



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*Tesis presentada para optar al grado de  
Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas*

---

**REPERCUSIONES CUÁNTICAS *de los*  
ESTADOS CLÁSICAMENTE CORRELACIONADOS**  
*Aspectos informacionales y computacionales*

---

*Tesista:* Guido Bellomo  
*Director:* Ángel L. Plastino

2017



# REPERCUSIONES CUÁNTICAS *de los* ESTADOS CLÁSICAMENTE CORRELACIONADOS

Aspectos informacionales y computacionales

Este documento fue tipografiado usando  $\text{\LaTeX}$ , adaptando mayormente el estilo tomado de la clase `tufte-latex`,<sup>1</sup> basada en *Beautiful Evidence* de Edward Tufte<sup>2</sup>. La bibliografía fue procesada usando `Bib $\text{\LaTeX}$` <sup>3</sup>.

*Repercusiones cuánticas de los estados clásicamente correlacionados*  
*Aspectos informacionales y computacionales*

© Marzo, 2017. Guido Bellomo

<sup>1</sup> <https://tufte-latex.github.io/tufte-latex/>

<sup>2</sup> Tufte, Edward R. (2006). *Beautiful Evidence*. New York.

<sup>3</sup> <https://www.ctan.org/pkg/biblatex>

# **Repercusiones cuánticas de los estados clásicamente correlacionados**

Aspectos informacionales y computacionales

**Guido Bellomo**

## RESUMEN

La Información Cuántica, como disciplina que hereda virtudes y defectos de la Teoría de la Información y de la Mecánica Cuántica, ha brindado, durante los últimos años, un avance considerable en el entendimiento y resolución de ciertos problemas de Fundamentos de la Cuántica. El formalismo, sin embargo, no está exento de interrogantes propios que son intensamente estudiados.

Algunas de las contribuciones más importantes se vinculan con las potencialidades de los sistemas mecánico-cuánticos como recursos computacionales más poderosos que los implementables mediante sistemas que no evidencian efectos cuánticos. La clave, en esos casos, está en el tipo de correlaciones que pueden establecerse entre dos o más partes de los sistemas.

En este trabajo, presento varios resultados en los que estudio aspectos informacionales de los sistemas cuánticos, presentes incluso en los estados denominados clásicamente correlacionados.

## **Quantum implications of classically correlated states**

Informational and computational aspects

**Guido Bellomo**

## ABSTRACT

Quantum Information, as a discipline that inherits the strengths and weaknesses of Information Theory and Quantum Mechanics, has provided, in recent years, considerable progress in understanding and solving certain problems on the Foundations of Quantum Mechanics. The formalism, however, has its own open questions that are intensely studied nowadays.

Some of the most important contributions are related to the potentiality of quantum-mechanical systems as more powerful computational resources than those implementable by means of systems that do not show quantal effects. The key, in those cases, is on the class of correlations that can be established between two or more parts of the systems.

In this work, I present several results that explore informational aspects of quantum systems, which show up even in the so-called classically-correlated states.



*“La Verdad tantas veces ya viene siendo bastante poco.  
¿Tan pobres somos que solo hay ciencia frente a tanto dolor?”*  
— Gabo Ferro, *boca arriba*

*“Nuestro saber refleja, pues, el mundo. Lo hace más o menos bien, pero  
representa el mundo que habitamos. Esta comunicación entre nosotros y el  
mundo no es algo que nos diferencie del resto de la naturaleza.”*  
— Carlo Rovelli, *Siete breves lecciones de física*

*“La única razón por la cual los objetos parecen acabarse en cierto punto es  
porque la gente no conoce otra manera de mirarlos —dijo—.”*  
— J. D. Salinger, *Nueve cuentos*

*“Era una ecuación fallida, en mi opinión. En alguna parte  
tendría que haber habido una C de conciencia, pues sin ella  
no podían existir la E, la M y la c [...].”*  
— Kurt Vonnegut, *Desayuno de campeones*

*“Sin resentimiento ha reflexionado tanto, pero tanto sobre su vida, y es  
como si con alguna lógica sinrazón, buscara consuelo en el imperativo de  
hechos ajenos a su voluntad y, por lo tanto, inevitables.”*  
— Gabriel Bellomo, *El silencio de las abejas*





## AGRADECIMIENTOS

A mi director, el Dr. Ángel Plastino, y a Ángel R. Plastino, por brindarme su conocimiento y entusiasmo para desarrollar mi trabajo doctoral.

A Martín Bosyk, Federico Holik, Mariela Portesi e Ignacio Gómez. A Walter Lamberti y Ana Majtey. A Olimpia Lombardi y el Grupo de Filosofía de las Ciencias de la Universidad de Buenos Aires. A Steeve Zozor y su grupo del GIPSA-lab por recibirme en Grenoble. A Jesús Sánchez-Dehesa, y sus dirigidos y colegas, por recibirme en el Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Universidad de Granada. A Giuseppe Sergioli y Héctor Freytes de la Università degli Studi di Cagliari.

A quienes fueron mis docentes, tanto en la Universidad Nacional de La Plata como, anteriormente, en la de Buenos Aires. A mis colegas del Instituto de Física de La Plata. A todos los trabajadores (docentes y no docentes) de la Universidad Nacional de La Plata, en especial a Alejandro Szynekman y Mauricio Matera, con quienes compartí cursos y de quienes aprendí. A la agrupación de Jóvenes Científicos Precarizados y todas las agrupaciones que luchan por los derechos de los trabajadores de la comunidad científica.

A todos los integrantes del Bachillerato Popular “El Llamador” de Tolosa.

Por sobre todo, a Cintia, Sofía (por dos), Valentina, Analía y Gabriel. A Raquel, María Luisa, Miguel y Víctor. A Juan, Andrés, Nathalie, Leandro, Juliana, Stella y Eduardo. A mis primas, primos, tías y tíos. A mis amigas y amigos. Gracias por acompañarme, cada día.



# ÍNDICE GENERAL

1	<i>Introducción</i>	17
1.1	<i>Formalismo de la Mecánica Cuántica</i>	17
1.2	<i>Correlaciones Cuánticas y Cuanticidad</i>	23
1.3	<i>Información y Mecánica Cuántica</i>	25
2	<i>Correlaciones cuánticas en estados clásicos</i>	33
2.1	<i>Estados (no tan) clásicamente correlacionados</i>	33
2.2	<i>Dimensionalidad del espacio de Hilbert como recurso</i>	41
2.3	<i>Resumen del capítulo 2</i>	49
3	<i>Extensiones clásicas de estados separables</i>	51
3.1	<i>Extensiones clásicas de estados separables</i>	51
3.2	<i>Extensiones clásicas óptimas</i>	55
3.3	<i>Estados separables máximamente discordantes</i>	64
3.4	<i>Resumen del capítulo 3</i>	66
4	<i>Correlaciones cuánticas y condiciones de localidad</i>	69
4.1	<i>Localidad y subsistemas en sistemas compuestos</i>	69

4.2	<i>Cuanticidad y subsistemas</i>	72
4.3	<i>Midiendo la Cuanticidad Potencial</i>	74
4.4	<i>Discord Cuántico Potencial</i>	81
4.5	<i>Resumen del capítulo 4</i>	91
5	<i>Cuanticidad mediante entropías generalizadas</i>	93
5.1	<i>Problemas asociados al uso de entropías generalizadas</i>	93
5.2	<i>Entropías relativas y generalizaciones alternativas</i>	97
5.3	<i>Medidas entrópicas unificadas de correlaciones cuánticas</i>	99
5.4	<i>Resumen del capítulo 5</i>	112
6	<i>Conclusiones</i>	115
6.1	<i>Resumen y conclusiones</i>	115
6.2	<i>Perspectivas y problemas abiertos</i>	118
	<i>Códigos usados para los cálculos numéricos</i>	119
	<i>Descomposición separable de estados de dos cubits</i>	125
	<i>Glosarios y nomenclatura</i>	127
	<i>Bibliografía</i>	129
	<i>Índice alfabético</i>	139

## PRÓLOGO

La Información Cuántica y la Computación Cuántica son dos disciplinas que han generado un cambio radical en la forma de estudiar y comprender la Mecánica Cuántica en las últimas décadas. Uno de los objetivos más perseguidos ha sido el de caracterizar las posibles correlaciones estadísticas presentes en los sistemas mecánico-cuánticos, con vistas a implementar protocolos computacionales que aprovechen tales correlaciones como recurso para hacerlos más eficientemente que al implementarlos en sistemas que se comportan clásicamente.

Viendo la luz con los trabajos de Yuri Manin<sup>4</sup>, Paul Benioff<sup>5</sup>, Richard Feynman<sup>6</sup> y David Deutsch<sup>7</sup>, durante la primera mitad de los años ochenta, la Computación Cuántica ha estudiado las implicaciones del uso de sistemas mecánico-cuánticos como recursos computacionales y ha buscado comprender cómo las características peculiares de los sistemas mecánico-cuánticos proveen un poder de cálculo superior al de la computación clásica tradicional. Hoy, construir *la* computadora cuántica —la piedra filosofal de los computadores cuánticos— es una promesa cada vez menos especulativa, algo que queda demostrado (o será acaso una profecía autocumplida) por las enormes inversiones de grandes empresas o corporaciones, como IBM<sup>8</sup>, Google y Microsoft<sup>9</sup>. La iniciativa de la Comisión Europea<sup>10</sup>, llamando a la segunda revolución cuántica, está en la misma línea.

Aún cuando Argentina o, más precisamente, Latinoamérica no goza de la soberanía sobre estos grandes proyectos, llevar adelante estas investigaciones es fundamental para el desarrollo científico-tecnológico local, desde el momento en que promueve la experticia (el *know-how*) e implica la posibilidad de colaboración en tales proyectos internacionales<sup>11</sup>.

Durante el desarrollo de este trabajo, intentamos recorrer varios aspectos informacionales y computacionales relacionados con las capacidades de utilizar una clase especial de estados, los estados clásicamente correlacionados, para la implementación de tareas cuánticas.

El manuscrito está organizado en capítulos, todos ellos precedidos por una breve descripción y procedidos por un resumen de los re-

<sup>4</sup> Y I Manin. “Vychislimoe i nevychislimoe” [Computable and noncomputable]. *Sov. Radio* (1980).

<sup>5</sup> P Benioff. *J. Stat. Phys.*, 22(5) 563–591 (1980).

<sup>6</sup> R P Feynman. *Int. J. Theor. Phys.*, 21(6) 467–488 (1982).

<sup>7</sup> D Deutsch. “Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer”. *Proc. R. Soc. A*, Vol. 400, 97–117 (1985).

<sup>8</sup> <http://www.research.ibm.com/quantum/>

<sup>9</sup> *Nature* 541, 9–10 (05 January 2017) doi:10.1038/541009a.

<sup>10</sup> <http://quope.eu/manifesto>

<sup>11</sup> En mi opinión, esta afirmación es doblemente válida en el contexto de gobiernos nacionales que siempre aciertan (aunque no siempre de la misma forma) en confundir el rumbo de las políticas científicas.

sultados más relevantes. Los diferentes capítulos se desarrollan de acuerdo a los siguientes contenidos:

1. El capítulo 1 es una introducción a los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica estándar<sup>12</sup>, así como de las nociones de correlaciones cuánticas y su estudio desde la teoría de la información.
2. En el capítulo 2, presentamos casos de estados cuánticos de dimensión finita que muestran claramente la presencia de correlaciones cuánticas en estados clásicamente correlacionados, y servirá de motivación para el desarrollo de los capítulos siguientes. En particular, discutimos cómo la situación mencionada indica que el espacio de Hilbert en sí mismo puede considerarse como recurso para la computación cuántica.
3. En el capítulo 3, formalizamos algunos aspectos de la relación entre estados (separables) cuánticamente correlacionados y estados clásicamente correlacionados, proponiendo un estudio riguroso de las posibles extensiones clásicas de estados separables.
4. En la primera parte del capítulo 4, discutimos el papel que juegan las condiciones de localidad en la comprensión de las correlaciones cuánticas más allá del entrelazamiento. Ello, en base a lo trabajado en los capítulos 2 y 3, nos motiva a definir la noción de “cuantidad potencial”, y de cuantificadores adecuados que den cuenta de ella, como presentamos en la segunda parte del capítulo 4.
5. Por último, en el capítulo 5 exploramos el uso de entropías generalizadas<sup>13</sup> en la definición de medidas de correlaciones cuánticas, los problemas que se desprenden de ello y posibles soluciones a los mismos.

<sup>12</sup> Como es usual, me referiré al caso no relativista como mecánica cuántica estándar u ordinaria.

<sup>13</sup> Se conocen como entropías generalizadas a diversos funcionales, o familias paramétricas de ellos, como los de Rényi o Tsallis, propuestos como alternativas a la entropía de von Neumann.

## PUBLICACIONES

La mayor parte de este trabajo lo hemos reportado en las siguientes publicaciones<sup>14</sup>:

- [1] Guido Bellomo y col. “Quantum correlations from classically correlated states”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 405 (2014), págs. 260-266
- [2] Guido Bellomo y col. “Comment on “Quantum discord through the generalized entropy in bipartite quantum states””. En: *The European Physical Journal D* 68.337 (2014), págs. 1-4
- [3] Guido Bellomo, Angelo Plastino y Angel R Plastino. “Classical extension of quantum-correlated separable states”. En: *International Journal of Quantum Information* 13.02 (2015), pág. 1550015

<sup>14</sup> El orden cronológico en que están listadas no coincide exactamente con el orden en que los resultados están desarrollados en esta tesis.

- [4] Angelo Plastino, Guido Bellomo y Angel R Plastino. "Quantum state space-dimension as a quantum resource". En: *International Journal of Quantum Information* 13.06 (2015), pág. 1550039
- [5] Guido Bellomo, Angel Plastino y Angel R Plastino. "Quantumness and the role of locality on quantum correlations". En: *Physical Review A* 93.6 (2016), pág. 062322
- [6] Gustavo M Bosyk y col. "Unified entropic measures of quantum correlations induced by local measurements". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 462 (2016), págs. 930-939

Durante mi Doctorado, tuve la oportunidad de trabajar y publicar sobre otros temas relacionados con los anteriores (información de Fisher en sistemas cuánticos, teorías probabilísticas generalizadas, transformaciones de entrelazamiento en sistemas bipartitos y fundamentos de la mecánica cuántica). Esos trabajos, no contemplados en el cuerpo principal de este manuscrito, han sido reportados en las siguientes publicaciones:

- [7] Angel Plastino, Guido Bellomo y Angel R Plastino. "On a conjecture regarding Fisher information". En: *Advances in Mathematical Physics* 2015 (2015), págs. 1-4
- [8] Federico Holik, Gustavo M Bosyk y Guido Bellomo. "Quantum information as a non-Kolmogorovian generalization of Shannon's theory". En: *Entropy* 17.11 (2015), págs. 7349-7373
- [9] Gustavo M Bosyk y col. "Approximate transformations of bipartite pure-state entanglement from the majorization lattice". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 473 (2017), págs. 403-411
- [10] Angelo Plastino, Guido Bellomo y Angel R Plastino. "On the relative character of quantum correlations". En: *What is Quantum Information?* Ed. por Olimpia Lombardi y col. Cambridge University Press, 2017<sup>15</sup>

<sup>15</sup> En prensa. Fecha estimada de publicación: 30 de abril de 2017

Respecto a la metodología de trabajo, cabe aclarar que utilizamos el software Wolfram Mathematica (versión 10.4.1.0) para algunos cálculos simbólicos y MathWorks MATLAB (versión R2016b) para simulaciones numéricas.

#### SOBRE LA ESCRITURA

Todos los resultados recogidos en este manuscrito son fruto de un trabajo conjunto, por lo cual he decidido narrar el manuscrito en la primera persona del plural.

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

El presente trabajo de tesis es de mi autoría y su contenido está basado en los resultados de mi propio trabajo.





# 1 INTRODUCCIÓN

*En este capítulo, introducimos el formalismo básico usado en Mecánica Cuántica (MC) no relativista para la descripción de sistemas simples y compuestos, de dimensión finita. Además, discutimos las nociones de entrelazamiento, correlaciones cuánticas y cuantización, y sus aspectos informacionales, aportando las herramientas básicas para el desarrollo de los capítulos posteriores. La mayor parte de los contenidos de este capítulo pueden hallarse en los libros y textos estándar de introducción a la MC [11], a la Teoría de la Información [12] y a la Información y Computación cuánticas [13, 14].*

## 1.1 Formalismo de la Mecánica Cuántica

Toda descripción física parte de la identificación de un *sistema físico*, una porción del Universo que queremos estudiar. A dicho sistema, le corresponde un *estado* que es un catálogo informativo que nos permite conocer algo acerca de las propiedades de ese sistema. Realizando mediciones de cantidades físicas adecuadas, las asociadas a los *observables* del sistema, parte de la información del estado es develada. Todas estas nociones básicas poseen sus contrapartes matemáticas en el formalismo de la MC.

### *Estados y observables*

A un *sistema cuántico* se asocia un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , separable<sup>16</sup>, de dimensión  $\dim \mathcal{H} < \infty$ . Usando la notación convencional de Dirac, el estado del sistema es representado por un rayo complejo  $|\psi\rangle$  que pertenece a  $\mathcal{H}$ , es decir que vive en un espacio vectorial complejo equipado con un producto interno. Los vectores  $e^{i\varphi} |\psi\rangle$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , describen el mismo estado físico. El espacio dual  $\mathcal{H}^*$  de  $\mathcal{H}$  es el espacio de funcionales lineales continuas desde  $\mathcal{H}$  al espacio de números complejos  $\mathbb{C}$ . En  $\mathcal{H}^*$ , identificamos los elementos duales  $\langle\phi|$ , y el producto interno, anti-lineal (lineal) en el primer (segundo) miembro, lo notamos como  $\langle\phi|\psi\rangle$ . Los vectores de estado son normalizados a 1, es decir,  $\langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2 = 1$ .

<sup>16</sup> Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si admite una base ortonormal numerable.

No todos los estados físicos de sistemas cuánticos son representables

como vectores en  $\mathcal{H}$ . Sólo los llamados *estados puros*, correspondientes a los casos en que la información es completamente accesible mediante cierta medición, son representables de esa manera. En general, tendremos un ensamble de estados puros, representado por un operador de estado<sup>17</sup>,  $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,

$$\rho = \sum_i c_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| . \quad (1.1)$$

Los estados de este tipo se denominan *estados mezcla*, son representados por operadores semidefinidos positivos ( $\langle k|\rho|k\rangle \geq 0 \forall |k\rangle \in \mathcal{H}$ ), hermíticos ( $\rho^\dagger = \rho$ ) y de traza unidad ( $\text{Tr}\rho = 1$ ), de modo que los coeficientes  $c_i$  de la expresión (1.1) son tales que esas condiciones se satisfacen.

Al conjunto de operadores de estado en un Hilbert  $\mathcal{H}$  lo denotamos  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Este conjunto es convexo, de modo que

$$\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Rightarrow c\rho_1 + (1-c)\rho_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (1.2)$$

con  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \geq 0$ . Un estado puro arbitrario,  $|\psi\rangle$ , es un operador de estado de rango uno —es decir, un elemento extremo en el convexo de estados cuánticos— y posee una representación  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  (como caso particular) en el formalismo de operadores de estado (Figura 1.1).

La descomposición de un estado mezcla como combinación de estados puros, así como en la Ec. (1.1), no es única. Existe una descomposición privilegiada que es la llamada *descomposición espectral*, consistente en un conjunto de estados puros ortogonales. Si  $\{|i\rangle\}$  constituye una base de  $\mathcal{H}$ ,  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , el estado es representable por la matriz densidad ( $\langle i|\rho|j\rangle$ )  $i, j = 1 \dots \dim \mathcal{H}$ . La descomposición espectral no es más que la descomposición en autovalores y autovectores de la matriz densidad:

$$\rho = \sum_i p_i |\omega_i\rangle \langle \omega_i| , \quad (1.3)$$

donde  $\langle \omega_i|\omega_j\rangle = \delta_{ij}$ . En este caso, las componentes son perfectamente distinguibles y la descomposición *puede* interpretarse como una mezcla estadística clásica —por ignorancia—, donde los coeficientes  $p_i$  indican las probabilidades pertinentes.

Las magnitudes de un sistema están asociadas a los llamados *observables* cuánticos, representados por operadores autoadjuntos con dominio denso en  $\mathcal{H}$ . Un observable  $X$  es representado por una matriz cuadrada  $(x_{ij})$   $i, j = 1 \dots \dim \mathcal{H}$ , con  $x_{ij} = \langle i|X|j\rangle$ . Sus autovectores forman una base completa y ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Para describir un sistema con  $d$  grados de libertad, es suficiente con especificar un conjunto de  $d$  observables  $\{X_k\}_{1 \leq k \leq d}$  que conmuten entre sí. La conmutatividad mutua permite diagonalizar todos los observables simultáneamente hallando un conjunto de autovectores no degenerados que se construyen como productos tensoriales de autovectores de cada observable:  $|x_1 \dots x_d\rangle = \otimes_{k=1}^d |x_k\rangle$ , con  $X_k |x_1 \dots x_k \dots x_d\rangle = x_k |x_1 \dots x_k \dots x_d\rangle$ .

<sup>17</sup> Como es usual, usaremos indistintamente (abuso mediante) los términos operador de estado, operador densidad y matriz densidad. Así también, emplearemos el mismo símbolo, por ej.  $\rho$ , para representarlos.

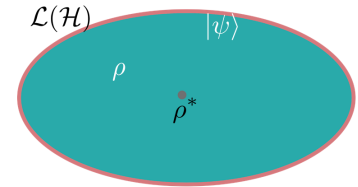


Figura 1.1: El conjunto de todos los operadores de estado,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , forma un conjunto convexo. Los estados extremos, en el borde del conjunto, son los estados puros,  $|\psi\rangle$ . En el interior del conjunto se hallan los estados mezcla, con centro en el estado máximamente mezclado,  $\rho^* \equiv \frac{1}{d}$ .

## Sistemas compuestos

Cuando hablamos de un *sistema compuesto* asumimos que es posible identificar —en algún sentido que debemos explicar— grados de libertad asociados a cada una de las dos o más partes que posee. Tomemos el caso bipartito, ya que la generalización a los casos de más partes es directa. Si el sistema bipartito, con subsistemas  $A$  y  $B$ , se halla en un estado puro, éste puede representarse por un vector  $|\psi\rangle^{AB} \in \mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , tal que  $|\psi\rangle^{AB} = \sum_{mn} c_{mn} |m\rangle^A \otimes |n\rangle^B$  con  $\{|m\rangle^A\}_{1 \leq m \leq d^A}$  y  $\{|n\rangle^B\}_{1 \leq n \leq d^B}$  bases de  $\mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^B$ , respectivamente, con  $d^A = \dim \mathcal{H}^A$  y  $d^B = \dim \mathcal{H}^B$ . Los estados de los subsistemas quedan representados por los operadores de estado marginales (o reducidos) inducidos por las trazas parciales sobre los espacios de Hilbert complementarios:  $\rho^A = \text{Tr}_B \rho^{AB} = \sum_j \langle j | \rho^{AB} | j \rangle^B$  y  $\rho^B = \text{Tr}_A \rho^{AB} = \sum_i \langle i | \rho^{AB} | i \rangle^A$ .

Notemos que para definir adecuadamente el estado de los subsistemas fue necesario apelar a la operación de *traza parcial*<sup>18</sup>,  $\text{Tr}_{\mathcal{H}^X} \equiv \text{Tr}_X : \mathcal{H}^X \otimes \mathcal{H}^Y \rightarrow \mathcal{H}^Y$ . La traza parcial es un mapa completamente positivo (ver más adelante) sobre el espacio de operadores densidad. En general, siempre que un espacio de Hilbert es factorizable —es decir, con una estructura de producto tensorial— en la forma  $\mathcal{H}^X \otimes \mathcal{H}^Y$ , todo operador de estado  $\rho^{XY}$  que actúa sobre ese espacio puede interpretarse como un estado compuesto cuyos subsistemas se hallan en los estados  $\rho^{X(Y)} = \text{Tr}_{Y(X)} \rho^{XY}$ .

## Dinámica

La *evolución dinámica* de los estados de los sistemas cuánticos es determinista. Para un *sistema cerrado* que un cierto instante  $t_0$  se halla en el estado puro  $|\psi(t_0)\rangle \in \mathcal{H}$ , la evolución del estado es *unitaria*:

$$|\psi(t)\rangle = U(t_0, t) |\psi(t_0)\rangle, \quad (1.4)$$

donde  $U(t_0, t)$  es un operador unitario,  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $U^\dagger U = \mathbb{1} = U U^\dagger$ . La condición de unitariedad implica las de isometría<sup>19</sup> y coisometría, es decir que garantiza la preservación del producto interno en  $\mathcal{H}$ . En resumen, las evoluciones dinámicas de los sistemas cerrados están gobernadas por automorfismos que preservan la estructura del espacio de estados. La MC no dice cuál es el operador  $U$  adecuado para un cierto sistema físico, así como no dice cuál es el espacio de estados correspondiente. El *hamiltoniano* del sistema,  $H$ , asociado a su energía total, es el generador de la evolución dinámica del estado y permite reexpresarla en la forma de la llamada ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (1.5)$$

donde  $\hbar$  es la llamada constante de Planck. El operador  $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es hermítico. Cuando  $H$  es independiente del tiempo, la solución de

<sup>18</sup> Cuando no poseemos una estructura de producto tensorial en el espacio de partida —como, por ejemplo, en el caso de los sistemas de partículas idénticas asociadas a espacios de Hilbert construidos como productos (anti)simetrizados—, el formalismo debe adecuarse y en la literatura existen varias propuestas distintas para hacerlo.

<sup>19</sup> Una transformación se dice isométrica si preserva las distancias entre los espacios métricos. En un espacio de Hilbert complejo, una isometría  $U$  cumple que  $U^\dagger U = \mathbb{1}$ . Los operadores unitarios, por definición, deben ser a su vez sobreyectivos y, por ende, invertibles, implicando la segunda relación de coisometría.

la Ec. (1.5) es, tomando  $t_0 = 0$ ,  $|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar) |\psi(0)\rangle$ . En ese caso,  $\exp(-iHt/\hbar)$  nos da el operador unitario de la Ec. (1.4).

El caso de estados mezcla se deriva naturalmente del de estados puros, dando

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = [H, \rho(t)]. \quad (1.6)$$

En general, para *sistemas abiertos* la evolución no será unitaria. Conociendo la dinámica unitaria del sistema cerrado, formado por el sistema abierto y su entorno, y luego trazando parcialmente los grados de libertad del entorno, puede observarse que la dinámica del sistema abierto es bien descrita por ecuaciones maestras más complejas que las correspondientes a sistemas cerrados. Sin embargo, en los sistemas que solemos estudiar en las áreas de computación e información cuánticas aparecen muchos casos en que, a pesar de no ser sistemas cerrados, las evoluciones están dictadas por ecuaciones de Schrödinger con hamiltonianos dependientes del tiempo, al menos en una buena aproximación. Por el contrario, hay otros casos igualmente relevantes en los que la dinámica no es unitaria, como es el caso de los procesos de medición.

### Mediciones

Una *medición cuántica* consiste de una colección  $\{M_i\}$  de *operadores de medición* que satisfacen la condición de completitud

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{1}, \quad (1.7)$$

donde  $\mathbb{1}$  es el operador identidad sobre el espacio de Hilbert correspondiente. El índice  $i$  señala los diferentes resultados que puede tener la medición. Dado el estado  $\rho$ , la probabilidad de que ocurra el resultado  $i$  es

$$p_i = \text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho), \quad (1.8)$$

cuya positividad está garantizada por la no negatividad de  $\rho$ , y la condición  $\sum_i p_i = 1$  surge de la completitud de la medición y la traza unidad de  $\rho$ . Hasta aquí, si no nos interesa el estado del sistema posterior a la medición, es evidente que los operadores positivos  $E_i = M_i^\dagger M_i$ , con  $\sum_i E_i = \mathbb{1}$ , son suficientes para describir esta medición. El conjunto  $\{E_i\}$  constituye una *medición POVM*<sup>20</sup>.

<sup>20</sup> Del inglés, *positive operator-valued measure*.

En general, el estado de un sistema cuántico no permanece invariante ante una medición: si la medición anterior da como resultado  $i$ , el estado del sistema después de la medición es

$$\frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho)}. \quad (1.9)$$

Cuando el resultado de una medición no es leído (observado), hablamos de una medición no selectiva —o medición sin postselección—

y el estado del sistema es descrito por el ensamble (ver Figura 1.2)

$$M[\rho] = \sum_i p_i \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho)} = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger. \quad (1.10)$$

$$\rho \xrightarrow{\text{Medición}} M[\rho] = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger$$

Las *mediciones proyectivas* son aquellas definidas por proyectores,  $M_i \equiv \Pi_i$ . Si la colección es de proyectores ortogonales ( $\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_i$ ) y de rango uno, la medición es una *medición de von Neumann*. Alternativamente, estas mediciones pueden describirse en términos de operadores autoadjuntos de la forma  $X = \sum_i x_i \Pi_i$  (observables), donde  $x_i \in \mathbb{R}$  son los diferentes valores del observable  $X$  cuando la salida  $i$  es observada. Usando (1.7)–(1.9), el valor medio (o valor de expectación) de  $X$ , cuando el sistema se halla en el estado  $\rho$ , está dado por

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_\rho &= \sum_i p_i x_i \\ &= \sum_i \text{Tr}(\Pi_i \rho) x_i \\ &= \text{Tr}(\sum_i \Pi_i \rho x_i) \\ &= \text{Tr}(X \rho), \end{aligned} \quad (1.11)$$

y se reduce a  $\langle X \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | X | \psi \rangle$  cuando el estado del sistema es puro,  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ .

Cualquier POVM en un estado  $\rho$ , via el teorema de dilación de Neumark, puede conseguirse a través de una medición proyectiva en un estado extendido  $\rho \otimes \rho_{\text{aux}}$  sobre un espacio de Hilbert aumentado,  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^{\text{aux}}$  [11].

### Mediciones simétricas e informacionalmente completas

Una medición simétrica e informacionalmente completa, o *SIC-POVM*<sup>21</sup>, es un tipo especial de medición con importantes implicaciones en aspectos fundacionales de la MC, así como aplicaciones de tomografía de estados y criptografía. En  $d$  dimensiones, se define a partir de  $d^2$  estados normalizados  $|\varphi_k\rangle$  que satisfacen que

$$|\langle \varphi_k | \varphi_{k'} \rangle|^2 = \frac{1}{d+1}, \quad k \neq k'. \quad (1.12)$$

Los proyectores subnormalizados  $M_k = \frac{1}{d} |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| = \frac{1}{d} \Pi_k$  constituyen una POVM simétrica e informacionalmente completa de  $d^2$  elementos, tales que

$$\text{Tr}(M_k^\dagger M_{k'}) = \frac{1}{d^2} \text{Tr}(\Pi_k \Pi_{k'}) = \frac{1}{d^2(d+1)}. \quad (1.13)$$

La existencia de SIC-POVMs en dimensión arbitraria es todavía una pregunta abierta<sup>22</sup>.

Figura 1.2: Esquema de una medición generalizada no selectiva para un sistema en el estado  $\rho$ .

<sup>21</sup> Por sus siglas en inglés: *symmetric, informationally complete, positive operator valued measure*.

<sup>22</sup> Cuando se representa en el espacio de Bloch generalizado, una SIC-POVM forma un simplex regular  $d - 1$ -dimensional.

El problema de la existencia de SIC-POVMs en dimensión arbitraria se vincula con la noción de bases mutuamente no sesgadas, o MUBs<sup>23</sup>. Dos bases distintas  $\{|\psi_i\rangle\}$  y  $\{|\phi_j\rangle\}$  se dicen mutuamente no sesgadas cuando

$$|\langle\psi_i|\phi_j\rangle|^2 = \frac{1}{d}, \quad \forall i, j. \quad (1.14)$$

Concretamente, en algunos casos es posible vincular la existencia de una SIC-POVM con la de un conjunto maximal de  $d + 1$  MUBs.

### Operaciones

Las operaciones físicas que transforman a los estados cuánticos en otros,  $\rho \mapsto \rho'$ , son modeladas por mapas completamente positivos que preservan la traza, o *mapas CPTP*<sup>24</sup>,  $\Lambda : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ . La condición de ser completamente positivo implica que  $\Lambda \otimes \mathbb{1}^K$  es un mapa positivo para todo  $K$ <sup>25</sup>. Pueden construirse en tres pasos, partiendo de un sistema en el estado  $\rho$ ,

1. se anexa un sistema en un estado puro, no correlacionado,
2. se aplica una transformación unitaria,
3. se traza el subsistema anexo.

La composición de estas operaciones elementales, en este esquema de espacio extendido, da operaciones CPTP generales. La caracterización de éstas puede hacerse vía sus *operadores de Kraus*,  $\{L_i\}$ <sup>26</sup>,

$$\Lambda[\rho] = \sum_i L_i \rho L_i^\dagger, \quad (1.15)$$

y la condición de preservar la traza se impone cuando  $\sum_i L_i^\dagger L_i = \mathbb{1}$ . El rango de Kraus es el número de operaciones necesarias en la forma de Kraus de la ecuación anterior. En el esquema “ambiental” antes descrito, en que la operación se reproduce a partir de una unitaria tras la anexión de un sistema auxiliar, la dimensión del espacio de Hilbert auxiliar siempre puede hacerse igual al rango de Kraus.

Un ejemplo de canal u operación cuántica es la evolución dinámica  $\rho \mapsto \Lambda_t[\rho] = U\rho U^\dagger$ . Otra clase importante es la de operaciones locales y comunicación clásica o LOCC<sup>27</sup>. Estas operaciones, que componen una serie de operaciones locales arbitrarias con la posible comunicación clásica entre partes, es de especial interés, dado que las operaciones locales se ejecutan más fácilmente que las no locales. Las operaciones LOCC,  $\Lambda_{\text{LOCC}}$ , son una subclase de *operaciones separables* que son aquellas expresables con productos de operadores de Kraus locales:

$$\rho \mapsto \Lambda_{\text{SEP}}[\rho] = \sum_i (L_i^A \otimes L_i^B) \rho (L_i^A \otimes L_i^B)^\dagger. \quad (1.16)$$

La clase LOCC, en particular, permite analizar el problema de la cuantificación del entrelazamiento.

<sup>23</sup> Del inglés, *mutually unbiased bases*.

<sup>24</sup> Del inglés, *completely positive trace-preserving*.

<sup>25</sup> Estas operaciones también se conocen como mapas determinísticos, operaciones cuánticas propias, canales cuánticos o mapas estocásticos.

<sup>26</sup> Para denotar la acción de superoperadores, los cuales transforman un operador de estado en otro, el estado argumento lo escribimos entre corchetes:  $[\cdot]$ . La misma notación la usamos para el estado postmedición en la Ec. (1.10).

<sup>27</sup> Del inglés, *local operations and classical communication*.

## 1.2 Correlaciones Cuánticas y Cuanticidad

Las correlaciones en estados cuánticos son analizadas, en principio, desde la caracterización de los operadores de estado en los espacios de estados de los sistemas compuestos. Comparando el estado conjunto de un sistema multipartito con los estados marginales de sus partes, podemos inferir el grado y tipo de las correlaciones que intervienen.

### *Separabilidad*

Cuando tratamos con sistemas bipartitos en estados puros,  $|\psi\rangle^{AB} \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , podemos identificar estados factorizables, es decir, estados que pueden expresarse en la forma  $|\psi\rangle^{AB} = |\psi\rangle^A \otimes |\psi\rangle^B$ , y otros estados que no pueden factorizarse de ese modo. A los primeros los llamamos *estados separables*, mientras que a los segundos los llamamos *estados entrelazados*. Aceptando que los operadores de estado dan una descripción completa (la más completa posible) de los sistemas, el carácter de separabilidad de estados puros implica que la descripción completa del conjunto equivale a la descripción completa de las partes. En cambio, cuando los estados no son separables, los estados marginales no son suficientes para caracterizar al estado conjunto.

Extendiendo la definición anterior al caso de estados mezcla, decimos que un estado  $\rho_{sep}^{AB}$  es separable cuando puede escribirse como combinación convexa de estados producto,

$$\rho_{sep}^{AB} = \sum_k c_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B, \quad (1.17)$$

con  $\sum_k c_k = 1$ ,  $c_k \geq 0$ . En particular, si existe una forma de descomponer al estado de modo que sólo uno de los  $c_k$  es no nulo, entonces el estado es no correlacionado — $\rho_{prod}^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$ —, también llamado *estado producto*. Como en el caso de estados puros, cuando el estado mezcla no es separable lo llamamos estado entrelazado. La interpretación del concepto de separabilidad de estados mezcla no es tan sencilla como en el caso de los estados puros, dado que el carácter de estado mezcla del conjunto implica de por sí un conocimiento menos completo del estado del sistema conjunto. De todos modos, podemos ensayar interpretaciones muy clarificadoras de tipo operacional y utilizando las herramientas de la teoría de la información. De acuerdo a estas aproximaciones al problema, podremos distinguir no solo la dicotomía separabilidad/entrelazamiento, sino también la de clasicidad/no-clasicidad.

### Clasicidad

Los estados separables, aunque no están cuánticamente entrelazados, todavía poseen características que los alejan de sus contrapartes clásicas. En general, todo estado cuántico, separable o no, se perturba ante mediciones, aún cuando estas sean locales. Esto implica que no podemos acceder localmente al sistema (vía alguna medición de un observable local) sin perturbar el estado del sistema total. Existen, sin embargo, un subconjunto de estados para los cuales sí es posible medir ciertos observables locales sin perturbar el estado conjunto. Esos estados, llamados *clásicamente correlacionados* —o, sencillamente, *estados clásicos*— son los que se pueden expresar como combinación convexa de estados producto de proyectores locales ortogonales,

$$\rho_{clas}^{AB} = \sum_{i,j} p_{ij} \Pi_i^A \otimes \Pi_j^B, \quad (1.18)$$

con  $\Pi_i^{A(B)} \Pi_j^{A(B)} = \delta_{ij} \Pi_i^{A(B)}$ . Cualquier observable local cuya descomposición espectral posea los autoproyectores anteriores puede medirse sin alterar el estado conjunto del sistema. La familia de estados clásicamente correlacionados tiene un rol protagónico a lo largo de esta tesis (por lo que es de especial interés retener su forma — Ec. (1.18)—), lo que nos lleva a revisarla posteriormente en repetidas ocasiones<sup>28</sup>.

El mismo esquema nos permite definir estados que son clásicos sólo sobre una de las partes. En general, consideremos un sistema bipartito  $AB$  en el estado  $\rho^{AB}$  que actúa sobre  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ . Partimos de mediciones locales proyectivas de rango uno, no selectivas,  $\Pi^A = \{\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B\}$ ,  $\Pi^B = \{\mathbb{1}^A \otimes \Pi_j^B\}$  y  $\Pi^{A|B} = \{\Pi_i^A \otimes \Pi_j^B\}$ . Los estados resultantes después de las mediciones son (ver Figura 1.3)

$$\Pi^A[\rho^{AB}] = \sum_i \Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B \rho^{AB} \Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B = \sum_i p_i^A \Pi_i^A \otimes \rho^{B|i}, \quad (1.19)$$

$$\Pi^B[\rho^{AB}] = \sum_j \mathbb{1}^A \otimes \Pi_j^B \rho^{AB} \mathbb{1}^A \otimes \Pi_j^B = \sum_j p_j^B \rho^{A|j} \otimes \Pi_j^B, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{A|B}[\rho^{AB}] &= \Pi^A \circ \Pi^B[\rho^{AB}] = \Pi^B \circ \Pi^A[\rho^{AB}] = \\ &= \sum_{ij} \Pi_i^A \otimes \Pi_j^B \rho^{AB} \Pi_i^A \otimes \Pi_j^B = \sum_{ij} p_{ij}^{AB} \Pi_i^A \otimes \Pi_j^B, \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde  $\rho^{B|i} = \frac{\text{Tr}_A(\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B \rho^{AB})}{p_i^A}$  y  $\rho^{A|j} = \frac{\text{Tr}_B(\mathbb{1}^A \otimes \Pi_j^B \rho^{AB})}{p_j^B}$ , con probabilidades  $p_i^A = \text{Tr}(\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B \rho^{AB})$ ,  $p_j^B = \text{Tr}(\mathbb{1}^A \otimes \Pi_j^B \rho^{AB})$  y  $p_{ij}^{AB} = \text{Tr}(\Pi_i^A \otimes \Pi_j^B \rho^{AB})$ . De acuerdo con Luo [15], estos estados son llamados clásico-cuánticos, cuántico-clásicos y clásico-clásicos con respecto a las correlaciones reveladas por las mediciones locales  $\Pi^A$ ,  $\Pi^B$  y  $\Pi^{A|B}$ , respectivamente. En general, decimos que un estado es  $A$ -clásico si existe *una* medición proyectiva sobre  $A$  que no perturba al estado conjunto, es decir,  $\Pi^A[\rho^{AB}] = \rho^{AB}$ ; análogamente, un

<sup>28</sup> Como es usual, y para simplificar la escritura, hablaremos de estados “clásicos” para referirnos a los estados clásicamente correlacionados de sistemas cuánticos.

$$\rho^{AB} \xrightarrow{\text{Medición}} \Pi^A[\rho^{AB}]$$

Figura 1.3: Esquema de una medición de von Neumann, local en  $A$ , no selectiva para un sistema en el estado  $\rho^{AB}$ . La salida es  $\Pi^A[\rho^{AB}] = \sum_i p_i^A \Pi_i^A \otimes \rho^{B|i}$ .



estado  $B$ -clásico satisface que  $\Pi^B[\rho^{AB}] = \rho^{AB}$ , mientras un estado  $A|B$ -clásico obedece la relación  $\Pi^{A|B}[\rho^{AB}] = \rho^{AB}$ . A toda esta clase de estados los llamamos, genéricamente, como clásicamente correlacionados (CC). A los estados que no son CC los denominamos cuánticamente correlacionados (QC)<sup>29</sup>. Todos estos estados son a su vez separables (es decir, no entrelazados), ya que son combinaciones convexas de estados producto [16]. Sin embargo, remarcamos que no todo estado separable es de alguna de las formas (1.19)–(1.21). Además, los conjuntos de todos los estados clásicos en algunas de sus partes, denotados como  $\Omega^A$ ,  $\Omega^B$  y  $\Omega^{A|B}$ , respectivamente, no son convexos, a diferencia del conjunto de estados separables.

Para clasificar los estados de acuerdo a este esquema, el de clasicidad, encontramos diferentes medidas informacionales, como las *medidas de perturbaciones inducidas por mediciones (locales)* o las de *discord*<sup>30</sup>.

<sup>29</sup> Del inglés, *quantum correlated*

<sup>30</sup> A pesar de que el término *discord* es extranjero —y de que es posible ensayar equivalentes hispanos, como *discordia* o *discordancia*— hemos decidido emplearlo debido a su uso tan extendido.

### 1.3 Información y Mecánica Cuántica

La noción de *información*, aunque un tanto elusiva, puede entenderse desde la teoría de Shannon, en cuyo esquema se tiene una distribución de probabilidades, asociada a la codificación de los mensajes que emite una fuente, y que se pretende transmitir a un receptor de la manera más eficiente posible. Diferentes cantidades que dependen únicamente de tal distribución, como la entropía de Shannon o la información mutua que definiremos a continuación, son herramientas fundamentales para comprender la noción de información, su procesamiento y su transmisión. Cuando hablamos de información cuántica, nos estamos refiriendo al caso en el cual los sistemas físicos involucrados en el esquema anterior se comportan cuánticamente, bajo las leyes que estudiamos anteriormente.

#### *Teoría de la Información*

Clásicamente, dada una variable  $X$  que toma los valores  $x_i$  con probabilidades  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , la *entropía de Shannon* asociada es<sup>31</sup>

$$H(X) := - \sum p_i \log p_i. \quad (1.22)$$

Esta entropía es una medida de la incerteza que tenemos acerca del estado del sistema, asociado a esa distribución. En el caso de certeza absoluta, sólo una de las  $p_i$  es no nula y la entropía es cero. En el caso de incerteza máxima,  $p_i = \frac{1}{d} \forall i$ , donde  $d$  es el número total de posibles valores de la variable  $X$ . Si esta variable representa el estado de un sistema físico clásico, entonces  $d$  es el número total de estados distinguibles del sistema estudiado. En el lenguaje de la Mecánica Estadística,  $d$  es el número total de microestados. Estamos aquí suponiendo un conjunto discreto y finito de microestados. La medida

<sup>31</sup> Tomamos logaritmos en base 2 para expresar las entropías en unidades de bits.

de Shannon puede extenderse también al caso de sistemas con un conjunto continuo de microestados. La primera aplicación substancial de la Teoría de la Información de Shannon en física teórica fue en el contexto de la Mecánica Estadística [17, 18].

Para sistemas bipartitos, si  $X$  e  $Y$  son dos variables asociadas a las partes  $A$  y  $B$ , respectivamente, tendremos tres distribuciones de probabilidad relevantes:  $p_{ij}^{XY}$  asociada a la probabilidad conjunta de que  $X$  tome el valor  $x_i$  e  $Y$  tome el valor  $y_j$ , y las probabilidades marginales  $p_i^X = \sum_j p_{ij}^{XY}$  y  $p_j^Y = \sum_i p_{ij}^{XY}$ . Si ambas variables son independientes,  $p_{ij}^{XY} = p_i^X \times p_j^Y$  y la entropía conjunta es la suma de las entropías de las partes:  $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ . Pero, en el caso general, tenemos que  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ . Por lo tanto,  $I^{X|Y} := H(X) + H(Y) - H(X, Y)$  es una buena medida de qué tan dependientes son ambas variables. A esa cantidad la llamamos *información mutua*.

Como veremos a continuación, estas medidas informacionales tienen sus respectivas contrapartes cuánticas.

### Información (en) Cuántica

Para la entropía de Shannon, la extensión natural al escenario cuántico está dada por la *entropía de von Neumann* de un dado estado  $\rho$  [19],

$$S(\rho) := - \sum p_k \log p_k = -\text{Tr} \rho \log \rho, \quad (1.23)$$

donde  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , son los autovalores de  $\rho$ <sup>32</sup>. La entropía  $S(\rho)$  cuantifica la (no)pureza de  $\rho$ , de modo que es nula para un estado puro y máxima para un estado máximamente mezclado. Esto es consistente con la idea de que un estado puro se asocia a máxima certeza mientras que un estado máximamente mezclado,  $\rho^* = \frac{1}{d} \mathbb{1}$ , corresponde al caso de menor certeza:

$$0 = S(|\psi\rangle \langle \psi|) \leq S(\rho) \leq S(\rho^*) = \log d, \quad (1.24)$$

para todo  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  y  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Existen otras funcionales entrópicas que satisfacen ciertos axiomas deseables pero son diferentes a la de von Neumann. Entre ellas, están las de Rényi [20] y Tsallis [21], las cuales usaremos más adelante y definiremos oportunamente.

Para un sistema bipartito en un estado  $\rho^{AB}$ , podemos definir también la *información mutua cuántica* (IM),

$$\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) := S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}). \quad (1.25)$$

Dada la subaditividad de la entropía de von Neumann, es decir que  $S(\rho^{AB}) \leq S(\rho^A) + S(\rho^B)$ , la información mutua cuántica es siempre una cantidad no negativa.

Una diferencia fundamental con respecto al caso de Shannon emerge como consecuencia del entrelazamiento: la entropía global asociada

<sup>32</sup> Al igual que con la entropía de Shannon, empleamos logaritmos en base 2.

a  $\rho^{AB}$  puede ser inferior a alguna de las entropías marginales,  $S(\rho^A)$  o  $S(\rho^B)$ , algo que no ocurre con la entropía de Shannon. El caso extremo es el de un estado puro máximamente entrelazado, para el cual la entropía global es nula mientras que las entropías marginales son máximas. Esto motiva la consideración de la entropía marginal como medida de entrelazamiento en estados puros.

### Mayorización

Un concepto íntimamente ligado al de entropía es el de *mayorización* (ver, por ej., [22]). Consideremos dos estados  $\rho$  y  $\sigma$ , y vectores de probabilidad  $p$  y  $q$  formados por los autovalores de  $\rho$  y  $\sigma$ , respectivamente, ordenados de forma decreciente. Luego,  $\rho$  es mayorizado por  $\sigma$ , denotado como  $\rho \prec \sigma$ , cuando

$$\sum_{i=1}^n p_i \leq \sum_{i=1}^n q_i \quad \forall n = 1, \dots, N-1, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N q_i, \quad (1.26)$$

donde  $N = \max\{\text{rang}(\rho), \text{rang}(\sigma)\}$  y  $\text{rang}$  denota el rango del operador densidad. Notar que si  $\text{rang}(\rho) \leq \text{rang}(\sigma)$  es necesario completar los vectores  $p$  con entradas de valor 0 para que tenga la misma longitud que  $q$ , y viceversa<sup>33</sup>.

La entropía de von Neumann preserva el orden de mayorización, esto es,

$$\text{si } \rho \prec \sigma \text{ entonces } S(\rho) \geq S(\sigma), \quad (1.27)$$

con igualdad si y sólo si  $\rho$  y  $\sigma$  poseen los mismos autovalores. Esto se debe a la Schur-concavidad de la entropía de von Neumann. Observemos que la recíproca no vale en general, lo cual significa que mayorización es una relación de orden más fuerte que la definida por la entropía de von Neumann.

Dado que los autovalores de un operador densidad  $\rho$  son invariantes ante transformaciones unitarias  $U$  —en otras palabras,  $\rho$  y  $U\rho U^\dagger$  poseen los mismos autovalores— la entropía es invariante ante transformaciones unitarias,

$$S(\rho) = S(U\rho U^\dagger). \quad (1.28)$$

En particular, la evolución de un sistema cerrado no afecta la entropía del estado inicial.

### Medidas informacionales de correlaciones cuánticas

#### ENTRELAZAMIENTO

Una forma de cuantificar el grado y tipo de correlaciones asociadas a las partes de un sistema consiste en recurrir a medidas informacionales. Para estados puros de sistemas bipartitos, la clasificación que

<sup>33</sup> Esto no posee ningún impacto sobre el valor de las entropías unificadas dada su propiedad de expansibilidad.

brinda el esquema de separabilidad/entrelazamiento es exhaustiva y coincide con la de clasicidad/no-clasicidad. En esos casos, la *entropía de entrelazamiento*, que no es más que la entropía de los estados marginales,  $S(\rho^A) = S(\rho^B)$ , es una medida adecuada. En el caso de estados mezcla, existen diversas medidas propuestas en la literatura para dar cuenta del entrelazamiento, todas ellas satisfaciendo una serie de axiomas razonables: para el caso bipartito, si el estado es  $\rho^{AB}$ , la medida de entrelazamiento  $\mathcal{E}$  debe satisfacer:

- Ser definida no negativa,  $\mathcal{E}^{A|B}(\rho^{AB}) \geq 0$ , y nula para estados separables:

$$\mathcal{E}^{A|B}(\rho_{sep}^{AB}) = 0.$$

- Ser invariante ante operaciones locales unitarias:

$$\mathcal{E}^{A|B}((U^A \otimes U^B)\rho^{AB}(U^A \otimes U^B)^\dagger) = \mathcal{E}^{A|B}(\rho^{AB}).$$

- Ser monótona no creciente ante la clase de operaciones llamadas operaciones locales y comunicación clásica (LOCC):

$$\mathcal{E}^{A|B}(\Lambda_{\text{LOCC}}[\rho^{AB}]) \leq \mathcal{E}^{A|B}(\rho^{AB}).$$

Como mencionamos, para estados puros definimos la *entropía de entrelazamiento*,  $\mathcal{E}^{A|B}(|\psi\rangle^{AB}) := S(\text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|^{AB})$ , la cual permite cuantificar el entrelazamiento de tales estados.

Entre las medidas de entrelazamiento conocidas y que poseen formas cerradas para sistemas de baja dimensión en estados mezcla arbitrarios, se hallan el entrelazamiento de formación,

$$\min_{\{(p_i, |\psi_i\rangle) \mid \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\}} \sum_i p_i \mathcal{E}(|\psi_i\rangle), \quad (1.29)$$

y la negatividad,

$$\frac{\|\rho^{\text{T}_B}\|_{\text{Tr}} - 1}{2}, \quad (1.30)$$

con  $\|X\|_{\text{Tr}} := \text{Tr}\sqrt{X^\dagger X}$  y  $\text{T}_B$  la operación de traspuesta parcial.

## DISCORD Y MEDIDAS INDUCIDAS POR PERTURBACIONES

Como vimos antes, los sistemas cuánticos sufren una alteración en su estado tras realizar una medición. Esta peculiaridad es empleada en la caracterización de los estados y sus correlaciones, especializando las mediciones al caso de mediciones locales. A modo ilustrativo, consideremos los llamados estados clásicos de la Ec. (1.18). Una medición local proyectiva constituida por los operadores  $\Pi_i^A$  no pertur-

ba al estado:

$$\begin{aligned}
\Pi^A[\rho_{clas}^{AB}] &= \sum_i (\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B) \rho_{clas}^{AB} (\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B) \\
&= \sum_{ii'} (\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B) (c_{i'} \Pi_{i'}^A \otimes \Pi_{i'}^B) (\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B) \\
&= \sum_{i'} c_{i'} \Pi_{i'}^A \otimes \Pi_{i'}^B \\
&= \rho_{clas}^{AB}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Esta observación justifica la denominación de estado clásico o clásicamente correlacionado. En el caso general, el estado postmedición local (no selectiva),  $\Pi^A[\rho_{clas}^{AB}]$ , difiere del original. Para explicar cómo cuantificar esta perturbación usando entropías, debemos recordar que una medición proyectiva es un caso particular de un *mapa biestocástico*. Un mapa biestocástico  $\Lambda_{BE}$  puede escribirse en su forma de Kraus como  $\Lambda_{BE}[\rho] = \sum_k L_k \rho L_k^\dagger$ , con ambos conjuntos de operadores positivos  $\{L_k^\dagger L_k\}$  y  $\{L_k L_k^\dagger\}$  sumando la identidad (ver, por ej., [23]). Notemos que estos mapas preservan al estado máximamente mezclado:  $\Lambda_{BE}[\rho^*] = \rho^*$ . Puede mostrarse que  $\Lambda[\rho] \prec \rho$  si y sólo si  $\Lambda$  es un mapa biestocástico [24]. En otras palabras, para mapas biestocásticos el estado final  $\Lambda_{BE}[\rho]$  está más desordenado (en términos de mayorización) que el estado inicial  $\rho$ . Como consecuencia de este orden y de la Schur-concavidad de la entropía, tenemos que

$$S(\Lambda_{BE}[\rho]) \geq S(\rho), \tag{1.32}$$

donde la igualdad se consigue si y sólo si  $\Lambda_{BE}[\rho] = U\rho U^\dagger$ .

De acá en adelante, nos concentramos en mediciones proyectivas de rango uno (es decir, de von Neumann) sin postselección, esto es, un conjunto de proyectores de rango uno  $\Pi = \{\Pi_i = |i\rangle\langle i|\}$ , con  $\Pi_i \Pi_{i'} = \delta_{ii'} \Pi_i$  y  $\sum_{i=1}^d \Pi_i = \mathbb{1}$ , siendo  $\{|i\rangle\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . El estado después de la medición  $\Pi$  es igual a  $\Pi[\rho] = \sum_{i=1}^d \Pi_i \rho \Pi_i = \sum_{i=1}^d p_i |i\rangle\langle i|$  con  $p_i = \langle i|\rho|i\rangle$ . Dado que las mediciones proyectivas son casos particulares de mapas biestocásticos, tenemos una desigualdad similar a (1.32) para  $\Pi$ . Así, la diferencia de entropías entre los estados final e inicial permite cuantificar la perturbación del estado del sistema debida a la medición  $\Pi$ , esto es

$$D^\Pi(\rho) = S(\Pi[\rho]) - S(\rho). \tag{1.33}$$

Esta diferencia se conoce bajo el nombre de *déficit de información* [25]. Especializando sobre mediciones locales —unilocales o bilocales— obtenemos medidas que cuantifican la perturbación local del estado. Optimizando sobre todas las mediciones posibles, las medidas resultantes se anulan únicamente para los estados clásicos. Por ejemplo, para medidas en el lado  $A$  de un sistema bipartito en el estado  $\rho^{AB}$ ,

$$D^A(\rho^{AB}) = \min_{\Pi^A} S(\Pi^A[\rho^{AB}]) - S(\rho^{AB}), \tag{1.34}$$

es una medida que se anula únicamente para estados  $A$ -clásicos (ver Ec. (1.19)).

Dado un sistema bipartito en el estado  $\rho^{AB}$ , con  $\rho^A = \text{Tr}_B \rho^{AB}$  y  $\rho^B = \text{Tr}_A \rho^{AB}$  los estados reducidos pertinentes, definimos la medida  $\mathcal{M}(\rho^{AB})$  como la diferencia entre la información mutua cuántica del estado,  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$ , y la información mutua del estado posterior a una medición local no selectiva<sup>34</sup>, es decir, al estado  $\Pi^K[\rho^{AB}]$ , tal que  $\Pi^K$  es una medida proyectiva, unilocal o bilocal, completa. Así,

$$\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) - C^{\Pi^K}(\rho^{AB}), \quad K = A, B, A|B, \quad (1.35)$$

donde  $K = A, B, A|B$  es la parte del sistema sobre la cual efectuamos las mediciones locales, y  $C^{\Pi^K}(\rho^{AB}) = \mathcal{I}^{A|B}(\Pi^K[\rho^{AB}])$  es la llamada *información clásica* del estado respecto a la medición  $\Pi^K$ , ya que es la información mutua accesible por medio de mediciones locales. La familia de medidas de la Ec. (1.35) es dependiente de la medición  $\Pi^K$  elegida. Para obtener una medida independiente de una medición específica podemos o bien definir un criterio unívoco de selección de la medición, o bien apelar a una optimización sobre todas las mediciones posibles. La primera opción es elegida por Luo, quien propone computar estas medidas apelando a una medición local específica: aquella definida por las autobases locales,  $\{\tilde{\Pi}_i^A\}$  y  $\{\tilde{\Pi}_i^B\}$ , es decir, por los proyectores de los estados reducidos de los subsistemas [15]. A estas medidas se las llama perturbaciones inducidas por medición o *MID*<sup>35</sup>. La ventaja que poseen es que prescinden de optimizaciones sobre el conjunto de mediciones, cuya contrapartida es la sobrestimación de correlaciones cuánticas en algunos casos. En el caso de las MIDs, dado que medir en la autobase de los estados reducidos no altera las entropías marginales — $S(\rho^A)$  y  $S(\rho^B)$ —,

$$\tilde{\Pi}^K[\rho^K] = \rho^K, \quad K = A, B, \quad (1.36)$$

es equivalente definir el déficit por medio de la diferencia de informaciones mutuas. Por ejemplo, respecto a la parte  $A$ ,

$$\mathcal{M}^K(\rho^{AB}) := \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) - C^{\tilde{\Pi}^K}(\rho^{AB}), \quad K = A, B, A|B. \quad (1.37)$$

Así, tenemos que  $\mathcal{M}^K(\rho^{AB}) \equiv D^{\tilde{\Pi}^K}$ ,  $K = A, B$ , siempre que  $\tilde{\Pi}^K$  representa la medición local en la autobase local correspondiente.

Cuando a la expresión anterior la optimizamos sobre todas las mediciones posibles unilocales, tenemos las llamadas medidas de discord —ver Refs. [26-28], para una revisión detallada de esta clase de medidas y sus aplicaciones—. Por ejemplo, para medidas del lado  $A$ ,

$$\mathcal{D}^A(\rho^{AB}) = \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) - C^A(\rho^{AB}), \quad (1.38)$$

donde  $C^A(\rho^{AB}) = \max_{\Pi^A} C^{\Pi^A}(\rho^{AB})$ <sup>36</sup>. Notemos que  $\Omega^A$  y  $\Omega^B$  son los conjuntos de estados con discord nulo con respecto a  $\mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^B$  [29, 30], y que  $\Omega^{A|B} = \Omega^A \cap \Omega^B$  [31]. Todos estos conjuntos no son convexos, a diferencia del conjunto de estados separables (ver Figura 1.4).

Dado que la computación de las MIDs no involucra ningún paso de optimización, se sabe que en algunos casos pueden sobrestimar las

<sup>34</sup> Recordemos que por medición *no selectiva* o *sin postselección* nos referimos a una medición no leída, en el sentido en que no se ha seleccionado un único subsistema por medio de la observación de la salida (ver Ec. (1.10)).

<sup>35</sup> Del inglés, *measurement-induced disturbance*.

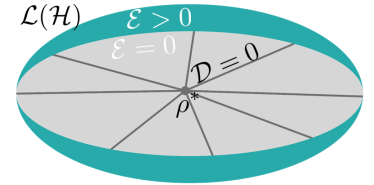


Figura 1.4: Del conjunto de todos los operadores de estado,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , distinguimos el convexo de estados separables ( $\mathcal{E} = 0$ ). Los estados clásicos ( $\mathcal{D} = 0$ ) no conforman un conjunto convexo.

<sup>36</sup> Notar que usamos  $\mathcal{D}$  —con tipografía caligráfica— para el discord, mientras que  $D$  refiere a cantidades de tipo déficit de información.

correlaciones cuánticas. Este problema es resuelto de varias maneras. Una de ellas da el llamado *discord simétrico* [26, 32, 33],

$$\mathcal{D}_S(\rho^{AB}) = \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) - \max_{\Pi^{A|B}} C^{AB}(\rho^{AB}). \quad (1.39)$$

Siguiendo a Zurek y otros autores, diremos que el discord mide la *cuantidad* de las correlaciones presentes en los estados de sistemas compuestos, en lugar de aceptarse como medida de correlaciones cuánticas propiamente dicha (ver capítulo 4 para una discusión más extensa).





## 2 CORRELACIONES CUÁNTICAS EN ESTADOS CLÁSICOS

*La primera sección de este capítulo está basada en los resultados publicados en Guido Bellomo y col. “Quantum correlations from classically correlated states”. En: Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 405 (2014), págs. 260-266. La segunda sección, reproduce mayormente lo obtenido en Angelo Plastino, Guido Bellomo y Angel R Plastino. “Quantum state space-dimension as a quantum resource”. En: International Journal of Quantum Information 13.06 (2015), pág. 1550039.*

### 2.1 Estados (no tan) clásicamente correlacionados

Los estados clásicamente correlacionados —ver Ec. (1.18)— poseen aspectos cuánticos que pueden explotarse para obtener “ventajas cuánticas” en diferentes protocolos de procesamiento de la información o computacionales. Esta afirmación resume el objetivo central de esta tesis y, para sostenerla, comenzaremos por analizar el siguiente caso. Consideremos un sistema cuántico bipartito tal que al menos una de sus dos componentes es, a su vez, un sistema compuesto. Trazando (parcialmente) sobre una parte de uno o ambos subsistemas es posible obtener un estado reducido separable que, aún así, exhibe correlaciones cuánticas. Ello ocurre incluso si el sistema original está provisto únicamente de correlaciones clásicas. Este efecto, señalado por primera vez por Li y Luo en [34], es de considerable interés porque existe un cuerpo creciente de evidencia que sugiere que las correlaciones cuánticas en estados mezcla no entrelazados podrían constituir un recurso útil para la implementación de protocolos informacionales de carácter no trivial. En este apartado, conduciremos una exploración sistemática del efecto mencionado, enfocándolo en familias particulares de estados cuánticos de baja dimensión (estados de tres cubits). Con el fin de acceder al carácter no clásico de las correlaciones de los estados reducidos usaremos un indicador de correlaciones cuánticas basado en las perturbaciones generadas en los estados por las mediciones de observables locales. Además, mostraremos que, en sistemas de tres cubits, existe un vínculo entre la información mutua clásica de los estados compuestos originales y el

máximo grado de correlaciones cuánticas exhibidas por las reducciones.

Las correlaciones en los sistemas cuánticos compuestos son multifacéticas, con el entrelazamiento siendo sólo una de sus posibles manifestaciones no clásicas [25, 26, 29, 32-49]. Incluso los estados mezcla separables (que no están entrelazados) pueden exhibir correlaciones con propiedades no clásicas. Se propusieron numerosas medidas cuantitativas para estudiar los diferentes aspectos no clásicos, más allá del entrelazamiento, de las correlaciones en sistemas cuánticos compuestos. Entre ellas, el discord cuántico [35, 50] y las medidas basadas en la perturbación ante mediciones locales. Estas últimas fueron propuestas por Luo [34, 39, 40] y por SaiToh y col. [44, 45]. En el caso de estados puros, todas estas medidas coinciden con las de entrelazamiento cuántico. En cambio, en el caso de estados mezcla estas cantidades corresponden a propiedades físico-cuánticas que difieren del entrelazamiento.

En el capítulo introductorio, explicamos que los estados clásicamente correlacionados de sistemas cuánticos bipartitos son los descritos por operadores de estado cuyas matrices densidad asociadas son diagonales en una base producto  $\{|i\rangle^A \otimes |j\rangle^B, i = 1, \dots, d^A; j = 1, \dots, d^B\}$ , donde  $\{|i\rangle^A, i = 1, \dots, d^A\}$  y  $\{|j\rangle^B, j = 1, \dots, d^B\}$  son bases ortonormales de los espacios de Hilbert de ambos subsistemas, con  $d^{A(B)}$  las dimensiones respectivas. Cabe recordar que el conjunto de estados clásicamente correlacionados es distinto al de estados separables. De hecho, hay importantes diferencias. Por ejemplo, el conjunto de estados separables es convexo, mientras que el de estados clásicos no lo es [34]. Además, las medidas de no clasicidad como el discord no satisfacen, en general, relaciones de monogamia [49] que constituyen una propiedad básica del entrelazamiento cuántico. Usualmente, se asume que los estados clásicos no proveen recursos para el procesamiento y transmisión de información basados en correlaciones cuánticas.

Consideremos dos partes,  $A$  y  $B$ , que comparten un estado cuántico bipartito. A las componentes del sistema las denominaremos, abusando de la notación, con las mismas letras  $A$  y  $B$ , sin que eso suponga algún tipo de confusión. Consideremos, además, que al menos alguna de las partes es también compuesta. Por ejemplo, supongamos que  $A$  consiste de dos partes,  $A_1$  y  $A_2$ . Luego, como mostraron Li y Luo, trazando sobre alguna de las partes,  $A_1$  o  $A_2$ , es posible obtener un estado con correlaciones cuánticas, incluso si el estado original es clásico. Este efecto es relevante, ya que indica que los estados clásicos compuestos pueden poseer correlaciones cuánticas “ocultas”.<sup>37</sup>

La aproximación que propone Luo [34] para estudiar las correlaciones cuánticas, basada en las perturbaciones inducidas por medicio-

<sup>37</sup> Con “ocultas” nos referimos a que no son reveladas por las medidas usuales de correlaciones cuánticas.

nes locales, posee dos características deseables. Primero, permite una interpretación directa e intuitiva asociada al caso clásico en que uno puede ejecutar una medición sin perturbar el estado del sistema. En el caso cuántico, por el contrario, las mediciones usualmente perturbaban el sistema medido. Luo aplica esta idea al estudio de correlaciones, definiendo a los estados clásicamente correlacionados como aquellos sobre los cuales es posible conducir una medición local sin perturbar el estado global del sistema compuesto. Cuando no es así, el “mínimo grado” de perturbación debido a las mediciones locales constituye una medida cuantitativa de la cuantidad de las correlaciones exhibidas por el sistema considerado. Otra ventaja de la propuesta de Luo es que la medida concomitante es computacionalmente más tratable que otras, como el discord. Es importante enfatizar que tanto el discord como la noción de medidas de correlaciones cuánticas inducidas por perturbación ante mediciones determinan la misma familia de estados clásicos para un dado sistema cuántico bipartito. De hecho, fue demostrado en [39] que un estado cuántico  $\rho^{AB}$  permanece inalterado ante una medición local no selectiva si y sólo si  $\rho^{AB}$  es diagonal en una base producto. Esto sugiere una manera natural de estimar la cuantidad de las correlaciones de un estado recurriendo a alguna “distancia” mínima entre el estado original y el estado postmedición,  $\Pi^A[\rho^{AB}]$ , resultante de una medición local [39].

Nosotros estamos particularmente interesados en las medidas inducidas por perturbaciones o MID definidas por la Ec. (1.37), donde las mediciones correspondientes se asocian a los autoproyectores que surgen de la descomposición espectral de los estados reducidos,  $\rho^A$  y  $\rho^B$ . Nuestro objetivo principal es detectar los aspectos no clásicos de los estados. Por lo tanto, la sobrestimación no constituye un problema para nosotros y nuestro foco en las MIDs se debe a la tratabilidad del problema computacional, tanto en el caso analítico como en el numérico.

### *Correlaciones cuánticas desde estados clásicamente correlacionados*

Li y Luo [34] demostraron que todo estado separable (clásico o no) puede considerarse como embebido en un estado clásico en un sistema de mayor dimensión. Recíprocamente, dado un estado clásico  $\rho^{AB}$ , cualquier reducción nos lleva a un estado separable en un espacio de menor dimensión. Así, las reducciones de estados clásicos podrían, en general, ser no clásicas. Este es el hecho en el cual concentraremos nuestros esfuerzos: la posibilidad de hallar reducciones correlacionadas cuánticamente, partiendo de estados clásicos<sup>38</sup>.

Consideremos un estado clásico  $\rho^{AB}$  y analicemos la posibilidad de encontrar reducciones no clásicas. Antes, vamos a probar algunas propiedades de las MIDs válidas para reducciones arbitrarias de  $\rho^{AB}$ ,

<sup>38</sup> El enunciado formal del teorema de Li y Luo [34] lo damos en la sección 2.2 y su demostración la posponemos hasta el capítulo 3 que es cuando sacaremos provecho de ella.

siempre que este estado está definido vía la Ec. (1.18). Asumiremos que ambas partes son susceptibles de descomposiciones posteriores, de modo que los espacios de Hilbert asociados pueden expresarse como productos tensoriales del tipo  $\mathcal{H}^A = \otimes_m \mathcal{H}^{A_m}$  y  $\mathcal{H}^B = \otimes_n \mathcal{H}^{B_n}$ . Recordando que la forma de  $\rho^{AB}$  debe ser (ver Ec. (1.18))  $\rho^{AB} = \rho_{clas}^{AB} = \sum_{i,j} p_{ij} \Pi_i^A \otimes \Pi_j^B$ , tenemos que el estado conjunto de las partes  $A_i$  y  $B_j$  debe ser

$$\rho^{A_i B_j} = \sum_{m,n} p_{mn} \rho_m^{A_i} \otimes \rho_n^{B_j}, \quad (2.1)$$

donde  $\rho_m^{A_i} = \text{Tr}_{\{A_k, k \neq i\}} \Pi_m^A$  y  $\rho_n^{B_j} = \text{Tr}_{\{B_k, k \neq j\}} \Pi_n^B$ . Aplicando la MID entre estas dos componentes, se tiene que

$$\mathcal{M}^{A_i B_j}(\rho^{AB}) = \mathcal{I}^{A_i | B_j}(\rho^{AB}) - C^{A_i B_j}(\rho^{AB}), \quad (2.2)$$

al computar las correlaciones usando la Ec. (2.1).

### Algunas cotas analíticas interesantes

En primer lugar, observemos que para todo estado  $\rho^{AB}$ , clásico o no, dada la positividad de  $C^{AB}(\rho^{AB})$ , se tiene que

$$\mathcal{M}^{AB}(\rho^{AB}) \leq \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}), \quad (2.3)$$

con igualdad estricta si y sólo si el estado postmedición (que siempre es clásico) es un estado producto, tal que  $\Pi^{A|B}[\rho^{AB}] = \rho^A \otimes \rho^B$ , con  $\rho^A$  y  $\rho^B$  coincidentes con los estados de las partes previos a la medición, la cual no altera las reducciones.

Introducimos ahora, con respecto a la reducción  $\rho^{A_i B_j}$ , una serie de cotas que mejoran la de la Ec. (2.3).

1. Dada la subaditividad fuerte de la entropía de von Neumann<sup>39</sup>, se puede verificar que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{A_i B_j}(\rho^{AB}) &\leq \mathcal{I}^{A_i | B_j}(\rho^{AB}) \\ &\leq \min\{\mathcal{I}^{A_i | B}(\rho^{AB}), \mathcal{I}^{A | B_j}(\rho^{AB})\} \\ &\leq \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

En particular, si  $\rho^{AB}$  es clásico — $\rho^{AB} = \rho_{clas}^{AB}$ — entonces  $\mathcal{I}(\rho_{clas}^{AB})$  estima sus correlaciones clásicas. Más aún, en ese caso la Ec. (2.4) implica que *las correlaciones cuánticas entre  $A_i$  y  $B_j$  poseen como cota superior las correlaciones clásicas entre  $A$  y  $B$* . La igualdad  $\mathcal{M}^{A_i B_j}(\rho^{AB}) = \mathcal{I}^{A_i B_j}(\rho^{AB})$  vale si y sólo si  $\tilde{\Pi}^{A_i | B_j}[\rho^{A_i B_j}] = \rho^{A_i} \otimes \rho^{B_j}$ . Además, si  $\rho^{AB} = \rho_{clas}^{AB}$  entonces  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho_{clas}^{AB}) \leq \min\{H(A), H(B)\}$ , con  $H(A)$  ( $H(B)$ ) las entropías de Shannon de las distribuciones marginales  $p_i^A = \sum_j p_{ij}$  and  $p_j^B = \sum_i p_{ij}$ , asociadas respectivamente a  $\rho^A$  y  $\rho^B$ . Por lo tanto, para  $\rho^{AB} = \rho_{clas}^{AB}$  clásico,

$$\mathcal{M}^{A_i B_j}(\rho_{clas}^{AB}) \leq \mathcal{I}^{A|B}(\rho_{clas}^{AB}) \leq \min\{H(A), H(B)\}. \quad (2.5)$$

<sup>39</sup> La subaditividad fuerte de  $S$  implica que  $S(\rho^{ABC}) + S(\rho^B) \leq S(\rho^{AB}) + S(\rho^{BC})$  para todo  $\rho^{ABC} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{ABC})$ .

2. Por otro lado,  $\mathcal{M}^{A_i B_j}(\rho^{AB})$  está acotada superiormente por las entropías de las partes involucradas,

$$\mathcal{M}^{A_i B_j}(\rho_{clas}^{AB}) \leq \min\{S(\rho^{A_i}), S(\rho^{B_j})\}. \quad (2.6)$$

Para probar la Ec. (2.6), es suficiente notar que  $S(\rho^{A_i B_j}) - S(\rho^{A_i})$  es cóncava dado que  $\rho^{A_i B_j}$  es un estado separable [51]. Luego,  $S(\rho^{A_i B_j})$  es mayor que  $S(\rho^{A_i})$  o  $S(\rho^{B_j})$ , de modo que  $\mathcal{I}^{A_i B_j}(\rho^{A_i B_j}) \leq \min\{S(\rho^{A_i}), S(\rho^{B_j})\}$ . En vista de la Ec. (2.4), la cota (2.6) se sigue inmediatamente. Esta cota revela cómo las correlaciones cuánticas entre dos componentes del sistema están condicionadas por la dimensionalidad de las partes, con  $S(\rho^K) \leq \log(\dim \mathcal{H}^K)$ ,  $K = A, B$ .

3. Por último, notemos que una condición suficiente para que  $\rho^{A_i B_j}$  sea también clásica, es decir que  $\mathcal{M}^{A_i B_j}(\rho_{clas}^{AB}) = 0$ , es que  $\{\rho_m^{A_i}\}$  y  $\{\rho_n^{B_j}\}$  sean conjuntos de estados mutuamente conmutativos. En ese caso, existen bases comunes de autoproyectores para cada parte,  $\{\Pi_u^{A_i}\}$  y  $\{\Pi_v^{B_j}\}$ , tales que es posible expresar el estado conjunto como

$$\rho^{A_i B_j} = \sum_{u,v} p_{uv} \Pi_u^{A_i} \otimes \Pi_v^{B_j}. \quad (2.7)$$

Es importante notar, sin embargo, que la condición anterior no es necesaria para asegurar la clasicidad del estado. Es posible hallar estados clásicos incluso cuando tal conmutatividad no se satisface [34].

Pasemos ahora a un ejemplo particular, un sistema de tres cubits, en el cual podemos observar el fenómeno de interés.

### *MID no nulo en estados bipartitos clásicos de tres cubits*

Consideremos un estado bipartito especial,  $\rho^{AB}$ , con las siguientes características. La parte  $A$  se compone de dos cubits mientras que la parte  $B$  consta de un único cubit. El estado conjunto es clásico, respecto a la bipartición  $A|B$ , para (ver Ec. (1.18))

$$\rho^{AB} = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^2 p_{mn} \Pi_m^A \otimes \Pi_n^B, \quad (2.8)$$

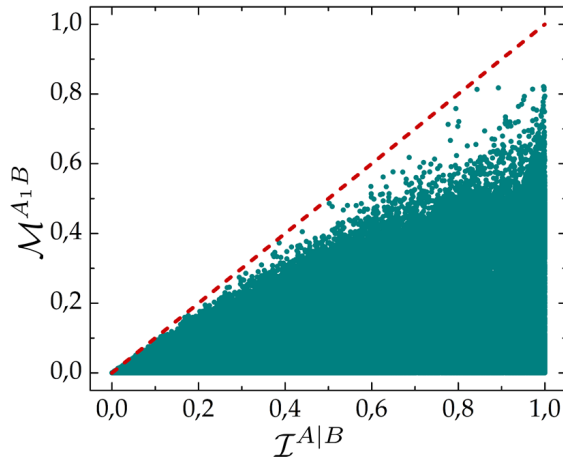
con  $\{\Pi_m^A \equiv \Pi_m^{A_1 A_2}\}$  el conjunto de autoproyectores de  $\rho^A \equiv \rho^{A_1 A_2} = \text{Tr}_B \rho^{AB}$  y  $\{\Pi_n^B\}$  aquel de  $\rho^B$ .

Para hallar correlaciones cuánticas en la reducción  $\rho^{A_1 B} = \text{Tr}_{A_2} \rho^{AB}$ , es necesario que algún miembro del conjunto  $\{\rho_m^{A_1} = \text{Tr}_{A_2} \Pi_m^A\}$  no conmute con el resto. Por ejemplo, definiendo los operadores  $\Pi_m^A = |m\rangle \langle m|^A$  con

$$\begin{cases} |1\rangle^A = |00\rangle^A, & |2\rangle^A = |10\rangle^A, \\ |3\rangle^A = |+1\rangle^A, & |4\rangle^A = |-1\rangle^A, \end{cases} \quad (2.9)$$

con  $|+\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$  y  $|-\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle)$ , para la autobase de  $A$ , y los operadores  $\Pi_n^B = |n\rangle\langle n|^B$  con  $|1\rangle^B = |0\rangle^B$  y  $|2\rangle^B = |1\rangle^B$  para  $B$ . Usando estas bases, computamos numéricamente la MID,  $\mathcal{M}^{A_1B}$ , para una muestra de  $10^4$  estados generados a partir de distribuciones  $\{p_{mn}\}$  aleatorias<sup>40</sup>. En la gráfica de  $\mathcal{M}^{A_1B}$  vs.  $\mathcal{I}^{A|B}$  (Figura 2.1) observamos que los estados generados ocupan casi completamente la región comprendida bajo la recta de pendiente uno,  $\mathcal{M}^{A_1B} = \mathcal{I}^{A|B}$ . Esto concuerda con la cota superior anticipada en las Ecs. (2.4)–(2.6). Notemos que todos los estados clásicos del sistema  $A$ – $B$  (y no sólo aquellos pertenecientes a la familia acá definida) corresponden a puntos que deben yacer en dicha región triangular del plano  $\mathcal{I}^{A|B}$ – $\mathcal{M}^{A_1B}$ .

Consideremos ahora estados que se hallan en el borde de la región señalada en la Figura 2.1. Para el borde inferior, tenemos que  $\{\mathcal{M}^{A_1B} = 0, 0 \leq \mathcal{I}^{A|B} \leq 1\}$ . Para el borde derecho,  $\{\mathcal{I}^{A|B} = 1, 0 \leq \mathcal{M}^{A_1B} \leq 1\}$ . Y para el borde superior,  $\{\mathcal{M}^{A_1B} = \max \mathcal{M}^{A_1B} |_{\mathcal{I}^{A|B}}\}$ . Nuestro objetivo es hallar familias paramétricas de estados que reproduzcan los bordes recién comentados para verificar que tales fronteras pueden de hecho ser alcanzadas por estados clásicos del sistema  $A$ – $B$ . A menos que explicitemos lo contrario, estaremos trabajando con estados de la familia recién definida.



<sup>40</sup> Las distribuciones  $\{p_{mn}\}$  las generamos a partir de vectores (posteriormente normalizados) de 8 componentes reales creadas pseudoaleatoriamente y uniformemente distribuidas en el rango  $[0, 1]$ .

Figura 2.1: MID correspondiente al subsistema  $A_1$ – $B$  vs. información mutua del estado clásico  $\rho^{AB}$ , evaluados para  $10^4$  estados de la familia generados aleatoriamente. La línea punteada (roja) describe el borde  $\mathcal{M}^{A_1B} \leq \mathcal{I}^{A|B}$ .

*Borde  $\mathcal{M}^{A_1B} = 0$ .* Es fácil construir estados clásicos tales que  $\rho^{A_1B}$  es también clásico. Cualquier estado definido usando una base  $\{\Pi_m^a\}$  con operadores mutuamente conmutativos del conjunto de estados  $\{\rho_m^{A_1} = \text{Tr}_{A_2} \Pi_m^a\}$  hace el trabajo. Es conveniente tener un parámetro libre a disposición que nos permita variar la información mutua clásica a través del intervalo  $[0, 1]$ . Por ejemplo, tenemos la familia monoparamétrica  $\rho_\tau^{AB} = \tau |00\rangle\langle 00|^A \otimes |0\rangle\langle 0|^B + (1 - \tau) |10\rangle\langle 10|^A \otimes |1\rangle\langle 1|^B$ , con  $\tau \in [0, 1]$ . Para esa familia, vale  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho_\tau^{AB}) = -\tau \log \tau - (1 - \tau) \log(1 - \tau)$ ,  $\mathcal{M}^{A_1B}(\rho_\tau^{AB}) = 0$ , reproduciendo todo el borde inferior de la región de interés (cf. Figura 2.2).

*Borde  $\mathcal{I}^{A|B} = 1$ .* Acá precisamos una familia de estados tales que: (a) maximicen la información mutua y (b) las reducciones  $A_1B$  exhiban

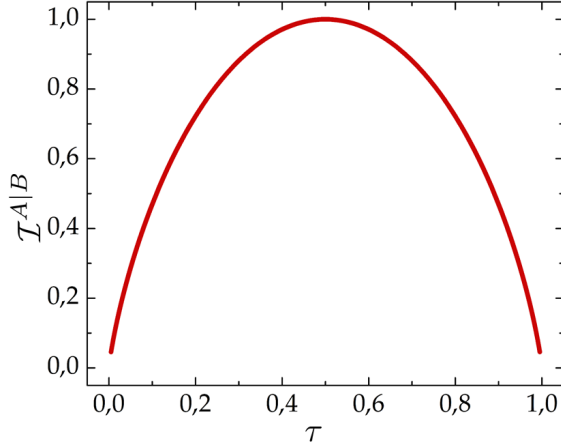


Figura 2.2: Información mutua de  $\rho_\tau^{AB}$  como función del parámetro  $\tau$ . Esta familia reproduce el borde inferior de la región de interés, para el cual  $\mathcal{M}^{A_1B}(\rho_\tau^{AB}) = 0$ .

correlaciones cuánticas. La primera condición implica la presencia de correlaciones fuertes, como aquellas dadas por  $p_{ij} = p_i^a \delta_{ij}$ , de modo que  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) = S(\rho^A) = S(\rho^B) = S(\rho^{AB})$  que es maximizada por distribuciones marginales uniformes. La familia

$$\rho_\gamma^{AB} = \frac{1}{2} |00\rangle \langle 00|^A \otimes |0\rangle \langle 0|^B + \frac{1}{2} |\psi_\gamma 1\rangle \langle \psi_\gamma 1|^A \otimes |1\rangle \langle 1|^B, \quad (2.10)$$

con  $|\psi_\gamma\rangle = \cos \gamma |0\rangle + \sin \gamma |1\rangle$ ,  $\gamma \in [0, \pi]$ , verifica lo requerido y además satisface que  $\rho_1^{A_1} = \text{Tr}_{A_2} \Pi_1^A = |0\rangle \langle 0|^A$  and  $\rho_2^{A_1} = \text{Tr}_{A_2} \Pi_2^A = |\psi_\gamma\rangle \langle \psi_\gamma|^A$  no conmutan en el caso general. Es posible hallar la MID para esta familia. Los autovalores de  $\tilde{\Pi}[\rho_\gamma^{A_1B}]$  son  $(1/4)(1 \pm \cos \gamma)$ , ambos doblemente degenerados. Podemos ver en la Figura 2.3 que esta familia permite reproducir el borde derecho. Los estados  $\rho_\gamma^{AB}$  no pertenecen a la familia (2.8)–(2.9), pero sin embargo son estados clásicos respecto de  $A|B$ , mostrando que la frontera  $\mathcal{I}^{A|B} = 1$  (con valores de MID cubriendo el rango completo  $[0, 1]$ ) puede alcanzarse con este tipo de estados.

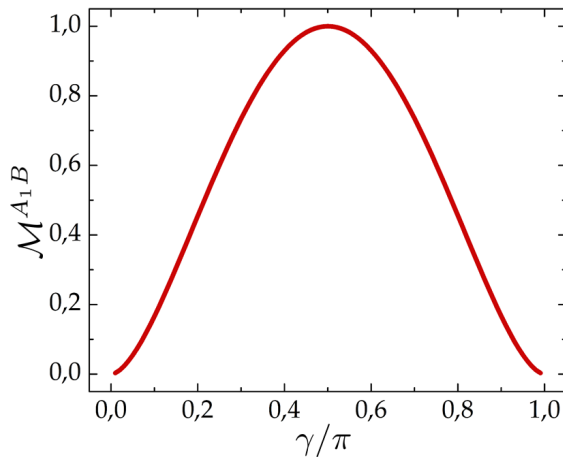


Figura 2.3: MID para la reducción  $A_1B$  de la familia  $\rho_\gamma^{AB}$ , como función de  $\gamma$ . Ésta reproduce el borde derecho de la región de interés.

*Borde superior.* Recuperar el borde superior mediante una familia monoparamétrica de estados clásicos es, al menos, difícil. Lo que podemos ver con cierta facilidad es que sí existen familias que cubren el rango de MID, aunque sin saturar su valor para un dado valor de

información cuántica. Fijando  $p_{11} = 1 - 2\lambda$  y  $p_{31} = \lambda = p_{42}$  en la base definida originalmente (ver Ec. 2.9) obtenemos la familia

$$\rho_\lambda^{AB} = (1 - 2\lambda) |00\rangle \langle 00|^A \otimes |0\rangle \langle 0|^B + \lambda(|+1\rangle \langle +1|^A \otimes |0\rangle \langle 0|^B + |-1\rangle \langle -1|^A \otimes |1\rangle \langle 1|^B). \quad (2.11)$$

Tomaremos valores de  $\lambda$  en el rango  $[0, \frac{1}{2})$ . En ese caso,  $\mathcal{I}^{AB}(\rho_\lambda^{AB}) = -\lambda \log \lambda - (1 - \lambda) \log(1 - \lambda)$ . Los autovalores de  $\rho_\lambda^{AB}$  son  $\{0, \lambda, \frac{1}{2}(1 - \lambda + c_\lambda), \frac{1}{2}(1 - \lambda - c_\lambda)\}$ , con  $c_\lambda = \sqrt{1 - 4\lambda + 5\lambda^2}$ . Aquellos para el estado postmedición,  $\tilde{\Pi}[\rho_\lambda^{AB}]$ , son  $\{1 - \frac{3}{2}\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\}$ . Luego, las entropías pertinentes son

$$\begin{aligned} S(\rho_\lambda^{AB}) &= -\lambda \log \lambda \\ &\quad - \frac{1}{2}(1 - \lambda + c_\lambda) \log\left(\frac{1}{2}(1 - \lambda + c_\lambda)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(1 - \lambda - c_\lambda) \log\left(\frac{1}{2}(1 - \lambda - c_\lambda)\right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

y

$$S(\tilde{\Pi}[\rho_\lambda^{AB}]) = 1 - \frac{2 - 3\lambda}{2} \log(2 - 3\lambda) - \frac{3}{2} \lambda \log \lambda. \quad (2.13)$$

Finalmente, de (2.12)–(2.13) se obtiene la MID correspondiente. La Figura 2.4 ilustra los resultados para la familia  $\rho_\lambda^{AB}$ . Para verificar los resultados, también computamos numéricamente la medida optimizada  $\mathcal{M}_S^{A_1B}(\rho_\lambda^{AB})$ . Optimizando sobre las mediciones proyectivas locales se obtiene un cuantificador que difiere significativamente a partir de  $\mathcal{I}^{AB}(\rho^{AB}) \approx 0,5$ , evidenciando la sobrestimación de la MID. Sin embargo, es claro que ambas medidas coinciden en determinar *cuáles* son los estados que exhiben correlaciones cuánticas.

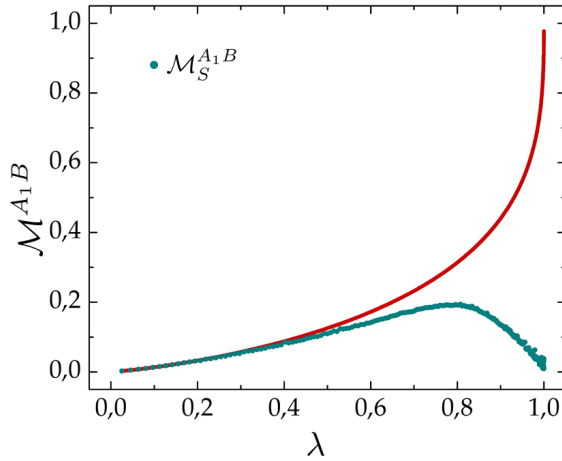


Figura 2.4:  $\mathcal{M}^{A_1B}(\rho_\lambda^{AB})$  (cian) y  $\mathcal{M}_S^{A_1B}(\rho_\lambda^{AB})$  (rojo) vs. información mutua de la familia de estados clásicos  $\rho_\lambda^{AB}$ .

EN RESUMEN, hemos investigado el modo en que, partiendo de estados clásicamente correlacionados, se hallan reducciones correlacionadas cuánticamente. Este efecto fue ilustrado haciendo referencia al sistema de menor dimensión posible, es decir, a un sistema de tres cubits. En ese caso, encontramos una relación directa entre la información mutua clásica del estado clásico y la máxima MID de sus



reducciones. Además, mostramos familias monoparamétricas que alcanzan las cotas extremas anticipadas por la relación mencionada.

Estos resultados pueden ser de interés ya que proveen un mejor entendimiento de la relación entre correlaciones clásicas y cuánticas. En particular, el hecho de que estados cuánticos (separables) pueden obtenerse con reducciones de estados clásicamente correlacionados señala interesantes preguntas acerca del estatus de los estados separables como recursos para tareas informacionales. En ese sentido, es instructivo considerar el siguiente escenario: un sistema bipartito consistente de dos subsistemas,  $A$  y  $B$ . Asumamos que los espacio de Hilbert de  $A$  y  $B$  poseen dimensiones no primas. En tal caso, ambos subsistemas pueden considerarse formalmente como compuestos —esta posibilidad se vincula con el hecho de que la estructura de producto tensorial del espacio de Hilbert de sistemas compuestos es, de cierto modo, relativa al “observador” (ver, por ejemplo, [52] y los trabajos allí citados)—. En consecuencia, un estado clásico compuesto puede encerrar correlaciones cuánticas “ocultas” correspondientes a reducciones obtenidas al trazar parcialmente una parte de los subsistemas, siempre que estos sean apropiadamente factorizados como subsistemas. A su vez, esto sugiere la posibilidad inquietante de que, más allá de las correlaciones cuánticas, la dimensionalidad de los subsistemas deba considerarse como recurso en el siguiente sentido: cuanto mayor es la dimensión (siempre que se asocie a un número compuesto) mayor es el monto de correlaciones cuánticas que pueden extraerse del estado original recurriendo a reducciones apropiadas. A continuación exploraremos esta afirmación con más cuidado.

## 2.2 Dimensionalidad del espacio de Hilbert como recurso

Como anticipamos, la dimensionalidad del espacio de estados de sistemas cuánticos debería considerarse como un recurso legítimo para la realización de tareas de procesamiento cuántico de la información. Esta afirmación se basa en el hecho de que los estados cuánticos con capacidades de tipo discord pueden obtenerse desde estados clásicamente correlacionados que viven en un espacio de mayor dimensión. En este apartado, profundizaremos e ilustraremos estas nociones con ejemplos simples que las justifican ampliamente.

La dimensión del espacio de Hilbert asociado a un sistema cuántico ha sido anteriormente vinculada con los recursos físicos que juegan un papel relevante en la computación cuántica. Básicamente, la idea es que “si uno pretende evitar la necesidad de suplir un monto de recursos físicos que crece exponencialmente con el tamaño del problema, la computadora debe estar formada de partes cuyo número crece más o menos linealmente con el número de cubits requeridos

en una computadora cuántica equivalente. Así, se torna como requisito fundamental para un sistema el de ser una computadora cuántica escalable” [53]<sup>41</sup>. En este sentido, algunos resultados recientes muestran que la dimensionalidad de sistemas cuánticos puede considerarse como una entidad física. Por ejemplo, Brunner y col. han definido lo que llaman *testigos de dimensión*: cantidades observables que estiman la mínima dimensión del espacio de estados de un dado sistema que sea consistente con ciertas correlaciones medidas [36, 54, 55]. Nosotros proponemos considerar la dimensión del espacio de Hilbert como un recurso cuántico legítimo para el procesamiento de información, sosteniendo nuestro argumento principal sobre la observación, debida a Li y Luo [34], de que los estados separables pueden obtenerse a partir de reducciones de estados clásicamente correlacionados. Aunque algunos autores han sugerido la posibilidad de entender el tamaño del espacio de Hilbert como recurso en sí mismo [56], la afirmación de que es un recurso cuántico que mejora a los recursos clásicos no fue técnicamente explorada, hasta donde nosotros sabemos.

Recordemos que, bajo el paradigma del discord, un estado es clásicamente correlacionado (o simplemente, clásico) si es informacionalmente accesible para observadores locales. Dada una medida de tipo discord,  $\mathcal{D}$ , un estado clásico  $\rho^{AB}$  para un sistema compuesto  $A$ – $B$  es tal que  $\mathcal{D}(\rho^{AB}) = 0$ . El siguiente teorema demuestra una relación notable entre los estados separables y los estados clásicos.

**Teorema 1** (Separabilidad vs. clasicidad [34]). *Un estado  $\rho^{AB}$ , del sistema compuesto  $A$ – $B$ , es separable en  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$  si y sólo si existe un estado clásico  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  sobre  $\mathcal{H}^{\bar{A}AB\bar{B}} = \mathcal{H}^{\bar{A}A} \otimes \mathcal{H}^{B\bar{B}}$ , con  $\mathcal{H}^{\bar{A}A} = \mathcal{H}^{\bar{A}} \otimes \mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^{B\bar{B}} = \mathcal{H}^B \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}}$ , tal que*

$$\rho^{AB} = \text{Tr}_{\bar{A}\bar{B}} \sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}. \quad (2.14)$$

El estado  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  lo consideramos como una extensión clásica<sup>42</sup> del estado separable  $\rho^{AB}$ .

La prueba de Li y Luo se da en la Ref. [34]. Por el momento, no sacaremos provecho de la construcción que hacen los autores para demostrar el teorema, por lo que pospondremos su reproducción hasta el capítulo 3.

El siguiente resultado se sigue directamente del teorema anterior:

**Proposición 1.** *Toda tarea cuántica realizable usando estados no entrelazados puede también llevarse a cabo usando estados clásicos y operaciones locales.*

De hecho, si una tarea cuántica apela al uso de un dado estado no entrelazado  $\rho^{AB}$ , entonces existe una extensión clásica  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  que preserva la bipartición original (Figura 2.5). El esquema es generalizado de forma directa a tareas que requieren varios estados de entrada.

<sup>41</sup> En el original: “[...] if you want to avoid supplying an amount of some physical resource that grows exponentially with problem’s size, the computer must be made up of parts whose number grows nearly linearly with the number of qubits required in an equivalent quantum computer. This thus becomes a fundamental requirement for a system to be a scalable quantum computer”.

<sup>42</sup> La idea de *extensión clásica* de estados cuánticos la desarrollamos en detalle en el capítulo 3.

$$\sigma^{\bar{A}A\bar{B}B} \text{ (clásico)} \left\{ \begin{array}{l} \bar{A} \text{ —} \\ A \text{ —} \\ \bar{B} \text{ —} \\ B \text{ —} \end{array} \right\} \rho^{AB} \text{ (separable)}$$

Figura 2.5: Todo estado cuántico separable (para una dada bipartición del sistema total) es, en un sentido formal, la reducción de un estado clásico de un sistema definido sobre un espacio de estados de mayor dimensión (y que preserva la bipartición original).

Las correlaciones cuánticas separables, las de tipo discord en particular, han probado su utilidad tanto en la interpretación de problemas fundamentales de la cuántica como en aplicaciones de información y computación cuánticas (pueden verse excelentes revisiones en las Refs. [26, 57]). Nuestro siguiente objetivo será ilustrar explícitamente cómo los estados clásicamente correlacionados pueden reemplazar a los estados separables con discord en dos tareas específicas: (a) preparación remota de estados (PRE) y (b) distribución de entrelazamiento (DE).

*Observación.* No todos los estados clásicos son igualmente útiles para ejecutar tareas de forma más eficiente que con recursos clásicos. La clave está en la estructura de sus reducciones: un estado clásicamente correlacionado será un buen recurso cuántico si la reducción seleccionada está cuánticamente correlacionada. En otras palabras, el estado original debe estar clásicamente correlacionado pero no *clásico* en el sentido propio de la palabra. Veamos, por ejemplo, el siguiente resultado trivial. Partimos del estado  $\sigma^{\bar{A}A\bar{B}B} = \Pi_{\alpha}^{\bar{A}A} \otimes \Pi_{\beta}^{\bar{B}B}$ , donde  $\Pi_{\alpha}^{\bar{A}A}$  ( $\Pi_{\beta}^{\bar{B}B}$ ) son dos estados de Bell ortogonales (es decir, máximamente entrelazados). Luego, si miramos las correlaciones entre  $A$  y  $B$ , el estado es un estado producto. En particular, no discordante. Trazando  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  obtenemos  $\sigma^{AB} \propto \mathbb{1}^{AB}$ , que es virtualmente inútil para cualquier tarea informacional. En cambio, podríamos trazar  $B\bar{B}$  y quedarnos con un estado máximamente discordante, pero en ese caso estaríamos violando la bipartición original en el sentido del teorema de Li y Luo, en el que es esencial la preservación de la bipartición fija original.

### Preparación remota de estados (PRE)

La primera ilustración surge al considerar el protocolo de PRE, una variante del conocido protocolo de teleportación en la cual el emisor conoce el estado a ser enviado al receptor (para más detalles, ver Figura 2.6 y Ref. [58]). Dakić y col. mostraron que, para cierta familia de estados de dos cubits (aquellos con marginales máximamente mezclados), la fidelidad del protocolo coincide con el discord geométrico de los estados. Girolami y Adesso, por otro lado, singularizaron ciertos estados separables que maximizan el discord geométrico [59, 60], aunque tales estados no poseen marginales máximamente mezclados. De hecho, es fácil ver que la fidelidad en la PRE es nula para esos estados. En cambio, el estado definido por la matriz densidad

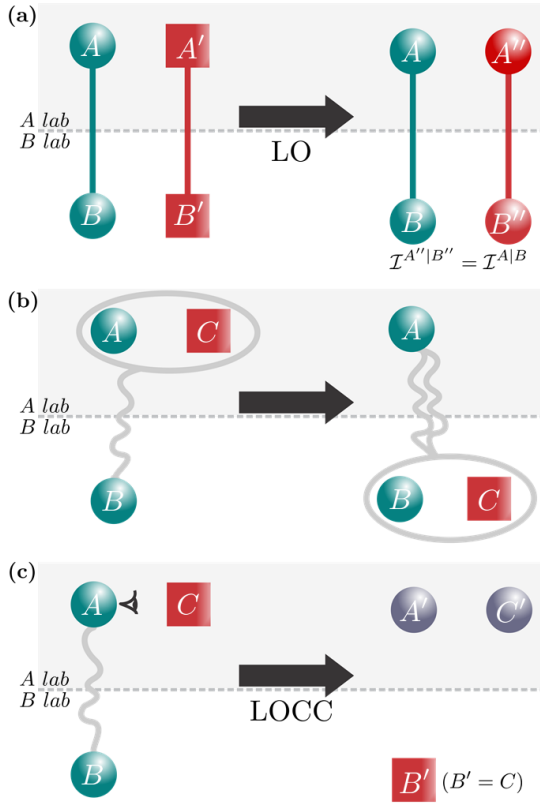


Figura 2.6: Existen varios protocolos de comunicación o procesamiento de información donde el discord suele presentarse como una figura de mérito. En la figura de arriba, ilustramos tres de ellos: la transmisión local de información, la distribución de entrelazamiento y la preparación remota de estados. (a) En el protocolo de transmisión local, se pretende copiar la información mutua de un sistema a otro, por medio de operaciones locales. (b) En la distribución de entrelazamiento, se busca aumentar el entrelazamiento entre partes al compartir un sistema auxiliar (C). (c) La preparación remota de estados propone la teleportación, de A a B, del estado de un sistema (C) que es conocido por A.

(en la base estándar)

$$\rho_{PRE}^{AB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

maximiza tanto el discord geométrico como la fidelidad de la PRE sobre el subconjunto de estados separables. Este estado, definido en  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , puede obtenerse (a menos de operaciones locales unitarias que preservan el discord), como reducción del estado clásico, en  $\mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$ ,

$$\sigma_{PRE}^{\bar{A}AB\bar{B}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |k, w_k\rangle \langle k, w_k|^{\bar{A}A} \otimes |w_k, k\rangle \langle w_k, k|^{\bar{B}B}, \quad (2.16)$$

con  $|w_k, k\rangle = |w_k\rangle \otimes |k\rangle$ ,  $k = 1, 2, 3$  (ver Ec. 3.26 en la pág. 60 y también Ref. [3]). Además,  $|w_k\rangle \equiv |\theta, \phi\rangle$ , donde  $|\theta, \phi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \exp(i\phi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ , y tal que los pares  $(\theta, \phi)$  toman los valores  $(0, 0)$ ,  $(\frac{2\pi}{3}, 0)$  y  $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ . Los estados  $|w_k\rangle$  corresponden a las partes A y B, mientras que  $\{|k\rangle\}_{1 \leq k \leq 3}$  son tres estados mutuamente ortogonales en  $\mathbb{C}^3$ , correspondientes a las partes extendidas  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ . Por lo tanto, la misma tarea puede llevarse a cabo con idéntica eficiencia usando tal extensión clásica.

Vale notar que  $\rho_{PRE}^{AB}$  maximiza el discord geométrico pero no el convencional. Este último, en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , es maximizado en el subconjunto

de estados separables por una familia diferente de estados [3, 59, 61].

Finalmente, en el espíritu de la discusión de la sección anterior, en este caso es directo mostrar que la eficiencia superlativa respecto de la clásica depende del discord geométrico de la reducción.

### Distribución de entrelazamiento (DE)

Otro ejemplo de estados clásicos con la habilidad de desempeñar tareas cuánticas es el de *distribución de entrelazamiento* [62]. Usaremos el siguiente esquema. Comenzamos con un sistema bipartito en un estado clásicamente correlacionado representado por  $\gamma^{\bar{A}AB\bar{B}}$ . La reducción de interés es  $\rho^{\bar{A}AB} = \text{Tr}_{\bar{B}}\gamma^{\bar{A}AB}$ . Consideremos dos particiones del mismo estado:  $\bar{A}|AB$  es la partición inicial y  $A|B\bar{A}$  la final. La distribución de entrelazamiento consiste en aumentar la cantidad de entrelazamiento al pasar de la configuración inicial a la final. En ese proceso, el subsistema  $B$  pasa de acompañar a  $A$  a acompañar a  $\bar{A}$  (Figura 2.7).

Para tener éxito, el protocolo no requiere entrelazamiento entre  $\bar{A}A$  y  $B$ . La posesión de discord es necesaria, aunque no suficiente [62, 63].

A modo de ejemplo, tomemos el estado de cuatro cubits

$$\gamma^{\bar{A}AB\bar{B}} = \sum_{k=1}^4 p_k \Pi_k^{\bar{A}A} \otimes \Pi_k^{B\bar{B}}, \quad (2.17)$$

donde  $\{\Pi_k^{\bar{A}A}\}_{1 \leq k \leq 4}$  y  $\{\Pi_k^{B\bar{B}}\}_{1 \leq k \leq 4}$  son bases ortogonales de proyectores de rango 1 sobre  $\mathbb{C}^4$ , y  $\{p_k\}_{1 \leq k \leq 4}$  es una distribución de probabilidad. Para hallar los estados clásicos que optimizan la DE, generamos estados aleatorios a partir de bases aleatorias de  $\mathbb{C}^4$ . Específicamente, restringimos nuestra búsqueda a estados tales que  $p_k = \frac{1}{4}$  y  $\Pi_k^{\bar{A}A} = \Pi_k^{B\bar{B}} \forall k$ . Si  $\mathcal{E}^{X|Y}$  es la medida de entrelazamiento dada por la negatividad para la partición  $X|Y$  del sistema —ver Ec. (1.30)—, tenemos que la DE óptima a partir de  $\gamma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  es  $\mathcal{E}^{A|B\bar{A}} - \mathcal{E}^{\bar{A}|AB} \leq 0,0915$ .

Reemplacemos ahora al estado inicial  $\gamma^{AB}$  por otro en el cual ambas partes están compuestas por *qudits*, mientras que  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  mantienen sus dos cubits. El nuevo estado,  $\gamma_d^{AB}$ , opera sobre  $\mathbb{C}^{2d} \otimes \mathbb{C}^{2d}$ , con  $d = 1, 2, \dots$ . Como antes, podemos buscar los estados clásicos que maximizan la DE para cada valor de  $d$ . Haciendo esto para  $2 \leq d \leq 6$ , otra vez restringiendo la búsqueda a estados con  $p_k = \frac{1}{2d}$  y  $\Pi_k^{\bar{A}A} = \Pi_k^{B\bar{B}} \forall k$ , hallamos que la DE aumenta con la dimensión del estado clásico inicial (Cuadro 2.1).

Una vez más, observamos que los estados clásicamente correlacionados  $\gamma_d^{\bar{A}AB\bar{B}}$  permiten mejorar la DE al aumentar la dimensión del espacio de Hilbert.

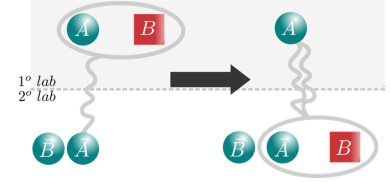


Figura 2.7: Distribución de entrelazamiento a partir de estados CC.

Cuadro 2.1: Máxima DE con estados clásicos  $\gamma_d^{\bar{A}AB\bar{B}}$  en  $\mathbb{C}^{2d} \otimes \mathbb{C}^{2d}$ .

$d$	DE máxima
2	0,0915
3	0,1269
4	0,1681
5	0,1744
6	0,3326

### Extracción de trabajo desde extensiones clásicas

La distinción entre lo clásico y lo cuántico puede hacerse de diferentes maneras. El discord establece una división en la capacidad de interrogar clásicamente a un sistema compuesto. Otra opción, introducida por Oppenheim y col. [25], se relaciona con el trabajo que puede ser extraído desde el estado del sistema por los llamados demonios de Maxwell [64]. Si todo el trabajo puede extraerse por demonios locales, entonces el estado es clásicamente correlacionado. El déficit de trabajo entre lo extraíble por demonios locales y globales es una medida de la cuantidad de las correlaciones. Optimizando sobre todas las posibles mediciones locales se determina el *discord termal*, el cual difiere del discord usual. La equivalencia entre información y trabajo [65, 66] es la esencia para comparar ambos tipos de discord [67-70].

Anteriormente, mostramos que todo estado separable puede extenderse a otro clásicamente correlacionado, y que tales extensiones permiten realizar las mismas tareas cuánticas. Desde un punto de vista termodinámico, de la extensión clásica de un dado estado separable uno siempre puede extraer más trabajo que del estado cuántico original. De hecho, demostraremos un importante resultado, la validez de la relación

$$W^Q(\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}) = W^Q(\rho^{AB}) + W^Q(\rho^{\bar{A}\bar{B}}) + \mathcal{I}^{AB|\bar{A}\bar{B}}(\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}). \quad (2.18)$$

En la expresión anterior,  $\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$  es un estado cuántico (separable),  $\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}$  es una extensión clásica de  $\rho^{AB}$  (ver Ec. (2.14)) y  $\rho^{\bar{A}\bar{B}} = \text{Tr}_{AB} \sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}$  es el estado marginal de la parte auxiliar de la extensión. Para  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ,  $W^Q(\rho) = \log(\dim \mathcal{H}) - S(\rho)$  es el máximo trabajo extraíble de  $\rho$ , cuando el sistema se halla en contacto con un reservorio a temperatura  $T$ , con  $k_B$  la constante de Boltzmann, en unidades tales que  $k_B T = 1$ .

La Ec. (2.18) nos dice que el trabajo extraíble desde la extensión clásica está limitado, inferiormente, por la suma de los trabajos extraíbles del estado original más aquel de la parte auxiliar. La demostración es sencilla: alcanza con apelar a la subaditividad de la entropía de von Neumann y aplicarla a la definición precedente de  $W^Q(\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}})$ . La Ec. (2.18) es importante porque establece una relación entre recursos locales (clásicos) y globales (cuánticos), dado que el trabajo extraíble desde  $\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}$  puede accederse localmente (el discord termal de  $\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}$  se anula para la partición  $\bar{A}A|B\bar{B}$ ). Para lograrlo, por ejemplo, puede hacerse mediante un demonio de Maxwell local (en  $\bar{A}A$ ) que realiza una medición en la autobase de proyectores locales,  $\{\Pi_k^{\bar{A}A}\}$ , y se comunica luego con  $B$ , extrayendo un trabajo igual a  $W^C(\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}) = W^Q(\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}})$ . De la igualdad anterior se sigue que

$$W^C(\sigma^{\bar{A}ABB\bar{B}}) \geq W^Q(\rho^{AB}) + W^Q(\rho^{\bar{A}\bar{B}}). \quad (2.19)$$

Dado que existe una diversidad de extensiones clásicas compatibles

con un estado separable  $\rho^{AB}$ , tiene sentido preguntarse por la extensión “óptima”: aquel  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  con la menor dimensión posible [3]. Este tipo de extensiones puede generalmente encontrarse recurriendo al algoritmo de Li y Luo. ¿Qué caracteriza el trabajo extraíble de aquellas extensiones óptimas?

Consideremos el estado  $\rho_{PRE}^{AB}$  de la Ec. (2.15). Además de la extensión clásica dada por  $\sigma_{PRE}^{\bar{A}AB\bar{B}}$  en  $\mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6$  (Ec. (2.16)), se puede encontrar una extensión  $\tilde{\sigma}_{PRE}$  en  $\mathbb{C}^8 \otimes \mathbb{C}^8$ . Ninguna de las anteriores es la óptima en el sentido antes discutido. Una exploración numérica vía el método de Monte Carlo sugiere que la extensión óptima,  $\sigma_{PRE}^{opt}$ , actúa en  $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$  —ver Ec. (3.25) en la pág. 59 y Ref. [3]—. Computando los trabajos extraíbles localmente (clásicos) asociados a cada una de las extensiones, observamos que la de menor dimensión coincide con aquella que minimiza el trabajo (Cuadro 2.2). Este resultado motiva la pregunta acerca de si la extensión óptima definida vía el criterio de mínima dimensión coincide siempre con aquella de mínimo trabajo extraíble.

El trabajo extraíble globalmente desde  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  es una medida de la capacidad de distinguir tal estado respecto del máximamente mezclado, ya que  $W^Q(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}) = S(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}} \| \mathbb{1}^{\bar{A}AB\bar{B}} / \dim \mathcal{H}^{\bar{A}AB\bar{B}})$ , con  $\mathbb{1}^{\bar{A}AB\bar{B}}$  la identidad en  $\mathcal{H}^{\bar{A}AB\bar{B}}$ . En este sentido, la extensión clásica de  $\rho^{AB}$  que minimiza el trabajo extraíble estaría dada por el estado  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  más cercano a  $\mathbb{1}^{\bar{A}AB\bar{B}} / \dim \mathcal{H}^{\bar{A}AB\bar{B}}$ . La pregunta que nos concierne es si la minimización de  $W^Q(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}})$  —o, de forma análoga, la de  $S(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}} \| \mathbb{1}^{\bar{A}AB\bar{B}} / \dim \mathcal{H}^{\bar{A}AB\bar{B}})$ — es equivalente a la minimización de  $\dim \mathcal{H}^{\bar{A}AB\bar{B}}$ , es decir, si ambas condiciones determinan indistintamente la extensión clásica óptima.

Extensión	Dimensión	Trabajo extraíble
$\sigma_{PRE}$	64	4,00
$\tilde{\sigma}_{PRE}$	36	3,58
$\sigma_{PRE}^{opt}$	16	2,00

Cuadro 2.2: Trabajo extraíble de diferentes extensiones clásicas del estado separable  $\rho_{PRE}$ . La extensión de mínima dimensión se corresponde con el mínimo trabajo extraíble.

### Monogamia de correlaciones cuánticas y sus extensiones clásicas

Teniendo presente la equivalencia entre información y trabajo discutida en el apartado anterior, la relación (2.19) puede pensarse como una relación de monogamia para la bipartición  $AB|\bar{A}\bar{B}$  de la extensión clásica. La función

$$i(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}) := \log(\dim \mathcal{H}^{\bar{A}AB\bar{B}}) - S(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}) \quad (2.20)$$

puede entenderse como la información total accesible del sistema en el estado  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  [68]. Por lo tanto, la desigualdad (2.19) es equivalente a la desigualdad  $i(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}) \geq i(\rho^{AB}) + i(\rho^{\bar{A}\bar{B}})$ , la cual determina un comportamiento monógamo “híbrido” entre la información clásica



sica (localmente accesible) de  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  y la información cuántica (globalmente accesible) de  $\rho^{AB}$  y  $\rho^{\bar{A}\bar{B}}$ .

Las relaciones de monogamia son de gran interés para caracterizar las medidas de correlaciones —tanto cuánticas como clásicas—. Excepto en instancias particulares, las medidas de correlaciones cuánticas no satisfacen relaciones de monogamia. Más aún, si una medida arbitraria  $Q$  cumple con unas pocas propiedades razonables, la misma debe anularse para estados separables si se requiere que cumpla además relaciones de monogamia del tipo  $Q^{AB|C} \geq Q^{A|C} + Q^{B|C}$  [49]. El discord usual, por ejemplo, no es monógamo para estados generales [49, 71-73].

Las extensiones clásicas que mencionamos acá constituyen un claro ejemplo de violación de monogamia ya que vale

$$0 = \mathcal{D}^{\bar{A}A|B\bar{B}}(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}) \leq \mathcal{D}^{A|B\bar{B}}(\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}), \quad (2.21)$$

y lo mismo vale para  $\mathcal{D}^{\bar{A}A|\bar{B}}$ . Todas las extensiones clásicas sufren un incremento del discord si algún subsistema es descartado. En conclusión, *todas las extensiones clásicas de estados separables son polígamas en el sentido usual*. Esta observación (a) constituye el argumento básico para demostrar que las correlaciones cuánticas no son monógamas en general [49], y (b) subyace a la violación de relaciones de monogamia más generales, incluso para medidas de correlaciones multipartitas [74, 75]. De todos modos, existen relaciones de monogamia válidas para las extensiones clásicas si consideramos medidas más generales de correlaciones multipartitas. Consideremos, por ejemplo, el *discord global* —una extensión simétrica del discord para sistemas multipartitos— definido vía [76, 77]

$$\mathcal{D}_g(A_1|\cdots|A_N) := \min_{\Phi} [I(A_1|\cdots|A_N) - I^{\Phi}(A_1|\cdots|A_N)], \quad (2.22)$$

donde  $A_1, \dots, A_N$  son las partes del estado N-partito  $\rho^{A_1 \cdots A_N}$ ,

$$I(A_1|\cdots|A_N) := \sum_k S(A_k) - S(A_1 \cdots A_N) \quad (2.23)$$

es la información mutua generalizada y  $I^{\Phi}(A_1|\cdots|A_N)$  es la información mutua después de efectuar una medición multilocal,  $\Pi^{\vec{j}} = \{\Pi_{A_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \Pi_{A_N}^{j_N}\}$ , tal que el estado postmedición es  $\Phi(\rho^{A_1 \cdots A_N}) = \sum_{\vec{j}} \Pi^{\vec{j}} \rho^{A_1 \cdots A_N} \Pi^{\vec{j}}$ . Para el discord global de cualquier estado multipartito se verifica que [74]

$$\mathcal{D}_g(A_1|\cdots|A_N) \geq \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{D}_g(A_1 \cdots A_k | A_{k+1}). \quad (2.24)$$

Por ejemplo, para el estado clásico  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$ , si consideramos la partición  $A|\bar{A}|B$ , tenemos que  $\mathcal{D}_g(A|\bar{A}|B) \geq \mathcal{D}_g(A|\bar{A}) + \mathcal{D}_g(A\bar{A}|B)$ , pero  $\mathcal{D}_g(A\bar{A}|B) = \mathcal{D}_g(A|B) = 0$  y, por lo tanto,  $\mathcal{D}_g(A|\bar{A}|B) \geq \mathcal{D}_g(A|\bar{A})$ . De otro modo, podemos considerar la partición  $A|B|\bar{A}\bar{B}$ . En ese caso,  $\mathcal{D}_g(A|B|\bar{A}\bar{B}) \geq \mathcal{D}_g(A|B) + \mathcal{D}_g(AB|\bar{A}\bar{B})$ . La Ec. (2.24) sugiere que, a



fin de obtener una relación de monogamia válida para medidas de tipo discord, es necesario apelar a medidas multipartitas generalizadas que tengan en cuenta las particiones de la estructura interna del sistema.

Los casos que analizamos en esta sección validan fuertemente la tesis inicial: los estados clásicamente correlacionados en espacios de Hilbert de dimensión suficientemente grande constituyen recursos cuánticos para la realización de tareas de procesamiento de información. De hecho, mostramos cómo la preparación remota de estados y la distribución de entrelazamiento pueden llevarse a cabo usando estados clásicos y operaciones locales. Estos resultados son relevantes, por ejemplo, en el proceso de decoherencia: para interacciones arbitrarias sistema-entorno, el sistema evoluciona hacia un estado clásicamente correlacionado —es decir, no discordante— (ver, e.g., [78]). Así, mostramos que tales estados son igualmente útiles para las tareas de procesamiento de información cuántica en comparación con estados separables.

Por otro lado, profundizamos la comprensión de dos aspectos importantes de las extensiones clásicas de estados separables. En primer lugar, desde una perspectiva termodinámica vinculada a la extracción de trabajo desde las extensiones, mostramos que la extensión mínima de un dado estado se relaciona con el mínimo trabajo extraíble del conjunto de posibles extensiones. En segundo lugar, mostramos que la posibilidad de extender clásicamente los estados separables está fuertemente vinculada con la naturaleza no monógama de las medidas de tipo discord. Sólo es posible recuperar la monogamia considerando las correlaciones genuinamente multipartitas.

### 2.3 Resumen del capítulo 2

- Mostramos que los estados clásicamente correlacionados tales que al menos uno de los subsistemas es compuesto, poseen discord en las reducciones que surgen de trazar parcialmente grados de libertad locales.
- Por medio de las MIDs, obtuvimos algunas cotas interesantes que vinculan la cuantidad de las reducciones con la información clásica de los estados clásicamente correlacionados de mayor dimensión.
- En el caso más sencillo, el de un sistema de tres cubits, calculamos analíticamente estas relaciones para familias de estados relevantes.
- Para protocolos concretos, como la preparación remota de estados y la distribución de entrelazamiento, mostramos cómo llevarlos a cabo a partir de estados clásicos y calculamos la eficiencia en

función de la dimensión de estos estados; motivando la tesis de que la dimensión del espacio de Hilbert asociado —aquel donde definimos los estados clásicos— es un recurso cuántico genuino.

- Vinculamos la noción de extensión clásica de estados separables con la capacidad de extracción de trabajo y el carácter monógamo de las medidas tipo discord.

## 3 EXTENSIONES CLÁSICAS DE ESTADOS SEPARABLES

*Este capítulo está mayormente basado en los resultados publicados en Guido Bellomo, Angelo Plastino y Angel R Plastino. "Classical extension of quantum-correlated separable states". En: International Journal of Quantum Information 13.02 (2015), pág. 1550015.*

### 3.1 Extensiones clásicas de estados separables

Como discutimos anteriormente, Li y Luo [*Phys. Rev. A* **78** (2008), 024303] descubrieron una relación notable entre discord y entrelazamiento: que todo estado separable puede obtenerse vía la reducción de un estado clásico que vive en un espacio de mayor dimensión. Partiendo de este resultado, introduciremos y discutiremos la noción de *extensión clásica óptima* de estados separables y exploraremos sus características en sistemas de baja dimensión. Mostraremos que a mayor dimensión de la extensión clásica, mayor el discord del estado separable original. Analizando estados separables máximamente discordantes en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  y sus respectivas extensiones clásicas, veremos que de reducciones de estados clásicos en  $(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ , pueden obtenerse estados separable de máximo discord en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ .

Entrelazamiento y discord son reconocidos como recursos cuánticos para la implementación de protocolos informacionales y computacionales con una eficiencia mayor a la accesible mediante recursos clásicos (para una revisión completa, ver [26, 79] y sus referencias). La utilidad del entrelazamiento en tales protocolos ha sido documentada extensamente. En lo que respecta al discord, podemos citar, por ejemplo, las Refs. [56, 58, 62, 80-86], aunque persiste cierta controversia entorno su necesidad [63, 87, 88]. Está claro, sin embargo, que entrelazamiento y discord capturan dos aspectos distintos del mundo cuántico. El discord se enfoca en el hecho de que los estados clásicos deben ser informacionalmente accesibles para observadores locales. Así, es aceptado que la dicotomía clásico/no-clásico puede tratarse de forma similar a aquella de discord/no-discord. Para un sistema

bipartito asociamos el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ . Como ya vimos, si  $\{\Pi_i^A\}$  y  $\{\Pi_i^B\}$  son mediciones proyectivas completas sobre  $\mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^B$ , respectivamente, entonces [26, 39]

- si  $\sigma^{AB} = \sum_i p_i \Pi_i^A \otimes \rho_i^B$ , el estado es clásico-cuántico ( $A$ -clásico): existe una base de  $\mathcal{H}^A$  para la cual la información accesible localmente es máxima y, para un observador externo, tal información puede obtenerse sin perturbar al estado del sistema compuesto;
- si  $\sigma^{AB} = \sum_{i,j} p_{ij} \Pi_i^A \otimes \Pi_j^B$ , el estado es clásico-clásico ( $A|B$ -clásico): la información localmente accesible es máxima para  $A$  y  $B$ , y puede obtenerse sin perturbar al estado del sistema compuesto.

Análogamente, definimos los estados cuántico-clásicos ( $B$ -clásicos) intercambiando los roles de  $A$  y  $B$ . Hablamos genéricamente de estados CC para referirnos a cualquiera de estos tres tipos. Aún cuando los conjuntos de estados CC — $\Omega^A$ ,  $\Omega^B$  y  $\Omega^{AB}$ — están incluidos en el convexo de separables, estos no son convexos. Precisamente, la falta de convexidad implica la existencia de estados clásicos que, vía la mezcla mutua, da lugar a estados no clásicos con discord [34]. Este hecho subyace al vínculo entre separabilidad y clasicidad observado por Li y Luo en [34]: un estado bipartito es separable si y sólo si puede obtenerse como reducción de un estado separable de mayor dimensión, respetando la bipartición original.

A continuación, demostraremos el teorema de Li y Luo que relaciona separabilidad con clasicidad, introducido en el capítulo 2, y lo adaptaremos a nuestra presente discusión. Luego, definiremos la *extensión clásica óptima* de estados separables y mostraremos que para estados separables de baja dimensión —en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ — es posible hallar extensiones clásicas que son “mejores”<sup>43</sup> y que no están contempladas en el trabajo de Li y Luo. Además, discutiremos la existencia de estados separables máximamente discordantes en dimensión arbitraria, relacionando este concepto con las nociones de: (a) bases mutuamente no sesgadas y (b) mediciones generalizadas simétricas e informationalmente completas.

<sup>43</sup> En el sentido de optimalidad que se desprende de nuestra Definición 2, pág. 55.

### *Separabilidad vs. clasicidad: la relación de Li y Luo*

La monogamia es una característica fundamental del entrelazamiento. Dado un sistema multipartito, si dos de sus partes se hallan máximamente entrelazadas, entonces no pueden estar entrelazadas con una tercera. Para el estado  $\sigma^{AB}$ , con  $\{A_i\}$  y  $\{B_j\}$  partes de  $A$  y  $B$ , respectivamente, una medida monógama de entrelazamiento  $\mathcal{E}$  es tal que [89, 90]

$$\mathcal{E}^{A|B} \geq \sum_{i,j} \mathcal{E}^{A_i|B_j}, \quad (3.1)$$

Se sigue de (3.1) que, dado  $\sigma^{AB}$  no entrelazado, ninguna de sus reducciones exhibirá entrelazamiento, es decir,

$$\mathcal{E}^{A|B} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}^{A_i|B_j} = 0 \quad \forall i, j. \quad (3.2)$$

Recíprocamente, un estado entrelazado  $\rho^{A_i B_j}$  no puede extenderse a otro no entrelazado  $\sigma^{AB}$ . La definición precisa del vocablo *extensión* será dada más abajo (Definición 1, pág. 55).

En general, el discord no obedece desigualdades del tipo (3.1) [1, 49, 71, 72]. Li y Luo mostraron que cualquier estado bipartito separable puede ser extendido a uno clásico en un espacio de mayor dimensión [34] (Figura 3.1). Los autores estudiaron la extensión *separable*  $\rightarrow$  *clásico-clásico*. Nosotros, en cambio, estamos interesados en el caso *separable*  $\rightarrow$  *clásico-cuántico*<sup>44</sup>. Reproducimos nuevamente el siguiente teorema que es una leve variante del Teorema 1 que explica cómo encontrar tal extensión [34].

**Teorema 2.** *Un estado bipartito  $\rho^{AB}$  es separable en  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$  si y sólo si existe un estado clásico-cuántico  $\sigma^{\bar{A}AB}$  en  $\mathcal{H}^{\bar{A}AB} = \mathcal{H}^{\bar{A}A} \otimes \mathcal{H}^B$ , con  $\mathcal{H}^{\bar{A}A} = \mathcal{H}^{\bar{A}} \otimes \mathcal{H}^A$  tal que*

$$\rho^{AB} = \text{Tr}_{\bar{A}}[\sigma^{\bar{A}AB}]. \quad (3.3)$$

Acá,  $\mathcal{H}^{\bar{A}}$  es un espacio de Hilbert auxiliar para la parte A, mientras  $\text{Tr}_{\bar{A}}$  es la traza parcial sobre  $\mathcal{H}^{\bar{A}}$ .

*Demostración.* La demostración es adaptada de la de Li y Luo [34]. Partimos de un estado separable

$$\rho^{AB} = \sum_{k=1}^K p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B. \quad (3.4)$$

Cada  $\rho_k^A$  puede expandirse en sus autobases  $\{|\alpha_{ku}\rangle\}$  de modo que la Ec. (3.4) puede reescribirse como

$$\rho^{AB} = \sum_k \sum_u p_k a_{ku} P_{ku}^A \otimes \rho_k^B, \quad (3.5)$$

donde definimos  $P_{ku}^A := |\alpha_{ku}\rangle \langle \alpha_{ku}|$ . La extensión demanda incorporar un sistema auxiliar  $\bar{A}$ , definido en  $\mathcal{H}^{\bar{A}} = \mathbb{C}^K$ , tal que  $\{|k\rangle\}$ , con  $k = 1, 2, \dots, K$ , es una base ortonormal de  $\mathbb{C}^K$ . Luego,

$$\{\Pi_{ku}^{\bar{A}A} := |k\rangle \langle k| \otimes P_{ku}^A\} \quad (3.6)$$

es un conjunto ortogonal en  $\mathcal{H}^{\bar{A}A} := \mathcal{H}^{\bar{A}} \otimes \mathcal{H}^A$ , extensible a una medición proyectiva completa. Así, se define la extensión —en  $(\mathbb{C}^K \otimes \mathcal{H}^A) \otimes \mathcal{H}^B$ —

$$\sigma^{\bar{A}AB} := \sum_{k,u} p_k a_{ku} \Pi_{ku}^{\bar{A}A} \otimes \rho_k^B, \quad (3.7)$$

la cual es  $\bar{A}A$ -clásica respecto a la partición  $\bar{A}A|B$ . De su reducción se recupera el estado separable  $\rho^{AB}$ ,

$$\text{Tr}_{\bar{A}} \sigma^{\bar{A}AB} = \sum_{k,u} p_k a_{ku} P_{ku}^{\bar{A}A} \otimes \rho_{kv}^B = \rho^{AB}, \quad (3.8)$$

tal como queríamos mostrar.  $\square$

<sup>44</sup> El otro caso se trabaja de manera totalmente análoga al que nosotros elegimos.

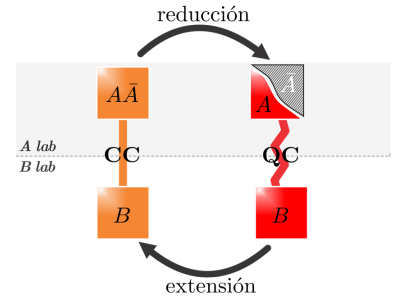


Figura 3.1: Un estado separable siempre puede obtenerse como la reducción de un estado clásicamente correlacionado embebido en un espacio de mayor dimensión. La extensión de Li y Luo provee un algoritmo para determinar una extensión clásica de un dado estado separable.

Este proceso particular de extensión clásica lo llamaremos *extensión de Li-Luo* o *algoritmo de Li-Luo* (ALL). Son pertinentes las siguientes observaciones:

1. La extensión depende de la descomposición separable del estado original (ver Ec. (3.4)). La parte que uno desea hacer clásica es extendida usando un sistema auxiliar en  $\mathbb{C}^K$ , con  $K$  el número de términos de la descomposición (3.4). Luo y col. pretenden, en cambio, un estado clásico-clásico que requiere de dos sistemas auxiliares (uno por parte) en  $\mathbb{C}^K$ .
2. Extender la parte  $B$  no cambia la naturaleza cuántica del estado al ser “observado” desde  $A$  (es decir, mediante una medición local en  $A$ ). La extensión de  $B$  no modifica el carácter clásico-cuántico del estado. Recíprocamente, asumamos la existencia de una extensión clásica  $\omega^{AB\bar{B}}$  en  $\mathcal{H}^{AB\bar{B}} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^{B\bar{B}}$ , con  $\mathcal{H}^{B\bar{B}} := \mathcal{H}^B \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}}$ , compatible con un dado separable  $\rho^{AB}$ . En ese caso, podemos escribir

$$\omega^{AB\bar{B}} = \sum_{m,n} \gamma_{mn} \Pi_m^A \otimes \omega_n^{B\bar{B}}, \quad (3.9)$$

y trazando sobre la extensión obtenemos el estado clásico  $\rho^{AB} = \sum_{m,n} \gamma_{mn} \Pi_m^A \otimes \omega_n^{B\bar{B}}$ , con  $\omega^B := \text{Tr}_{\bar{B}} \omega^{B\bar{B}}$ . Entonces,  $\rho^{AB}$  no puede ser un estado separable arbitrario, debe ser clásico.

3. El ALL no entrelaza la extensión con el sistema original, esto es,  $A$  con  $\bar{A}$ . De hecho, de las Ecs. (3.6)–(3.7) se sigue que

$$\sigma^{A\bar{A}} = \text{Tr}_B \sigma^{\bar{A}AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes |k\rangle \langle k|, \quad (3.10)$$

es el estado separable de  $A$ . Extensiones clásicas más generales en que  $\bar{A}$  se entrelaza con  $A$  son posibles (ver Definición 1 en la sección 3.2). De cualquier modo, es esperable éstas limiten la capacidad de correlacionar  $A$  con  $B$ .

4. El ALL es tal que el estado final no exhibe discord con respecto a la parte auxiliar:  $\mathcal{D}^{\bar{A}} = 0$ .
5. Dado un estado clásico, cualquier reducción que preserve la bipartición da lugar a un estado separable y por lo tanto es imposible hallar una extensión clásica de un estado entrelazado.

*Observación.* Las aclaraciones anteriores indican que el ALL no da una extensión única, excepto para un subconjunto especial de estados separables: aquellos cuya descomposición convexa en estados producto es también única, lo que ocurre con los estados puros. Dado que los estados puros separables son estados producto (no correlacionados), este caso no es significativo para nosotros.

Una cuestión relevante es si puede uno hallar una extensión clásica *óptima* para un dado estado separable, donde *óptimo* refiere a algún criterio de extremización. A continuación atacaremos esta pregunta y estudiaremos la relación entre la optimalidad de las extensiones clásicas y su contenido de correlaciones cuánticas.

### 3.2 Extensiones clásicas óptimas

Consideremos el estado separable  $\rho^{AB}$  sobre  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ . Siempre es posible encontrar una descomposición de la forma [91-93]

$$\rho^{AB} = \sum_{k=1}^{\ell} p_k |k\rangle \langle k|^A \otimes |k\rangle \langle k|^B, \quad (3.11)$$

donde  $\text{rang}(\rho^{AB}) \leq \ell \leq (\text{rang}(\rho^{AB}))^2$ . La cantidad  $\ell \in \mathbb{N}$  es la *cardinalidad* o *longitud* del estado, y representa el menor número de estados producto necesarios para tal descomposición. La Ec. (3.11) se denomina *descomposición óptima* de  $\rho^{AB}$ . Para estados separables en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , uno siempre puede encontrar una descomposición del tipo (3.11) con  $\ell = \max\{\text{rang}(\rho^{AB}), \text{rang}((\rho^{AB})^{\text{T}_B})\} \leq 4$ , donde  $(\rho^{AB})^{\text{T}_B}$  es la traspuesta parcial de  $\rho^{AB}$  [94]<sup>45</sup>.

Para precisar la idea de extensión óptima, ensayemos las siguientes definiciones.

**Definición 1** (Extensión clásica). *Dado un estado separable  $\rho^{AB}$  en  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , decimos que  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  en  $\mathcal{H}^{\bar{A}A} \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}B}$  es una **extensión clásica** de  $\rho^{AB}$  si*

$$\text{Tr}_{\bar{A}, \bar{B}} \sigma^{\bar{A}AB\bar{B}} = \rho^{AB} \quad (3.12)$$

ya  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  es clásico. La traza parcial se da sobre  $\mathcal{H}^{\bar{A}}$  y  $\mathcal{H}^{\bar{B}}$ , los espacios asociados a las extensiones, con  $\mathcal{H}^{\bar{A}A} = \mathcal{H}^{\bar{A}} \otimes \mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^{\bar{B}B} = \mathcal{H}^{\bar{B}} \otimes \mathcal{H}^B$ .

Podemos distinguir tres casos, en los cuales las extensiones se dan desde estados separables a estados CC. Nosotros enfocaremos el estudio que sigue al caso de extensiones a estados clásico-cuánticos, siendo el resto de los casos tratables de manera completamente análoga. Pasemos entonces a la segunda definición.

**Definición 2** (Extensión clásica óptima). *Dado  $\rho^{AB}$  separable en  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , decimos que  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  en  $\mathcal{H}^{\bar{A}A} \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}B}$  es la **extensión clásica óptima** de  $\rho^{AB}$  si:*

- (a)  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}}$  es una extensión clásica  $\rho^{AB}$ ,
- (b) para cualquier otra extensión clásica  $\omega^{\bar{A}'AB\bar{B}'}$  en  $\mathcal{H}^{\bar{A}'A} \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}'B}$ ,  $\dim(\mathcal{H}^{\bar{A}'A} \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}'B}) \geq \dim(\mathcal{H}^{\bar{A}A} \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}B})$ .

En general, la mejor extensión según el ALL es aquella basada en la descomposición separable óptima: en ese caso, el sistema auxiliar vive en  $\mathbb{C}^{\ell}$ , con  $\ell$  la longitud del estado que se busca extender clásicamente. Sin embargo, la Definición 2 abre la puerta a posibles extensiones no amparadas por tal algoritmo, dado que no hace referencia a ningún mecanismo particular para determinarlas. Podríamos tener, por ejemplo, extensiones que entrelazaran  $A$  con  $\bar{A}$ . Alternativamente, podríamos pensar en extensiones que exhibieran discord con respecto a la extensión (es decir,  $\mathcal{D}^A \neq 0$ ). Ninguno de estos casos

<sup>45</sup> Existen otros esquemas de descomposiciones posibles para estados bipartitos, incluso para estados no separables. Por ejemplo, Luo y Sun mostraron la equivalencia de variados teoremas de no transmisión usando otra forma particular de descomposición bipartita [95].

son contemplados por el ALL. En consecuencia, aplicar el ALL a la descomposición óptima *no garantiza* la optimalidad de la extensión clásica. Dado que carecemos de una fórmula cerrada para la descomposición óptima de un estado separable arbitrario, no podemos tampoco encontrar la mejor extensión restringida al ALL, y menos aún la extensión óptima general. A continuación mostraremos, de todos modos, como acotar con más precisión la dimensión de las posibles extensiones.

### Cotas para las extensiones óptimas

El Teorema 2 nos dice algo sobre la dimensión de las extensiones clásicas óptimas. Siendo que  $\text{rang}(\rho^{AB}) \leq \ell \leq (\text{rang}(\rho^{AB}))^2$ , usando la descomposición óptima, el ALL brinda una extensión clásica para la cual la dimensión del sistema auxiliar es  $d_{\bar{A}}^{ALL} := \dim \mathbf{C}^\ell = \ell$ , de modo que  $\text{rang}(\rho^{AB}) \leq d_{\bar{A}}^{ALL} \leq (\text{rang}(\rho^{AB}))^2$ . La extensión clásica óptima, por definición, mejora aquella de Li y Luo, en cuyo caso  $d_{\bar{A}}^{opt} < d_{\bar{A}}^{ALL}$ . La siguiente proposición establece una cota inferior general para la dimensión de las partes extendidas.

**Proposición 2.** *Sea  $\rho^{AB}$  separable en  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , de longitud  $\ell$ , y consideremos su extensión clásica  $\sigma^{\bar{A}AB}$  en  $(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^{\bar{A}}) \otimes \mathcal{H}^B$ , como en Definición 1. Luego, la dimensión del sistema auxiliar obedece la siguiente desigualdad:*

$$d_{\bar{A}} \geq \lceil f(d_A, d_B, \ell) \rceil \quad (3.13)$$

donde  $d_x := \dim \mathcal{H}^x$  y  $\lceil y \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | y \leq n\}$ . La función  $f(d_A, d_B, \ell)$  corresponde a la única raíz positiva del polinomio cuadrático  $P(x) := c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ , con  $c_2 := d_A^2$ ,  $c_1 := d_A(d_B^2 - 1)$  y  $c_0 := \ell(3 - 2d_A - 2d_B)$ .

*Demostración.* Sea  $\ell$  la longitud de  $\rho^{AB}$  (ver Ec. (3.11)), de modo que puede escribirse

$$\rho^{AB} = \sum_{k=1}^{\ell} p_k P_k^A \otimes P_k^B, \quad (3.14)$$

con  $\{P_k^A\}_{1 \leq k \leq \ell}$  y  $\{P_k^B\}_{1 \leq k \leq \ell}$  conjuntos de proyectores de rango uno sobre  $\mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^B$ , respectivamente. El número de parámetros independientes reales necesarios para determinar el estado es

$$\ell - 1 + \ell(2d_A + 2d_B - 4). \quad (3.15)$$

Este se obtiene como sigue. El conjunto  $\{p_k\}_{1 \leq k \leq \ell}$  con la condición  $\sum_k p_k = 1$  es determinado con  $\ell - 1$  cantidades. Para cada estado puro  $P_k^A$  se necesitan  $2d_A - 2$  parámetros reales. Análogamente para  $P_k^B$ . Dado el estado clásico  $\sigma^{\bar{A}AB}$ , podemos escribirlo como

$$\sigma^{\bar{A}AB} = \sum_{m=1}^{d_{\bar{A}A}} q_m \Pi_m^{\bar{A}A} \otimes \rho_m^B, \quad (3.16)$$



con  $\{\Pi_m^{\bar{A}A}\}$  una base de proyectores de rango uno en  $\mathcal{H}^{\bar{A}A}$ , y  $\{\rho_m^B\}$  un conjunto de estados en  $\mathcal{H}^B$ . El índice  $m$  varía entre 1 y  $d_{\bar{A}A} = d_A d_{\bar{A}}$ . De acuerdo con esto, el conjunto  $\{q_m\}$  da  $d_{\bar{A}A} - 1$  parámetros reales independientes. El conjunto  $\{\Pi_m^{\bar{A}A}\}$  da  $d_{\bar{A}A}(2d_{\bar{A}A} - 2)$  parámetros reales y es necesario descontar los  $d_{\bar{A}A}(d_{\bar{A}A} - 1)$  de las restricciones impuestas por las reglas de conmutación  $[\Pi_m^{\bar{A}A}, \Pi_n^{\bar{A}A}] = 0$ , con  $m > n$ . Notar que hay tan sólo  $\frac{1}{2}d_{\bar{A}A}(d_{\bar{A}A} - 1)$  reglas de conmutación independientes, pero cada ecuación compleja  $[\Pi_m^{\bar{A}A}, \Pi_n^{\bar{A}A}] = 0$  cuenta por dos parámetros reales. En conclusión,  $\{\Pi_m^{\bar{A}A}\}_{1 \leq m \leq d_{\bar{A}A}}$  posee  $d_{\bar{A}A}(d_{\bar{A}A} - 1)$  parámetros reales independientes. Otra forma de ver que  $d_{\bar{A}A}(d_{\bar{A}A} - 1)$  es el número correcto de parámetros reales independientes consiste en tomar  $\{\Pi_m^{\bar{A}A}\}$  como columnas de la matriz unitaria en  $\mathbb{C}^{d_{\bar{A}A} \times d_{\bar{A}A}}$ . Tal matriz posee  $d_{\bar{A}A}^2$  parámetros reales independientes, pero es necesario sustraer  $d_{\bar{A}A}$  fases arbitrarias, llegando al número apropiado.

Por otro lado, cada  $\rho_m^B$  es un estado arbitrario de  $B$  expresable como  $\rho_m^B = \sum_s \beta_s^{(m)} \Pi_s^{B(m)}$  y determinable por  $d_B - 1 + d_B(d_B - 1)$  parámetros reales independientes. Finalmente, el estado  $\sigma^{\bar{A}AB}$  necesita de

$$d_A^2 + (d_B^2 - 1)d_A - 1 \quad (3.17)$$

parámetros reales. El estado  $\sigma^{\bar{A}AB}$  requiere de un número de parámetros reales (Ec. (3.17)) igual o mayor al de  $\rho^{AB}$  (Ec. (3.15)). Así, obtenemos la cota propuesta para  $d_{\bar{A}}$ .  $\square$

Las siguientes observaciones vienen al caso.

- El mínimo de nuestra cota para  $d_{\bar{A}}$  (3.13) es siempre menor que  $\ell$ . Si  $d_{\bar{A}}^{\min} := \lceil f(d_A, d_B, \ell) \rceil$  es el mínimo de la Ec. (3.13) para valores dados de  $d_A, d_B$  y  $\ell$ , entonces  $d_{\bar{A}}^{\min} \leq d_{\bar{A}}^{\text{opt}} \leq \ell = d_{\bar{A}}^{\text{ALL}}$ , con  $d_{\bar{A}}^{\text{opt}}$  el mínimo teórico desconocido<sup>46</sup>.
- $f(d_A, d_B, \ell)$  crece monótonamente con  $\ell$ , para todo  $\ell \geq 1$  y  $d_A, d_B \geq 1$ . Así, la condición  $\text{rang}(\rho^{AB}) \leq \ell \leq (\text{rang}(\rho^{AB}))^2$  establece tanto una cota mínima como una cota máxima a aquella de la proposición,

$$\lceil f(d_A, d_B, r_{AB}) \rceil \leq d_{\bar{A}}^{\min} \leq \lceil f(d_A, d_B, r_{AB}^2) \rceil, \quad (3.18)$$

con  $r_{AB} \equiv \text{rang}(\rho^{AB})$ . Para estados de rango máximo,  $\text{rang}(\rho)^{AB} = d_A d_B$ , las cotas dependen de las dimensiones de las partes  $A$  y  $B$ . En particular, en el caso de tener dos cubits,

$$\ell = \text{máx} \{ \text{rang}(\rho^{AB}), \text{rang}((\rho^{AB})^{\text{T}_B}) \} \leq 4. \quad (3.19)$$

Por lo tanto, para la extensión de estados de dos cubits de rango máximo tenemos que  $d_{\bar{A}} \geq d_{\bar{A}}^{\min} = 2$ .

- Para estados arbitrarios de rango máximo,  $\lceil f(d_A, d_B, d_A d_B) \rceil$  y  $\lceil f(d_A, d_B, d_A^2 d_B^2) \rceil$  son los valores límite para  $d_{\bar{A}}^{\min}$ . Aquellos de  $d_{\bar{A}}^{\min}$  son siempre menores a aquellos obtenidos por el ALL (Cuadro 3.1 y Figura 3.2).

Cuadro 3.1: Dimensiones de los sistemas auxiliares necesarias para extender clásicamente estados bipartitos separables  $\rho^{AB}$  con  $d_A = d = d_B$  y rango máximo. 2da. columna: rango de valores prescritos por la Ec. (3.13). 3ra. columna: idem para las extensiones según el algoritmo de Li y Luo a partir de las descomposiciones óptimas de  $\rho^{AB}$ . \*Para  $d = 2$  apelamos al resultado de Sanpera y col. según el cual, para estos estados,  $\ell = 4$  [94].

$d$	$d_{\bar{A}}^{\min}$	$d_{\bar{A}}^{\text{ALL}}$
1	1	1
2*	2	4
3	[2,8]	[9,81]
4	[3,13]	[16,256]

<sup>46</sup> Notar que las dimensiones asociadas a las diferentes extensiones posibles guardan la siguiente relación de orden:  $d_{\bar{A}}^{\min} \leq d_{\bar{A}}^{\text{opt}} \leq d_{\bar{A}}^{\text{ALL}} \leq d_{\bar{A}}$

- Para sistemas de dimensión grande, consideremos el caso  $d_A = d_B = d$  con estados de rango máximo. De la expansión asintótica de (3.13) se deduce que

$$4 \lesssim d_A^{\min} \lesssim 2d^{3/2} \quad (d \rightarrow \infty), \quad (3.20)$$

observando que  $r_{AB} \leq \ell \leq r_{AB}^2$ . Para estos estados,  $d^2 \leq d_A^{ALL} = \ell \leq d^4$ .

- La proposición establece una cota inferior para la dimensión del sistema auxiliar para extender un estado separable a otro clásico-cuántico. Si quisiéramos extenderlo a otro clásico-clásico, deberíamos buscar estados de la forma  $\sigma^{\bar{A}AB\bar{B}} = \sum_{m,n} q_{mn} \Pi_m^{\bar{A}A} \otimes \Pi_n^{B\bar{B}}$ . El número de parámetros reales de éste está dado por: (a)  $d_{\bar{A}A} d_{B\bar{B}} - 1$  para  $\{q_{mn}\}$ , (b)  $d_{\bar{A}A}(d_{\bar{A}A} - 1)$  para  $\{\Pi_m^{\bar{A}A}\}$ , y (c)  $d_{B\bar{B}}(d_{B\bar{B}} - 1)$  para  $\{\Pi_n^{B\bar{B}}\}$ . Usando esto, las cotas para  $d_{\bar{A}}$  y  $d_{\bar{B}}$  se obtendrían de forma análoga al caso ya estudiado.

De las consideraciones anteriores se sigue que, aún cuando la extensión óptima es desconocida, las extensiones halladas por el ALL, a partir de la descomposición óptima del estado separable, resultan en estados que difieren del óptimo. A continuación, especializaremos el estudio al caso de dos cubits.

### Extensiones de estados separables de dos cubits

Analicemos ahora posibles extensiones clásicas para estados separables de dos cubits, con énfasis en los estados de máximo discord.

### EXTENSIONES EN EL ESQUEMA DE LI Y LUO

Con el fin de hallar los estados separables de máximo discord, revisemos la relación entre discord y entrelazamiento. Nosotros estamos interesados en aquellos estados cuando fijamos un cierto rango para su matriz densidad. En [40], Luo compara el discord con el entrelazamiento de formación para estados de Werner de dos cubits. Por otro lado, en [96], los autores muestran tal relación para estados de dos cubits arbitrarios generados aleatoriamente, y hallaron las familias paramétricas de estados que acotan, por debajo y por encima, la gráfica de discord vs. entrelazamiento. La Figura 3.3 reproduce la mencionada, computando numéricamente el discord de  $3 \times 10^6$  estados. La familia representada por la matriz densidad, en la base estándar<sup>47</sup>,

$$\rho_\beta := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1-\beta & 1-\beta & 0 \\ 0 & 1-\beta & 1-\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

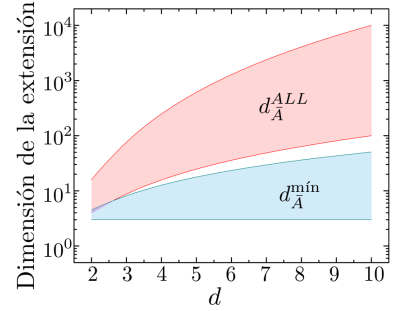


Figura 3.2: Cotas para las dimensiones de los sistemas auxiliares obtenidas por medio del ALL y la Proposición 2.

<sup>47</sup> Salvo que aclaremos lo contrario, las matrices densidad son expresadas en la base estándar.

con  $0 \leq \beta \leq 1$  da el borde inferior para cualquier valor de entrelazamiento. Por su parte, los estados

$$\rho_\alpha := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , dan el borde superior para valores de entrelazamiento entre 0 y 0,620. Para valores de entrelazamiento mayores, el límite está provisto por estados de Werner (ver Figura 3.3),

$$\rho_\eta^W := (1-\eta) \frac{\mathbb{1}}{4} + \eta |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (3.23)$$

con  $-1/3 \leq \eta \leq 1$  y  $|\psi\rangle := (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ .

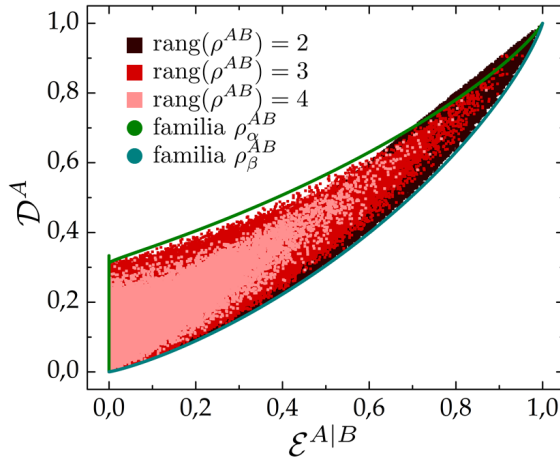


Figura 3.3: Discord vs. entrelazamiento de formación, para estados bipartitos en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Los puntos corresponden a  $3 \times 10^6$  estados generados aleatoriamente de acuerdo al código detallado en el Apéndice, pág. 121. Reportamos resultados para  $1 \times 10^6$  estados de rango 2,  $1 \times 10^6$  de rango 3, y  $1 \times 10^6$  de rango 4. Las curvas verde y azul corresponden, respectivamente, a las familias  $\rho_\alpha$  y  $\rho_\beta$ .

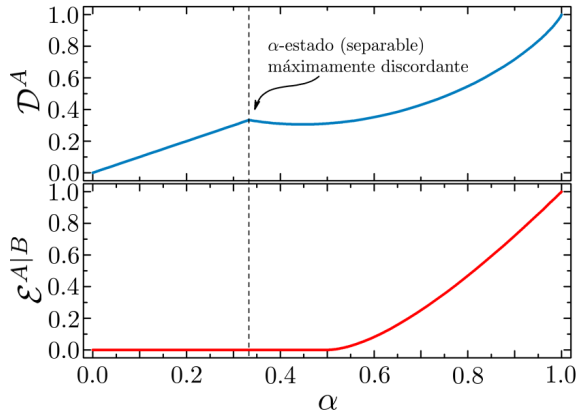
Todas estas familias representan subconjuntos de los llamados estados con marginales máximamente mezclados, para los cuales el cálculo del discord puede hacerse analíticamente. Los autores de [96] calculan el discord de los estados  $\rho_\alpha$ , hallando

$$\mathcal{D}^A(\rho_\alpha) = (1-\alpha) \log(1-\alpha) + \alpha \log(\alpha) + (1+\alpha) - \frac{1-\bar{\alpha}}{2} \log(1-\bar{\alpha}) - \frac{1+\bar{\alpha}}{2} \log(1+\bar{\alpha}), \quad (3.24)$$

con  $\bar{\alpha} := \max\{|\alpha|, |2\alpha-1|\}$ . La concurrencia de estos estados es  $C(\alpha) = \max\{0, 2\alpha-1\}$ . Los estados  $\alpha$  son separables cuando  $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ . De estos  $\rho_\alpha$  separables, aquel con máximo discord corresponde a  $\alpha = \frac{1}{3}$ , en cuyo caso  $\mathcal{D}^A(\rho_\alpha)|_{\alpha=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$  (Figura 3.4). Vale notar que la optimización se puede realizar analíticamente (ver Ec. (3.24)).

Por lo tanto, el estado

$$\rho_{\text{máx}}^{\ell=4} := \rho_\alpha|_{\alpha=\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$


 Figura 3.4: Discord y entrelazamiento de formación para estados de la familia  $\rho_\alpha$ .

es representativo de los estados separables de máximo discord en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . En este caso,  $\text{rang}(\rho_{\text{máx}}) = 3$  y  $\text{rang}(\rho_{\text{máx}}^{\text{T}_B}) = 4$ , por lo que esperamos hallar una descomposición separable del tipo (3.11), con  $\ell = 4$ .

Luego,  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  puede extenderse clásicamente vía el ALL con un sistema auxiliar de dimensión  $d_A^{\text{ALL}} = 4$ . Por otro lado, es posible hallar extensiones clásica de menor dimensión cuyas reducciones separables alcancen un grado de discord cercano al máximo. Por ejemplo, el estado

$$\rho_{\text{máx}}^{\ell=3} := \rho_\alpha|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

posee un discord igual al 93% del discord del estado  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  que puede extenderse clásicamente con un sistema auxiliar de dimensión  $d_A^{\text{ALL}} = 3$ . De forma similar, el estado

$$\rho_{\text{máx}}^{\ell=2} := \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |+\rangle\langle +| \otimes |1\rangle\langle 1|), \quad (3.27)$$

el cual puede extenderse clásicamente con un sistema auxiliar de dimensión  $d_A^{\text{ALL}} = 2$ , exhibe un discord igual al 61% de aquel exhibido por  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  (ver Cuadro 3.2).

$\ell (= d_A^{\text{ALL}})$	$\mathcal{D}^A$
4	$\frac{1}{3} \approx 0,3333$
3	$(\frac{3}{4}) \log(\frac{4}{3}) \approx 0,3113$
2	$2 - (\frac{\sqrt{2}}{2}) \log(3 + 2\sqrt{2}) \approx 0,2018$
1	0

Para estudiar analíticamente posibles extensiones clásicas de los estados separables, debemos primero estudiar sus descomposiciones separables óptimas. A continuación, haremos eso mismo valiéndonos del método descrito por Sanpera y col. [94]<sup>48</sup>.

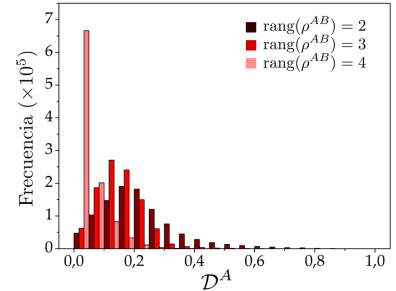
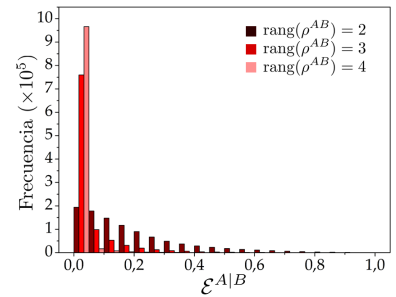


Figura 3.5: Histogramas de entrelazamiento y discord de los estados generados aleatoriamente.

 Cuadro 3.2: Discord para estados máximamente discordantes en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  de acuerdo a sus longitudes.

<sup>48</sup> En el Apéndice, pág. 125, brindamos un esquema resumido del método de cálculo de la descomposición separable de menor longitud.

*Descomposición separable de  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=3}$ .*— Para  $\ell = 3$ , el máximo discord es 0,3113, valor alcanzado por el estado  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=3}$  de la Ec. (3.26). Es fácil verificar que

$$\rho_{\text{máx}}^{\ell=3} \cong \frac{1}{4} (P_0 \otimes P_0 + P_1 \otimes P_1 + P_+ \otimes P_+ + P_- \otimes P_-), \quad (3.28)$$

con  $\{P_j\}_{j=0,1,+,-,r,l}$  los autoproyectores de  $\sigma_z$  y  $\sigma_x$ , respectivamente. Con ‘ $\cong$ ’ indicamos equivalencia a menos de una transformación unitaria local. La Ec. (3.28) es una posible descomposición separable, pero no la óptima. Para hallar la descomposición óptima de un dado separable bipartito procederemos como en [94]. Denotando

$$|\theta, \phi\rangle := \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \exp(i\phi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (3.29)$$

a un estado puro arbitrario en  $\mathbb{C}^2$ , hallamos que el conjunto de estados puros  $\mathcal{W} = \{|0,0\rangle, |\frac{2\pi}{3}, 0\rangle, |\frac{2\pi}{3}, \pi\rangle\}$  define la descomposición óptima

$$\rho_{\text{máx}}^{\ell=3} \cong \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 W_k \otimes W_k \quad (3.30)$$

con  $W_k = |w_k\rangle \langle w_k|$  y  $|w_k\rangle \in \mathcal{W}$ . A continuación, repetimos el proceso para  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$ .

*Descomposición separable de  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$ .*— Es fácil ver que  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4} \cong \rho_\alpha$ , con  $\alpha = \frac{1}{3}$ , y que puede descomponerse como

$$\rho_{\text{máx}}^{\ell=4} \cong \frac{1}{6} (P_0 \otimes P_0 + P_1 \otimes P_1 + P_+ \otimes P_+ + P_- \otimes P_- + P_r \otimes P_r + P_l \otimes P_l), \quad (3.31)$$

con  $\{P_j\}_{j=0,1,+,-,r,l}$  los autoproyectores de  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , respectivamente. Busquemos ahora la descomposición óptima. Por simplicidad, en lugar de  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  consideremos

$$\tilde{\rho}_{\text{máx}} := \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

obtenido desde  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  mediante una transformación local unitaria (en  $B$ ), la cual no altera el discord, consistente de un *swap*,

$$U_{\text{swap}}^B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

tal que  $\tilde{\rho}_{\text{máx}} = U \rho_{\text{máx}}^{\ell=4} U^\dagger$ , con  $U := \mathbb{1}^A \otimes U_{\text{swap}}^B$  y  $\mathbb{1}^A$  la identidad en  $\mathcal{H}^A$ .

Definiendo  $\mathcal{Z} = \{|0,0\rangle, |\theta^*, 0\rangle, |\theta^*, \frac{2\pi}{3}\rangle, |\theta^*, \frac{4\pi}{3}\rangle\}$ , con  $\theta^* = \arccos(-\frac{1}{3})$ , la descomposición óptima de  $\tilde{\rho}_{\text{máx}}$  es

$$\tilde{\rho}_{\text{máx}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 Z_k \otimes Z_k, \quad (3.34)$$

con  $Z_k = |z_k\rangle \langle z_k|$  y  $|z_k\rangle \in \mathcal{Z}$ .

*Observación.* Todos los estados de la descomposición exhiben idéntico solapamiento mutuo, es decir que  $|\langle \theta_k, \phi_k | \theta_{k'}, \phi_{k'} \rangle|^2 = c, \forall k \neq k'$  ( $c = 1/3$ ). En términos de la parametrización en la esfera de Bloch, donde  $r_k = (\sin(\theta_k) \cos(\phi_k), \sin(\theta_k) \sin(\phi_k), \cos(\theta_k))$  es el vector posición asociado a  $|\theta_k, \phi_k\rangle$ , el ángulo entre dos de estos estados es siempre  $2\pi/3$ . Así, los estados puros de la descomposición anterior de  $\tilde{\rho}_{\text{máx}}$  pueden asociarse a los cuatro vértices del 3-simplex regular en un espacio tridimensional (un tetraedro). Como se muestra en la Ec. (3.34), ambos subsistemas poseen las mismas componentes puras. Por lo tanto, el estado de dos cubits de máximo discord puede expresarse como la combinación convexa, a pesos iguales, de 4 estados productos simétricos ante el intercambio de las partes, dados por los 4 estados puros de máxima distinguibilidad mutua. Dada la simetría de este estado, cualquier medida proyectiva da el mismo valor de discord.

#### EXTENSIONES CLÁSICAS ÓPTIMAS

Como sugiere el Cuadro 3.1, es posible mejorar los resultados del ALL en lo que refiere a extender clásicamente estados separables en el espacio de menor dimensión posible. Cabe notarse en la Figura 3.6 que es posible extender clásicamente al estado  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  con un único cutrit, mientras que el ALL precisa de dos cubits. De forma similar, podemos extender  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=3}$  con un solo cubit, en comparación con el cutrit requerido por el ALL.

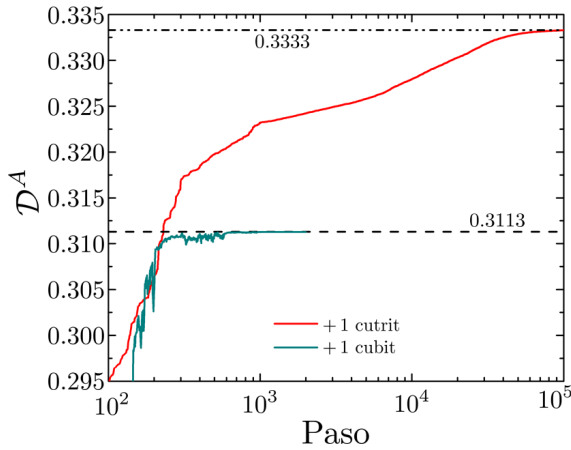
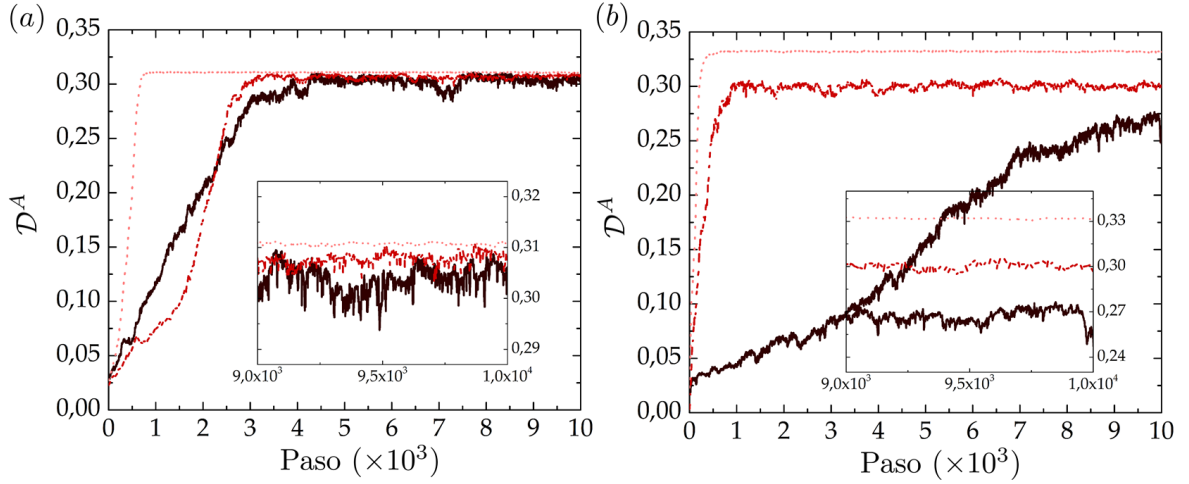


Figura 3.6: Con el fin de extender el estado máximamente discordante de dos cubits,  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$ , el algoritmo de Li y Luo emplea un sistema auxiliar en  $\mathbb{C}^4$ . En el esquema óptimo, es posible hallar una extensión compatible en (a lo sumo)  $\mathbb{C}^3$ .

Estas nuevas extensiones fueron obtenidas numéricamente mediante el método de Monte Carlo, partiendo de estados clásicos sobre  $\mathbb{C}^{d_{\bar{A}} \times 2} \otimes \mathbb{C}^2$  y buscando reducciones de máximo discord en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Comenzamos construyendo un estado clásico  $\sigma^{\bar{A}AB} = \sum_k p_k \Pi_k^{\bar{A}A} \otimes \rho_k^B$ , con  $\{\Pi_k^{\bar{A}A}\}_{1 \leq k \leq d_{\bar{A}A}}$  proyectores ortonormales de  $\mathbb{C}^{d_{\bar{A}A}}$ , extraídos de las columnas de una matriz unitaria  $U_{\bar{A}A} \in \mathbb{C}^{d_{\bar{A}A} \times d_{\bar{A}A}}$ . Los cuatro estados  $\rho_k^B$  son matrices densidad arbitrarias en  $\mathbb{C}^2$ , y  $\{p_k\}$  una distribución de probabilidad. Dada la simetría prevalente en los estados máximamente discordantes de rango dado, elegimos  $\rho_k^B = \rho_k^A =$



$\text{Tr}_{\bar{A}} \Pi_k^{\bar{A}A}$  y  $p_k = \frac{1}{d_{\bar{A}A}}$  para todo  $k$ , de modo que la única libertad en la determinación del estado clásico proviene de la matriz unitaria  $U_{\bar{A}A}$ . Ese es el único elemento que variamos, infinitesimalmente, en cada paso del algoritmo, de modo que los cálculos se simplifican considerablemente.

La Figura 3.7 muestra nuestros resultados. Los estados separables máximamente discordantes, con  $\mathcal{D}^A = 0,3333$ , surgen como reducciones de estados clásicos con<sup>49</sup>  $d_{\bar{A}} = 3$ . Para  $d_{\bar{A}} = 2$ , las reducciones alcanzan un discord de  $\mathcal{D}^A = 0,3113$ . Las columnas de la matriz unitaria

$$U_{\bar{A}}^{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 0,5288 - 0,2428i & -0,0241 + 0,0541i & 0,2730 - 0,0396i & 0,5695 + 0,3689i & -0,1512 - 0,1230i & 0,2672 - 0,1097i \\ -0,0179 + 0,2237i & 0,1392 + 0,1287i & 0,1575 - 0,8817i & -0,2307 + 0,1243i & -0,1110 - 0,0388i & 0,1259 - 0,1150i \\ -0,0670 + 0,1750i & -0,0525 - 0,0246i & 0,0387 + 0,2783i & -0,2118 + 0,0457i & -0,4907 + 0,1406i & 0,1647 - 0,7403i \\ 0,4663 + 0,4930i & 0,0701 + 0,2679i & -0,0392 + 0,0417i & 0,1412 - 0,5644i & 0,2635 + 0,1158i & 0,1552 - 0,1193i \\ -0,2532 + 0,0657i & 0,8938 + 0,0569i & 0,0919 + 0,1655i & 0,1642 + 0,1537i & 0,1726 + 0,0124i & 0,0627 - 0,0954i \\ -0,2169 - 0,0076i & -0,2708 + 0,0706i & -0,0449 - 0,0414i & 0,0949 + 0,1610i & 0,6485 - 0,3928i & -0,0244 - 0,5103i \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

determinan, en la base estándar, la base  $\{\Pi_k^{\bar{A}A}\}_{1 \leq k \leq 6}$  del estado clásico  $\sigma_{\text{opt}}^{\bar{A}AB}$  tal que  $\text{Tr}_{\bar{A}} \sigma_{\text{opt}}^{\bar{A}AB}$  alcanza el máximo discord de  $\mathcal{D}^A = 0,3333$ . Así, estamos hallando una extensión clásica en  $\mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^2$  de  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$ , mejorando lo esperado según el ALL. ¿Por qué esta extensión no es asequible por el método de Li y Luo? Para responderlo, basta con notar que  $\ell = 4$ , de modo que el ALL demanda un sistema auxiliar en  $\mathbb{C}^4$ . Aunque no lo podemos probar analíticamente, los resultados numéricos nos alientan a conjeturar que  $\sigma_{\text{opt}}^{\bar{A}AB}$  es efectivamente la extensión clásica óptima de  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  (ver Figura 3.8).

*Observación.* Existe una diferencia notable entre la extensión óptima y la del ALL, que permite entender mejor por qué la óptima no es alcanzable por el ALL. En la extensión óptima, el sistema auxiliar se halla correlacionado únicamente con el subsistema  $AB$  completo pero no individualmente con  $A$  o  $B$ . En otras palabras,  $\mathcal{I}^{\bar{A}|A} = 0$ ,  $\mathcal{I}^{\bar{A}|B} = 0$  pero  $\mathcal{I}^{\bar{A}|AB} = 0,585$ . En cambio, para la extensión del ALL, tenemos que  $\mathcal{I}^{\bar{A}|A} = 1$ ,  $\mathcal{I}^{\bar{A}|B} = 1$  y  $\mathcal{I}^{\bar{A}|AB} = 1,585$ .

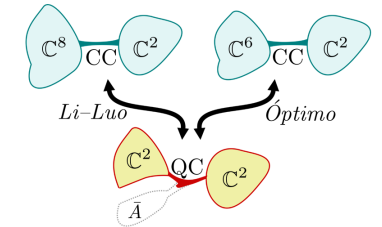


Figura 3.8: Comparación entre las distintas extensiones clásicas de  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$ .

Figura 3.7: Búsqueda de los estados máximamente discordantes de dos cubits, vía reducciones de estados clásicamente correlacionados, usando el método de Monte Carlo. Cada línea corresponde a una temperatura de simulación distinta. (a) Partiendo de estados clásicos en  $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2$  hallamos reducciones cuyo máximo discord es  $\mathcal{D}^A = 0,3113$ . (b) Con estados clásicos en  $\mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^2$ , hallamos reducciones con un discord máximo de  $\mathcal{D}^A = 0,3333$ .

<sup>49</sup> Comparar con las cotas obtenidas en el Cuadro 3.1, donde claramente se tiene que  $d_{\bar{A}}^{\text{min}} < 3 < d_{\bar{A}}^{\text{ALL}}$

### 3.3 Estados separables máximamente discordantes

Los resultados previos en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  sugieren que los *estados separables máximamente discordantes (ESMD)* son de rango cercano al máximo. Podemos preguntarnos si las simetrías asociadas a la construcción de los ESMD de dos cubits son susceptibles de generalización a espacios de mayor dimensión. En este apartado, discutiremos esta interrogante y propondremos alternativas para responderla.

Las Ecs. (3.28)–(3.31) indican que los estados ESMD de dos cubits pueden construirse mezclando uniformemente estados correspondientes a diferentes bases mutuamente no sesgadas. De hecho,  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=3}$  se construye mezclando las dos MUBs de  $\sigma_z$  y  $\sigma_x$ , y  $\rho_{\text{máx}}^{\ell=4}$  es erigido mezclando las tres posibles MUBs en  $\mathbb{C}^2$ . ¿Cómo podríamos generalizar esto para casos de mayor dimensión?

Para estados  $d \times d$ -dimensionales, si  $\{P_k^i\}_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq k \leq d+1}}$  es el conjunto de proyectores que determina las  $d+1$  MUBs —ver Ec. (1.14), pág. 22— de una de las partes, el estado

$$\rho_{\text{máx}}^d := \frac{1}{d(d+1)} \sum_{k=1}^{d+1} \sum_{i=1}^d P_k^i \otimes P_k^i. \quad (3.36)$$

es un candidato plausible, definido naturalmente desde la observación previa.

Otra posibilidad para buscar formas generales de estados máximamente discordantes de mayor dimensión surge de notar que los proyectores de rango uno de la base  $\{Z_k\}_{1 \leq k \leq d^2}$  (Ec. (3.34)) constituyen una SIC-POVM en  $\mathbb{C}^2$  —ver Ec. (1.13), pág. 21—. De hecho, tomando  $E_k := Z_k/d$  y  $d = 2$  tenemos que

$$\sum_{k=1}^{d^2} E_k = \mathbb{1}, \quad (3.37)$$

y

$$\text{Tr}(E_k E_{k'}) = \frac{1}{d^2(d+1)}, k \neq k'. \quad (3.38)$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d^2} Z_k = \mathbb{1}, \quad (3.39)$$

y

$$\text{Tr}(Z_k Z_{k'}) = \frac{1}{d+1}, k \neq k'. \quad (3.40)$$

En el caso  $d$ -dimensional, un SIC-POVM es un conjunto  $\{Z_k\}_{1 \leq k \leq d^2}$  de proyectores de rango uno que obedecen las relaciones (3.39)–(3.40). Una generalización trivial de los ESMD para dos cubits estaría dada por el estado

$$\tilde{\rho}_{\text{máx}}^d := \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{d^2} Z_k \otimes Z_k. \quad (3.41)$$



*Observación.* La existencia de SIC-POVMs en  $\mathbb{C}^d$  no está demostrada para  $d$  arbitrario, aunque sí lo está para  $d$  primo o potencia de primo. Nuestro problema es equivalente al de hallar  $d^2$  rayos separados por ángulos iguales en  $\mathbb{C}^d$  [97, 98], a su vez directamente ligado al problema de existencia de  $d + 1$  MUBs en  $\mathbb{C}^d$ , o con la existencia de observables complementarios [99, 100]. Alternativamente, nuestro problema puede entenderse como el de embeber el simplex  $(d^2-1)$ -dimensional generado por  $d^2$  estados puros en el convexo de estados cuántico, de modo que todos los estados puros exhiban el mismo solapamiento mutuo [101]. Ese es el modo en el cual interpretamos el tetraedro formado por las componentes de  $\tilde{\rho}_{\text{máx}}$  en la Ec. (3.34). Vale recordar que una SIC-POVM puede verse como el POVM que mejor se aproxima a una base ortonormal en el espacio de estados [102]. Es interesante que recientemente algunos autores hayan introducido una medida de correlaciones cuánticas que involucra la adquisición óptima de información sobre todas las MUBs [103].

### Correlaciones cuánticas genuinas

Algunos trabajos recientes muestran que es posible obtener estados con discord no nulo efectuando operaciones locales sobre estados de discord nulo [87, 88]. En esos trabajos, se argumenta de esa forma que el discord puede entenderse como un recurso *necesario*, aunque no suficiente, para tener correlaciones cuánticas *genuinas*. Una manera de señalar a los estados con correlaciones cuánticas genuinas es a través de sus descomposiciones en estados producto de bases locales [29]. Si  $\{A_m\}$  y  $\{B_n\}$  son bases asociadas a los operadores hermíticos en  $\mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^B$ , respectivamente, los estados compuestos  $\sigma^{AB}$  pueden descomponerse como

$$\sigma^{AB} = \sum_{m=1}^{d_A^2} \sum_{n=1}^{d_B^2} r_{mn} A_m \otimes B_n, \quad (3.42)$$

con  $d_A$  ( $d_B$ ) la dimensión de  $\mathcal{H}^A$  ( $\mathcal{H}^B$ ). La *matriz de correlación*  $R := (r_{mn})$  puede reexpresarse vía la descomposición en valores singulares. Si  $L_R := \text{rang}(R)$  es su rango y  $\{s_l\}$  el conjunto de sus valores singulares,

$$\sigma^{AB} := \sum_{l=1}^{L_R} s_l F_l \otimes G_l, \quad (3.43)$$

donde  $F_l$  y  $G_l$  son los elementos de  $A$  y  $B$  en la nueva base. Si las componentes son puras, entonces  $L_R \leq (\dim \mathcal{H}^{AB})^2$  (Cf. Ec. (3.11)). De otro modo (permitiendo estados mezcla) tenemos que  $L_R \leq d_{\text{mín}}^2$ , donde  $d_{\text{mín}} := \min\{\dim \mathcal{H}^A, \dim \mathcal{H}^B\}$  corresponde al subsistema de menor dimensión. Para estados clásicos,  $L_R$  está acotado superiormente por la dimensión de los subsistemas, es decir,  $L_R \leq d_{\text{mín}}$ . Existen estados con discord no nulo tales que  $L_R \leq d_{\text{mín}}$ , pero puede demostrarse que éste es generable por operaciones locales partiendo de un estado clásico, por lo que puede argumentarse que no constituye un recurso cuántico genuino [87, 88]. Los estados con  $L_R > d_{\text{mín}}$

poseen discord y su matriz de correlación no es compatible con aquella de los estados clásicos. Estos últimos estados son genuinamente cuánticos (con respecto a sus correlaciones). En resumen,  $L_R$  es el indicador de correlaciones cuánticas que no pueden obtenerse desde estados clásicos con operaciones locales.

Por ejemplo, para  $\tilde{\rho}_{\text{máx}}$  la Ec. (3.34) representa la descomposición (3.43), con  $\{|\theta_l, \phi_l\rangle\}_{1 \leq l \leq 4}$  la base de operadores hermíticos de  $\mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^B$ , y  $s_l = \frac{1}{4} \forall l$ . Ahí, la matriz de correlación posee rango 4. Además,  $d_{\text{mín}} = \dim \mathbb{C}^2 = 2$ . Por lo tanto,  $L_R > d_{\text{mín}}$  y las correlaciones cuánticas son genuinas en el sentido anterior. En cambio, es fácil ver que para el estado de la Ec. (3.27) la matriz de correlación es 2, y su discord puede generarse localmente. Como corolario, los estados de dos cubits bipartitos con correlaciones cuánticas genuinas son aquellos con  $L_R > 2$ . En el Cuadro 3.2, solo los estados con  $\ell > 2$  serían relevantes en ese aspecto.

Dada nuestra descomposición (3.41) de  $\rho_{\text{máx}}^d$ , dado que los  $\{M_k\}$  son linealmente independientes, el número de términos indica automáticamente el rango de la matriz de correlación pertinente. Tenemos que  $\text{rang}(R) = d^2 > d_{\text{mín}}$  [104], ya que  $d_{\text{mín}} = \dim \mathbb{C}^d = d$ . Luego, para tales estados el discord no es espurio en el sentido recién discutido. En otras palabras, para toda dimensión, los estados separables definidos vía la Ec. (3.41) constituyen recursos cuánticos genuinos.

### 3.4 Resumen del capítulo 3

- Demostramos que la existencia de correlaciones cuánticas genuinas en estados separables se relaciona con la posibilidad de extenderlos clásicamente en espacios de mayor dimensión.
- Introdujimos la noción de extensión clásica óptima para estados separables, y mostramos que el algoritmo anticipado por Li y Luo para hallar ese tipo de extensiones puede ser, en general, mejorado.
- Encontramos que el máximo discord en estados separables está vinculado con la dimensionalidad de su extensión clásica óptima.
- Probamos una cota inferior para la dimensión del sistema auxiliar asociada a la extensión clásica óptima, dada en función de las dimensiones de las partes y el rango de la matriz densidad.
- Para estados separables de dos cubits, encontramos, analíticamente, diferentes extensiones clásicas para los casos de máximo discord. En particular, mostramos que un único cubit es suficiente para extender clásicamente a los estados máximamente discordantes. En base a simulaciones numéricas, conjeturamos que la extensión hallada es, de hecho, la óptima.

- Nuestros resultados para sistemas de baja dimensión sugieren cierta forma acerca de la estructura de los estados separables máximamente discordantes. En ese sentido, propusimos posibles caminos para generalizar estos resultados a casos de dimensión arbitraria, basados en la observación de interesantes vínculos entre estos estados y las nociones de bases mutuamente no sesgadas y SIC-POVMs.



## 4 CORRELACIONES CUÁNTICAS Y CONDICIONES DE LOCALIDAD

*Este capítulo está mayormente basado en los resultados publicados en Guido Bellomo, Angel Plastino y Angel R Plastino. “Quantumness and the role of locality on quantum correlations”. En: Physical Review A 93.6 (2016), pág. 062322.*

### 4.1 Localidad y subsistemas en sistemas compuestos

Las correlaciones cuánticas de un sistema físico son usualmente estudiadas con respecto a una descomposición única y fija del sistema en subsistemas, sin explotar completamente la rica estructura del espacio de estados. En este apartado, mostraremos variados ejemplos en los cuales la consideración de diferentes descomposiciones de los sistemas físicos potencia los recursos cuánticos y da cuenta de una definición más flexible de las medidas de cuantificación. En ese sentido, brindaremos una nueva perspectiva acerca de cómo acceder al hecho de que las operaciones locales juegan un rol clave en las medidas generales de cuantificación más allá del entrelazamiento —como las de tipo discord—. Propondremos una familia de medidas para cuantificar la cuantificación máxima de estados cuánticos. Para aquellas basadas en el discord, presentaremos algunos resultados analíticos y numéricos para estados  $2 \times d$  dimensionales. Aplicando nuestra definición a estados bipartitos de baja dimensión, mostraremos que los resultados para estados separables y entrelazados exhiben comportamientos diferentes a aquellos asociados a las medidas usuales de correlaciones cuánticas. También mostraremos que existe un vínculo entre nuestra propuesta y el criterio antes definido por Dakić, Vedral and Brukner basado en el rango de la matriz de correlación.

Avances físicos recientes, tecnológicos y teóricos, muestran que la computación cuántica ya no es una idealización (ver Refs. [73, 105-111] y las referencias en ella). Las novedades en ese campo traerían mejoras significativas en la eficiencia del procesamiento informático, y el ingrediente fundamental involucrado lo constituyen las correlaciones cuánticas, aquellas no implementables mediante sistemas

clásicos. Así, el estudio de las correlaciones cuánticas ha sido uno de los temas más perseguidos de la física cuántica durante la última década (ver, por ej., las excelentes revisiones de los Horodecki [79] y Modi y col. [26]). El entrelazamiento y el discord son dos de las familias de medidas más estudiadas, ambas relacionadas con la forma en que el estado de un sistema puede descomponerse como mezcla de estados producto. Un estado no entrelazado (separable)  $\rho_{sep}^{AB}$  sobre  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , con respecto a la bipartición  $A|B$ , puede expresarse como combinación convexa de estados producto, es decir,  $\rho_{sep}^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$ , con  $p_k \geq 0$  y  $\sum_k p_k = 1$ . Por su parte, un estado clásicamente correlacionado  $\rho_{clas}^{AB}$  con respecto a la misma bipartición, puede escribirse como mezcla de proyectores locales ortogonales, es decir,  $\rho_{clas}^{AB} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle \langle i|^A \otimes |j\rangle \langle j|^B$ , donde  $p_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_{ij} p_{ij} = 1$  y  $\langle i|i'\rangle = \delta_{ii'}$ , con  $0 \leq i \leq \dim(\mathcal{H}^{A(B)})$ . En otras palabras,  $\rho_{clas}^{AB}$  es diagonal en una base producto  $\{|i\rangle^A \otimes |j\rangle^B\}$ . Un estado que no es clásicamente correlacionado, es cuánticamente correlacionado.

¿Cuál es la principal diferencia entre los estados no correlacionados (estados producto),  $\rho_{prod}^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$ , y los estados clásicamente correlacionados (como  $\rho_{clas}^{AB}$  definido más arriba), con respecto a sus capacidades cuánticas? Podríamos sospechar que los estados clásicos son tan inútiles como los no correlacionados cuando se los requiere para tareas de procesamiento de información en que los recursos cuánticos son necesarios. Sin embargo, *eso no es cierto*. Supongamos que tenemos un sistema en el estado  $\rho_{clas}^{AB}$  y acceso a otros grados de libertad locales de sistemas auxiliares (por ej., del entorno), es decir que estamos en un esquema *sistema + entorno* en el estado  $\rho^{ext} = \eta^{\bar{A}} \otimes \rho_{clas}^{AB} \otimes \eta^{\bar{B}}$ , donde  $\eta^{\bar{A}}$  ( $\eta^{\bar{B}}$ ) es el estado de los grados de libertad del entorno de  $A$  ( $B$ ). *Ahora, es fácil observar que existen observables locales con respecto a los cuales el sistema está en un estado cuánticamente correlacionado*. Basta notar que  $\rho^{A'B'} = \text{Tr}_{env} U \rho^{ext} U^\dagger$  es, en general, cuánticamente correlacionado con respecto a  $A'|B'$ , donde ‘env’ denota los grados de libertad del entorno y  $U$  denota una operación local unitaria (LU) que respeta la bipartición, es decir,  $U = U^{\bar{A}\bar{A}} \otimes U^{B\bar{B}}$ , y da lugar a la “inspección” de observables locales.

Considerar diferentes observables de un mismo sistema nos provee descripciones alternativas, y las correlaciones cuánticas son relativas a tales elecciones de observables. Zanardi [112] fue el primero en notar este efecto del carácter relativo vis-a-vis el entrelazamiento cuántico de estados de muchos cubits y propuso una formalización del mismo bajo un esquema algebraico general [52]. Más tarde, Barnum y col. [113] brindaron una noción de entrelazamiento dependiente de la partición en subsistemas. Harshmann y Ranade [114], por su parte, probaron que todos los estados puros en espacios de Hilbert de dimensión finita (y sin una estructura prescripta) son equivalentes en lo que a recursos de entrelazamiento se refiere, en el caso ideal de que uno cuente con acceso y control completos sobre los observables (ver también Refs. [115, 116] para presentaciones alternativas

de estos resultados). Dado que clásicamente correlacionado implica separable, y dado que la cuestión de separabilidad es relativa a los observables preferidos (aquellos que determinan los subsistemas locales), la cuestión de las correlaciones en estados clásicos se torna relativa también. Vale notarse que estas ideas han sido aplicadas satisfactoriamente, por ejemplo, a la investigación de transiciones de fase cuánticas [117-119] y entrelazamiento en sistemas de partículas indistinguibles [120-124].

En este capítulo, nos enfocaremos en la situación no tan estudiada de estados mezcla bajo una restricción de localidad: permitimos únicamente operaciones *locales* unitarias (sobre un espacio de Hilbert aumentado) con el fin de explorar los subespacios de observables de cada subsistema local. En el caso de estados puros, las operaciones unitarias *globales* inducen una equivalencia en cuanto a las correlaciones cuánticas (que en ese caso son de entrelazamiento). Como es esperable, mezcla y localidad imponen ciertas limitaciones en el monto de correlaciones cuánticas o cuantidad alcanzables cuando consideremos el carácter relativo mencionado (ver más adelante para una discusión sobre el rol de la pureza en medidas de tipo discord bajo transformaciones unitarias globales).

Adoptaremos una distinción entre *correlaciones cuánticas* y *cuantidad*, como surge del trabajo seminal de Ollivier y Zurek [35], quienes acuñaron esa terminología al introducir las medidas de discord como aquellas que caracterizan la cuantidad de las correlaciones, y no el monto de correlaciones cuánticas *per se*. Esta distinción está ligada a discusiones posteriores brindadas por Giorgi y col. en términos de correlaciones cuánticas genuinas/no-genuinas [72] (ver también Ref. [87]).

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 4.2 discutiremos el núcleo de este apartado, es decir la forma en que las correlaciones cuánticas generales dependen de la descomposición en subsistemas de un dado sistema cuántico. En la sección 4.3 formularemos una propuesta con el fin de cuantificar el efecto mencionado desde un punto de vista de la teoría de la información, a la cual llamaremos *cuantidad potencial*. Demostraremos varias propiedades interesantes que cumplen esas medidas, mostrando su adecuación como medidas confiables de cuantidad. Finalmente, en la sección 4.4 especializaremos el estudio a correlaciones de tipo discord, presentando algunos resultados analíticos para estados  $2 \times d$  dimensionales y exhibiendo algunas de sus peculiaridades en sistemas de baja dimensión.

## 4.2 Cuanticidad y subsistemas

Tomemos un ejemplo concreto. Comenzamos con el estado clásico de dos cubits  $\rho_{clas}^{AB} = p |0\rangle \langle 0|^A \otimes |0\rangle \langle 0|^B + (1-p) |1\rangle \langle 1|^A \otimes |1\rangle \langle 1|^B$ , con  $0 \leq p \leq 1$ , donde  $\{|i\rangle\}_{i=0,1}$  es la base estándar. Supongamos que tenemos acceso a dos cubits auxiliares, localizados uno en cada parte, de forma que el estado extendido es  $\rho^{ext} = |0\rangle \langle 0|^{\bar{A}} \otimes \rho_{clas}^{AB} \otimes |0\rangle \langle 0|^{\bar{B}}$ . Cualquier operación local unitaria,  $U^{\bar{A}\bar{A}} \otimes U^{\bar{B}\bar{B}}$ , representa diferentes particiones de los subsistemas locales  $\bar{A}|A$  y  $\bar{B}|B$  en nuevos subsistemas  $\bar{A}'|A'$  y  $\bar{B}'|B'$  (ver Figura 4.1). Por ejemplo, si  $U^{\bar{A}\bar{A}} = U_{cH}U_S = (U^{\bar{B}\bar{B}})^\dagger$ , donde  $U_{cH}$  representa una compuerta controlada de Hadamard y  $U_S$  una compuerta *swap*, el estado reducido transformado es  $\rho^{A'B'} = p |0\rangle \langle 0|^A \otimes |0\rangle \langle 0|^B + (1-p) |+\rangle \langle +|^A \otimes |+\rangle \langle +|^B$ , donde  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ . El nuevo estado,  $\rho^{A'B'}$ , no es clásicamente correlacionado. Por lo tanto, hemos revelado cierta cuanticidad escondida o “potencial” de  $\rho_{clas}^{AB}$ , tan sólo apelando a transformaciones sobre los grados de libertad locales. Esto no es posible si el estado es no correlacionado: para  $\rho_{prod}^{AB}$ , es directo mostrar que el mismo procedimiento nos depara un nuevo estado no correlacionado,  $\rho_{prod}^{A'B'}$ . Estos resultados distinguen claramente  $\rho_{clas}^{AB}$  de  $\rho_{prod}^{AB}$  en lo que respecta a sus capacidades de procesamiento de información cuántica. Esta característica vale para todo estado no producto (es decir, correlacionado): si  $\rho^{AB}$  es un estado bipartito correlacionado y  $A$  y/o  $B$  poseen acceso a grados de libertad auxiliares, entonces es posible hallar correlaciones cuánticas entre los nuevos subsistemas  $A'$  y  $B'$  que definen  $\rho^{A'B'}$ . Como discutiremos en la sección 4.3, esta propiedad no es más que una reinterpretación del hecho conocido de que las correlaciones cuánticas más allá del entrelazamiento pueden ser creadas mediante operaciones locales [87, 125-127]. Por lo pronto, tomamos este resultado como nuestra primera proposición.

**Proposición 3.** Sea  $\rho^{AB}$  un estado no producto en  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ . Sean  $\eta^{\bar{A}}$  y  $\eta^{\bar{B}}$  los estados ‘iniciales’ de dos sistemas auxiliares. Luego, para el estado extendido  $\eta^{\bar{A}} \otimes \rho^{AB} \otimes \eta^{\bar{B}}$  es posible hallar una descomposición en subsistemas que: (a) preserve la bipartición local, y (b) posee correlaciones cuánticas.

*Demostración.* La prueba es sencilla. Si  $\rho^{AB}$  es un estado correlacionado, puede ser CC o QC. Si es QC entonces ninguna extensión es necesaria, pues ya contiene correlaciones cuánticas. Si es CC, podemos elegir estados puros para los sistemas auxiliares,  $\eta^{\bar{A}} = \eta^{\bar{B}} = |0\rangle \langle 0|$ . Luego, para el estado extendido  $|0\rangle \langle 0|^{\bar{A}} \otimes \rho^{AB} \otimes |0\rangle \langle 0|^{\bar{B}}$ , podemos aplicar unitarias locales de la forma  $U_{\bar{A}\bar{A}} \otimes U_{\bar{B}\bar{B}}$  que corresponden a distintas particiones de cada subsistema ( $A$  y  $B$ ) en subsistemas. Finalmente, trazando los grados de libertad auxiliares resulta en un estado modificado,  $\rho^{A'B'}$ . La acción de las unitarias sobre el estado reducido equivale a la de operaciones locales que preservan la traza (ver, por ej., Ref. [128]). Los canales locales arbitrarios pueden convertir un estado CC en otro QC [29], observación que concluye la



prueba. Notar, sin embargo, que para los estados producto no existen operaciones locales que correlacionen ambas partes, ni cuántica ni clásicamente.  $\square$

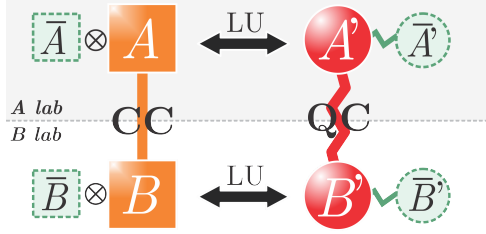


Figura 4.1: Para un sistema compuesto  $A-B$ , CC con respecto a tal partición, el acoplamiento a sistemas locales auxiliares no correlacionados ( $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ ) y la aplicación de LUs, llevan a un estado QC (ver Proposición 3 para más detalles). Las unitarias locales tienen la forma  $U^{\tilde{A}A} \otimes U^{\tilde{B}B}$  y actúan reacomodando los grados de libertad locales, dando lugar a “nuevos” subsistemas  $A', \tilde{A}', B', \tilde{B}'$ . En otras palabras, las unitarias locales inducen nuevas descomposiciones de  $\tilde{A}A$  y  $\tilde{B}B$  en diferentes subsistemas (los primados). (Ver el texto para más detalles.)

Existe otra forma de presentar esta importante diferencia (entre estados CC y estados no correlacionados) con respecto a las correlaciones cuánticas que surgen de las posibles reducciones de estas CC: cuando los subsistemas  $A$  y/o  $B$  poseen dimensiones no primas, es posible hallar reducciones de  $\rho^{AB}$  que respetan la bipartición local  $A|B$  y aún así poseen correlaciones no clásicas. Por ejemplo, el estado de dos cubits  $\rho^{A_1B_1} = p|0\rangle\langle 0|^{A_1} \otimes |0\rangle\langle 0|^{B_1} + (1-p)|+\rangle\langle +|^{A_1} \otimes |+\rangle\langle +|^{B_1}$  (el mismo que en el ejemplo anterior) puede entenderse como la reducción del siguiente estado de cuatro cubits:  $\rho^{AB} = p|0\rangle\langle 0|^{A_2} \otimes |0\rangle\langle 0|^{A_1} \otimes |0\rangle\langle 0|^{B_1} \otimes |0\rangle\langle 0|^{B_2} + (1-p)|1\rangle\langle 1|^{A_2} \otimes |+\rangle\langle +|^{A_1} \otimes |+\rangle\langle +|^{B_1} \otimes |1\rangle\langle 1|^{B_2}$ . Este último es claramente CC con respecto a la bipartición  $A_1A_2|B_1B_2 \cong A|B$ . Por lo tanto,  $\rho^{AB}$  es un estado CC con reducciones QC, siempre preservando la misma prescripción para los grados de libertad locales. Una vez más, este resultado es general: *si  $\rho^{AB}$  es un estado bipartito correlacionado para el cual  $A$  y/o  $B$  son compuestos, entonces es posible hallar una reducción que posee correlaciones cuánticas:*

**Proposición 4.** *Sea  $\rho^{AB}$  un estado no producto en  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , con  $\dim \mathcal{H}^A$  y/o  $\dim \mathcal{H}^B$  dadas por números no primos. Luego, es posible hallar un estado reducido que preserva la bipartición local y posee correlaciones cuánticas.*

*Demostración.* La demostración es trivial en vista de nuestra anterior proposición. Si  $\rho^{AB}$  cumple con las hipótesis de la proposición, podemos considerarlo como al estado *ya extendido* de la Proposición 3. Por lo tanto, aplicando unitarias locales y trazando algunos grados de libertad nos llevan al resultado deseado. Ser correlacionado es una condición necesaria, dado que cualquier reducción de un estado producto es trivialmente no correlacionada con respecto a la bipartición fijada.  $\square$

Como fue señalado en la introducción, el carácter relativo de las correlaciones cuánticas con respecto a la partición elegida del sistema en subsistemas ha sido anteriormente estudiada con mucho cuidado en el caso de estados puros [52, 112-114]. En nuestra presentación, el foco está en el caso de estados mezcla bajo una restricción de localidad: únicamente operaciones locales unitarias son permitidas (sobre el espacio de

*Hilbert aumentado) para explorar los subespacios de observables locales para cada subsistema.*

En resumen, la posesión de estados CC implica de por sí algún grado de cuantidad en las correlaciones en el siguiente sentido:

- Estados CC suplidos de sistemas auxiliares no correlacionados exhiben correlaciones cuánticas, en general, cuando se especifican observables locales alternativos.
- Reducciones de estados CC exhiben, en general, correlaciones cuánticas, con respecto a la misma partición.

La consideración de estos escenarios nos guiarán, en la siguiente sección, a definir la noción de cuantidad potencial.

*Observación.* Las unitarias locales actúan sobre  $\mathcal{H}^{\tilde{A}A} \otimes \mathcal{H}^{\tilde{B}B}$  reconfigurando los grados de libertad locales para dar descomposiciones alternativas en nuevos subsistemas que preservan la bipartición local original. Para el estado reducido  $\rho^{AB}$ , la transformación equivale a una operación local que preserva la traza. El impacto de las operaciones locales sobre las correlaciones cuánticas ha sido estudiado en los últimos años. Las dos propiedades que elevamos al estatus de proposiciones 3 y 4, se apoyan en el resultado general de que las correlaciones cuánticas pueden crearse vía ruido local (es decir, canales cuánticos locales) [125, 129, 130]. Cuando uno elige que este canal sea el asociado a la operación de traza, las relaciones anteriores entre correlaciones clásicas y cuánticas de sistemas compuestos emergen.

A continuación, proponemos una familia de cuantificadores que pretenden medir estos efectos desde la perspectiva que brinda la teoría de la información.

### 4.3 Midiendo la Cuantidad Potencial

Las dos proposiciones discutidas hasta aquí refieren a dos hechos íntimamente relacionados que pueden cuantificarse mediante la consideración de medidas informacionales apropiadas de correlaciones cuánticas. Del análisis previo, surge naturalmente la siguiente definición para la cuantidad potencial (CP).

**Definición 3** (Cuantidad potencial). *Sea  $\rho^{AB}$  un estado sobre  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , y  $\eta_0^{\tilde{A}(\tilde{B})} = |0\rangle\langle 0|$  los estados iniciales sobre  $\mathcal{H}^{\tilde{A}(\tilde{B})} = \mathbb{C}^d$  de un sistema auxiliar. La **cuantidad potencial** de  $\rho^{AB}$ , de rango  $d$ , con respecto a la bipartición  $A|B$  es*

$$\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) = \max_{U \in LU} Q^{A|B}(U\eta_0^{\tilde{A}} \otimes \rho^{AB} \otimes \eta_0^{\tilde{B}}U^\dagger), \quad (4.1)$$

donde en el cálculo de  $Q^{A|B}(\rho^{AB}) := Q(\text{Tr}_{\mathcal{H}^{\tilde{A},\tilde{B}}}\rho^{AB})$  está implícita la traza de los sistemas auxiliares, y  $Q^{A|B}$  es una medida de correlaciones cuánticas bipartitas entre  $A$  y  $B$ .

Usualmente, una medida  $Q$  de correlaciones cuánticas es tal que, para todo estado bipartito  $\rho^{AB}$ ,

- $Q(\rho^{AB}) \geq 0$ ,
- $Q(\rho^{AB}) = 0$  si  $\rho^{AB}$  es un estado CC (o, en particular, un estado producto),
- $Q(\rho^{AB})$  es máxima si y sólo si  $\rho^{AB}$  es un estado (puro) máximamente entrelazado,
- $Q(\rho^{AB})$  es invariante ante transformaciones locales unitarias,
- $Q(\rho^{AB})$  converge a un monótono de entrelazamiento siempre que  $\rho^{AB}$  es un estado puro.

Estas propiedades son satisfechas por toda medida de entrelazamiento o discord. En esos casos, la correspondiente medida de CP satisface las siguientes propiedades básicas, que la hacen adecuada como medida de cuantidad de las correlaciones:

- (Positividad)  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) \geq 0$  para todo estado  $\rho^{AB}$  y cualquier dimensión  $d$  de las partes auxiliares.
- (Mínimo) Para todo  $d$ ,  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) = 0$  si y sólo si  $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$ .
- (Máximo)  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB})$  es máxima si y sólo si  $\rho^{AB}$  es un estado máximamente entrelazado.

La positividad vale porque  $Q$  misma es semidefinida positiva. De hecho, de la Definición 3, se deduce la desigualdad más fuerte  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) \geq Q(\rho^{AB}) \geq 0$ . En lo que respecta a la segunda propiedad,  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^A \otimes \rho^B) = 0$  vale porque las unitarias involucradas no correlacionan  $A\bar{A}$  con  $B\bar{B}$ , ni siquiera en un sentido clásico. Por otro lado, si  $\rho^{AB}$  no es un estado producto, entonces  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) \neq 0$ . Esto puede probarse construyendo una LU,  $U$ , tal que  $Q^{A|B}(U\rho^{ext}U^\dagger) \neq 0$ . Dividamos el análisis en dos casos:  $\rho^{AB}$  siendo CC o QC. Si es QC, ninguna extensión es necesaria dado que  $\rho^{AB}$  ya es tal que  $Q(\rho^{AB}) \neq 0$ . Si, por el contrario,  $\rho^{AB}$  es CC, sabemos que es expresable en la forma  $\rho^{AB} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle \langle i|^A \otimes |j\rangle \langle j|^B$ , para  $\{|i\rangle^A\}$  ( $\{|j\rangle^B\}$ ) estados ortogonales en  $\mathcal{H}^A$  ( $\mathcal{H}^B$ ). Consideremos los casos en que sólo dos probabilidades son no nulas y, además, involucran proyectores independientes, es decir,  $\rho^{AB} = p |0\rangle \langle 0|^A \otimes |0\rangle \langle 0|^B + (1-p) |1\rangle \langle 1|^A \otimes |1\rangle \langle 1|^B$ . En ese caso, podemos extender el estado con sistemas auxiliares de dimensión dos en ambas partes,  $\rho^{ext} = |0\rangle \langle 0|^{\bar{A}} \otimes \rho^{AB} \otimes |0\rangle \langle 0|^{\bar{B}}$ . Así,  $|0\rangle^{\bar{A}} \otimes |0\rangle^A$  y  $|0\rangle^{\bar{A}} \otimes |1\rangle^A$  son estados ortogonales en  $\mathcal{H}^{\bar{A}} \otimes \mathcal{H}^A$ , y podemos mapearlos a cualquier otro par  $\{|\alpha\rangle^{\bar{A}A}, |\alpha_\perp\rangle^{\bar{A}A}\}$  de estados ortogonales vía operaciones locales unitarias. Lo mismo, para  $\mathcal{H}^B \otimes \mathcal{H}^{\bar{B}}$ , donde una LU transforma  $|0\rangle^B \otimes |0\rangle^{\bar{B}}$  y  $|1\rangle^B \otimes |0\rangle^{\bar{B}}$  en  $|\beta\rangle^{B\bar{B}}$  y  $|\beta_\perp\rangle^{B\bar{B}}$ . Trazando los sistemas auxiliares obtenemos  $\rho^{A'B'} = p\rho_\alpha^{A'} \otimes \rho_\beta^{B'} + (1-p)\rho_{\alpha_\perp}^{A'} \otimes \rho_{\beta_\perp}^{B'}$ , que es en general un estado QC, a

menos que  $\rho_{\alpha'}^{A'}$  y  $\rho_{\alpha'_\perp}^{A'}$  conmuten (ídem para  $B'$ ). En los casos en que ambas probabilidades involucran algún proyector común en una de las partes, el mismo procedimiento crea un estado QC con respecto a la otra parte. La generalización a estados de mayor rango es directa.

La tercera propiedad surge de que  $Q$  misma satura únicamente para estados máximamente entrelazados, incluso cuando no se consideren extensiones u operaciones locales. Entonces,  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB})$  alcanza su máximo si y sólo si  $\text{Tr}_{\bar{A}\bar{B}}(U\eta_0^{\bar{A}} \otimes \rho^{AB} \otimes \eta_0^{\bar{B}}U^\dagger)$  es máximamente entrelazado. Extensión, unitarias locales y traza parcial equivalen a operaciones locales que preservan la traza. Como las operaciones locales no pueden crear entrelazamiento,  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB})$  alcanza su máximo si y sólo si  $\rho^{AB}$  es, en sí mismo, un estado máximamente entrelazado.

La familia de medidas definida exhibe otras muchas propiedades interesantes pero, antes de presentarlas y discutir las, probaremos la siguiente proposición que provee una definición alternativa para  $\mathcal{P}_d^Q$  sin hacer referencia alguna a sistemas auxiliares.

**Proposición 5.** Para todo estado  $\rho^{AB}$  y cualquier dimensión  $d$  como en la Definición 3, la CP de  $\rho^{AB}$ , de rango  $d$ , con respecto a la bipartición  $A|B$  es

$$\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) = \max_{\Lambda_{LO} \in LO(d)} Q(\Lambda_{LO}[\rho^{AB}]), \quad (4.2)$$

donde  $\Lambda_{LO} \in LO(d)$  es cualquier operación local de rango, a lo sumo,  $d$ , y  $Q^{A|B}$  es cualquier medida de correlaciones cuánticas bipartitas entre  $A$  y  $B$ .

*Demostración.* La equivalencia es trivial si recordamos que, por el teorema de dilación de Stinespring [131], cualquier operación cuántica puede reproducirse adicionando un sistema auxiliar, operando unitariamente en el espacio de Hilbert aumentado y, finalmente, trazando el sistema auxiliar. En nuestro caso, la restricción sobre las unitarias locales impone la correspondiente condición de localidad sobre las operaciones cuánticas de la Proposición 5.  $\square$

La Proposición 5 ofrece una nueva interpretación concisa para nuestra familia de medidas:  $\mathcal{P}_d^Q(\rho)$  cuantifica la cuantidad de las correlaciones de  $\rho$  alcanzable por operaciones locales. Entre la vasta familia de operaciones locales, podemos identificar, por ejemplo, las unitarias locales, las unitales locales y los canales clásico-cuánticos. Como veremos más adelante, mientras que las locales unitarias no cambian el valor de  $\mathcal{P}_d^Q$ , nuestras medidas son, en general, no crecientes ante operaciones locales arbitrarias.

*Observación.* Las medidas  $\mathcal{P}_d^Q$  dependen del valor de  $d$ , que puede interpretarse como una restricción en la clase de operaciones localmente accesibles, o como una restricción en la dimensión de los sistemas auxiliares a disposición (ver Definición 3). Siendo que  $LO(d' < d) \subset LO(d)$ , es directo observar que  $\mathcal{P}_{d' < d}^Q(\rho^{AB}) \leq \mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB})$  para todo  $\rho^{AB}$ . Sin embargo, es interesante considerar el siguiente escenario

$d$ -independiente. Si  $\rho^{AB}$  es tal que  $d_{\text{máx}} := \text{máx}\{\dim \mathcal{H}^A, \dim \mathcal{H}^B\}$ , entonces toda operación local sobre ese estado puede implementarse con extensiones auxiliares de dimensiones, a lo sumo,  $d_{\text{máx}}^2$ . Por lo tanto,  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) \rightarrow \mathcal{P}_{d_{\text{máx}}^2}^Q(\rho^{AB})$  con  $d \rightarrow \infty$ . Nos referiremos a ésta última como *máx-CP* o  $\mathcal{P}_{\text{máx}}^Q$ . Es claro que la misma da cuenta del caso de no restricción de recursos auxiliares locales. Finalmente, vale notar que el caso  $d = 0$  corresponde trivialmente con la medida  $Q$  asociada, es decir,  $\mathcal{P}_{d=0}^Q(\rho) = Q(\rho)$ .

Por último, cabe mencionar que estas medidas,  $\mathcal{P}_d^Q$ , no (necesariamente) involucran una interpretación operacional dinámica. De hecho, las operaciones unitarias de la definición original pretenden capturar el carácter relativo de las correlaciones con respecto a las particiones del sistema en subsistemas. Es decir, si  $\rho^{AB}$  es el estado del sistema (bi)particionado de acuerdo a  $A|B$ , y si existen sistemas auxiliares tales que  $\eta_0^A \otimes \rho^{AB} \otimes \eta_0^B$  es un posible estado conjunto (como en la Definición 3), las operaciones  $U \in \text{LU}$  pueden pensarse como reconfiguraciones de los subsistemas locales (ver pág. 89 para una discusión más detallada).

### *Propiedades de las medidas de CP*

Como es de esperar,  $\mathcal{P}_d^Q$  hereda algunas particularidades de la medida  $Q$  elegida. Por ejemplo, si  $Q$  es el discord cuántico usual, entonces  $\mathcal{P}_d^Q$  es una medida asimétrica basada en mediciones unilocales, mientras que se vuelve simétrica si  $Q$  es el discord simétrico. De todos modos, antes de especializarnos en alguna  $Q$  determinada, podemos probar algunas propiedades adicionales sobre las medidas de CP genéricas.

Primero, notemos que las medidas de  $\mathcal{P}_d^Q$  coinciden con un monótono de entrelazamiento en el caso de estados puros,  $|\psi\rangle^{AB}$ , y para toda  $Q$  que cumple con la caracterización previa. De hecho, por la Proposición 5,  $\mathcal{P}_d^Q(|\psi\rangle^{AB})$  es el máximo valor de  $Q(\Lambda_{\text{LO}}[|\psi\rangle^{AB}])$  sobre  $\Lambda_{\text{LO}} \in \text{LO}(d)$ . Ahora, usando que: (a) para estados puros,  $Q$  decrece monótonamente bajo operaciones locales y comunicación clásica (LOCC), y (b) que  $\text{LO} \subset \text{LOCC}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_d^Q(|\psi\rangle^{AB}) &= \text{máx}_{\Lambda_{\text{LO}} \in \text{LO}(d)} Q(\Lambda_{\text{LO}}[|\psi\rangle^{AB}]) \\ &\leq \text{máx}_{\Lambda'_{\text{LOCC}} \in \text{LOCC}} Q(\Lambda'_{\text{LOCC}}[|\psi\rangle^{AB}]) \\ &\leq Q(|\psi\rangle^{AB}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por otro lado, tomando  $\Lambda_{\text{LO}}$  como la operación identidad, tenemos que  $Q(\Lambda_{\text{LO}}[|\psi\rangle^{AB}]) = Q(|\psi\rangle^{AB})$ , saturando la desigualdad anterior. En consecuencia,  $\mathcal{P}_d^Q(|\psi\rangle^{AB}) = Q(|\psi\rangle^{AB})$  para todo estado puro  $|\psi\rangle^{AB}$  y todo valor de  $d$ , probando que  $\mathcal{P}_d^Q$  es, para estados puros, no

más que el correspondiente monótono de entrelazamiento definido vía  $Q$ .

A continuación, demostraremos ciertas propiedades sobre el comportamiento de las medidas de CP ante diferentes clases de operaciones locales. Primero, que  $\mathcal{P}_d^Q$  es invariante ante operaciones locales unitarias, como es esperable para cualquier medida razonable de este tipo. Segundo, que operaciones locales de rango suficientemente bajo no incrementan  $\mathcal{P}_d^Q$ . Tercero, que  $\mathcal{P}_d^Q$  tiene en cuenta las correlaciones cuánticas encerradas en las posibles reducciones de los estados. Resumiremos todo esto en la siguiente proposición.

**Proposición 6.** *Para toda medida de CP de rango  $d$ ,  $\mathcal{P}_d^Q$ , las siguientes propiedades se verifican:*

1.  $\mathcal{P}_d^Q$  es invariante ante operaciones locales unitarias,
2.  $\mathcal{P}_d^Q$  es no creciente ante operaciones locales de arbitrarias de rango igual o menor que  $d$
3. Dado un estado bipartito  $\rho^{AB}$  donde  $A$  y/o  $B$  son a su vez compuestos,  $A = \{A_i\}$  y  $B = \{B_j\}$ ,  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB})$  es acotada inferiormente por la medida  $Q$  sobre todas las posibles reducciones (grano fino)  $\rho^{A_i B_j} = \text{Tr}_{\mathcal{H}^{comp}} \rho^{AB}$ , con  $\mathcal{H}^{comp} = \bigotimes_{m \neq i, n \neq j} \mathcal{H}^{A_m} \otimes \mathcal{H}^{B_n}$ , tal que  $\dim \mathcal{H}^{A_i} \times \dim \mathcal{H}^{B_j} \leq d$ .

*Demostración.* (1) Sea  $U^{A|B}$  una operación unitaria local sobre  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ . Para cualquier estado  $\rho$  sobre  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , la transformación correspondiente es  $\rho \mapsto \rho_1 = U^{A|B} \rho U^{A|B}$ . De la Definición 3,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_d^Q(\rho_1) &= \max_{V \in \text{LU}} Q^{A|B}(V \eta_0^{\bar{A}} \otimes \rho_1 \otimes \eta_0^{\bar{B}} V^\dagger) \\ &= \max_{V \in \text{LU}} Q^{A|B}(V U^{A|B} \eta_0^{\bar{A}} \otimes \rho \otimes \eta_0^{\bar{B}} U^{A|B} V^\dagger) \\ &= \max_{V' \in \text{LU}} Q^{A|B}(V' \eta_0^{\bar{A}} \otimes \rho \otimes \eta_0^{\bar{B}} V'^\dagger), \end{aligned}$$

que es igual a  $\mathcal{P}_d^Q(\rho)$ . En la tercera línea, usamos que la composición de una operación unitaria  $V$  que es local sobre  $\bar{A}A|B\bar{B}$  con otra unitaria  $U^{A|B}$  que es local en  $A|B$ , da una unitaria  $V'$  que es local en  $\bar{A}A|B\bar{B}$ .

(2) Sean  $\Lambda'_{\text{LO}} \in \text{LO}(d')$  y  $\Lambda'_{\text{LO}}[\rho] = \rho'$  las transformaciones correspondientes de  $\rho$ , con  $d' \leq d$ . Luego, para  $\rho'$  se verifica que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_d^Q(\rho') &= \max_{\Lambda_{\text{LO}} \in \text{LO}(d)} Q(\Lambda_{\text{LO}}[\rho']) \\ &= \max_{\Lambda_{\text{LO}} \in \text{LO}(d)} Q(\Lambda_{\text{LO}} \circ \Lambda'_{\text{LO}}[\rho]) \\ &\leq \max_{\Lambda_{\text{LO}} \in \text{LO}(d)} Q(\Lambda_{\text{LO}}[\rho]) \\ &= \mathcal{P}_d^Q(\rho), \end{aligned}$$

donde 'o' indica composición de operaciones. Usamos, en la tercera línea, el hecho que que operaciones de la forma  $\Lambda_{LO} \circ \Lambda'_{LO}$  generan un subconjunto de  $LO(d)$ .

(3) Toda reducción  $\rho^{A_i B_j}$  es el resultado de una LO de la forma  $\text{Tr}_{A_i} \circ \text{Tr}_{B_j} \circ \mathbb{1}^{comp}$  sobre el estado del sistema completo. Tal LO está incluida entre las consideradas en el proceso de maximización de la definición de  $\mathcal{P}_d^Q$ , siempre que  $\dim \mathcal{H}^{A_i} \times \dim \mathcal{H}^{B_j} \leq d$ .  $\square$

*Observación.* Acerca de la propiedad (2) de la Proposición 6, vale aclarar que uno no espera que la  $\mathcal{P}_d^Q$  coincida con un monótono de entrelazamiento para estados mezcla generales. De hecho, en la mayoría de los casos,  $Q \geq 0$  para estados separables y entonces  $\mathcal{P}_d^Q \geq 0$  para esos estados, mientras que cualquier monótono de entrelazamiento es, por definición, nulo para estados separables.

Como afirmamos anteriormente, la Proposición 6 establece que toda medida de CP tiene en cuenta el segundo hecho mencionado en la pág. 74, es decir, que incluso los estados CC pueden tener reducciones QC, fenómeno que no es capturado por las medidas usuales del tipo discord. Para un dado estado CC, sin embargo, toda reducción es separable para la misma bipartición [1, 3, 4, 34]. Como consecuencia, la CP de un dado estado CC está acotado superiormente por aquel de los estados separables. De acá en adelante, concentraremos nuestros esfuerzos en el caso en que los recursos auxiliares locales no están limitados, el cual está bien descrito por  $\mathcal{P}_{\text{máx}}^Q$ . En ese caso, de las proposiciones anteriores tenemos que:

- a)  $\mathcal{P}_{\text{máx}}^Q$  coincide con un monótono de entrelazamiento para estados puros,
- b)  $\mathcal{P}_{\text{máx}}^Q$  es no creciente ante operaciones locales generales y es invariante ante LUs,
- c)  $\mathcal{P}_{\text{máx}}^Q$  tiene en cuenta las correlaciones de todas las posibles reducciones de los estados.

Un entendimiento más profundo de estas medidas requiere de la especificación de alguna clase particular de funcionales  $Q$ , algo que haremos en la sección 4.4 usando medidas de discord. Antes de eso, mencionaremos algunos trabajos relacionados para enfatizar sus similitudes y diferencias con nuestra propuesta.

#### *Relaciones con otras medidas de cuantidad*

Algunas medidas de correlaciones cuánticas que involucran la aplicación de LUs fueron definidas recientemente. Pueden relacionarse, hasta cierto punto, con nuestra propuesta.



Comencemos por considerar la interesante medida de cuantificación propuesta por Devi y Rajagopal [132]. Para un cierto estado bipartito  $\rho^{AB}$ , ellos consideran: (i) todas las posibles extensiones  $\rho^{\bar{A}AB}$  a espacios de Hilbert de mayor dimensión, tales que  $\text{Tr}_{\bar{A}}\rho^{\bar{A}AB} = \rho^{AB}$ , y (ii) el conjunto de mediciones proyectivas sobre  $\bar{A}A$ . Luego, cuantificación es definida como la mínima entropía relativa de Kullback-Liebler entre el estado original y el estado postmedición. Como en el caso de la CP, esta medida involucra un espacio de Hilbert aumentado. Sin embargo, al computarse vía una minimización, esta cantidad es menor que, por ejemplo, el discord. De hecho, los autores demuestran que su medida es una cota superior de la entropía relativa de entrelazamiento.

Como segundo ejemplo, nos referimos nuevamente al trabajo de Dakić y col. [29], donde los autores muestran que el rango de la matriz de correlación de estados bipartitos oficia de indicador de correlaciones cuánticas. Todo estado bipartito puede expresarse en términos de bases arbitrarias de operadores hermíticos de los espacio de Hilbert locales,  $\{A_i \in \mathcal{H}^A\}$  y  $\{B_j \in \mathcal{H}^B\}$ , como  $\rho^{AB} = \sum_{ij} r_{ij} A_i \otimes B_j$ . El número de valores singulares no nulos de la matriz  $(r_{ij})$  es  $L \leq d_{\text{mín}}^2$ , con  $d_{\text{mín}} = \min\{\dim(\mathcal{H}^A), \dim(\mathcal{H}^B)\}$ . Para estados CC,  $L \leq d_{\text{mín}}$ . Luego,  $L \geq d_{\text{mín}}$  implica correlaciones cuánticas. Sin embargo, hay estados con discord no nulo y  $L < d_{\text{mín}}$ . En particular, todo estado separable que puede ser creado por LO desde un estado CC verifica que  $L < d_{\text{mín}}$ . En nuestro acercamiento, esto implica que todo estado CC exhibe el mismo grado de cuantificación que el estado separable de mayor cuantificación que pueda crearse vía LO desde el mismo (este último tiene el mismo  $L$  que el estado CC original).

Otro trabajo relacionado se debe a Guo y Wu [133], quienes definen un cuantificador de correlaciones cuánticas computado mediante mediciones sobre bases mutuamente no sesgadas. Al igual que con nuestras medidas, los estados productos son los únicos que exhiben cuantificación nula en su esquema.

Por último, llamamos la atención sobre otro trabajo, esta vez de Gharibian [134], quien define una medida de no clasicidad a través de la mínima distancia entre el estado original y todas sus posibles transformaciones locales unitarias. Desde nuestra perspectiva, las LUs dan cuenta de un cambio en los observables de interés. Así, la medida de Gharibian captura la mínima perturbación sufrida por un dado estado al respecto a todos los observables locales. Resulta que esta medida es del tipo discord, es decir que es no nula si y sólo si el estado no es CC.

Ninguna de las medidas acá mencionadas capturan lo mismo que la CP, esto es, las correlaciones no clásicas presentes en los estados CC. A continuación, con el fin de presentar algunos resultados numéricos y profundizar la comprensión, especializaremos el análisis



considerando medidas basadas en las de discord.

#### 4.4 Discord Cuántico Potencial

La Definición 3 determina una familia de medidas de cuantidad que depende de la elección particular de una funcional  $Q : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}^{50}$ . Por ejemplo, podemos tomar  $Q$  igual al discord cuántico usual —ver Ec. (1.38), pág. 30 y Refs. [35, 50]—. Esta medida captura la mínima perturbación que sufre un estado ante una medición local no selectiva y se considera como un recurso esencial para la ejecución de muchas tareas cuánticas como, por ejemplo, *quantum state merging* [82, 83], distribución de entrelazamiento [63, 135], mediciones cuánticas [136] y discriminación no ambigua de estados [42].

El *discord potencial* (DP) debe definirse entonces como

$$\mathcal{P}^{\mathcal{D}}(\rho^{AB}) := \max_{\Lambda_{\text{LO}} \in \text{LO}} \mathcal{D}(\Lambda_{\text{LO}}[\rho^{AB}]), \quad (4.4)$$

donde  $\mathcal{D}(\rho)$  es el discord usual dado por la Ec. (1.38)<sup>51</sup>. Para simplificar el análisis, y por ser el caso de mayor interés, tomamos operaciones locales arbitrarias (de rango completo), de modo que  $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$  refiere al máx-CP. Además, consideramos mediciones locales sobre  $A$ , es decir,  $\Pi^A[\rho^{AB}] = \sum_i (\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B) \rho^{AB} (\Pi_i^A \otimes \mathbb{1}^B)$  para cierta medición proyectiva  $\{\Pi_i^A\}$ . Resultados análogos surgen de considerar mediciones bilocales, o mediciones generalizadas.

##### Cotas analíticas para el DP

Una observación cuidadosa de las definiciones del discord y el PD revela cierto rol dual de las operaciones locales sobre la parte a ser medida. De hecho,

$$\mathcal{P}^{\mathcal{D}}(\rho^{AB}) = \max_{\Lambda_{\text{LO}} \in \text{LO}} (\mathcal{I}^{A|B}(\Lambda_{\text{LO}}[\rho^{AB}]) - \mathcal{I}^{A|B}(\Pi^{\Lambda}[\rho^{AB}])), \quad (4.5)$$

donde  $\Pi^{\Lambda} \equiv \tilde{\Pi}^A \circ \Lambda_{\text{LO}}$  es tal que  $\tilde{\Pi}^A$  es la medición local que maximiza la información clásica<sup>52</sup>,

$$\mathcal{I}^{A|B}(\Pi^{\Lambda}[\rho^{AB}]) \geq \mathcal{I}^{A|B}(\Pi^A \circ \Lambda_{\text{LO}}[\rho^{AB}]), \quad \forall \Pi^A. \quad (4.6)$$

Apelando a la monotonía de la información mutua ante operaciones cuánticas, uno ve que ambos términos (la información mutua y la información clásica) decrecen por la acción de  $\Lambda_{\text{LO}}$ . Pero, al sustraerse mutuamente, el resultado neto puede ser mayor o menor que el del discord original del estado  $\rho^{AB}$ . Por otro lado, de la propia definición es fácil deducir que el DP es una medida intermedia entre el discord cuántico y la información mutua *para todo estado*  $\rho^{AB}$ :

$$\mathcal{D}(\rho^{AB}) \leq \mathcal{P}^{\mathcal{D}}(\rho^{AB}) \leq \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}). \quad (4.7)$$

<sup>50</sup> Recordemos que  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  denota el espacio de matrices densidad sobre  $\mathcal{H}$

<sup>51</sup> En este apartado, en la notación de la medida de discord, obviamos el superíndice de la parte observada (por ej.,  $\mathcal{D}^A$ ) para hacerla más concisa y porque el tratamiento es general para mediciones unilocales o bilocales.

<sup>52</sup> No confundir con la medición en la autobase local que fue previamente nombrada usando el mismo símbolo.

En particular, *para estados puros*, tanto el discord como el DP colapsan a la entropía de entrelazamiento (ver sección 4.3) y verificamos que

$$S(\rho^A) = \mathcal{D}(\rho^{AB}) = \mathcal{P}^{\mathcal{D}}(\rho^{AB}) \leq \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) = 2S(\rho^A), \quad (4.8)$$

con  $S(\rho^A) = S(\rho^B)$ . Por otro lado, *para estados CC*, el discord se anula y vale que  $0 \leq \mathcal{P}^{\mathcal{D}}(\rho^{AB}) \leq \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB})$ . Finalmente, *las tres cantidades son nulas para estados producto*.

*Estados con marginales máximamente mezclados.*— Consideremos la familia de estados con marginales máximamente mezclados en  $d^A \times d^B$  dimensiones, es decir los  $\rho^{AB}$  con  $\text{Tr}_{A(B)}\rho^{AB} \propto \mathbb{1}^{A(B)}$ . Los estados Bell-diagonales, incluidos los de Werner e isotrópicos, son ejemplos particulares de estos. Su información mutua es  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) = \log(d^A d^B) - S(\rho^{AB})$ . Las mediciones locales proyectivas no perturban los estados marginales, de modo que el discord de estos estados es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho^{AB}) &= \min_{\Pi^A} S(\Pi^A[\rho^{AB}]) - S(\rho^{AB}) \\ &= \min_{\Pi^A} S(\rho^{AB} || \Pi^A[\rho^{AB}]), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $S(\cdot || \cdot)$  es la entropía relativa. Ahora, probaremos que los canales locales unitales no pueden incrementar el discord para estados de esta clase.

**Proposición 7.** *El discord de estados con marginales máximamente mezclados en  $2 \times d$  dimensiones es no creciente ante operaciones locales unitales.*

*Demostración.* Las operaciones locales unitales preservan los marginales máximamente mezclados. Por lo tanto, si  $\Lambda_{\text{Un}}$  es una operación de este tipo tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Lambda_{\text{Un}}[\rho^{AB}]) &= \min_{\Pi^A} S(\Lambda_{\text{Un}}[\rho^{AB}] || \Pi^A \circ \Lambda_{\text{Un}}[\rho^{AB}]) \\ &= \min_{\Pi^A} S(\Lambda_{\text{Un}}[\rho^{AB}] || \Lambda_{\text{Un}} \circ \tilde{\Pi}^A[\rho^{AB}]) \\ &\leq \min_{\Pi^A} S(\rho^{AB} || \tilde{\Pi}^A[\rho^{AB}]) \\ &\leq \mathcal{D}(\rho^{AB}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $\tilde{\Pi}^A$  es la medida definida por los proyectores originales transformados por el dual de  $\Lambda_{\text{Un}}$ . Es decir, si  $\{A_k\}$  son los operadores de Kraus de  $\Lambda_{\text{Un}}$  y  $\{\Pi_i^A\}$  la medición proyectiva, entonces  $\tilde{\Pi}_i^A = \sum_k A_k^\dagger \Pi_i^A A_k$  determinan  $\tilde{\Pi}^A$ . Como los mapas unitales en  $\mathbb{C}^2$  preservan ortogonalidad [125],  $\tilde{\Pi}^A$  es una medición proyectiva bien definida. Además, en el tercer paso hemos usado la monotonía de la entropía relativa ante operaciones cuánticas.  $\square$

Así, las operaciones locales unitales sobre estados con marginales máximamente mezclados en  $2 \times d$  dimensiones no pueden aumentar su cuanticidad. Como corolario, para estos estados *el DP restringido*

a operaciones locales unitales coincide con el discord usual. Por otro lado, el mismo argumento nos permite demostrar que lo mismo vale para estados CC, es decir que las operaciones locales unitales no pueden incrementar su discord.

Streltsov y col. han demostrado que las operaciones locales unitales no pueden crear correlaciones cuánticas para estados  $2 \times d$  dimensionales medidas por la mayoría de las medidas de cuantidad basadas en distancias, como es el caso de la entropía relativa de discord o la medida geométrica de cuantidad definida en términos de fidelidad [125]. La Proposición 7 implica que lo mismo se verifica para el discord usual si consideramos estados con marginales máximamente mezclados.

*Familias con DP coincidente con su discord usual.*— Existen familias especiales de estados cuyas simetrías y otras propiedades particulares sugieren que el DP debe ser igual al discord usual. Por ejemplo, para estados isotrópicos en  $d \times d$  dimensiones, de la forma  $\rho_\eta^I = (1 - \eta)(\mathbb{1}/d^2) + \eta |\beta\rangle \langle \beta|$ , con  $0 \leq \eta \leq 1$ , el discord se puede calcular analíticamente y la medición óptima es universal, en el sentido de que cualquier medición local maximiza la información mutua del estado postmedición. Una operación local  $\Lambda_{LO}$  sobre un estado isotrópico es tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Lambda_{LO}[\rho^I]) &= \mathcal{I}^{A|B}(\Lambda_{LO}[\rho^I]) - \max_{\Pi^A} \mathcal{I}^{A|B}(\Pi^A \circ \Lambda_{LO}[\rho^I]) \\ &= \min_{\Pi^A} \left( \mathcal{D}^{\Pi^A}(\Lambda_{LO}[\rho^I]) - S(\Lambda_{LO}[\rho^I] || \Pi^A \circ \Lambda_{LO}[\rho^I]) \right), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{D}^{\Pi^A}$  denota la versión no optimizada de  $\mathcal{D}$ . Ahora, supongamos que elegimos la medición  $\Pi^A$ , dada por la autobase local de  $\Lambda_{LO}[\mathbb{1}/4]$ <sup>53</sup>. Dada la convexidad simultánea de la entropía relativa,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mathcal{D}}(\rho^I) &= \max_{\Lambda_{LO}} \mathcal{D}(\Lambda_{LO}[\rho^I]) \\ &\leq \max_{\Lambda_{LO}} p \left( \mathcal{D}^{\Pi^A}(\Lambda_{LO}[|\beta\rangle]) - p S(\Lambda_{LO}[\mathbb{1}/d] || \Pi^A[\mathbb{1}/d]) \right) \\ &\leq \max_{\Lambda_{LO}} p \mathcal{D}^{\Pi^A}(\Lambda_{LO}[|\beta\rangle]). \end{aligned}$$

Aunque no ajustada —excepto en los casos triviales  $p = 0$ ,  $p = 1$ —, esta cota sugiere que la maximización del DP para casos isotrópicos involucra a las operaciones cuánticas que maximizan el discord usual de  $\Lambda_{LO}[|\beta\rangle]$ . Como  $|\beta\rangle$  es un estado máximamente discordante, ninguna operación local puede incrementar su discord y, de esa forma, proveer una cota superior más alta para el correspondiente DP. Por otro lado, nuestras computaciones numéricas para estados isotrópicos y de Werner de dos cubits sugieren que, para toda operación local  $\Lambda_{LO}$ , valdría  $S(\Lambda_{LO}[\rho^I] || \Pi^A(\Lambda_{LO}[\rho^I])) \leq S(\rho^I || \Pi^A(\rho^I))$ , aunque no fuimos capaces de hallar una prueba analítica para esa desigualdad.

Otro ejemplo interesante es el de estados  $2 \times 2$  dimensionales de la forma<sup>54</sup>  $\rho_\alpha = \frac{\alpha}{2} |\beta\rangle \langle \beta| + \frac{1-\alpha}{2} (|01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10|)$ , con  $0 \leq \alpha \leq 1$

<sup>53</sup> En caso de que  $\Lambda_{LO}$  sea unital,  $\Pi^A$  es arbitraria.

<sup>54</sup> De aquí en adelante, para no sobrecargar la notación, usamos  $|ij\rangle$  en lugar de  $|i\rangle^A \otimes |j\rangle^B$ .

(ver Ref. [96]). Dado que son los estados que maximizan el discord para un dado valor de entrelazamiento para un amplio rango de  $\alpha$  (específicamente, para  $\alpha$  tal que el entrelazamiento de formación es menor a 0,620) y observando que, para estos estados  $\rho_\alpha$  el discord es una función monótona no creciente del entrelazamiento de formación, concluimos que ninguna LO aumenta su discord, pues ninguna LO puede incrementar el entrelazamiento.

### Cálculos numéricos para estados de dos cubits

Con el fin de entender el rol que juega el proceso de maximización involucrado en la definición del DP, consideremos la siguiente familia monoparamétrica de estados CC,

$$\rho_\eta^C = (1 - \eta) |00\rangle \langle 00| + \eta |11\rangle \langle 11|, \quad (4.11)$$

con  $0 \leq \eta \leq 1$ . Para cualquier valor de  $\eta$ , el estado es una mezcla de estados producto mutuamente ortogonales (es decir, perfectamente distinguibles). Luego,  $Q(\rho_\eta^C) = 0$  para toda medida razonable de correlaciones cuánticas  $Q$ . Sin embargo, para  $\eta \notin \{0, 1\}$ , una LO puede crear correlaciones cuánticas con respecto a la bipartición dada. Como se muestra en la Figura 4.2, el DP captura esa idea, distinguiendo la cuantidad de los diferentes miembros de la familia  $\rho_\eta^C$  dependiendo del monto de correlaciones cuánticas que pueden crearse ante una LO. Otras familias altamente simétricas como los estados isotrópicos y los de Werner poseen un DP igual a su discord usual. Parametrizamos los estados isotrópicos por  $\rho_\eta^I = (1 - \eta)(\mathbb{1}/4) + \eta |\beta\rangle \langle \beta|$ , con  $|\beta\rangle$  un estado tipo Bell, y a los de Werner por  $\rho_\eta^W = (\eta/3)P_+ + (1 - \eta)P_-$ , con  $P_\pm = (\mathbb{1} \pm \mathbb{P})/2$  y  $\mathbb{P} = \sum_{ij} |ij\rangle \langle ji|$ .

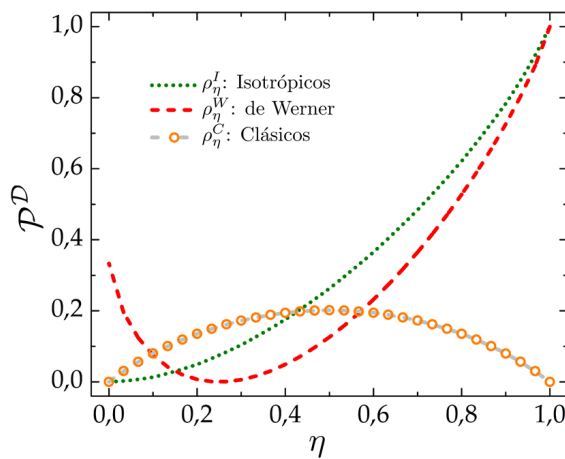


Figura 4.2: Los estados clásicamente correlacionados pueden exhibir cierta cuantidad que es revelada por las medidas de discord potencial (DP). Ese es el caso para la familia de estados  $\rho_\eta^C$  (círculos naranjas), la cual alcanza el máximo de DP cuando  $\eta = 1/2$ . Los estados isotrópicos (línea verde punteada) y Werner (línea roja segmentada) tienen un DP que iguala a su discord usual, ya que ninguna LO incrementa su cuantidad (ver sección 4.4 para una discusión detallada). El DP para los estados  $\rho_\eta^C$  se ajusta muy bien a la curva  $\mathcal{P}^D(\eta) \approx 0,2018 - 0,6979(\eta - 0,5)^2 - 0,4204(\eta - 0,5)^4$ .

En la Figura 4.3, el borde superior está dado por la combinación de un estado CC de rango 2,  $\rho_{clas} = (|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|)/2$ , con un estado máximamente entrelazado  $|\beta\rangle$ , es decir, por la familia  $\rho_\gamma^M = (1 - \gamma)\rho_{clas} + \gamma |\beta\rangle \langle \beta|$ , con  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Los estados separables con discord  $\geq 0,2018$  no pueden alcanzarse desde estados CC

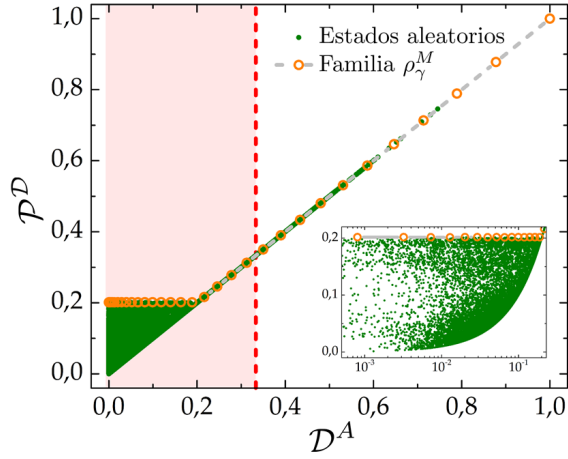


Figura 4.3: Cualquier estado separable con discord  $\leq 0,2018$  puede alcanzarse desde un estado CC de dos cubits, usando operaciones locales. Por el contrario, existen estados separables con discord mayor a  $0,2018$ . La comparación entre discord y discord potencial evidencia este comportamiento. El borde superior de la gráfica está dado por la familia  $\rho_\gamma^M$  (círculos naranjas; ver el texto para más detalles). Los puntos verdes son los datos correspondientes a  $\sim 10^5$  estados generados aleatoriamente. La región a la izquierda de la línea vertical (sombreada en rojo) corresponde a los valores de discord alcanzables por estados separables. *Inset*: detalle de la región inferior izquierda.

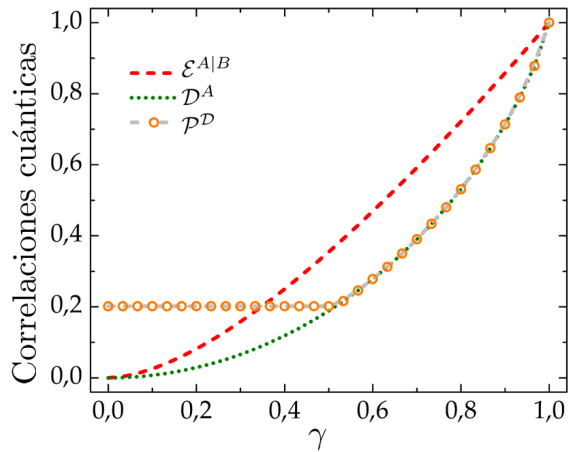


Figura 4.4: Diferentes medidas de correlaciones cuánticas para la familia  $\rho_\gamma^M$ . El entrelazamiento de formación (línea roja segmentada) es finito para todo  $\gamma > 0$ . El discord (línea verde punteada) se comporta cualitativamente como el entrelazamiento, mientras que el DP (círculos naranjas) exhiben una zona de transición: tiene un valor mínimo constante por debajo de  $\gamma = 1/2$ , y crece monótonamente con  $\gamma$  para  $\gamma \geq 1/2$ .

mediante LO, como consecuencia directa de: i) la naturaleza del máximo discord en estados separables con rango fijo [3], y ii) la creación local de correlaciones cuánticas desde estados CC [87]. La Figura 4.4 muestra cómo el entrelazamiento, el discord y el DP se comportan de diferentes maneras para los estados  $\rho_\gamma^M$ . El borde izquierdo de la Figura 4.3 es reproducido por mezclas de estados CC de rango 2 con el estado máximamente mezclado. Por último, el borde inferior puede reproducirse por medio de los estados isotrópicos.

Es importante notar que, como se observa en la Figura 4.3, para aquellos estados de dos cubits cuyo discord es  $\geq 0,2018$ , operaciones locales arbitrarias no pueden incrementar su cuantidad. Queda abierta la pregunta acerca de si para estados cuánticos arbitrarios siempre existe una cota de cuantidad por encima de la cual no existen operaciones locales que puedan incrementarla.

*Aplicación: DP y canales de atenuación de amplitud.*— En la Ref. [127], los autores muestran como el ruido local —en particular, un canal local markoviano de atenuación de amplitud (AA)— puede aumentar la correlaciones cuánticas para un sistema de dos cubits que está inicialmente en un estado CC,  $\rho_0 = (|+0\rangle\langle+0| + |-1\rangle\langle-1|)/2$ . Tomando  $E_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|$  y  $E_1 = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|$  como los correspondientes operadores de Kraus para el canal AA, con  $p = 1 - e^{-\Gamma t}$  y  $\Gamma$  la tasa de relajación, el discord selecciona un valor intermedio de  $p$  como aquel que optimiza la cuantidad. De hecho, los autores encuentran que, cuando el estado es transformado por un canal AA local, el discord alcanza un máximo de 0,07 cuando  $p \approx 0,8$ . Por otro lado, nuestros cálculos para el DP muestran que  $p = 0$  (cuando ninguna operación es realizada) es el valor que optimiza la cuantidad potencial (Figura 4.5): el estado  $\rho_0$  posee máximo DP entre todos los estados CC de dos cubits,  $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}(\rho_0) = 0,2018$ , ya que puede determinarse por una transformación local unitaria de  $\rho_\eta^C$  con  $\eta = 1/2$  (ver Figura 4.2).

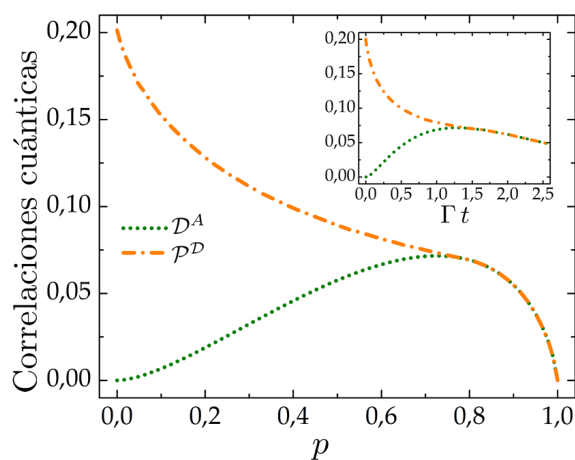


Figura 4.5: Afectado por un canal local de atenuación de amplitud, el discord (línea verde punteada) y el discord potencial (línea naranja segmentada) exhiben diferentes comportamientos, indicando el hecho de que ambas medidas reflejan diferentes aspectos de la cuantidad de un dado estado. *Inset*: discord y DP como funciones del tiempo (en unidades de la inversa de la tasa de relajación,  $\Gamma$ ).

El modelo puede interpretarse de dos formas. Primero, podemos asumir que estamos tratando con un sistema de dos cubits,  $A$  y  $B$ ,

inmerso en un entorno de, al menos, otros dos cubits  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ . En ese contexto, podemos preguntarnos por la máxima cuantidad que podemos obtener por medio de operaciones locales en nuestros laboratorios con la ayuda de  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ . Luego, lo que muestran los cálculos es que usar canales de AA no es la elección óptima, ya que el discord no alcanza su máximo en ese caso. Más aún, si estamos restringidos a ese tipo de LO, la mejor opción es fijar  $p \approx 0,8$ .

Alternativamente, podemos adoptar una interpretación dinámica, tal que nuestro sistema evoluciona en el tiempo de acuerdo con el canal AA local. En ese caso, observar el comportamiento del DP nos permite concluir que la cuantidad de nuestros recursos decrece monótonamente con el tiempo, ya que el máximo DP corresponde a  $t = 0$ .

En ambos casos, la noción de DP aparece como útil para entender la cuantidad de los sistemas compuestos.

HASTA AQUÍ, investigamos el carácter relativo de las correlaciones cuánticas bipartitas con respecto a los observables locales de ambas partes, haciendo énfasis en que la cuestión está estrechamente ligada al efecto de las operaciones locales sobre las correlaciones cuánticas. Tales resultados fueron presentados en las proposiciones 1-3. Propusimos una familia de medidas para lo que llamamos cuantidad potencial, la cual tiene en consideración este carácter relativo. Estos cuantificadores involucran un proceso de maximización que, en principio, la torna difícil de computar —más aún, considerando que las medidas usuales de correlaciones ya involucran un proceso de optimización<sup>55</sup>. De todos modos, en algunas situaciones de baja dimensión o alta simetría, nuestras medidas de cuantidad pueden simplificarse tomando ventaja de resultados ya conocidos. En particular, aplicamos estas medidas en familias especiales de estados  $2 \times d$  dimensionales, mostrando que las operaciones locales unitales no pueden aumentar la cuantidad de estados con marginales máximamente mezclados. Además, como aplicación a una situación típica, comparamos el comportamiento de estas medidas con las de discord en el caso de dos cubits afectados por canales locales de atenuación de amplitud.

Una pregunta abierta refiere a la posibilidad de formalizar una teoría de recursos asociada a nuestras medidas de cuantidad potencial, al modo de las conocidas, por ejemplo, para el entrelazamiento y la coherencia cuántica —ver Refs. [138-144] y las referencias allí—. En estas teorías, la idea es reconocer un conjunto de estados y operaciones “libres”, y un conjunto de estados “recursos” desde los cuales se puede acceder a cualquier otro estado por medio de las operaciones libres. (Un esquema más general y abstracto de teoría de recursos ha sido recientemente definida por Coecke y col. [145]). En nuestro caso, es claro que los estados libres serían aquellos de CP nula. Enmarcar estas definiciones en el marco de una teoría formal de re-

<sup>55</sup> Por ejemplo, fue probado que computar el discord cuántico es un problema NP-completo [137]



curso permitiría precisar y validar la idea de que las medidas de CP cuantifican un dado recurso cuántico.

Por otro lado, hemos de enfatizar que nuestro estudio no contradice aquellos de Dakic y col. [29] y Gessner y col. [87], quienes afirman que las correlaciones cuánticas de aquellos estados separables que pueden producirse desde estados CC con LO no son genuinamente cuánticas. De hecho, nuestros resultados resaltan ese hecho: observamos un colapso de la cuantidad de aquellos estados separables a un valor constante de cuantidad potencial. Nuestro punto está en señalar que esa cuantidad está ya presente en esos estados incluso antes de (y sin) considerar ningún tipo de operación local, algo que puede confirmarse tan sólo midiendo los observables locales apropiados.

En conclusión, analizamos una forma alternativa de cuantificar la cuantidad de las correlaciones en estados mezcla, basada en las capacidades locales de un dado sistema, la cual esperamos mejore el entendimiento del tema. Más allá de algunos resultados analíticos y numéricos específicos, sería interesante estudiar si alguna medida definida vía distancias o divergencias provee una versión de más eficiente computación.

Una vez que comprendimos cómo las transformaciones unitarias locales alteran el discord de estados bipartitos, resulta ilustrativo observar el efecto de operaciones unitarias generales, aquellas que representan un cambio sobre los observables globales asociados al sistema de interés.

### *Correlaciones cuánticas bajo operaciones unitarias globales*

Cuando eliminamos la condición de localidad, tenemos permitido explorar todo el espacio de observables. Esta situación fue estudiada previamente por Zanardi [112], donde él distingue entre subsistemas *virtual* y reales. Además, Zanardi y col. [52] han estudiado el rol de los observables relevantes en la estructura de producto tensorial del espacio de Hilbert de un sistema físico. Harshmann y Ranade [114] dieron una prueba formal del hecho de que, en el caso de estados puros, uno puede ajustar los observables de forma de ir desde una situación sin entrelazamiento hasta otra de máximo entrelazamiento, dejando fijo el estado. Sin embargo, para estados mezcla la situación es radicalmente distinta —como puede verse, por ejemplo, tomando el estado máximamente mezclado, el cual permanece invariante para cualquier conjunto de observables que elijamos— y la elección de observables no puede poner a todos los estados en pie de igualdad. De todas formas, la consideración de operaciones unitarias *globales* aleatorias tiende a acumular los valores de discord cerca de los máximos para valores dados de entropía (Figura 4.6).



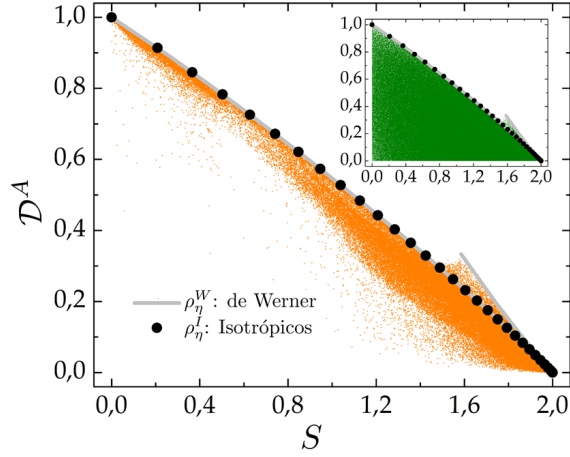


Figura 4.6: Ante operaciones globales unitarias, el discord de un estado fijo puede incrementarse una cantidad que depende de la pureza del estado. En particular, los estados pseudopuros pueden transformarse en isotrópicos (puntos negros), maximizando el discord para un valor dado de entropía. Los estados de Werner (línea gris) proveen un límite superior para casi todos los valores de entropía. Los puntos naranjas corresponden a los datos de  $\sim 10^5$  estados aleatorios. *Inset*: discord original para los mismos estados. La región entre los estados isotrópicos y los de Werner está limitada superiormente por familias biparamétricas (ver Ref. [33] para más detalles).

Acá, el rol clave es el de los estados pseudopuros (mezclas pesadas de un estado puro con el máximamente mezclado), es decir,  $\rho_{a,\psi} = (1-a)(\mathbb{1}/d) + a|\psi\rangle\langle\psi|$ , con  $0 \leq a \leq 1$ . Para un valor fijo de  $a$ , podemos maximizar el discord tomando  $|\psi\rangle = |\beta\rangle$  como el máximamente entrelazado, con el fin de convertir  $\rho_{a,\psi}$  en uno isotrópico. Esto puede lograrse aplicando una operación global unitaria sobre  $|\psi\rangle$ , es decir, siempre existe una unitaria  $U_\psi$  tal que  $U_\psi|\psi\rangle = |\beta\rangle$ . Por lo tanto,  $U_\psi\rho_{a,\psi}U_\psi^\dagger = (1-a)(\mathbb{1}/d) + a|\beta\rangle\langle\beta| = \rho_{a,\beta}$ .

### Observables cuánticos y la estructura del espacio de Hilbert

Tomemos el caso de un sistema de cuatro cubits, donde  $A$  y  $B$ , con  $\mathcal{H}^A \cong \mathbb{C}^4 \cong \mathcal{H}^B$ , son subsistemas de dos cubits cada uno. El espacio de estados está constituido por operadores densidad sobre  $\mathcal{H}^{AB} \cong (\mathbb{C}^2)^{\otimes 4} \cong (\mathbb{C}^4)^{\otimes 2} \cong \mathbb{C}^{16}$ . Si imponemos una restricción de localidad sobre la partición  $A|B$ , entonces cualquier operación unitaria  $U^{A|B} = U^A \otimes U^B$  sobre  $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$  actúa localmente en los grados de libertad de  $A$  y  $B$ . La acción de  $U^A \otimes U^B$  puede interpretarse de dos maneras:

- como una transformación unitaria bilocal sobre el espacio de estados;
- como una transformación sobre el espacio de observables locales, es decir, una reconfiguración de los grados de libertad locales.

De hecho, para cualquier estado  $\rho^{AB}$  y cualquier observable  $O$ , su valor de expectación es

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_{U^{A|B}\rho^{AB}U^{A|B}^\dagger} &= \text{Tr}[(U^{A|B}\rho^{AB}U^{A|B}^\dagger)O] \\ &= \text{Tr}[\rho^{AB}(U^{A|B}^\dagger O U^{A|B})] \\ &= \langle U^{A|B}^\dagger O U^{A|B} \rangle_{\rho^{AB}}. \end{aligned}$$

¿Qué es lo que determina que el sistema posea subsistemas  $A$  y  $B$ ?<sup>56</sup> Tal determinación es ciertamente no única y usualmente se basa en los *grados de libertad accesibles localmente* para el sistema. Un cubit es una entidad abstracta, adecuada para la descripción de sistemas cuánticos biestables, como por ej. una partícula de espín un medio. Para dos partículas independientes para las cuales el único grado de libertad relevante son sus espines, la descripción natural está dada por un operador densidad sobre  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . La situación se comprende mejor desde la perspectiva de los observables. Los observables naturales son los operadores de espín en  $A$  y  $B$ , representados por las correspondientes matrices de Pauli  $\sigma_i^A$  y  $\sigma_i^B$ , con  $i = x, y, z$ . Si estos representan los grados de libertad relevantes, la descripción de nuestro sistema puede darse en términos del álgebra que estos generan,  $\mathcal{O} = \text{span}\{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \sigma_i \otimes \mathbb{1}, \mathbb{1} \otimes \sigma_j\}$ , con  $i, j = x, y, z$ . (Eliminamos los superíndices  $A$  y  $B$  para simplificar la notación.) El álgebra  $\mathcal{O}$  induce una estructura de producto tensorial sobre el espacio de Hilbert del sistema conjunto, es decir,  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$  [52]. Pero esos observables naturales no necesariamente son “tan naturales”: cualquier transformación unitaria del tipo  $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}_U := U\mathcal{O}U^\dagger$  podría, a priori, considerarse, sin ninguna suposición física extra, en pie de igualdad con la prescripta inicialmente.

Por ejemplo, el estado puro no correlacionado  $|\psi\rangle = |00\rangle$  es unitariamente equivalente al máximamente entrelazado  $|\beta_+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  mediante una transformación  $U_\psi$ . Alternativamente, uno puede pensar que  $|\beta_+\rangle$  es la representación de  $|\psi\rangle$  en términos del álgebra  $U_\psi\mathcal{O}U_\psi^\dagger$  de observables. Harshman y Ranade demostraron que para todo estado puro en  $\mathbb{C}^N$ , donde  $N \in \mathbb{N}$  no es primo, los observables pueden explorarse para inducir una descomposición en subsistemas tal que el estado posee cualquier valor deseado de entrelazamiento, desde un estado producto a otro máximamente entrelazado [114]. La situación es bastante distinta para estados mezcla. Cuando se trata con estados mezcla, las operaciones unitarias no permiten explorar todo el espacio de estados. En particular, una transformación unitaria no cambia los autovalores de la matriz densidad, de modo que preserva la entropía del estado original. Supongamos que comenzamos con un estado mezcla separable —de hecho, CC— de la forma  $\rho_p^{AB} = p|00\rangle\langle 00| + (1-p)|11\rangle\langle 11|$ . Una transformación unitaria  $\rho_p^{AB} \mapsto U\rho_p^{AB}U^\dagger$  preservará la pureza y la ortogonalidad de las componentes. Por ejemplo, aplicando la  $U_\psi$  definida antes, tenemos que  $U_\psi\rho_p^{AB}U_\psi^\dagger = p|\beta_+\rangle\langle\beta_+| + (1-p)|\beta_-\rangle\langle\beta_-|$ , con  $|\beta_\pm\rangle := (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$  dos estados ortogonales máximamente correlacionados. Para  $p = 0$  o  $p = 1$ ,  $\rho_p^{AB}$  es puro y sus versiones transformadas son estados de tipo Bell. Cuando  $p \in (0, 1)$ ,  $\rho_p^{AB}$  no es puro y su versión transformada no es máximamente entrelazada.

<sup>56</sup> Harshman ha brindado un estudio profundo y claro de las estructuras cuánticas inducidas por las simetrías de los sistemas (ver Ref. [146] y las referencias allí).

## 4.5 Resumen del capítulo 4

- Demostramos que todos los estados cuánticos, excepto los no correlacionados (estados producto), poseen correlaciones cuánticas accesibles mediante la exploración de todos los observables locales. Incluso los estados clásicos exhiben estas características.
- Propusimos una familia de medidas para la cuantificación de el efecto mencionado: la cuantidad potencial. Mostramos que esta familia es no nula para estados clásicos y cumple las condiciones razonables de toda medida de correlaciones cuánticas.
- Especializamos la familia de medidas al caso del discord, obteniendo una medida de discord potencial. Probamos que es una medida que, para todo estado, intermedia entre la información mutua y el discord usual.
- Ilustramos el comportamiento de estas medidas por medio de cálculos analíticos y numéricos en casos de interés.
- Finalmente, observamos cómo el grado de mezcla (no pureza) de los estados generales limita la capacidad de transformación de las correlaciones cuánticas por medio de operaciones unitarias globales.



## 5 CUANTICIDAD MEDIANTE ENTROPÍAS GENERALIZADAS

*Este capítulo está mayormente basado en los resultados publicados en Guido Bellomo y col. “Comment on “Quantum discord through the generalized entropy in bipartite quantum states””. En: The European Physical Journal D 68.337 (2014), págs. 1-4 y Gustavo M Bosyk y col. “Unified entropic measures of quantum correlations induced by local measurements”. En: Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 462 (2016), págs. 930-939.*

### 5.1 Problemas asociados al uso de entropías generalizadas

En la Ref. [147], Hou, Huang y Cheng presentan, usando las entropías de Rényi y Tsallis, posibles generalizaciones de las medidas de discord cuántico. En cuanto a la información mutua y el discord generalizados de ese modo, mostraremos que estos dos tipos de cuantificadores de correlaciones pueden tomar valores negativos. En el caso particular de dos cubits, determinaremos en qué situaciones aparece tal problema. Además, estudiaremos generalizaciones alternativas basadas en las entropías de Rényi.

Hou y col. introdujeron generalizaciones de dos cuantificadores: la información mutua y el discord cuántico, y las usaron para estudiar las correlaciones cuánticas en estados de dos cubits [147]. Como vimos, la IM —dada por la expresión  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) := S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$ — cuantifica las correlaciones totales en sistemas bipartitos. El discord, el cual estima la cuanticidad de las correlaciones, lo podemos derivar de una forma alternativa a la que hicimos anteriormente<sup>57</sup>. Si uno desea cuantificar las correlaciones no clásicas, estas deben ser apropiadamente discriminadas entre las correlaciones totales. Una posibilidad consiste en computar las correlaciones clásicas a través de la cantidad

$$C^A(\rho^{AB}) = S(\rho^B) - \min_{\{\Pi^A\}} \sum_k p_k S(\rho_k^B), \quad (5.1)$$

donde  $\Pi^A$  es una medición de von Neumann local en  $A$ , con proyec-

<sup>57</sup> Esta forma nos depara una medida de discord equivalente siempre que usemos la entropía de von Neumann.

tores  $\{\Pi_k^A\}$ , y

$$\rho_k^B = \frac{1}{p_k} \text{Tr}_A[(\Pi_k^A \otimes \mathbb{1}^B)\rho^{AB}(\Pi_k^A \otimes \mathbb{1}^B)] \quad (5.2)$$

es el estado de  $B$  condicional asociado al resultado  $k$  de  $A$ . Además,

$$p_k = \text{Tr}[(\Pi_k^A \otimes \mathbb{1}^B)\rho^{AB}(\Pi_k^A \otimes \mathbb{1}^B)] \quad (5.3)$$

es la probabilidad correspondiente. La Ec. (5.1) cuantifica las correlaciones clásicas desde la perspectiva de  $A$  y, análogamente, se define  $C^B$ . La medida de discord cuántico es [35]

$$\mathcal{D}^A(\rho^{AB}) := \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) - C^A(\rho^{AB}). \quad (5.4)$$

Hou y col. generalizaron estas medidas reemplazando las entropías de von Neumann por aquellas de Tsallis y Rényi (ver Refs. [20, 148, 149] y las referencias allí). Las entropías de Rényi son [20]<sup>58</sup>

$$S_q^R(\rho) := \frac{\log(\text{Tr} \rho^q)}{1 - q}, \quad (5.5)$$

con  $q \geq 0$ , mientras que sus contrapartes de Tsallis son [149]

$$S_q^T(\rho) := \frac{1 - \text{Tr} \rho^q}{q - 1}, \quad (5.6)$$

con  $q$  un parámetro real. Ambas cantidades convergen a la de von Neumann en el límite en que el respectivo parámetro tiende a uno. Hou y col. reemplazan entonces  $S$  por  $S_q^R$  o  $S_q^T$  en la definición de la IM y la Ec. (5.1), obteniendo medidas generalizadas de información mutua,  $\mathcal{I}_q^R$  y  $\mathcal{I}_q^T$ . Análogamente, obtienen generalizaciones para las medidas de correlaciones clásicas — $C_q^R$ ,  $C_q^T$ — y cuánticas — $\mathcal{D}_q^R$ ,  $\mathcal{D}_q^T$ —. Estos cuantificadores pueden tomar valores negativos, algo que mostraremos a continuación, refutando la conjetura de Hou y col. Más aún, las medidas generalizadas de discord toman valores no nulos, incluso negativos, para los estados clásicos.

*Positividad de los cuantificadores generalizados.*— Las propiedades de la entropía de von Neumann garantizan la positividad de  $\mathcal{I}$ ,  $C$  y  $\mathcal{D}$ . Pero esto no ocurre con los cuantificadores generalizados, dado que las entropías generalizadas no gozan de las mismas propiedades.

A modo de ejemplo, consideremos la familia de estados definida a continuación. Enfocaremos nuestra atención en estados clásicos de dos cubits y rango tres, representados (en la base estándar) por la matriz

$$\rho_{uv}^{AB} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - u - v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

con  $u, v \geq 0$  y  $u + v \leq 1$ . Existen mediciones proyectivas, completas y locales que no perturban tales estados, definidas por las bases

<sup>58</sup> Una vez más, usamos logaritmos en base 2.

de proyectores  $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$  para ambos subsistemas. Así, para la familia  $\rho_{uv}^{AB}$  vale que  $\mathcal{D}^A = 0$  (y  $\mathcal{D}^B = 0$ ). En las Figs. 5.1–5.3 podemos observar que las medidas generalizadas pueden tomar valores negativos *incluso para estados clásicos*. En consecuencia, estas medidas generalizadas no pueden discriminar a las correlaciones clásicas en el sentido antes discutido.

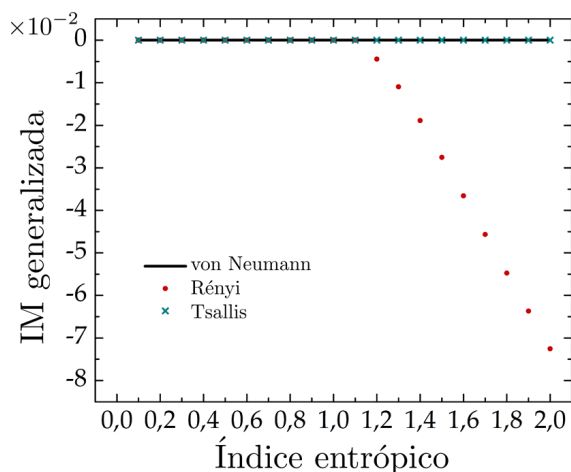


Figura 5.1: Valores mínimos de las IMs generalizadas para diferentes valores de  $q$ , para estados clásicos de la familia  $\rho_{uv}^{AB}$ .

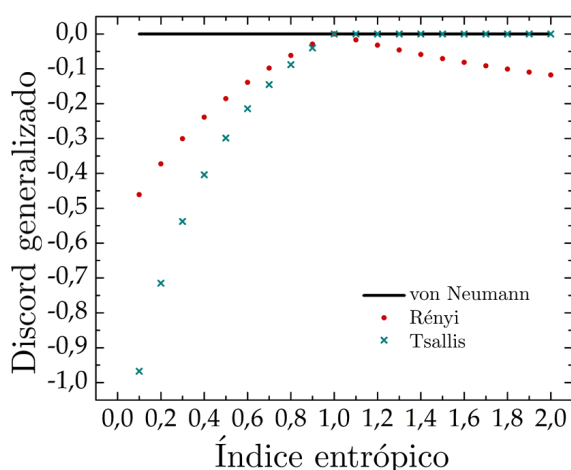


Figura 5.2: Valores mínimos de discord generalizados para diferentes valores de  $q$ , para estados clásicos de la familia  $\rho_{uv}^{AB}$ .

Por su parte, las medidas de correlaciones clásicas resultan positivas para la familia  $\rho_{uv}^{AB}$ , para todo valor de  $q$ .

*Estados aleatorios de dos cubits.*— Como segundo ejemplo, exploremos las medidas generalizadas para estados arbitrarios de dos cubits. Consideraremos  $10^5$  estados generados aleatoriamente para distintos valores de los parámetros entrópicos. La Figura 5.5 muestra los mínimos de IM y discord para valores dados de  $q$ .

Para estos estados de dos cubits, la información clásica generalizada resulta positiva, con  $q$  tomados en el rango  $(0, 1000)$ , sugiriendo que tal positividad podría sostenerse para todos los valores de los parámetros entrópicos. Por el contrario, la información mutua y el discord generalizados alcanzan valores negativos para  $q \neq 1$  en el caso de Rényi, mientras que se mantienen positivos para Tsallis con

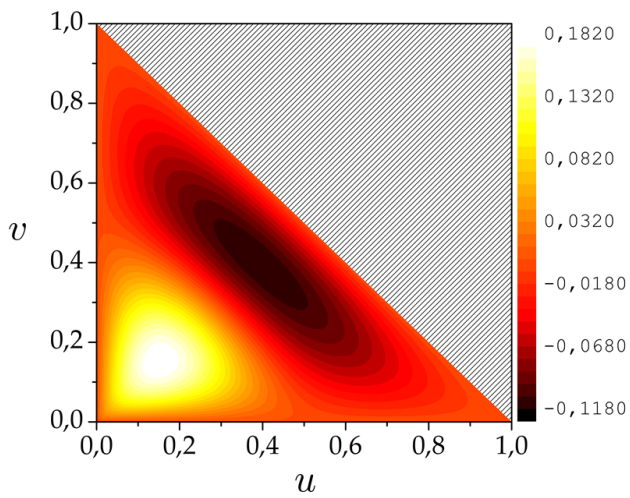


Figura 5.3: Discord generalizado de Rényi para los estados clásicos  $\rho_{uv}^{AB}$  con  $q = 2$ . Notar la presencia de valores negativos.

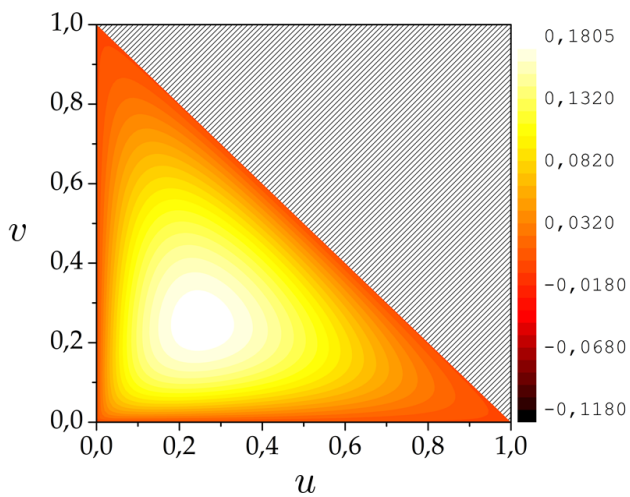


Figura 5.4: Discord generalizado de Tsallis para los estados clásicos  $\rho_{uv}^{AB}$  con  $q = 2$ . Notar la presencia de valores negativos.

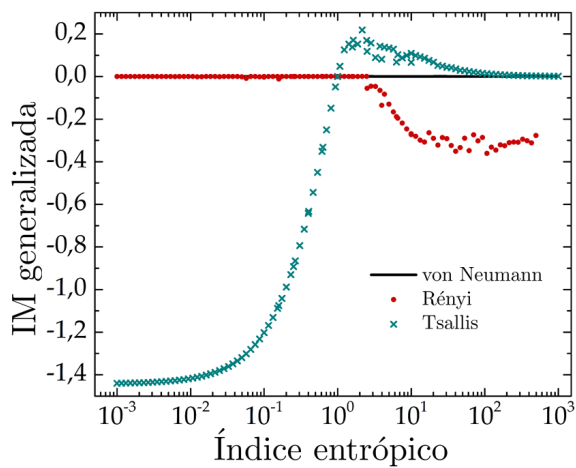


Figura 5.5: Mínimos de IM generalizada, para diferentes valores de  $q$ , para  $10^5$  estados de dos cubits generados aleatoriamente.



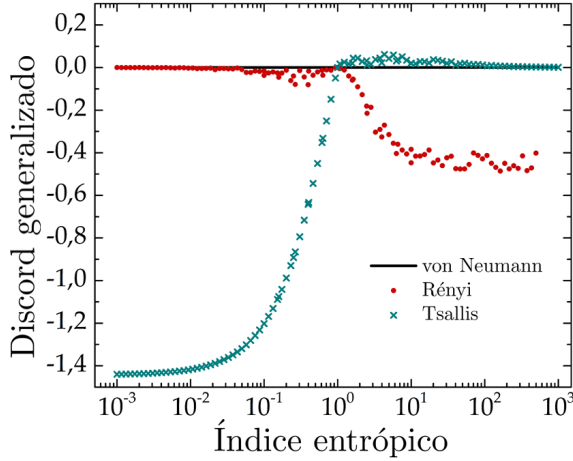


Figura 5.6: Mínimos de discord generalizado, para diferentes valores de  $q$ , para  $10^5$  estados de dos cubits generados aleatoriamente.

$q \geq 1$ . Esto podría indicar que la entropía de Tsallis es fuertemente subaditiva en ese rango (ver la discusión más adelante). Lamentablemente, la negatividad de estos cuantificadores no señala clasicidad de los estados. Por ejemplo, tenemos estados no clásicos con discord de Rényi negativo para  $q = 2$  (Figura 5.7).

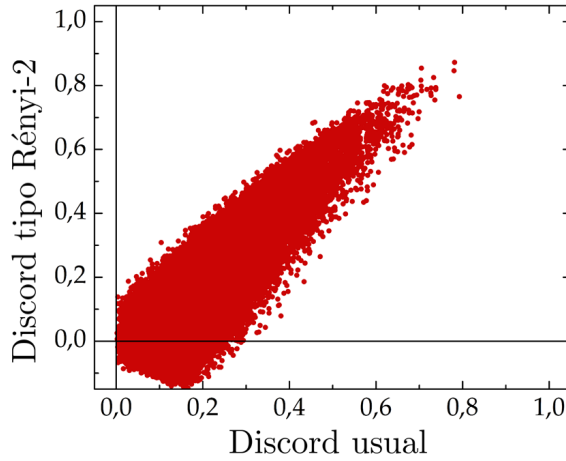


Figura 5.7: Discord generalizado de Rényi con  $q = 2$  para  $10^5$  estados de dos cubits generados aleatoriamente. El discord generalizado puede ser negativo para estados para los cuales el discord usual es  $\lesssim 0,3$ .

## 5.2 Entropías relativas y generalizaciones alternativas

Es fácil observar que la *subaditividad* (SA) de la entropía de von Neumann,

$$S(\rho^{AB}) \leq S(\rho^A) + S(\rho^B), \quad (5.8)$$

implica la positividad de la información mutua, y que su *concauidad*,

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \geq \sum_i p_i S(\rho_i), \quad (5.9)$$

garantiza que  $C^A$  y  $C^B$  son medidas positivas. Por su parte, la positividad del discord puede deducirse a partir de la *subaditividad fuerte* (SSA)<sup>59</sup> [35, 50] de la entropía de von Neumann,

$$S(\rho^{ABC}) + S(\rho^B) \leq S(\rho^{AB}) + S(\rho^{BC}), \quad (5.10)$$

<sup>59</sup> Del inglés, *strong subadditivity*.

la cual equivale a la concavidad de la entropía condicional,  $S(A|B) := S(\rho^{AB}) - S(\rho^B)$ . En general, las entropías generalizadas no comparten estas propiedades para valores arbitrarios de sus parámetros  $q$ . Las de Rényi son cóncavas en el intervalo  $(0, q^*)$ , con  $q^* = 1 + \frac{\log 4}{\log(N-1)}$ ,  $N$  siendo el rango de la matriz densidad [23, 150]. Para  $q \geq q^*$ ,  $S_q^R$  no es ni cóncava ni convexa.

Para  $q \geq 1$ , las entropías de Tsallis son subaditivas de modo que las medidas de IM asociadas son positivas, es decir que  $\mathcal{I}_q^T \geq 0$  para  $q \geq 1$  [151]. Sin embargo, para  $0 < q < 1$  las entropías de Tsallis son superaditivas para estados producto y no son ni subaditivas ni superaditivas para estados generales [152]. Por lo tanto,  $\mathcal{I}_q^T$  puede adoptar valores negativos en el rango  $0 < q < 1$ . Las entropías de Rényi son subaditivas para  $q = 0$  y  $q = 1$  [153]. Para cualquier otro  $q$ , podemos encontrar estados para los cuales la IM asociada es negativa.

La SSA no se verifica para las entropías generalizadas, salvo para la instancia de von Neumann [154]. Para estados clásicos,  $S_q^T$  verifica ser SSA si  $q \geq 1$  [155]. (Existen otros casos particulares para los que  $S_q^R$  verifica la SSA como, por ejemplo, para estados gaussianos y  $q = 2$  [156].) En el Cuadro 5.1 se detallan las propiedades de las diferentes entropías.

Entropía	Concavidad	SA	SSA
$S$	✓	✓	✓
$S_q^R$	$(0, q^*)$	$\{0, 1\}$	×
$S_q^T$	$(0, \infty)$	$[1, \infty)$	×

Cuadro 5.1: Propiedades de las entropías generalizadas: concavidad, subaditividad (SA) y subaditividad fuerte (SSA). Notar que  $q^* = 1 + \frac{\log 4}{\log(N-1)}$  depende del rango de la matriz densidad,  $N$ .

Concavidad y SA son suficientes, pero no necesarias, para asegurar la positividad de las medidas de información clásica y mutua, respectivamente. En el caso de los estados clásicos de rango tres antes definidos (familia  $\rho_{uv}^{AB}$ ), nuestros resultados numéricos muestran que la información clásica de Rényi es positiva para todo  $q$ , aunque la entropía en cuestión es cóncava únicamente cuando  $q < 3$ . En cuanto a la positividad de las medidas de discord, es suficiente con demandar que

$$\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) \geq \chi(P_A, B), \quad (5.11)$$

donde  $\chi(P_A, B) := S(\rho^A) - S(B|P_A)$  es la *cantidad de Holevo*, asociada al estado de  $B$  condicionado a una POVM en  $A$  con operadores  $P_A$ . Coles habla de *subaditividad firme* (FSA)<sup>60</sup>, que es menos restrictiva que la SSA. Jerárquicamente:  $SSA \Rightarrow FSA \Rightarrow SA$  [157]. Los resultados para la simulación con estados aleatorios de dos cubits (ver Figura 5.5) indicarían que las entropías de Tsallis son, de hecho, FSA para  $q \geq 1$ , mientras que las de Rényi son FSA para  $q = 1$  y —sólo posiblemente— para  $q = 0$ .

<sup>60</sup> Del inglés, *firm subadditivity*.

En el esquema de von Neumann, es indistinto definir la IM como antes o como la entropía relativa entre el estado en cuestión y el

producto de sus reducciones concomitantes,

$$\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) = \min_{\{\sigma^A, \sigma^B\}} S(\rho^{AB} \| \sigma^A \otimes \sigma^B), \quad (5.12)$$

donde la minimización corre sobre el conjunto completo de estados no correlacionados. La desigualdad de Klein garantiza la positividad de  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB})$  así definida<sup>61</sup>. La Ec. (5.12) ofrece un camino alternativo para la generalización de la información mutua en términos de otras cantidades entrópicas. Esta alternativa ha sido empleada por diferentes autores y se la conoce como *información mutua cuántica condicional* [158, 159]. Diferentes definiciones de entropías relativas de Rényi o Tsallis determinan distintas alternativas para la generalización de la IM condicional.

<sup>61</sup> La desigualdad de Klein garantiza la positividad de la entropía relativa, la cual toma el valor 0 si y sólo si los dos estados coinciden.

Una idea razonable sería la de definir la información mutua generalizada como en la Ec. (5.12) usando alguna entropía relativa generalizada o divergencia,

$$\tilde{\mathcal{I}}_q^{A|B}(\rho^{AB}) := \min_{\{\sigma^A, \sigma^B\}} S_q(\rho^{AB} \| \sigma^A \otimes \sigma^B). \quad (5.13)$$

En este esquema, la información clásica generalizada puede definirse como

$$\tilde{\mathcal{C}}_q^A(\rho^{AB}) := \max_{\Pi^A} \tilde{\mathcal{I}}_q^{A|B}(\Pi^A[\rho^{AB}]), \quad (5.14)$$

donde  $\Pi^A[\rho^{AB}] = \sum_k (\Pi_k^A \otimes \mathbb{1}^B) \rho^{AB} (\Pi_k^A \otimes \mathbb{1}^B)$  es el estado posterior a la medición  $\Pi^A$  en  $A$ . Por su parte, el discord generalizado puede computarse como la diferencia entre las cantidades anteriores,

$$\tilde{\mathcal{D}}_q^A(\rho^{AB}) := \tilde{\mathcal{I}}_q^{A|B}(\rho^{AB}) - \tilde{\mathcal{C}}_q^A(\rho^{AB}). \quad (5.15)$$

Las positivities de  $\tilde{\mathcal{I}}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}$  son garantizadas por las de las entropías relativas generalizadas. Notando que estas entropías relativas también satisfacen la *desigualdad de procesamiento de información*,  $\tilde{\mathcal{D}}^A$  también resulta positiva (ver, por ejemplo, Ref. [160]). Este esquema sugerido debe explorarse en mayor profundidad. Recientemente, la introducción de una entropía relativa de Rényi, monótona ante operaciones cuánticas generales (y que preservan la traza) en el rango  $1/2 \leq q < \infty$ , parece constituir una forma conveniente de computar la IM generalizada de los estados y, a posteriori, definir los nuevos cuantificadores de discord generalizado [160-163].

Otra alternativa, consiste en el empleo de versiones generalizadas del déficit de información —ver Ec. (1.34), pág. 29— que, como veremos a continuación, provee cantidades siempre bien definidas.

### 5.3 Medidas entrópicas unificadas de correlaciones cuánticas

En esta sección, introducimos medidas de correlaciones cuánticas basadas en el mínimo cambio inducido en las entropías unificadas de

los estados por mediciones proyectivas de rango uno. Estas medidas están divididas por un factor que depende de la pureza generalizada de los estados en el caso de las entropías no aditivas. De esta forma, se resuelve el problema del incremento artificial en el valor de las medidas de correlaciones cuánticas basadas en entropías no aditivas cuando un sistema auxiliar es anexado, sin alterar la computabilidad de las medidas entrópicas con respecto a las previamente definidas. Además, recuperamos, como casos límite, las medidas basadas en las entropías de von Neumann y Rényi (es decir, las aditivas), para las cuales el factor de ajuste se torna trivial. Por otro lado, obtenemos algunas desigualdades entre las correlaciones cuánticas totales y parciales. Finalmente, presentamos expresiones analíticas para las medidas entrópicas definidas en sistemas cuánticos bipartitos típicos.

Como ya hemos discutido, las correlaciones cuánticas yacen en el núcleo de la distinción entre los mundos clásico y cuántico. Dos paradigmas, al menos, atienden esta problemática más allá de la distinción usual entrelazado–separable [16]. Por ejemplo, el llamado *steering*, cuyo origen se remonta a trabajos seminales de Einstein, Podolski y Rosen [164] y Schrödinger [165], fueron recientemente formulados en un lenguaje operacional [166]. Estas correlaciones intermedian entre el entrelazamiento y la no localidad (es decir, la violación de desigualdades del tipo Bell [167]). Por otro lado, es posible identificar correlaciones cuánticas incluso en estados separables. Esto fue observado por Ollivier, Zurek [35], Henderson y Vedral [50], quienes derivaron el discord cuántico como huella de las correlaciones cuánticas en sistemas bipartitos. La definición original de discord se basa en la diferencia entre dos extensiones de la información mutua clásica al caso cuántico. Una generalización del discord usando formas entrópicas distintas a la entropías de von Neumann [19], tan solo reemplazándola por entropías como las de Rényi [20] o Tsallis [21], como se propone en la Ref. [147], no resulta satisfactoria [2, 168].

Acá, mostraremos cómo obtener medidas de correlaciones cuánticas usando formas entrópicas generales, las llamadas  $(q, s)$ -entropías (o entropías unificadas) [169, 170]. Para eludir la dificultad discutida en las Refs. [2, 168], seguimos un camino distinto, inspirado en los trabajos de Luo [15] y Rossignoli [48]. Proponemos como medidas de correlaciones cuánticas a la mínima perturbación inducida por mediciones locales de rango uno, en términos de las entropías unificadas, divididas por un factor de ajuste que depende de la pureza generalizada (este factor se vuelve trivial para entropías aditivas). Muchas de las medidas discutidas en la literatura, como [29, 31, 48, 68, 95, 171-176], entre otras, son casos particulares de (o próximos a) nuestra propuesta<sup>62</sup>. De hecho, el caso de entropías de tipo traza [177], que son entropías no aditivas (excepto en el caso de von Neumann), fue estudiado en las Refs. [48, 173, 174] y merece especial atención. Estas medidas entrópicas de correlaciones cuánticas se ven incrementadas de modo artificial cuando un sistema auxiliar es anexado al sistema

<sup>62</sup> Ver Ref. [26] para una revisión reciente de medidas de correlaciones cuánticas.

original (el discord geométrico [29] adolece de la misma dificultad, como fue señalado por Piani [178]). La no aditividad de las entropías tipo traza es la causa del problema. En el caso de las  $(q, s)$ -entropías, lo resolvemos introduciendo un factor de pureza generalizada, similarmente a lo hecho con el discord geométrico [175]. De esta forma, obtenemos una familia de medidas de correlaciones cuánticas que son invariantes ante la anexión de un sistema auxiliar no correlacionado, tanto en los casos de entropías aditivas como no aditivas. Más aun, la computabilidad de estas medidas permanece igual que la de sus antecesoras [48, 173, 174], dado que el factor de ajuste es simplemente la traza de una potencia del operador densidad.

### Medidas entrópicas de correlaciones cuánticas

#### ENTROPÍAS UNIFICADAS, MAYORIZACIÓN Y $(q, s)$ -PERTURBACIONES

Sea un sistema cuántico en un estado  $\rho$  que actúa sobre un espacio de Hilbert  $d$ -dimensional,  $\mathcal{H}$ . Las  $(q, s)$ -entropías cuánticas unificadas del estado son definidas como [169, 170]

$$S_{(q,s)}(\rho) = \frac{(\text{Tr}\rho^q)^s - 1}{(1-q)s}, \quad (5.16)$$

para índices entrópicos  $q > 0$ ,  $q \neq 1$  y  $s \neq 0$ . El caso límite  $q \rightarrow 1$ , para todo  $s$ , corresponde a la entropía de von Neumann,

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_{(q,s)}(\rho) \equiv S(\rho) = -\text{Tr}\rho \log \rho, \quad (5.17)$$

mientras que para  $s \rightarrow 0$ , recuperamos las versiones cuánticas de las entropías de Rényi,

$$\lim_{s \rightarrow 0} S_{(q,s)}(\rho) \equiv S_q^R(\rho) = \frac{\log \text{Tr}\rho^q}{1-q}. \quad (5.18)$$

Por otro lado, tomando  $s = 1$  damos lugar a las versiones cuánticas de las entropías de Tsallis,

$$S_{(q,1)}(\rho) \equiv S_q^T(\rho) = \frac{\text{Tr}\rho^q - 1}{1-q}. \quad (5.19)$$

Otra subfamilia interesante se obtiene cuando  $q = 2$ , ya que las entropías  $S_{(2,s)}(\rho)$  están directamente vinculadas con la pureza del estado; en particular,  $S_2^R(\rho) = -\log \text{Tr}\rho^2$  y  $S_2^T(\rho) = 1 - \text{Tr}\rho^2$ .

Una característica de las  $(q, s)$ -entropías es su no aditividad [169], la cual es reflejada por medio de la regla de adición para estados producto  $\rho^A \otimes \rho^B$  que actúan sobre  $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ ,

$$S_{(q,s)}(\rho^A \otimes \rho^B) = S_{(q,s)}(\rho^A) + S_{(q,s)}(\rho^B) + (1-q)s S_{(q,s)}(\rho^A)S_{(q,s)}(\rho^B). \quad (5.20)$$

Vale notar que en los casos  $q = 1$  y  $s = 0$ , recuperamos la aditividad conocida para las entropías de von Neumann y Rényi.

Es posible mostrar que las  $(q, s)$ -entropías preservan la relación de mayorización —ver Ec. (1.26) en pág. (1.26) y Refs. [170, 179]—, esto es,

$$\text{si } \rho \prec \sigma \text{ entonces } S_{(q,s)}(\rho) \geq S_{(q,s)}(\sigma), \quad (5.21)$$

con igualdad si y sólo si  $\rho$  y  $\sigma$  poseen los mismos autovalores. Observamos que la recíproca no vale en general, lo cual significa que mayorización es más fuerte (como relación de orden) que una elección de un único índice entrópico.

Ahora, usando la Schur-concavidad (5.21), es directo mostrar que las  $(q, s)$ -entropías están acotadas inferior y superiormente:

$$0 \leq S_{(q,s)}(\rho) \leq \frac{d^{(1-q)s} - 1}{(1-q)s}, \quad (5.22)$$

donde la primera cota se alcanza para estados puros, mientras que la segunda se alcanza para estados máximamente mezclados,  $\rho^*$ .

Los autovalores de un operador densidad  $\rho$  son invariantes ante transformaciones unitarias  $U$ . En otras palabras,  $\rho$  y  $U\rho U^\dagger$  poseen los mismos autovalores. Por lo tanto, las  $(q, s)$ -entropías son invariantes ante transformaciones unitarias,

$$S_{(q,s)}(\rho) = S_{(q,s)}(U\rho U^\dagger). \quad (5.23)$$

Al igual que con la entropía de von Neumann, podemos mostrar que el cambio en las entropías debido a mediciones locales es clave en la cuantificación de las correlaciones cuánticas —ver Ec. (1.32) en pág. (1.32)—. Para ello, recordemos la acción de un mapa biestocástico sobre un estado arbitrario: el estado final  $\Lambda_{\text{BE}}[\rho]$  está más desordenado (en términos de mayorización) que el estado inicial  $\rho$ . Como consecuencia de este orden y de la Schur-concavidad de las  $(q, s)$ -entropías, tenemos que

$$S_{(q,s)}(\Lambda_{\text{BE}}[\rho]) \geq S_{(q,s)}(\rho), \quad (5.24)$$

donde la igualdad se consigue si y sólo si  $\Lambda_{\text{BE}}[\rho] = U\rho U^\dagger$ .

De acá en adelante, nos concentramos en mediciones proyectivas de rango uno (es decir, de von Neumann) sin postselección, esto es, un conjunto de proyectores de rango uno  $\Pi = \{\Pi_i = |i\rangle\langle i|\}$ , con  $\Pi_i\Pi_{i'} = \delta_{ii'}\Pi_i$  y  $\sum_{i=1}^d \Pi_i = \mathbb{1}$ , siendo  $\{|i\rangle\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . El estado después de la medición  $\Pi$  es igual a  $\Pi[\rho] = \sum_{i=1}^d \Pi_i\rho\Pi_i = \sum_{i=1}^d p_i |i\rangle\langle i|$  con  $p_i = \langle i|\rho|i\rangle$ . Dado que las mediciones proyectivas son casos particulares de mapas biestocásticos, proponemos usar la diferencia de  $(q, s)$ -entropías entre los estados final e inicial (adecuadamente reescalados por un factor que depende de la pureza generalizada<sup>63</sup>) como distintivo de la pertur-

<sup>63</sup> El vocablo *reescalar* no figura en los diccionarios de castellano o español (por ej., en el diccionario de la RAE, <http://dle.rae.es/>). Sin embargo, nos parece el más adecuado y transparente para expresar el sentido técnico en cuestión.

bación del estado del sistema debida a la medición, esto es

$$D_{(q,s)}^{\Pi}(\rho) := \frac{S_{(q,s)}(\Pi[\rho]) - S_{(q,s)}(\rho)}{(\text{Tr } \rho^q)^s}. \quad (5.25)$$

Para cualquier elección de los índices entrópicos, esta cantidad es no negativa y se anula si y sólo si la medición no perturba al estado, es decir,  $\Pi[\rho] = \rho$ , lo cual ocurre cuando se mide en una base que diagonaliza  $\rho$ . Notemos que el factor de ajuste no participa activamente para los casos de entropías de von Neumann y Rényi, las cuales son aditivas; por el contrario, el factor es no trivial para las entropías no aditivas. Más abajo, clarificamos la importancia del factor de reescalo  $P_{(q,s)}(\rho) := (\text{Tr } \rho^q)^s$  al tratar con medidas de correlaciones cuánticas basadas en entropías no aditivas.

Finalmente, prestemos atención a estos dos casos que surgen de la definición (5.25). El primero consiste en considerar la entropía de von Neumann, en cuyo caso la perturbación puede reexpresarse como la entropía cuántica relativa (o divergencia de Kullback–Leibler) entre  $\rho$  y  $\Pi[\rho]$ ,

$$D_{(1,s)}^{\Pi}(\rho) \equiv D^{\Pi}(\rho) = S(\rho \|\Pi[\rho]). \quad (5.26)$$

El segundo proviene de evaluar (5.25) con  $q = 2$  —correspondiente a las entropías de Tsallis—, para la cual se expresa en términos de la distancia de Hilbert–Schmidt entre  $\rho$  y  $\Pi[\rho]$ , dividida por la pureza de  $\rho$ ,

$$D_{(2,1)}^{\Pi}(\rho) \equiv D_2^{\Pi}(\rho) = \frac{\|\rho - \Pi[\rho]\|^2}{\text{Tr } \rho^2}, \quad (5.27)$$

donde  $\|A\| = \sqrt{\text{Tr } A^\dagger A}$  es la norma de Hilbert–Schmidt.

### Correlaciones cuánticas mediante mediciones locales

Consideremos ahora un sistema bipartito  $AB$  en el estado  $\rho^{AB}$  que actúa sobre  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ . Siguiendo lo expuesto en la pág. 29 del capítulo 1, podemos usar (5.25) para cuantificar la perturbación debida a una medición proyectiva local  $\Pi^K$ ,

$$D_{(q,s)}^{\Pi^K}(\rho^{AB}) = \frac{S_{(q,s)}(\Pi^K[\rho^{AB}]) - S_{(q,s)}(\rho^{AB})}{P_{(q,s)}(\rho^{AB})}. \quad (5.28)$$

Nos referimos a  $D_{(q,s)}^{\Pi^K}$ , con  $K = A, B$ , como *perturbaciones unilocales*, mientras que  $D_{(q,s)}^{\Pi^{A|B}}$  las llamamos *perturbaciones bilocales*.

Con el fin de obtener una figura de correlaciones cuánticas que sea independiente de la medición, tomamos el mínimo de todas las perturbaciones (5.28) sobre el conjunto de mediciones locales<sup>64</sup>,

$$D_{(q,s)}^K(\rho^{AB}) := \min_{\Pi^K} D_{(q,s)}^{\Pi^K}(\rho^{AB}). \quad (5.29)$$

Las siguientes propiedades justifican nuestra propuesta de (5.29) como medida de correlaciones cuánticas:

<sup>64</sup> En la Ref. [180] puede verse un tratamiento análogo para sistemas fermiónicos y entropías de tipo traza.



(i) No negatividad:  $D_{(q,s)}^K(\rho^{AB}) \geq 0$  con igualdad si y sólo si  $\rho^{AB} \in \Omega^K$ , con  $K = A, B$ . Así,  $D_{(q,s)}^K$  son medidas de correlaciones cuánticas parciales (con respecto a  $\mathcal{H}^K$ ), mientras que  $D_{(q,s)}^{AB}$  son medidas de correlaciones cuánticas totales.

(ii) Invariancia ante operaciones locales unitarias:

$$D_{(q,s)}^K(U \otimes V \rho^{AB} U^\dagger \otimes V^\dagger) = D_{(q,s)}^K(\rho^{AB}),$$

con  $K = A, B, A|B$ , donde  $U$  y  $V$  son operadores unitarios sobre  $A$  y  $B$ , respectivamente.

(iii) Invariancia ante la anexión de un sistema auxiliar no correlacionado:  $D_{(q,s)}^K(\rho^{AB} \otimes \rho^C) = D_{(q,s)}^K(\rho^{AB})$  para biparticiones  $A|BC$  y  $B|AC$  (para la bipartición  $AB|C$  las medidas de correlaciones cuánticas se anulan trivialmente).

La primera propiedad es una consecuencia directa de la relación de mayorización entre los estados pre y post medición. La segunda propiedad podemos probarla partiendo de la definición de nuestra medida, Ec. (5.29), notando que

$$\Pi^K(U \otimes V \rho^{AB} U^\dagger \otimes V^\dagger) = U \otimes V \tilde{\Pi}^K(\rho^{AB}) U^\dagger \otimes V^\dagger, \quad (5.30)$$

con  $\tilde{\Pi}^K = U^\dagger \otimes V^\dagger \Pi^K U \otimes V$ , y recordando la invariancia de las  $(q, s)$ -entropías bajo transformaciones unitarias. La tercera propiedad es menos obvia y está vinculada con la regla de adición (5.20) de las  $(q, s)$ -entropías. De hecho, el factor de pureza generalizada  $P_{(q,s)}(\rho^{AB})$  es clave en la satisfacción de esta propiedad en el caso de entropías no aditivas, sin afectar la complejidad computacional de las medidas. En general, esta propiedad no ha sido tomada en cuenta en la literatura de medidas entrópicas no aditivas de correlaciones cuánticas. Por ejemplo, aquellas basadas en la diferencia entre entropías de tipo traza<sup>65</sup>, es decir,  $S_f(\rho) = \text{Tr } f(\rho)$  con  $f : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$  cóncava y  $f(0) = 0$  [177], han sido tratadas en las Refs. [48, 174]. Sin embargo, estas medidas no son invariantes ante la anexión de un sistema auxiliar no correlacionado, excepto en el caso de entropías de von Neumann. Esto es una consecuencia directa de la no-aditividad de las entropías de tipo traza<sup>66</sup>. Más aun, nuestras medidas de correlaciones cuánticas parciales pueden interpretarse como una derivación cuántica de la regla de Bayes [174].

Es interesante observar que nuestras medidas incluyen varios casos importantes ya discutidos en la literatura. El primero refiere a evaluar (5.29) en el caso de la entropía de von Neumann, para la cual reobtenemos la medida de *déficit informacional*<sup>67</sup> [68], la cual puede reescribirse en términos de la mínima entropía relativa sobre los conjuntos  $\Omega^K$  [172],

$$D^K(\rho^{AB}) = \min_{\Pi^K} S(\rho^{AB} \|\Pi^K[\rho^{AB}]) = \min_{\chi^{AB} \in \Omega^K} S(\rho^{AB} \|\chi^{AB}). \quad (5.31)$$

<sup>65</sup> Cabe observar que las  $(q, s)$ -entropías se reducen a entropías de tipo traza sólo cuando  $s = 1$  (entropías de Tsallis).

<sup>66</sup> Para una discusión más amplia sobre las condiciones necesarias y razonables en la definición de medidas de correlaciones cuánticas, ver Ref. [181].

<sup>67</sup> O, en inglés, *information deficit*.



El segundo caso surge al evaluar (5.29) para la entropía de Tsallis con índice igual 2. La medida correspondiente está relacionada con el *discord geométrico* [29],

$$D_G^K(\rho^{AB}) = \min_{\chi^{AB} \in \Omega^K} \|\rho^{AB} - \chi^{AB}\|^2. \quad (5.32)$$

De hecho, usando la expresión de  $D_G^K$  en términos de mediciones locales proyectivas dadas en la Ref. [95], tenemos que

$$D_2^K(\rho^{AB}) = \frac{\min_{\Pi^K} \|\rho^{AB} - \Pi^K[\rho^{AB}]\|^2}{\text{Tr}(\rho^{AB})^2} = \frac{D_G^K(\rho^{AB})}{\text{Tr}(\rho^{AB})^2}. \quad (5.33)$$

Observemos que  $D_G^K$  no es invariante en el sentido de la tercera propiedad [178]. El factor de ajuste salva este inconveniente [175], aunque no es el único modo de resolverlo (ver, por ej., Refs. [175, 182]). Finalmente, en el caso de las entropías de Rényi, recientemente introducido en Ref. [176], nuestra medida satisface la invariancia requerida al anexas un sistema auxiliar no correlacionado.

#### COTA INFERIOR DE (5.29) Y SU RELACIÓN CON EL ENTRELAZAMIENTO

Primero, observemos que, dado que los estados CC son separables, cumplen algunas desigualdades entrópicas de separabilidad (ver, por ej., Ref. [179]),

$$S_{(q,s)}(\Pi^K[\rho^{AB}]) \geq \max \left\{ S_{(q,s)}(\text{Tr}_A \Pi^K[\rho^{AB}]), S_{(q,s)}(\text{Tr}_B \Pi^K[\rho^{AB}]) \right\}, \quad K = A, B, A|B. \quad (5.34)$$

Por otro lado, los estados reducidos finales correspondientes son

$$\text{Tr}_A \Pi^A[\rho^{AB}] = \rho^B \quad \text{y} \quad \text{Tr}_B \Pi^A[\rho^{AB}] = \text{Tr}_B \Pi^{A|B}[\rho^{AB}] = \sum_i p_i^A \Pi_i^A = \rho_{\text{diag}}^A, \quad (5.35)$$

$$\text{Tr}_B \Pi^B[\rho^{AB}] = \rho^A \quad \text{y} \quad \text{Tr}_A \Pi^B[\rho^{AB}] = \text{Tr}_A \Pi^{A|B}[\rho^{AB}] = \sum_j p_j^B \Pi_j^B = \rho_{\text{diag}}^B, \quad (5.36)$$

donde  $\rho_{\text{diag}}^K$  denota la diagonal de  $\rho^K$  en la base definida por  $\{\Pi_i^K\}$ , con  $K = A, B$ . Dado que  $\rho_{\text{diag}}^K \prec \rho^K$  (ver, por ej., Ref. [23]) y dada la Schur-concavidad de las  $(q, s)$ -entropías, la desigualdad (5.34) se reduce a

$$S_{(q,s)}(\Pi^K[\rho^{AB}]) \geq \max \left\{ S_{(q,s)}(\rho^A), S_{(q,s)}(\rho^B) \right\}. \quad (5.37)$$

Así, insertando (5.37) en (5.28) para acotar inferiormente a  $D_{(q,s)}^{\Pi^K}$  y tomando el mínimo, obtenemos que las medidas de correlaciones cuánticas están acotadas por abajo como sigue

$$D_{(q,s)}^K(\rho^{AB}) \geq \max \left\{ \frac{S_{(q,s)}(\rho^A) - S_{(q,s)}(\rho^{AB})}{P_{(q,s)}(\rho^{AB})}, \frac{S_{(q,s)}(\rho^B) - S_{(q,s)}(\rho^{AB})}{P_{(q,s)}(\rho^{AB})} \right\}, \quad K = A, B, A|B. \quad (5.38)$$

Vale notar que esta cota podría ser no trivial únicamente para estados entrelazados; de hecho, el miembro derecho de (5.38) es negativo para estados separables. Un resultado similar ha sido obtenido en el caso de las entropías tipo traza [48].

Ahora, consideremos un estado puro  $\rho^{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|^{AB}$  y supongamos que

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} |k\rangle^A \otimes |k\rangle^B \quad (5.39)$$

es su descomposición de Schmidt ( $n \leq \min\{d_A, d_B\}$  y  $\{|k\rangle^K\}$ ,  $K = A, B$ , es un conjunto ortonormal). Luego, podemos ver que los estados reducidos  $\rho^A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|^{AB}$  y  $\rho^B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi|^{AB}$  poseen la misma entropía unificada y, como consecuencia, la cota inferior (5.38) se reduce a  $S_{(q,s)}(\rho^A) = S_{(q,s)}(\rho^B)$  para estados puros  $\rho^{AB}$ . Además, la cota es saturada cuando las mediciones locales se derivan de las bases de Schmidt: tomando los proyectores locales  $\Pi_k^K = |k\rangle\langle k|^K$  (completando para tener  $d_K$  proyectores), el estado resultante es  $\Pi^K(\rho^{AB}) = \sum_k \lambda_k \Pi_k^A \otimes \Pi_k^B$ , cuyas entropías unificadas son  $S_{(q,s)}(\Pi^K(\rho^{AB})) = S_{(q,s)}(\rho^A) = S_{(q,s)}(\rho^B)$ . Por lo tanto, obtenemos que para los estados puros estas medidas son generalizaciones de la entropía de entrelazamiento,

$$D_{(q,s)}^K(\rho^{AB}) = S_{(q,s)}(\rho^A) = S_{(q,s)}(\rho^B), \quad (5.40)$$

las cuales se reducen a la medida estándar en el caso de la entropía de von Neumann [183].

#### DESIGUALDADES ENTRE LAS CORRELACIONES CUÁNTICAS TOTALES Y PARCIALES

Es posible hallar algunas relaciones interesantes entre las correlaciones totales y parciales cuando se invocan perturbaciones bilocales,  $D_{(q,s)}^{\Pi^{A|B}}$ , reescritas en términos de las unilocales,

$$D_{(q,s)}^{\Pi^{A|B}}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^{\Pi^A}(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi^A} D_{(q,s)}^{\Pi^B}(\Pi^A[\rho^{AB}]), \quad (5.41)$$

$$D_{(q,s)}^{\Pi^{A|B}}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^{\Pi^B}(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi^B} D_{(q,s)}^{\Pi^A}(\Pi^B[\rho^{AB}]), \quad (5.42)$$

donde  $\pi_{(q,s)}^{\Pi} := \frac{P_{(q,s)}(\Pi[\rho^{AB}])}{P_{(q,s)}(\rho^{AB})}$  (para ser concisos, omitimos la dependencia de este factor en el estado). Esta cantidad,  $\pi_{(q,s)}^{\Pi}$ , es no negativo pero puede tomar valores menores o mayores a 1, dependiendo en el valor del índice entrópico  $q$ . Dado que  $\Pi[\rho] \prec \rho$ , tenemos que  $(\Pi[\rho])^q \prec \rho^q$  si  $q \geq 1$ , mientras que  $\rho \prec \Pi[\rho]$  vale si  $0 \leq q < 1$ . Luego,  $\pi_{(q,s)}^{\Pi} \in (0, 1]$  si  $q \geq 1$ , y en otro caso  $\pi_{(q,s)}^{\Pi} \geq 1$ . En particular, para las entropías de Rényi este factor es siempre igual a 1.

Ahora, consideremos dos escenarios de medición posibles:

- $\Pi_0^{A|B} = \Pi_0^A \circ \Pi_0^B$  es una medición bilocal que minimiza la perturbación total, es decir  $D_{(q,s)}^{\Pi_0^{A|B}}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB})$ ,

- $\Pi_1^{A|B} = \Pi_1^A \circ \Pi_1^B$ , donde  $\Pi_1^K$  optimiza las perturbaciones unilocales, es decir,  $D_{(q,s)}^{\Pi_1^K}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^K(\rho^{AB})$ ,  $K = A, B$ .

Usando las ecuaciones (5.41)–(5.42) en ambos escenarios, obtenemos que

$$\begin{aligned} D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) &= D_{(q,s)}^{\Pi_0^A}(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_0^A} D_{(q,s)}^{\Pi_0^B}(\Pi_0^A[\rho^{AB}]) \\ &= D_{(q,s)}^{\Pi_0^B}(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_0^B} D_{(q,s)}^{\Pi_0^A}(\Pi_0^B[\rho^{AB}]), \end{aligned} \quad (5.43)$$

y

$$\begin{aligned} D_{(q,s)}^{\Pi_1^{A|B}}(\rho^{AB}) &= D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_1^A} D_{(q,s)}^{\Pi_1^B}(\Pi_1^A[\rho^{AB}]) \\ &= D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_1^B} D_{(q,s)}^{\Pi_1^A}(\Pi_1^B[\rho^{AB}]). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Usando que  $D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) \leq D_{(q,s)}^{\Pi_1^{A|B}}(\rho^{AB})$  (y las relaciones análogas para las perturbaciones unilocales) en (5.43)–(5.44), podemos mostrar que  $D_{(q,s)}^{A|B}$  es acotado inferior y superiormente del siguiente modo,

$$D_{(q,s)}^{A|B} \geq \max\{D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_0^A} D_{(q,s)}^{\Pi_0^B}(\Pi_0^A[\rho^{AB}]), D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_0^B} D_{(q,s)}^{\Pi_0^A}(\Pi_0^B[\rho^{AB}])\}, \quad (5.45)$$

$$D_{(q,s)}^{A|B} \leq \min\{D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_1^A} D_{(q,s)}^{\Pi_1^B}(\Pi_1^A[\rho^{AB}]), D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}) + \pi_{(q,s)}^{\Pi_1^B} D_{(q,s)}^{\Pi_1^A}(\Pi_1^B[\rho^{AB}])\}. \quad (5.46)$$

En particular, dado que las perturbaciones unilocales subóptimas en (5.45) son no negativas, se sigue que naturalmente las medidas de correlaciones totales superan (o igualan) a las parciales,

$$D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) \geq \max\{D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}), D_{(q,s)}^B(\rho^{AB})\}. \quad (5.47)$$

Este resultado también puede obtenerse de forma más directa, partiendo del hecho de que  $S_{(q,s)}(\Pi_0^{A|B}[\rho^{AB}]) \geq S_{(q,s)}(\Pi_1^K[\rho^{AB}])$ . Cabe notar que (5.47) está en acuerdo con las relaciones de inclusión entre los conjuntos de estados CC, es decir,  $\Omega^{A|B} = \Omega^A \cap \Omega^B \subset \Omega^K$ ,  $K = A, B$ .

Por otro lado, notando que  $2 D_{(q,s)}^{\Pi^{A|B}}(\rho^{AB}) \geq D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) + D_{(q,s)}^{\Pi^{A|B}}(\rho^{AB}) \geq 2 D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB})$  podemos deducir, de las ecuaciones (5.43)–(5.44), la siguiente desigualdad para la suma de correlaciones parciales:

$$D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) + \Delta_0 \geq D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) + D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}) \geq D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) + \Delta_1, \quad (5.48)$$

donde definimos las cantidades

$$\Delta_i := D_{(q,s)}^{\Pi_i^{A|B}}(\rho^{AB}) - \pi_{(q,s)}^{\Pi_i^B} D_{(q,s)}^{\Pi_i^A}(\Pi_i^B[\rho^{AB}]) - \pi_{(q,s)}^{\Pi_i^A} D_{(q,s)}^{\Pi_i^B}(\Pi_i^A[\rho^{AB}]), \quad (5.49)$$

con  $i = 0, 1$ .

Para los estados parcialmente clásicos, se tiene que  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Pi_1^K$  estando definido por el conjunto  $\{\Pi_i^K\}$  de modo que no perturba el estado conjunto.

Finalmente, para estados clásico-clásicos todas las cantidades en (5.48) se anulan. Por ende, de estas observaciones y de (5.47), concluimos que

- si  $D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) = 0$ , entonces  $D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^B(\rho^{AB})$ ,
- si  $D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}) = 0$ , entonces  $D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^A(\rho^{AB})$ ,
- si  $D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) = 0$ , entonces  $D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}) = 0$ .

Lo que es aún más interesante, surge una *desigualdad de tipo triangular* entre las correlaciones totales y parciales,

$$D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) + D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}) \geq D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) \quad (5.50)$$

que se satisface trivialmente para los estados CC. La validez de la desigualdad (5.50) en el caso general radica en el signo del término  $\Delta_1$ . Si  $\Delta_1 \geq 0 \forall \rho^{AB}$ , la desigualdad es siempre válida. Por el contrario, si  $\Delta_1 < 0$  para algún  $\rho^{AB}$  entonces podría ser el caso de que la desigualdad no se sostenga para tales estados.

Aunque las condiciones más generales para garantizar la validez de la desigualdad de tipo triangular (5.50) son difíciles de establecer, podemos vincularla con una propiedad asociada a la contractividad de las perturbaciones locales. Específicamente, si asumimos como válidas las siguientes desigualdades:

$$\pi_{(q,s)}^{\Pi_j^B} D_{(q,s)}^{\Pi_i^A}(\Pi_j^B[\rho^{AB}]) \leq D_{(q,s)}^{\Pi_i^A}(\rho^{AB}), \quad (5.51)$$

$$\pi_{(q,s)}^{\Pi_j^A} D_{(q,s)}^{\Pi_i^B}(\Pi_j^A[\rho^{AB}]) \leq D_{(q,s)}^{\Pi_i^B}(\rho^{AB}). \quad (5.52)$$

tenemos que

$$\pi_{(q,s)}^{\Pi_1^B} D_{(q,s)}^{\Pi_1^A}(\Pi_1^B[\rho^{AB}]) \leq D_{(q,s)}^{\Pi_1^A}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}), \quad (5.53)$$

$$\pi_{(q,s)}^{\Pi_1^A} D_{(q,s)}^{\Pi_1^B}(\Pi_1^A[\rho^{AB}]) \leq D_{(q,s)}^{\Pi_1^B}(\rho^{AB}) = D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}), \quad (5.54)$$

y, reemplazando cualquiera de estas relaciones en (5.44), se sigue que

$$D_{(q,s)}^{\Pi_1^{A|B}}(\rho^{AB}) \leq D_{(q,s)}^A(\rho^{AB}) + D_{(q,s)}^B(\rho^{AB}). \quad (5.55)$$

Finalmente, recordando que  $D_{(q,s)}^{A|B}(\rho^{AB}) \leq D_{(q,s)}^{\Pi_1^{A|B}}(\rho^{AB})$ , tenemos que la desigualdad de tipo triangular (5.50) sería válida.

En resumen, somos capaces de vincular la validez de la desigualdad de tipo triangular, para todos los estados e índices entrópicos, con

un tipo de contractividad ante mediciones proyectivas locales de las perturbaciones unilocales (5.51)–(5.52). En el caso de la entropía de von Neumann, las desigualdades (5.51)–(5.52) son casos particulares de la contractividad de la entropía cuántica relativa bajo la acción de mapas CPTP [184]. En otro caso, para la entropía de Tsallis de índice 2, las desigualdades (5.51)–(5.52) son casos particulares de la contractividad de la norma de Hilbert–Schmidt bajo mediciones proyectivas [185]<sup>68</sup>. Por ende, en ambos casos la desigualdad se satisface. Lamentablemente, la contractividad local no es válida para funciones entrópicas generales. De hecho, en la Figura 5.8 podemos ver que es así para un rango amplio del índice entrópico de las entropías de Rényi y Tsallis.

<sup>68</sup> Ver Ref. [31] para una demostración alternativa.

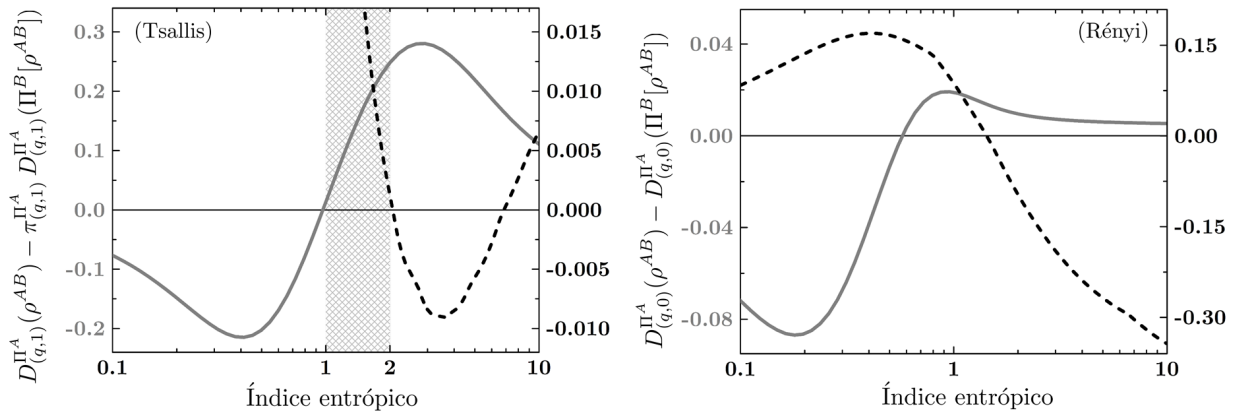


Figura 5.8: Diferencias mínimas entre  $D_{(q,s)}^{\Pi^A}(\rho^{AB})$  y  $\pi_{(q,s)}^{\Pi^A} D_{(q,s)}^{\Pi^A}(\Pi^B[\rho^{AB}])$  computadas para  $10^3$  mediciones locales proyectivas,  $\Pi^{A(B)}$ , generadas aleatoriamente, usando entropías de Tsallis (recuadro izquierdo) y de Rényi (recuadro derecho). Cada línea corresponde a un estado de dos cubits generado también de manera aleatoria. Notar que, para un rango amplio de valores del índice entrópico, estas diferencias son negativas, implicando la violación de la contractividad ante mediciones proyectivas locales (ver las relaciones (5.51)–(5.52) y el texto para más detalles). Cuando  $q = 1$ , ambas medidas convergen a la de von Neumann, la cual satisface la propiedad de contractividad. Lo mismo ocurre cuando  $q = 2$ , correspondiendo a la distancia de Hilbert–Schmidt. Curiosamente, en el caso de Tsallis no hemos podido hallar un contraejemplo a la contractividad mencionada en el intervalo  $q \in (1, 2)$  (región sombreada del recuadro izquierdo).

Veamos ahora algunos cálculos analíticos que ejemplifican el cómputo de las medidas propuestas y permiten elucidar algunas otras virtudes del enfoque generalizador.

### Algunos ejemplos interesantes

#### MEZCLAS DE UN ESTADO PURO CON EL ESTADO MÁXIMAMENTE MEZCLADO

Un primer caso en el que los cálculos pueden llevarse a cabo de forma analítica involucra a la familia de estados *pseudopuros*, dada por la mezcla de un estado puro arbitrario,  $|\psi\rangle^{AB} \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , con el estado máximamente mezclado, resultando en

$$\rho_p^{AB} = (1-p) \frac{\mathbf{1}^{AB}}{d_{AB}} + p |\psi\rangle \langle \psi|^{AB}, \quad (5.56)$$

con  $0 \leq p \leq 1$  y  $d_{AB} = d_A d_B = \dim \mathcal{H}^{AB}$ . El espectro de  $\rho_p^{AB}$  está dado por el autovalor  $\frac{1-p}{d_{AB}} + p$ , con multiplicidad 1, y los autovalores

$\frac{1-p}{d_{AB}}$ , con multiplicidad  $d_{AB} - 1$ . Las mediciones que optimizan tanto los cuantificadores unilocales como el bilocal son únicas (es decir, no dependen de la forma entrópica) y están dadas por las bases de Schmidt [48]. Este carácter entrópico-independiente no es universal, sino que depende de los estados en cuestión. En este caso, medir en las bases de Schmidt devuelve un espectro final que es mayorizado por cualquier otro espectro asociado a una medición distinta, implicando esta optimización entrópico-independiente. Después de la medición, el espectro está dado por el autovalor  $\frac{1-p}{d_{AB}}$ , con multiplicidad  $d_{AB} - n$ , y los autovalores  $\frac{1-p}{d_{AB}} + p \lambda_k$  con  $1 \leq k \leq n$ , donde  $n$  es el número de Schmidt y  $\lambda_k$  los cuadrados de los coeficientes de Schmidt (5.39). Usando la ecuación (5.29), obtenemos

$$D_{(q,s)}^K(\rho_p^{AB}) = \frac{1}{(1-q)^s} \left[ \left( \frac{(d_{AB} - n)(1-p)^q + \sum_{k=1}^n [1 + (d_{AB}\lambda_k - 1)p]^q}{(d_{AB} - 1)(1-p)^q + [1 + (d_{AB} - 1)p]^q} \right)^s - 1 \right] \quad (5.57)$$

para las medidas unificadas de correlaciones cuánticas de los estados pseudopuros. Es notable que, en este caso particular y dada la coincidencia entre las correlaciones parciales y totales, la desigualdad de tipo triangular (5.50) se sostiene aun para las  $(q, s)$ -entropías más generales.

En particular, cuando  $|\psi^{AB}\rangle$  es máximamente entrelazado, con  $d_A = d_B = d$ , los estados  $\rho_p^{AB}$  constituyen una familia de estados isotrópicos,  $\rho_p^I$ . En ese caso,  $\forall k, \lambda_k = d^{-1}$ ,  $n = d$ , y las correlaciones unificadas son

$$D_{(q,s)}^K(\rho_p^I) = \frac{1}{(1-q)^s} \left[ \left( \frac{(d^2 - d)(1-p)^q + d[1 + (d-1)p]^q}{(d^2 - 1)(1-p)^q + [1 + (d^2 - 1)p]^q} \right)^s - 1 \right]. \quad (5.58)$$

Especializando esto para las entropías de Tsallis y Rényi, respectivamente,

$$D_{(q,1)}^K(\rho_p^I) = \frac{1}{1-q} \left[ \frac{(d^2 - d)(1-p)^q + d[1 + (d-1)p]^q}{(d^2 - 1)(1-p)^q + [1 + (d^2 - 1)p]^q} - 1 \right], \quad (5.59)$$

$$D_{(q,0)}^K(\rho_p^I) = \frac{1}{1-q} \ln \left[ \frac{d(1-p + dp)^q + (d^2 - d)(1-p)^q}{(1-p + d^2p)^q + (d^2 - 1)(1-p)^q} \right]. \quad (5.60)$$

#### ESTADOS DE WERNER E ISOTRÓPICOS

Analicemos ahora los estados de Werner e isotrópicos. Aunque los estados isotrópicos, como vimos, son casos particulares de la ecuación (5.56), es decir, mezclas de un estado puro con el máximamente mezclado, pretendemos mostrar que tanto los isotrópicos [186] como los de Werner [16], dadas sus simetrías, pueden tratarse análogamente al observar que el cálculo se independiza de la medición local seleccionada. Un estado de Werner es un estado  $d \times d$ -dimensional

que es invariante ante transformaciones locales unitarias de la forma  $U \otimes U$ , con  $U$  una unitaria arbitraria que actúa sobre sistemas  $d$ -dimensionales, esto es,  $\rho^W = U \otimes U \rho U^\dagger \otimes U^\dagger$ . Por otro lado, un estado isotrópico  $d \times d$ -dimensional es invariante ante unitarias locales de la forma  $U \otimes U^*$ , es decir,  $\rho^I = U \otimes U^* \rho U^\dagger \otimes (U^*)^\dagger$ . Los estados con esas características pueden parametrizarse, respectivamente, como

$$\rho_x^W = \frac{d-x}{d^3-d} I + \frac{dx-1}{d^3-d} F, \quad (5.61)$$

con  $F = \sum_{ij} |ij\rangle \langle ji|$ ,  $1 \leq i, j \leq d$ ,  $x \in [-1, 1]$ , y

$$\rho_y^I = \frac{1-y}{d^2-1} I + \frac{d^2y-1}{d^2-1} |\psi^+\rangle \langle \psi^+|, \quad (5.62)$$

con  $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |ii\rangle$  y  $y \in [\frac{1}{d^2}, 1]$ . Notar que ambas definiciones de estados isotrópicos —aquella derivada de la ecuación (5.56) y la dada por (5.62)— coinciden haciendo la identificación  $p = \frac{d^2y-1}{d^2-1}$  y  $|\psi\rangle^{AB} = |\psi^+\rangle$ .

Para ver que toda medición local produce la misma perturbación sobre estas familias de estados, consideremos  $\Pi_1^A$  como la medición óptima unilocal sobre  $A$ . Cualquier otra medición local se escribe mediante una transformación unitaria sobre  $\Pi_1^A$ , como  $\Pi_V^A = V \otimes \mathbb{1}^B \Pi_1^A V^\dagger \otimes \mathbb{1}^B$ , con  $V$  una unitaria arbitraria sobre  $A$ . Luego, usando la propiedad invariante de los estados de Werner, la acción de  $\Pi_V^A$  es  $\Pi_V^A[\rho_x^W] = V \otimes V \Pi_1^A V^\dagger \otimes V^\dagger$ . Resultados análogos valen para los estados isotrópicos y mediciones sobre  $B$ . Invocando la invariancia de las  $(q, s)$ -entropías bajo la acción de transformaciones unitarias, tenemos que el mínimo en (5.29) es alcanzado por cualquier medición proyectiva local. Para probar que nada cambia al considerar mediciones bilocales, es suficiente observar que después de cualquier medición local el estado final es CC. Por ende, dado que la perturbación total puede computarse via las perturbaciones parciales (ver Ecs. (5.41)–(5.42)), las correlaciones totales son iguales a las parciales.

Con el fin de tener una expresión explícita para las correlaciones unificadas, es más fácil medir en la base estándar (usadas en las definiciones de  $F$  en los estados de Werner y  $|\psi^+\rangle$  en los isotrópicos), lo que da lugar a

$$D_{(q,s)}^K(\rho_x^W) = \frac{1}{(1-q)^s} \left[ \left( \frac{2[(d-1)^q(x+1)^q + (d-1)(d-x)^q]}{2(d-1)^q(x+1)^q + (d-1)[(d-x + \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2})^q + (d-x - \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2})^q]} \right)^s - 1 \right] \quad (5.63)$$

y

$$D_{(q,s)}^K(\rho_y^I) = \frac{1}{(1-q)^s} \left[ \left( \frac{d[(d-1)(1-y)^q + (1-y + dy - \frac{1}{d})^q]}{(d^2-1)^q y^q + (d^2-1)(1-y)^q} \right)^s - 1 \right]. \quad (5.64)$$

Una vez más, es importante notar que estas familias de estados se hallan entre las que satisfacen la desigualdad (5.50) para cualquier  $(q, s)$ -entropía.

EN ESTE APARTADO, tratamos el problema de la cuantificación de correlaciones cuánticas más allá del discord. Específicamente, siguiendo la Ref. [15], obtuvimos medidas entrópicas de correlaciones cuánticas bipartitas cuantificando la perturbación del estado del sistema ante mediciones locales. Nuestras medidas están basadas en formas entrópicas muy generales dadas por las  $(q, s)$ -entropías [169, 170]. En consecuencia, obtuvimos medidas que incluyen, como casos particulares, o son cercanas a otras medidas previamente discutidas en la literatura [29, 31, 48, 68, 95, 171-176]. Nuestra principal contribución es la propuesta de tales medidas de correlaciones cuánticas basadas en las  $(q, s)$ -entropías unificadas tales que: (i) son no negativas y se anulan sólo para estados CC, (ii) invariantes ante operaciones locales unitarias, y (iii) invariantes ante la anexión de un sistema auxiliar no correlacionado. Respecto a esta última propiedad, mostramos que para  $q \nrightarrow 1$  o  $s \nrightarrow 0$ , esto es, cuando las  $(q, s)$ -entropías son no aditivas, es necesario reescalar las perturbaciones por un factor de pureza generalizada para evitar efectos indeseables presentes en algunas medidas entrópicas previamente estudiadas [48, 173, 174].

Además, distinguiendo entre correlaciones totales y parciales, mostramos una desigualdad tipo triangular que satisfacen solo ciertas familias de estados —los CC, los de Werner y los isotrópicos— para cualquier entropía unificada. En el caso general, únicamente probamos su validez para las entropías de von Neumann y Tsallis de orden 2, lo cual se deriva de una propiedad de contractividad de la entropía cuántica relativa y de la norma de Hilbert-Schmidt ante mediciones proyectivas. Proveímos contraejemplos numéricos donde la contractividad local de las perturbaciones unilocales falla para un rango amplio de índices entrópicos de las entropías de Rényi y Tsallis, pero permanece abierta la pregunta acerca de si la desigualdad tipo triangular es válida para otras medidas entrópicas.

Finalmente, presentamos expresiones analíticas para la familia completa de medidas en el caso de estados pseudopuros, de Werner e isotrópicos. Para estas familias de estados, las mediciones óptimas para las perturbaciones unilocales y bilocales resultan independientes de la forma entrópica.

## 5.4 Resumen del capítulo 5

- Exploramos ciertas propuestas de medidas de discord generalizadas definidas en términos de las entropías de Rényi y Tsallis. Mostramos inconvenientes relacionados con propiedades de



(no)aditividad de las mismas.

- En particular, refutamos una conjetura presentada por Hou y col. en la Ref. [147], referida a la positividad de diferentes versiones cuánticas de informaciones mutuas generalizadas, definidas vía las entropías de Rényi y Tsallis.
- Propusimos, como alternativa, una familia de medidas en términos de la familia de entropías unificadas —que incluye a las de Rényi y Tsallis— basándonos en el esquema de medidas inducidas por la perturbación ante mediciones locales (vinculado a la medida del déficit de información).
- Mostramos que nuestra propuesta cumple con las condiciones razonables para cuantificar las correlaciones de tipo discord. Además, exhibimos desigualdades importantes entre las correlaciones parciales (evidenciadas por mediciones unilocales) y totales (asociadas a mediciones bilocales) de estados arbitrarios.
- Computamos analíticamente estas medidas unificadas para algunos ejemplos relevantes, como son los casos de estados de Werner e isotrópicos.



## 6 CONCLUSIONES

### 6.1 Resumen y conclusiones

En el curso de este trabajo discutimos varios resultados que aportan mayor claridad al rol que juegan los aspectos cuánticos de los sistemas físicos en el procesamiento de la información y la realización de tareas computacionales o de cálculo.

En primer lugar, en el capítulo 1 hicimos un repaso breve por los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica que nos fueran útiles a lo largo de la tesis.

En el capítulo 2, introducimos el problema que guiaría nuestra investigación posterior: el de estados clásicamente correlacionados vistos como extensiones formales de estados cuánticos separables. Específicamente, vimos que:

- El fenómeno es relevante incluso en el caso de menor dimensión posible: un sistema bipartito compuesto de tres cubits. En ese modelo, analizamos cuantificadores informacionales tanto de los estados clásicamente correlacionados como de sus reducciones, poniendo especial atención en la información mutua de los primeros y las medidas inducidas por perturbaciones ante mediciones (locales) de los segundos. En esos modelos, estudiamos la dependencia entre ambos cuantificadores, encontrando cotas analíticas y familias de estados que satisfacen dichas cotas de forma ajustada.
- Esos resultados sugieren una conclusión más arriesgada: la consideración de la dimensión del espacio de Hilbert de un estado cuántico (asociada a la dimensionalidad de los grados de libertad relevantes del sistema físico) como recurso genuino y efectivo para la concreción de tareas de procesamiento de información cuántica. Esta afirmación, la fundamos en el estudio de modelos bipartitos de protocolos conocidos, como la preparación remota de estados y la distribución de entrelazamiento, mostrando que tales tareas pueden llevarse a cabo con estados clásicamente correlacionados, y que la eficiencia de aquellas puede explicarse desde el monto de correlaciones “clásicas” de estos estados. Además, mostramos otros dos aspectos cuánticos importantes que poseen los estados

clásicamente correlacionados. En primer lugar, mostramos que la mínima (respecto a la dimensión del sistema auxiliar) extensión clásicamente correlacionada de un estado cuántico está asociada al mínimo de trabajo termodinámico extraíble. En segundo lugar, mostramos que la posibilidad de hallar una extensión formal clásicamente correlacionada de un cierto estado cuántico está estrechamente ligada a la naturaleza no monógama de las medidas de tipo discord.

Motivados por la relevancia de los resultados anteriores, el siguiente paso consistió en la búsqueda detallada de extensiones clásicamente correlacionadas de estados cuánticos bipartitos de baja dimensión. Así, en el capítulo 3, pudimos extraer una serie de resultados interesantes:

- La extensión para un cierto estado no es única, pero resulta significativo definir una extensión óptima como aquella cuya dimensión es la menor de entre todas las extensiones posibles.
- Demostramos la existencia de una cota inferior para la dimensión del sistema auxiliar al extender clásicamente un estado bipartito arbitrario, y hallamos una expresión analítica cerrada para ésta. Siendo que el algoritmo de extensión de Li y Luo permite derivar una cota superior en todos los casos, la dimensión del sistema auxiliar correspondiente a una extensión óptima está completamente acotada. Aunque no pudimos determinar si la cota inferior hallada es ajustada, sí mostramos que en algunos casos lo es, y en esos casos provee una mejora respecto al algoritmo de Li y Luo. Además, mostramos que la dimensión del sistema auxiliar posee un escaleo polinómico con la dimensión de los subsistemas.
- Para estados separables de dos cubits y máximo discord, propusimos expresiones explícitas para sus extensiones óptimas. De ese modo, se tiene un catálogo de estados clásicamente correlacionados cuya potencialidad cuántica es equivalente (según su discord) a los estados separables correspondientes.
- La forma particularmente simétrica de los estados separables máximamente discordantes de dos cubits sugieren un par de alternativas para generalizarlos naturalmente, una vinculada a las llamadas bases mutuamente no-sesgadas, la otra relacionada con las denominadas mediciones de operadores positivos informacionalmente completas.

Observando que todo sistema cuántico compuesto posee descripciones alternativas según el conjunto de observables relevantes seleccionados, nos llevó a la búsqueda de una medida de la cuantidad de las correlaciones de un sistema que tuviera en cuenta esta variedad descriptiva. Esto lo desarrollamos en el capítulo 4, donde expusimos los siguientes resultados:

- Demostramos que todo estado cuántico bipartito en presencia de un ambiente no correlacionado, salvo que sea un estado producto, exhibe aspectos puramente cuánticos capturados al considerar la multiplicidad de descripciones posibles en términos de diferentes observables. Alternativamente, probamos que todo estado cuántico bipartito en que la dimensión de alguna de sus partes no sea prima, excepto los estados producto, poseen reducciones cuánticamente correlacionadas. En conclusión, mostramos que todo estado correlacionado (i.e., no producto) está cuánticamente correlacionado.
- Propusimos una definición formal para una familia de medidas de cuantidad que tenga en cuenta los puntos anteriormente mencionados, llamadas de “cuantidad potencial”, las cuales poseen las propiedades esperables de una medida de correlaciones cuánticas, además de anularse sólo para estados producto. Por otro lado, mostramos que las medidas pueden reinterpretarse en términos de operaciones cuánticas locales, de modo que sus propiedades se derivan del modo en que las correlaciones cuánticas se comportan ante transformaciones locales. En particular, las medidas son invariantes ante operaciones locales unitarias y no crecientes ante operaciones locales arbitrarias.
- De la familia de medidas de cuantidad potencial propuestas, analizamos el caso de las asociadas a medidas de tipo discord. En ese caso, para estados  $2 \times d$ -dimensionales, mostramos además que las medidas son no crecientes ante operaciones locales unitales. Por otro lado, presentamos algunos cálculos numéricos para ilustrar el comportamiento de estas medidas, y lo aplicamos al problema de un sistema sujeto a ruido local markoviano para poner en evidencia la utilidad de los resultados (cualitativamente distintos respecto a los de las medidas usuales) de nuestra propuesta.

Por último, observando ciertas inconsistencias en la literatura referida a la búsqueda de medidas de tipo discord generalizadas, definidas en términos de entropías distintas a la de von Neumann, estudiamos las medidas inducidas por mediciones locales en un marco general. En este sentido, en el capítulo 5,

- Exploramos ciertas propuestas de medidas de discord generalizadas definidas en términos de las entropías de Rényi y Tsallis. Mostramos inconvenientes relacionados con propiedades de (no)aditividad de éstas. En particular, refutamos una conjetura presentada por Hou y col. en la Ref. [147].
- Propusimos, como alternativa, una familia de medidas en términos de la familia de entropías unificadas —que incluye a las de Rényi y Tsallis— basándonos en el esquema de medidas inducidas por la perturbación ante mediciones locales (vinculado a la medida del déficit de información).

- Mostramos que nuestra propuesta cumple con las condiciones razonables para cuantificar las correlaciones de tipo discord. Además, exhibimos desigualdades importantes entre las correlaciones parciales (evidenciadas por mediciones unilocales) y totales (asociadas a mediciones bilocales) de estados arbitrarios.
- Computamos analíticamente estas medidas para algunos ejemplos relevantes, como son los casos de estados de Werner e isotrópicos.

## 6.2 Perspectivas y problemas abiertos

Durante el desarrollo de los diferentes capítulos, enumeramos y discutimos varias preguntas abiertas y líneas de investigación que merecen un estudio posterior pormenorizado. En términos generales, esperamos que el estudio de las correlaciones cuánticas y la cuantificación, más allá del entrelazamiento, brinde un acercamiento fructífero al problema de las nuevas tecnologías de la información cuántica y a su necesaria escalabilidad.

La propuesta de utilizar los estados clásicamente correlacionados, más allá de la motivación trivial de ser más robustos ante los efectos de interacción con el entorno, se enmarcan en el caso más general de computación con estados mezcla separables. Así, se enfatiza la validez de la pregunta acerca de la implementación óptima de esta clase de estados y los protocolos específicos que más se beneficiarían.

Concretamente, los resultados principales de esta tesis sugieren el posible desarrollo de una teoría formal de recursos asociada a medidas como la de cuantificación potencial que nosotros definimos. Una formalización en ese sentido sería de gran utilidad para revisar los protocolos conocidos y promover otros nuevos, con una base conceptual sólida.

Por último, el estudio de medidas generalizadas, usando entropías distintas a la de von Neumann, debe continuarse para establecer con claridad el rol de los diferentes parámetros entrópicos en juego y para hallar nuevos ejemplos en que la interpretación operacional de las nuevas medidas sea más sencilla.

# CÓDIGOS USADOS PARA LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS

*A continuación presentamos algunos códigos (MATLAB) correspondientes a los cálculos numéricos más relevantes: cálculo de discord en estados de dos cubits, generación de estados mezcla aleatorios y algoritmo para búsqueda de estados separables máximamente discordantes.*

## Discord en estados de dos cubits

Esta función para el cómputo del discord en estados de dos cubits fue desarrollada por Lu y col. de acuerdo a los cálculos de la Ref. [187].

```
function qd = discord(rho, N_theta, N_phi)
% Requires:      Need TrX.m dm2cm pauliprod2.m
% Author:       Xiao-Ming Lu (luxiaoming@gmail.com)
% Date:         2011/10/22
% License:      GPL2
%
% Description:  Generate the quantum discord for 4x4 density matrix,
% the first qubit is the apparatus which is measured.
%
% Note: all the logarithm functions are with unit log2
%       if you want to find the minimum measurement, use [qd,theta,phi] = discord_a(rho)
%
% Usage: qd = discord(rho <,N_theta <, N_phi >>)
% Parameters:  rho      The density matrix (Require 4by4).
%              N_theta  The number of steps for dividing theta.
%              N_phi    The number of steps for dividing phi.
% Return:     qd       the value of quantum discord
%
% Rerefence:   X.-M Lu et. al, Phys. Rev. A 83, 012327 (2011) arXiv:1009.1476
% (Calculation of discord is based on the formulas in Appendix B of the paper.)
%
% measure on the first qubit
% qd = I - cc = VNent(rhoA)+ min_CE - VNent(rho)
```

```

%% Copyright (C) Xiao-Ming Lu
%%
%% This program is free software; you can redistribute it and/or
%% modify it under the terms of the GNU General Public License
%% as published by the Free Software Foundation; either version 2
%% of the License, or (at your option) any later version.
%%
%% This program is distributed in the hope that it will be useful,
%% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
%% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
%% GNU General Public License for more details.
%%
%% You should have received a copy of the GNU General Public License
%% along with this program; if not, write to the Free Software
%% Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston,
%% MA 02110-1301, USA.

if nargin < 2
    N_theta = 100;
end
if nargin < 3
    N_phi = N_theta;
end

rhoA = TrX(rho, 2, [2, 2]);
tau = dm2cm(rho);
a = tau(2:4,1); % 3x1
b = tau(1,2:4)';
R = tau(2:4,2:4);

% the quantity need to minimize is condtion_entropy
conditional_entropy = zeros(N_theta,N_phi);

theta_a = linspace(0,pi,N_theta + 1);
phi_a = linspace(-pi/2,pi/2,N_phi + 1);
theta_a(N_theta + 1) = [];
phi_a(N_phi + 1) = [];

n_array = zeros(3,N_theta,N_phi);
n_array(1, :, :) = sin(theta_a)' * cos(phi_a);
n_array(2, :, :) = sin(theta_a)' * sin(phi_a);
n_array(3, :, :) = cos(theta_a)' * ones(1,N_phi);

f = a'*n_array(:, :); % 1 x N
RTn = R'*n_array(:, :); % 3 x N
gp = sqrt((b(1) + RTn(1, :)) .^2 + (b(2)+RTn(2, :)) .^2 + (b(3) + RTn(3, :)) .^2);
gm = sqrt((b(1) - RTn(1, :)) .^2 + (b(2)-RTn(2, :)) .^2 + (b(3) - RTn(3, :)) .^2);
conditional_entropy(:) =...

```



```

(1+f')/2.*ent_fun(gp'./(1+f')) +...
(1-f')/2.*ent_fun(gm'./(1-f')));

min_CE = min(min(conditional_entropy));
qd = VNent(rhoA) + min_CE - VNent(rho);

function H = ent_fun(lambda)
% binary Shannon entropy
H = -(1 + lambda) ./ 2 .* log((1 + lambda) / 2 + (1 + lambda == 0))...
    -(1 - lambda) ./ 2 .* log((1 - lambda) / 2 + (1 - lambda == 0));
H = H / log(2); % chose log(2) as unit

function x = VNent(p)
% von Neumann
e = eig(p);
x = -e' * log2(e + (e == 0));

```

## Estados mezcla aleatorios

La siguiente función para la generación de estados mezcla aleatorios, distribuidos uniformemente de acuerdo a la medida de Hilbert-Schmidt (densa en el espacio de matrices densidad), está tomada del sitio de Toby Cubitt<sup>69</sup> y basada en el formalismo detallado en la Ref. [188].

<sup>69</sup> <http://www.dr-qubit.org/>

```

function p = randRho(n)

% randRho Random density matrix
% requires: nothing
% author: Toby Cubitt
% license: GPL2
%
% P = randRho(N) returns a randomly generated density matrix of
% dimension N x N

%% Copyright (C) 2004-2009 Toby Cubitt
%%
%% This program is free software; you can redistribute it and/or
%% modify it under the terms of the GNU General Public License
%% as published by the Free Software Foundation; either version 2
%% of the License, or (at your option) any later version.
%%
%% This program is distributed in the hope that it will be useful,
%% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
%% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
%% GNU General Public License for more details.
%%

```

```
%% You should have received a copy of the GNU General Public License
%% along with this program; if not, write to the Free Software
%% Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston,
%% MA 02110-1301, USA.
```

```
p = 10*randH(n);
p = p*p'/trace(p*p');
```

```
%p = diag(rand(n,1));
%p = p/trace(p);
%U = randU(n);
%p = U*p*U';
```

Para completar esta tarea, se vale de la generación de matrices hermiticas aleatorias por la siguiente función.

```
function H = randH(n)

% RANDH Generate random Hermitian matrix
% requires: nothing
% author: Toby Cubitt
% license: GPL2
%
% H = RANDH(N) generates a random N x N Hermitian matrix.

%% Copyright (C) 2004-2009 Toby Cubitt
%%
%% This program is free software; you can redistribute it and/or
%% modify it under the terms of the GNU General Public License
%% as published by the Free Software Foundation; either version 2
%% of the License, or (at your option) any later version.
%%
%% This program is distributed in the hope that it will be useful,
%% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
%% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
%% GNU General Public License for more details.
%%
%% You should have received a copy of the GNU General Public License
%% along with this program; if not, write to the Free Software
%% Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston,
%% MA 02110-1301, USA.

H = 2*(randn(n) + i*randn(n)) - (1+i);
H = H + H';
```

## Estados separables máximamente discordantes

El código que sigue lo desarrollamos para la búsqueda de estados separables máximamente discordantes de dos cubits, obtenidos desde las reducciones de estados clásicos de mayor dimensión, por medio del método de Monte Carlo.

```

Nit = 5E3; % Número de iteraciones
data = zeros([Nit 3]); % Registro
idx = 0; % Índice de registro
dA = 2*2; % Dimensión de A ("extendido")
dB = dA;

dis_max = 0; % Guarda el discord del estado de mayor discord

discordab = 0; % Inicializa la variable de discord

% Inicialización de estados
rhoab = zeros(4);
sigmaA = zeros(dA); sigmaB = zeros(dB);
A = zeros(dA); B = zeros(dB);

p = 1/dA; % Distribución de probabilidades

% MonteCarlo
X0 = randn(dA) + 1i*randn(dA); % Semilla de A
X0 = X0/norm(X0);
Y0 = randn(dB) + 1i*randn(dB); % Semilla de B
Y0 = Y0/norm(Y0);
beta = 1E6; % 1/Temperatura
paso = 1E-5; % Paso en dX

while idx <= Nit;

    idx = idx + 1;

    if (mod(idx,10) == 0); % Contador (display)
        clc;
        disp((idx/Nit)*100)
        disp(dis_max)
    end

    % Matriz unitaria 4x4, U(:,i) estado puro
    dX = randn(dA) + 1i*randn(dA);
    dX = paso*randn*dX;
    X = X0 + dX;
    X = X/norm(X);

```

```

[QA,RA] = qr(X);
RA = diag(diag (RA)./abs(diag(RA)));
UA = QA*RA;

dY = randn(dA) + 1i*randn(dA);
dY = paso*randn*dY;
Y = Y0 + dY;
Y = Y/norm(Y);
[QB,RB] = qr(Y);
RB = diag(diag (RB)./abs(diag(RB)));
UB = QB*RB;

sigmaAB = zeros(dA*dB); % Resetea el estado

for k = 1:dA
    A = UA(:,k)*UA(:,k)'; % Proyector puro k del sistema A
    B = UB(:,k)*UB(:,k)';
    sigmaAB = sigmaAB + p * kron(A,B);
end % for k

rhoAb = TrX(sigmaAB,[3],[dA 2 dB/2]);
rhoab = TrX(rhoAb,[2],[2 dA/2 2]);
sigmaA = TrX(sigmaAB,[2],[dA dB]);
sigmaB = TrX(sigmaAB,[1],[dA dB]);

rhoa = TrX(rhoab,[2],[2 2]);
rhob = TrX(rhoab,[1],[2 2]);

discordab = real(discord(rhoab));

delta_dis = dis_max - discordab;
umbral = randn;
if (-beta*delta_dis>log(umbral));
    X0 = X;
    dis_max = discordab;
    infoAB = S_Von _Neumann(sigmaA) + S_Von _Neumann(sigmaB)...
        - S_Von_Neumann(sigmaAB); % Info mutua de AB
    data(idx,:) = [idx infoAB discordab]; % Registrar
    rhomax = rhoab;
    sigmamax = sigmaAB;
    UmaxA = UA;
    UmaxB = UB;
else
    idx = idx - 1;
end % if

end % while

```

# DESCOMPOSICIÓN SEPARABLE DE ESTADOS DE DOS CUBITS

En este apartado resumimos los pasos fundamentales descritos por Sanpera y col. para hallar la descomposición separable óptima (de menor longitud) para estados en  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  [94].

En el citado trabajo, Sanpera y col. muestran dos resultados de gran interés: (a) el mínimo número de estados puros producto necesarios para descomponer un estado separable  $\rho$  sobre  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  está dado por  $\ell = \max\{\text{rang}(\rho), \text{rang}(\rho^{\text{T}_B})\} \leq 4$ , donde  $\rho^{\text{T}_B}$  es la traspuesta parcial de  $\rho$ ; (b) los estados no separables pueden expresarse como *pseudomezclas*<sup>70</sup> de cuatro o cinco estados puros producto, y se pueden “hacer separables” mezclándolos con uno o dos estados puros producto adicionales [94]. Nuestro interés está especialmente dirigido al modo en que los autores construyen la descomposiciones separables óptimas del ítem (a).

Las cantidades relevantes para detallar el método son: el estado separable ( $\rho$ ), su traspuesta parcial ( $\rho^{\text{T}_B}$ ) y los rangos de las respectivas matrices densidad ( $\text{rang}(\rho)$  y  $\text{rang}(\rho^{\text{T}_B})$ ). El método consiste entonces de los siguientes pasos:

1. Elegimos un estado puro producto arbitrario  $|a_1\rangle\langle a_1| \otimes |b_1\rangle\langle b_1|$  sobre  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ .
2. Definimos las siguientes matrices densidad:

$$\rho(p) := \frac{1}{1-p}(\rho - p |a_1\rangle\langle a_1| \otimes |b_1\rangle\langle b_1|) \quad 0 < p < 1,$$
$$\rho(p)^{\text{T}_B} := \frac{1}{1-p}(\rho^{\text{T}_B} - p |a_1\rangle\langle a_1| \otimes |b_1^*\rangle\langle b_1^*|), \quad 0 < p < 1.$$

3. Buscamos el menor valor del parámetro  $p$  para el cual el  $\text{rang}(\rho(p))$  y/o  $\text{rang}(\rho(p)^{\text{T}_B})$  disminuyen en una unidad respecto a los de  $\rho$  y  $\rho^{\text{T}_B}$ . Llamamos  $p_1$  a dicho valor.

4. Definimos la nueva matriz densidad

$$\rho_1 := \frac{1}{1-p_1}(\rho - p_1 |a_1\rangle\langle a_1| \otimes |b_1\rangle\langle b_1|).$$

<sup>70</sup> Mientras que *mezcla* refiere a una combinación convexa, *pseudomezcla* refiere al caso en que los pesos no son necesariamente positivos ni suman uno.

5. Repetimos los pasos 1-4 usando ahora el nuevo estado como entrada hasta que el rango de alguno de los estados se anula completamente.

Finalmente, llegamos a una descomposición de la forma

$$\begin{aligned} \rho = & p_1 |a_1\rangle \langle a_1| \otimes |b_1\rangle \langle b_1| \\ & + p_2(1 - p_1) |a_2\rangle \langle a_2| \otimes |b_2\rangle \langle b_2| \\ & + p_3(1 - p_2)(1 - p_1) |a_3\rangle \langle a_3| \otimes |b_3\rangle \langle b_3| \\ & + p_4(1 - p_3)(1 - p_2)(1 - p_1) |a_4\rangle \langle a_4| \otimes |b_4\rangle \langle b_4|. \end{aligned}$$

Si el estado inicial  $\rho$  no está asociado a una matriz densidad de rango completo, la cantidad de estados producto necesarios para la descomposición será menor, de modo que la mezcla anterior queda truncada cuando la cantidad de términos es igual a la cantidad máx  $\{\text{rang}(\rho), \text{rang}(\rho^{\text{T}_B})\}$ . Vale aclarar también que, en el paso 1, debemos elegir siempre un estado producto tal que la matriz densidad posea proyección no nula sobre el subespacio que ese describe.

# GLOSARIOS Y NOMENCLATURA

## Glosario de medidas entrópicas (cuánticas)

**Entropía de von Neumann.**  $S(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log \rho)$

**Entropía relativa.**  $S(\rho\|\sigma) := -\text{Tr}(\rho \log \sigma) - S(\rho)$

**Entropías de Rényi.**  $S_q^R(\rho) := \frac{\log(\text{Tr} \rho^q)}{1-q}$

**Entropías de Tsallis.**  $S_q^T(\rho) := \frac{1-\text{Tr} \rho^q}{q-1}$

**Entropías unificadas.**  $S_{(q,s)}(\rho) := \frac{(\text{Tr} \rho^q)^s - 1}{(1-q)s}$

**Información mutua.**  $\mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) := S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$

**Información clásica.**  $C^K(\rho^{AB}) := \max_{\Pi^K} \mathcal{I}^{A|B}(\Pi^K[\rho^{AB}])$  con  $K = A, B, A|B$

**Déficit de información.**  $D^K(\rho^{AB}) := \min_{\Pi^K} S(\Pi^K[\rho^{AB}]) - S(\rho^{AB})$

**Déficits unificados.**  $D_{(q,s)}^K(\rho^{AB}) := \min_{\Pi^K} \frac{S_{(q,s)}(\Pi^K[\rho^{AB}]) - S_{(q,s)}(\rho^{AB})}{P_{(q,s)}(\rho^{AB})}$  (ver Ec. (5.29), pág. 103)

**Measurement induced disturbance.**  $\mathcal{M}^K(\rho^{AB}) := \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) - C^{\tilde{\Pi}^K}(\rho^{AB})$ , con  $\{\tilde{\Pi}^K\}$  autobase de  $\rho^K$

**Discord.**  $\mathcal{D}^K(\rho^{AB}) := \mathcal{I}^{A|B}(\rho^{AB}) - C^K(\rho^{AB})$

**Discord geométrico.**  $D_G^K(\rho^{AB}) := \min_{\omega^{AB} \in \Omega^K} \|\rho^{AB} - \omega^{AB}\|^2$

**Cuanticidad potencial.**  $\mathcal{P}_d^Q(\rho^{AB}) = \max_{U \in \text{LU}} Q^{A|B}(U\eta_0^{\tilde{A}} \otimes \rho^{AB} \otimes \eta_0^{\tilde{B}} U^\dagger)$  (ver Def. 3, pág. 74)

## Acrónimos

**MC.** Mecánica cuántica

**CC.** Clásicamente correlacionado

**QC.** Cuánticamente correlacionado

**IM.** Información mutua (cuántica)

**POVM.** *Positive operator valued measure* (Medición generalizada)

**MID.** *Measurement induced disturbance* (Medida inducida por perturbación)

**CP.** Cuanticidad potencial

**SIC-POVM.** POVM simétrica e informacionalmente completa

**MUB.** Bases mutuamente no sesgadas

**ESMD.** Estado separable máximamente discordante

**DE.** Distribución de entrelazamiento

**PRE.** Preparación remota de estados





## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Guido Bellomo, Ana P Majtey, Angel R Plastino y Angel Plastino. "Quantum correlations from classically correlated states". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 405 (2014), págs. 260-266.
- [2] Guido Bellomo, Angel Plastino, Ana P Majtey y Angel R Plastino. "Comment on "Quantum discord through the generalized entropy in bipartite quantum states"". En: *The European Physical Journal D* 68.337 (2014), págs. 1-4.
- [3] Guido Bellomo, Angelo Plastino y Angel R Plastino. "Classical extension of quantum-correlated separable states". En: *International Journal of Quantum Information* 13.02 (2015), pág. 1550015.
- [4] Angelo Plastino, Guido Bellomo y Angel R Plastino. "Quantum state space-dimension as a quantum resource". En: *International Journal of Quantum Information* 13.06 (2015), pág. 1550039.
- [5] Guido Bellomo, Angel Plastino y Angel R Plastino. "Quantumness and the role of locality on quantum correlations". En: *Physical Review A* 93.6 (2016), pág. 062322.
- [6] Gustavo M Bosyk, Guido Bellomo, Steeve Zozor, Mariela Portesi y Pedro W Lamberti. "Unified entropic measures of quantum correlations induced by local measurements". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 462 (2016), págs. 930-939.
- [7] Angel Plastino, Guido Bellomo y Angel R Plastino. "On a conjecture regarding Fisher information". En: *Advances in Mathematical Physics* 2015 (2015), págs. 1-4.
- [8] Federico Holik, Gustavo M Bosyk y Guido Bellomo. "Quantum information as a non-Kolmogorovian generalization of Shannon's theory". En: *Entropy* 17.11 (2015), págs. 7349-7373.
- [9] Gustavo M Bosyk, Giuseppe Sergioli, Héctor Freytes, Federico Holik y Guido Bellomo. "Approximate transformations of bipartite pure-state entanglement from the majorization lattice". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 473 (2017), págs. 403-411.
- [10] Angelo Plastino, Guido Bellomo y Angel R Plastino. "On the relative character of quantum correlations". En: *What is Quantum Information?* Ed. por Olimpia Lombardi, Sebastian Fortin, Federico Holik y Cristian López. Cambridge University Press, 2017.
- [11] Asher Peres. *Quantum theory: concepts and methods*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [12] Thomas M Cover y Joy A Thomas. *Elements of information theory*. John Wiley & Sons, 2012.
- [13] John Preskill. "Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation". En: *California Institute of Technology* 12 (1998).
- [14] Michael A Nielsen e Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2010.
- [15] Shunlong Luo. "Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum". En: *Physical Review A* 77.2 (2008), pág. 022301.

- [16] Reinhard F Werner. "Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model". En: *Physical Review A* 40.8 (1989), pág. 4277.
- [17] Edwin T Jaynes. "Information theory and statistical mechanics". En: *Physical Review* 106.4 (1957), pág. 620.
- [18] Edwin T Jaynes. "Information theory and statistical mechanics. II". En: *Physical Review* 108.2 (1957), pág. 171.
- [19] John Von Neumann. "Wahrscheinlichkeitstheoretischer aufbau der quantenmechanik". En: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1927 (1927), págs. 245-272.
- [20] Alfred Rényi. "On measures of entropy and information". En: *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 1. 1961, págs. 547-561.
- [21] Constantino Tsallis. "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics". En: *Journal of statistical physics* 52.1 (1988), págs. 479-487.
- [22] Albert W Marshall, Ingram Olkin y Barry C Arnold. *Inequalities: theory of majorization and its applications*. Springer, 1979.
- [23] Ingemar Bengtsson y Karol Zyczkowski. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2007.
- [24] Anthony Chefles. "Quantum operations, state transformations and probabilities". En: *Physical Review A* 65.5 (2002), pág. 052314.
- [25] Jonathan Oppenheim, Michał Horodecki, Paweł Horodecki y Ryszard Horodecki. "Thermodynamical approach to quantifying quantum correlations". En: *Physical Review Letters* 89.18 (2002), pág. 180402.
- [26] Kavan Modi, Aharon Brodutch, Hugo Cable, Tomasz Paterek y Vlatko Vedral. "The classical-quantum boundary for correlations: discord and related measures". En: *Reviews of Modern Physics* 84.4 (2012), pág. 1655.
- [27] Gerardo Adesso, Thomas R Bromley y Marco Cianciaruso. "Measures and applications of quantum correlations". En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 49.47 (2016), pág. 473001.
- [28] Aharon Brodutch y Daniel R Terno. "Why should we care about quantum discord?" En: *arXiv preprint arXiv:1608.01920* (2016).
- [29] Borivoje Dakić, Vlatko Vedral y Ćaslav Brukner. "Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord". En: *Physical Review Letters* 105.19 (2010), pág. 190502.
- [30] Animesh Datta. "A condition for the nullity of quantum discord". En: *arXiv preprint arXiv:1003.5256* (2010).
- [31] Ming-Jing Zhao y col. "Quantum correlations induced by local von Neumann measurement". En: *International Journal of Theoretical Physics* 52.7 (2013), págs. 2379-2385.
- [32] Shengjun Wu, Uffe V Poulsen y Klaus Mølmer. "Correlations in local measurements on a quantum state, and complementarity as an explanation of nonclassicality". En: *Physical Review A* 80.3 (2009), pág. 032319.
- [33] Davide Girolami, Mauro Paternostro y Gerardo Adesso. "Faithful nonclassicality indicators and extremal quantum correlations in two-qubit states". En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44.35 (2011), pág. 352002.
- [34] Nan Li y Shunlong Luo. "Classical states versus separable states". En: *Physical Review A* 78.2 (2008), pág. 024303.

- [35] Harold Ollivier y Wojciech H Zurek. "Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations". En: *Physical Review Letters* 88.1 (2001), pág. 017901.
- [36] Martin Hendrych y col. "Experimental estimation of the dimension of classical and quantum systems". En: *Nature Physics* 8.8 (2012), págs. 588-591.
- [37] V Vedral. "Classical correlations and entanglement in quantum measurements". En: *Physical Review Letters* 90.5 (2003), pág. 050401.
- [38] Matthias D Lang y Carlton M Caves. "Quantum discord and the geometry of Bell-diagonal states". En: *Physical Review Letters* 105.15 (2010), pág. 150501.
- [39] Shunlong Luo. "Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum". En: *Physical Review A* 77.2 (2008), pág. 022301.
- [40] Shunlong Luo. "Quantum discord for two-qubit systems". En: *Physical Review A* 77.4 (2008), pág. 042303.
- [41] Nan Li, Shunlong Luo y Zhengmin Zhang. "Quantumness of bipartite states in terms of conditional entropies". En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40.37 (2007), pág. 11361.
- [42] Luis Roa, JC Retamal y M Alid-Vaccarezza. "Dissonance is required for assisted optimal state discrimination". En: *Physical Review Letters* 107.8 (2011), pág. 080401.
- [43] AP Majtey, AR Plastino y A Plastino. "New features of quantum discord uncovered by q-entropies". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391.7 (2012), págs. 2491-2499.
- [44] Akira SaiToh, Robabeh Rahimi y Mikio Nakahara. "Nonclassical correlation in a multipartite quantum system: Two measures and evaluation". En: *Physical Review A* 77.5 (2008), pág. 052101.
- [45] Robabeh Rahimi y Akira SaiToh. "Single-experiment-detectable nonclassical correlation witness". En: *Physical Review A* 82.2 (2010), pág. 022314.
- [46] Adriana Auyuanet y Luiz Davidovich. "Quantum correlations as precursors of entanglement". En: *Physical Review A* 82.3 (2010), pág. 032112.
- [47] Shunlong Luo y Shuangshuang Fu. "Measurement-induced nonlocality". En: *Physical Review Letters* 106.12 (2011), pág. 120401.
- [48] R Rossignoli, N Canosa y L Ciliberti. "Generalized entropic measures of quantum correlations". En: *Physical Review A* 82.5 (2010), pág. 052342.
- [49] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso, Marco Piani y Dagmar Bruß. "Are general quantum correlations monogamous?" En: *Physical Review Letters* 109.5 (2012), pág. 050503.
- [50] Leah Henderson y Vlatko Vedral. "Classical, quantum and total correlations". En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 34.35 (2001), pág. 6899.
- [51] Michael A Nielsen y Julia Kempe. "Separable states are more disordered globally than locally". En: *Physical Review Letters* 86.22 (2001), pág. 5184.
- [52] Paolo Zanardi, Daniel A Lidar y Seth Lloyd. "Quantum tensor product structures are observable induced". En: *Physical Review Letters* 92.6 (2004), pág. 060402.
- [53] Robin Blume-Kohout, Carlton M Caves e Ivan H Deutsch. "Climbing mount scalable: Physical resource requirements for a scalable quantum computer". En: *Foundations of Physics* 32.11 (2002), págs. 1641-1670.
- [54] Nicolas Brunner y col. "Testing the dimension of Hilbert spaces". En: *Physical Review Letters* 100.21 (2008), pág. 210503.
- [55] Rodrigo Gallego, Nicolas Brunner, Christopher Hadley y Antonio Acín. "Device-independent tests of classical and quantum dimensions". En: *Physical Review Letters* 105.23 (2010), pág. 230501.

- [56] Vaibhav Madhok y Animesh Datta. "Quantum discord as a resource in quantum communication". En: *International Journal of Modern Physics B* 27.01n03 (2013).
- [57] Alexander Streltsov. "Quantum Correlations Beyond Entanglement". En: *Quantum Correlations Beyond Entanglement*. Springer, 2015, págs. 17-22.
- [58] Borivoje Dakić y col. "Quantum discord as resource for remote state preparation". En: *Nature Physics* 8.9 (2012), págs. 666-670.
- [59] Davide Girolami y Gerardo Adesso. "Interplay between computable measures of entanglement and other quantum correlations". En: *Physical Review A* 84.5 (2011), pág. 052110.
- [60] Davide Girolami y Gerardo Adesso. "Quantum discord for general two-qubit states: analytical progress". En: *Physical Review A* 83.5 (2011), pág. 052108.
- [61] Fernando Galve, Gian Luca Giorgi y Roberta Zambrini. "Maximally discordant mixed states of two qubits". En: *Physical Review A* 83.1 (2011), pág. 012102.
- [62] Toby S Cubitt, Frank Verstraete, W Dür y J Ignacio Cirac. "Separable states can be used to distribute entanglement". En: *Physical Review Letters* 91.3 (2003), pág. 037902.
- [63] Alexander Streltsov, Hermann Kampermann y Dagmar Bruß. "Limits for entanglement distribution with separable states". En: *Physical Review A* 90.3 (2014), pág. 032323.
- [64] Wojciech Hubert Zurek. "Quantum discord and Maxwell's demons". En: *Physical Review A* 67.1 (2003), pág. 012320.
- [65] Leo Szilard. "Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen". En: *Zeitschrift für Physik* 53.11-12 (1929), págs. 840-856.
- [66] Lev B Levitin. "Physical information theory part II: Quantum systems". En: *Physics and Computation, 1992. PhysComp'92., Workshop on*. IEEE, 1992, págs. 215-219.
- [67] Robert Alicki, Michał Horodecki, Paweł Horodecki y Ryszard Horodecki. "Thermodynamics of quantum information systems—Hamiltonian description". En: *Open Systems & Information Dynamics* 11.03 (2004), págs. 205-217.
- [68] Michał Horodecki y col. "Local versus nonlocal information in quantum-information theory: formalism and phenomena". En: *Physical Review A* 71.6 (2005), pág. 062307.
- [69] Koji Maruyama, Franco Nori y Vlatko Vedral. "Colloquium: The physics of Maxwell's demon and information". En: *Reviews of Modern Physics* 81.1 (2009), pág. 1.
- [70] Akio Hosoya, Koji Maruyama y Yutaka Shikano. "Maxwell's demon and data compression". En: *Physical Review E* 84.6 (2011), pág. 061117.
- [71] R Prabhu, Arun Kumar Pati, Aditi Sen, Ujjwal Sen y col. "Conditions for monogamy of quantum correlations: Greenberger-Horne-Zeilinger versus W states". En: *Physical Review A* 85.4 (2012), pág. 040102.
- [72] Gian Luca Giorgi. "Monogamy properties of quantum and classical correlations". En: *Physical Review A* 84.5 (2011), pág. 054301.
- [73] Xi-Jun Ren y Heng Fan. "Non-monogamy of quantum discord and upper bounds for quantum correlation". En: *Quantum Information & Computation* 13.5-6 (2013), págs. 469-478.
- [74] HC Braga, CC Rulli, Thiago R de Oliveira y MS Sarandy. "Monogamy of quantum discord by multipartite correlations". En: *Physical Review A* 86.6 (2012), pág. 062106.
- [75] Si-Yuan Liu, Yu-Ran Zhang, Li-Ming Zhao, Wen-Li Yang y Heng Fan. "General monogamy property of global quantum discord and the application". En: *Annals of Physics* 348 (2014), págs. 256-269.
- [76] CC Rulli y MS Sarandy. "Global quantum discord in multipartite systems". En: *Physical Review A* 84.4 (2011), pág. 042109.

- [77] Lucas C Celeri, Jonas Maziero y Roberto M Serra. "Theoretical and experimental aspects of quantum discord and related measures". En: *International Journal of Quantum Information* 9.07n08 (2011), págs. 1837-1873.
- [78] Wojciech Hubert Zurek. "Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical". En: *Reviews of modern physics* 75.3 (2003), pág. 715.
- [79] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki y Karol Horodecki. "Quantum entanglement". En: *Review of Modern Physics* 81.2 (2009), pág. 865.
- [80] Animesh Datta, Anil Shaji y Carlton M Caves. "Quantum discord and the power of one qubit". En: *Physical Review Letters* 100.5 (2008), pág. 050502.
- [81] BP Lanyon, M Barbieri, MP Almeida y AG White. "Experimental quantum computing without entanglement". En: *Physical Review Letters* 101.20 (2008), pág. 200501.
- [82] Vaibhav Madhok y Animesh Datta. "Interpreting quantum discord through quantum state merging". En: *Physical Review A* 83.3 (2011), pág. 032323.
- [83] Daniel Cavalcanti y col. "Operational interpretations of quantum discord". En: *Physical Review A* 83.3 (2011), pág. 032324.
- [84] Mile Gu y col. "Observing the operational significance of discord consumption". En: *Nature Physics* 8.9 (2012), págs. 671-675.
- [85] Stefano Pirandola. "Quantum discord as a resource for quantum cryptography". En: *arXiv preprint arXiv:1309.2446* (2013).
- [86] Paweł Horodecki, Jan Tuziemski, Paweł Mazurek y Ryszard Horodecki. "Can communication power of separable correlations exceed that of entanglement resource?" En: *Physical Review Letters* 112.14 (2014), pág. 140507.
- [87] Manuel Gessner, Elsi-Mari Laine, Heinz-Peter Breuer y Jyrki Piilo. "Correlations in quantum states and the local creation of quantum discord". En: *Physical Review A* 85.5 (2012), pág. 052122.
- [88] Gian Luca Giorgi. "Quantum discord and remote state preparation". En: *Physical Review A* 88.2 (2013), pág. 022315.
- [89] Barbara M Terhal. "Is entanglement monogamous?" En: *IBM Journal of Research and Development* 48.1 (2004), págs. 71-78.
- [90] Masato Koashi y Andreas Winter. "Monogamy of quantum entanglement and other correlations". En: *Physical Review A* 69.2 (2004), pág. 022309.
- [91] Armin Uhlmann. "Entropy and optimal decompositions of states relative to a maximal commutative subalgebra". En: *Open Systems and Information Dynamics* 5.3 (1998), págs. 209-228.
- [92] David P DiVincenzo, Barbara M Terhal y Ashish V Thapliyal. "Optimal decompositions of barely separable states". En: *Journal of Modern Optics* 47.2-3 (2000), págs. 377-385.
- [93] Robert Lockhart. "Optimal ensemble length of mixed separable states". En: *Journal of Mathematical Physics* 41.10 (2000), págs. 6766-6771.
- [94] Anna Sanpera, Rolf Tarrach y Guifré Vidal. "Local description of quantum inseparability". En: *Physical Review A* 58.2 (1998), pág. 826.
- [95] Shunlong Luo y Wei Sun. "Decomposition of bipartite states with applications to quantum no-broadcasting theorems". En: *Physical Review A* 82.1 (2010), pág. 012338.
- [96] Asma Al-Qasimi y Daniel F. V. James. "Comparison of the attempts of quantum discord and quantum entanglement to capture quantum correlations". En: *Physical Review A* 83.3 (2011), pág. 032101.
- [97] Maurice R Kibler. "Equiangular vectors approach to mutually unbiased bases". En: *Entropy* 15.5 (2013), págs. 1726-1737.

- [98] Maurice Robert Kibler. "On Two Ways to Look for Mutually Unbiased Bases". En: *arXiv preprint arXiv:1401.4643* (2014).
- [99] DM Appleby, Hoan Bui Dang y Christopher A Fuchs. "Symmetric informationally-complete quantum states as analogues to orthonormal bases and minimum-uncertainty states". En: *arXiv preprint arXiv:0707.2071* (2007).
- [100] Blake C Stacey. "SIC-POVMs and Compatibility among Quantum States". En: *arXiv preprint arXiv:1404.3774* (2014).
- [101] Damian Markham, Jarosław Adam Miszcza, Zbigniew Puchała y Karol Życzkowski. "Quantum state discrimination: A geometric approach". En: *Physical Review A* 77.4 (2008), pág. 042111.
- [102] Andrew J Scott. "Tight informationally complete quantum measurements". En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39.43 (2006), pág. 13507.
- [103] Shengjun Wu, Zhihao Ma, Zhihua Chen y Sixia Yu. "Reveal quantum correlation in complementary bases". En: *Scientific Reports* 4 (2014).
- [104] Lin Chen. "Length of separable states and symmetrical informationally complete (SIC) POVM". En: *arXiv preprint arXiv:1302.0667* (2013).
- [105] Guanru Feng, Guofu Xu y Guilu Long. "Experimental realization of nonadiabatic holonomic quantum computation". En: *Physical Review Letters* 110.19 (2013), pág. 190501.
- [106] Dan Browne. "Quantum computation: Model versus machine". En: *Nature Physics* 10.3 (2014), págs. 179-180.
- [107] Jiang Zhang, L-C Kwek, Erik Sjöqvist, DM Tong y Paolo Zanardi. "Quantum computation in noiseless subsystems with fast non-Abelian holonomies". En: *Physical Review A* 89.4 (2014), pág. 042302.
- [108] C Zu y col. "Experimental realization of universal geometric quantum gates with solid-state spins". En: *Nature* 514.7520 (2014), págs. 72-75.
- [109] Roger SK Mong y col. "Universal topological quantum computation from a superconductor-abelian quantum hall heterostructure". En: *Physical Review X* 4.1 (2014), pág. 011036.
- [110] Mark Howard, Joel Wallman, Victor Veitch y Joseph Emerson. "Contextuality supplies the/magic/'for quantum computation". En: *Nature* 510.7505 (2014), págs. 351-355.
- [111] David Gosset, Barbara M Terhal y Anna Vershynina. "Universal adiabatic quantum computation via the space-time circuit-to-Hamiltonian construction". En: *Physical Review Letters* 114.14 (2015), pág. 140501.
- [112] Paolo Zanardi. "Virtual quantum subsystems". En: *Physical Review Letters* 87.7 (2001), pág. 077901.
- [113] Howard Barnum, Emanuel Knill, Gerardo Ortiz, Rolando Somma y Lorenza Viola. "A subsystem-independent generalization of entanglement". En: *Physical Review Letters* 92.10 (2004), pág. 107902.
- [114] NL Harshman y Kedar S Ranade. "Observables can be tailored to change the entanglement of any pure state". En: *Physical Review A* 84.1 (2011), pág. 012303.
- [115] Alberto C De la Torre, D Goyeneche y L Leitao. "Entanglement for all quantum states". En: *European Journal of Physics* 31.2 (2010), pág. 325.
- [116] Jasmina Jeknić-Dugić, Momir Arsenijević y Miroљub Dugić. *Quantum Structures: A View of the Quantum World*. Lap Lambert Academic Publishing, 2013.
- [117] L-A Wu, Marcelo S Sarandy y Daniel A Lidar. "Quantum phase transitions and bipartite entanglement". En: *Physical Review Letters* 93.25 (2004), pág. 250404.
- [118] Rolando Somma, Gerardo Ortiz, Howard Barnum, Emanuel Knill y Lorenza Viola. "Nature and measure of entanglement in quantum phase transitions". En: *Physical Review A* 70.4 (2004), pág. 042311.

- [119] Barış Çakmak, Göktuğ Karpat y Felipe F Fanchini. "Factorization and Criticality in the Anisotropic XY Chain via Correlations". En: *Entropy* 17.2 (2015), págs. 790-817.
- [120] F Benatti, R Floreanini y U Marzolino. "Sub-shot-noise quantum metrology with entangled identical particles". En: *Annals of Physics* 325.4 (2010), págs. 924-935.
- [121] AP Balachandran, TR Govindarajan, Amilcar R de Queiroz y AF Reyes-Lega. "Entanglement and Particle Identity: A Unifying Approach". En: *Physical Review Letters* 110.8 (2013), pág. 080503.
- [122] AP Balachandran, TR Govindarajan, Amilcar R de Queiroz y AF Reyes-Lega. "Algebraic approach to entanglement and entropy". En: *Physical Review A* 88.2 (2013), pág. 022301.
- [123] Fernando Iemini, Tiago Debarba y Reinaldo O Vianna. "Quantumness of correlations in indistinguishable particles". En: *Physical Review A* 89.3 (2014), pág. 032324.
- [124] N Killoran, M Cramer y MB Plenio. "Extracting entanglement from identical particles". En: *Physical Review Letters* 112.15 (2014), pág. 150501.
- [125] Alexander Streltsov, Hermann Kampermann y Dagmar Bruß. "Behavior of quantum correlations under local noise". En: *Physical Review Letters* 107.17 (2011), pág. 170502.
- [126] S Campbell y col. "Propagation of nonclassical correlations across a quantum spin chain". En: *Physical Review A* 84.5 (2011), pág. 052316.
- [127] Francesco Ciccarello y Vittorio Giovannetti. "Creating quantum correlations through local nonunitary memoryless channels". En: *Physical Review A* 85.1 (2012), pág. 010102.
- [128] Michael A Nielsen e Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2010.
- [129] Xueyuan Hu, Ying Gu, Qihuang Gong y Guangcan Guo. "Necessary and sufficient condition for Markovian-dissipative-dynamics-induced quantum discord". En: *Physical Review A* 84.2 (2011), pág. 022113.
- [130] Pankaj Agrawal, Indranil Chakrabarty, Sk Sazim y Arun K Pati. "Quantum Discord has local and nonlocal quantumness". En: *arXiv preprint arXiv:1502.00857* (2015).
- [131] W Forrest Stinespring. "Positive functions on  $C^*$ -algebras". En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 6.2 (1955), págs. 211-216.
- [132] AR Usha Devi y AK Rajagopal. "Generalized information theoretic measure to discern the quantumness of correlations". En: *Physical Review Letters* 100.14 (2008), pág. 140502.
- [133] Yu Guo y Shengjun Wu. "Quantum correlation exists in any non-product state". En: *Scientific Reports* 4 (2014), pág. 7179.
- [134] Sevag Gharibian. "Quantifying nonclassicality with local unitary operations". En: *Physical Review A* 86.4 (2012), pág. 042106.
- [135] Felipe F Fanchini, Marcio F Cornelio, Marcos C de Oliveira y Amir O Caldeira. "Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum discord". En: *Physical Review A* 84.1 (2011), pág. 012313.
- [136] Alexander Streltsov, Hermann Kampermann y Dagmar Bruß. "Linking quantum discord to entanglement in a measurement". En: *Physical Review Letters* 106.16 (2011), pág. 160401.
- [137] Yichen Huang. "Computing quantum discord is NP-complete". En: *New Journal of Physics* 16.3 (2014), pág. 033027.
- [138] Gilad Gour y Robert W Spekkens. "The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones". En: *New Journal of Physics* 10.3 (2008), pág. 033023.
- [139] Michal Horodecki y Jonathan Oppenheim. "(Quantumness in the context of) resource theories". En: *International Journal of Modern Physics B* 27.01n03 (2013), pág. 1345019.

- [140] Alexander Streltsov, Hermann Kampermann, Sabine Wölk, Manuel Gessner y Dagmar Bruß. “Maximal Coherence and the Resource Theory of Purity”. En: *arXiv preprint arXiv:1612.07570* (2016).
- [141] Andreas Winter y Dong Yang. “Operational resource theory of coherence”. En: *Physical review letters* 116.12 (2016), pág. 120404.
- [142] JM Matera, D Egloff, N Killoran y MB Plenio. “Coherent control of quantum systems as a resource theory”. En: *Quantum Science and Technology* 1.1 (2016), 01LT01.
- [143] Eric Chitambar y Min-Hsiu Hsieh. “Relating the resource theories of entanglement and quantum coherence”. En: *Physical Review Letters* 117.2 (2016), pág. 020402.
- [144] Nathan Killoran, Frank ES Steinhoff y Martin B Plenio. “Converting nonclassicality into entanglement”. En: *Physical review letters* 116.8 (2016), pág. 080402.
- [145] Bob Coecke, Tobias Fritz y Robert W Spekkens. “A mathematical theory of resources”. En: *Information and Computation* 250 (2016), págs. 59-86.
- [146] NL Harshman. “Symmetry and natural quantum structures for three-particles in one-dimension”. En: *Quantum Structural Studies: Classical Emergence from the Quantum Level* (2016), pág. 373.
- [147] Xi-Wen Hou, Zhi-Peng Huang y Su Chen. “Quantum discord through the generalized entropy in bipartite quantum states”. En: *The European Physical Journal D* 68.4 (2014), págs. 1-5.
- [148] Murray Gell-Mann y Constantino Tsallis. *Nonextensive entropy: interdisciplinary applications*. Oxford University Press, 2004.
- [149] Constantino Tsallis y col. *Introduction to nonextensive statistical mechanics*. Springer, 2009.
- [150] Dongxin Xu y Deniz Erdogmuns. “Renyi’s entropy, divergence and their nonparametric estimators”. En: *Information Theoretic Learning*. Springer, 2010, págs. 47-102.
- [151] Koenraad MR Audenaert. “Subadditivity of q-entropies for  $q>1$ ”. En: *Journal of Mathematical Physics* 48.8 (2007), pág. 3507.
- [152] Guido A Raggio. “Properties of q-entropies”. En: *Journal of Mathematical Physics* 36.9 (1995), págs. 4785-4791.
- [153] János Aczél y Zoltán Daróczy. *On measures of information and their characterizations*. Academic Press New York, 1975.
- [154] D Petz y D Viosztek. “Some inequalities for quantum Tsallis entropy related to the strong subadditivity”. En: *Mathematical Inequalities & Applications* 18.2 (2015), págs. 555-568.
- [155] Shigeru Furuichi. “Information theoretical properties of Tsallis entropies”. En: *Journal of Mathematical Physics* 47.2 (2006), pág. 023302.
- [156] Gerardo Adesso, Davide Girolami y Alessio Serafini. “Measuring Gaussian quantum information and correlations using the Rényi entropy of order 2”. En: *Physical Review Letters* 109.19 (2012), pág. 190502.
- [157] Patrick J Coles. “Non-negative discord strengthens the subadditivity of quantum entropy functions”. En: *arXiv preprint arXiv:1101.1717* (2011).
- [158] Mario Berta, Kaushik P Seshadreesan y Mark M Wilde. “Rényi generalizations of the conditional quantum mutual information”. En: *Journal of Mathematical Physics* 56.2 (2015), pág. 022205.
- [159] Marco Tomamichel, Roger Colbeck y Renato Renner. “A fully quantum asymptotic equipartition property”. En: *IEEE Transactions on Information Theory* 55.12 (2009), págs. 5840-5847.
- [160] Avijit Misra, Anindya Biswas, Arun K Pati, Aditi Sen, Ujjwal Sen y col. “Quantum correlation with sandwiched relative entropies: Advantageous as order parameter in quantum phase transitions”. En: *Physical Review E* 91.5 (2015), pág. 052125.



- [161] Martin Müller-Lennert, Frédéric Dupuis, Oleg Szehr, Serge Fehr y Marco Tomamichel. "On quantum Rényi entropies: a new generalization and some properties". En: *Journal of Mathematical Physics* 54.12 (2013), pág. 122203.
- [162] Mark M Wilde, Andreas Winter y Dong Yang. "Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and Hadamard channels via a sandwiched Rényi relative entropy". En: *Communications in Mathematical Physics* 331.2 (2014), págs. 593-622.
- [163] Rupert L Frank y Elliott H Lieb. "Monotonicity of a relative Rényi entropy". En: *Journal of Mathematical Physics* 54.12 (2013), pág. 122201.
- [164] Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen. "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" En: *Physical Review* 47.10 (1935), pág. 777.
- [165] Erwin Schrödinger. "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik". En: *Naturwissenschaften* 23.48 (1935), págs. 807-812.
- [166] Howard M Wiseman, Steve James Jones y Andrew C Doherty. "Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox". En: *Physical Review Letters* 98.14 (2007), pág. 140402.
- [167] John S Bell. "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox". En: *Physics* 1.3 (1964), págs. 195-200.
- [168] Jacek Jurkowski. "Quantum discord derived from Tsallis entropy". En: *International Journal of Quantum Information* 11.01 (2013), pág. 1350013.
- [169] Xinhua Hu y Zhongxing Ye. "Generalized quantum entropy". En: *Journal of mathematical physics* 47.2 (2006), pág. 023502.
- [170] Alexey E Rastegin. "Some general properties of unified entropies". En: *Journal of Statistical Physics* 143.6 (2011), págs. 1120-1135.
- [171] AK Rajagopal y RW Rendell. "Separability and correlations in composite states based on entropy methods". En: *Physical Review A* 66.2 (2002), pág. 022104.
- [172] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral y Mark Williamson. "Unified view of quantum and classical correlations". En: *Physical Review Letters* 104.8 (2010), pág. 080501.
- [173] R Rossignoli, N Canosa y L Ciliberti. "Quantum correlations and least disturbing local measurements". En: *Physical Review A* 84.5 (2011), pág. 052329.
- [174] ACS Costa y RM Angelo. "Bayes' rule, generalized discord, and nonextensive thermodynamics". En: *Physical Review A* 87.3 (2013), pág. 032109.
- [175] Tommaso Tufarelli, Tom MacLean, Davide Girolami, Ruggero Vasile y Gerardo Adesso. "The geometric approach to quantum correlations: computability versus reliability". En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46.27 (2013), pág. 275308.
- [176] Norma Canosa, Leonardo Ciliberti y Raúl Rossignoli. "Quantum discord and information deficit in spin chains". En: *Entropy* 17.4 (2015), págs. 1634-1659.
- [177] Alfred Wehrl. "General properties of entropy". En: *Reviews of Modern Physics* 50.2 (1978), pág. 221.
- [178] Marco Piani. "Problem with geometric discord". En: *Physical Review A* 86.3 (2012), pág. 034101.
- [179] Gustavo Martín Bosyk, Steeve Zozor, Federico Holik, Mariela Portesi y Pedro Walter Lambert. "A family of generalized quantum entropies: definition and properties". En: *Quantum Information Processing* 15.8 (2016), págs. 3393-3420.
- [180] N Gigena y R Rossignoli. "One-body information loss in fermion systems". En: *Physical Review A* 94.4 (2016), pág. 042315.
- [181] Aharon Brodutch y Kavan Modi. "Criteria for measures of quantum correlations". En: *Quantum Information & Computation* 12.9-10 (2012), págs. 721-742.

- [182] Lina Chang y Shunlong Luo. "Remedying the local ancilla problem with geometric discord". En: *Physical Review A* 87.6 (2013), pág. 062303.
- [183] Charles H Bennett, Herbert J Bernstein, Sandu Popescu y Benjamin Schumacher. "Concentrating partial entanglement by local operations". En: *Physical Review A* 53.4 (1996), pág. 2046.
- [184] Göran Lindblad. "Completely positive maps and entropy inequalities". En: *Communications in Mathematical Physics* 40.2 (1975), págs. 147-151.
- [185] Boaz Tamir y Eliahu Cohen. "A Holevo-Type Bound for a Hilbert Schmidt Distance Measure". En: *Journal of Quantum Information Science* 5.04 (2015), pág. 127.
- [186] Michał Horodecki y Paweł Horodecki. "Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols". En: *Physical Review A* 59.6 (1999), pág. 4206.
- [187] Xiao-Ming Lu, Jian Ma, Zhengjun Xi y Xiaoguang Wang. "Optimal measurements to access classical correlations of two-qubit states". En: *Physical Review A* 83.1 (2011), pág. 012327.
- [188] Karol Zyczkowski y Hans-Jürgen Sommers. "Induced measures in the space of mixed quantum states". En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 34.35 (2001), pág. 7111.

# ÍNDICE ALFABÉTICO

- canal
  - ver* operación, 22
- correlaciones, 23
  - discord, 30
  - entrelazamiento, 23
  - monogamia, 47
- cuantidad, 31
- cuantidad potencial, 74
  
- déficit de información, 29
- déficits unificados, 103
- descomposición espectral, 18
- descomposición separable, 61
- dinámica, 19
  - ecuación de Schrödinger, 19
  - sistema abierto, 20
- discord, 30
  - global, 48
  - potencial, 81
  - simétrico, 31
  - termal, 46
- distribución de
  - entrelazamiento, 45
  
- entrelazamiento
  - de formación, 28
  - distribución de, 45
  - medidas de, 28
- entropía
  - de entrelazamiento, 28, 106
  - de Rényi, 26, 94
  - de Shannon, 25
  - de Tsallis, 26, 94
  - de von Neumann, 26
    - concavidad de la, 97
    - subaditividad de la, 97
  - Schur-concavidad, 27
  - unificada o  $(q, s)$ –, 101
- entropía relativa
  - generalizada, 99
- entropías unificadas, 101
  - no aditividad de las, 101
- estado
  - Bell-diagonal, 82
  - clásicamente
    - correlacionado, 24
  - combinación convexa, 18
  - de Werner, 59, 111
  - extensión clásica, 42
  - isotrópico, 83, 111
  - mezcla, 18
  - preparación remota, 43
  - pseudopuro, 109
  - puro, 18
  - separable, 23
- estado separable, 23
  - descomposición óptima, 55, 61
  - longitud, 55
  - máximamente discordante, 64
- extensión clásica, 42, 51
  - óptima, 55, 62
  
- hamiltoniano, 19
  
- información, 25
  - déficit de, 29
  - mutua, 26
  - mutua cuántica, 26
  
- mapa
  - ver* operación, 22
  - biestocástico, 29
- mayorización, 27
  - entropías unificadas, 102
- medición, 20
  - de von Neumann, 21
  - no selectiva, 20
  - POVM, 20
  - SIC-POVM, 21, 64
- MID, 30, 36
- monogamia de correlaciones, 47
- MUB, 65
  
- observable, 18
- operación, 22
  - atenuación de amplitud, 86
  - biestocástica, 102
  - LOCC, 22
  - mapa CPTP, 22
  - operadores de Kraus, 22
  - unital, 82
  - unitaria, 19
  
- preparación remota de estados, 43
  
- sistema
  - compuesto, 19, 69
  - cuántico, 17
- subsistemas, 69
  
- trabajo extraíble, 46
- traza parcial, 19

