesamte Material ziehen. Je nach Wahl der Füllstoffe kann das Elastomer besonders haltbar, chemisch beständig oder stark dämpfend sein. Dabei kann es vorkommen, dass durch die Addition zweier Füllstoffe mit den gewünschten Eigenschaften, völlig unerwartete Eigenschaften entstehen. Soll das Elastomer als Dämpfer verwendet werden, ist die Energiedissipation das entscheidente für die Auslegung des Elastomers. Die so entstehende Wärme heizt den Dämpfer auf. Dies ist von Bedeutung, da die Eigenschaften eines Elastomers stark von der Umgebungstemperatur abhängen. Bei der Auftragung der resultierenden Dämpferkraft über der Auslenkung wird dies durch die sich ändernde Neigung der Hysterese deutlich. Umso höher die Temperatur des Elastomers steigt, desto gringer fällt die Steigung der Hysterese aus, d.h. desto schwächer wird die resultierende Dämpferkraft (vgl. Abb. 6.1(a)). Also je wärmer das Elastomer wird, umso weicher wird es bis hin zum Verlust der strukturellen Stabilität und beginnenden Fließen. Da der Dämpfer somit zerstört wäre, gilt es dies unbedingt durch entsprechende Maßnahmen zu verhindern. Eine weitverbreitete Methode ist das Einbringen von Metallscheiben parallel zur geplanten Scherbewegung des Dämpfers. Dadurch wird das



(a) (b)

Abbildung 6.1.: Hysterese eines Elastomers in Abhängigkeit von (a) Temperatur [27] und (b) Anzahl der Perioden [11]



(a) (b)

Abbildung 6.2.: Änderung der Hysterese durch Variation der Amplitude (a) 0 % Preload, (b) 10 % Preload [27]

Elastomer strukturell verstärkt und gleichzeitig die im Inneren erzeugte Wärme besser nach außen abgeführt. Da die Betriebstemperatur in der Regel über der Umgebungstemperatur liegt, kann die Abflachung der Hysterese bei Betriebsbeginn beobachtet werden (vgl. Abb. 6.1(b)). Eine weitere wichtige Eigenschaft der Elastomere ist das Kriechverhalten. Dabei handelt es sich um das langsame Gleiten bei einer statischen Last. Auch dieser Effekt ist von der Temperatur abhängig, d.h. bei höheren gleitet das Elastomer stärker und schneller. Ebenfalls hat die Beanspruchung Einfluss auf das Verhalten des Elastomers. So kann die strukturelle Stabilität durch Pressung erhöht werden, was auch zur Erhöhung der ersultierenden Kraft führt. Bei dynamischer Beanspruchung haben sowohl Amplitude als auch Frequenz bedeutenden Einfluss auf das Verhalten. So nimmt die resultierende Kraft mit wachsender Amplitude immer schwächer zu (vgl. Abb. 6.2(a)). Bei zunehmender Frequenz nimmt die Kraft immer schwächer zu (vgl. Abb. 6.3).

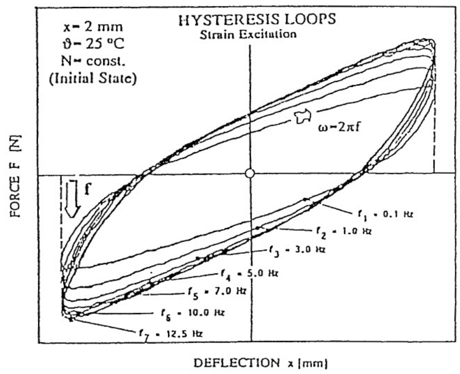


Abbildung 6.3.: Hysterese abhängig von der Frequenz [11]

6.2. Modelle

Zunächst werden zwei einfache Ersatzmodelle vorgestellt. Die Ersatzmodelle bestehen aus der Kombination eines Dämpfers mit einer Feder. Das eine Modell ist die Parallelschaltung von Dämpfer und Feder und wird VOIGT-Element (auch KELVIN-VOIGT-Element) genannt (vgl. Abb. 6.4(a)). Dieses Element beschreibt einfache Viskoelastizität. Das andere Modell ist das sog. MAXWELL-Element, bei dem Feder und Dämpfer in Reihe geschaltet werden (vgl. Abb. 6.4(b)). Dieses Element beschreibt das viskose Verhalten eines MAXWELL-Fluids. Für eine Feder ergibt die Auftragung von Kraft über Auslenkung eine Ursprungsgerade (vgl. Abb. 6.5(a)). Für einen Dämpfer ergibt sich bei selber Auftragung ein Oval um den Ursprung (vgl. Abb. 6.5(b)). Bei einer Parallelschaltung werden die Eigenschaften der beiden Elemente superpositioniert und es ergibt sich eine Hysterese (vgl. Abb. 6.5(c)).
Mitte der 1970er wurde bei LORD CORP. eins der ersten Modelle zur Auslegung von Dämpfern entwickelt. Diese sehr einfache Methode basiert schon auf einem komplexen Modulo Ansatz, d.h. das Elastomer wird als lineares VOIGT-Element abstrahiert. In der komplexen Schreibweise ergibt sich für diesen Ansatz:

(a) (b)

Abbildung 6.4.: (a) VOIGT-Modell, (b) MAXWELL-Modell

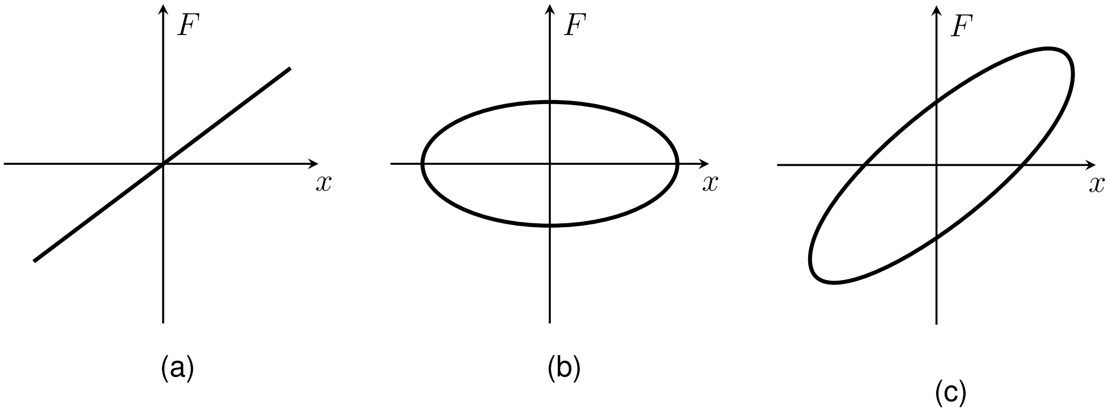


Abbildung 6.5.: Kraft über Auslenkung (a) Feder, (b) Dämpfer und (c) VOIGT-Element

$$F = (G' + iG'')x \tag{6.1}$$

Dabei wird G' als Speicher- und G'' als Dissipations-Modul bezeichnet. Diese Module sind vom anliegenden Lastfall abhängig. Die komplexen Module werden für variierende Frequenzen bei verschiedenen Belastungsamplituden experimentell ermittelt und in einer Wertetabelle zusammengefasst. Für einen gegeben Belastungsfall können die Module dieser Tabelle entnommen und in ein Rotoranalyseprogram eingegeben werden. Somit kann der Einfluss des Dämpfers auf die Stabilität des Systems bestimmt werden [19].
Im Verlauf der Entwicklung der BO-108 wurde bei MBB ein Modell entwickelt, welches auf der Transformation in den Frequenzbereich an einem Auslegungspunkt basierte. Dabei werden die viskoelastischen Eigenschaften mit den komplexen Modulen G' und G'' mittels linearer Funktionen beschrieben.

$$G^*(i\omega) = \frac{G_e + (i\omega)q_1 + (i\omega)^2 q_2 + \cdots + (i\omega)^m q_m}{1 + (i\omega)p_1 + (i\omega)^2 p_2 + \cdots + (i\omega)^n p_n} = G' + iG'' \tag{6.2}$$

Diese linearisierten Module sind von der Amplitude der Anregung abhängig und müssen deshalb für jeden Anwendungsfall separat ermittelt werden. Ermittelt werden die Module indem eine mit ihnen erzeugte elliptische Hysterese einer Hysterese aus den Materialversuchen angepasst wird. Durch das Einfügen einer temperaturabhängigen Verschiebefunktion gelang es, die durch Temperatur hervorgerufenen Effekte nachzubilden. Mit Hilfe der ermittelten Dissipationsenergie und der Wärmeleitfähigkeit konnte anhand einer Energiebilanzierung auch die Selbsterhitzung nachvollzogen werden [10, 11].
FELKER et al. erstellten ein Modell, das das Verhalten unter dem Einfluss von zwei unterschiedlichen Erregerfrequenzen wiedergeben sollte. Dies ist notwendig, da die Eigenfrequenz der Schwenkbewegung sich deutlich von der Drehfrequenz unterschei-

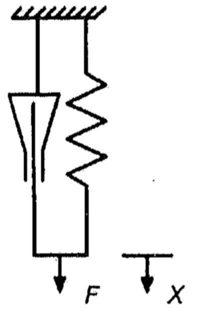


Abbildung 6.6.: Elastomermodell von BOEING [21]

det, aber beide gleichzeitig auf den Dämpfer einwirken. Dazu wurde der Ansatz

$$f = k(x) + c(x, \dot{x}) \tag{6.3}$$

gewählt mit den Funktionen:

$$\begin{aligned} k(x) &= sign(x)(k_0 + k_1|x| + k_2|x^2| + \dots) \\ c(x) &= sign(\dot{x})(c_0 + c_1|x| + c_2|x^2| + \dots) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Mittels den Transformationen $G' = \frac{k(x)}{x}$ und $G'' = \omega \frac{c(x)}{\dot{x}}$ werden die Parameter dieser Funktionen an die Ergebnisse einer monofrequenten Anregung angenähert. Durch die Nichtlinearität der Elastomere kann eine lineare Superposition der jeweiligen Modelle nicht gültig sein. Das Modell ist im Stande, das Verhalten bei bifrequenter Erregung zu erfassen und dabei die Abhängigkeit von der Amplitude zu berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde beobachtet, dass die Dämpfung sich bei Annäherung der Eigenschwenk- an die Drehfrequenz deutlich reduziert. Dies wird als DUAL-FREQUENCY-Problem bezeichnet [6].
Bei BOEING wurde zur Entwicklung des BEARINGLESS MAIN ROTOR für den RAH-66 COMANCHE ein Modell basierend auf einer nichtlinearen Feder und einem variablen Reibungsdämpfer entwickelt (vgl. Abb.6.6). Bei Windkanaltest wurde das "limit-cycle" Phänomen beobachtet, d.h. die Schwingung pendelt sich auf eine konstante Restamplitude ein. Dies ist ein deutliches Zeichen des DUAL-FREQUENCY-Problems. Die Schwenkeigenfrequenz dieses Systems fällt für verschiedene Flugbereiche in die Nähe der Drehfrequenz. Durch den Einsatz von Fluidlastikdämpfern konnte dieses Problem beseitigt werden. Das Modell wurde scheinbar nicht weiterentwickelt [21].
An der Universität von Maryland wurde von GANDHI et al. ein Modell entwickelt, dass auf einer Reihenschaltung einer nichtlinearen Feder $S1$ und eines linearen VOIGT-Elements ($S2$,$D2$) beruht (vgl. Abb.6.7(a)). Die Auslenkung der Feder $S1$ wird mit folgender Funktion gegeben, wobei D der gesamten Dämpferkraft entsprechen soll:

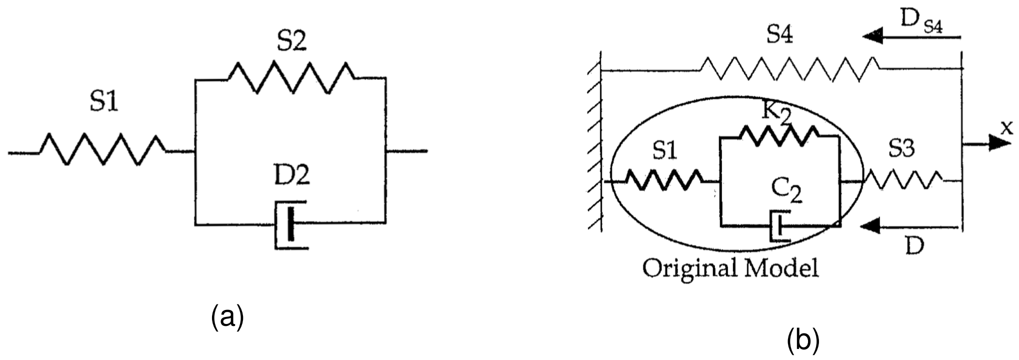


Abbildung 6.7.: Elastomermodelle nach GANDHI et al. [7, 8]

$$f(D) = \begin{cases} c_1 D + c_2 D^2 + c_3 D^3 + c_4 D^4 & , D \geq 0 \\ c_1 D - c_2 D^2 + c_3 D^3 - c_4 D^4 & , D \leq 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

Damit kann die Differentialgleichung dieses Systems gelöst werden:

$$K_2 \zeta + C\dot{\zeta} = K_2 f(D) + C \frac{df}{dD} \dot{D} + D \tag{6.6}$$

Die sechs Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4, K_2 und C dieses Modells werden durch Anpassung an die komplexen Module G' und G'' bestimmt, da diesem Projekt keine experimentell erzeugten Hysteresen verfügbar waren. Bei der Integration in ein Rotoranalyseprogram wurde die Differentialgleichung nach der Dämpferkraft aufgelöst. Es wird darauf hingewiesen, dass die Methode leicht abgewandelt werden kann und anstelle der Dämpferkraft z.B. die virtuelle Verschiebung zur Lösung benutzt werden kann. Dieses Modell kann die Abhängigkeit der komplexen Modulo von der Amplitude sehr gut wiedergeben. Da bei geringen Amplituden die Dämpfung G'' stark abgeschwächt ist, wurde dieses Modell durch eine weitere nichtlineare Feder $S3$ in Reihe und eine nichtlineare Feder $S4$ parallel erweitert (vgl. Abb.6.7(b)). Dabei ist die Feder $S3$, im Gegensatz zu den anderen Federn, eine sich versteifende Feder. Die Kraftgleichungen der Feder sind gegeben durch:

$$D_{S3} = sign(\zeta_{S3}) \left(c_5 (e^{c_6 |\zeta_{S3}|} - 1) \right) \tag{6.7}$$

mit ζ_{S3} der Auslenkung der Feder $S3$ und:

$$D_{S4} = sign(\zeta) \left(c_7 (1 - e^{-c_8 |\zeta|}) \right) \tag{6.8}$$

mit ζ als gesamte Auslenkung. Das System erhält somit die vier zusätzliche Koeffizienten c_5, c_6, c_7 und c_8, die bestimmt werden müssen. Mit dieser Erweiterung lässt das

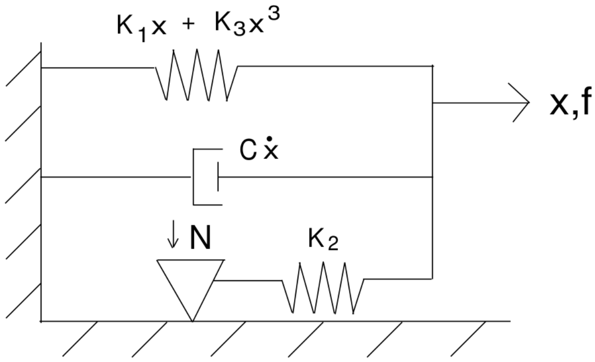


Abbildung 6.8.: Elastomermodell nach SNYDER [27]

DUAL-FREQUENCY-Problem simulieren. Die beiden in Reihe befindlichen nichtlinearen Federn können auch zusammengefasst werden, allerdings ergibt sich durch das komplexe Verhalten der Federn keine wünschenswerte Reduktion der Koeffizienten [8, 9].

SNYDER et al. entwickelten ebenfalls an der Universität von Maryland ein Modell, welches auf der linearen Kombination einer linearen Feder, eines linearen Dämpfers, einer kubischen Feder und eines elastischen Reibelements beruht (vgl. Abb.6.8). Die Gleichungen werden angegeben mit:

$$\begin{aligned} f_d(t) &= C\dot{x}(t) \\ f_s(t) &= K_1 x(t) \\ f_{es}(t) &= K_3 x(t)^3 \\ f_r(t) &= K_2 x(t) + N \end{aligned} \tag{6.9}$$

Der Koeffizient K_2 des elastischen Reibelements wird aus der Grundlast N bestimmt. Die drei Koeffizienten C, K_1 und K_3 werden wieder durch Anpassung an experimentell ermittelten Daten vorgenommen. Auch dieses Modell ist fähig, das Verhalten eines Elastomers abzubilden. Indem die Koeffizienten temperaturabhängig angenommen wurden, konnte auch das temperaturabhängige Verhalten des Elastomers eingefangen werden [27].

WEI HU et al. erstellten etwas später ein weiteres Modell an der Universität von Maryland, welches nur einem VOIGT-Element entspricht. Die Federkraft gibt er an mit:

$$F_s = \left(K + \delta K e^{-\lambda_k |\dot{x}|^{1.5}}\right) x \tag{6.10}$$

Für den Dämpfer verwendet er:

$$F_d = F_y \tanh(\lambda \dot{x}) \tag{6.11}$$

Die insgesamt fünf Koeffizienten F_y, K, δK, λ und λ_k dieses Modells werden eben-

falls durch eine Anpassung an Experimentaldaten ermittelt. Dieses Modell ist zwar nicht mehr von der Frequenz, aber immer noch von der Amplitude abhängig [12].
An der Pennsylvania State University wurde ein Modell auf Basis der FINITE-ELEMENTE-METHODE entwickelt. Dieses Modell besteht aus Elementen, die ANELASTIC DISPLACEMENT FIELDS (ADF) genannt werden. Die vereinfachte Form eines ADFs lässt sich als VOIGT-Element in Reihe mit einer Feder darstellen (vgl. Abb. 6.7(a)). Die Feder ($S1$) wird mit u' als Auslenkung des gesamten Dämpfer gegeben durch:

$$K_u = K_{u1} + K_{u2}|u'| + K_{u3}u'^2 + K_{u4}u'^4 + K_{u5}(u' - u'^A)^2 \tag{6.12}$$

Der hochgestellte Index ^{A} beschreibt die Verschiebung bzw. Spannung des ANELASTISCHEN Teils, dem VOIGT-Element. Die Elemente des VOIGT-Elements, $S2$ als K_a und D_2 als d, werden mit

$$K_a = (K_{a1} - 1)K_u + K_{a2}u'^{A2} \tag{6.13}$$

$$d = \frac{K_{a1}K_{u1}}{K_{d1}} \tag{6.14}$$

angegeben. Um den Dämpfer nichtlineare Eigenschaften zu verleihen wird die ANELASTISCHE Auslenkungsrate als nichtlineare Funktion der ANELASTISCHEN Spannung definiert:

$$\dot{u}' = \frac{\sigma^A}{d} + K_{d2}\sigma^{A3} \tag{6.15}$$

Die Konstanten werden durch die Zeitschrittformulierung

$$\sigma_i = K_{ui}(u_i' - u_i'^A) \tag{6.16}$$

bestimmt [24, 25].
Durch die Verwendung mehrerer ADF-Elemente lässt sich die Genauigkeit des Modell verbessern. Dabei kann das mechanische Analogon aber nicht mehr angewendet werden. In der Darstellung wird für die ADF-Elemente eine Blackbox in Reihe mit einer Feder verwendet. Da die Koeffizienten immer nur für die jeweils getestete Frequenz und im Auslenkungsbereich von 10 - 100 % gültig sind, wurde das Modell mit mehreren Elementen um parallele lineare Elastoreibelemente erweitert (vgl. Abb. 6.9).
Zu den Reibelementen wird folgender Algorithmus genannt:

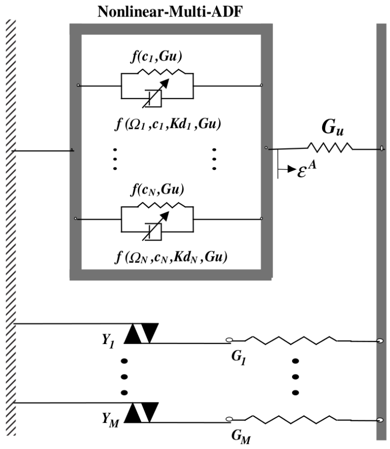


Abbildung 6.9.: Multi-ADF-Element mit Elastoreibelementen [23]

$k = 1, 2, 3, \ldots$
$\Delta\varepsilon = \varepsilon^{k+1} - \varepsilon^{k}$
$\sigma_{trial} = \sigma_j^{f^k} + G_j \Delta\varepsilon$
if $\sigma_{trial} < Y_j$ then
$\quad \sigma_j^{f^{k+1}} = \sigma_{trial}$
else
$\quad \sigma_j^{f^{k+1}} = Y_j$
endif

Mit diesem Algorithmus wird für die jeweilgen Elastoreibelemente die Spannung bestimmt. Somit lässt sich eine frequenzunabhängige Dämpfung modellieren, die auch im Amplitudenbereich von 0,1 - 20 % gültig ist [1, 3, 4].
In der Weiterentwicklung werden die Elastoreibelemente zu einem stetig nachgebenden Element zusammengefasst. Dazu wird der Algorithmus

if $a_y > a_{y\ max}$ then
$\quad \phi = \mu$
$\quad a_{y\ max} = a_y$
else
$\quad \phi = \frac{\mu}{2}$
endif
$a_y = \phi|\sigma_i - \sigma_{cos}|$
$k = (1 - a_y)K$
$d\sigma = k\ d\varepsilon$
$\sigma_{i+1} = \sigma_i + d\sigma$

genannt. Mit diesem Algorithmus die abnehmende Spannung eines kontinuierlich nachgebenden Elastoreibelemtes ermittlet. Die Beschreibung der unelastischen Verschiebungselemente wird nun durch

$$D^\alpha(\varepsilon^A_{n+1}) = \frac{\varepsilon^A_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} B_j(\alpha)(\varepsilon^A_{n+1-j} + k_{nl}\sigma^A_{n+1-j}|\sigma^A_{n+1-j}|)}{(\Delta t)^\alpha} \tag{6.17}$$

gegeben. Durch die Summation werden die Historie des Dämpfers mit in die Berechnung einbezogen. Dabei ist $B_j(\alpha)$ eine Wichtungsfunktion zwischen, die den neueren Werten größere Bedeutung beimisst. Durch den Faktor k_{nl} wird die Nichtlinearität dargestellt. Somit werden die zunächst sechzehn zu bestimmenden Koeffizienten für drei betrachtete Elemente auf sieben reduziert [23].
Durch die Multiplikation mit einer einfachen ARRHENIUS-Funktion lässt sich auch das Temperaturverhalten der Elastomere modellieren.

$$\alpha_T(T) = e^{a(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}})} \tag{6.18}$$

Die Koeffizienten werden durch Anpassung an Testdaten ermittelt [2].
JU CHANGKUAN versucht mittels einer FEM-Implementierung die allgemeinen Elastomertheorien aus der Werkstoffkunde in ein Analyseprogramm zu übertragen. Der Ansatz ähnelt der ADF-Variante. Dabei sollen hier aber echte Materialkonstanten verwendet werden und die Parameter nicht an Experimentaldaten angenähert werden. Da bisher keine Materialdaten verfügbar waren, steht ein direkter Vergleich mit einem Dämpfer noch aus. [15]

6.3. Implementation

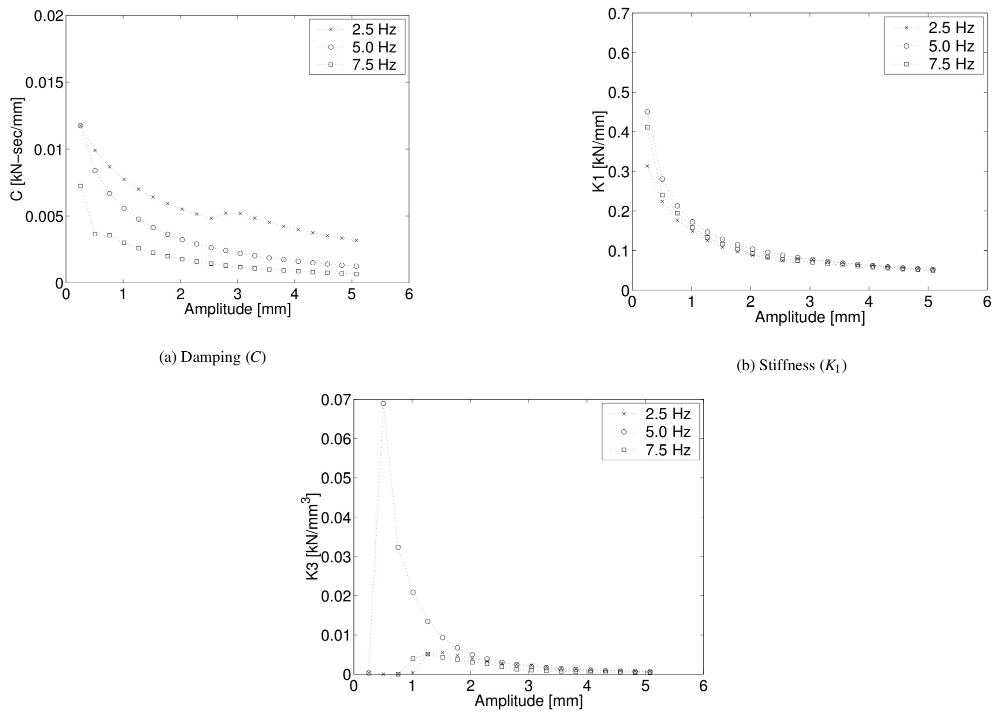
Für die Integration eines Elastomerdämpfers in dieses System wird das Modell von SNYDER et al. [27] ausgewählt. Dieses Modell eignet sich besonders aufgrund der relativ einfachen mathematischen Beschreibung bei gleichzeitig guter Näherung an den realen Dämpfer. Die Dämpferkraft wird wie folgt angegeben:

$$F = K_1 x(t) + K_3 x(t)^3 + C\dot{x}(t) + \left(\frac{1}{X_s} - 1\right) N \tag{6.19}$$

Unter Berücksichtigung des Dämpferhebelarms h_d und Einsetzen der Schwenkgröße ergibt sich das Dämpfermoment.

$$M^{SS}_{daempf} = h_d \left(K_1\zeta + K_3\zeta^3 + C\dot{\zeta} + \left(\frac{1}{X_s} - 1\right) N\right) \tag{6.20}$$

In [27] sind Graphen der Parameter K_1, K_3 und C eines AH-64-Dämpfers in Abhängigkeit von Erregungsfrequenz und Amplitude angegeben. Für das Verhalten des Systems wird zunächst eine Amplitude von 1 mm bei einer Frequenz von etwa 5 Hz angenommen. Die Parameter N und X_s sind von der Grundlast abhängig und werden in [27] für den Fall von 10 % Preload angegeben. Die dimensionsbehafteten Werte sind in Tabelle 6.1 verzeichnet. Somit ergibt sich für die Stabilität das Ergebnis in Ab-



(a) Damping (C)

(b) Stiffness (K_1)

(c) Cubic stiffness (K_3)

Abbildung 6.10.: Dämpfer Parameter AH-64

$\overline{K}_1$	=	0.2	$\overline{K}_3$	=	0.04
$\overline{C}$	=	0.005	$\overline{X}_s$	=	0.127
$\overline{N}$	=	35.6	h_d	=	a

Tabelle 6.1.: Parameter Elastomerdämpfer

bildung 6.11.

Der Einsatz des Dämpfer führt zu einer Erhöhung der Stabilität. Der qualitative Verlauf der Stabilität über den Fortschrittsgrad μ bleibt dabei erhalten. Ein direkter Vergleich mit dem viskosen Dämpfer ergibt eine Dämpfung von etwas mehr als $d = 0.72$.

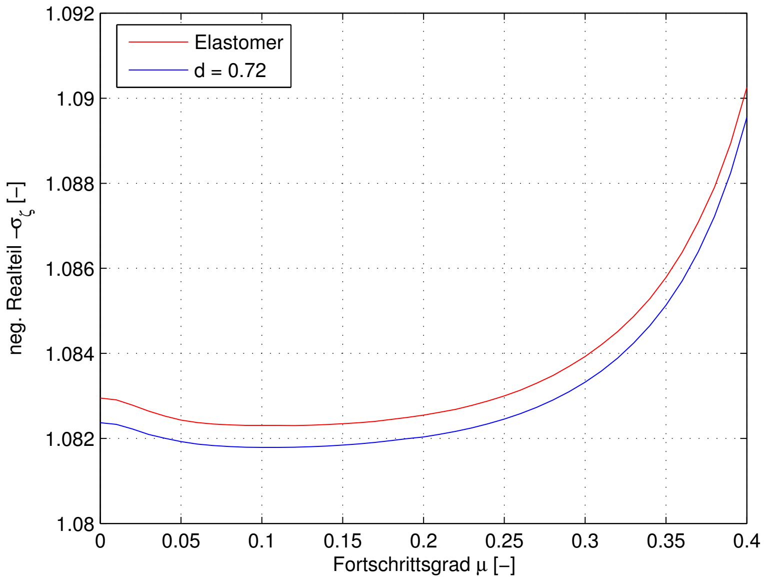


Abbildung 6.11.: Stabilität über μ mit und ohne Elastomerdämpfer

7. Fluidelastische Dämpfer

Dieser Dämpfertyp wurde entwickelt, um die starke Dämpfung der hydraulischen Dämpfer mit dem guten Einsatzverhalten der Elastomerdämpfer zu verbinden. D.h. anstelle der beweglichen Teile und Dichtungen, die bei einem rein hydraulischen Dämpfer negative Auswirkungen bezüglich der Wartung haben, werden Elastomermembranen und -blöcke eingesetzt. Dabei spielt die Eigendämpfung der Elastomere eine untergeordnete Rolle und bei deren Auslegung kann verstärkt auf Haltbarkeit, chemische Resistenz und Elastizität eingegangen werden.

7.1. Eigenschaften

Der Aufbau eines Fluielastikdämpfers entspricht prinzipiell einem einfachen, viskosen Dämpfer. Ein Fluid wird durch kleine Öffnungen von einer Kammer in andere gepresst. Der Unterschied zu einem konventionellen Dämpfer liegt vornehmlich in der Konstruktion. Bei einem Fluidelastikdämpfer wird weitestgehend auf bewegliche Teile verzichtet. Die essentiellen Volumenänderungen der Fluidkammern werden durch Elastomermembrane ermöglicht. Sollte auf ein bewegliches Teil, wie zum Beispiel ein Kolben, nicht verzichtet werden können, wird dieses in ein Elastomer gegossen und dieses in den Dämpfer gepresst. Somit wird die Bewegungen durch das Elastomer isoliert. Da das Elastomer sich in seinen Ausgangszustand zurückformt, findet dieser Dämpfertyp immer in seine Ausgangslage zurück. Somit unterscheidet er sich deutlich von einem viskosen Dämpfer, der ohne von außen aufgebrachte Rückstellkraft in der neuen Position verharren würde. Da das Elastomer in diesem Dämpfertyp als Feder und Isolator funktioniert, kann dieses anders als beim Elastomerdämpfer ausgelegt werden. Vornehmlich wird in diesem Fall die Witterungsbeständigkeit und Langlebigkeit des Elastomers forciert. Als Folge dieser Auslegung ist die geringere Energiedissipation im Elatomer zu nennen. Dadurch ist die Hysterese linearer und schlanker als die des Dämpferelastomers. Somit ähnelt die Hysterese eines Fluidelastikdämpfers sehr stark der eines linearen VOIGT-Elementes (vgl. Abb. 1.2(a) und Abb. 6.5(c)).

7.2. Modelle

Aufgrund der Ähnlichkeit eines Fluidelastikdämpfers mit einem linearen VOIGT-Element wurde zunächst zur Beschreibung auch ein solches verwendet [21].

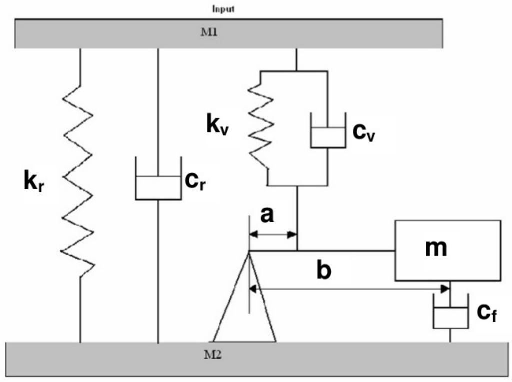


Abbildung 7.1.: Fluidelastik Modell [26]

Bei LORD wurde ein mechanisches Analogon für den fluidelastischen Dämpfer entwickelt (vgl. Abb.7.1). Das linke VOIGT-Element mit den Größen k_r und c_r verkörpert das Elastomergehäuse des Dämpfers. Das rechte VOIGT-Element (k_v und c_v) entspricht der Wechselwirkung von Fluid und Elastomer. Der Hebelarm des Modells mit den Längen a und b stellen die Volumina der Kammern dar. Die Masse m entspricht der Masse des Fluid und der Dämpfer c_f gibt die Viskosität des Fluid wieder. Dieses Modell ist linear und die Koeffizienten müssen experimentell für jeden Dämpfer ermittelt werden [14].

An der Pennsylvania State University wurde dieses Modell als Grundlage zur Entwicklung eines nichtlinearen Modells herangezogen. Zunächst werden nichtlineare Gleichungen für Dämpfungs- und Federterme eingesetzt. Für die Größen c_r und c_v wird

$$F_{damping} = c_{1n}\dot{\varepsilon} + c_{2n}\dot{\varepsilon}^2 sign(\dot{\varepsilon}) + c_{3n}\varepsilon \tag{7.1}$$

eingesetzt mit $n = r, v$. Da das Fluid nur abhängig von der Geschwindigkeit ist vereinfacht sich für c_f (7.1) zu:

$$F_{damping} = c_{1f}\dot{\varepsilon} + c_{2f}\dot{\varepsilon}^2 sign(\varepsilon) \tag{7.2}$$

Die nichtlinearen Federterme für k_r und k_v werden mit

$$F_{stiffness} = k_{1n}\varepsilon + k_{2n}|\varepsilon|\varepsilon + k_{3n}|\dot{\varepsilon}|\varepsilon \tag{7.3}$$

angegeben. Auch hier gilt $n = r, v$. Die Abweichungen dieses Modells zu Experimentaldaten betragen bis zu 36 %. Da das System aus zwei Differentialgleichungen besteht, wird zur Lösung eine numerische Integration angewandt. Mit diesem Verfahren weist das Modell bei Raumtemperatur eine Abweichung von ständig unter 15 % auf [26].

Um den Einfluss von Temperaturschwankungen zu berücksichtigen erweitert MARR

das Modell um ein unelastisches Verschiebungs- und ein Gleitelement. Der Temperatureinfluss wird dabei durch die Anpassung der zusätzlichen Parameter erreicht. Allerdings weist diese Methode bei der Auftragung als komplexer Speichermodul eine Abweichung von bis zu 88 % auf, weshalb nur von einer bedingten Nutzbarkeit ausgegangen werden kann [18].
Durch den Einsatz eines magnetorheologischen Fluid kann die Dämpfung durch Anlegen einer elektrischen Spannung variiert werden. Da es sich dabei aber um eine semi-aktive Dämpfung handelt wird diese Variante hier nicht eingehender betrachtet.

7.3. Implementation

In [18] wird die lineare Beschreibung des fluidelastischen Systems gegeben. Für die Dämpferkraft ergibt sich:

$$F = c_r \dot{u} + c_v(\dot{u} - \dot{v}) + k_r u + k_v(u - v) \tag{7.4}$$

Dabei steht u für die gesamte Verschiebung des Dämpfers, während v die Verschiebung des Fluid beschreibt. Durch die Multiplikation mit dem Hebelarm h_d und dem Einsetzen der Schwenkgröße bekommt man das Dämpfermoment.

$$M_{daempf}^{SS} = h_d \left(c_r \dot{u} + c_v(\dot{u} - \dot{v}) + k_r u + k_v(u - v) \right) \tag{7.5}$$

Um diesen Dämpfer verwenden zu können, muss zunächst die Größe v bestimmt werden. Sie wird gegeben durch die Bewegungsgleichung der Fluidmasse.

$$m(R-1)\ddot{v} + c_f(R-1)\dot{v} + c_v(\dot{v} - \dot{u}) + k_v(v - u) = 0 \tag{7.6}$$

Mit (7.6) kann unter Zuhilfenahme der Größen u und $\dot{u}$ aus dem vorherigen Zeitschritt die Größe v und deren Derivate ermittelt werden.

$$\ddot{v} = -\frac{c_f(R-1)\dot{v} + c_v(\dot{v} - \dot{u}) + k_v(v - u)}{m(R-1)} \tag{7.7}$$

Dabei ist $R = \frac{b}{a}$ das Seitenverhältnis der Kammer.

8. Fazit

Es wurden die vereinfachten Differentialgleichungen eines Rotorsystems hergeleitet und verifiziert. Es wurde der Einfluss von der Schlag-Schwenk-Kupplung R und von der Schwenkeigenfrequenz ω_ζ auf die Trimmgrößen über den Fortschrittsgrad μ ermittelt. Ebenso wurde der Einfluss der viskosen Dämpfung d und der Schwenkeigenfrequenz ω_ζ auf die Stabilität über den Fortschrittsgrad μ ermittelt.

Mit diesem System soll der Einfluss von Elastomer- und Fluidelastikdämpfern ermittelt werden. Die Modelle zur Modellierung eines Elastomers sind mannigfaltig. Leider werden die Koeffizienten dieser Modelle aus Experimentaldaten ermittelt und stellen keine Materialkonstanten dar. Dazu wird in der Regel ein CURVE-FITTING-Algorithmus angewandt, der das Modell an die Hysterese eines realen Dämpfers anpasst. Die ersten Ansätze zur Implementierung von Werkstoffdaten wurden an der Universität von Maryland gemacht [15], allerdings beruht das entsprechende Modell auf einer Finiten-Elemente-Methode, was die Implementierung in ein Rotorsystem etwas erschwert. Wie gezeigt wurde, kann ein einfacheres Modell ohne großen Aufwand in ein Rotorgleichungssystem integriert werden.

Der Fluidlastikdämpfer ist in seinem Verhalten wesentlich unkomplizierter, weshalb wohl für die meisten Fälle eine Implementierung als Feder-Dämpfer-Paar ausgreicht (vgl. [21]). Somit lässt sich erklären warum im wesentlichen nur ein Modell existiert, dass immer weiter verfeinert wurde. Dieses Modell benötigt eine zusätzliche Differentialgleichung zur Lösung. Der Berechnungsalgorithmus benötigt deshalb eine dynamische Implementierung, die mit der zusätzlichen Gleichung umgehen kann.

Auf eine Erweiterung des Differentialgleichungssystems hinsichtlich verschiedener Effekte wurde in Absprache mit dem Betreuer verzichtet.

Literaturverzeichnis

[1] BRACKBILL, C. R.: *Helicopter Rotor Aeroelastic Analysis Using A Refined Elastomeric Damper Model*. Doktorarbeit, Pennsylvania State University, 2000.

[2] BRACKBILL, C. R., G. A. LESIEUTRE, E. C. SMITH und K. GOVINDSWAMY: *Thermomechanical modeling of elastomeric materials*. Journal of Smart Materials and Structures, 5:529–539, 1996.

[3] BRACKBILL, C. R., G. A. LESIEUTRE, E. C. SMITH und L. E. RUHL: *Characterization and Modeling of the Low Strain Amplitude and Frequncy Dependent Behaviour of Elastomeric Damper Materials*. Journal of the American Helicopter Society, 45(2), 2000.

[4] BRACKBILL, C. R., E. C. SMITH und G. A. LESIEUTRE: *Application of a Refined Time Domain Elastomeric Damper Model to Helicopter Rotor Aeroelastic Response and Stability*. Journal of the American Helicopter Society, 47(3), 2002.

[5] BRONSTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*, S. 967–968. Deutsch (Harri), 2008.

[6] FELKER, F. F., B. H. LAU, S. MCLAUGHLIN und W. JOHNSON: *Nonlinear Behaviour of an Elastomeric Lag Damper Undergoing Dual-Frequency Motion and its Effect on Rotor Dynamics*. Journal of the American Helicopter Society, 32(4), 1987.

[7] GANDHI, F. und I. CHOPRA: *An Analytical Model for a Nonlinear Elastomeric Lag Damper and Its Effect on Aeromechanical Stability in Hover*. Journal of the American Helicopter Society, 39(4), 1994.

[8] GANDHI, F. und I. CHOPRA: *Analysis of Bearingless Main Rotor Aeroelasticity Using an Improved Time Domain Nonlinear Elastomeric Damper Model*. In: *51st Forum of the American Helicopter Society*, 1995.

[9] GANDHI, F. und I. CHOPRA: *A time-domain non-linear viscoelastic damper model*. Journal of Smart Materials and Structures, 5:517–528, 1996.

[10] HAUSMANN, G.: *Structual Analysis And Design Considerations Of Elastomeric Dampers With Viscoelastic Material Behavior*. In: *12th European Rotorcraft Forum*, 1986.

[11] HAUSMANN, G. und P. GERGELY: *Approximate Methods For Thermoviscoelastic Characterization And Analysis of Elastomeric Lead-Lag Dampers*. In: *18th European Rotorcraft Forum*, 1992.

[12] HU, W. und N. M. WERELEY: *Characterization and Modeling of Nonlinear Elastomeric Dampers under Sinusoidal Loading*. In: *44th Structures, Structual Dynamics and Material Conference*, 2003.

[13] JOHNSON, W.: *Helicopter Theory*. Dover, 1994.

[14] JONES, P. J., D. D. RUSSELL und D. P. MCGUIRE: *Latest Developments in Fluidlastic® Lead-Lag Dampers for Vibration Control in Helicopters*. In: *59th Forum of the American Helicopter Society*, 2003.

[15] JU, C.: *Modeling Friction Phenomena And Elastomeric Dampers In Multibody Dynamics Analysis*. Doktorarbeit, Georgia Institute of Technology, 2009.

[16] KESSLER, C.: *Dynamik und Regelung von Hubschrauberrotoren*, 2011. Vorlesung.

[17] KOOPMANN, N.: *Betrachtung zur Stabilität einer vereinfachten Schlagdifferentialgleichung im Vorwärtsflug*, 1993. Studienarbeit, TU Braunschweig.

[18] MARR, C., G. A. LESIEUTRE und E. C. SMITH: *Nonlinear, Temperature-Dependent, Fluidlastic Lead-Lag Damper Modeling*. In: *64th Forum of the American Helicopter Society*, 2008.

[19] MCGUIRE, D. P.: *The Application of Elastomeric Lead-Lag Dampers to Helicopter Rotors*. Library of Technical Papers LL-2133, Lord Corporation, 1976.

[20] ORMISTON, R. A. und D. H. HODGES: *Linear Flap-Lag Dynamics of Hingeless Helicopter Rotor Blades*. Journal of the American Helicopter Society, S. 2–14, April 1972.

[21] PANDA, B., E. MYCHALOWYCZ und F. J. TARZANIN: *Application of passive dampers to modern helicopters*. Journal of Smart Materials and Structures, 5:509–516, 1996.

[22] PETERS, D. A.: *Flap-Lag Stability of Helicopter Rotor Blades in Forward Flight*. Journal of the American Helicopter Society, S. 2–13, October 1975.

[23] RAMRAKHYANI, D. S., G. A. LESIEUTRE und E. C. SMITH: *Modeling of elastomeric materials using nonlinear fractional derivative and continuously yielding friction elements*. International Journal of Solids and Structures, 41:3929–3948, 2004.

[24] SMITH, E. C., K. GOVINDSWAMY, M. R. BEALE und G. A. LESIEUTRE: *Formulation, Validation, and Application of a Finite Element Model for Elastomeric Lag Dampers*. In: *51st Forum of the American Helicopters Society*, 1995.

[25] SMITH, E. C., K. GOVINDSWAMY, M. R. BEALE, M. VASCSINEC und G. A. LESIEUTRE: *Aeroelastic Response & Stability of Helicopters with Elastomeric Lag Dampers*. In: *51st Forum of the American Helicopters Society*, 1995.

[26] SMITH, E. C., G. A. LESIEUTRE, J. T. SZEFI und C. MARR: *Time Domain Fluidlastic® Lag Damper Modeling*. In: *62th Forum of the American Helicopter Society*, 2006.

[27] SNYDER, R. A., R. KRISHNAN, N. M. WERELEY und T. SIEG: *Mechanisms-based Analysis of Elastomeric Lag Damper Behavior under Single and Dual Frequency Excitation Including Temperature Effects*. In: *57th Forum of the American Helicopter Society*, 2001.

[28] TETTENBORN, G.: *Aktive Schwenkdämpfungserhöhung von Hubschrauberrotoren*. Diplomarbeit, TU Braunschweig, 1996.

[29] TETTENBORN, G.: *Aeromechanische Stabilitätsuntersuchungen des Hubschraubers unter Einsatz der Einzelblattansteurung*. Doktorarbeit, TU Braunschweig, 2001.

A. Gleichungen

Hier werden noch einige Gleichungen ausgeschrieben.

A.1. Aerodynamik

Die ausgeschriebene Form von (2.34) und (2.36):

$$\begin{aligned}
F^{Ro}_{aero,x} =& I_{Bl}\gamma \left(-\frac{1}{16}\cos(3\psi)\sin(\vartheta)b^2 k_c \lambda_{i0}\mu - \cos(2\psi)\sin(\vartheta)\left(\frac{1}{4}b\mu^2\tan(\alpha)\right.\right. \\
&\left. + \frac{1}{12}b^3 k_s \lambda_{i0} + \frac{1}{8}b^2\dot{\beta}\mu + \frac{1}{4}b\lambda_{i0}\mu\right) - \frac{1}{4}\cos(2\psi)b^2\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\mu \\
&- \cos(\psi)\sin(\vartheta)\left(\frac{1}{6}b^3(\beta+\beta_{Pc}) + \frac{1}{16}b^2 k_c\lambda_{i0}\mu\right) \\
&- \sin(3\psi)\left(\frac{1}{16}\sin(\vartheta)b^2 k_s\lambda_{i0}\mu + \frac{1}{8}b\mu^2\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\right) \\
&+ \sin(2\psi)\sin(\vartheta)\left(\frac{1}{12}b^3 k_c\lambda_{i0} - \frac{1}{8}b^2\mu(\beta+\beta_{Pc})\right) \\
&+ \sin(\psi)\sin(\vartheta)\left(\frac{1}{4}\tan(\alpha)b^2\mu + \frac{1}{6}b^3\dot{\beta} + \frac{3}{16}b^2 k_s\lambda_{i0}\mu + \frac{1}{4}b^2\lambda_{i0}\right) \\
&+ \sin(\psi)\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\left(\frac{1}{6}b^3 + \frac{3}{8}b\mu^2\right) + \sin(\vartheta)\left(\frac{1}{4}\tan(\alpha)b\mu^2 + \frac{1}{12}b^3 k_s\lambda_{i0}\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{8}b^2\dot{\beta}\mu + \frac{1}{4}b\lambda_{i0}\mu\right) + \frac{1}{4}b^2\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\mu\right)
\end{aligned} \tag{A.1a}$$

$$\begin{aligned}
F^{Ro}_{aero,y} =& I_{Bl}\gamma b\left(\frac{1}{16}\mu\cos(3\psi)\left(\sin(\vartheta)bk_s\lambda_{i0} + 2\mu\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\right)\right. \\
&- \frac{1}{12}b\cos(2\psi)\sin(\vartheta)\left(b\lambda_{i0}k_c - \frac{2}{3}\mu(\beta+\beta_{Pc})\right) \\
&- \frac{1}{16}b\cos(\psi)\sin(\vartheta)\left(4\mu\tan(\alpha) + \frac{8}{3}b\dot{\beta} + \mu\lambda_{i0}k_s + 4\lambda_{i0}\right) \\
&- \cos(\psi)\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\left(\frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{8}\mu^2\right) - \frac{1}{16}\sin(3\psi)\sin(\vartheta)bk_c\lambda_{i0}\mu \\
&- \frac{1}{12}\sin(2\psi)\sin(\vartheta)\left(4\tan(\alpha)\mu^2 + b^2 k_s\lambda_{i0} + \frac{3}{2}b\dot{\beta}\mu + 4\lambda_{i0}\mu\right)
\end{aligned} \tag{A.1b}$$

$$- \frac{1}{4}\sin(2\psi) b\mu \frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}} - \frac{1}{16}\sin(\psi)\sin(\vartheta)\left(bk_c\lambda_{i0}\mu + 8\left(\frac{1}{3}b^2 + \mu^2\right)(\beta + \beta_{Pc})\right)$$
$$- \frac{1}{12}\sin(\vartheta) b^2 k_c \lambda_{i0} - \frac{3}{8}\sin(\vartheta) b\mu(\beta + \beta_{Pc})\Big)$$

$$\begin{aligned}
F^{Ro}_{aero,z} =& I_{Bl}\gamma\left(-\frac{1}{8} b\mu\cos(2\psi)\cos(\vartheta)(b\lambda_{i0}(k_c\zeta - k_s) + \mu\zeta(4\beta + 2\beta_{Pc})\right. \\
&+ \frac{1}{4}\mu^2\cos(2\psi)\sin(\vartheta)(an + b\beta\beta_{Pc} + b(2\zeta^2 - 1)) \\
&+ \frac{1}{8}\cos(2\psi) k_s\lambda_{i0}\mu b^2\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}} - \frac{1}{4} b\cos(\psi)\cos(\vartheta)\left(\mu\left(2\zeta(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha)\right)\right. \\
&+2a(\beta + \beta_{Pc} - 2\zeta) + b(\beta + \beta_{Pc} - 2\zeta)(\dot{\zeta} + 1) + b\dot{\beta}\zeta\Big) \\
&+ b\lambda_{i0}k_c\left(a + \frac{2}{3}b(\dot{\zeta} + 1)\right)\Bigg) - \frac{1}{4}\cos(\psi) b^2\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\left(\frac{2}{3}b\lambda_{i0}k_c + \mu(\beta + \beta_{Pc})\right) \\
&- \frac{1}{8}\cos(\vartheta)\sin(2\psi)\mu(b^2\lambda_{i0}k_s(\zeta + 1) + 2\mu(b - an)(\beta + \beta_{Pc})) \\
&- \frac{1}{4}\cos(\vartheta)\sin(\psi) b^2\lambda_{i0}k_s\left(a + \frac{2}{3}b(\dot{\zeta} + 1)\right) - b^2\mu\left(\zeta(\beta - \beta_{Pc}) - \dot{\beta}\right) \\
&+ 2\mu(b - an)(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha))) - \frac{1}{4}\cos(\vartheta) b\left((\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha))(b\dot{\zeta} + b\right. \\
&+2a) + \frac{2}{3}b^2(\beta_{Pc}\zeta + \dot{\beta}(\dot{\zeta} + 1)) + \frac{1}{2}(\mu\lambda_{i0}(\zeta k_c + k_s) + 2a\dot{\beta}) + \beta_{Pc}\zeta\mu^2\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\sin(2\psi)\sin(\vartheta)\mu^2\zeta(b - an) - \frac{1}{8}\sin(2\psi) b\mu\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}(b\lambda_{i0}k_c + 2\mu(\beta \\
&+ \beta_{Pc})) + \frac{1}{2}\sin(\psi)\sin(\vartheta)\mu(2a(b - an) - b^2(\beta^2 + \beta\beta_{Pc} + \beta_{Pc}^2 - \dot{\zeta}) + b^2 \\
&- an^2) - \frac{1}{4}\sin(\psi) b\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\left(\mu(2\lambda_{i0} + 2\mu\tan(\alpha) + b\dot{\beta}) + \frac{2}{3}b^2\lambda_{i0}k_s\right) \\
&+ \frac{1}{4}\sin(\vartheta)\left(2ab(a + b(\dot{\zeta} + 1)) - \frac{2}{3}b^3(\beta^2 + \beta\beta_{Pc} + \beta_{Pc}^2 - \dot{\zeta}^2 - 2\dot{\zeta}\right. \\
&-1) + \mu^2(b(1 - \beta\beta_{Pc}) - an)\Big) - \frac{1}{6}b^3\dot{\beta}\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}} - \frac{1}{4}b^2\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}(2\lambda_{i0} + 2\mu\tan(\alpha) \\
&+\lambda_{i0}k_s\mu))
\end{aligned} \tag{A.1c}$$

$$M^{SS}_{aero,x} = 0 \tag{A.2a}$$

$$
\begin{aligned}
M^{SS}_{aero,y} =& I_{Bl}\gamma b^2 \Bigg(\frac{1}{12}\cos(2\psi)\cos(\vartheta)\mu \left(b\lambda_{i0}(\zeta k_c - k_s) + \frac{3}{2}\mu\zeta(2\beta + \beta_{Pc}) \right) \\
&+ \frac{1}{8}\cos(2\psi)\sin(\vartheta)\mu^2 + \frac{1}{8}\cos(\psi)\cos(\vartheta)\, (2\mu\zeta(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha)) \\
&+ 2a\mu(\beta + \beta_{Pc}) + b\lambda_{i0}k_c \left(b(\dot{\zeta} + 1)\frac{4}{3}a \right) \\
&+ \frac{4}{3}b\mu \left((\beta + \beta_{Pc})(\dot{\zeta} + 1) + \dot{\beta}\zeta \right) \Big) - \frac{1}{3}\cos(\psi)\sin(\vartheta)b\mu\zeta \\
&+ \frac{1}{8}\cos(\vartheta)\sin(2\psi) \left(\mu^2(\beta + \beta_{Pc}) + \frac{2}{3}b\mu\lambda_{i0}(\zeta k_s + k_c) \right) \\
&+ \frac{1}{8}\cos(\vartheta)\sin(\psi) \Bigg(2\mu(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha)) + b^2\lambda_{i0}k_s \left(b(\dot{\zeta} + 1) + \frac{4}{3}a \right) \\
&- \frac{4}{3}b\mu(\zeta(\beta - \beta_{Pc}) - \dot{\beta}) \Bigg) + \frac{1}{6}\cos(\vartheta)\tan(\alpha)\mu \left(b\dot{\zeta} + b + \frac{3}{2}a \right) \\
&+ \frac{1}{12}\cos(\vartheta) \Bigg(2a \left(b\dot{\beta} + \frac{3}{2}\lambda_{i0} \right) + \frac{3}{2}b^2(\beta_{Pc}\zeta + \dot{\beta}\dot{\zeta} + \dot{\beta}) \\
&+ b\lambda_{i0}(\mu(\zeta k_c + k_s) + 2(\dot{\zeta} + 1)) + \frac{3}{2}\beta_{Pc}\zeta\mu^2 \Bigg) - \frac{1}{4}\sin(2\psi)\sin(\vartheta)\mu^2\zeta \\
&- \frac{1}{3}\sin(\psi)\sin(\vartheta)\mu \left(b\dot{\zeta} + b + \frac{3}{2}a \right) - \frac{1}{3}\sin(\vartheta)ab \\
&- \frac{1}{8}\sin(\vartheta)(b^2(2\dot{\zeta} + 1) + \mu^2) \Bigg)
\end{aligned} \tag{A.2b}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{SS}_{aero,z} =& I_{Bl}\gamma b^2 \Bigg(\cos(2\psi)\cos(\vartheta) \Bigg(\frac{1}{16}b^2\lambda_{i0}^2(k_c^2 - k_s^2) + \frac{1}{6}b\lambda_{i0}\mu(\beta k_c + \beta_{Pc}k_c + \beta\zeta k_s) \\
&+ \frac{1}{8}\mu^2(\beta + \beta_{Pc})^2 \Bigg) - \frac{1}{12}\cos(2\psi)\sin(\vartheta)\, (b\lambda_{i0}\mu(\zeta k_c - k_s) \\
&+ \frac{3}{2}\mu^2\zeta(2\beta + \beta_{Pc}) \Big) + \frac{1}{8}\cos(2\psi)\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\mu^2 + \cos(\psi)\cos(\vartheta) \Bigg(\frac{1}{3}b\lambda_{i0}k_c(\lambda_{i0} \\
&+ \mu\tan(\alpha)) + \frac{1}{2}\mu(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha))(\beta + \beta_{Pc}) + \frac{1}{4}b^2\lambda_{i0}k_c(\beta_{Pc}\zeta + \dot{\beta}) \\
&+ \frac{1}{3}b\mu(\dot{\beta} + \beta_{Pc}\zeta)(\beta + \beta_{Pc}) \Bigg) - \cos(\psi)\sin(\vartheta) \Bigg(\frac{1}{4}\mu\zeta(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha)) \\
&+ \frac{1}{6}abk_c\lambda_{i0} + \frac{1}{4}a\mu(\beta + \beta_{Pc}) + \frac{1}{8}b^2k_c\lambda_{i0}(\dot{\zeta} + 1) + \frac{1}{6}b\mu \Big((\beta + \beta_{Pc})(\dot{\zeta} + 1) \\
&+ \dot{\beta}\zeta \Big) \Bigg) - \frac{1}{3}\cos(\psi)b\mu\zeta\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}} + \cos(\vartheta)\sin(2\psi) \Bigg(\frac{1}{8}b^2\lambda_{i0}^2k_sk_c + \frac{1}{6}b\lambda_{i0}\mu(\beta k_s \\
&+ \beta_{Pc}k_s - \beta\zeta k_c) - \frac{1}{4}\beta\zeta\mu^2(\beta + \beta_{Pc}) \Bigg) + \cos(\vartheta)\sin(\psi) \Bigg(\frac{1}{3}b\lambda_{i0}k_s(\lambda_{i0}
\end{aligned} \tag{A.2c}
$$

$$+\mu\tan(\alpha)) - \frac{1}{2}\beta\zeta\mu(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha)) + \frac{1}{4}b^2\lambda_{i0}k_s(\beta_{Pc}\zeta + \dot{\beta}) - \frac{1}{3}b\beta\dot{\beta}\zeta\mu\Big)$$
$$+\cos(\vartheta)\left(\frac{1}{4}(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha))^2 + \frac{1}{3}b(\dot{\beta} + \beta_{Pc}\zeta)(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha))\right.$$
$$+\frac{1}{8}b^2\dot{\beta}(2\beta_{Pc}\zeta + \dot{\beta}) + \frac{1}{16}b^2\lambda_{i0}^2(k_s^2 + k_c^2) + \frac{1}{6}b\lambda_{i0}\mu(\beta k_c + \beta_{Pc}k_c - \beta\zeta k_s)$$
$$\left.+\frac{1}{8}\mu^2(\beta + \beta_{Pc})^2\right) - \sin(2\psi)\sin(\vartheta)\mu\left(\frac{1}{12}b\lambda_{i0}(k_c + \zeta k_s) - \frac{1}{8}\mu(\beta + \beta_{Pc})\right)$$
$$-\frac{1}{4}\sin(2\psi)\mu^2\zeta\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}} - \sin(\psi)\sin(\vartheta)\left(\frac{1}{4}\mu(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha)) - \frac{1}{8}b\lambda_{i0}k_s\left(b\dot{\zeta}\right.\right.$$
$$\left.\left.+b - \frac{4}{3}a\right) - \frac{1}{6}b\mu(\beta\zeta - \beta_{Pc}\zeta + \dot{\beta})\right) - \frac{1}{3}\sin(\psi)\mu\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\left(b\dot{\zeta} + b + \frac{3}{2}a\right)$$
$$-\sin(\vartheta)\left(\frac{1}{4}a(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha)) - \frac{1}{6}b(\lambda_{i0} + \mu\tan(\alpha))(\dot{\zeta} + 1) - \frac{1}{6}ab\dot{\beta}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}b^2(\beta_{Pc}\zeta + \dot{\beta}\dot{\zeta} + \dot{\beta}) - \frac{1}{12}b\lambda_{i0}\mu(\zeta k_c + k_s) - \frac{1}{8}\beta_{Pc}\zeta\mu^2\right) - \frac{1}{3}ab\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}$$
$$\left.-\frac{1}{8}\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}(\mu^2 + b^2 + 2b^2\dot{\zeta})\right)$$

A.2. Stabilitätsrechnung

Die ausgeschriebene Form von (2.79) und (2.80). Die unterstrichenen Terme entsprechen dem System von PETERS (4.3) und (4.4). Auf die Auflösung der Trimmgrößen in ihre Bestandteile wird zur besseren Vergleichbarkeit mit PETERS verzichtet. Zu beachten ist, dass die Trimmgrößen abhängig von ψ sind.

$$\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} I_{Bl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{Bl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

$$D_{1,1} = \cos(\vartheta_{tr})b^3\gamma I_{Bl}\left(\frac{1}{6}(\cos(\psi)\mu\zeta_{tr} + \underline{\sin(\psi)\mu} + a) + \frac{1}{8}b(\dot{\zeta}_{tr} + \underline{1})\right) \tag{A.4a}$$

$$\begin{aligned} D_{1,2} =& I_{Bl}\left(\frac{1}{6}\cos(\vartheta_{tr})b^3\gamma\left(\underline{\lambda_{i0}} + \mu\tan(\alpha) + \frac{3}{4}b\lambda_{i0}(k_c\cos(\psi) + k_s\sin(\psi))\right)\right. \\ &+ \frac{1}{6}\cos(\psi)\cos(\vartheta_{tr})b^3\gamma\mu(\underline{\beta_{tr}} + \beta_{Pc}) + \frac{1}{8}\cos(\vartheta_{tr})b^4\dot{\beta}_{tr}\gamma \\ &\left.-\frac{1}{3}b^3\gamma\sin(\vartheta_{tr})\left(\underline{\mu\sin(\psi)} + \frac{3}{4}\underline{b}\right) + 2\beta_{Pc} + \underline{2\beta_{tr}}\right) \end{aligned} \tag{A.4b}$$

$$
\begin{aligned}
D_{1,3} =& \frac{1}{8} I_{Bl}\gamma b^2 \Bigg(\cos(2\psi)\cos(\vartheta_{tr})\mu \Bigg(\mu(\underline{\theta_\beta} + 2\zeta_{tr}) + \theta_\beta \Bigg(\frac{2}{3} b\lambda_{i0}(\zeta_{tr}k_c - k_s) \\
& +\zeta_{tr}\mu(2\beta_{tr} + \beta_{Pc}))) + 2\cos(\psi)\cos(\vartheta_{tr})\mu \left(a + \frac{2}{3} b(\underline{1} + \dot{\zeta}_{tr} - 2\theta_\beta\zeta_{tr}) \right) \\
& - \cos(\psi)\sin(\vartheta_{tr})\theta_\beta \Bigg(2\mu^2 \tan(\alpha)\zeta_{tr} + 2a \left(\frac{2}{3} bk_c\lambda_{i0} + \mu(\beta_{tr} + \beta_{Pc}) \right) \\
& +b^2 k_c\lambda_{i0}(\dot{\zeta}_{tr} + 1) + 2\mu \left(\frac{2}{3} b \left((\beta_{tr} + \beta_{Pc})(\dot{\zeta}_{tr} + 1) + \dot{\beta}_{tr}\zeta_{tr} \right) + \lambda_{i0}\zeta_{tr} \right) \Bigg) \\
& - \cos(\vartheta_{tr})\sin(2\psi)\mu^2(2\theta_\beta\zeta_{tr} - \underline{1}) - \frac{4}{3}\cos(\vartheta_{tr})\sin(\psi)\mu(\theta_\beta(3a \\
& + 2b(\dot{\zeta}_{tr} + \underline{1})) + b\zeta_{tr}) - \cos(\vartheta_{tr})\theta_\beta \left(b^2(2\dot{\zeta}_{tr} + 1) + \underline{\mu^2} + \frac{8}{3} ab \right) \\
& - \sin(2\psi)\sin(\vartheta_{tr})\mu\theta_\beta \left(\frac{2}{3} b\lambda_{i0}(k_c + k_s\zeta_{tr}) + \mu(\beta_{tr} + \beta_{Pc}) \right) \\
& - \sin(\psi)\sin(\vartheta_{tr})\theta_\beta \Bigg(2\mu^2 \tan(\alpha) + bk_s\lambda_{i0}(b\dot{\zeta}_{tr} + b + \frac{4}{3} a) \\
& - \frac{4}{3} b\mu(\zeta_{tr}(\beta_{tr} - \beta_{Pc}) - \dot{\beta}_{tr}) + 2\lambda_{i0}\mu \Bigg) \\
& - \sin(\vartheta_{tr})\theta_\beta \Bigg(2\mu\tan(\alpha)(a + \frac{2}{3} b(\dot{\zeta}_{tr} + 1)) + 2a(\lambda_{i0} + \frac{2}{3} b\dot{\beta}_{tr}) \\
& + b^2\dot{\beta}_{tr}(\dot{\zeta}_{tr} + 1) + b^2\beta_{Pc}\zeta_{tr} + \beta_{Pc}\zeta_{tr}\mu^2 + \frac{2}{3} b\lambda_{i0}(\mu(\zeta_{tr}k_c + k_s) \\
& +2(\dot{\zeta}_{tr} + 1)) \Bigg) \Bigg) + I_{Bl}(2\dot{\zeta}_{tr} + 1) + M_{Bl}(a - g\sin(\alpha)(\cos(\psi) + \beta_{Pc})) \\
& + \frac{1}{\Delta} \Bigg(\underline{k_\beta} + \frac{1}{2} R(k_\zeta - k_\beta)(\underline{1} + \cos(2\vartheta_{tr})(2\zeta_{tr}\theta_\beta - \underline{1}) \\
& +2\sin(2\vartheta_{tr})\beta_{tr}\theta_\beta))
\end{aligned}
\tag{A.4c}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{1,4} =& \frac{1}{8} I_{Bl}\gamma b^2 \Bigg(\cos(2\psi)\cos(\vartheta_{tr})\mu \left(\frac{2}{3} b\lambda_{i0}k_c + \mu(\underline{2\beta_{tr}} + \beta_{Pc} + \underline{\theta_\zeta}) \right) \\
& - \cos(2\psi)\sin(\vartheta_{tr})\mu\theta_\zeta \left(\frac{2}{3} b\lambda_{i0}(\zeta_{tr}k_c - k_s) + \zeta_{tr}\mu(2\beta_{tr} + \beta_{Pc}) \right) \\
& + 2\cos(\psi)\cos(\vartheta_{tr})\mu \left((\underline{\lambda_{i0}} + \mu\tan(\alpha)) + \frac{2}{3} b(\underline{\dot{\beta}_{tr}} - 2\theta_\zeta\zeta_{tr}) \right) \\
& - \cos(\psi)\sin(\vartheta_{tr}) \Bigg(\theta_\zeta(2\mu^2\tan(\alpha)\zeta_{tr} + \frac{4}{3} ab\lambda_{i0}k_c + 2a\mu(\beta_{tr} + \beta_{Pc}) \\
& + b^2\lambda_{i0}k_c(\dot{\zeta}_{tr} + 1) + \frac{4}{3} b\mu(\beta_{tr} + \beta_{Pc})(\dot{\zeta}_{tr} + 1) + \frac{4}{3} b\dot{\beta}_{tr}\mu\zeta_{tr} + 2\lambda_{i0}\mu\zeta_{tr}) \\
& + \frac{8}{3}\underline{b\mu} \Bigg) + \cos(\vartheta_{tr})\sin(2\psi)\mu \left(\frac{2}{3} b\lambda_{i0}k_s - 2\mu\zeta_{tr}\theta_\zeta \right)
\end{aligned}
\tag{A.4d}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4}{3}\cos(\vartheta_{tr})\sin(\psi)\left(\mu(3a\theta_\zeta+\underline{b\beta_{tr}}-\beta_{Pc})+2b\theta_\zeta(\dot{\zeta}_{tr}+\underline{1})\right)\\
&-\cos(\vartheta_{tr})\left(\frac{8}{3}ab\theta_\zeta-b^2\beta_{Pc}+b^2\theta_\zeta(2\dot{\zeta}_{tr}+\underline{1})-\frac{2}{3}b\mu\lambda_{i0}k_c-\mu^2\beta_{Pc}+\underline{\mu^2\theta_\zeta}\right)\\
&-\sin(2\psi)\sin(\vartheta_{tr})\mu\left(\frac{2}{3}b\lambda_{i0}\theta_\zeta(k_c+\zeta_{tr}k_s)+\mu\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc})+\underline{2\mu}\right)\\
&-\sin(\psi)\sin(\vartheta_{tr})\theta_\zeta\left(2\mu^2\tan(\alpha)+\frac{4}{3}ab\lambda_{i0}k_s+b^2\lambda_{i0}k_s(\dot{\zeta}_{tr}+1)\right.\\
&\left.-\frac{4}{3}b\mu\zeta_{tr}(\beta_{tr}-\beta_{Pc})+\frac{4}{3}b\dot{\beta}_{tr}\mu+2\lambda_{i0}\mu\right)-\sin(\vartheta_{tr})\theta_\zeta\left(2a(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha))\right.\\
&+\frac{4}{3}b\mu\tan(\alpha)(\dot{\zeta}_{tr}+1)+\frac{4}{3}ab\dot{\beta}_{tr}+b^2\beta_{Pc}\zeta_{tr}+b^2\dot{\beta}_{tr}(\dot{\zeta}_{tr}+1)\\
&\left.+\frac{2}{3}b\lambda_{i0}\mu(\zeta_{tr}k_c+k_s)+\frac{4}{3}b\lambda_{i0}(\dot{\zeta}_{tr}+1)+\beta_{Pc}\zeta_{tr}\mu^2\right)\Bigg)\\
&+\frac{R}{2\Delta}(k_\zeta-k_\beta)\left(2\cos(2\vartheta_{tr})\zeta_{tr}\theta_\zeta+2\sin(2\vartheta_{tr})\beta_{tr}\theta_\zeta+\underline{\sin(2\vartheta_{tr})}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{2,1}=&I_{Bl}\left(\frac{1}{3}\cos(\vartheta_{tr})b^3\gamma\left(\underline{\lambda_{i0}}+\mu\tan(\alpha)+\frac{3}{4}b\lambda_{i0}(k_c\cos(\psi)+k_s\sin(\psi))\right)\right.\\
&+\frac{1}{3}\cos(\psi)\cos(\vartheta_{tr})b^3\gamma\mu(\underline{2\beta_{tr}}+2\beta_{Pc}-\zeta_{tr})+\frac{1}{4}\cos(\vartheta_{tr})b^4\gamma\left(\underline{b\dot{\beta}_{tr}}\right.\\
&\left.+b\beta_{Pc}\zeta_{tr}-\frac{4}{3}\beta_{tr}\zeta_{tr}\mu\sin(\psi)\right)-\frac{1}{6}\sin(\vartheta_{tr})b^3\gamma(\underline{\mu\sin(\psi)}+a+\frac{3}{4}b(\dot{\zeta}_{tr}+\underline{1}))\\
&\left.+2\beta_{Pc}+\underline{2\beta_{tr}}\right)
\end{aligned}
\tag{A.4e}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{2,2}=&-\gamma I_{Bl}b^3\left(\frac{1}{6}\sin(\vartheta_{tr})\left(\underline{\lambda_{i0}}+\mu\tan(\alpha)+\frac{3}{4}b\lambda_{i0}(k_c\cos(\psi)+k_s\sin(\psi))\right)\right.\\
&+\frac{1}{6}\cos(\psi)\sin(\vartheta_{tr})\mu(\underline{\beta_{tr}}+\beta_{Pc})+\underline{\frac{1}{8}\sin(\vartheta_{tr})b\dot{\beta}_{tr}}+\frac{1}{3}\left(\underline{\mu\sin(\psi)}\right.\\
&\left.\left.+\frac{3}{4}\underline{b}\right)\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\right)
\end{aligned}
\tag{A.4f}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{2,3}=&-\frac{1}{12}I_{Bl}\gamma b^2\left(\frac{3}{2}\cos(2\psi)\cos(\vartheta_{tr})\mu\left(\mu\left(\beta_{Pc}(\theta_\beta\zeta_{tr}-2)+2\beta_{tr}(\theta_\beta\zeta_{tr}-\underline{1})\right)\right.\right.\\
&\left.-\frac{2}{3}b\lambda_{i0}\left(k_s(\theta_\beta+2\zeta_{tr})-k_c(\theta_\beta\zeta_{tr}-2)\right)\right)\\
&+\frac{3}{4}\cos(2\psi)\sin(\vartheta_{tr})(b^2\lambda_{i0}^2\theta_\beta(k_c^2-k_s^2)+\frac{8}{3}b\lambda_{i0}\mu\theta_\beta(\beta_{Pc}k_c+\beta_{tr}k_c
\end{aligned}
\tag{A.4g}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta_{tr}k_s\zeta_{tr}) + 2\mu^2(\theta_\beta(\beta_{tr}+\beta_{Pc})^2 + 2\zeta_{tr}))\big) + \cos(\psi)\cos(\vartheta_{tr})(3\mu^2\tan(\alpha)(\theta_\beta\zeta_{tr}-2)\\
&+ 2ab\lambda_{i0}k_c\theta_\beta + 3a\mu\theta_\beta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) + \frac{3}{2}b^2\lambda_{i0}k_c\theta_\beta(\dot\zeta_{tr}+1) + 2b\mu(\beta_{Pc}(\theta_\beta(\dot\zeta_{tr}+1)\\
&- 2\zeta_{tr}) + \beta_{tr}\theta_\beta(\dot\zeta_{tr}+\underline{1}) + \dot\beta_{tr}(\theta_\beta\zeta_{tr}-\underline{2})) + 3\lambda_{i0}\mu(\theta_\beta\zeta_{tr}-\underline{2}))\\
&+ \cos(\psi)\sin(\vartheta_{tr})(4b\lambda_{i0}k_c\mu\tan(\alpha)\theta_\beta + 6\mu^2\tan(\alpha)\theta_\beta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) + 3a\mu\\
&+ 3b^2\lambda_{i0}k_c\theta_\beta(\beta_{Pc}\zeta_{tr}+\dot\beta_{tr}) + 4b\lambda_{i0}^2k_c\theta_\beta + 4b\mu\theta_\beta(\beta_{Pc}\zeta_{tr}+\dot\beta_{tr})(\beta_{tr}+\beta_{Pc})\\
&+ 2b\mu(\dot\zeta_{tr}+\underline{1}) + 6\lambda_{i0}\mu\theta_\beta(\beta_{tr}+\beta_{Pc})) + \cos(\vartheta_{tr})\sin(2\psi)\mu(b\lambda_{i0}(k_c(\theta_\beta+2\zeta_{tr})\\
&+ k_s(\theta_\beta\zeta_{tr}+2)) + \frac{3}{2}\mu(\underline{\beta_{tr}}+\beta_{Pc})(\underline{\theta_\beta}+2\zeta_{tr}))\\
&+ \cos(\vartheta_{tr})\sin(\psi)(3\mu^2\tan(\alpha)(\theta_\beta+2\zeta_{tr}) + 2ab\lambda_{i0}k_s\theta_\beta + \frac{3}{2}b^2\lambda_{i0}k_s\theta_\beta(\dot\zeta_{tr}+1)\\
&+ 2b\mu\theta_\beta(\underline{\dot\beta_{tr}} - \zeta_{tr}(\beta_{tr}-\beta_{Pc})) + 4b\mu\dot\beta_{tr}\zeta_{tr} + \underline{3\mu\lambda_{i0}\theta_\beta} + 6\mu\lambda_{i0}\zeta_{tr})\\
&+ \cos(\vartheta_{tr})(\mu\tan(\alpha)\theta_\beta(3a+2b(\dot\zeta_{tr}+1)) + a\theta_\beta(2b\dot\beta_{tr}+3\lambda_{i0}) + \frac{3}{2}b^2\theta_\beta(\beta_{Pc}\zeta_{tr}\\
&+ \dot\beta_{tr}(\dot\zeta_{tr}+\underline{1})) + b\lambda_{i0}(k_c\mu(\theta_\beta\zeta_{tr}-2) + k_s\mu(\theta_\beta+2\zeta_{tr}) + 2\theta_\beta(\dot\zeta_{tr}+\underline{1}))\\
&+ \frac{3}{2}\mu^2(\beta_{Pc}\zeta_{tr}\theta_\beta - 2(\underline{\beta_{tr}}+\beta_{Pc}))) + \sin(2\psi)\sin(\vartheta_{tr})(\frac{3}{2}b^2k_ck_s\lambda_{i0}^2\theta_\beta\\
&+ 2b\lambda_{i0}\mu\theta_\beta(k_s(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) - k_c\beta_{tr}\zeta_{tr}) - 3\beta_{tr}\mu^2\theta_\beta\zeta_{tr}(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) + \frac{3}{2}\underline{\mu^2})\\
&+ \sin(\psi)\sin(\vartheta_{tr})\,(\mu\tan(\alpha)\theta_\beta(4b\lambda_{i0}k_s - 6\mu\beta_{tr}\zeta_{tr}) + b\lambda_{i0}k_s\theta_\beta(3b(\beta_{Pc}\zeta_{tr}\\
&+\dot\beta_{tr}) + 4\lambda_{i0}) - 2b\mu\zeta_{tr}(2\beta_{tr}\dot\beta_{tr}\theta_\beta+1) - 6\beta_{tr}\lambda_{i0}\mu\theta_\beta\zeta_{tr}\Big)\\
&+ \sin(\vartheta_{tr})\Big(3\theta_\beta(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha))^2 + 4b\mu\tan(\alpha)\theta_\beta(\beta_{Pc}\zeta_{tr}+\dot\beta_{tr})\\
&+ \frac{3}{4}b^2\theta_\beta(2\dot\beta_{tr}(2\beta_{Pc}\zeta_{tr}+\dot\beta_{tr}) + \lambda_{i0}^2(k_c^2+k_s^2)) + 2b\lambda_{i0}\mu\theta_\beta(k_c(\beta_{tr}+\beta_{Pc})\\
&-k_s\beta_{tr}\zeta_{tr}) + 4b\lambda_{i0}\theta_\beta(\dot\beta_{tr}+\beta_{Pc}\zeta_{tr}) + \frac{3}{2}\mu^2\theta_\beta(\beta_{tr}+\beta_{Pc})^2\Big) + \underline{2\dot\beta_{tr}}\Big)\\
&- \frac{R}{2\Delta}(k_\zeta - k_\beta)\Big(\underline{\sin(2\vartheta_{tr})} + 2\theta_\beta(\beta_{tr}\cos(2\vartheta_{tr}) - \zeta_{tr}\sin(2\vartheta_{tr}))\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{2,4} =& \frac{1}{12}I_{Bl}\gamma b^2\left(\cos(2\psi)\cos(\vartheta_{tr})\mu\,(b\lambda_{i0}(2k_s\beta_{tr} + \theta_\zeta(k_s - k_c\zeta_{tr}))\right.\\
&\left.-\frac{3}{2}\mu\zeta_{tr}\theta_\zeta(2\beta_{tr}+\beta_{Pc})\right) - \cos(2\psi)\sin(\vartheta_{tr})\left(\frac{3}{4}b^2\lambda_{i0}^2\theta_\zeta(k_c^2-k_s^2)\right.\\
&+ b\lambda_{i0}\mu(2k_c\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) + k_c + 2k_s\beta_{tr}\zeta_{tr}\theta_\zeta) + \frac{3}{2}\mu^2(\underline{2\beta_{tr}}+\beta_{Pc}\\
&\left.+\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc})^2)\right) - \cos(\psi)\cos(\vartheta_{tr})\,(3\mu\zeta_{tr}\theta_\zeta(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha))
\end{aligned}
\tag{A.4h}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2abk_c\lambda_{i0}\theta_\zeta + 3a\mu\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) - \frac{3}{2}b^2k_c\lambda_{i0}(2\beta_{Pc} - \theta_\zeta(\dot{\zeta}_{tr}+1)) \\
&-2b\mu(\underline{\beta_{tr}} + \beta_{Pc})(2\beta_{Pc} - \theta_\zeta(\dot{\zeta}_{tr}+\underline{1})) + 2b\mu\dot{\beta}_{tr}\zeta_{tr}\theta_\zeta\Big) \\
&- \cos(\psi)\sin(\vartheta_{tr})\Big(bk_c\lambda_{i0}\theta_\zeta(4(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha)) + 3b(\beta_{Pc}\zeta_{tr}+\dot{\beta}_{tr})) \\
&+4b\mu\beta_{Pc}\zeta_{tr}\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) + \mu(\underline{1}+2\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}))(\underline{2b\dot{\beta}_{tr}} + 3\mu\tan(\alpha) + \underline{3\lambda_{i0}})\Big) \\
&- \cos(\vartheta_{tr})\sin(2\psi)\mu\Big(b\lambda_{i0}(k_c(2\beta_{tr}+\theta_\zeta)+k_s\zeta_{tr}\theta_\zeta) + \frac{3}{2}\mu(\underline{2\beta_{tr}}+\underline{\theta_\zeta})(\underline{\beta_{tr}}+\beta_{Pc})\Big) \\
&- \cos(\vartheta_{tr})\sin(\psi)\Big(3\mu(\underline{2\beta_{tr}}+\underline{\theta_\zeta})(\underline{\lambda_{i0}}+\mu\tan(\alpha)) + bk_s\lambda_{i0}(2a\theta_\zeta - 3b\beta_{Pc} \\
&+\frac{3}{2}b\theta_\zeta(\dot{\zeta}_{tr}+1)) - 2b\mu\zeta_{tr}\theta_\zeta(\beta_{tr}-\beta_{Pc}) + 2b\mu\dot{\beta}_{tr}(\underline{2\beta_{tr}}+\underline{\theta_\zeta})\Big) \\
&- \cos(\vartheta_{tr})\Big((3a\theta_\zeta - 4b\beta_{Pc} + 2b\theta_\zeta(\dot{\zeta}_{tr}+\underline{1}))(\underline{\lambda_{i0}}+\mu\tan(\alpha)) + \dot{\beta}_{tr}\theta_\zeta(2ab \\
&+\frac{3}{2}b^2(\dot{\zeta}_{tr}+\underline{1})) + \frac{3}{2}\beta_{Pc}(\zeta_{tr}\theta_\zeta(b^2+\mu^2) - 2b^2\dot{\beta}_{tr}) + b\mu\lambda_{i0}(2k_s\beta_{tr}+k_c\zeta_{tr}\theta_\zeta + k_s\theta_\zeta)\Big) \\
&- \sin(2\psi)\sin(\vartheta_{tr})\Big(\frac{3}{2}b^2k_ck_s\lambda_{i0}^2\theta_\zeta + b\mu\lambda_{i0}(k_s+2k_s\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) - 2k_c\beta_{tr}\zeta_{tr}\theta_\zeta) \\
&-3\mu^2\beta_{tr}\zeta_{tr}\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc})\big) - \sin(\psi)\sin(\vartheta_{tr})\,(\theta_\zeta(4bk_s\lambda_{i0}(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha)) \\
&- 6\mu\beta_{tr}\zeta_{tr}(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha))) + 3b^2k_s\lambda_{i0}\theta_\zeta(\beta_{Pc}\zeta_{tr}+\dot{\beta}_{tr}) - 2b\mu(\underline{\beta_{tr}} - \beta_{Pc} \\
&+2\beta_{tr}\dot{\beta}_{tr}\zeta_{tr}\theta_\zeta)\Big) - \sin(\vartheta_{tr})\,((3\theta_\zeta(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha)) + 4b\beta_{Pc}\zeta_{tr}\theta_\zeta \\
&+ 4b\dot{\beta}_{tr}\theta_\zeta)(\lambda_{i0}+\mu\tan(\alpha)) + \frac{3}{2}b^2\dot{\beta}_{tr}\theta_\zeta(2\beta_{Pc}\zeta_{tr}+\dot{\beta}_{tr}^2) + \frac{3}{2}\beta_{Pc}(b^2+\mu^2) \\
&+ \frac{3}{4}b^2\lambda_{i0}^2\theta_\zeta(k_c^2+k_s^2) + b\mu\lambda_{i0}(k_c + 2k_c\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc}) - 2k_s\beta_{tr}\zeta_{tr}\theta_\zeta) \\
&+\frac{3}{2}\mu^2\theta_\zeta(\beta_{tr}+\beta_{Pc})^2\Big) - \mu\frac{C_{d0}}{C_{a\alpha}}\Big(\underline{4b\cos(\psi)} + \underline{3\mu\sin(2\psi)}\Big)\Big) \\
&- \frac{1}{2\Delta}\Big(\underline{2k_\zeta} - R(k_\zeta - k_\beta)\Big(\underline{1} - \underline{\cos(2\vartheta_{tr})} + 2\theta_\zeta(\zeta_{tr}\sin(2\vartheta_{tr}) - \beta_{tr}\cos(2\vartheta_{tr}))\Big)\Big) \\
&+ M_{Bl}(g(\cos(\alpha)\beta_{Pc} + \cos(\psi)\sin(\alpha)) - a)
\end{aligned}
$$

$$D_{3,1} = D_{4,2} = -1 \tag{A.4i}$$

$$D_{3,2} = D_{3,3} = D_{3,4} = D_{4,1} = D_{4,3} = D_{4,4} = 0 \tag{A.4j}$$

B. REDUCE-Skripte

B.1. Drehmatrizen.red

```
% Winkeldefinitionen
% ==================
% alpha      : Rotoranstellwinkel (mathmatisch negativ)
% psi        : Rotordrehwinkel
% b_pc       : Precone-Winkel (mathematisch negativ)
% beta(psi)  : Schlagwinkel (mathematisch negativ)
% zeta(psi)  : Schwenkwinkel
% theta(psi) : Torsionswinkel

% Koordinatensysteme(KOS)
% =======================
% S  : Schwerpunkt-System
% Ro : nichtdrehendes Rotor-System
% Dr : drehendes Rotor-System
% Pc : Precone System
% SS : Schlag-Schwenk-System
% P  : Blattprofil-System

% Drehmatrizen, "Ziel-KOS , Anfangs-KOS"
% --------------------------------------

SRo := mat(
        ( cos(alpha) , 0 , -sin(alpha) ),
        (     0      , 1 ,      0      ),
        ( sin(alpha) , 0 ,  cos(alpha) )
)$
RoS := SRo**(-1)$

RoDr := mat(
        ( cos(psi) , -sin(psi) , 0 ),
        ( sin(psi) ,  cos(psi) , 0 ),
        (    0     ,     0     , 1 )
)$
DrRo := RoDr**(-1)$

DrPc := mat(
        ( cos(b_pc) , 0 , -sin(b_pc) ),
        (    0      , 1 ,     0      ),
        ( sin(b_pc) , 0 ,  cos(b_pc) )
)$
PcDr := DrPc**(-1)$

PcSS := mat(
        ( cos(zeta) , -sin(zeta) , 0 ),
        ( sin(zeta) ,  cos(zeta) , 0 ),
        (     0     ,      0     , 1 )
) * mat(
        ( cos(beta) , 0 , -sin(beta) ),
        (     0     , 1 ,      0     ),
        ( sin(beta) , 0 ,  cos(beta) )
)$
SSPc := PcSS**(-1)$

SSP := mat(
        ( 1 ,     0      ,      0      ),
        ( 0 , cos(theta) , -sin(theta) ),
        ( 0 , sin(theta) ,  cos(theta) )
)$
PSS := SSP**(-1)$

SSRo := SSPc*PcDr*DrRo$
RoSS := SSRo**(-1)$

% Trigonometrische Regeln
% -----------------------

let {
        sin(~u)**2 + cos(~u)**2 => 1,
        sin(~a+~b) => sin(~a)*cos(~b)+cos(~a)*sin(~b),
        cos(~a+~b) => cos(~a)*cos(~b)-sin(~a)*sin(~b)
```

```
} $

% Verschiebung ins Schlag-Schwenkgelenk (Pc-KOS)
% --------------------------------------------

r_ss := mat(
        ( a ),
        ( 0 ),
        ( 0 )
)$

% Verschiebung in den Blattschwerpunkt
% ----------------------------------

r_bl := mat(
        ( x_p ),
        (  0  ),
        (  0  )
)$

% Aufpunkt im Inertialsystem (Ro-KOS)
% ----------------------------------

r_ro := RoDr*DrPc*r_ss + RoSS*SSP*r_bl$

% Ableitungen des Aufpunktes im Inertialsystem
% ------------------------------------------

depend  beta, psi;
depend  zeta, psi;
depend theta, psi;

r_p:=df(r_ro,psi)$
r_pp:=df(r_ro,psi,2)$

END;
```

B.2. traegheit.red

```
in "Drehmatrizen.red"$

% Hebelarm der Kraft (SS-KOS)
% --------------------------

heb_tr := PSS**(-1)*r_bl$

% Integrand der Kraft
% ------------------

int_force := SSRo*r_pp$

% Integrand des Moments
% --------------------

m_traeg := - mat(
        ( heb_tr(2,1)*int_force(3,1) - heb_tr(3,1)*int_force(2,1) ),
        ( heb_tr(3,1)*int_force(1,1) - heb_tr(1,1)*int_force(3,1) ),
        ( heb_tr(1,1)*int_force(2,1) - heb_tr(2,1)*int_force(1,1) )
)$

f_traeg := - r_pp$

% Substitutionen & Ordnungsschema:
% -------------------------------

x_p**2          := I_bl$
df(beta,psi,2)  := beta_pp$
df(zeta,psi,2)  := zeta_pp$
df(theta,psi,2) := theta_pp$

m_traeg := m_traeg$ f_traeg := f_traeg$

x_p           := m_bl$
df(beta,psi)  := beta_p$
df(zeta,psi)  := zeta_p$
df(theta,psi) := theta_p$

m_traeg := m_traeg$ f_traeg := f_traeg$

let {
        cos(beta)  => 1,
        sin(beta)  => beta,
        cos(zeta)  => 1,
        sin(zeta)  => zeta,
        cos(b_pc)  => 1,
        sin(b_pc)  => b_pc
```

```
}$

weight  beta       = 2,
        zeta       = 2,
        theta      = 1,
        sin(theta) = 1,
        beta_p     = 2,
        zeta_p     = 2,
        theta_p    = 1,
        beta_pp    = 2,
        zeta_pp    = 2,
        b_pc       = 2,
        sin(alpha) = 2,
        a          = 2$

% Ausgabe:
% ========

on list;
off nat;
off echo;

% ------------------------------------------------------------

out "M_traeg.red";

write "M_traeg := mat((";

wtlevel 20$
m_traeg(1,1);

write "),(";

wtlevel 5$
m_traeg(2,1);

write "),(";

wtlevel 5$
m_traeg(3,1);

Write "))$";

write "END;";

shut "M_traeg.red";

% ------------------------------------------------------------

out "F_traeg.red";

write "F_traeg := mat((";

wtlevel 3$
f_traeg(1,1);

write "),(";

wtlevel 3$
f_traeg(2,1);

write "),(";

wtlevel 5$
f_traeg(3,1);

write "))$";

write "END;";

shut "F_traeg.red";

BYE;
```

B.3. grav.red

```
in "Drehmatrizen.red"$

% Schwerkraftvektor (S-KOS)
% -------------------------

r_g := mat((0),(0),(-g))$

% diff. Schwerkraft (SS-KOS)
% -------------------------

```

```
dF_g := SSRo*RoS*r_g$

% Hebelarm im SS-KOS
% -----------------

heb_g := SSP*r_bl$

% diff. Moment d. Schwerkraft (SS-KOS)
% -----------------------------------

M_gew := mat(
        ( heb_g(2,1)*dF_g(3,1) - heb_g(3,1)*dF_g(2,1) ),
        ( heb_g(3,1)*dF_g(1,1) - heb_g(1,1)*dF_g(3,1) ),
        ( heb_g(1,1)*dF_g(2,1) - heb_g(2,1)*dF_g(1,1) )
)$

% diff. Schwerkraft im (Ro-KOS)
% ----------------------------

F_gew := RoS*r_g$

% Substitutionen
% -------------

x_p**2 := I_bl$

M_gew := M_gew$ F_gew := F_gew$

x_p := m_bl$

% Vereinfachung kleiner Winkel:
% ----------------------------

let {
        cos(beta)  => 1,
        sin(beta)  => beta,
        cos(zeta)  => 1,
        sin(zeta)  => zeta,
        cos(b_pc)  => 1,
        sin(b_pc)  => b_pc
}$

M_gew := M_gew$ F_gew := F_gew$

% Ordnungsschema
% -------------

weight  beta       = 2,
        zeta       = 2,
        theta      = 1,
        sin(theta) = 1,
        sin(alpha) = 2,
        b_pc       = 2,
        g          = 4$

% Ausgabe
% =======

on list;
off nat;
off echo;

% -------------------------------------------------------

out "M_gew.red";

write "M_gew := mat((";

wtlevel 20$
M_gew(1,1);

write "),(";

wtlevel 8$
m_gew(2,1);

write "),(";

wtlevel 9$
m_gew(3,1);

write "))$";

write "END;";

shut "M_gew.red";

% -------------------------------------------------------

out "F_gew.red";
```

```
write "F_gew :=";

wtlevel 6$
F_gew;

write "END;";

shut "F_gew.red";

BYE;
```

B.4. M_elast.red

```
% Ansatz nach Ormiston
% ===================

% R       : Schlag-Schwenk-Koppelung
% nu_beta : Eigenfrequenz Schlagbewegung
% nu_zeta : Eigenfrequenz Schwenkbewegung

% delta := 1 + R*( 1 - R )*( nu_zeta**2 - nu_beta**2 )**2*(1-cos(2*theta_0))
%                        /(2*nu_zeta**2*nu_beta**2)$
% p := r*(nu_zeta**2 - nu_bet**2)$

m_elast := I_bl* mat(
        (0),
        ( beta/delta*[ nu_beta**2 + p*sin(theta)**2]
         + zeta/(2*delta)*p*sin(2*theta) ),
        ( - zeta/delta*[ nu_zeta**2 - p*sin(theta)**2]
         - beta/(2*delta)*p*sin(2*theta) )
)$

END;
```

B.5. geschw.red

```
in "Drehmatrizen.red"$

% Anstroemgeschwindigkeiten
% -------------------------

v_ro := mat(
        (  mu ),
        (  0  ),
        (-lam )
) - r_p$

v_ss := SSRo*v_ro$

df(beta,psi) := beta_p$
df(zeta,psi) := zeta_p$
df(theta,psi) := theta_p$

v_ss := v_ss$

weight  sin(beta) = 2,
        sin(zeta) = 2,
        sin(theta) = 1,
        beta_p = 2,
        zeta_p = 2,
        theta_p = 1,
        sin(alpha) = 2,
        sin(b_pc) = 2,
        lam = 2,
        a = 2$

% Ausgabe
% =======

on list;
off nat;
off echo;

out "V_ss.red";

write "V_ss := mat((";

wtlevel 3$
v_ss(1,1);

write "),(";
```

```
wtlevel 3$
v_ss(2,1);

write "),(";

wtlevel 5$
v_ss(3,1);

write "))$";

write "END;";

shut "V_ss.red";

BYE;
```

B.6. luftkraefte.red

```
in "Drehmatrizen.red"$
in "V_ss.red"$

% differentielle Kraft in Schlag- bzw. Schwenk-Richtung des Profils
% ----------------------------------------------------------------

dF_beta := rho*c*C_aa/2 *[ v_t**2*sin(theta) - v_t*v_n*( cos(theta) + C_d0_aa ) ]$
dF_zeta := rho*c*C_aa/2 *[ v_n**2*cos(theta) - v_t*v_n*sin(theta) - v_t**2*C_d0_aa ]$

% Anstroemgeschwindigkeiten
% ------------------------

v_t := v_ss(2,1)$
v_n := v_ss(3,1)$

% Durchflussglg. einsetzen
% -----------------------

lam := mu*tan(alpha) + lam_i0*(1 + k_c*x_p*cos(psi) + k_s*x_p*sin(psi))$

let sin(psi)**2 => (1-cos(2*psi))/2$

% Durch Integration vom Auftriebsanfang (an) bis
% zum Auftriebsabfall (b) erhaelt man:
% ============================================

% Momente in Schlag- und Schwenkrichtung
% ------------------------------------

M_beta := int(-x_p*dF_beta , x_p , an , b )$
M_zeta := int( x_p*dF_zeta , x_p , an , b )$

% Kraefte in Schlag- und Schwenkrichtung
% ------------------------------------

F_beta := int( dF_beta , x_p , an , b )$
F_zeta := int( dF_zeta , x_p , an , b )$

% aerodynamischer Kraftvektor im Ro-System:
% ---------------------------------------

F_aero := RoSS*mat((0),(F_zeta),(F_beta))$

% aerodynamischer Momentenvektor im SS-System:
% ------------------------------------------

M_aero := mat((0),(M_beta),(M_zeta))$

% Substitution & Ordnungsschema:
% -----------------------------

let {
        c*rho*c_aa  => gamma*i_bl,
        cos(beta)   => 1,
        sin(beta)   => beta,
        cos(zeta)   => 1,
        sin(zeta)   => zeta,
        cos(b_pc)   => 1,
        sin(b_pc)   => b_pc
}$

weight  beta       = 2,
        zeta       = 2,
        sin(theta) = 1,
        beta_p     = 2,
        zeta_p     = 2,
        theta_p    = 1,
```

```
        b_pc       = 2,
        sin(alpha) = 2,
        tan(alpha) = 2,
        lam_i0     = 2,
        a          = 2,
        an         = 2,
        c_d0_aa    = 3$

% Ausgabe:
% ========

on list;
off nat;
off echo;

% ------------------------------------------------------------

out "M_aero.red";

write "M_aero := mat((";

wtlevel 0$
M_aero(1,1);

write "),(";

wtlevel 4$
M_aero(2,1);

write "),(";

wtlevel 6$
M_aero(3,1);

write "))$";

write "END;";

shut "M_aero.red";

% ------------------------------------------------------------

out "F_aero.red";

write "F_aero := mat((";

wtlevel 3$
f_aero(1,1);

write "),(";

wtlevel 3$
f_aero(2,1);

write "),(";

wtlevel 5$
f_aero(3,1);

write "))$";

write "END;";

shut "F_aero.red";

BYE;
```

B.7. m_daempf.red

```
% viskoser Daempfer:
% ------------------

M_vi := d_zeta*zeta_p$

% Elastomer Daempfer:
% -------------------
% (Ansatz Snyder)

M_em := d*(E_1*zeta+E_2*zeta_p+E_3*zeta**3+N/X_s*zeta-N)$

% Fluidelastischer Daempfer:
% --------------------------
% (linearer Ansatz)

M_fl := d*(c_r*zeta_p + c_v*(zeta_p - v_p) + k_r*zeta * k_v*(zeta-v))$

```

```
m_daempf := - mat(
        (         0         ),
        (         0         ),
        ( M_vi + M_em + M_fl )
)$

END;
```

B.8. abwind.red

```
in "F_aero.red"$

beta    := beta_0 + beta_s*sin(psi+phase) + beta_c*cos(psi+phase)$
beta_p  :=          beta_s*cos(psi+phase) - beta_c*sin(psi+phase)$
beta_pp :=        - beta_s*sin(psi+phase) - beta_c*cos(psi+phase)$

zeta    := zeta_0 + zeta_s*sin(psi+phase) + zeta_c*cos(psi+phase)$
zeta_p  :=          zeta_s*cos(psi+phase) - zeta_c*sin(psi+phase)$
zeta_pp :=        - zeta_s*sin(psi+phase) - zeta_c*cos(psi+phase)$

cos(theta) := cos(theta_0)*(1 - theta_s*theta_c*sin(psi+phase)*cos(psi+phase))
               -sin(theta_0)*(theta_c*cos(psi+phase) + theta_s*sin(psi+phase))$
sin(theta) := cos(theta_0)*(theta_s*sin(psi+phase) + theta_c*cos(psi+phase))
               +sin(theta_0)*(1 - theta_s*sin(psi+phase)*theta_c*cos(psi+phase))$
theta_p    :=           theta_s*cos(psi+phase) - theta_c*sin(psi+phase)$
theta_pp   :=         - theta_s*sin(psi+phase) - theta_c*cos(psi+phase)$

% frei Anstroemung
% ----------------

lam_fs := mu*tan(alpha)$

% ueber 4 Blaetter summieren
% -------------------------

phase := 0$

f_az1 := f_aero(3,1)$

phase := pi/2$

f_az2 := f_aero(3,1)$

phase := pi$

f_az3 := f_aero(3,1)$

phase := 3*pi/2$

f_az4 := f_aero(3,1)$

f_az := f_az1 + f_az2 + f_az3 + f_az4$

lamd := 2*lam_i0*sqrt(mu**2+(lam_fs+lam_i0)**2)
         - sig*C_aa/(n_bl*i_bl*gamma)*f_az$

% Ausgabe
% =======

on list;
off nat;
off echo;

% -----------------------------------------------------------

out "Lamd.red";

write "lamd :=";

lamd;

write "$";

write "END;";

shut "Lamd.red";

BYE;
```

B.9. thrust.red

```
in "Drehmatrizen.red"$
```

```
in "F_traeg.red"$
in "F_aero.red"$
in "F_gew.red"$
in "M_elast.red"$
in "M_daempf.red"$

% Hebelarm
% --------

rodrpsi := mat(
        ( cos(psi+phase) , -sin(psi+phase) , 0 ),
        ( sin(psi+phase) ,  cos(psi+phase) , 0 ),
        (       0        ,        0        , 1 )
)$

heb_th := RoDrpsi*DrPc*r_ss$

d_fsum := F_traeg + F_aero + F_gew$
d_msum := mat(
        ( heb_th(2,1)*d_fsum(3,1) - heb_th(3,1)*d_fsum(2,1) ),
        ( heb_th(3,1)*d_fsum(1,1) - heb_th(1,1)*d_fsum(3,1) ),
        ( heb_th(1,1)*d_fsum(2,1) - heb_th(2,1)*d_fsum(1,1) )
) - RoDrpsi*DrPc*(m_elast + m_daempf)$

let {
        cos(beta)  => 1,
        sin(beta)  => beta,
        cos(zeta)  => 1,
        sin(zeta)  => zeta,
        cos(b_pc)  => 1,
        sin(b_pc)  => b_pc
}$

d_fsum := d_fsum$
d_msum := d_msum$

beta    := beta_0 + beta_s*sin(psi+phase) + beta_c*cos(psi+phase)$
beta_p  :=          beta_s*cos(psi+phase) - beta_c*sin(psi+phase)$
beta_pp :=        - beta_s*sin(psi+phase) - beta_c*cos(psi+phase)$

d_fsum := d_fsum$
d_msum := d_msum$

zeta    := zeta_0 + zeta_s*sin(psi+phase) + zeta_c*cos(psi+phase)$
zeta_p  :=          zeta_s*cos(psi+phase) - zeta_c*sin(psi+phase)$
zeta_pp :=        - zeta_s*sin(psi+phase) - zeta_c*cos(psi+phase)$

d_fsum := d_fsum$
d_msum := d_msum$

sin(theta)**2 := ( - cos(2*theta_0) + 2*sin(2*theta_0)*(theta_s*sin(psi+phase)
                         + theta_c*cos(psi+phase)) + 1)/2$
sin(2*theta) := 2*cos(2*theta_0)*(theta_s*sin(psi+phase) + theta_c*cos(psi+phase))
                         + sin(2*theta_0)$

d_fsum := d_fsum$
d_msum := d_msum$

cos(theta) := cos(theta_0)*(1 - theta_s*theta_c*sin(psi+phase)*cos(psi+phase))
               -sin(theta_0)*(theta_c*cos(psi+phase) + theta_s*sin(psi+phase))$
sin(theta) := cos(theta_0)*(theta_s*sin(psi+phase) + theta_c*cos(psi+phase))
               +sin(theta_0)*(1 - theta_s*sin(psi+phase)*theta_c*cos(psi+phase))$
theta_p  :=          theta_s*cos(psi+phase) - theta_c*sin(psi+phase)$
theta_pp :=        - theta_s*sin(psi+phase) - theta_c*cos(psi+phase)$

d_fsum := d_fsum$
d_msum := d_msum$

% ueber 4 Blaetter summieren
% --------------------------

phase := 0$
f_gero1 := d_fsum$
m_gero1 := d_msum$

phase := pi/2$
f_gero2 := d_fsum$
m_gero2 := d_msum$

phase := pi$
f_gero3 := d_fsum$
m_gero3 := d_msum$

phase := 3*pi/2$
f_gero4 := d_fsum$
m_gero4 := d_msum$

f_gero := f_gero1 + f_gero2 + f_gero3 + f_gero4$

m_gero := m_gero1 + m_gero2 + m_gero3 + m_gero4$
```

```

END;
```

B.10. zelle.red

```
in "Drehmatrizen.red"$
in "thrust.red"$

% Zellenwiderstand aufstellen und in Ro-System transformieren
% ----------------------------------------------------------

W_z := mat(
        ( (I_bl*gamma*f_dz*C_dz_aa*mu**2)/2 ),
        (                 0                 ),
        (                 0                 )
)$

F_wz := RoS*W_z$

% Auf Zelle wirkende Gewichtskraft aufstellen und in Ro-System transformiern
% ------------------------------------------------------------------------

G_s := mat(
        (    0   ),
        (    0   ),
        ( -m_z*g )
)$

F_gz := RoS*G_s$

% Momente von F_w & F_g um Rotormittelpunkt mit Hebel {(0),(0),(-h)}
% -----------------------------------------------------------------

M_wz := mat(
        ( -(-h)*F_wz(2,1) ),
        (  (-h)*F_wz(1,1) ),
        (        0        )
)$

M_gz := mat(
        ( -(-h)*F_gz(2,1) ),
        (  (-h)*F_gz(1,1) ),
        (        0        )
)$

% Zusammenfassen:
% ---------------

F_ze := F_wz + F_gz + F_gero$

M_ze := M_wz + M_gz + M_gero$

% Naeherung kleiner Winkel:
% ------------------------

let {
        cos(beta) => 1,
        sin(beta) => beta,
        cos(zeta) => 1,
        sin(zeta) => zeta,
        cos(b_pc) => 1,
        sin(b_pc) => b_pc
}$

% Ausgabe
% =======

on list$
off nat$
off echo$

% ----------------------------------------------------------

out "M_ze.red";

write "M_ze := mat((";

m_ze(1,1);

write "),(";

m_ze(2,1);

write "),(";

m_ze(3,1);
```

```

write "))$";

Write "END;";

shut "M_ze.red";

% ------------------------------------------------------------

out "F_ze.red";

write "F_ze := mat((";

f_ze(1,1);

write "),(";

f_ze(2,1);

write "),(";

f_ze(3,1);

write "))$";

Write"END;";

shut "F_ze.red";

BYE;
```

B.11. trimmrechnung.red

```
in "Drehmatrizen.red"$
in "M_aero.red"$
in "M_traeg.red"$
in "M_gew.red"$
in "M_elast.red"$
in "M_daempf.red"$
in "F_ze.red"$
in "M_ze.red"$
in "Lamd.red"$

% Trimmvariablen definieren:
% -------------------------

n_bl := 4$

m_ges := m_aero + m_traeg + m_gew + m_elast + m_daempf$

m_ges := m_ges$
M_sin := m_ges*sin(psi)$
M_cos := m_ges*cos(psi)$

beta    := beta_0 + beta_s*sin(psi) + beta_c*cos(psi)$
beta_p  :=          beta_s*cos(psi) - beta_c*sin(psi)$
beta_pp :=        - beta_s*sin(psi) - beta_c*cos(psi)$

m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$

zeta    := zeta_0 + zeta_s*sin(psi) + zeta_c*cos(psi)$
zeta_p  :=          zeta_s*cos(psi) - zeta_c*sin(psi)$
zeta_pp :=        - zeta_s*sin(psi) - zeta_c*cos(psi)$

m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$

sin(theta)**2 := ( - cos(2*theta_0) + 2*sin(2*theta_0)*(theta_s*sin(psi)
                         + theta_c*cos(psi)) + 1)/2$
sin(2*theta) := 2*cos(2*theta_0)*(theta_s*sin(psi) + theta_c*cos(psi))
                         + sin(2*theta_0)$

m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$

cos(theta) := cos(theta_0)*(1 - theta_s*theta_c*sin(psi)*cos(psi))
               - sin(theta_0)*(theta_c*cos(psi) + theta_s*sin(psi))$
sin(theta) := cos(theta_0)*(theta_s*sin(psi) + theta_c*cos(psi))
               + sin(theta_0)*(1 - theta_s*sin(psi)*theta_c*cos(psi))$
theta_p  :=           theta_s*cos(psi) - theta_c*sin(psi)$
theta_pp :=         - theta_s*sin(psi) - theta_c*cos(psi)$

m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$

% fuer Fluidelastikdaempfer:
% -------------------------

%v   := v_0  + v_s*sin(psi)  + v_c*cos(psi)$
```

```
%v_p := v_0p   v_sp*sin(psi) + v_cp*cos(psi)$

%m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$

% Trigonometrische Beziehungen
% ----------------------------

let cos(psi)**6 => ( 15*cos(2*psi) + 6*cos(4*psi) + cos(6*psi) + 10 )/32$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**5*sin(psi) => ( 5*sin(2*psi) + 4*sin(4*psi) + sin(6*psi) )/32$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**5 => ( 10*cos(psi) + 5*cos(3*psi) + cos(5*psi) )/16$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**4*sin(psi)**2 => ( cos(2*psi) - 2*cos(4*psi) - cos(6*psi) )/32$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**4*sin(psi) => ( 2*sin(psi) + 3*sin(3*psi) + sin(5*psi) )/16$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**4 => ( 4*cos(2*psi) + cos(4*psi) + 3 )/8$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**3*sin(psi)**3 => ( 3*sin(2*psi) - sin(6*psi) )/32$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**3*sin(psi)**2 => ( 2*cos(psi) - cos(3*psi) - cos(5*psi) )/16$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**3*sin(psi) => ( sin(4*psi) + 2*sin(2*psi) )/8$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**3 => ( cos(3*psi) + 3*cos(psi) )/4$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**2*sin(psi)**4 => ( -cos(2*psi) - 2*cos(4*psi) + cos(6*psi) + 2 )/32$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**2*sin(psi)**3 => ( 2*sin(psi) + sin(3*psi) - sin(5*psi) )/16$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**2*sin(psi)**2 => ( -cos(4*psi) + 1 )/8$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**2*sin(psi) => ( sin(3*psi) + sin(psi) )/4$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)**2 => ( cos(2*psi) + 1 )/2$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)*sin(psi)**5 => ( 5*sin(2*psi) - 4*sin(4*psi) + sin(6*psi) )/32$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)*sin(psi)**4 => ( 2*sin(psi) + sin(3*psi) - sin(5*psi) )/16$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)*sin(psi)**3 => ( -sin(4*psi) + 2*sin(2*psi) )/8$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)*sin(psi)**2 => ( -cos(3*psi) + cos(psi) )/4$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let cos(psi)*sin(psi) => sin(2*psi)/2$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let sin(psi)**6 => ( 10 - 15*cos(2*psi) + 6*cos(4*psi) - cos(6*psi) )/32$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let sin(psi)**5 => ( 10*sin(psi) - 5*sin(3*psi) + sin(5*psi) )/16$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let sin(psi)**4 => ( -4*cos(2*psi) + cos(4*psi) + 3 )/8$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let sin(psi)**3 => ( -sin(3*psi) + 3*sin(psi) )/4$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$
let sin(psi)**2 => ( 1 - cos(2*psi) )/2$
 m_ges := m_ges$ m_sin := m_sin$ m_cos := m_cos$
 f_ze := f_ze$ m_ze := m_ze$ lamd := lamd$

% Rotortrimmgleichungen:
% =====================

% konstanter Anteil:
% ------------------

ro_trm_0 := mat(
```

```
        ( int(m_ges(2,1),psi,0,2*pi) ),
        ( int(m_ges(3,1),psi,0,2*pi) )
)/(2*pi)$

% Sinus-Anteil:
% -------------

ro_trm_s := mat(
        ( int(m_sin(2,1),psi,0,2*pi) ),
        ( int(m_sin(3,1),psi,0,2*pi) )
)/pi$

% Kosinus-Anteil:
% ---------------

ro_trm_c := mat(
        ( int(m_cos(2,1),psi,0,2*pi) ),
        ( int(m_cos(3,1),psi,0,2*pi) )
)/pi$

% Zellentrimmgleichungen:
% ======================

% Herausfiltern hoeherharmonischer Anteile
% ----------------------------------------

let {   cos(~m*psi) => 0,
        cos(psi) => 0,
        sin(~m*psi) => 0,
        sin(psi) => 0 }$

ze_trm_f := mat(
        ( f_ze(1,1) ),
        ( f_ze(3,1) )
)$

ze_trm_m := mat(
        ( m_ze(1,1) ),
        ( m_ze(2,1) )
)$

lam_trm := lamd$

% Strukturierung
% ==============

factor  beta_0, zeta_0, theta_0,
        beta_s, zeta_s, theta_s,
        beta_c, zeta_c, theta_c,
        b_pc, sin(alpha), cos(alpha)$
factor lam_i0, k_c, k_s$

order   beta_0,  beta_s,  beta_c,
        zeta_0,  zeta_s,  zeta_c,
        theta_0, theta_s, theta_c,
        b_pc, sin(alpha), cos(alpha),
        lam_i0, tan(alpha),
        nu_zeta, nu_beta$

% Ausgabe
% =======

on list;
off nat;
off echo;

out "Trimmrechnung.log";

write "ro_trm_0:";
ro_trm_0(1,1);
ro_trm_0(2,1);

write "------------------------------------------------------------";

write "ro_trm_s:";
ro_trm_s(1,1);
ro_trm_s(2,1);

write "------------------------------------------------------------";

write "ro_trm_c:";
ro_trm_c(1,1);
ro_trm_c(2,1);

write "------------------------------------------------------------";

write "ze_trm_f:";
ze_trm_f(1,1);
ze_trm_f(2,1);
```

```
write "------------------------------------------------------------";

write "ze_trm_m:";
ze_trm_m(1,1);
ze_trm_m(2,1);

write "------------------------------------------------------------";

write "lam_trm:";
lam_trm;

shut "Trimmrechnung.log";

% MATLAB-Transformation
% ====================

off list$

let {
        beta_0 => var(1),
        beta_s => var(2),
        beta_c => var(3),
        zeta_0 => var(4),
        zeta_s => var(5),
        zeta_c => var(6),
        theta_0 => var(7),
        theta_s => var(8),
        theta_c => var(9),
        lam_i0 => var(10),
        alpha => var(11),
        gamma => gam
}$

out "MATLAB.log";

ro_trm_0(1,1);
ro_trm_0(2,1);
ro_trm_s(1,1);
ro_trm_s(2,1);
ro_trm_c(1,1);
ro_trm_c(2,1);
ze_trm_f(1,1);
ze_trm_f(2,1);
ze_trm_m(1,1);
ze_trm_m(2,1);
lam_trm;

shut "MATLAB.log";

BYE;
```

B.12. system.red

```
in "Drehmatrizen.red"$
in "M_aero.red"$
in "M_traeg.red"$
in "M_gew.red"$
in "M_elast.red"$
in "M_daempf.red"$

m_ges := m_aero + m_traeg + m_gew + m_elast + m_daempf$

% Linearisierung
% -------------

beta    :=      beta_tr   + del_beta$
beta_p  :=      beta_trp  + del_beta_p$
beta_pp :=      beta_trpp + del_beta_pp$

m_ges := m_ges$

zeta    :=      zeta_tr   + del_zeta$
zeta_p  :=      zeta_trp  + del_zeta_p$
zeta_pp :=      zeta_trpp + del_zeta_pp$

m_ges := m_ges$

sin(theta)**2 := (cos(2*theta_tr)*(4*theta_beta*theta_zeta*del_beta*del_beta - 1)
                + 2*sin(2*theta_tr)*(theta_beta*del_beta + theta_zeta*del_zeta)
                + 1)/2$
sin(2*theta) := 2*cos(2*theta_tr)*(theta_beta*del_beta + theta_zeta*del_zeta)
                + sin(2*theta_tr)*(1 - 4*theta_beta*theta_zeta*del_beta*del_zeta)$

m_ges := m_ges$

sin(theta) := sin(theta_tr)*(1 - del_beta*del_zeta*theta_beta*theta_zeta)
```

```
                +cos(theta_tr)*(theta_beta*del_beta + theta_zeta*del_zeta)$
cos(theta) := cos(theta_tr)*(1 - del_beta*del_zeta*theta_beta*theta_zeta)
                -sin(theta_tr)*(theta_beta*del_beta + theta_zeta*del_zeta)$
theta_p :=      theta_trp + theta_beta*del_beta_p +theta_zeta*del_zeta_p$
theta_pp:=      theta_trpp+ theta_beta*del_beta_pp+theta_zeta*del_zeta_pp$

m_ges := m_ges$

% Vereinfachungen
% ---------------

weight  del_beta = 2,
        del_zeta = 2,
        del_beta_p = 2,
        del_zeta_p = 2,
        del_beta_pp = 2,
        del_zeta_pp = 2$
wtlevel 3$

m_ges := m_ges$

let {   del_beta        => db,
        del_beta_p      => dbp,
        del_beta_pp     => db2p,
        del_zeta        => dz,
        del_zeta_p      => dzp,
        del_zeta_pp     => dz2p}$

% Umwandlung in erste Ordnung x_pp = E * x_p(beta_p,zeta_p) ->
%         y = (beta_p,zeta_p,beta,zeta)
% ------------------------------------------------------------

g_matrix := mat(
        ( df(m_ges(2,1),db2p) , df(m_ges(2,1),dz2p) , 0 , 0 ),
        ( df(m_ges(3,1),db2p) , df(m_ges(3,1),dz2p) , 0 , 0 ),
        ( 0 , 0 , 1 , 0 ),
        ( 0 , 0 , 0 , 1 )
)$

d_matrix := mat(
        ( df(m_ges(2,1),dbp) , df(m_ges(2,1),dzp) , df(m_ges(2,1),db) , df(m_ges(2,1),dz) ),
        ( df(m_ges(3,1),dbp) , df(m_ges(3,1),dzp) , df(m_ges(3,1),db) , df(m_ges(3,1),dz) ),
        ( -1 , 0 , 0 , 0 ),
        ( 0 , -1 , 0 , 0 )
)$

A_matrix := -g_matrix**(-1)*d_matrix$

dphi := mat(
        ( phi(1) ),
        ( phi(2) ),
        ( phi(3) ),
        ( phi(4) )
)$

M := A_matrix*dphi$

% Ausgabe
% =======

off nat$
on list$
off echo$

% ----------------------------------------------------------------------------

out "A_mat.log"$

write "A-Matrix:"$

A_matrix;

shut "A_mat.log"$

% ----------------------------------------------------------------------------

off list$

out "M-Vektor.log"$

M(1,1);
M(2,1);
M(3,1);
M(4,1);

shut "M-Vektor.log"$

BYE;
```

C. MATLAB-Dateien

C.1. rotor.m

```
function rotor(damp,show)
% ROTOR(damp,show) calculates a rotorsystem
% ---------------------------------------------------------
% INPUT: damp = 0 - no lead-lag damper (default)
%               1 - viscous damper
%               2 - elastomeric damper
%               3 - fluidelastic damper (NOT YET WORKING)
%        show = 0 - stability over mu (default)
%               1 - trimm solution
%               2 - stability on complex plane
% ---------------------------------------------------------

if nargin < 2 || isempty(show), show = 0; end
if nargin < 1 || isempty(damp), damp = 0; end

% ---------------------------------------------------------
% set GLOBAL for constants, when needed
% ---------------------------------------------------------
global a,global an,global b,global b_pc,global c,global C_aa,global C_dz
global C_d0,global d,global f_dz,global g,global gam,global h,global i_bl
global i_btheta,global i_theta,global m_bl,global m_z,global nu_beta
global nu_zeta,global omega_beta,global omega_zeta,global r,global sig
global theta_beta,global theta_zeta,global y_s

% ---------------------------------------------------------
% constants
% ---------------------------------------------------------
omega = 44.5;                   % dimensional rotor-frequency [s^-1]
radius = 4.9;                   % dimensional rotor-radius [m]
mass = 23.4;                    % dimensional blade-mass [kg]
C_d0 = .01;                     % blade drag
C_aa = 5.9;                     % lift curve slope [rad^-1]
rho = 1;                        % dimensional air density [kg/m^3]
a = .15;                        % distance of fictional bearing
c = .055;                       % chord
an = a;                         % begining of aerodynamical effective area
b = 1;                          % end of aerodynamical effective aera
y_s = 0;                        % blade deflection of center of mass
h = .3;                         % cell deflection
gam = 5;                        % Lock-number
m_bl = .5;                      % blade-moment
i_bl = .333;                    % blade-flap-inertia
i_btheta = y_s*m_bl;            % blade-mass-inertia
i_theta_sp = 0.0002;            % blade-torsion-inertia in main-point
i_theta = i_theta_sp + y_s^2;   % blade-torsion-inertia in pivot
r = 0;                          % flap-lag-coupling coefficent
b_pc = 0;                       % precone-angle
mass_z = 2006.4;                % dimensional cell-mass [kg]
m_z = mass_z/mass;              % nondimensionalised cell-mass
C_dz = .8;                      % drag-coefficient of cell
f_dz = 1.0;                     % drag-area of cell
ge = 9.81;                      % dimensional gravitation [m/s^2]
g = ge/(radius*omega^2);        % nondimensionalised gravity
n_bl = 4;                       % number of blades
sig = n_bl*c/(pi*radius);       % rotor solidity
omega_beta = 1.15;              % eigenfrequency of flap-motion
nu_beta = sqrt(omega_beta^2 - 1 - a*m_bl/i_bl);
omega_zeta = 1.4;               % eigenfrequency of lead-lag-motion
nu_zeta = sqrt(omega_zeta^2 - a*m_bl/i_bl);
theta_beta = 0;                 % torsion-flap coupling
theta_zeta = 0;                 % torsion-lag coupling
d = a;                          % damper deflection

% ---------------------------------------------------------
% viscous lead-lag-damper
% ---------------------------------------------------------
global d_zeta
if damp == 1
    d_zeta = 0.72;
else
```

```
    d_zeta = 0;
end
% ---------------------------------------------------------
% elastomeric lead-lag damper
% ---------------------------------------------------------
global e_1,global e_2,global e_3,global n,global x_s
if damp == 2,
    e_1 = 0.2*1000^2/(mass*omega^2);
    e_2 = 0.005*1000^2/(mass*omega);
    e_3 = 0.04*1000^4*radius^2/(mass*omega^2);
    n = 35.6/(mass*radius*omega^2);
    x_s = 0.127/(1000*radius);
else
    e_1 = 0; e_2 = 0; e_3 = 0; n = 0; x_s = 1;
end
% ---------------------------------------------------------
% fluidelastic lead-lag damper
% ---------------------------------------------------------
global c_r,global c_v,global k_r,global k_v
if damp == 3
    k_r = 521.21;
    k_v = 384;
    c_r = 25.11;
    c_v = 6.26;
else
    c_r = 0; c_v = 0; k_r = 0; k_v = 0;
end

% ---------------------------------------------------------
% initial values for trimm calculation
% ---------------------------------------------------------
anfang = [ (0.7 - a)*m_z*g/(4*i_bl*nu_beta^2) ; 0 ; 0
           -rho*C_d0*(0.7*radius)^2*c*radius*(0.7 - a) ...
                    /(2*mass*i_bl*nu_zeta^2) ; 0 ; 0
           mass_z*g/(n_bl*rho*C_aa*radius^3*c/6) ; 0 ; 0
           sqrt(mass_z*g/(2*rho*pi*radius^3)) ; 0 ];

% ---------------------------------------------------------
% calculation
% ---------------------------------------------------------
if show == 0 || show ==1,
    mu = [];
    trimm = [];
    eta = [];
    for i = 0:.01:.4,
        tr = trimmrechnung(@trm_glg,anfang,i);
        mu = [mu i];
        if show == 1
            trm = tr*360/(2*pi);
            trm(10) = tr(10) + i*tan(tr(11));
            trm(12) = tr(length(tr)-1);
            trm(13) = tr(length(tr));
            trimm = [trimm trm];
        else
            mono = monodromie(@dphidpsi,tr,i);
            eigen = eig(mono);
            sigma = sort(log(abs(eigen))/(2*pi));
            % wenn Schwenkstabilitaet groesser als Schlagstabilitaet
            % muss SIGMA(1) anstelle von SIGMA(3) verwendet werden!
            eta = [eta -sigma(1)];
        end
        fprintf('mu = %.2f\n',i);
    end
else
    sm = [];
    em = [];
    mu = 0.3;
%    tr = trimmrechnung(@trm_glg,anfang,mu);
    tr(1:13) = 0;
    for r = 0:.2:1,
        s = [];
        et = [];
        for i = 0:.01:.5,
%            tr = trimmrechnung(@trm_glg,[anfang(1:6);i;anfang(8:11)],mu);
            tr(7)=0;
            tr(4)=0;
            mono = monodromie(@dphidpsi,tr,mu,[],i);
            eigen = eig(mono);
            sigma = sort(log(abs(eigen))/(2*pi));
            ata = sort(atan2(imag(eigen),real(eigen)));
            atang = [ata(3);ata(2);ata(4);ata(1)];
            if omega_zeta >= 1,
                if omega_zeta <= omega_beta,
                    atang = [ata(4);ata(1);ata(3);ata(2)];
                end
                div = 2*pi*[1;-1;1;-1];
            else
                div = 2*pi*[1;-1;-1;1];
            end
            eta = (atang + div)/(2*pi);
```

```
            s = [s sigma(3)];
            et = [et abs(eta(3))];
        end
        sm = [sm; s];
        em = [em; et];
        fprintf('R = %.1f\n',r);
    end
end

if show == 1,
% ---------------------------------------------------------
% Plotten der Trimmergebnisse ueber den Fortschrittsgrad:
%   Aufteilung in drei Teilgraphen, nach Groesse
%   der Variablen sortiert.
% ---------------------------------------------------------
    figure(1);

    subplot(3,1,1);
    plot(mu,trimm(7,:),'blue'),hold on;
    plot(mu,trimm(8,:),'green');
    plot(mu,trimm(11,:),'red');
    legend('\vartheta_0','\vartheta_s','\alpha',0);
    box on,grid on,hold off;

    subplot(3,1,2);
    plot(mu,trimm(1,:),'blue'),hold on;
    plot(mu,trimm(4,:),'green');
    plot(mu,trimm(9,:),'magenta');
    plot(mu,trimm(12,:),'red');
    plot(mu,trimm(13,:),'cyan');
    legend('\beta_0','\zeta_0','\vartheta_c','k_c','k_s',0);
    ylabel({'Winkel [\circ]';'\lambda, k_c, k_s [-]'});
    box on,grid on,hold off;

    subplot(3,1,3);
    plot(mu,trimm(2,:),'blue'),hold on;
    plot(mu,trimm(3,:),'green');
    plot(mu,trimm(5,:),'red');
    plot(mu,trimm(6,:),'cyan');
    plot(mu,trimm(10,:),'magenta');
    legend('\beta_s','\beta_c','\zeta_s','\zeta_c', ...
        '\lambda_{i0}\newline+ \mu tan(\alpha)',0);
    xlabel('Fortschrittsgrad \mu [-]');
    box on,grid on,hold off;

elseif show == 0,
% ---------------------------------------------------------
% Plotten der Stabilitaet ueber den Fortschrittsgrad:
% ---------------------------------------------------------
    figure(2);

    plot(mu,eta);
    xlabel('Fortschrittsgrad \mu [-]');
    ylabel('neg. Realteil -\sigma_\zeta [-]');
    box on,grid on,hold off;
else
% ---------------------------------------------------------
% Plotten der Stabilitaet in der komplexen Zahlenebene
% ---------------------------------------------------------
    figure(3);

    color = [0 0 1;0 1 0;1 0 0;0 1 1;1 0 1;0 0 0];
    for i=1:6,
        plot(sm(i,:),em(i,:),'Color',color(i,:)),hold on;
    end
    xlabel('Realteil \sigma_\zeta [-]');
    ylabel('Imaginaerteil \omega_\zeta [-]');
    legend('R = 0.0','R = 0.2','R = 0.4','R = 0.6','R = 0.8','R = 1.0',0);
    grid on,box on,hold off;
end
fprintf('--------------------------------------------------\n');
```

C.2. trimmrechnung.m

```
function t = trimmrechnung(func,x0,v,tol,max_it)
% Berechnung der Trimloesung
% EINGABE:   func = zu berechnende Funktion
%              x0 = Vektor mit Anfangswerten
%               v = Geschwindigkeit
%             tol = Toleranz/Schrittweite (default = 1e-6)
%          max_it = maximale Iteration (default = 300)
% AUSGABE:        x = Loesungsvektor
% ------------------------------------------------------------- %
%                                                               %
%  => Ausgabe ist zwei Stellen Groesser als Eingabefunktion <=  %
%                                                               %
```

```
% ------------------------------------------------------------ %

if nargin < 5 || isempty(max_it), max_it = 600; end
if nargin < 4 || isempty(tol), tol = 1e-6; end

it = 0;
x = x0;
f_akt = feval(func,x,v);
t = tol*norm(f_akt);

while ( norm(f_akt) > t ) && ( it < max_it )
    h = sqrt(eps)*(abs(x) + 1);
    % JACOBI-Matrix:
    for i = 1:length(x),
        y = x;
        y(i) = y(i) + h(i);
        f_neu = feval(func,y,v);
        A(:,i) = (f_neu - f_akt)/h(i);
    end
    if det(A) == 0,
        d = -A'*f_akt;
    else
        d = -A\f_akt;
    end
    x = x + d;
    f_akt = feval(func,x,v);
    it = it + 1;
end

if v == 0, % da sonst Division durch NULL
    k_c = 0;
else
    k_c = 4/3*((1 - 1.8*v^2)*sqrt(1 + ((v*tan(x(11)) + x(10))/v)^2)...
                - (v*tan(x(11)) + x(10))/v);
end

k_s = -2*v;

t = [ x ; k_c ; k_s ];
```

C.3. `monodromie.m`

```
function m = monodromie(func,trm,mu,dim,theta)
% Erstellt Monodromie-Matrix einer Funktion
% MONODROMIE(func,trm,mu,dim,theta)
% Eingabe:  func:   Funktion der Form phi_p(psi)=A(psi)*phi(psi)
%           trm:    Trimmergebnisse
%           mu:     Fortschrittsgrad (default = 0)
%           dim:    Dimension der Funktion (default = 4)
%           theta:  kollektiver Anstellwinkel (default = 0)

if nargin < 5 || isempty(theta), theta = 0; end
if nargin < 4 || isempty(dim), dim = 4; end
if nargin < 3 || isempty(mu), mu = 0; end

e = eye(dim);
m = zeros(dim);

for i = 1:dim,
    [t,p] = ode45(func,[0 2*pi],e(:,i),[],trm,mu,theta);
    m(:,i) = p(length(t),:)';
end
```