

**RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES CON OPENFOAM®:  
EL PROBLEMA DEL FLUJO EN UN CANAL CON ESCALÓN****Andrea N. Ceretani<sup>1,3</sup>, María Cristina Sanziel<sup>3,4</sup> y Margarita Portapila<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>CIFASIS (Centro Internacional Franco Argentino de Ciencias de la Información y Sistemas). Bv. 27 de Febrero 201 bis, Rosario, Argentina.

<sup>2</sup>CURIHAM (Centro Universitario Rosario de Investigaciones Hidroambientales). Fac. Cs. Exactas, Ing. y Agrimensura, UNR. Riobamba 245bis, Rosario, Argentina.

<sup>3</sup>Inst. de Matemática B. Levi, Fac. Cs. Exactas, Ing. y Agrimensura, UNR. Av. Pellegrini 250, Rosario, Argentina.

<sup>4</sup>CIUNR (Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario).  
e\_mail: ceretani@cifasis-conicet.gov.ar

**RESUMEN**

En este trabajo se considera un problema asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad correspondiente al flujo en un canal con escalón bidimensional para  $Re = 800$ , se lo resuelve numéricamente mediante el Método de Volúmenes Finitos a través OpenFOAM® y se analiza la posibilidad de obtener una solución numérica estacionaria. Complementariamente se define un concepto de cuasi-estacionariedad para monitorear la solución calculada. Se comparan los resultados correspondientes al campo de velocidad, con resultados numéricos publicados para el caso estacionario y se analizan las ubicaciones de las condiciones de flujo entrante y saliente.

**Palabras clave:** ecuaciones de Navier-Stokes, problema del canal con escalón, Método de Volúmenes Finitos, OpenFOAM®.

**ABSTRACT**

In this work we study a problem associated to the Navier-Stokes and continuity equations corresponding to a 2D backward-facing step flow problem at Reynolds number 800. Numerical solutions evaluated using the Finite Volume Method with OpenFOAM® are presented and the possibility of obtaining a stationary numerical solution is analyzed. Besides, a quasi-stationary state is defined to get a further insight into the computed solutions. Results obtained for the velocity field are compared with published ones for the steady case and different inlet-outlet positions are considered.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, backward-facing step flow problem, Finite Volume Methods, OpenFOAM®.

## INTRODUCCIÓN

La complejidad de las ecuaciones de Navier-Stokes hace que, en general, no se conozcan soluciones analíticas para problemas con condiciones iniciales y de frontera asociados a ellas y a la ecuación de continuidad, o condiciones bajo las cuales se pueda garantizar la existencia y unicidad global de solución, ni siquiera en un sentido débil (Berselli et. al., 2006).

Cuando tales problemas resultan de modelos físicos sobre la evolución del movimiento de fluidos incompresibles, en base a las características de este último (por ejemplo, cuando se trata de flujos laminares) se asume la existencia y unicidad de solución del problema matemático lo cual se vuelve un punto de partida para la resolución numérica del mismo. Sin embargo, la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes dificulta el desarrollo de un método numérico eficiente. No obstante, existen códigos que permiten resolver una amplia variedad de problemas de dinámica de fluidos, entre los que se encuentra OpenFOAM®, el cual es libre y abierto. La posibilidad de acceder de manera completa al código fuente de OpenFOAM®, junto con la ventaja de contar con una implementación amigable para el usuario inexperto en programación en C++ (lenguaje sobre el cual se escribe el código), ha captado el interés tanto de investigadores como de usuarios a nivel industrial.

Este estado de situación motiva el interés de realizar validaciones de los ‘solvers’ de OpenFOAM® a partir de comparaciones con datos experimentales o con resultados de otros métodos numéricos; así como también de avanzar en la comprensión de los desarrollos teóricos en base a los cuales los ‘solvers’ se desarrollan.

Flujos con separación y posterior re-unión (“reattachment”) de la capa límite son a menudo encontrados en hidráulica. Uno de los más sencillos, puesto que se desarrolla en una geometría simple, pero que permite apreciar las características del flujo que se presentan a causa de la separación y re-unión de la capa límite y de las zonas de recirculación, es el flujo en un canal con escalón (backward-facing step flow problem). Este último problema es uno de los considerados para testear nuevos métodos numéricos, siendo los resultados experimentales publicados en Armaly et. al. (1983) frecuentemente considerados como caso de referencia (“benchmark”).

A dos conclusiones importantes se llega en Armaly et. al. (1983): por un lado, que el régimen del flujo es laminar para  $Re < 1200$ , por lo cual cabe esperar que flujos con  $Re < 1200$  alcancen un estado asintóticamente estacionario. Por otro lado, que el flujo presenta características bidimensionales sólo cuando  $Re < 400$ . Sin embargo, a pesar de estas conclusiones, existen numerosos trabajos en la literatura que abordan el estudio del caso bidimensional para  $Re > 400$  (incluso en Armaly et. al., (1983)) y estudian la posibilidad de obtener una solución para el problema estacionario mediante métodos numéricos, por ejemplo en Erturk (2008).

Sobre esto último existe una controversia en el caso  $Re = 800$ , de la cual puede encontrarse un breve pero ilustrativo resumen en Erturk (2008).

En este trabajo se considera un problema asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad que corresponde al problema del flujo incompresible en un canal con escalón bidimensional para  $Re = 800$  y el cual se resuelve numéricamente mediante OpenFOAM®. El objetivo de este trabajo es doble: estudiar el funcionamiento del ‘solver’ *icoFoam* de OpenFOAM®, comparando los resultados que a través de éste se obtienen con los resultados numéricos numéricos publicados en Erturk (2008), y analizar la posibilidad de obtener una solución numérica estacionaria mediante el mismo.

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La evolución del flujo de un fluido Newtoniano e incompresible, con velocidad  $u = (u, v)$  y presión  $P$ , en un canal bidimensional con escalón queda representada por las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \\ \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \Omega \times (t_0, T) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \Omega \times (t_0, T) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

y de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Omega \times (t_0, T) \quad (3)$$

en un dominio bidimensional  $\Omega = \Omega_e \cup \Omega_s$  (Figura 1) definido por  $\Omega_e = [L_1, 0] \times [H-h, H]$  y

$\Omega_s = [0, L_2] \times [0, H]$  donde  $L_1, L_2, H$  y  $h$  son positivos,  $0 < h < H$ , en un intervalo temporal  $(t_0, T)$ ,  $p = P/\rho$ , es la presión cinemática del flujo, y  $\rho$  y  $\nu$  son parámetros positivos correspondientes a la densidad y a la viscosidad cinemática del fluido, respectivamente.

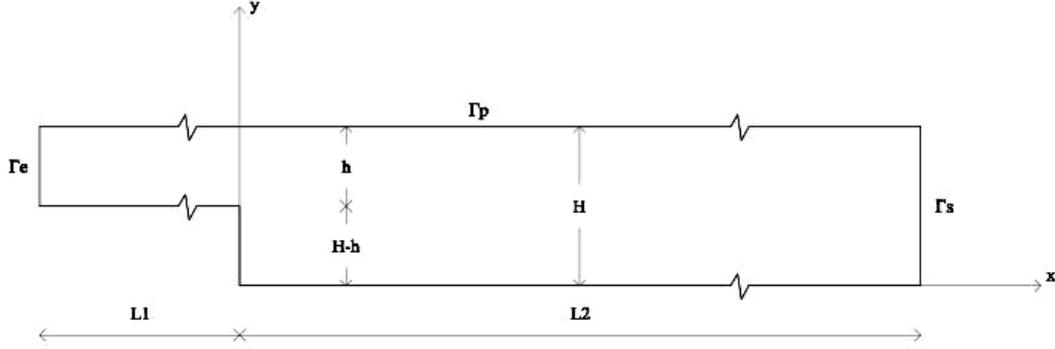


Figura 1. Dominio.

Para estas ecuaciones, se establecen las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{Sobre: } \Gamma_e = \left\{ (-L_1, y) \in \mathbb{R}^2 / H-h < y < h \right\}$$

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_e} &= -\frac{4}{h^2} U \left( y - \frac{2H-h}{2} \right)^2 + U & (t_0, T) \\ v|_{\Gamma_e} &= 0 & (t_0, T) \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_e} &= 0 & (t_0, T) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Sobre: } \Gamma_s = \left\{ (-L_2, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < H \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_s} &= 0 & (t_0, T) \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_s} &= 0 & (t_0, T) \\ p|_{\Gamma_s} &= 0 & (t_0, T) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Sobre: } \Gamma_p = \partial\Omega - (\Gamma_e \cup \Gamma_s)$$

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_p} = v|_{\Gamma_p} &= 0 & (t_0, T) \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_p} &= 0 & (t_0, T) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde  $U > 0$ ; y las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u|_{t=t_0} &= u_0 & \Omega \\ v|_{t=t_0} &= v_0 & \Omega \\ p|_{t=t_0} &= p_0 & \Omega \end{aligned} \quad (7)$$

Siendo  $u_0, v_0$  y  $p_0$  campos escalares.

Este problema representa la evolución del flujo de un fluido Newtoniano e incompresible, con velocidad  $(u, v)$  y presión  $p$ , en un canal bidimensional con escalón conocido como "2D backward-facing step flow problem".

$\Gamma_p$  representa a las paredes superior e inferior impermeables mientras que  $\Gamma_e$  y  $\Gamma_s$  representan a la entrada y a la salida del canal, respectivamente.

El perfil parabólico de velocidad correspondiente a un flujo plano de Poiseuille completamente desarrollado (Batchelor, 2000), junto con la condición de derivada normal exterior nula para la presión establecidos en la entrada, implican que la presión asume un valor positivo sobre  $\Gamma_e$ . Esto último, junto con la condición de presión nula sobre  $\Gamma_s$ , implica que el movimiento del fluido es consecuencia de una diferencia de presión entre la entrada y la salida del canal.

Las condiciones de frontera impuestas para la velocidad en la salida, corresponden a las de un flujo completamente desarrollado. Para definir el número de Reynolds asociado a este problema se consideran

como velocidad característica a las dos terceras partes de la velocidad máxima en la dirección del flujo en la entrada del canal,  $U$ , y como longitud característica al diámetro hidráulico del canal de entrada, el cual, en este caso, coincide con dos veces la altura del mismo. De esta manera, se obtiene  $Re=(2/3U)(2h)/\nu$ , siendo  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido.

## MÉTODO NUMÉRICO

Para aproximar numéricamente la solución del problema definido por las ecuaciones (1) a (7) se utiliza el método de volúmenes finitos (Versteeg, et. al., 1995). Para ello se considera que el dominio  $\Omega$  es particionado en un número finito de volúmenes de control.

Integrando miembro a miembro la primera ecuación de momento (1) sobre un volumen de control  $V = \{(x, y) \in R^2 / x_a \leq x \leq x_b, y_a \leq y \leq y_b\}$ , se obtiene:

$$\int_V \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dV = 0 \quad (8)$$

Para discretizar el término transitorio se utiliza un esquema de Euler implícito y se aproxima el integrando por su valor en el centro de  $V$ ,  $(x_p, y_p)$ :

$$\int_V \left[ \frac{\partial u}{\partial t} dV \sim \frac{u((x_p, y_p), t + \Delta t) - u((x_p, y_p), t)}{\Delta t} |V| \right] \quad (9)$$

Aplicando el Teorema de Green y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (3), la integral del término convectivo puede expresarse como:

$$\int_V \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV \sim \sum_{i=1}^4 (a_i u u((x_i, y_i), t) + b_i v u((x_i, y_i), t)) \quad (10)$$

considerando  $\partial V = U_{i=1}^4 L_i$ , siendo, para cada  $i=1, \dots, 4$ ,  $L_i$  un lado de la frontera de  $V$ ,  $a_i$  y  $b_i$  constantes asociadas a su parametrización y  $(x_i, y_i)$  su punto medio.

A fin de obtener una aproximación de los valores de las funciones en (10) que involucre a los centros de los volúmenes de control, para cada  $i=1, \dots, 4$  se hace una interpolación lineal entre los valores que las funciones asumen en el centro de  $V$  y en el centro del volumen de control  $V_i$  que comparte con  $V$  al lado  $L_i$ . De este modo, se obtiene:

$$\int_V \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV \sim \alpha u u((x_p, y_p), t) + \beta v u((x_p, y_p), t) + \sum_{i=1}^4 (\alpha_i u u((x_{p_i}, y_{p_i}), t) + \beta_i v u((x_{p_i}, y_{p_i}), t)) \quad (11)$$

Siendo  $(x_{p_i}, y_{p_i})$  el centro de  $V_i$ .

En forma análoga a lo hecho para la integral del término convectivo, se discretizan los restantes términos en la ecuación (8). Para discretizar la segunda ecuación de momento (2) y la ecuación de continuidad (3), se procede en forma similar a lo recién hecho.

Sobre el sistema de ecuaciones acoplado resultante se utiliza el algoritmo predictor-corrector PISO (*pressure-implicit with splitting of operators*) (Issa, 1984) con dos pasos correctores. Finalmente, en cada paso temporal, los sistemas de ecuaciones correspondientes al campo de velocidad se resuelven mediante el método del gradiente conjugado preconditionado, utilizando un preconditionador diagonal simplificado basado en la factorización incompleta de Cholesky; mientras que los asociados a la presión son resueltos mediante el método del gradiente biconjugado preconditionado empleando un preconditionador diagonal simplificado basado en la factorización incompleta LU (Chen, 2005).

## IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

La implementación numérica del método descrito en la sección anterior, se realiza utilizando el 'solver' *icoFoam* de OpenFOAM®.

Las unidades de medida y los valores de cada una de las constantes involucradas en las ecuaciones (1) a (7) que se consideran en este trabajo se resumen en las Tablas 1 y 2.

Las especificaciones sobre estas últimas se corresponden con  $Re=800$  y con un ‘aspect ratio’  $H/(H-h)$  igual a 2.

**Tabla 1. Unidades de medida.**

$[L_1], [L_2], [H]$ y $[h]$	$[t_0], [T]$	$[U], [u_0], [v_0], [u], [v]$	$[p_0], [P]$	$[v]$
m	S	m/s	$m^2/s^2$	$m^2/s$

**Tabla 2. Especificaciones relativas al dominio, a la condición de frontera en la entrada del canal y al número de Reynolds.**

$L_1$	$L_2$	H	h	$t_0$	T	U	v
20	300	2	1	0	800	0.6	$10^{-6}$

En Erturk (2008) se justifica la necesidad de que el flujo ingrese a través de un canal de entrada cuya longitud sea de por lo menos 5 veces la altura del escalón,  $H-h$ ; y de que la condición de flujo saliente se ubique a una distancia de por lo menos 300 veces  $H-h$ . En dicho trabajo, se ubica a la condición de flujo entrante a 20 veces la altura del escalón, lo que motiva los valores de  $L_1, L_2, H$  y  $h$  dados en la Tabla 2.

El canal de entrada y la región rectangular determinada por el inicio del escalón y por  $x=100h$ , se ma llan de manera uniforme con  $500 \times 50$  y  $2500 \times 100$  celdas respectivamente; mientras que para la región rectangular determinada por  $x=100h$  y  $x=300h$  se utiliza una malla con  $1250 \times 100$  celdas, uniforme en la dirección de  $y$ , y no uniforme en la dirección de  $x$ , siendo la no uniformidad establecida a partir de una progresión geométrica donde la razón entre las longitudes en la dirección de  $x$  de las celdas asociadas a la salida del canal y aquéllas en donde comienza la progresión, sea igual a 10. De esta manera, se obtiene una malla con 400000 celdas, caracterizada por un “estiramiento” de las longitudes de las celdas en la dirección de  $x$ , conforme éstas se aproximan a la salida del canal y por ser una malla “fina” en la zona del escalón. Justificaciones sobre la elección de mallas con estas características pueden encontrarse en (Yee et al., 1999; Erturk et al., 2005; Erturk, 2009), las cuales se basan en la intención de evitar oscilaciones espurias de la solución numérica y de obtener solución estacionaria. El mallado espacial descripto es similar al utilizado en Erturk (2008), la única diferencia entre ambos radica en la manera de definir el “estiramiento” de las celdas en

la dirección del flujo hacia la salida del canal y es consecuencia de las limitaciones del mallador ‘blockMesh’ empleado en OpenFOAM®. El intervalo temporal  $(0,T)$  es particionado regularmente mediante un paso  $\Delta t=0.1$ .

Los sistemas de ecuaciones son resueltos fijando las tolerancias que se establecen en el ‘tutorial’ de OpenFOAM® para el ‘solver’ *icoFoam* (User Guide. OpenFOAM, 2011):  $10^{-6}$  para el campo de velocidad y  $10^{-5}$  para la presión.

Los campos escalares  $u_0, v_0$  y  $p_0$  que determinan el estado inicial del flujo, se definen a partir de sucesivas perturbaciones sobre el fluido en reposo (Apéndice A, con  $Tol_u = Tol_v = Tol_p = 10^{-2}$ ).

La evolución de la solución numérica  $\hat{\phi}$ , correspondiente a una incógnita,  $\hat{\phi} = u, v, p$ , es analizada a partir de la evolución de los valores de  $R\phi$  y  $V\phi$ . La primera de estas cantidades, denominada “residuo inicial” en (User Guide. OpenFOAM, 2011), corresponde a una cantidad calculada por OpenFOAM® en cada uno de los pasos temporales y es a partir de la cual se determina si el algoritmo debe iterar sobre el sistema de ecuaciones lineales para alcanzar una solución numérica que satisfaga la tolerancia establecida. La segunda de estas cantidades hace referencia a la variación de  $\phi$  entre iteraciones temporales “sucesivas”, y se define a continuación. Sean  $x_j$  el centro de la  $j$ -ésima celda de la malla,  $j = 1, \dots, 400000$ ; y  $t_i = 0.1i$  un punto en la partición del dominio temporal,  $i = 1, \dots, 10T$ . Se definen:

$$V_{\phi,ij} = \left| \hat{\phi}(x_{j,t}, t_{2(i+1)}) - \hat{\phi}(x_{j,t}, t_{2i}) \right| \quad (12)$$

$$V_{\phi,ij} = \max \{ V_{\phi,ij} : j = 1, \dots, 400000 \} \quad (13)$$

para  $j = 1, \dots, 400000, i = 0, \dots, N/2$  donde  $N = 10T$ . Nótese que  $V_{\phi,i}$  hace referencia a la variación global entre las iteraciones correspondientes a  $t_{2i}$  y  $t_{2(i+1)}$  para  $\hat{\phi}$ , y que no es otra cosa que la norma del máximo en  $R^{400000}$  de la cantidad definida en (12).

## RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan resultados numéricos obtenidos con OpenFOAM® para el problema definido por las ecuaciones (1) a (7) con un  $Re=800$ .

En la Figura 2 se presentan gráficos de perfiles de velocidad final (i.e., correspondientes a  $t=800$ ) adimensional para ubicaciones sobre el canal que distan aguas abajo del escalón en 6, 14 y 30 veces la longitud del mismo.

Las expresiones  $u/U^*$  y  $v/U^*$  que aparecen en las leyendas de esta figura (tanto como en las Figuras 4,

5 y 9 subsiguientes), deben entenderse del siguiente modo:  $U^* = U$  para los resultados numéricos del presente trabajo y  $U^* = 1.5$  para los resultados en Erturk (2008).

En esta figura se observa muy buena concordancia entre los resultados numéricos de OpenFOAM® y la solución estacionaria publicada en Erturk (2008).

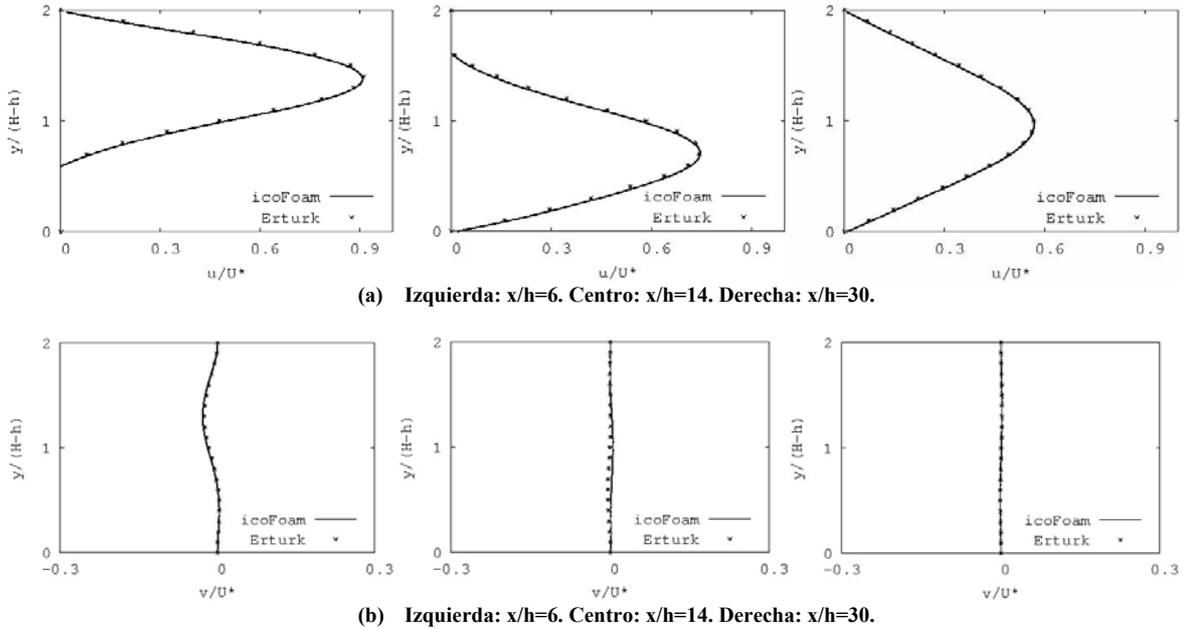


Figura 2. Perfiles de velocidad adimensional en diferentes ubicaciones del canal de entrada a partir del escalón.  $T=800$ .  $L_1=20$ .  $L_2=300$ . Arriba: valores de velocidad horizontal,  $u$ . Abajo: valores de velocidad vertical,  $v$ .

La evolución de la solución numérica obtenida se presenta en la Figura 3. En la Figura 3(a) se observa que el residuo para  $u$  alcanza la tolerancia pedida ( $10^{-6}$ ) a partir de los primeros 400 segundos de simulación, sin embargo los residuos correspondientes a  $v$  y a  $p$  no alcanzan el valor fijado de tolerancia. Si bien estos resultados indican que  $\hat{v}$  y  $\hat{p}$  no alcanzan un estado estacionario, el monitoreo de las variaciones de la solución numérica entre iteraciones temporales sucesivas, presentado en la Figura 3(b),

muestra que la misma es cuasi-estacionaria con tolerancia  $10^{-4}$  (Apéndice A).

A pesar del comportamiento de la solución numérica hasta los 800 segundos de simulación, no es conveniente reducir la tolerancia en la condición de cuasi-estacionariedad y el tiempo de simulación a  $T = 400$ , puesto que se empeora la precisión con la que el algoritmo resuelve el campo de velocidad (Figura 4).

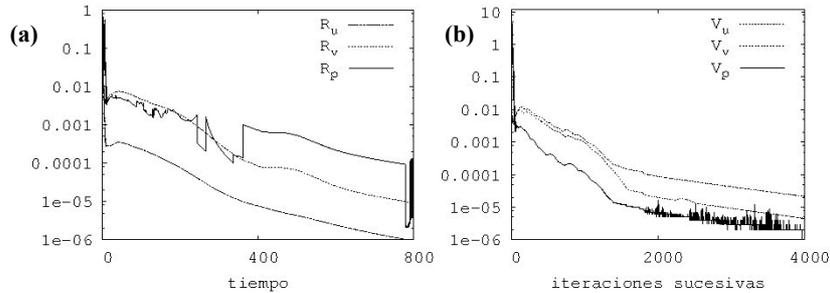
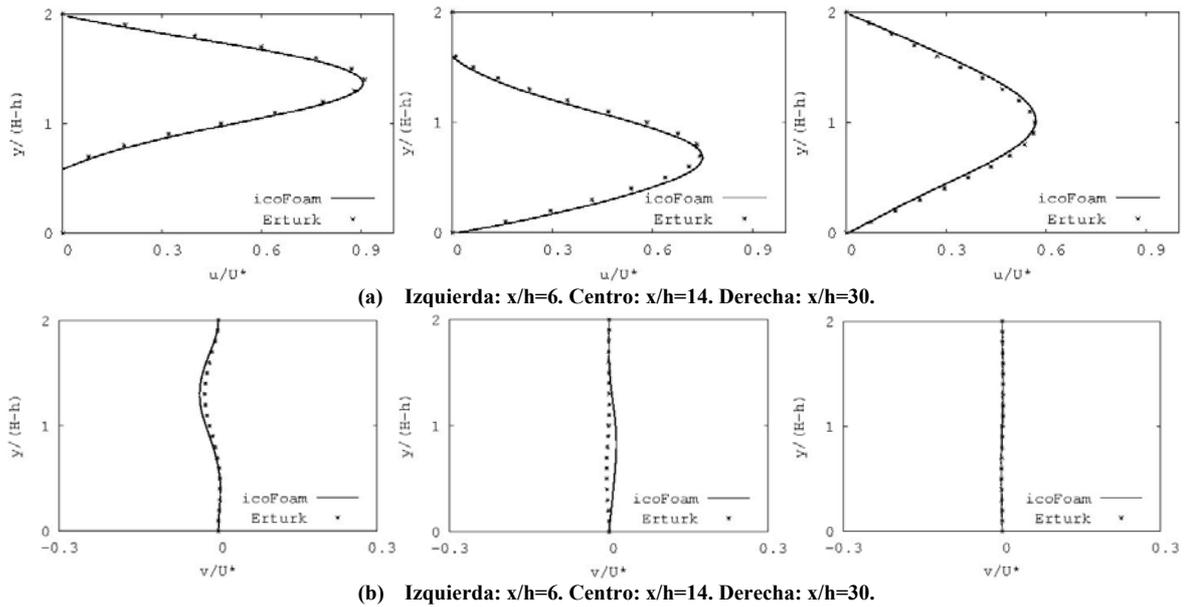


Figura 3. Evolución de  $V\phi$  y  $R\phi$  durante 800 segundos de simulación.  $L_1 = 20$ ,  $L_2 = 300$ .



**Figura 4.** Perfiles de velocidad adimensional en diferentes ubicaciones del canal de entrada a partir del escalón.  $T=400$ .  $L_1=20$ .  $L_2=300$ . Arriba: valores de velocidad horizontal,  $u$ . Abajo: valores de velocidad vertical,  $v$ .

Asimismo, tampoco es útil realizar la simulación durante un período más prolongado de tiempo, puesto que la solución numérica obtenida en un tal caso mejora a la actual, pero no considerablemente (Figura 5) y la evolución de  $R\phi$  muestra un comportamiento análogo al correspondiente a los primeros 800 segundos de simulación (Figura 6).

Especial énfasis se puso en este trabajo en la definición de las dimensiones del dominio numérico de modo de obtener resultados aceptables al menor costo computacional. Al comienzo de este estudio, y siguiendo los resultados de Erturk (2008), se planteó un dominio computacional correspondiente a  $L_1=20$  y  $L_2=300$ .

Los resultados reportados en los párrafos anteriores de esta sección corresponden a este primer dominio. Sin embargo, la definición del dominio establecida en Erturk (2008) se basa en el análisis de flujos con números de Reynolds que abarcan un rango mayor (desde 100 hasta 3000) del que interesa en este trabajo.

Para testear el comportamiento de OpenFOAM<sup>®</sup> respecto del tamaño del dominio computacional, se graficaron perfiles de velocidad final en diferentes ubicaciones del canal.

En la Figura 7 se presentan perfiles de velocidad adimensional para secciones del canal aguas abajo del escalón para valores de  $x/h$  de 50, 100, 150, 200, 250 y 300. En la Figura 8 los perfiles de velocidad graficados corresponden a posiciones aguas arriba del escalón cubriendo valores de  $x/h$  -20, -15, -10, -5 y 0. Del análisis de la Figura 7, donde se observa que los perfiles de las velocidades se estabilizan a partir de  $x/h=100$ , se decidió un nuevo valor de  $L_2=100$ .

De los perfiles graficados en la Figura 8 se decidió un nuevo valor de  $L_1=5$ . De este modo, se planteó un nuevo dominio computacional donde simular el problema del canal con escalón para  $Re=800$ . Además, la imposibilidad del algoritmo de alcanzar la tolerancia fijada para la resolución iterativa de los sistemas de ecuaciones lineales, Figura 3(a), sugiere fijar tolerancias menos exigentes.

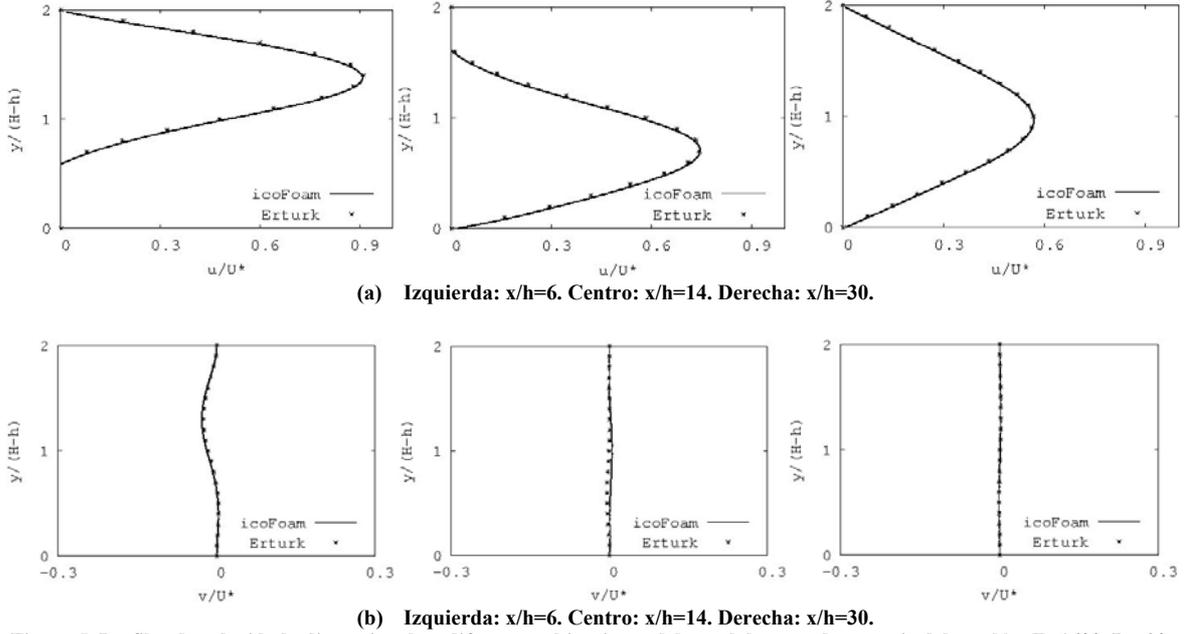


Figura 5. Perfiles de velocidad adimensional en diferentes ubicaciones del canal de entrada a partir del escalón.  $T=1600$ .  $L_1=20$ .  $L_2=300$ . Arriba: valores de velocidad horizontal,  $u$ . Abajo: valores de velocidad vertical,  $v$ .

A partir de las observaciones anteriores, se consideró el problema definido por las ecuaciones (1) a (7) con los valores de las constantes dados en la Tabla 2 considerando  $L_1=5$  y  $L_2=5$ . Para resolverlo numéricamente, se empleó el mismo método explicado en la sección Método Numérico, con tolerancias  $10^{-4}$  y  $10^{-3}$  para resolver los sistemas de ecuaciones lineales asociados al campo de velocidad y a la presión del fluido respectivamente. La malla en el nuevo dominio  $\Omega'$  coincide con la malla definida para  $\Omega$  restringida a  $\Omega'$ , resultando ser una malla con 256250 celdas. Los valores de los campos escalares discretos  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{v}_0$  y  $\hat{p}_0$  fueron mapeados desde sus valores en la malla sobre  $\Omega$  hacia la malla en  $\Omega'$  utilizando la herramienta *mapFields* de OpenFOAM®.

Los perfiles de velocidad final calculados sobre  $\Omega'$  están en muy buena concordancia con los de la solución estacionaria publicados en Erturk (2008), y los obtenidos en este trabajo para el dominio  $\Omega$  (Figura 9).

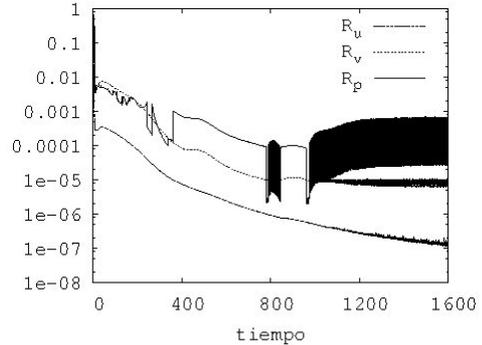


Figura 6. Evolución de  $R\phi$  durante 1600 segundos de simulación.  $L_1=20$ .  $L_2=300$ .

La pertinencia de ubicar la condición de flujo saliente a una distancia de 100 veces  $H - h$  a partir del escalón, puede observarse en la Figura 10, donde se advierte que los perfiles de velocidad para  $x/h=100$  son similares a los obtenidos para el dominio  $\Omega$ . Análogamente, los perfiles presentados en la Figura 11, validan la ubicación de la condición de flujo entrante a 5 veces  $H - h$  aguas arribas de escalón.

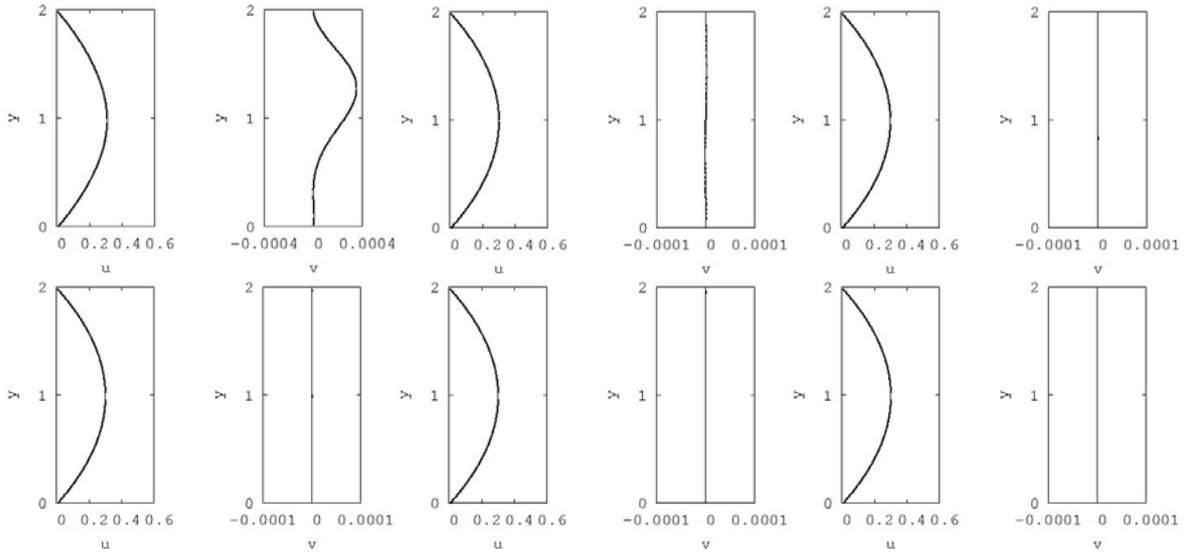


Figura 7. Perfiles de velocidad en diferentes ubicaciones del canal.  $T=800$ .  $L_1=20$ .  $L_2=300$ .

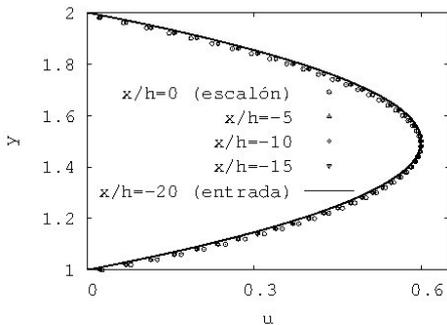


Figura 8. Perfiles de velocidad en diferentes ubicaciones del canal de entrada.  $T=800$ .  $L_1=20$ .  $L_2=300$ .

En la Figura 12 se muestra la evolución de la solución numérica. A pesar que los resultados presentados en la Figura 12(a) muestran que el algoritmo no alcanza una solución numéricamente estacionaria, ni siquiera para la componente horizontal de la velocidad, los resultados presentados en la Figura 12(b) ponen de manifiesto la obtención de una solución cuasi estacionaria con tolerancia  $10^{-4}$  para el campo de velocidad y  $10^{-1}$  para la presión.

Cabe señalar que los valores que asume  $Ru$  muestran que la obtención de una solución numéricamente estacionaria (al menos para alguna de las incógnitas del problema) en un período de tiempo, no necesariamente implica que tal solución continúe siendo estacionaria cuando se realiza la simulación durante un período más prolongado de tiempo.

Además, los resultados de  $V_p$  presentados en la Figura 12(b) ponen de manifiesto la necesidad de estudiar a la solución numérica de manera global, es decir, teniendo en cuenta el comportamiento de la misma en cada uno de los puntos de la malla, en el momento de analizar sus variaciones conforme transcurre el tiempo; a pesar de la laminaridad del flujo.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se simuló la evolución de un flujo incompresible en un canal con escalón para el caso bidimensional, con una relación de aspecto ‘*aspect ratio*’ 2 y para un  $Re=800$ , utilizando el ‘solver’ *icoFoam* de OpenFOAM®.

Se corrieron casos para distintos tamaños de dominio, distintas posiciones de entrada y salida del flujo y distintos tiempos de simulación. En función de los resultados obtenidos, se analizaron, en la sección *Resultados Numéricos*, los casos más significativos. En una primera instancia, se muestran resultados para una condición de flujo entrante ubicada a 20 veces la altura del escalón, aguas arriba del mismo, y una condición de flujo saliente ubicada a 300 veces aguas abajo. Estas posiciones de entrada y salida del flujo, así como la discretización elegida para el dominio espacial, se adoptan siguiendo el análisis presentado en Erturk (2008).

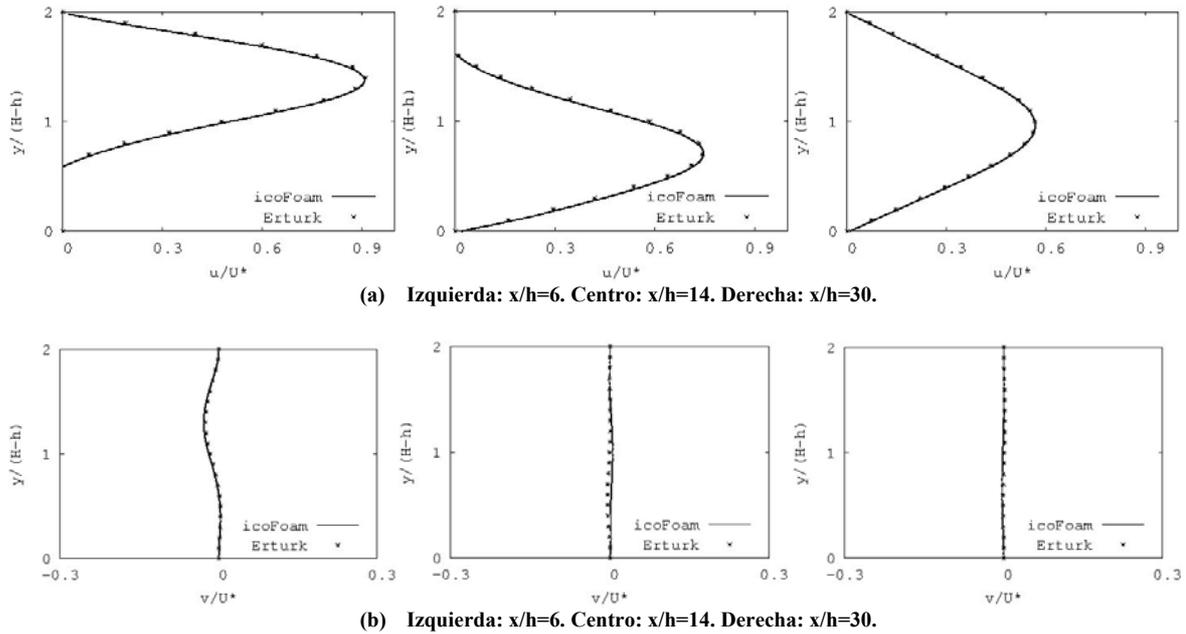


Figura 9. Perfiles de velocidad adimensional en diferentes ubicaciones del canal de entrada a partir del escalón.  $T=800$ .  $L_1=5$ .  $L_2=100$ . Arriba: valores de velocidad horizontal,  $u$ . Abajo: valores de velocidad vertical,  $v$ .

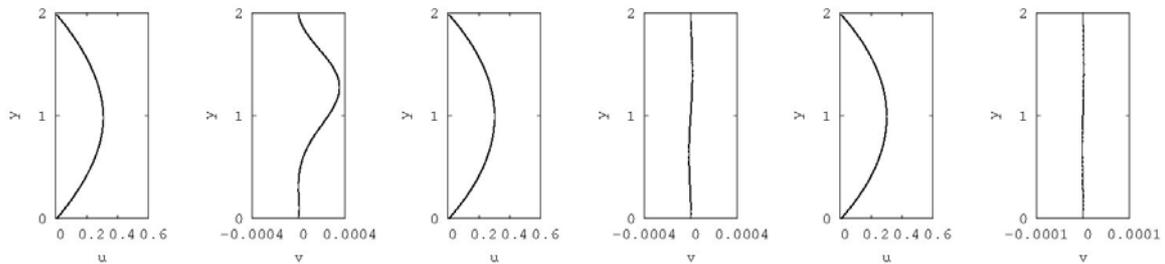


Figura 10. Perfiles de velocidad en diferentes ubicaciones del canal.  $T=800$ .  $L_1=5$ .  $L_2=100$ .

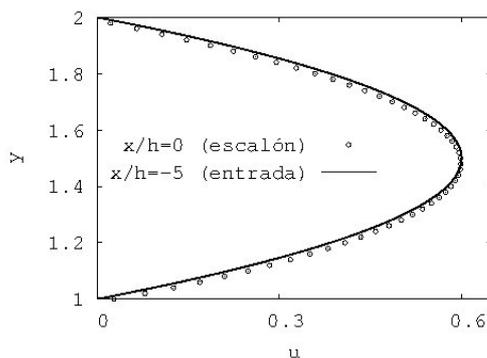


Figura 11. Perfiles de velocidad en diferentes ubicaciones del canal de entrada.  $T=800$ .  $L_1=5$ .  $L_2=100$ .

Los perfiles de velocidad final,  $u$  y  $v$ , obtenidos con OpenFOAM®, para distintas posiciones del canal aguas abajo del escalón, están en muy buena con-

cordancia con los del caso estacionario publicados en Erturk (2008).

La evolución de la solución numérica se analizó a partir de los valores de los residuos calculados por OpenFOAM® y de la condición de cuasi-estacionariedad definida en este trabajo en el Apéndice A. El residuo asociado a la componente horizontal de la velocidad,  $u$ , alcanzó la tolerancia establecida,  $10^{-6}$ , el residuo correspondiente a  $v$  alcanzó una tolerancia de  $10^{-5}$  en lugar del valor  $10^{-6}$  deseado, mientras que el asociado a  $p$  osciló entre  $10^{-3}$  y  $10^{-5}$ , siendo este último el valor de tolerancia buscado. A pesar que esto implica que la solución obtenida después de 800 segundos no es estacionaria, el análisis de cuasi-estacionariedad reveló la obtención de una solución cuasi-estacionaria con tolerancia  $10^{-4}$ .

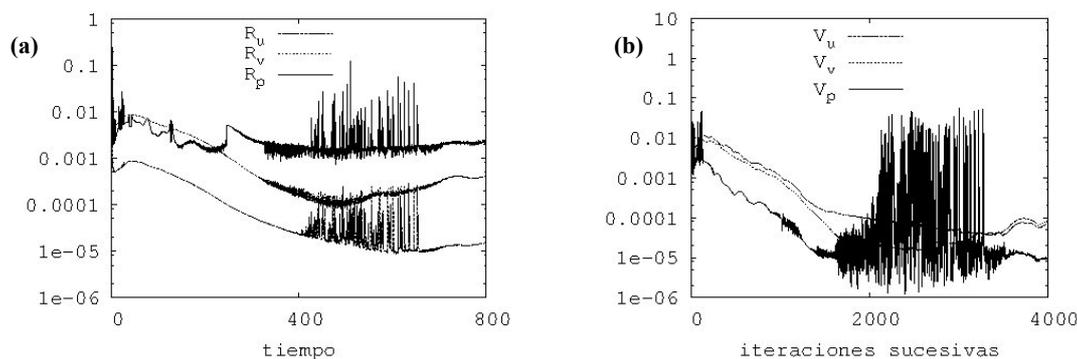


Figura 12. Evolución de  $V\phi$  y  $R\phi$  durante 800 segundos de simulación.  $L_1=5$ ,  $L_2=100$ .

Con respecto a tiempos de simulación, este problema fue corrido para distintos tiempos totales  $T$ , desde valores de 400 hasta 1600. Resultando 800 el tiempo que permitió obtener los mejores resultados al menor costo computacional, para las posiciones de flujo de entrada y salida mencionadas más arriba.

Una vez analizados los resultados sobre este primer dominio, se propusieron nuevas posiciones para el flujo entrante y saliente: 5 veces la altura del escalón aguas arriba del mismo y 100 veces aguas abajo, respectivamente, con el objetivo de obtener buenos resultados con OpenFOAM® y disminuir el tiempo de CPU, resultando los perfiles de velocidad final obtenidos en muy buena concordancia con Erturk (2008).

En lo que respecta a la evolución de la solución numérica sobre este nuevo dominio, del análisis de residuos se concluye que tampoco se obtiene solución estacionaria, siendo, además, el comportamiento de los residuos más inestable en este caso; sin embargo la solución resulta cuasi-estacionaria con tolerancia  $10^{-4}$  para el campo de velocidad y  $10^{-1}$  para la presión, de acuerdo al estudio de la condición de cuasi-esacionariedad.

De este último caso simulado se puede concluir que, para un dominio considerablemente menor y, consecuentemente, tiempos de CPU sustancialmente menores, OpenFOAM® puede simular adecuadamente el campo de velocidad para un 800.

Finalmente, y luego del exhaustivo trabajo realizado, se puede concluir que, bajo las condiciones analizadas en este trabajo, *icoFoam* es una herramienta útil para obtener valores de velocidad para el problema del escalón, factibles de ser usados como comparativos ante el desarrollo de nuevas

técnicas numéricas que aborden la resolución aproximada de las ecuaciones de Navier-Stokes.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto de Investigación ING259, “Desarrollo de Técnicas Numéricas para Métodos sin Malla”.

## REFERENCIAS

- Armaly, B. F.; Durst, F. y Pereira, J. C. F. 1983. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of fluid mechanics*, 127:473-496.
- Batchelor, G. K. 2000. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, United Kingdom.
- Berselli, L. C.; Iliescu, T y Layton, J. W. 2006. Mathematics of large eddy simulation of turbulent flows. Springer, Germany.
- Chen, K. 2005. Matrix preconditioning techniques and applications. Cambridge University Press, United Kingdom.
- Erturk, E. 2008. Numerical solutions of 2-d steady incompressible flow over a backward-facing step, part i: High reynolds number solutions. *Computers & Fluids*, 37:633-655.
- Erturk, E.; Corke, T.C. y Gokcol. C. 2005. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *International Journal of numerical methods in fluids*, 48:747-774.
- Issa, R. I. 1984. Solution of the implicit discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of computational physics*, 62:40-65.
- OpenFOAM Team. 2011. User guide. OpenFOAM Foundation.

Versteeg, H. K. y Malalasekera, W. 1995. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. Longman Scientific & Technical, England.

Yee, H. C.; Torczynski, J. R.; Morton, S. A.; Visbal, M. R. y Sweby, P. K. 1999. On spurious behavior

of cfd simulations. *International Journal of numerical methods in fluids*, 30:675-711.

*Artículo recibido el 02/2012 y aprobado para su publicación el 03/2013.*

**APÉNDICE A: DEFINICIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES**

**Caso continuo**

Los campos escalares  $u_0, v_0$  y  $p_0$  y, que determinan el estado inicial del flujo se definen a partir de sucesivas perturbaciones sobre el fluido en reposo. En este trabajo, se han definido como los correspondientes a la solución estacionaria del último de un conjunto de problemas  $\{P_i\}_{i=1}^9$  definidos en las ecuaciones (1) a (7) donde los valores de las constantes involucradas en cada uno se resumen en la siguiente tabla:

**Tabla A1. Especificaciones relativas al dominio, a la condición de frontera en la entrada del canal y al número de Reynolds para  $P_i, i=2, \dots, 9$**

$L_1$	$L_2$	H	h	$t_0$	T	U	v
20	300	2	1	0	$T_i$	$U_i$	$10^{-6}$

siendo, en cada caso, la velocidad máxima del flujo en la entrada del canal,  $U_i$ , elegida de manera tal que el número de Reynolds  $Re_i$  correspondiente a  $P_i$  sea el especificado en la Tabla A2; donde la condición inicial para  $P_1$  es el reposo, i.e.,  $u_0=v_0=p_0=0$  y la condición inicial para cada  $P_i$  corresponde a la solución estacionaria de  $P_{i-1}, i = 2, \dots, 9$ .

**Tabla A2. Número de Reynolds,  $Re_i$ , para  $P_i, i = 1, \dots, 9$ .**

$Re_1$	$Re_2$	$Re_3$	$Re_4$	$Re_5$	$Re_6$	$Re_7$	$Re_8$	$Re_9$
10	50	100	200	300	400	500	600	700

**Caso discreto**

La definición de los campos escalares discretos  $\hat{u}_0, \hat{v}_0$  y  $\hat{p}_0$  es idéntica a la del caso continuo si se reemplaza la condición de estacionariedad para una función incógnita  $\phi$  por la siguiente condición de cuasi-estacionariedad para su solución numérica asociada  $\phi$ :

$$\exists i_0 \in \left(0, \frac{T}{2}\right) : V_{\phi,i} < Tol_{\phi} \quad \forall i : i_0 \leq i \leq N/2$$

siendo  $\phi$  igual a  $u, v$  o  $p, t$  el instante final de simulación del problema considerado,  $V_{\phi}$  la cantidad definida en (13) y  $Tol_{\phi}$  una tolerancia fijada.

La pertinencia de generar las condiciones iniciales de cada problema mediante el solver *icoFoam* de OpenFOAM® se justifica en el Apéndice B.

**APÉNDICE B: VALIDACIÓN PRELIMINAR DEL ‘SOLVER’ ICOFOAM**

Dado que el ‘solver’ *icoFoam* de OpenFOAM® es empleado para establecer las condiciones iniciales del problema discreto asociado a las ecuaciones (1) a (7) (Cf. Apéndice A), se realizó una validación preliminar del mismo. A tal efecto, se simuló problemas del canal con escalón para la relación  $\frac{H}{H-h} = 1.94$ , con el objetivo de comparar los resultados numéricos con los resultados numéricos y experimentales publicados en Armaly et. al. (1983).

La malla sobre este nuevo dominio se definió en forma análoga a la malla descrita en la sección Implementación Numérica y el intervalo temporal fue particionado empleando un paso  $\Delta t=0.1$ .

Se consideraron los problemas correspondientes a los números de Reynolds de los flujos estudiados en Armaly et. al. (1983) que pertenecen al rango de interés en este trabajo,  $Re=100$  y  $Re=389$ . Las condiciones iniciales para estos problemas se definieron según lo establecido en el Apéndice A, considerando como primer y último problemas a los correspondientes a  $Re=100$  y  $Re=389$  respectivamente.

En cada caso se obtuvo una solución cuasi-estacionaria (Apéndice A) con tolerancia  $10^{-3}$ , tal como puede apreciarse en la Figura B1, considerando  $T=160$  y  $T=400$  para los casos asociados a  $Re=100$  y a  $Re=389$  respectivamente.

En las Figuras B2 y B3 se muestra la buena concordancia entre estos resultados.

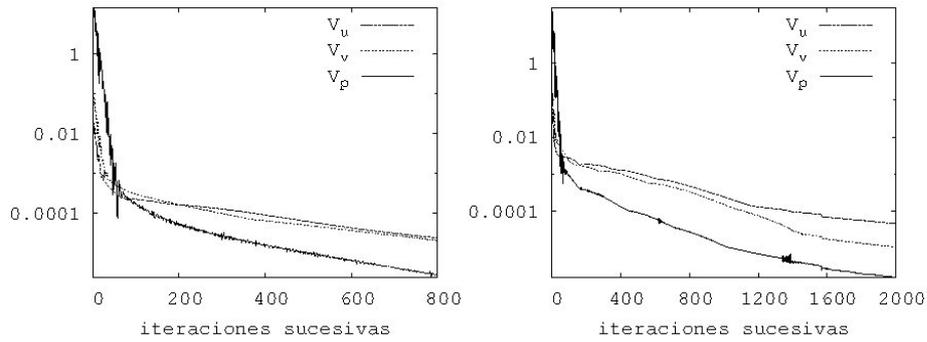


Figura B1. Evolución de  $V_u$ ,  $V_v$  y  $V_p$ .

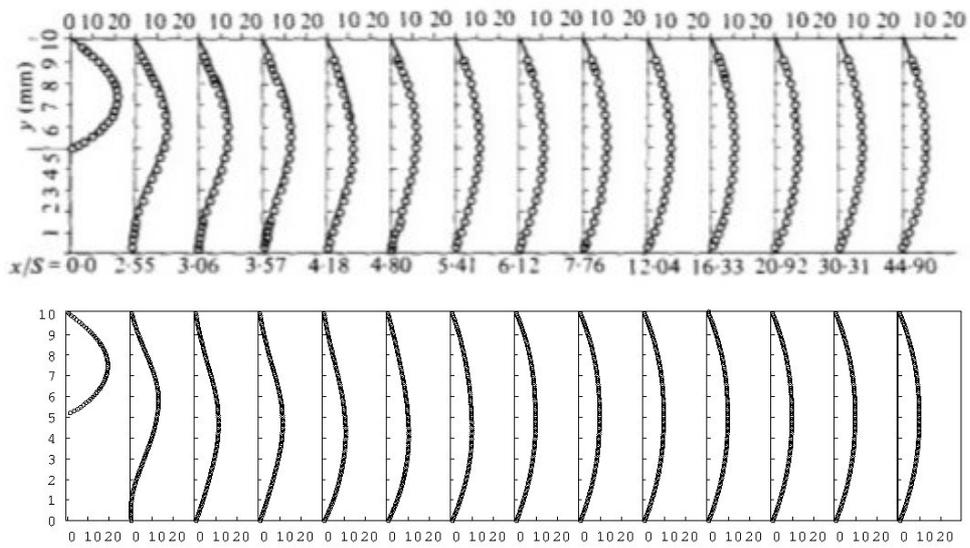


Figura B2. Perfiles de velocidad para varias ubicaciones aguas abajo del escalón.  $Re=100$ . Arriba: Armaly et al. (círculos: resultados experimentales - línea: resultados numéricos). Abajo: Resultados obtenidos con *icoFoam* de OpenFOAM®.

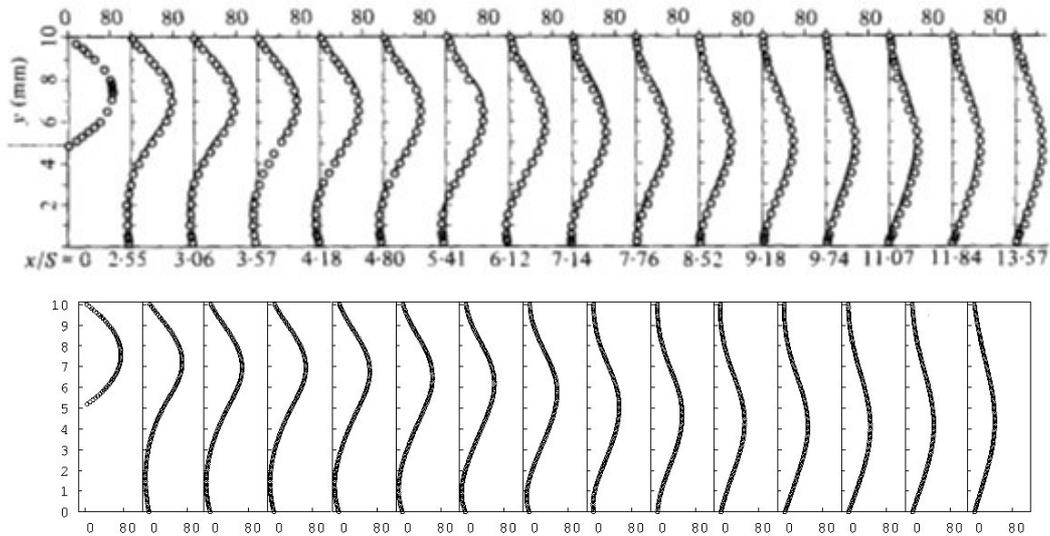


Figura B3. Perfiles de velocidad para varias ubicaciones aguas abajo del escalón.  $Re=389$ . Arriba: Armaly et al. (círculos: resultados experimentales - línea: resultados numéricos). Abajo: Resultados obtenidos con *icoFoam* de OpenFOAM®.