

Primer Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica, CAIA 1 - La Plata, Argentina, 3-5 de diciembre de 2008

## IMPLEMENTACION DEL METODO DE PANELES PARA FLUJO SUBSÓNICO ESTACIONARIO CON GEOMETRIAS AERODINAMICAS ARBITRARIAS

Augusto Zumarraga<sup>ab</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Aeronáutica – Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de La Plata  
calles 1 y 47 - La Plata (1900) - Argentina

<sup>b</sup> CRUX Sistemas Inteligentes  
calle 29 nro 1002 - La Plata (1900) - Argentina.  
Email: [azumarraga@crux-si.com.ar](mailto:azumarraga@crux-si.com.ar)

### RESUMEN

*Se presenta una aplicación de cálculo de flujos estacionarios a grandes números de Reynolds para cuerpos aerodinámicos de geometría arbitraria basado en el Método de Paneles, con la incorporación de un algoritmo de relajación de estelas vorticosas.*

*Se analizan las condiciones fluidodinámicas para las cuales pueden esperarse resultados razonables con este modelo de cálculo.*

*Se comentan aspectos de los algoritmos utilizados, la solución adoptada para la definición geométrica de los casos de análisis y los métodos de visualización de resultados.*

*Se analizan los resultados obtenidos en diferentes casos de prueba (alas rectas de bajo y alto alargamiento, alas en delta, etc).*

*Finalmente se exponen algunas dificultades encontradas, consideraciones a tener en cuenta para la utilización del método y pasos a seguir para perfeccionar el sistema.*

**Palabras clave:** Método de Paneles, Relajación de estelas vorticosas

### INTRODUCCIÓN

A grandes números de Reynolds el campo de velocidades es prácticamente irrotacional, excepto en la proximidad de los obstáculos donde se desarrolla la capa límite, y en la propagación de la misma corriente abajo en la forma de estelas vorticosas.

En un campo irrotacional solo se experimenta un intercambio entre energía cinética (velocidad de un elemento de flujo) y potencial (presión del mismo). El flujo rotacional restringido a la capa límite afecta al campo de presiones de forma directa solo por medio de un efecto de desplazamiento debido a la desaceleración del flujo dentro de la misma, siendo este efecto tanto mas leve cuando mayor es el número de Reynolds.

Aun así, los efectos de la capa límite son sumamente importantes en el campo de velocidades; ya que esta influye significativamente en las condiciones de borde del flujo irrotacional debido a su importancia en el establecimiento de las líneas de desprendimiento del flujo en el obstáculo, a partir de las cuales se desarrollan las estelas vorticosas.

Por lo tanto se pueden utilizar modelos válidos para flujos ideales (no viscosos) fijando algunas condiciones de borde para contemplar los efectos indirectos de la capa límite en el campo de velocidades.

Matemáticamente el campo irrotacional puede ser descrito eliminando los términos rotacionales de las ecuaciones de Navier-Stokes, llegándose así a las ecuaciones de Euler.

$$\frac{\partial \vec{V}(t)}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla \vec{V}(t) = - \frac{1}{\rho(t)} \nabla p(t)$$

Expresando el campo de velocidades como el gradiente de un potencial escalar estas ecuaciones se transforman en la ecuación de Laplace para el caso incompresible:

$$\vec{V}(t) = \nabla \varphi \quad , \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

Para la capa límite se simplifican las ecuaciones de Navier-Stokes asumiendo que el campo de presiones es impuesto por el flujo irrotacional externo (ecuaciones de Prandtl para la capa límite); utilizando modelos de turbulencia para la región de inestabilidad de la misma.

El método de paneles permite obtener una solución para las ecuaciones de Euler utilizando como condiciones de borde la impermeabilidad de los obstáculos sólidos (flujo normal nulo en su superficie, condición de Neumann) y la condición de velocidad tangencial nula en las líneas de desprendimiento (condición de Kutta). También se puede atacar la ecuación de Laplace tomando como condición de borde que el potencial debe ser constante dentro del obstáculo (condición de Dirichlet).

Los obstáculos a una corriente de flujo pueden tener geometrías “aerodinámicas”, cuyos contornos permiten que un flujo irrotacional pueda adaptarse sin alcanzar velocidades exageradas; o pueden ser cuerpos denominados “romos” en donde ello no es posible.

Solo para cuerpos aerodinámicos con ángulos de ataque moderados se produce un despegue del flujo de la capa límite estable (desde el punto de vista del campo de presiones), generando estelas vorticosas de estructura bien definida.

Para obstáculos aerodinámicos a grandes ángulos de ataque o en el caso de cuerpos romos el fenómeno de desprendimiento se torna inestable aunque el flujo incidente sea estacionario, resultando en flujos turbulentos de gran escala.

En estos casos existe una diferencia importante entre los casos en los que la separación se produce en bordes aerodinámico agudos respecto de aquellos en donde el desprendimiento se produce en superficies suaves. En los primeros las líneas de desprendimiento se encuentran bien definidas en dichos bordes, mientras que en el segundo ello depende de la interacción entre la capa límite y el campo de presiones no-estacionario generado, con lo cual su posición tampoco es estacionaria.

Podemos obtener soluciones realistas para el campo fluidodinámico irrotacional en casos de flujos alrededor de obstáculos aerodinámicos o de cuerpos romos con desprendimientos en bordes agudos; pero solo para los primeros obtendremos soluciones estacionarias cuando el flujo incidente sea estacionario; que es la condición asumida en este trabajo.

## **METODOLOGÍA**

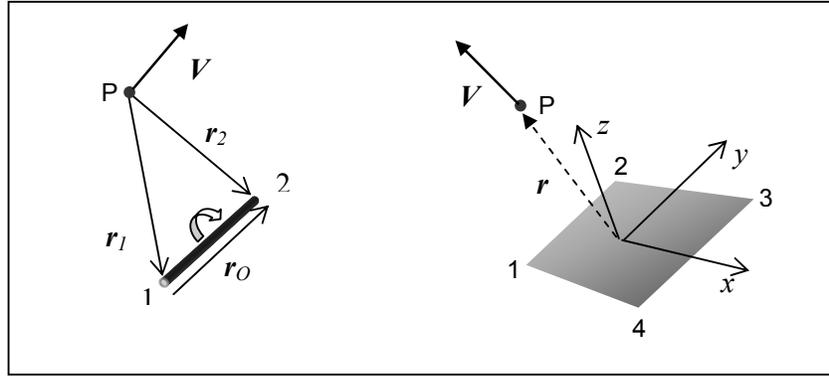
Lo que se busca es poder realizar el estudio cualitativo de flujos aerodinámicos estacionarios subsónicos a grandes números de Reynolds con geometrías tridimensionales; con el objeto de contar con una herramienta de análisis y diseño aerodinámico para problemáticas tales como interacciones entre alas, nacelas de motores y fuselajes, entre diferentes superficies sustentadoras, analizar efectos de resistencia inducida en alas de bajo alargamiento, etc.

Existen tres aspectos que deben ser trabajados:

1. Determinación numérica del campo fluidodinámico
2. Herramientas para la definición de la geometría
3. Generación de resultados y visualización

## **DETERMINACIÓN NUMÉRICA DEL CAMPO FLUIDODINÁMICO**

En este trabajo se utiliza el método de paneles para determinar el campo irrotacional de velocidades. Este se basa en descomponer el campo de flujo en una superposición de soluciones singulares de la ecuación de Euler, tales que los puntos singulares queden fuera del campo de flujo irrotacional. En un punto arbitrario de dicho campo la velocidad surge como composición de las velocidades en dicho punto asociadas a cada una de las soluciones singulares, a las cuales llamaremos “influencias”.



La presión surge de aplicar el principio de Bernoulli.

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte.$$

En nuestro caso la superficie del obstáculo se divide en “paneles” cuadrangulares a los cuales se asocia una fuente distribuida para modelar los efectos de desplazamiento producidos por el obstáculo y un anillo vorticoso formado por cuatro segmentos para ajustar las líneas de desprendimiento (condición de Kutta). A partir de las líneas de separación se inyectan en el flujo anillos que modelan la estela vorticoso que surge de la separación de la capa límite de la superficie del obstáculo. La intensidad de estos anillos se determina en base a los teoremas de Helmholtz.

Un elemento diferencial de vorticidad  $dS$  de intensidad  $\sigma$  tiene un campo de velocidades asociado definido por la función:

$$d\vec{V} = \frac{d\vec{S} \times d\hat{r}}{2\pi r^2} \sigma$$

Para un segmento de recta se obtiene, integrando la ecuación anterior:

$$\vec{V} = \frac{S}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} \vec{r}_0 \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$$

Un elemento diferencial de fuente  $dS$  de intensidad  $\mu$  tiene un campo de velocidades asociado definido por la función:

$$d\vec{V} = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} dS \cdot \mu$$

Para una fuente distribuida de forma cuadrangular se obtiene:

$$u = \frac{S}{4\pi} \left[ \frac{y_2 - y_1}{d_{12}} \ln \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} + \frac{y_3 - y_2}{d_{23}} \ln \frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} + \frac{y_4 - y_3}{d_{34}} \ln \frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} + \frac{y_1 - y_4}{d_{41}} \ln \frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right]$$

$$v = \frac{S}{4\pi} \left[ \frac{x_1 - x_2}{d_{12}} \ln \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} + \frac{x_2 - x_3}{d_{23}} \ln \frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} + \frac{x_3 - x_4}{d_{34}} \ln \frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} + \frac{x_4 - x_1}{d_{41}} \ln \frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right]$$

$$w = \frac{S}{4\pi} \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{12}e_1 - h_1}{zr_1} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{12}e_2 - h_2}{zr_2} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{23}e_2 - h_2}{zr_2} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{23}e_3 - h_3}{zr_3} \right) \right. \\ \left. + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{34}e_3 - h_3}{zr_3} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{34}e_4 - h_4}{zr_4} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{41}e_4 - h_4}{zr_4} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m_{41}e_1 - h_1}{zr_1} \right) \right], \text{ en}$$

donde:

$$m_{ij} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, \quad d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + z^2}, \quad e_k = (x - x_k)^2 + z^2, \quad h_k = (x - x_k)(y - y_k)$$

Para cada panel se puede determinar un punto de “colocación” en donde se debe cumplir que el flujo normal a la superficie sea nulo. Esto permitiría, discretizando la geometría en N paneles, ajustar la intensidad de las N singularidades reduciendo el problema a un sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas. La linealidad de este sistema es consecuencia de la proporcionalidad directa entre las influencias de las soluciones singulares y sus intensidades.

Pero en nuestro caso en cada panel disponemos una fuente distribuida para generar el desplazamiento del flujo debido al volumen del obstáculo y un anillo vorticoso para ajustar las líneas de desprendimiento. Esto genera dos incógnitas para cada panel quedando el sistema de ecuaciones sub-determinado.

Existen varias posibilidades para la selección de la solución. En este caso hemos optado por pre-determinar la intensidad de las fuentes para cancelar una fracción de la componente del flujo incidente normal al panel, dejando luego un sistema de N ecuaciones con N incógnitas para ajustar la intensidad de los anillos vorticosos en función de la condición de impermeabilidad del panel. Esto puede realizarse por métodos directos como el de eliminación de Gauss, la descomposición LU, etc.; o por relajación.

La condición de Kutta se cumple introduciendo anillos vorticosos en el flujo desde las líneas de separación con una intensidad igual a la diferencia de las intensidades de los anillos adyacentes. De esta forma, la vorticidad neta tangencial a la línea de separación es nula.

## CALCULO DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Originalmente se eligió la descomposición LU, ya que una vez obtenida la descomposición permite recalculer con poco esfuerzo computacional la solución para las N vorticidades en tanto no se modifique la matriz de influencias (no es necesario recalculer la descomposición).

Esto es válido en el caso de cambiar únicamente las condiciones del flujo incidente o modificaciones leves de la geometría de la estela vorticoso, pero dado que esto último realmente impacta en la matriz de influencias debería ser tenido en cuenta si los cambios son significativos en la proximidad del obstáculo.

## RELAJACION DE ESTELAS VORTICOSAS

Teniendo en cuenta que no puede existir diferencia de presiones a través de una estela vorticoso, los hilos vorticosos en la estela se repositionan de forma iterativa siguiendo las líneas de corriente resultantes mediante un algoritmo de relajación.

Existen varias opciones para ello. Aquí se optó por segmentar cada hilo vorticoso en tramos rectos. Dos hilos adyacentes definen un segmento de la estela y en los puntos medios entre segmentos se calcula la dirección de la velocidad. Con estas direcciones se realinea la estela partiendo desde el borde de fuga que es fijo y avanzando corriente abajo.

En cada ciclo de relajación solo se aplica una fracción del desplazamiento calculado, ya que la forma de la estela tiene mucho impacto en las direcciones calculadas y cualquier realineación produce cambios muy significativos.

## HERRAMIENTAS PARA LA DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

Uno de los aspectos más complejos para un sistema de este tipo es la implementación de una interfaz de usuario que permita definir la geometría y el mallado del obstáculo.

Por una parte, el proceso debe estar lo suficientemente automatizado como para hacer que el sistema sea “usable”. Por otra parte, deben proveerse herramientas que den al usuario las facilidades necesarias para realizar los ajustes que permitan lograr resultados aceptables.

Existen muchas herramientas de diseño que permiten definir sólidos en un espacio tridimensional, por lo cual resulta conveniente utilizar archivos de intercambio compatibles con estas herramientas a fin de restringir el desarrollo al cálculo y visualización de resultados.

En primera instancia se incorporó el soporte para la importación de archivos DXF de Autocad®, y actualmente se analiza la utilización de archivos VRML y X3D.

Teniendo en cuenta esto, en esta aplicación el modelo se define en base a un conjunto de vértices y un conjunto de paneles definidos por una lista de 4 conectividades con los anteriores. Los paneles se agrupan en uno o más componentes a fin de permitir reutilizar definiciones previas.

En general resulta accesible, utilizando cualquier lenguaje o script de programación o incluso utilizando una planilla electrónica de cálculo; definir coordenadas y conectividades de vértices para geometrías sencillas tales como superficies alares o cuerpos fuselados sencillos y objetos con simetría de revolución. Los problemas surgen al trabajar con superficies tales como carenados de unión ala-fuselaje, punteras de ala, etc.

Para ello se implementó un mallador básico que permite generar tanto los vértices como las conectividades de un componente en base a la definición de una secuencia de secciones planas, abiertas o cerradas y orientadas de forma arbitraria.

La forma de una sección se construye en base a una “plantilla” previamente definida e identificada con un nombre, y que es simplemente una secuencia de puntos en un plano bidimensional.

Para generar una determinada sección requiere además de seleccionar una plantilla, especificar ciertos modificadores (posición del punto de referencia, orientación del vector normal a la sección y factores de escala para ambos ejes).

En la generación de vértices se realiza una comparación con los existentes para detectar relaciones unívocas de contacto entre componentes o partes definidas independientemente. Se provee además la posibilidad de visualizar el mallado generado a fin de permitir la inspección visual del mallado y detectar errores u omisiones.

## GENERACIÓN DE RESULTADOS Y VISUALIZACIÓN

La solución numérica permite ajustar las intensidades de las singularidades, con lo cual queda completamente definido el campo de velocidades y por lo tanto el de presiones.

Esto permite entre otras cosas:

- 1 – Trazar líneas de corriente y determinar ángulos de incidencia locales en distintos componentes del obstáculo.
- 2 – Determinar cargas aerodinámicas en la superficie y efectos de interferencia entre componentes.
- 3 – Determinar fuerzas y momentos aerodinámicos
- 4 – Determinar gradientes de presiones en las superficies para realizar cálculos de capa límite.

La visualización de resultados es esencial para la “usabilidad” de la aplicación. Por ello se ha trabajado para brindar diferentes herramientas.

Entre ellas se cuenta con la posibilidad de definir una secuencia de puntos de inicio para el trazado de líneas de corriente, la posibilidad de visualizar el campo de presiones sobre la superficie o en una

sección definida por cuatro vértices arbitrariamente ubicados en el campo fluidodinámico, y un registro de valores netos de fuerza y momento en tres ejes.

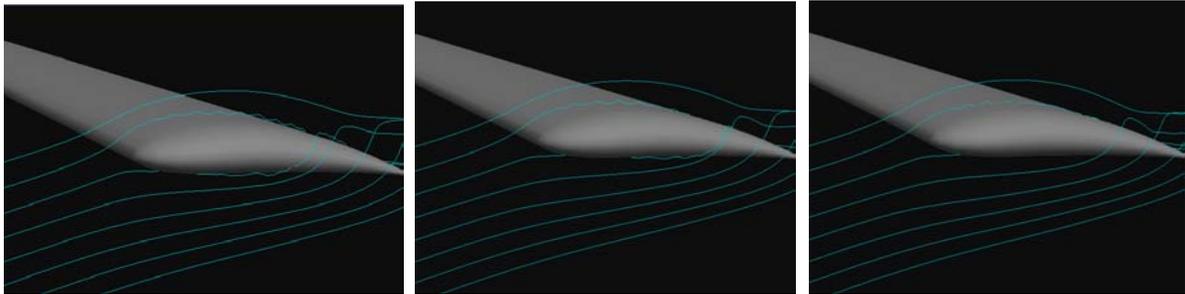
## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para poner a prueba la aplicación se realizaron cálculos sobre una ala de planta rectangular y alto alargamiento (perfil NACA 4412, alargamiento 10), utilizando un modelo de alta densidad (1326 paneles) con diferentes opciones para la puntera.

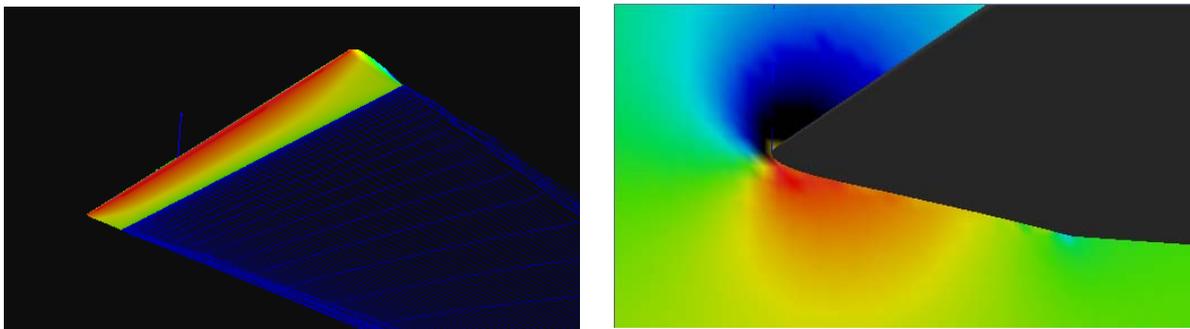
Respecto del cálculo se observó una elevada inestabilidad utilizando la descomposición LU con esta cantidad de paneles. Solo pudieron lograrse resultados satisfactorios utilizando métodos iterativos. Sin embargo, con densidades menores se obtuvieron resultados similares.

Se ha mencionado que las fuentes en cada panel se ajustan para cancelar una fracción de la componente normal del flujo incidente. Así se espera que los valores de vorticidad en cada panel sean menores en valor absoluto, permitiendo obtener un campo de flujo más uniforme.

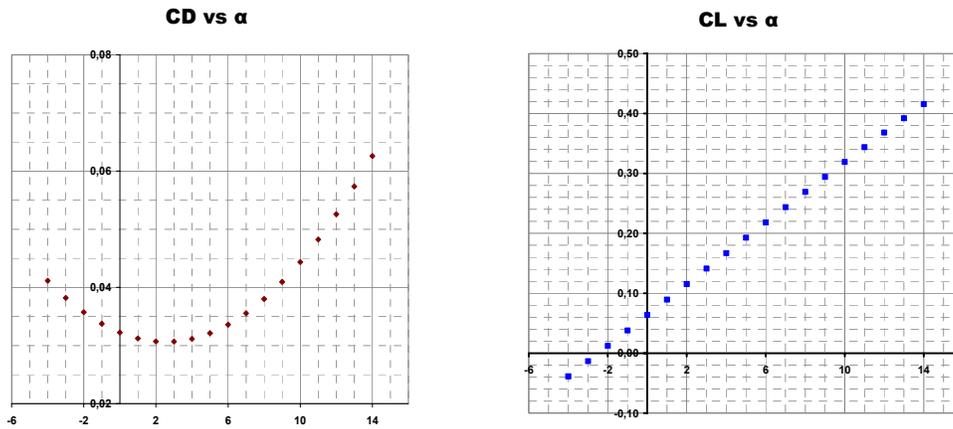
El valor por omisión es 0.5. Realizando cálculos con diferentes fracciones de fuente entre 0.5 y 1 no se observaron cambios significativos. En las siguientes figuras se observan líneas de corriente en la puntera del ala.



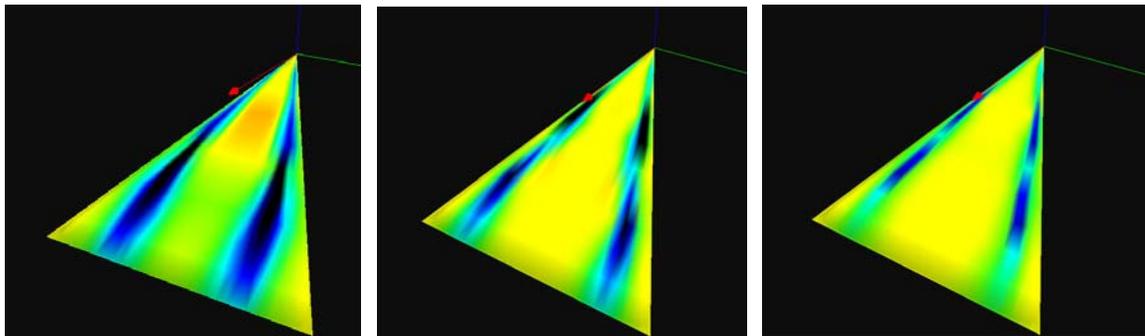
En general para este caso los resultados cualitativos son satisfactorios. En las siguientes figuras podemos observar a la izquierda la distribución de presiones sobre el intradós y la estructura de la estela vorticiosa; y a la derecha la distribución de presiones en una sección longitudinal del campo fluidodinámico alrededor de la sección central del ala.



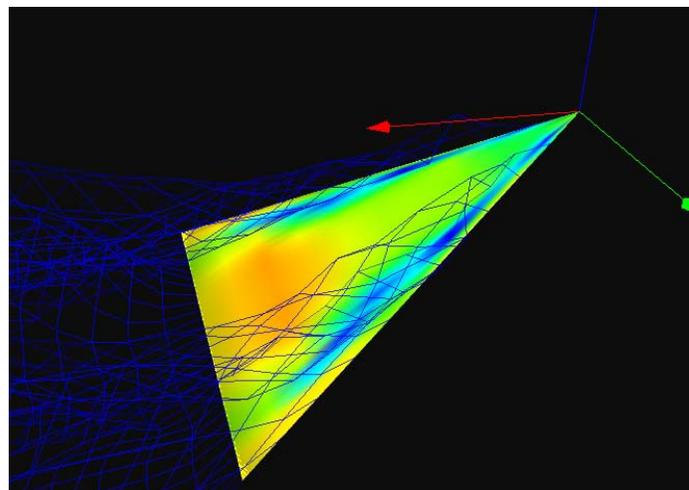
Lamentablemente los valores calculados de sustentación y resistencia muestran discrepancias importantes que aun no han podido ser corregidas. En los gráficos de la página siguiente puede notarse por un lado que la pendiente de la curva de sustentación es excesivamente baja; y por otro que existe una resistencia de presión adicional a la inducida. Esto es algo no esperado y cuyo origen no ha sido determinado aun.



En cuanto al algoritmo de relajación para la estela debemos decir que debe ser utilizado bajo control del usuario, ya que en general un exceso puede producir soluciones no racionales. En algunos casos la estructura de la estela vorticosa es esencial para la solución del campo de presiones en el obstáculo. Para ilustrar este punto se realizaron cálculos sobre un ala en delta a  $30^\circ$  de ángulo de ataque, y se observaron los campos de presiones durante el proceso de relajación. En las siguientes figuras puede verse que el campo de presiones sobre el extradós se relaja a medida que se mejora la estructura de la estela vorticosa (no mostrada).



Luego de decenas de ciclos de relajación utilizando incrementos suave (10% por ciclo) para lograr cierto nivel de convergencia se llega a lo siguiente:



Indudablemente la solución de esta clase de problemas requiere una mayor densidad en la definición de los nodos de la estela vorticosa.

## CONCLUSIONES Y PASOS A SEGUIR

Debe admitirse que se necesitan mayores casos de prueba para validar la aplicación y realizar los ajustes necesarios.

En particular debería evaluarse si existirían ventajas en usar la condición de Dirichlet en lugar de Neumann, y si el esquema de relajación de estelas podría sofisticarse para pasar a un esquema de segmentación adaptiva. Una cuestión adicional sería la de evaluar la conveniencia de desplazar los puntos de colocación desde el centro de los paneles en la dirección de la corriente.

Aun así los resultados cualitativos obtenidos son buenos, y podría pensarse ya en un esquema no estacionario; que es en última instancia el objetivo final. Para este paso solo sería necesario incorporar la velocidad del obstáculo en las condiciones de borde y pasar a un esquema no estacionario para la estela basado en el Teorema de Kelvin.

Otras aplicaciones comercialmente afianzadas como VSAERO/USAERO o PMARC han demostrado que estas metodologías resultan lo suficientemente exactas y convenientes para avanzar rápidamente en los procesos de diseño; dejando los códigos de Navier Stokes mucho mas costosos computacionalmente solo para las verificaciones y cálculos finales.

Desde el punto de vista general en las metodologías de paneles existe una dificultad intrínseca al modelado mediante soluciones singulares. Dado que las singularidades se encuentran en la superficie del obstáculo, el cálculo de velocidades en las cercanías de la misma solo puede realizarse en los puntos de control. Por lo tanto se necesita utilizar un esquema de interpolación para determinar velocidades y presiones sobre otros puntos de la superficie. Esto no resulta problemático en la superficie del obstáculo, pero genera problemas para el campo de velocidades en la proximidad de las singularidades y complica la obtención de soluciones estables para la geometría de las estelas vorticosas. En códigos no-estacionarios la convergencia se obtiene de forma natural .

## REFERENCIAS

1. Josph Katz, Allen Plotkin: "Low-Speed Aerodynamics – From Wing Theory of Panel Methods"; 1991.
2. Arnold M. Kuethe and Chuen-Yen Chow: "Foundations Of Aerodynamics – Bases of Aerodynamic Design"; 1986.
3. John J. Bertin, Michael L. Smith: "Aerodynamics for Engineers"; 1979.
4. D.Küchemann: "The Aerodynamic Design of Aircraft"; 1978.
5. Barnes W. McCormick: "Aerodynamics of V/STOL Flight"; 1967.
6. G.D.Åke Björck: "Numerical Methods"; 1974, Prentice Hall.
7. B. Maskew: "A Computer Program for Calculating the Non-Linear Aerodynamic Characteristics of Arbitrary Cinfigurations", 1984.