

ALEKSANDER ZELIĄŚ

## ZASTOSOWANIE FUNKCJI PRODUKCJI W RACHUNKU EFEKTYWNOŚCI EKONOMICZNEJ GOSPODARSTW CHŁOPSKICH

### UWAGI OGÓLNE

Podjmując niniejszą pracę postawiliśmy sobie za cel zbadanie związków występujących między produkcją rolniczą a poziomem czynników ją określających. Realizacja tego celu sprowadza się zasadniczo do wyznaczenia funkcji produkcji rolniczej. Badania nad funkcją produkcji w rolnictwie znajdują się nieco w tyle w stosunku do badań nad tego rodzaju funkcją w przemyśle. Nie podejmując w tym miejscu oceny przyczyn takiego stanu rzeczy, można zauważyć, że zainteresowanie metodami ekonometrycznymi w zastosowaniu do rolnictwa jest coraz to większe. W tym miejscu pragnę podkreślić duże zasługi zmarłego niedawno prof. dra inż. Jerzego Fiericha, kierownika Katedry Statystyki WSE w Krakowie, który był inicjatorem na szeroką skalę zastosowań metod matematyczno-statystycznych do badań problematyki rolniczej. Przedmiot niniejszej pracy stanowi analiza indywidualnych gospodarstw chłopskich przeprowadzona przy pomocy funkcji produkcji dla zmierzenia siły i kierunku działania takich czynników, jak ziemia, praca, inwentarz żywy, inwentarz martwy i nawozy mineralne.

Badania oparto na danych liczbowych z trzech lat gospodarczych (1960/61—1962/63) gospodarstw indywidualnych prowadzących rachunkowość rolną dla Instytutu Ekonomiki Rolnej. W pracy ograniczono się do analizy statycznej. Wybór statycznego aspektu analizy podyktowany został przede wszystkim pewnymi względami praktycznymi. Dla tego typu ujęcia bowiem znaleźć można było dostatecznie rzetelny materiał liczbowy, natomiast brak odpowiednich danych dla ujęcia problemu w aspekcie dynamicznym.

Przyjęta w niniejszej pracy funkcja produkcji jest rozszerzoną funkcją Cobb-Douglasa. Zastosowana w pracy postać matematyczna funkcji produkcji ma charakter stochastyczny, co oznacza, że obok zmiennych niezależnych wprowadzono pewien składnik losowy. W przeprowadzonej analizie główną uwagę zwracano na interpretację ekonomiczną, wynikającą z formalno-matematycznego wyrazu funkcji produkcji.

## WYBÓR POSTACI FUNKCJI PRODUKCJI

Dla sformułowania funkcji produkcji rolniczej mogą być użyte liczne postacie równań algebraicznych. Stąd też w badaniach produkcji rolnej pojawia się problem wyboru odpowiedniej postaci funkcji. Istnieją dwa przeciwstawne podejścia do tego zagadnienia. Jedni autorzy dokonują wyboru opierając się na znajomości praw produkcji i wynikach dotychczasowych badań, inni zaś nie formułują założeń dotyczących postaci funkcji, ale dane liczbowe zaczerpnięte z doświadczeń lub ze sprawozdawczości poddają analizie statystycznej i na tej podstawie wybierają najlepsze rozwiązanie. Ogólnie rzecz biorąc, najwłaściwsza będzie ta, dla której rozrzut dodatnich i ujemnych różnic między zaobserwowaną i przewidywaną produkcją będzie przypadkowy i wzajemnie niezależny. Chodzi głównie o otrzymanie przypadkowych, a niekoniecznie małych różnic. Jeśli wyżej wymienione kryterium jest spełnione, wówczas funkcja charakteryzuje adekwatnie dane liczbowe pochodzące z obserwacji.

Liczne prace badawcze dotyczące rolnictwa koncentrują się wokół funkcji, w której występuje jeden czynnik produkcji. W celu scharakteryzowania produkcji rolnej przy uwzględnieniu możliwie wszystkich czynników, dość często, zwłaszcza ostatnio, stosuje się funkcję wielu zmiennych. Funkcja produkcji z  $k$  zmiennymi niezależnymi może być przedstawiona jako:

$$Y=f(X_1, X_2, \dots, X_k) + \zeta, \quad (1)$$

gdzie  $Y$  jest produkcją,  $X_s$  stanowią zmienne objaśniające kształtowanie się wielkości produkcji, a  $\zeta$  jest zmienną losową (składnikiem losowym) o nadziei matematycznej zero.

Spośród wszystkich możliwych typów funkcji mających zastosowanie w badaniach produkcji rolniczej istnieją takie, które są stosowane częściej niż inne, bądź to ze względu na określone implikacje logiczne, bądź też ze względu na prostotę ich użycia. W analizie naszej ograniczymy możliwość wyboru funkcji do dwóch jej postaci.

## 1. Funkcja prostoliniowa:

$$Y'_i = a_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i} + \dots + a_k X_{ki} + \zeta_i = a_0 + \sum_{s=1}^k a_s \cdot X_{si} + \zeta_i \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie  $Y'_i$  — wielkość produkcji  $i$ -tego gospodarstwa obliczona z funkcji produkcji,  $X_{1i}$ ,  $X_{2i}$ , ...,  $X_{ki}$  — zmienne objaśniające kształtowanie się wielkości produkcji,  $a_0, a_1, \dots, a_k$  — parametry (współczynniki regresji cząstkowej), które szacuje się za pomocą metody najmniejszych kwadratów,  $\zeta_i$  — składnik losowy o nadziei matematycznej zero.

## 2. Funkcja potęgowa typu Cobb-Douglasa:

$$Y'_i = a_0 \cdot X_{1i}^{a_1} \cdot X_{2i}^{a_2} \dots X_{ki}^{a_k} \cdot 10^{\xi_i} = a_0 \cdot \prod_{s=1}^k X_{si}^{a_s} \cdot 10^{\xi_i} \quad (3)$$

( $i=1, 2, \dots, n$ ),

gdzie oznaczenia są analogiczne jak poprzednio.

Najczęściej autorzy, którzy stoją przed problemem wyboru postaci funkcji, opowiadają się za funkcją liniową<sup>1</sup>. W niniejszej pracy została zastosowana funkcja potęgowa typu Cobb-Douglasa o stałych elastycznościach cząstkowych produkcji. Do ustalenia technicznych relacji nakład — efekt równanie Cobb-Douglasa wydaje się najwłaściwsze z następujących względów:

1. Rozpatrywane prawidłowości w zasadzie nie muszą w każdym przypadku charakteryzować się prostoliniowością.

2. Przyjęta postać funkcji pozwala na przejście od powiązań krzywoliniowych do powiązań typu prostoliniowego przez transformowanie zaobserwowanych wartości poszczególnych zmiennych na logarytmy; przy tym utrzymane są w obliczeniach wzajemne oddziaływania.

3. Szukane parametry równania (3) można łatwo oszacować na podstawie metody najmniejszych kwadratów.

4. Algebraiczna postać podanej funkcji produkcji umożliwia uzyskanie względnej porównywalności siły działania poszczególnych czynników na produkcję. Trudno bowiem w wyrażeniu absolutnym porównywać ze sobą efekty dodatkowego działania dalszego hektara, dnia pracy i złoćówki nakładu na nawozy mineralne.

5. Funkcja jest szczególnie dogodna dla dokonywania porównań międzyregionalnych, a nawet międzykrajowych.

Przyjęty model funkcji ma charakter stochastyczny, co oznacza, że obok zmiennych niezależnych wprowadzono pewien składnik losowy. Konieczność uwzględniania składnika losowego w równaniu (3) wynika z następujących względów:

1. Względy techniczne i praktyczne nie pozwalają nigdy na wzięcie pod uwagę wszystkich zmiennych niezależnych, określających wielkość produkcji. Czynniki, które należałoby zbadać, są bowiem tak liczne, że najlepiej jest rozważać jednocześnie tylko działanie najbardziej istotnych.

2. Nie można wykluczyć, że przyjęta algebraiczna postać równania produkcji nie odpowiada dokładnie rzeczywiście istniejącej postaci analitycznej związku między produkcją a elementami nakładów, jakie występują w danej grupie gospodarstw i w danym okresie czasu. Istniejąca różnica powoduje, że zapisany związek między wymienionymi zmiennymi nie jest spełniony dokładnie, tak że wynikający stąd błąd można traktować jako pewien element losowy.

<sup>1</sup> Między innymi A. Brzoza, T. Marszałkiewicz, S. Waclawowicz i A. Woś.

3. Badany materiał liczbowy może nie być wystarczająco dokładny. Wartości przyjętych zmiennych obarczone są z natury rzeczy pewnymi błędami pomiarowymi, które można uznać za błędy losowe, tj. takie, które nie pojawiają się w sposób systematyczny, zależny np. od umiejętności i od rzetelności obserwatora.

4. Wprowadzenie obok zmiennych niezależnych składnika losowego ma istotne znaczenie praktyczne. Pozwala on bowiem na obliczenie stopnia dokładności szacunku parametrów funkcji produkcji oraz na ocenę rzędu dokładności wielkości produkcji.

Nieuniknione jest więc uwzględnienie składnika losowego, jeśli przyjęta algebraiczna postać funkcji produkcji ma poprawnie opisywać rzeczywistość.

Parametry  $a_s$  ( $s=1, 2, \dots, k$ ) w przyjętym równaniu produkcji (3) są współczynnikami elastyczności produkcji względem badanych czynników ekonomicznych  $X_s$ , wyrażającymi stosunek przyrostu procentowego wielkości produkcji do przyrostu procentowego każdej zmiennej niezależnej. Są one liczbami niemianowanymi i można z łatwością porównywać efekty działania poszczególnych czynników dla których zastosowano odmienne jednostki miary. Im mniejszy jest współczynnik elastyczności produkcji względem badanej zmiennej, tym słabszy jest wpływ tej zmiennej na wielkość produkcji.

Istotne znaczenie w tym zakresie ma produkcja krańcowa, która wykazuje następujące po sobie nieskończone drobne różnicowe przyrosty produkcji, powodowane powiększaniem nakładów czynnika wzrostu o jednostkę. Gdy  $a_s < 1$ , mamy do czynienia ze zmniejszającą się produkcją krańcową wraz ze wzrostem  $X_s$ . Jeśli  $a_s=1$ , wówczas przyrost produkcji przebiega proporcjonalnie do wzrostu  $X_s$  (liniowy wzrost produkcji), natomiast  $a_s > 1$  oznacza wzrastającą produkcję krańcową wraz ze wzrostem  $X_s$ .

Zwróćmy jeszcze uwagę na pewną charakterystyczną własność indywidualnych współczynników elastyczności czynników w funkcji Cobb-Douglasa. Jak wiadomo są one wykładnikami potęgowymi występującymi w funkcji produkcji (3). Elastyczności te można sumować i tą drogą określić stopień proporcji wzrostu produkcji w przypadku gdy nakład wszystkich czynników zwiększymy o jeden procent.

Jeśli  $\sum_{s=1}^k a_s < 1$ , to przyrosty produkcji są mniej niż proporcjonalne.

Jeśli  $\sum_{s=1}^k a_s = 1$ , to przyrosty produkcji są proporcjonalne.

Gdy  $\sum_{s=1}^k a_s > 1$ , to przyrosty produkcji są więcej niż proporcjonalne

(o ile nie pominięto żadnego czynnika, który ma istotne znaczenie).

Równanie Cobb-Douglasa zakłada stałą elastyczność produkcji w ca-

łym przedziale wielkości krzywej produkcji. Przyjęcie stałości parametrów  $a_s$  w funkcji produkcji (3) kryje w sobie hipotezę niezmiennej efektywności czynników produkcji  $X_s$ . Jest rzeczą wiadomą, że wszelkie relatywne zmiany między badanymi czynnikami produkcji, zachodzące w miarę mijania czasu, wpływają na zmianę parametrów, które w funkcji Cobb-Douglasa przyjęte zostały jako stałe. Trzeba dodać, że nie stworzono dotychczas takiej algebraicznej postaci funkcji produkcji, która by pozwalała na inne traktowanie parametrów. Przyjęcie potęgowej postaci funkcji produkcji pozwala, między innymi, na łatwiejsze szacowanie poszukiwanych parametrów. Mimo że przyjęta postać funkcji jest nieliniowa, może ona łatwo być przekształcona w funkcję liniową, przez przedstawienie wartości zmiennych w formie logarytmów<sup>2</sup>. W wyrażeniu logarytmicznym funkcja (3) ma postać:

$$\log Y_i = \log a_0 + a_1 \cdot \log X_{1i} + a_2 \log X_{2i} + \dots + a_k \log X_{ki} + \zeta_i. \quad (4)$$

Równanie to możemy również napisać w postaci:

$$P_i = A + a_1 \cdot Z_{1i} + a_2 \cdot Z_{2i} + \dots + a_k \cdot Z_{ki} + \zeta_i, \quad (5)$$

gdzie  $\log Y_i = P_i$ ,  $\log a_0 = A$ ,  $\log X_{1i} = Z_{1i}$ ,  $\log X_{2i} = Z_{2i}$ , ...,  $\log X_{ki} = Z_{ki}$ .

Funkcja (5) jest liniowa względem zmiennych  $P_i$ ,  $Z_{1i}$ ,  $Z_{2i}$ , ...,  $Z_{ki}$ . W celu wyznaczenia odpowiednich ocen parametrów  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_k$  równania produkcji (3) posłużono się metodą najmniejszych kwadratów. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów sprowadza się do znalezienia minimum dla poniższego równania:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (P_i - \sum_{s=1}^k a_s \cdot Z_{si} - A)^2 = \text{minimum}, \quad (6)$$

gdzie  $S_i$  jest wartością resztową równania:

$$\varepsilon_i = P_i - \sum_{s=1}^k a_s \cdot Z_{si} - A. \quad (7)$$

Po zróżniczkowaniu wyrażenia  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$  ze względu na poszczególne parametry i przyrównaniu cząstkowych pochodnych do zera, a następnie zsumowaniu otrzymanych równań normalnych otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^k a_s \sum_{i=1}^n Z_{1i} \cdot Z_{si} &= \sum_{i=1}^n Z_{1i} \cdot P_i, \\ \sum_{s=1}^k a_s \sum_{i=1}^n Z_{2i} \cdot Z_{si} &= \sum_{i=1}^n Z_{2i} \cdot P_i, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{s=1}^k a_s \sum_{i=1}^n Z_{ki} \cdot Z_{si} &= \sum_{i=1}^n Z_{ki} \cdot P_i \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>2</sup> Uwagi na temat transformacji prostoliniowej różnych funkcji nieliniowych można znaleźć w pracy Z. Hellwiga, *Regresja liniowa i jej zastosowanie w ekonomii*, Warszawa 1963, lub A. Lindera, *Statistische Methoden*, Basel — Stuttgart 1960.

Istnieje wiele metod rozwiązywania równań tego typu. Ogólnie omówione są one w pracy J. Łukaszewicza i K. Warmusa<sup>3</sup>. Szukane oceny parametrów funkcji produkcji (3) otrzymamy w drodze rozwiązania układu równań (8), posługując się metodą rozkładania macierzy<sup>4</sup>. Szacunku parametrów  $a_0, a_1, \dots, a_k$  równania produkcji (3) można dokonać również przy pomocy metody najmniejszych kwadratów, zastosowanej nie do logarytmów wartości poszczególnych zmiennych, lecz do ich pierwszych różnic<sup>5</sup>.

#### DOBÓR ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH

Najistotniejszym problemem w konstrukcji funkcji produkcji jest wybór zmiennych niezależnych, które mają być użyte do analizy<sup>6</sup>. Z wielu możliwych do uwzględnienia czynników produkcji zdecydowano się wybrać pięć podstawowych, które — jak się wydaje — są najistotniejsze i obejmują zdecydowaną większość ogółu „zatrudnionych” czynników produkcji; są to: ziemia ( $X_1$ ), praca ludzka ( $X_2$ ), inwentarz żywy ( $X_3$ ), inwentarz martwy trwały ( $X_4$ ), nawozy mineralne ( $X_5$ ).

W naszym badaniu zastosowano następujące miary zmiennej zależnej (Y): produkcję globalną, produkcję roślinną i produkcję zwierzęcą. Dzięki przyjęciu różnych miar zmiennej zależnej uzyskujemy możliwość badania efektywności wybranych czynników nie tylko w całym dziale wytwórczości rolniczej, ale również w wydzielonych działach produkcji. W tej pracy wielkość produkcji rolniczej określona jest wartościowo w cenach wolnorynkowych, jakie stosował Instytut Ekonomiki Rolnej do bilansowania ksiąg rachunkowych indywidualnych gospodarstw chłopskich. Obecnie przejdziemy do szczegółowego omówienia wymienionych poprzednio czynników produkcji.

Wszystkie użyte w badaniu zmienne wyrażone są w odniesieniu do jednego gospodarstwa. Rola ziemi jako czynnika produkcji została określona powierzchnią użytków rolnych w hektarach przeliczeniowych. W związku z tym uzyskujemy możliwość badania, czy i w jakim stopniu ziemia jako obszar wpływa na poziom produkcji rolniczej i wydzielonych jej działów. Praca ludzka obejmuje ogólny nakład pracy (członków ro-

<sup>3</sup> J. Łukaszewicz, M. Warmus, *Metody numeryczne i graficzne*, Warszawa 1956.

<sup>4</sup> S. Mynarski, *Rozkładanie macierzy przy szacowaniu parametrów funkcji popytu metodą najmniejszych kwadratów*, Przegląd Statystyczny 1962, nr 3.

<sup>5</sup> Podstawy teoretyczne i przykłady praktycznego zastosowania tej metody przedstawione zostały w pracy: Z. Pawłowski, *Elastyczność popytu na masło i roślinne tłuszcze jadalne w Polsce w latach 1950—1957*, Przegląd Statystyczny 1959, nr 1.

<sup>6</sup> W Polsce zagadnieniem wyboru i badaniem wpływu czynników na wydzielone działy produkcji zajmowali się między innymi: A. Brzoza, T. Marszałkiewicz, K. Rey, S. Waclawowicz i A. Woś.

dziny i najmu prywatnego) wydatkowanej w ciągu roku i wyrażonej w dniach na gospodarstwo. W niniejszych badaniach uwzględnia się tylko i wyłącznie nakład pracy żywej związanej z produkcją rolniczą (pominięto wszystkie prace związane z prowadzeniem gospodarstwa domowego i z zarobkowaniem poza gospodarstwem rolnym).

W stosunku do pozycji określających ilość zużytej pracy w gospodarstwie wysuwa się pewne zastrzeżenia. Gospodarstwa podają dni przepracowane przez każdego z członków rodziny<sup>7</sup> w przekroju miesięcznym i rocznym, z uwzględnieniem podziału na prace w gospodarstwie rolnym, domowym i prace osobiste. Oszacowanie rozmiaru pracy rodziny w gospodarstwie, a szczególnie rozdzielenie jej na poszczególne grupy (rolne, domowe i osobiste), jest w gospodarstwie chłopskim trudne. Poszczególne prace są tu silnie z sobą związane i wzajemnie się przeplatają. Jedynie korzystanie z pracy sił najemnych jest łatwo uchwytnie dla gospodarza, ponieważ ta pozycja jest kontrolowana przez rachunek wydatków.

Inwentarz żywy przeliczono na tzw. sztuki duże, które umożliwiają ujednoczenie produktywności poszczególnych gatunków zwierząt. Następnym czynnikiem wywierającym bezpośredni wpływ na wyniki produkcyjne gospodarstw jest inwentarz martwy trwały. Wartość inwentarza martwego została oszacowana według cen rynkowych maszyn i narzędzi rolniczych po potrąceniu amortyzacji. Roczna stawka amortyzacji waha się w zależności od rodzaju i jakości »maszyn od 3% do 10%. Maszyny i narzędzia rolnicze w gospodarstwie rolnym biorą udział w wielu kolejnych cyklach produkcji. W procesie produkcji nie zmieniają swej postaci naturalnej; zużywają się stopniowo, przenosząc na nowo wytworzony produkt tylko równą zużyciu część swojej wartości. Odtwarzane są one w swej postaci naturalnej (jeśli nie liczyć remontów przedłużających okres ich użytkowania) po ich całkowitym zużyciu fizycznym lub moralnym. Nakłady na nawozy mineralne zostały obliczone według cen bieżących, zmienna ta więc wyraża wydatki pieniężne poszczególnych gospodarstw na ich zakup.

W niniejszej pracy rozważano również możliwość wprowadzenia do badań odległości jako czynnika kształtującego produktywność gospodarstw chłopskich. Materiał wyjściowy uzyskany ze sprawozdawczości gospodarstw nie dał jednak pełnych podstaw do przeprowadzenia tego typu analizy.

Proponowane wyżej czynniki wzrostu umożliwią badanie, z pewnym stopniem przybliżenia, zależności pomiędzy ich ilością użytą w produkcji

<sup>7</sup> Pojęcie rodziny można traktować albo w sensie biologicznym, obejmując badaniem wszystkie osoby powiązane pokrewieństwem, bez względu na to, czy mieszkają one razem, czy też usamodzielniały się, albo w sensie zespołu osób spokrewnionych ze sobą i zamieszkujących razem, tj. tworzących gospodarstwo rodzinne. W naszym badaniu chodzi o drugie pojęcie rodziny.

a efektem. Nie uwzględnienie innych czynników wpływających na wyniki produkcyjne gospodarstw doprowadza do pewnego błędu, który nie może być całkowicie usunięty. Każde zwiększenie dokładności wymaga wzięcia pod uwagę nowych i jakościowo odmiennych przyczyn wpływających na wynik. Należy jednak przy tym zauważyć, że przyjmowanie od pewnego momentu dalszych, dodatkowych czynników komplikuje tylko rachunek, w małym stopniu zmieniając dokładność wyników.

#### USTALENIE FUNKCJI PRODUKCJI NA PODSTAWIE DANYCH EMPIRYCZNYCH

Materiał statystyczny, który wykorzystano w niniejszej pracy, zaczerpnięto z indywidualnych wyników gospodarstw chłopskich prowadzących rachunkowość rolną Instytutu Ekonomiki Rolnej. Badania przeprowadzone zostały w skali dwóch charakterystycznych okręgów rolniczych, nazywanych dalej rejonami: środkowo-zachodnim i wschodnim granicznym. Rejon środkowo-zachodni obejmuje województwa: poznańskie i bydgoskie; wschodni graniczny — województwa: białostockie, północną część lubelskiego oraz wschodnią część warszawskiego. Wybór dwóch wymienionych rejonów podyktowała potrzeba omówienia badanego zagadnienia w okręgach typowo rolniczych, charakteryzujących się odmienną strukturą agrarną i odmiennym sposobem gospodarowania, a jednocześnie porównania i przeciwstawienia ich sobie pod względem efektywności ekonomicznej poszczególnych rodzajów nakładów na produkcję. Zasadniczo wykorzystano dane odnoszące się do 81 gospodarstw, z tego 32 w rejonie środkowo-zachodnim i 49 w rejonie wschodnim granicznym. Gospodarstwa te zostały podzielone na następujące grupy obszarowe: 3—7 ha i 7—10 ha. Takie grupy ustala Instytut Ekonomiki Rolnej. Z analizy wyłączono gospodarstwa najmniejsze (poniżej 3 ha), jak i największe (powyżej 10 ha), z powodu bardzo małej ich liczebności.

Dla wyeliminowania wpływu warunków klimatycznych oraz uniknięcia przypadkowości posłużono się wynikami rachunkowości z trzech lat gospodarczych (1960/61—1962/63). W wyniku tak dokonanej selekcji próba zmniejszyła się w porównaniu do ogólnej liczby gospodarstw prowadzących rachunkowość rolną w wybranych rejonach. Dobór tylko tych gospodarstw pozwala na uniknięcie zniekształceń w wynikach na skutek zmienności badanej zbiorowości. Materiał liczbowy do analizy stanowiły zatem przeciętne dane gospodarstw chłopskich prowadzących w sposób ciągły zapisy rachunkowości rolnej w okresie trzyletnim. Zaznaczyć należy, że dostępny materiał sprawozdawczy był całkowicie surowy i nie nadawał się do bezpośredniego wykorzystania. Trzeba było więc uprzednio uporządkować go, sprawdzić oraz dokonać pewnych przeliczeń, a to celem umożliwienia porównań, co niewątpliwie wymagało wielu wysił-



ków i pracy. Należy jeszcze zwrócić uwagę, że dobór gospodarstw prowadzących rachunkowość nie ma charakteru losowego, uzyskane wyniki odnosić się więc będą bezpośrednio tylko do badanej grupy.

Olbrzymia ilość czynności rachunkowych przy opracowaniu funkcji produkcji na podstawie materiału zawartego w indywidualnych wynikach rachunkowości gospodarstw chłopskich, spowodowała ograniczenie zakresu pracy do dwóch rejonów rolniczych oraz do wyboru statycznego aspektu analizy. Dla ustalenia wpływu, jaki wywierają uwzględnione czynniki produkcji na wielkość produkcji badanych gospodarstw, posłużono się — o czym już wspomniano — funkcją (3) o postaci:

$$Y_i = a_0 \cdot X_{1i}^{a_1} \cdot X_{2i}^{a_2} \cdot X_{3i}^{a_3} \cdot X_{4i}^{a_4} \cdot X_{5i}^{a_5} \cdot 10^{\xi_i} \quad (9)$$

gdzie  $Y_i$  — wielkość produkcji  $i$ -tego gospodarstwa w zł, obliczona z funkcji produkcji,  $Y_{li}$  — powierzchnia użytków rolnych w ha przeliczeniowych,  $X_{2i}$  — nakłady pracy żywej na produkcję rolniczą w roboczo dniach,  $X_{3i}$  — inwentarz żywy w sztukach dużych,  $X_{4i}$  — inwentarz martwy trwałe w zł,  $X_{5i}$  — nakłady na nawozy mineralne w zł,  $a_0, a_1, \dots, a_5$  — parametry (współczynniki regresji cząstkowej dla zmiennych mierzonych w postaci logarytmicznej),  $\xi_i$  — składnik losowy o nadziei matematycznej zero.

Zmienną zależną ujmowano raz jako produkcję globalną w zł na jedno gospodarstwo, produkcję roślinną w zł na jedno gospodarstwo, produkcję zwierzęcą w zł na jedno gospodarstwo.

Funkcję produkcji (9) wyznaczono zarówno dla dwóch wybranych rejonów, jak i dla poszczególnych grup obszarowych. Obliczając wartości potrzebne dla uzyskania rozwiązania równań normalnych, otrzymujemy 18 układów równań o pięciu zmiennych niezależnych, a w rezultacie — 90 współczynników elastyczności produkcji. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1. Omówienie tych wyników przeprowadzono według poszczególnych działów produkcji, co pozwala na określenie różnic między ich elastycznościami.

Na podstawie zestawionych współczynników elastyczności zauważamy, że wzrost produkcji globalnej związany jest przede wszystkim z obszarem użytków rolnych, inwentarzem żywym i nakładami na nawozy mineralne. Stosunkowo słabiej reaguje produkcja na wzrost nakładów pracy i majątku trwałego w postaci maszyn i narzędzi rolniczych. Przy przechodzeniu od gospodarstw średnich do większych wzrost produkcji związany jest przede wszystkim ze zwiększeniem nakładów na nawozy mineralne. Szczególnie wyraźnie występuje to w rejonie środkowo-zachodnim. Gdy porównamy wyniki dwóch badanych rejonów, wtedy okaże się, że w rejonie środkowo-zachodnim przyrost produkcji w decydującej mierze związany jest ze wzrostem obszaru, nakładów pracy, inwentarza żywego i nakładów na nawozy mineralne, a we wschodnim granicznym — ze

wzrostem obszaru i inwentarza żywego. W rejonie wschodnim granicznym zrozumiała wydaje się słaba reakcja produkcji na wzrost nakładu pracy. Dodatkowe nakłady pracy żywej bez równoczesnego wzrostu nakładów na maszyny i narzędzia rolnicze nie są efektywne lub też są mało efektywne. Wynika stąd, że poprawa efektywności dodatkowych nakładów pracy jest możliwa tylko przez równoczesne zwiększenie nakładów materiałowych towarzyszących pracy żywej. W rejonie środkowo-zachodnim, charakteryzującym się wysokim wyposażeniem kapitałowym, wzrost nakładów na maszyny i narzędzia rolnicze daje minimalny efekt (najniższy współczynnik elastyczności produkcji). Efektywność wybranych czynników w dziale produkcji roślinnej i zwierzęcej w porównaniu z produkcją globalną kształtuje się nieco odmiennie. Na podstawie otrzymanych współczynników elastyczności możemy stwierdzić, że w rejonie I (środkowo-zachodnim) i II (wschodnim granicznym) obszar użytków rolnych ma niewątpliwie i bardzo wysoki wpływ na poziom produkcji roślinnej. Wzrost tej produkcji przy wzroście obszaru jest jednak zróżnicowany. Największy przyrost produkcji występuje w rejonie I ( $a_1 = 0,6697$ ). W rejonie I i II wielkość produkcji roślinnej nie jest tylko wynikiem wpływu obszaru, lecz i wysokiej efektywności nakładów na nawozy mineralne w rejonie I oraz maszyn i narzędzi rolniczych w rejonie II. Zarówno w rejonie I, jak i II gospodarstwa wykazują niski stopień przyrostu produkcji roślinnej, przy wzroście nakładów pracy żywej i inwentarza żywego. Produkcja zwierzęca wyłamuje się jednak z ram tych prawidłowości. Inwentarz żywy wyraźnie przoduje w określeniu zmienności produkcji, przy czym w rejonie II ma on decydującą przewagę nad pozostałymi czynnikami. Dalsze z nich: obszar, praca żywa, maszyny i narzędzia rolnicze oraz nawozy mineralne, w mniejszym lub większym stopniu wpływają na kształtowanie się faktycznej produkcji zwierzęcej. W rejonie I i II wzrost nakładów na maszyny i narzędzia rolnicze daje efekt ujemny, ponadto w rejonie I obserwujemy ujemną reakcję produkcji zwierzęcej na wzrost obszaru.

Obecnie zastanowimy się nad problematyką sumowania indywidualnych współczynników elastyczności. Jak się okazuje, elastyczności te możemy sumować i tą drogą określić, w jakiej proporcji będzie wzrastać produkcja, jeśli nakłady wszystkich czynników wzrosną o 1%.

Na podstawie załącznika do tabeli 1 można stwierdzić, że współczynnik

$$\alpha = \sum_{s=1}^5 a_s$$

odgrywa odmienną rolę w różnych rejonach i odmienną rolę w różnych grupach obszarowych. O ile w rejonie środkowo-zachodnim w każdym niemal przypadku suma elastyczności była mniejsza od jedności, wykazując przyrosty produkcji mniej niż proporcjonalne w stosunku do na-

Tabela 1

Równania funkcji produkcji na podstawie materiałów gospodarstw prowadzących rachunkowość rolną w rejonie środkowo-zachodnim i wschodnim granicznym w latach 1960/61 — 1962/63 (na jedno gospodarstwo)

Rodzaj produkcji	Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Równania funkcji produkcji	
		Rejon produkcyjny środkowo-zachodni	Rejon produkcyjny wschodni graniczny
Produkcja globalna	3—7	$Y = 13780 \cdot X_1^{0,2878} \cdot X_2^{0,0095} \cdot X_3^{0,1815} \cdot X_4^{0,0004} \cdot X_5^{0,1411}$	$Y = 1863 \cdot X_1^{0,2303} \cdot X_2^{0,2433} \cdot X_3^{0,5187} \cdot X_4^{0,0670} \cdot X_5^{0,0333}$
	7—10	$Y = 1225 \cdot X_1^{0,1214} \cdot X_2^{0,0435} \cdot X_3^{0,1933} \cdot X_4^{0,1789} \cdot X_5^{0,2285}$	$Y = 4801 \cdot X_1^{0,3583} \cdot X_2^{0,0019} \cdot X_3^{0,4559} \cdot X_4^{0,0246} \cdot X_5^{0,1404}$
	Razem	$Y = 5000 \cdot X_1^{0,2948} \cdot X_2^{0,1200} \cdot X_3^{0,1703} \cdot X_4^{0,0074} \cdot X_5^{0,1711}$	$Y = 5562 \cdot X_1^{0,2875} \cdot X_2^{0,0521} \cdot X_3^{0,4648} \cdot X_4^{0,0648} \cdot X_5^{0,0405}$
Produkcja roślinna	3—7	$Y = 7431 \cdot X_1^{0,6678} \cdot X_2^{0,1241} \cdot X_3^{0,4135} \cdot X_4^{0,0164} \cdot X_5^{0,1213}$	$Y = 451 \cdot X_1^{0,3705} \cdot X_2^{0,3161} \cdot X_3^{0,0919} \cdot X_4^{0,1347} \cdot X_5^{0,0464}$
	7—10	$Y = 1002 \cdot X_1^{0,6714} \cdot X_2^{0,0605} \cdot X_3^{0,0367} \cdot X_4^{0,0639} \cdot X_5^{0,2173}$	$Y = 5486 \cdot X_1^{0,5385} \cdot X_2^{0,1293} \cdot X_3^{0,1753} \cdot X_4^{0,0681} \cdot X_5^{0,1834}$
	Razem	$Y = 1979 \cdot X_1^{0,6697} \cdot X_2^{0,0668} \cdot X_3^{0,0483} \cdot X_4^{0,0230} \cdot X_5^{0,1668}$	$Y = 1824 \cdot X_1^{0,4000} \cdot X_2^{0,0722} \cdot X_3^{0,0861} \cdot X_4^{0,1294} \cdot X_5^{0,0589}$
Produkcja zwierzęca	3—7	$Y = 2994 \cdot X_1^{0,1811} \cdot X_2^{0,2663} \cdot X_3^{0,0388} \cdot X_4^{0,0162} \cdot X_5^{0,1565}$	$Y = 1937 \cdot X_1^{0,0881} \cdot X_2^{0,1429} \cdot X_3^{0,0861} \cdot X_4^{0,0071} \cdot X_5^{0,0209}$
	7—10	$Y = 313 \cdot X_1^{0,7502} \cdot X_2^{0,0452} \cdot X_3^{0,7039} \cdot X_4^{0,3459} \cdot X_5^{0,2585}$	$Y = 1145 \cdot X_1^{0,4662} \cdot X_2^{0,1033} \cdot X_3^{0,3487} \cdot X_4^{0,0443} \cdot X_5^{0,0887}$
	Razem	$Y = 2710 \cdot X_1^{0,0914} \cdot X_2^{0,2072} \cdot X_3^{0,2976} \cdot X_4^{0,0069} \cdot X_5^{0,1652}$	$Y = 4676 \cdot X_1^{0,1635} \cdot X_2^{0,0135} \cdot X_3^{0,2246} \cdot X_4^{0,0121} \cdot X_5^{0,0220}$

## Załącznik do tabeli 1

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Suma elastyczności					
	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej
3—7	0,5703	1,0621	0,2191	1,0926	0,9596	1,2461
7—10	0,7658	0,9814	0,5129	1,0023	0,5560	1,5686
Razem	0,7636	0,9746	0,5717	0,9097	0,7466	1,1115

kładów wszystkich czynników, o tyle w rejonie wschodnim granicznym tendencja ta jest wręcz przeciwna; suma elastyczności w większości przypadków była większa od jedności, wyrażając zgodnie z zasadą wykładników więcej niż proporcjonalny wzrost produkcji. Na podstawie danych zawartych w odpowiednich kolumnach i wierszach wyżej wymienionej tabeli możemy stwierdzić, co jest tego przyczyną. W rejonie wschodnim granicznym, który cechuje niskie wyposażenie kapitałowe, zrozumiała wydaje się szczególnie efektywność dodatkowych nakładów wszystkich czynników będących tam w minimum. W rejonie środkowo-zachodnim, o stosunkowo wysokim nakładzie materiałowym na gospodarstwo, wzrost tych samych czynników powoduje mniej niż proporcjonalny wzrost produkcji (malejąca -efektywność dodatkowych nakładów). W toku analizy okazało się celowe obliczenie również indeksów korelacji i determinacji łącznej. Indeks korelacji wielorakiej pozwala ocenić siłę związku między zmienną zależną a przyjętymi do badania zmiennymi niezależnymi. Obliczone przez nas indeksy korelacji wielorakiej przy pięciu zmiennych niezależnych podaje tabela 2.

Tabela 2

## Indeksy korelacji i determinacji wielorakiej (na jedno gospodarstwo)

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Wartość indeksu korelacji wielorakiej pomiędzy:					
	wartością produkcji globalnej	wartością produkcji roślinnej	wartością produkcji zwierzęcej	wartością produkcji globalnej	wartością produkcji roślinnej	wartością produkcji zwierzęcej
	a zespołem badanych zmiennych					
3—7	0,731	0,814	0,658	0,911	0,837	0,847
7—10	0,910	0,925	0,865	0,792	0,800	0,700
Razem	0,848	0,945	0,785	0,843	0,787	0,783
3—7	0,534	0,663	0,434	0,831	0,701	0,717
7—10	0,828	0,855	0,749	0,627	0,640	0,490
Razem	0,719	0,893	0,616	0,711	0,620	0,613

Jak widzimy, korelacja między zmiennymi wynikowymi a zespołem przyjętych zmiennych niezależnych jest dość wysoka. Indeksy korelacji są rzędu  $r=0,658$  do  $0,945$ . Wartości indeksów korelacji wielorakiej dowodzą, że mamy do czynienia z istotnymi<sup>1</sup> związkami między produkcją rolniczą a przyjętymi w badaniu czynnikami produkcji. Powstaje teraz pytanie, w jakim stopniu przyjęte czynniki wpływają na wartość produkcji oraz jaki margines pozostaje dla innych, nie uwzględnionych czynników. Odpowiedź na to pytanie dają indeksy determinacji wielorakiej. Ogólnie można stwierdzić stosunkowo silną determinację produkcji przez omawiane czynniki produkcji. Jak widać z tabeli 2, czynniki powyższe wzięte łącznie wyjaśniają najczęściej 80—60% ogólnej zmienności wartości produkcji globalnej, roślinnej i zwierzęcej w rejonie I (środkowo-zachodnim) i II (wschodnim granicznym). O pozostałych 20—40% zmienności decyduje układ czynników, których nie uwzględniono.

Obliczone indeksy determinacji wielorakiej potwierdzają praktyczną przydatność przyjętej postaci funkcji.

Z kolei obliczymy wartość odchylenia standartowego składnika losowego, tj. średnią różnicę pomiędzy rzeczywistym poziomem zmiennej zależnej (Y) a poziomem zmiennej zależnej obliczonym z funkcji produkcji (Y'). Wynik tych obliczeń zestawiony został w tabeli 3. Z tabeli 3 wynika, że błąd standartowy oceny<sup>8</sup> mieści się w granicach kilku tysięcy złotych. Jedynie w rejonie środkowo-zachodnim osiąga 15 tys. zł, co jednak w zestawieniu z przeciętną wielkością produkcji globalnej na gospodarstwo w tym rejonie stanowi około 12%. Różnice pomiędzy rzeczywistym poziomem zmiennej zależnej a poziomem obliczonym z funkcji produkcji możemy traktować jako ocenę wielkości składnika losowego.

Tabela 3

Odchylenie standartowe składnika losowego — błąd standartowy oceny —  
(na jedno gospodarstwo)

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Wartość odchylenia standartowego					
	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej
3—7	12133,62	6318,82	6258,11	6605,18	4488,21	4806,08
7—10	14416,68	7364,93	8859,38	9492,49	5142,91	6747,48
Razem	15935,43	7365,56	10142,32	9154,56	5828,91	6186,64

<sup>8</sup> Ze względu na to, że nazwa „błąd standartowy oceny” jest powszechnie używana w większości podręczników statystyki teoretycznej, będziemy jej nadal używać, obok nazwy „odchylenie standartowe składnika losowego”, dla określenia pierwiastka kwadratowego wariancji resztowej.

Dla celów analizy porównawczej w skali omawianych rejonów, jak i w ramach poszczególnych grup obszarowych bardziej wymowne i łatwiej porównywalne są błędy standartowe wyrażone w procentach. Dla uzyskania procentowych odchyłeń standartowych składnika losowego zastosowano wzór:

$$S_{y \cdot X_s} = \sqrt{\frac{\sum [\log(\varepsilon)^2]}{N}}, \quad X_s = (X_1, X_2, \dots, X_k), \quad (10)$$

gdzie

$$\varepsilon = \left[ \left( \frac{Y}{Y'} \cdot 100 \right) - 100 \right],$$

tzn. jest arbitralnym odchyleniem względnym.

Wyniki tych obliczeń zestawiono w tabeli 4. Porównując procentowe odchylenia standartowe zauważamy, że rozbieżności między produkcją rzeczywistą a teoretyczną są względnie niewielkie. Dowodzi to, że wybrana postać funkcji produkcji dobrze odzwierciedla zależność pomiędzy zmienną wynikową a każdym z przyjętych czynników ją określających.

Tabela 4

Odchylenie standartowe składnika losowego — błąd standartowy oceny —  
(na jedno gospodarstwo)

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Odchylenie standartowe (w %)					
	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej
3—7	5,05	11,13	5,58	6,99	7,38	10,43
7—10	4,73	3,86	9,15	6,26	8,15	8,33
Razem	6,25	7,72	10,51	7,36	10,16	10,92

Jedynie dla produkcji zwierzęcej średnie błędy oszacowania kształtują się mniej korzystnie, co prowadzi do wniosku, że trzeba na podstawie analizy jakościowej dokonać zmian w konstrukcji funkcji bądź to wprowadzając dodatkowe zmienne niezależne, czy też poprzez wymianę stosowanych dotychczas zmiennych na inne, lepiej objaśniające zmiany funkcji produkcji.

Przechodząc z kolei do analizy tabeli 1 zauważamy, że niektóre współczynniki elastyczności wyrażające reakcję produkcji na jednostkę nakładu były ujemne i wymagają jeśli nie pełnego uzasadnienia, to przynajmniej próby interpretacji ekonomicznej. W rzeczywistości żaden czynnik produkcji nie może dać efektu ujemnego, pod warunkiem, że jest stosowany racjonalnie i w odpowiednich proporcjach z innymi czynnikami. Może się jedynie okazać, że jakiś czynnik przyjęty do badań wywiera na przebieg analizowanego zjawiska wpływ mały, nieistotny, lub

Tabela 5

Równania funkcji produkcji na podstawie materiałów gospodarstw prowadzących rachunkowość rolną w rejonie środkowo-zachodnim i wschodnim granicznym w latach 1960/61 — 1962/63 (na jedno gospodarstwo)

Rodzaj produkcji	Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny		Rejon produkcyjny wschodni graniczny
		środkowo-zachodni	wschodni	
Równania funkcji produkcji				
Produkcja globalna	3—7	$Y = 13780 \cdot X_1^{0,2378} \cdot X_2^{0,0095} \cdot X_3^{0,1815} \cdot X_4^{0,0004} \cdot X_5^{0,1411}$		$Y = 1863 \cdot X_1^{0,2303} \cdot X_2^{0,2433} \cdot X_3^{0,5187} \cdot X_4^{0,0670} \cdot X_5^{0,0333}$
	7—10	$Y = 1225 \cdot X_1^{0,1214} \cdot X_2^{0,0435} \cdot X_3^{0,1935} \cdot X_4^{0,1789} \cdot X_5^{0,2285}$		$Y = 4579 \cdot X_1^{0,3482} \cdot X_3^{0,5107} \cdot X_4^{0,0249} \cdot X_5^{0,1405}$
	Razem	$Y = 5000 \cdot X_1^{0,2948} \cdot X_2^{0,1200} \cdot X_3^{0,1703} \cdot X_4^{0,0074} \cdot X_5^{0,1711}$		$Y = 5562 \cdot X_1^{0,2875} \cdot X_2^{0,0521} \cdot X_3^{0,4648} \cdot X_4^{0,0648} \cdot X_5^{0,0405}$
Produkcja roślinna	3—7	$Y = 3711 \cdot X_1^{0,6495} \cdot X_3^{0,2620} \cdot X_5^{0,1267}$		$Y = 451 \cdot X_1^{0,3705} \cdot X_2^{0,3161} \cdot X_3^{0,0919} \cdot X_4^{0,1347} \cdot X_5^{0,0464}$
	7—10	$Y = 1024 \cdot X_1^{0,6357} \cdot X_2^{0,0470} \cdot X_4^{0,0656} \cdot X_5^{0,2296}$		$Y = 2413 \cdot X_1^{0,3183} \cdot X_3^{0,0039} \cdot X_4^{0,0861} \cdot X_5^{0,1573}$
	Razem	$Y = 1979 \cdot X_1^{0,6697} \cdot X_2^{0,0668} \cdot X_3^{0,0483} \cdot X_4^{0,0230} \cdot X_5^{0,1668}$		$Y = 1824 \cdot X_1^{0,4000} \cdot X_2^{0,0722} \cdot X_3^{0,0861} \cdot X_4^{0,1294} \cdot X_5^{0,0589}$
Produkcja zwierzęca	3—7	$Y = 3770 \cdot X_2^{0,2053} \cdot X_4^{0,0084} \cdot X_5^{0,1406}$		$Y = 1937 \cdot X_1^{0,0881} \cdot X_2^{0,1429} \cdot X_3^{0,9871} \cdot X_4^{0,0071} \cdot X_5^{0,0209}$
	7—10	$Y = 423 \cdot X_3^{0,4419} \cdot X_4^{0,3604} \cdot X_5^{0,0407}$		$Y = 729 \cdot X_1^{0,4502} \cdot X_2^{0,1473} \cdot X_3^{0,8716} \cdot X_5^{0,0808}$
	Razem	$Y = 2519 \cdot X_2^{0,2246} \cdot X_3^{0,2176} \cdot X_5^{0,1487}$		$Y = 4161 \cdot X_1^{0,1579} \cdot X_2^{0,0213} \cdot X_3^{0,9053} \cdot X_5^{0,0312}$

nie wywiera go wcale. Należy przypuszczać, że niektóre otrzymane ujemne elastyczności produkcji wynikły z następujących powodów:

1. braku proporcjonalności między czynnikami produkcji użytymi do badań w rozpatrywanych gospodarstwach, bowiem każdy z czynników w procesie produkcji nie działa samodzielnie i niezależnie od pozostałych;

2. małej racjonalizacji dotychczas ponoszonych nakładów (umiejętność gospodarowania);

3. małej adekwatności danych statystycznych;

4. małej liczebności zbadanych gospodarstw (niezbyt liczna próba).

Referowane tu zagadnienie wymaga jednak pewnego wyjaśnienia, które dostarczyłoby umotywowanej odpowiedzi w sprawie ujemnego wpływu niektórych czynników na poziom produkcji określonego działu. Ujemne wielkości niektórych parametrów stałych w równaniu funkcji aproksymacyjnej każą wstępnie przypuszczać, że jakaś zmienna niezależna nie ma istotnego wpływu na rozmiar badanej przez nas produkcji. Wówczas opuszczamy tę zmienną i wyznaczamy funkcję produkcji tylko dla pozostałych zmiennych niezależnych, tj. przechodzimy od równania produkcji z  $k$  zmiennymi do równania produkcji z  $(k-g)$  zmiennymi<sup>9</sup>. Postępując zgodnie z przyjętą tezą, wyniki ponownych obliczeń zamieszczono w tabeli 5.

Dla sprawdzenia, jak kształtują się współczynniki

$$\alpha = \sum_{s=1}^k a_s,$$

indeksy korelacji i determinacji wielorakiej oraz odchylenia standartowe składnika losowego w warunkach wstępnej eliminacji z funkcji produkcji tych zmiennych niezależnych, dla których współczynniki elastyczności  $a_s$  były mniejsze od zera, opracowano analogicznie jak poprzednie tabele.

Załącznik do tabeli 5

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Suma elastyczności					
	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej
3-7	0,5703	1,0382**	0,3543*	1,0926	0,9596	1,2461
7-10	0,7658	0,9779*	0,8430*	1,0243*	0,5878*	1,5499*
Razem	0,7636	0,9746	0,5909*	0,9097	0,7466	1,1057*

\* Przez znak \* rozumiemy wartości współczynników  $\alpha$  obliczone po wyłączeniu z funkcji produkcji tych zmiennych niezależnych, dla których współczynniki elastyczności były mniejsze od zera. Analogiczne oznaczenia wprowadzono w następnych tablicach.

<sup>9</sup> Przez symbol  $g$  rozumiemy ilość zmiennych niezależnych, dla których współczynniki elastyczności przyjęły wartości ujemne.



Tabela 6

Indeksy korelacji i determinacji wielorakiej (na jedno gospodarstwo)

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Wartość indeksu korelacji wielorakiej pomiędzy:					
	wartością produkcji globalnej	wartością produkcji roślinnej	wartością produkcji zwierzęcej	wartością produkcji globalnej	wartością produkcji roślinnej	wartością produkcji zwierzęcej
	a zespołem badanych zmiennych					
3—7	0,731	0,819*	0,646*	0,911	0,837	0,847
7—10	0,910	0,924*	0,873*	0,801*	0,784*	0,715*
Razem	0,848	0,945	0,786*	0,843	0,787	0,782*
3—7	0,534	0,671*	0,418*	0,831	0,701	0,717
7—10	0,828	0,854*	0,762*	0,642*	0,615*	0,512*
Razem	0,719	0,893	0,617*	0,711	0,620	0,612*

Tabela 7

Odchylenie standartowe składnika losowego — błąd standartowy oceny —  
(na jedno gospodarstwo)

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Wartość odchylenia standartowego					
	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej
3—7	12133,62	6245,31*	6344,86*	6605,18	4488,21	4806,08
7—10	14416,68	7376,04*	8627,34*	9305,91*	5313,98*	6599,90*
Razem	15935,43	7365,56	10118,04*	9154,56	5828,91	6194,94*

Tabela 8

Odchylenie standartowe składnika losowego — błąd standartowy oceny  
(na jedno gospodarstwo)

Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
	Odchylenie standartowe (w %)					
	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej	produkcji globalnej	produkcji roślinnej	produkcji zwierzęcej
3—7	5,05	10,67*	5,63*	6,99	7,38	10,43
7—10	4,73	3,86*	9,45*	6,18*	8,22*	6,53*
Razem	6,25	7,72	10,49*	7,36	10,16	10,53*

Porównanie danych w tabelach 1, 2, 3 i 4 z danymi w tabelach 5, 6, 7 i 8 wskazuje, że wielkości te kształtują się podobnie. Z tych też względów zachodzi konieczność bardziej szczegółowego omówienia zagadnienia co do decyzji utrzymania albo wyeliminowania z funkcji produkcji zmiennych, dla których współczynniki elastyczności były mniejsze od zera. Jeśli ujemne elastyczności dotyczące danego poziomu zmiennej niezależnej mają być utrzymane lub wyłączone z funkcji produkcji, to proponujemy postępowanie, w którym należy porównać wariancję resztową przy  $k$  zmiennych niezależnych z wariancją resztową przy  $k-g$  zmiennych.

Jeśli wariancja resztowa przy  $k$  zmiennych będzie się istotnie różnić od wariancji przy  $(k-g)$  zmiennych dla przyjętego z góry poziomu istotności, to można przypuszczać, że dany czynnik wywiera istotny wpływ na poziom produkcji. Na odwrót, jeżeli okaże się, że wariancja resztowa przy  $k$  zmiennych będzie nieistotnie różnić się od wariancji resztowej przy  $(k-g)$  zmiennych, to można wnioskować, że dany czynnik nie wywiera istotnego wpływu na przebieg badanej produkcji.

Tego rodzaju podejście wydaje się właściwe zarówno z punktu widzenia merytorycznego, jak i z formalnonstatystycznego. Dla zweryfikowania hipotezy, że wariancje resztowe przy  $k$  zmiennych i przy  $(k-g)$  zmiennych są jednakowe, obliczamy wartość wyrażenia<sup>10</sup>:

$$Z = 1/2 \ln \frac{S_{y \cdot X_s}^2}{S_{y \cdot X_{s'}}^2},$$

$$(X_1) = (X_1, X_2, \dots, X_k),$$

$$X_{s'} = (X_1, X_2, \dots, X_{i-g}, X_i, \dots, X_k),$$

gdzie  $g$  — ilość zmiennych, dla których współczynniki elastyczności przyjęły wartości ujemne, gdy  $S_{y \cdot X_s}^2 \geq S_{y \cdot X_{s'}}^2$

Jeżeli wartość  $Z$  jest większa od wartości z tablicy rozkładu  $Z'$  Fishera, odpowiadającej ilościom stopni swobody  $N_1 - m$  i  $N_2 - m$  (wiadomo że  $N_1 = N_2$ ), gdzie  $m$  jest liczbą parametrów w funkcji produkcji  $k$  zmiennych i  $(k-g)$  zmiennych, przy obranym z góry poziomie istotności, to uważamy, że wariancje resztowe  $S_{y \cdot X_s}^2$  i  $S_{y \cdot X_{s'}}^2$  różnią się istotnie. Jeżeli natomiast otrzymana wartość jest mniejsza lub równa odpowiedniej wartości z tablicy rozkładu  $Z'$ , to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że obie wariancje resztowe są jednakowe. Biorąc pod uwagę powyższe rozważania oraz korzystając ze wzoru (11) obliczyliśmy wartość  $Z$ , którą ujmuje tabela 9.

<sup>10</sup> W danym przypadku bierzemy stosunek  $S_{y \cdot X_s}^2 / S_{y \cdot X_{s'}}^2$ , gdyż nie jest istotna numeracja, lecz fakt, że w liczniku sprawdzianu powinna występować większa z dwóch wariancji.

Tabela 9

Wartości zmiennej losowej  $Z'$  Fishera dla poziomu istotności  $p=0,05$   
(na jedno gospodarstwo)

Wyszczególnienie	Grupy obszarowe gospodarstw w ha użytków rolnych	Rejon produkcyjny środkowo-zachodni			Rejon produkcyjny wschodni graniczny		
		produkcja globalna	produkcja roślinna	produkcja zwierzęca	produkcja globalna	produkcja roślinna	produkcja zwierzęca
$Z$	3—7	X	0,0114	0,0138	X	X	X
	7—10	X	0,0015	0,0262	0,0196	0,0324	0,0220
	Razem	X	X	0,025	X	X	0,0015
$Z'$	3—7	X	0,5175	0,5346	X	X	X
	7—10	X	0,5539	0,5175	0,5350	0,5539	0,5350
	Razem	X	X	0,3192	X	X	0,3252

Łatwo zauważyć, że wszystkie obliczone wartości  $Z$  są znacznie niższe od wartości z tablicy rozkładu  $Z'$  Fishera. Wobec tego można przyjąć, że przy poziomie istotności równym 0,05 wariacje resztowe przy  $k$  zmiennych niezależnych w każdym przypadku nieistotnie różnią się od wariacji resztowych przy  $(k-g)$  zmiennych. W związku z tym możemy założyć, że zmienne, dla których współczynniki elastyczności są mniejsze od zera, nie wywierają istotnego wpływu na przebieg badanej produkcji. Wydaje się, że takie ujęcie zagadnienia pozwala na bardziej poprawne jego rozwiązanie. Wracając zaś do analizy ujemnych współczynników elastyczności zawartych w tabeli 1, nasuwa się pytanie, jak należy je interpretować?

Otóż,  $a_s < 0$  oznacza jedynie ujemną krańcową produktywność czynnika  $X_s$ , nigdy zaś nie wyraża spadku całkowitej produkcji. Wnioskujemy wtedy, że dany czynnik działa hamująco w kształtowaniu się efektów procesu produkcyjnego. Otrzymane niektóre ujemne elastyczności dla obszaru gospodarstwa, nakładów pracy, inwentarza żywego i martwego nie budzą w naszym przekonaniu wątpliwości, bowiem przyrosty produkcji mogą być dodatnie przy wzroście danego czynnika do pewnej granicy, a następnie po przekroczeniu jej mogą być ujemne.

#### UWAGI KOŃCOWE

Rozważania teoretyczne oraz empiryczne przeprowadzone w niniejszym artykule pozwalają na sformułowanie szeregu uwag.

1. Zaprezentowane w niniejszej pracy wyniki analizy indywidualnych gospodarstw chłopskich potwierdzają tezę, że przy pomocy funkcji

produkcji można dostatecznie ściśle ustalać zależność między produkcją rolniczą a czynnikami ją kształtującymi.

2. Rozszerzona i zmodyfikowana postać funkcji Cobb-Douglasa (stochastyczna) zaproponowana w niniejszej pracy — jak sądzi autor — szczególnie nadaje się do tego typu badań.

3. Wyżej omawiana funkcja zezwala na szacowanie elastyczności poszczególnych nakładów na wielkość produkcji.

4. Obliczone współczynniki elastyczności orientują badacza w zakresie produkcyjności krańcowej poszczególnych nakładów kapitałowych i ziemi. W przypadku znajomości rzeczywistego kosztu nabycia danego czynnika produkcji i czasokresu jego użytkowania można stwierdzić, czy rolnikowi opłaca się zwiększać jego nakład za cenę «spodziewanego wzrostu produkcji rolnej».

5. Ustalone w skali regionalnej równania produkcji: a) ułatwiają prowadzenie racjonalnej polityki rolnej, której jednym z celów jest podniesienie dochodowości gospodarstw w określonym rejonie; b) dostarczają informacji co do spodziewanych efektów polityki inwestycyjnej i zmian w zakresie struktury inwestycyjnej, c) ułatwiają rolnikom ocenę efektywności bieżących nakładów.

6. Opracowane relacje w zakresie nakładów produkcyjnych zezwalają na charakterystykę techniki produkcji, dla której określone zostały poszczególne funkcje. Przy zmianie techniki produkcji zmieniają się prawdopodobnie i współczynniki elastyczności funkcji. Fakt ten należy mieć na uwadze, aby pochopnie nie uogólniać wniosków wynikających z funkcji ustalonych dla określonych warunków na inne warunki techniczno-produkcyjne.

7. Porównanie uzyskanych przy pomocy funkcji wartości teoretycznych z danymi empirycznymi utwierdza w przekonaniu, że stopień ich zgodności jest dostatecznie wystarczający dla potrzeb analizy ekonomicznej.

8. Na przyszłość wydaje się celowe wprowadzenie dla funkcji produkcji dodatkowej zmiennej wyrażającej względną odległość od rynku zbytu, określoną kosztami transportu. Ponadto należy wprowadzić jako zmienną objaśniającą „czas”, przez co funkcja produkcji nabiera charakteru dynamicznego. Wprowadzenie powyższych zmiennych do funkcji Cobb-Douglasa prawdopodobnie poprawiłoby szacunki współczynników elastyczności i zapewne dokładniej określałoby empiryczną funkcję produkcji.

9. Dalsze prace badawcze powinny koncentrować się głównie na problemie wpływu na produkcję tych zmiennych, których kwantyfikacja jest trudna (np. indywidualność kierownika gospodarstwa). Przy tego rodzaju własnościach można posłużyć się odpowiednią skalą lub w ostateczności ujęciem zero-jedynkowym.

THE POSSIBILITIES OF APPLIANCE OF PRODUCTION FUNCTION  
TO THE STUDY ON THE EFFICIENCY OF THE EXPENSES ON  
AGRICULTURAL PRODUCTION IN PEASANT FARMS

S u m m a r y

The aim of this study is to examine the quantitative relations existing between the agricultural production and the level of factors, which determine that production. The fulfillment of this goal is brought about by determining the function of agricultural production.

The statistical data which were worked upon in this paper come from private farms which are keeping — for the benefit of the Institute of Agricultural Economy — special accounts. The studies concentrate on material and data characteristic for agriculture in two regions: the mid-western and eastern ones, for the years of 1960/61—1962/63 — for the sake of eliminating the influence of climate and haphazard chance.

As a production function the author used the extended and modified version of Cobb - Douglas. The mathematical form of function in this dissertation has a stochastic character, what in turn means, that besides independent variables a chance element has been introduced.

After a preliminary examination of the many possible production factors which could be taken into consideration the author has selected the following: land, work, live stock, machines and tools, mineral fertilizers.

The extended form of Cobb-Douglas function has already been used in research on agricultural production of individual farms. In the paper the author is introducing his own innovations concerning the argumentation and attempt of economical interpretation of negative values of some coefficients of elasticity, which explain the reaction of agricultural production to individual cost and is putting forward his own ideas of defining the average error in the estimate of a chance element.

The equations of production, which have *been* established on a regional scale can be useful in initiating a rational agricultural policy and can serve as a basis for making proper financial allocations in agriculture.