UNIVERSITAT JAUME•I

TRABAJO FIN DE MÁSTER

APLICACIONES DE LA CALCULADORA CASIO FX-82SPXII EN EL TEMA DE DIVISIBILIDAD PARA ALUMNOS DE 1PMAR

MÁSTER DE PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS (CURSO 2015/2016)

Especialidad: Matemáticas

Autora: Cristina Andreu Aguilar

Tutor: Francisco G. González Martínez

Resumen

En el trabajo expuesto a continuación, se pretende comprobar que existe una nueva forma de resolver los ejercicios del tema de 2º de ESO de Divisibilidad, usando la calculadora CASIO fx–82SPXII y, por lo tanto, se puede explicar este tema usando esta calculadora. Se propone aplicar esta nueva metodología didáctica únicamente en el grupo de 1 PMAR, ya que son alumnos con dificultades del aprendizaje que, durante sucesivos años, no han sido capaces de aprender a resolver los problemas de divisibilidad mediante la metodología tradicional.

Esta propuesta pretende simplemente comprobar que la metodología se puede aplicar, sin entrar en la discusión de si es correcto o didáctico enseñar este tema con la calculadora, sin aplicar los algoritmos de resolución manuales.

Para empezar, el trabajo muestra cómo han ayudado desde la prehistoria las herramientas de cálculo a que las matemáticas evolucionen hacia la ciencia que conocemos hoy en día, seguido de una búsqueda bibliográfica sobre cómo han evolucionado las leyes de educación y qué cambios han conllevado dentro de las aulas.

A continuación, se resuelven los ejercicios propuestos en el tema de divisibilidad del libro Matemáticas SM (Savia) para 2º de ESO, usando la calculadora, mediante las nuevas funciones de factorizar (FACT), división exacta (), máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM).

De esta manera, se comprueba que la nueva metodología es viable a nivel instrumental, ya que no se discuten los efectos positivos o negativos que tendrían su implantación en el aula.

Lo que sí que es cierto, es que, utilizando la calculadora, los alumnos se incorporan al proceso de enseñanza-aprendizaje de una forma activa, ya que se toman el uso de la calculadora en la resolución de actividades como un juego y, por tanto, su motivación y atención se multiplican, siendo así actores de su construcción del conocimiento y no meros espectadores.

Para terminar, se analizan los resultados obtenidos en el grupo de 1 de PMAR del Instituto Matilde Salvador, en el examen de Divisibilidad, resuelto por los alumnos mediante la metodología tradicional. Puesto que estos resultados no son positivos, más bien desastrosos, se resuelve el examen esta metodología y se cuestiona sobre si, mediante la nueva propuesta metodológica, los alumnos llegarían a un aprendizaje significativo, y, por lo tanto, se obtendrían resultados más positivos.

Índice

“Todos somos unos genios. Pero si juzgas a un pez por su habilidad de escalar un árbol, vivirá su vida entera creyendo que es un estúpido”

Albert Einstein

1. Introducción

- **Historia de las matemáticas y las máquinas de calcular.**

Desde la antigüedad, las matemáticas han sido consideradas un arte al alcance de muy pocos. Siempre se ha pensado que el aprendizaje del alumno dependía tanto de la destreza del profesor en dicho arte, como de la voluntad y capacidad de los alumnos para dejarse empapar por los conocimientos del artista. (Gascón, 1998; Pérez Sanz)

A su vez, el desarrollo sociocultural del hombre y de la propia ciencia de las matemáticas, se ha visto ligado a la evolución de herramientas que permitieran mediciones y cálculos, cada vez más exactos.

Ya nuestros antepasados prehistóricos, cuyas matemáticas se basaban únicamente en el conteo, se ayudaban de los dedos de las manos para contar cantidades pequeñas y de piedras cuando las cantidades eran más grandes. Del uso de piedras para contar, proviene la palabra cálculo, ya que *calculi*, significa piedra en latín. Puesto que en esta época no contaban aún con la escritura, los hombres prehistóricos usaban palos de conteo, que se basaban en pequeñas muescas en huesos y que se pueden interpretar como un intento rudimentario de registrar las cuentas.

Las primeras matemáticas avanzadas y organizadas se sitúan hace más de cinco mil años en Egipto y Babilonia. Estaban centradas mayoritariamente en la aritmética y en medidas geométricas básicas. (Vilches Sánchez) Para ayudarse con estas operaciones, egipcios y babilonios usaban el ábaco mesopotámico, que se cree que tuvo su origen en India, Mesopotamia y Egipto. Estos consistían en una tablilla de piedra cubierta de arena, en la que según se escribieran las letras o se colocaran las piedras, representaban el valor, la cantidad o números. Se cree que estos ábacos mesopotámicos se usaban con fines didácticos. (Orozco-Moret & Labrador, 2006)

Fue a partir de las bases egipcias y babilonias, que los griegos desarrollaron algunas de sus teorías de forma más abstracta en forma de axiomas, definiciones y teoremas. En esta época hubo grandes matemáticos y filósofos que se dedicaron a las matemáticas tanto teóricas como aplicadas, aunque por aquel entonces las matemáticas abarcaban todos los saberes de la naturaleza. Estos, posteriormente, se fueron independizando como ciencias propias, tales como la física o la astronomía. (Vilches Sánchez; Pérez Sanz). Los griegos también se ayudaron del “Abax”, que era una variación del ábaco mesopotámico, para hacer cálculos, y de otros utensilios geométricos, como el compás, que favoreció los grandes avances en geometría y astronomía. (Orozco-Moret & Labrador, 2006)

Los mayas también fueron avanzados en esta ciencia. De hecho, el primer uso documentado del cero parte de ellos. Pero se quedaron estancados, ya que su única instrumentación conocida para contar eran las manos y los pies, que no fue suficiente para calcular más ciclos astronómicos de aquellos que predijeron a partir de los hechos observados a simple vista. (Vilches Sánchez). Las matemáticas incas, por otra parte, se dedicaron mayoritariamente al cálculo en el ámbito económico. Para ello se ayudaron del Quipu, que consistía en unas cuerdas de colores en las que se registraba información, además de cálculos, mediante nudos; y del Yupana, una especie de ábaco inca.

El ábaco ha sido una herramienta de cálculo versionada en casi todas las civilizaciones y fue muy popular hasta el siglo XVIII. Aun así, en algunas culturas, como la china y la japonesa, el ábaco sigue estando muy arraigado, ya que estos en concreto, permiten realizar algunas operaciones más, además de las cuatro operaciones básicas.

Durante la Edad Media las matemáticas no evolucionaron tanto como lo habían hecho en otras épocas. Los que más contribuyeron a la evolución de las matemáticas fueron los árabes, ya que se dedicaron a traducir textos científicos e incorporar a sus propias ciencias las ideas de las “ciencias extranjeras” durante su invasión a Europa. Ya a finales del siglo XV, las traducciones árabes y griegas sirvieron de base a matemáticos italianos como Fibonacci o Pacioli para sus estudios.

En pleno movimiento renacentista, la ciencia avanzó notablemente, especialmente la astronomía y las matemáticas, y este desarrollo estuvo favorecido, en parte, por la invención de la imprenta. Esta permitió una divulgación muchísimo mayor de los textos científicos, pero esta época, como la anterior, se caracterizó por la recuperación de ideas matemáticas.

Los grandes matemáticos de la historia hasta el siglo XVII no aprendieron sus conocimientos en las universidades que, citando a Pérez, *“estaban ancladas a los saberes medievales y aristotélicos”*, sino que aprendieron por su cuenta, muchos de ellos guiados por maestros, pero movidos por su propia curiosidad de conocer el mundo que les rodeaba. Fue en este siglo que John Napier empezó un estudio sobre los logaritmos que, años después derivaría en la creación de las escalas logarítmicas. En 1617, Napier dio a conocer su ábaco, más conocido como Huesos de Napier, para calcular productos y cocientes. Estos descubrimientos motivaron otros inventos, como las Reglas de cálculo, que aparecieron entre 1620 y 1630, y que permiten realizar operaciones aritméticas mediante escalas basadas en logaritmos. Estas fueron herramientas utilizadas masivamente por profesionales y, más adelante, en educación superior, hasta su declive a finales del siglo XX a causa de la aparición de las calculadoras.

Las precursoras a las calculadoras que conocemos hoy en día, se inventaron también en este siglo. En 1642, Pascal inventó una calculadora mecánica que se acabó llamando la Pascalina. Se podían realizar las cuatro operaciones básicas, pero sobretodo, era una sumadora, ya que para multiplicar y dividir se debían de repetir las sumas y restas sucesivamente.

Unos años más tarde, en 1671, Leibniz desarrolló la Calculadora Universal que permitía también multiplicar y dividir y estuvo basada en el funcionamiento de la Pascalina. Leibniz desarrolló este invento para facilitar a su amigo Huygens la gran cantidad de cálculos que tenía que realizar.

A partir del siglo XVIII, los discípulos de Newton y Leibniz se dedicaron a resolver distintos problemas de física, astronomía e ingeniería a partir de los trabajos de sus maestros. Esto les permitió abrir nuevos campos en las matemáticas que, posteriormente a finales del siglo XIX y sobretodo en el XX, se independizarían como ciencias propias, no como una rama de las matemáticas (Vázquez, 2000; Pérez Sanz)

Durante el siglo XVIII hubo grandes avances en cálculo, álgebra y mecánica por parte de, entre otros, Euler. Pero en este siglo, la resolución de problemas tanto matemáticos como físicos, basadas simplemente en el cálculo, dejó entrever una falta de desarrollo adecuado y justificado de las bases del cálculo.

Fue Cauchy quien, en el siglo XIX, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo. Nacieron el concepto de límite, función, números complejos, la geometría no euclídea o la teoría de grupos entre otros. (Vilches Sánchez, s.f.)

Las matemáticas del siglo XX se dedicaron casi exclusivamente a resolver los 23 problemas matemáticos que propuso Hilbert como metas de investigación del siglo XX. La comunidad matemática se volcó en la resolución de estos problemas, pero, lo que nadie esperaba fue que la invención del ordenador revolucionaría la sociedad y la ciencia. (Vilches Sánchez; Vázquez, 2000)

En 1948, se inventó el primer diseño compacto de una calculadora mecánica, llamada Curta, que permitía realizar otras operaciones, aparte de las cuatro básicas, aunque con cierta dificultad. En esta época ya se estaban desarrollando los primeros ordenadores programables, aunque no estaban disponibles a nivel de uso personal.

En los años 70, la aparición de la calculadora electrónica, revolucionó la forma de calcular, ya que su simplicidad en comparación con las reglas de cálculo provocó la desaparición de estas últimas. Una década después se inventó también la primera hoja de cálculo, capaz de procesar una gran cantidad de datos y algoritmos. Este fue el inicio de la tecnología que conocemos hoy en día.

Actualmente, en el siglo XXI, los ordenadores han evolucionado de manera que cualquiera tiene acceso a una calculadora, un ordenador, una tableta o un móvil. Incluso se han desarrollado programas de inteligencia artificial, como emuladores de algoritmos, que ya se enseñan en las universidades, como el Mathematica, MatLab, R, Maxima, etc. Estos programas, junto con Hojas de cálculo como el Excel, han revolucionado la forma de investigar y de enseñar, ya que nos ayudan a procesar gran cantidad de información, de manera que nos podamos centrar en la propia investigación y desentendernos de cálculos mecánicos, que no aportan nada a la creación de nuevos procesos.

A nivel de enseñanza secundaria, la enseñanza de esta nueva tecnología no ha cambiado mucho. La mayoría de alumnos llevan sus calculadoras científicas a clase, sin saber siquiera utilizarlas. No se enseña a cómo sacar todo el potencial que tienen estas máquinas de calcular. En los últimos años, se conjetura sobre la necesidad de que la sociedad sepa una matemática mínima que les permita conocer las bases del lenguaje matemático y la comunicación matemática. (Orozco-Moret & Labrador, 2006) Por lo tanto, se debería empezar desde las generaciones más jóvenes a saber sacar el máximo partido a la tecnología que tienen a su alcance.

Es decir, las matemáticas han cambiado de una forma que nadie esperaba, así como el mundo que nos rodea. Por lo tanto, surge la siguiente cuestión. Si el mundo ha cambiado tanto, a la vez que las matemáticas han ido creciendo y adoptando nuevas formas de entenderse, si, además, han surgido tantas herramientas que nos ayudan a llegar cada vez más lejos y nos facilitan tanto la vida, ¿no sería también importante, que la enseñanza de dichas matemáticas en esta sociedad de la información, evolucione y se adapte a las nuevas tecnologías?

- **Evolución de la educación matemática.**

Si bien las matemáticas fueron consideradas un arte inmutable en la Grecia Clásica, el texto anterior nos desvela que han evolucionado hacia una visión de ciencia viva, siempre en constante evolución. La didáctica de las matemáticas también ha evolucionado desde la época griega, pero no a la velocidad que la misma ciencia.

No fue hasta la revolución francesa que la educación superior en Europa se consolidó como la enseñanza que conocemos ahora. Mientras tanto, en España, llevábamos 70 años de retraso. Durante el reinado de Isabel II se crearon la Real Academia de Ciencias de Madrid, las Primeras Facultades de Ciencias y la Ley de Instrucción Pública, más conocida como Ley Moyano. Esta ley fijó la estructura y el programa tanto de enseñanza primaria como secundaria, aunque en matemáticas el contenido a estudiar dejaba bastante que desear. Tan sólo se estudiaba Aritmética, Geometría y algunas nociones de Álgebra.

Otra particularidad de este sistema es que no se les daba tanta importancia a las matemáticas como se les da, por ejemplo, en la actualidad. El hecho es que, independientemente de si el bachillerato duraba seis o siete años, los últimos cursos no tenían matemáticas. De esta manera, los estudiantes solo tenían contacto con las matemáticas hasta los trece o catorce años, dependiendo de la reforma a la Ley que hubiese implantada en dicho momento.

Este programa se mantuvo con algunos cambios hasta principios del siglo XX, cuando se llevó a cabo una reforma significativa, que diferenció por primera vez un itinerario de ciencias y otro de letras. Este cambio, sin embargo, sólo se mantuvo cinco años.

En 1938, durante la Guerra Civil, el Gobierno de Franco implantó una nueva reforma a la ley Moyano que dictaba:

"Matemáticas. Estudio cíclico desde las primeras nociones de Aritmética y Geometría, hasta la iniciación de la Geometría Analítica y del Álgebra Superior, procurando adiestrar a los alumnos, sobre todo en los primeros cursos, en el cálculo mental y en los problemas prácticos de carácter métrico de la Aritmética y Geometría."

Es decir, fue el primero en introducir matemáticas superiores en todos los niveles elementales.

Entre los años 50s y 70s, hubo otras dos reformas que estructuraron la educación Secundaria en Bachillerato Elemental, Bachillerato Superior y Curso Preuniversitario. El contenido de las matemáticas programado por estas leyes era flexible, con lo que fue aprovechado por muchos profesores para iniciar a los alumnos en Matemáticas Modernas como Teoría de conjuntos y estructuras algebraicas. También cabe destacar la presencia de la estadística y combinatoria en dichos cursos.

En definitiva, en esta etapa se consolidaron las matemáticas como obligatorias para todos los alumnos hasta los 14 años, y su contenido aumentó de forma significativa en los cursos superiores de ciencias. (Bruno & Martinón, 2000)

Ya hacia el final de la dictadura franquista, en 1970 se instauró la Ley General de Educación, más conocida como Ley Villar debido a su autor. Esta ley estableció la educación obligatoria hasta los 14 años con la EGB. Esta estaba estructurada en dos etapas y tras ella, el alumno accedía a BUP o a Formación Profesional. Aquellos que optaban por BUP cursaban a continuación COU, un curso de preparación a la Universidad. (BOE 93/8175, 1975; Real Decreto 69/1981)

Las matemáticas estaban presentes de forma continua hasta segundo de BUP y después se ofertaba como optativa. Los programas de dichos cursos estaban fuertemente influenciados por las Matemáticas Modernas que, al poco de implantarse la ley, generó la opinión pública de que llevaban a un estrepitoso fracaso escolar.

Esta idea de fracaso, motivada en parte por la poca preparación de los docentes en la materia y por la capacidad de abstracción requerida para afrontar dichos conceptos, inició un proyecto experimental de programas renovados. Con este se afianza la presencia de la probabilidad y la estadística, se mantiene el análisis, aparecen las matemáticas modernas y la geometría se centra sobre todo en los espacios vectoriales. (Bruno & Martinón, 2000)

La ley Villar estuvo vigente hasta 1990, año en que se implantó la LOGSE, sufriendo sólo pequeñas reformas y modificaciones de carácter político (Ley Orgánica del Estatuto de Centros Escolares (1980) y Ley Orgánica del Derecho a la Educación (1985)).

La Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) supuso un cambio muy grande en el sistema educativo vigente hasta el momento. Para empezar, la educación obligatoria se extendió hasta los 16 años de edad. Además, introdujo la ESO y el Bachillerato y reguló la educación especial. Por último, dejaba que las autonomías se ocuparan de gestionar los centros educativos y de redactar una gran parte del programa. Esta ley pretendió ser menos minuciosa y restrictiva que las anteriores, al ser conscientes de la rapidez con la que estaba cambiando la sociedad (LOGSE, 1990)

A partir de esta, los cambios de leyes educativas han sido más vertiginosos que en los años anteriores, ya que con cada cambio de Gobierno se ha cambiado la Ley de Educación. En 2002, José María Aznar intentó implantar la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE). Esta menciona la importancia de la atención a la diversidad y a los cambios tecnológicos que han transformado las sociedades modernas. (LOCE, 2002).

Esta ley no llegó a aplicarse, ya que la llegada al poder de Zapatero paralizó la aplicación de esta en 2004. Dos años más tarde, este mismo Gobierno implantó la Ley Orgánica de Educación (LOE), que introdujo la asignatura de la Educación para la Ciudadanía. Esta medida fue muy polémica porque algunos sectores de la sociedad la veían como un posible adoctrinamiento del Gobierno a los estudiantes. También se consideró que la exigencia a los alumnos disminuyó, ya que se les permitía pasar de curso con asignaturas suspendidas. Por otro lado, la LOE fomentaba la tecnología en las aulas. (LOE, 2006).

Esta Ley de Educación estuvo vigente hasta el 2013, que se modificó con la implantación de la Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), más conocida como Ley Wert. Esta ley pretende reducir la tasa de abandono escolar actual, mejorar los resultados educativos de acuerdo con los criterios internacionales, a la vez que mejorar la empleabilidad y fomentar el espíritu emprendedor en los jóvenes. (LOMCE, 2013)

Por tanto, comparando la educación actual con la de principios del siglo XIX, podemos destacar que ha habido una gran evolución en cuanto a la universalización de la educación, ya que actualmente la mayoría de la población está escolarizada, no como en el siglo anterior, que la educación era vista como la "*mejor manera de preparar a un número determinado de ciudadanos jóvenes del siglo XX para su éxito individual en un área de trabajo específica dentro de la mecanización industrial y la comercialización"* según destacan Orozco y Labrador. Además, se ha dado muchísima más importancia a la asignatura de Matemáticas y a la Tecnología en las aulas a lo largo de la historia. Por otra parte, se ha invertido mucho también en educación infantil y en atención a la diversidad.

Actualmente nos encontramos a la sociedad de la información sumida en una crisis de valores y de las bases de construcción del conocimiento. Las últimas leyes de educación y la velocidad con que la tecnología evoluciona plantean la duda de si se debe cambiar la forma de enseñar, de manera que los estudiantes de hoy en día sean capaces de comprender los nuevos problemas y las situaciones a las que se deberán enfrentar. Como Orozco y Labrador explican:

"Entre las capacidades, conocimientos y habilidades superiores de razonamiento se priorizan las competencias matemáticas para una nueva generación de ciudadanos. Estas competencias son concebidas de manera muy diferente a la visión y función que tenía el conocimiento matemático en el siglo XX; el nuevo siglo despierta con expectativas de una "matemática mínima" para todos los ciudadanos que les permitan comprender, explicar e intervenir matemáticamente su contexto tecnológico cultural"

2. Contextualización

La sociedad actual, como hemos mencionado antes, está en crisis. Nos encontramos en un momento en que la sociedad está cambiando más rápido que el sistema educativo. Por esto mismo, las últimas leyes de educación se han caracterizado por querer dotar al sistema de flexibilidad. Pero si estos cambios se han aplicado en las aulas, aún no ha habido posibilidad de consolidar sus resultados. Al menos, en nuestro país, aún no se han asentado las bases de una innovadora y efectiva forma de enseñar por parte de todo el profesorado.

En cuanto a los cambios presenciados en las aulas, la estructura tradicional se ha centrado siempre en el profesor, que se subía a una tarima a simplemente recitar contenidos, con una actitud pasiva por parte del alumno. A partir de los años 80s empezó a cambiar el trato de los alumnos hacia el profesor, ya que el cambio producido en la sociedad, relajó la interacción profesor-alumno. Aun así, aunque los alumnos ya no trataran de usted a los profesores, la forma de dar las clases seguía siendo tradicional.

La filosofía seguida en la estructura tradicional de la educación es que, cuanta más teoría puedan memorizar los alumnos y más complicada sea la resolución de los problemas, más inteligente es el estudiante. Se fomenta la memorización y no el aprendizaje.

En las dos últimas décadas, la educación ha intentado experimentar un cambio hacia una estructura de las aulas más innovadora, donde el profesor es un mero guía en la construcción del conocimiento del propio alumno. Los estudiantes tienen una participación más activa en clase, el ambiente es más relajado y las nuevas tecnologías invaden las aulas. La realidad es que el modelo de educación aún está cambiando.

Por una parte, no todos los profesores son partidarios de dar tanta libertad a los alumnos, ya que piensan que estos no van a aprovechar las clases como en el modelo tradicional, o que de esta manera no van a poder finalizar el programa de la asignatura.

Por otro lado, la introducción de las nuevas tecnologías en clase no siempre es adecuada. Muchos centros consideran que la introducción de las TIC eleva demasiado el presupuesto y muchos profesores las ven como una pérdida de tiempo. Aunque esta visión está cambiando con las nuevas generaciones de docentes, hay un enfoque erróneo en la introducción de las TIC pensando en proyectores y ordenadores, cuando simplemente puede ser la utilización de la calculadora de una forma diferente.

En 1972, Hewlett-Packard introdujo en el mercado la primera calculadora científica de la historia. Esta permitía, por ejemplo, realizar funciones trigonométricas y logarítmicas sin dificultad, con una aproximación de hasta 12 decimales. Estas, como se ha mencionado antes, sustituyeron a las reglas de cálculo gracias a su simplicidad y bajo coste. Desde aquel momento, las calculadoras han ido evolucionando de forma que, cada vez, son más útiles para realizar las operaciones rutinarias, tanto dentro del aula como fuera.

Sin embargo, la aparición de la calculadora generó una gran controversia en la sociedad de los 70s. Los profesores y los padres dudaban de su utilidad y de su valor didáctico en las aulas de matemáticas. El argumento más repetido en contra de la introducción de la calculadora en las clases es que se olvida la base adquirida por la repetición con papel y lápiz y que esto perjudica la calidad del aprendizaje. (Lupiáñez & Moreno, 2003)

Citando a Lupiáñez y Moreno: *"Creemos que hay que entender la instrumentación de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas, como un proceso de enriquecimiento, no como sustitución, tratando de mejorar capacidades cognitivas, no de sustituirlas […] La calculadora no viene a desmovilizar la actividad cognitiva del estudiante, sino a darle la posibilidad de actuar, cognitivamente, en terrenos nuevos. […] permite que el estudiante se centre en la interpretación de lo que está realizando y que no se quede estancado en la realización exclusivamente sintáctica de cálculos repetitivos y tediosos."*

Siguiendo la filosofía de Orozco y Labrador, que como hemos mencionado antes abogan por una "matemática mínima" para todos los ciudadanos, es más importante que el hombre de la calle sepa resolver un problema, aunque sea con ayuda de las nuevas tecnologías, como la calculadora, a que sepa desarrollar un montón de algoritmos de forma mecánica sin entender el concepto ni su aplicación.

Actualmente, las calculadoras científicas están presentes en las aulas, pero no se les saca todo el potencial que tienen. El único cambio que se puede apreciar en los currículos gracias a las calculadoras científicas es que, en algunos libros de secundaria, ya no se enseña el algoritmo de las raíces cuadradas. La mayoría de los alumnos no memorizan este algoritmo y nunca llegan a entender el propio mecanismo de resolución. Esto es porque se trata de una operación bastante costosa, que se puede ahorrar pulsando un botón en la calculadora.

Aun así, la mayoría de los alumnos comprenden el concepto de raíz cuadrada y sus aplicaciones, simplemente usando la calculadora. Esto se debe a que el aprendizaje, como acuñó Ausubel en el 1963, es significativo y, por lo tanto, hay más probabilidad de que el alumno retenga los conocimientos y los sepa aplicar en diferentes situaciones en un futuro. Sin embargo, el hecho de incidir sobre la repetición del mecanismo, sólo lleva a un aprendizaje memorístico-repetitivo, que no va a perdurar en el tiempo de una manera efectiva.

En las últimas décadas se ha estado dedicando el tiempo que antes se usaba en enseñar el algoritmo, en hacer comprender las aplicaciones y el concepto de esta función, evitando que muchos alumnos se pierdan en la repetición mecánica para luego no entender su aplicación. (Franklin & Waist, 1997)

Las dos líneas más discutidas en la educación hoy en día, son cómo atender a la diversidad y cómo introducir la tecnología a las aulas de una forma útil.

En la primera se están haciendo grandes avances, ya que cada vez hay más profesores que apuestan por didácticas de participación activa. En algunos centros, ya se ha cambiado la ordenación de los alumnos en clase y estos trabajan en grupos cooperativos. De esta manera, se reparten los alumnos de manera que el grupo es heterogéneo en cuanto a rendimiento académico, sexo, raza, etc. Esto provoca que se potencie lo mejor de cada alumno, y se complementen los unos a los otros trabajando en grupo. También se trabajan valores como la solidaridad, la no-competitividad, etc. Los docentes preparan clases más dinámicas que incluyen hasta juegos para conseguir que el alumno construya su conocimiento divirtiéndose, de una manera significativa.

Sin embargo, en cuanto a los materiales utilizados, más concretamente con la calculadora, el panorama no ha cambiado desde que apareció. Aunque se ha aceptado su presencia en clase, en cierta manera, se restringe su uso, de manera que prevalece un alumno que sepa realizar los algoritmos con papel y lápiz, aunque no haya conseguido resolver bien un ejercicio, a otro que sepa resolverlo con ayuda de la calculadora.

En este trabajo se propone una metodología innovadora implementando el uso de la calculadora científica CASIO fx-82SPXII en el tema de Divisibilidad en el Programa de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento (PMAR).

Este nuevo modelo es el que está sustituyendo a la calculadora científica actual, por lo que, de aquí a unos años, se espera que todos los alumnos la tengan. Es una calculadora asequible económicamente que incluye muchas más funciones que las que ofrecía hasta ahora. Además, incluye un emulador para el ordenador, que permite que el profesor pueda guiar a los alumnos mediante un proyector, a conocer su propia calculadora y sacarle el máximo partido.

El tema de divisibilidad forma parte del currículo del primer ciclo de la ESO. Este tema se enseña al principio del segundo curso de la ESO, aunque se viene dando ya desde 6º de primaria. Es fundamental para saber factorizar un número, operar correctamente con fracciones, saber calcular el mínimo común múltiplo, máximo común divisor, etc.

El objetivo de este trabajo es demostrar que todos los problemas del tema de divisibilidad, se pueden resolver simplemente usando la calculadora y por tanto no sería necesario la explicación de los algoritmos y los procesos manuales que se utilizan para su resolución. Paralelamente a este objetivo surge una controversia sobre si es didáctico o no, enseñar solo la forma de resolución con la calculadora. Por otro lado, al no haberse aplicado esta metodología en las aulas, tampoco se puede afirmar si los resultados en cuanto al aprendizaje de los alumnos, serían positivos o negativos.

La propuesta se aplicaría simplemente a los alumnos del curso PMAR, ya que son alumnos con dificultades del aprendizaje, que han dado este tema durante al menos 3 años (6 de primaria, 1 de ESO y el año que hayan repetido). Tal y como una persona con problemas para caminar, por ejemplo, usa herramientas como sillas de ruedas o prótesis para disminuir estas barreras, se pretende dotar a estos alumnos con dificultades de aprendizaje, de una herramienta que les ayude a resolver los problemas y, de forma paralela, conseguir un aprendizaje significativo de este tema.

Puesto que estos alumnos ya han estudiado el tema de divisibilidad durante varios años, como se ha mencionado anteriormente, se persigue cambiar la metodología didáctica, de forma que consigan resolver los ejercicios y problemas correctamente, aunque para ello tengan que usar la calculadora. Para ello plantearemos la forma de explicar los contenidos del tema de divisibilidad de 1º de PMAR mediante la calculadora científica CASIO CLASSWIZ fx-82SP X II.

La motivación de este trabajo viene como consecuencia de los resultados obtenidos por los alumnos de 1º de PMAR (2º ESO) del instituto Matilde Salvador de Castellón, en la evaluación del primer tema. Estos alumnos, estuvieron trabajando durante 14 sesiones los contenidos del tema 1, divisibilidad y operaciones con números enteros, con explicaciones de los contenidos y la resolución de ejercicios. El número de sesiones fue muy elevado, ya que en un curso normal se dedican alrededor de 7 u 8 sesiones para el mismo contenido, pero dado las dificultades educativas de los alumnos, se consideró adecuado dedicar estas sesiones para reforzar la adquisición de las habilidades matemáticas para la resolución de problemas.

El examen (ver anexo I) consistió en 10 ejercicios, todos ellos resueltos anteriormente durante las sesiones. Los resultados (ver anexo II) fueron pésimos ya que sólo tres alumnos aprobaron el examen, con notas de 8,3; 7 y 7 y otros tres obtuvieron una calificación de 4. La mitad de alumnos, seis, no llegaron a un tres en la calificación, a pesar de la cantidad de sesiones dedicadas al tema, el doble que en un curso normal.

Todo esto, unido a que es un tema que ya han debido de conocer y estudiar en los tres años anteriores, nos hace meditar si nos estaremos equivocando en intentar forzar la adquisición de algoritmos que el alumno, o no puede o no quiere adquirir. Se supone que los alumnos de PMAR tienen dificultades del aprendizaje no imputables a la falta de trabajo y tienen posibilidades de obtener el Título de ESO, pero según los resultados obtenidos, la mitad de ellos después de 4 intentos, no han superado el tema de divisibilidad y operaciones con números enteros.

Por lo tanto, el objetivo de este trabajo será proponer una nueva forma de abordar los mismos contenidos de la unidad, utilizando la calculadora, con la finalidad de que, con su uso, el alumno sea capaz de resolver los problemas que se le plantean respecto a los contenidos estudiados, centrándonos en el conocimiento de sus funciones y el manejo de la calculadora, sin utilizar los algoritmos manuales.

Es evidente que esto puede escandalizar a muchos docentes, suponemos que igualmente pasaría con el cálculo de las raíces cuadradas sin utilizar el algoritmo manual, hasta a mí me asaltan las dudas y los prejuicios, pero ¿no estaremos intentando enseñar a un pez a subir un árbol? Quizás deberíamos utilizar las “prótesis matemáticas” en aquellos alumnos con deficiencias, que están necesitando su ayuda.

No debemos olvidar que la aplicación de esta mejora educativa está destinada a los alumnos de PMAR, pero de la misma manera se podría analizar si algunos de estos métodos de resolución de problemas, se podrían llevar a otros grupos, aunque sólo sea para que el alumno pueda comprobar que el resultado de sus operaciones es correcto e incluso para aprender a utilizar la calculadora, una herramienta que los alumnos de secundaria tienen para su manejo, pero que muchos de ellos no conocen todas las aplicaciones que tienen y el uso de sus funciones.

El temario que se va a considerar proviene del libro de Matemáticas de 2º de ESO de la editorial SM (Savia). Primero iremos dando propuestas de aplicación del uso de la calculadora para resolver los ejercicios que se plantean en cada apartado del tema y por último resolveremos el examen realizados por los alumnos, utilizando la calculadora.

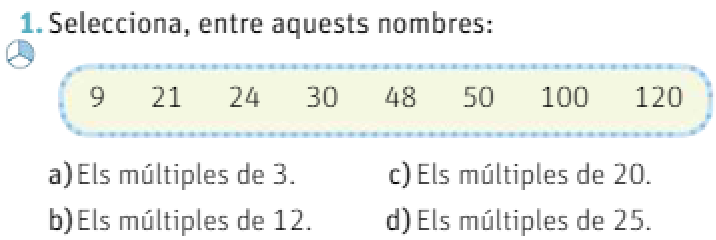
3. Propuesta de mejora didáctica

1. Reglas de divisibilidad

En este apartado se explican los conceptos múltiplo y divisor o factor. Además, también se enseñan los criterios de divisibilidad y los conceptos de número primo y compuesto. Después de, como mínimo, tres años dando el tema de divisibilidad, los conceptos de múltiplo y divisor deberían estar más que aprendidos, aunque la experiencia nos dice que, en los casos de alumnos con dificultad del aprendizaje, no suele ser así.

Puesto que la teoría en sí no se puede enseñar con la calculadora, se propone enseñar esta parte del temario mediante la práctica. Es decir, dejar que los alumnos experimenten con la calculadora, usando la función de división exacta y que, a partir del resultado obtenido, identifiquen múltiplos y divisores.

Como ejemplo, se proponen las siguientes actividades del libro:


1. Selecciona, entre aquests nombres:

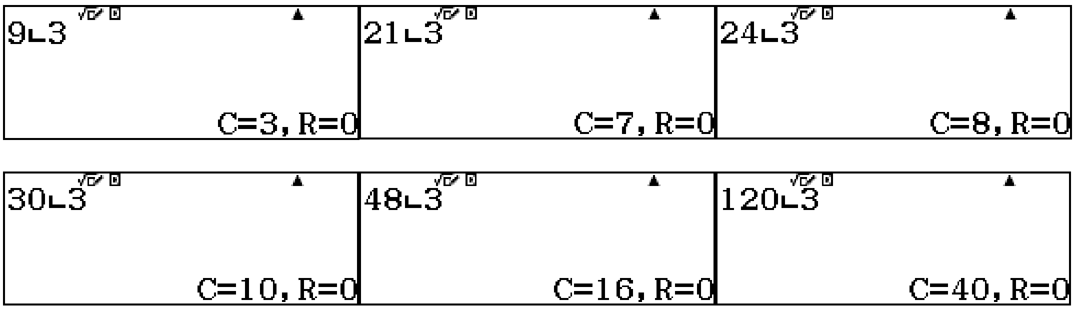
9 21 24 30 48 50 100 120

a) Els múltiples de 3.
b) Els múltiples de 12.
c) Els múltiples de 20.
d) Els múltiples de 25.

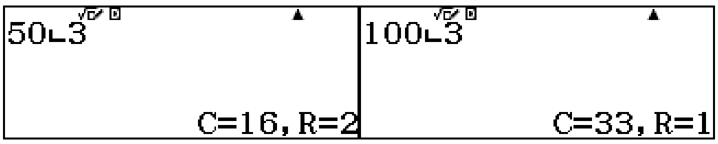
a) Los múltiplos de 3.

Para resolver estos problemas aprenderemos el uso de la tecla división exacta:

La calculadora devuelve a los alumnos las siguientes pantallas.



En el caso en que el número es múltiplo de 3, el resto será cero. En cambio, cuando el resto no es cero, los alumnos deben saber que ese número no es múltiplo de 3.



La tecla división entera será un aliado importante en las cuestiones de divisibilidad y es una de las mejoras que incorpora la calculadora CASIO fx-82SPXII.

3. Troba, entre aquests nombres:

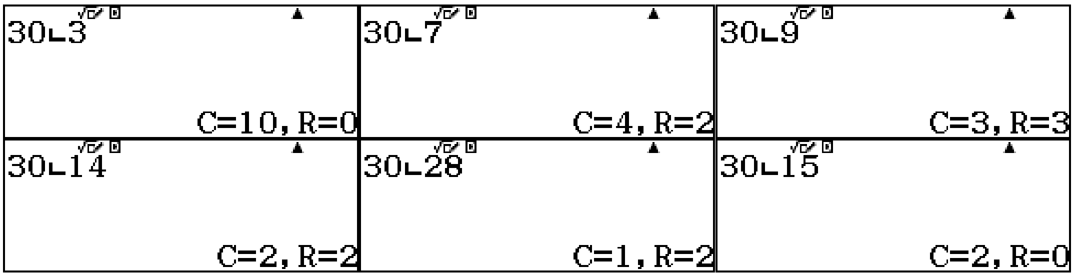
1	3	7	9	14	28	15	77

a) Divisors de 30. c) Divisors de 56.

b) Divisors de 45. d) Divisors de 77.

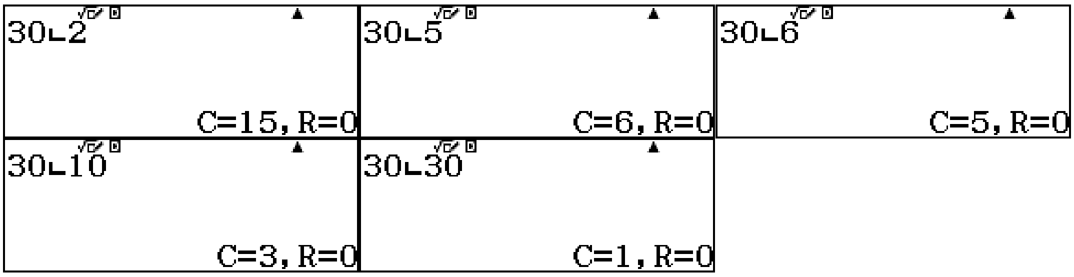
Indica, en cada cas, quins divisors hi falten.

a) Divisores de 30.



Los divisores de 30 serán el 1, 3 y 15, mientras que los demás, al no ser la división exacta o, en el caso del 77 ser mayor de 30, no son divisores de 30.

Para encontrar los divisores que faltan, el alumno debe experimentar con la calculadora los demás números, para ver que divisiones son exactas.



El alumno puede fijarse en las divisiones exactas ya hechas para descubrir que, si el 15 era divisor de 30 por ser la división exacta, el cociente, que en ese caso era 2, también es un divisor de este número.

Los divisores que faltan son: 2, 5, 6, 10, 30.

En cuanto a los criterios de divisibilidad que se explican en este apartado, no haría falta darlos, ya que con la calculadora se puede saber fácilmente. Además, si durante 3 años o más no han sido capaces de aprenderlos de la forma tradicional, más vale cambiar la metodología y ver si así son capaces de resolver problemas de divisibilidad.

Una de las aplicaciones de conocer los criterios de divisibilidad es para utilizarlo en la factorización y en la simplificación de fracciones, pero estos temas están resueltos con la calculadora utilizando la tecla FACT

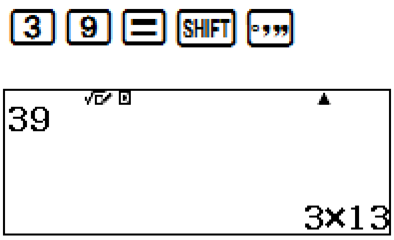
Por último, los conceptos de número primo o compuesto se pueden aprender mediante la calculadora. Usando la función de factorización, los alumnos pueden distinguir si un número o compuesto, dependiendo del resultado que le devuelva la calculadora. En las siguientes actividades del libro se muestran algunos ejemplos:

7. Indica quins dels nombres següents són primers i quins són compostos.

a) 39	c) 27	e) 58	g) 147	i) 313
b) 53	d) 121	f) 83	h) 205	j) 524

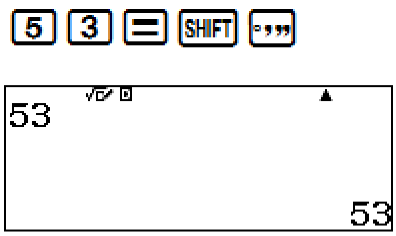
Esta actividad se realizará mediante la función de factorización de la calculadora. Si el resultado es el propio número, el alumno deberá saber que el número que intenta factorizar es primo, mientras que, si devuelve la descomposición en números primos, este será compuesto.

a) 39



Compuesto

b) 53



Primo

Mediante estos ejercicios, los alumnos pueden experimentar un aprendizaje significativo por su parte, dejándoles un tiempo para que “jueguen” con la calculadora.

Esta metodología es mucho más rápida que la tradicional, ya que, en la forma manual, los alumnos pierden mucho tiempo intentando comprobar cuáles son los números primos.

En el método tradicional, para empezar, deben aprenderse una lista con los números primos más pequeños conocidos y después deben hacer divisiones sucesivas por los números primos más pequeños hasta que, el cociente obtenido, es más pequeño que el último divisor que se ha probado. A los alumnos este método les resulta tremendamente tedioso, y si, además, presentan dificultades del aprendizaje, suelen abandonar en la mayoría de los casos. A este ejercicio se dedicaron 3 sesiones y puede comprobarse en los resultados del examen fueron decepcionantes, después de la dedicación efectuada, ya que sólo un alumno supo responder correctamente a la pregunta de si un número es primo. De la forma alternativa sólo se trata de utilizar la tecla FACT y ver si da el mismo resultado. Esto puede aprenderse en 5 minutos. Sólo por esto ya vale la pena esta mejora y la utilización de la calculadora para saber si un número es primo.

2. **Descomposición factorial.**

Este apartado presenta los subapartados descomposición en factores primos, múltiplos y divisores de números descompuestos en factores y número de divisores de un número natural. El subapartado de la descomposición factorial en números primos se resolvería con la función de factorización de la calculadora, tal y como se ha probado anteriormente.

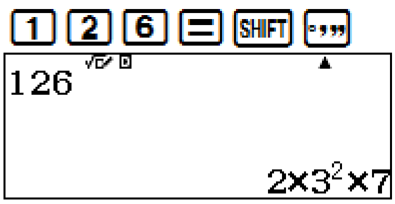
A partir de aquí, para resolver los siguientes apartados, se debería aplicar algunos pasos más, pero siempre se puede usar la calculadora.

A continuación, se muestran las resoluciones de actividades del libro usando la calculadora.

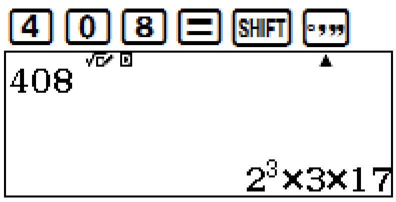
11. Descompon en factors primers aquests nombres.

a) 126 c) 408 e) 375 g) 632
b) 356 d) 512 f) 1225 h) 2340

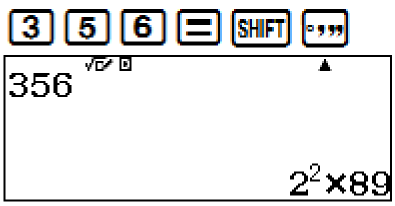
a) 126



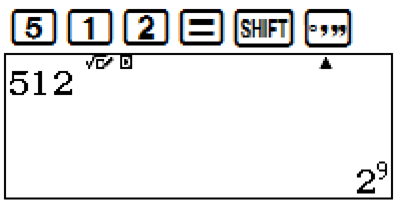
c) 408



b) 356



d) 512

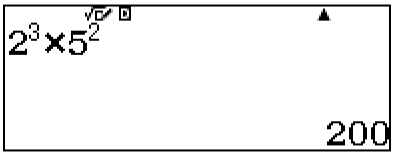


Como ya hemos destacado anteriormente, este método de resolución es mucho más rápido y, de esta manera, puede que algunos alumnos que no habían conseguido aprender a factorizar con el método tradicional, consigan llegar a un aprendizaje significativo a través de la calculadora.

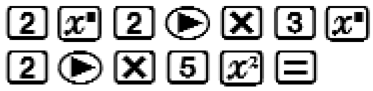
13. Calcula el nombre corresponent a cada descomposició en factors primers.

a) $2^3 \cdot 5^2$ b) $3^2 \cdot 11$ c) $2^3 \cdot 3^2$ d) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

a) $2^3 \cdot 5^2$



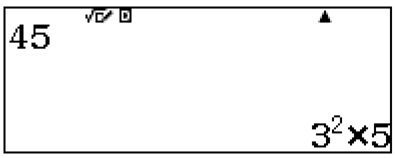
d) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$



17. Calcula el nombre de divisors dels nombres següents. Comprova que tens raó.

a) 45 c) 81 e) 120
b) 54 d) 105 f) 200

a) 45



Para calcular el número de divisores, el alumno simplemente debe aplicar una fórmula:

$$ND = (a + 1)(b + 1) \dots (r + 1)$$

Siendo a, b y r los exponentes de los factores primos de la descomposición factorial:

$$ND = (2 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$$

Para comprobarlo, se buscan los divisores de la siguiente manera:

$$(3^0+3^1+3^2)\cdot(5^0+5^1)=(1+3+9)\cdot(1+5)=1+3+9+5+15+45$$

3. Máximo común divisor.

La calculadora devuelve el valor del MCD de dos o más números, simplemente tocando el botón MCD. Es muy importante que los alumnos sepan resolver este tipo de actividades, ya que saber calcular el máximo común divisor es una de las bases para después poder seguir resolviendo problemas más complicados. Los resultados obtenidos en este ejercicio del examen no son tan desastrosos como en otros, ya que todos intentaron resolver la actividad, pero tan solo 4 alumnos consiguieron resolverlo completamente bien.

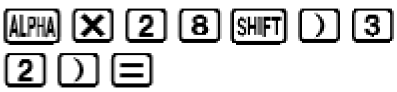
A continuación, se muestra la resolución de las actividades propuestas por el libro.

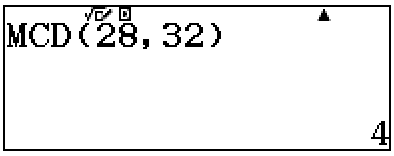
21. Calcula tots els divisors comuns dels següents parells de nombres.

a) 28 i 32 c) 45 i 54 e) 23 i 44

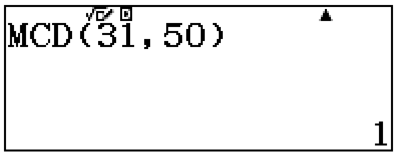
b) 25 i 60 d) 31 i 50 f) 64 i 75

a) 28 y 32





d) 31 y 50

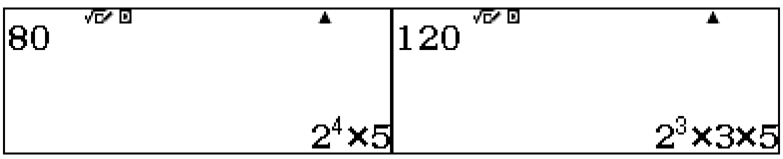


22. Calcula el màxim comú divisor dels nombres següents usant la descomposició factorial.

a) 32 i 56 c) 80 i 120 e) 18, 48 i 98

b) 49 i 56 d) 36 i 175 f) 33, 60 i 66

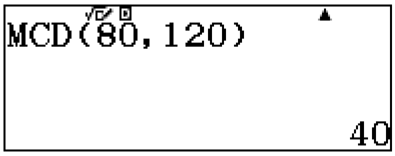
c) 80 y 120



Puesto que el máximo común divisor se calcula multiplicando los factores primos comunes de menor exponente:

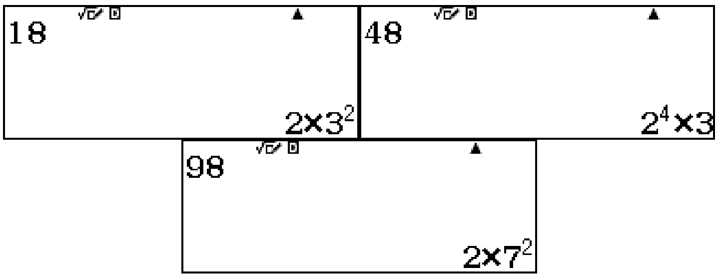
$$MCD(80,120) = 2^3 \cdot 5 = 40$$

Para comprobarlo, se puede resolver también con la función de la calculadora:



e) 18, 48 y 98

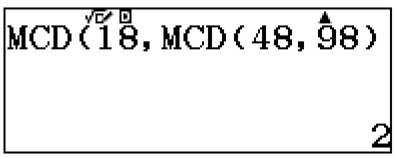
Primero se deben factorizar los 3 números:



Cogiendo los números primos comunes a los 3 con el mínimo exponente:

$$MCD(18, 48, 98) = 2$$

Comprobando con la función MCD de la calculadora:



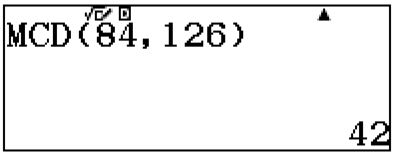
24. Escriu dos nombres el màxim comú divisor dels quals siga 7. Multiplica els dos nombres per 6. Quin és el màxim comú divisor dels dos nombres obtinguts?

Para que el máximo común divisor de dos números sea 7, los 2 deben presentar este número en sus factorizaciones:

$$n = 7 \cdot 2 = 14, m = 7 \cdot 3 = 21$$

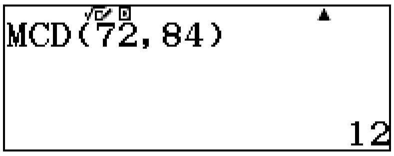
Multiplicando por 6:

$$n = 14 \cdot 6 = 84, m = 21 \cdot 6 = 126$$



25. En una granja hi ha 72 ovelles i 84 cabres. Com es poden repartir els animals en closos de la màxima grandària possible, però sense mesclar, de manera que en tots hi haja el mateix nombre d'animals?

Para resolver este problema, el alumno debe saber que la solución será el máximo común divisor del número de ovejas y de cabras. Por lo tanto,



Resultado: Los animales se repartirán en grupos de 12.

4. Mínimo común múltiplo.

Esta función se resuelve en la calculadora de la misma forma que el MCD, pero pulsando el botón de MCM. Parece que los alumnos comprenden mejor o les es más fácil realizar el algoritmo del mínimo común múltiplo que el del máximo común divisor, ya que la mitad de la clase supo hacer bien este ejercicio.

Las actividades del libro propuestas para resolver con la calculadora son las siguientes:

29. Calcula el mínim comú múltiple en cada cas.

a) 14, 30 i 42 b) 56, 84 i 120 c) 81, 90 i 99

a) 14,30 y 42

ALPHA ÷ 1 4 SHIFT) ALPHA ÷ 3 0 SHIFT) 4 2)) =

MCM(14, MCM(30, 42

210

30. Escriu un nombre i un múltiple seu. Calcula l'MCM dels dos nombres. Què hi observes?

$n = 3$ $m = 12$

ALPHA ÷ 3 SHIFT) 1 2) =

MCM(3, 12)

12

El alumno debe observar que el mínimo común múltiplo es siempre el múltiplo.

33. Carme sol anar a la biblioteca del seu barri cada 28 dies; Rafel, cada 25, i Teresa, cada 22. El dia 12 de setembre es van trobar els tres amics allí. Quin dia tornaran a coincidir a la biblioteca?

ALPHA ÷ 2 8 SHIFT) ALPHA ÷ 2 5 SHIFT) 2 2)) =

MCM(28, MCM(25, 22

7700

Resultado: Se volverán a ver dentro de 7700 días.

5. Los números enteros.

En este apartado se enseña quienes son los números enteros, su representación, su valor absoluto, su opuesto y su ordenación. Todo aquello que implique teoría no se puede enseñar enteramente con la calculadora, pero sí que se puede usar para obtener el valor absoluto de un número entero o su opuesto.

Por otro lado, las calculadoras científicas reconocen por el contexto cuándo "–" es un signo y cuándo es una operación. Por esto, el uso de la tecla [(–)] u operación [–] es indistinta en la realización de los cálculos.

A continuación, se presentan algunos ejemplos:

38. Representa els següents parells de nombres i calcula la distància entre aquests.

a) –9 i 3 c) 11 i –2 e) –15 i 4

b) –1 i 8 d) –7 i 3 f) 10 i 8

$$Distancia = mayor - menor$$

a) $-9\ y\ 3$

[3] [–] [(] [–] [9] [)] [=]

3–(–9)

12

e) $-15\ y\ 4$

[3] [–] [(] [–] [9] [)] [=]
[AC] [4] [–] [(] [–] [1] [5]
[)] [=]

4–(–15)

19

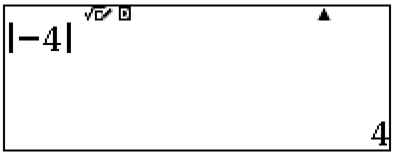
39. Calcula el valor absolut i l'oposat de cada nombre.

a) –4 c) +32 e) –58

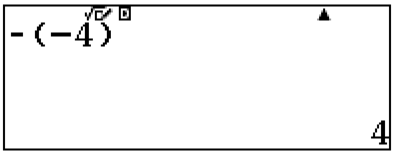
b) +15 d) 0 f) –100

a) -4

Valor absoluto:

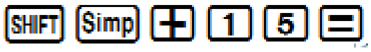


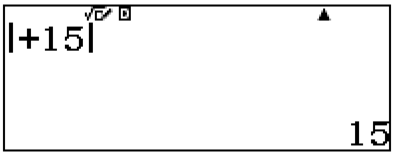
Número opuesto:



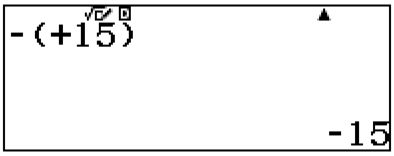
b) +15

Valor absoluto:





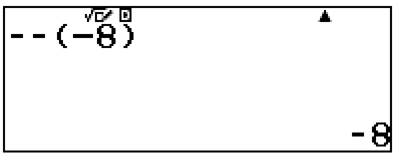
Número opuesto:



40. Calcula l'oposat de l'oposat de cadascun dels nombres següents. Què hi observes?

a) –8 b) +5 c) +26 d) –30

a) -8



Haciendo esta actividad con la calculadora, el alumno puede experimentar directamente cómo el opuesto del opuesto vuelve a ser el número original.

6. Sumas y restas de números enteros.

Estas operaciones se pueden hacer en la calculadora escribiéndolas tal y como están escritas en la actividad. Muchos alumnos presentan dificultades a la hora de operar con números enteros, ya que se suelen perder entre tanto signo y se les olvida que el menos delante, es el opuesto, confundiendo el signo – con la operación resta.

Por esto mismo, puesto que estos alumnos ya han dado los números enteros durante, como mínimo, 3 años, se propone hacer estos cálculos con la calculadora.

47. Fes les sumes següents.

a) (+15) + (+4)

b) (+22) + (–15)

c) (–38) + (+13)

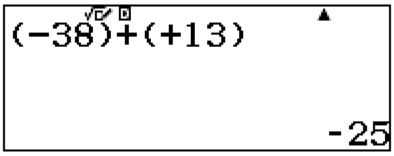
d) (+16) + (+17) + (+2)

e) (–11) + (–28) + (+75)

f) (–48) + (+53) + (+65)

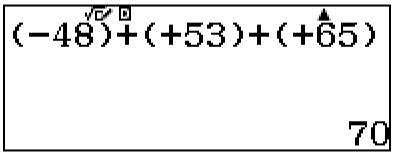
c) $(-\mathbf{38}) + (\mathbf{13})$

(− 3 8) + (
+ 1 3) =



f) $(-\mathbf{48}) + (+\mathbf{53}) + (+\mathbf{65})$

(− 4 8) + (
+ 5 3) + (+
6 5) =



49. Fes les restes següents.

a) (+25) – (+14)

b) (–13) – (–9)

c) (+31) – (+25)

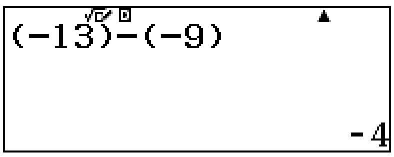
d) (+12) – (–35)

e) (–84) – (+32)

f) (–200) – (–147)

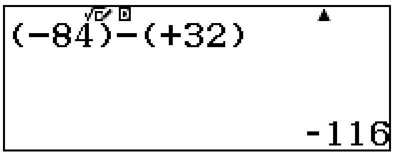
b) $(-\mathbf{13}) - (-\mathbf{9})$

(− 1 3) − (
− 9) =



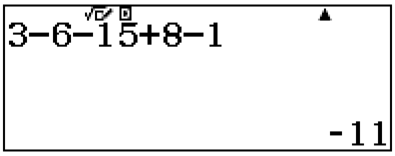
e) $(-\mathbf{84}) - (+\mathbf{32})$

(− 8 4) − (
+ 3 2) =



55. Al llarg d'un matí el preu d'una acció en la borsa ha pujat 3 cents, n'ha baixat 6, n'ha baixat 15, n'ha pujat 8 i n'ha pujat 1. Al final del dia, ha pujat o baixat de preu respecte del dia anterior?

$$A + 3 - 6 - 15 + 8 - 1 = A - 11$$



Resultado: El precio de la acción ha bajado respecto al día anterior.

7. Multiplicación y división de números enteros.

En este apartado también se propone hacer las operaciones combinadas de multiplicación y división de números enteros con la calculadora.

57. Fes les multiplicacions següents.

a) $(+12) \cdot (-4)$

b) $(-9) \cdot (+5)$

c) $(-25) \cdot (-7)$

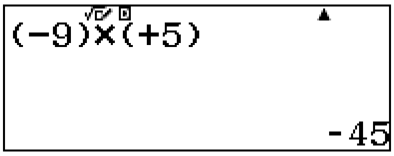
d) $(-11) \cdot (-12) \cdot (-4)$

e) $(+14) \cdot (-3) \cdot (+7)$

f) $(+4) \cdot (-8) \cdot (+20) \cdot (-10)$

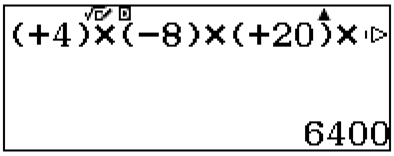
b) $(-9) \cdot (+5)$

(− 9) × (+ 5) =



f) $(+4) \cdot (-8) \cdot (+20) \cdot (-10)$

(+ 4) × (− 8) × (+ 2 0) × (− 1 0) =



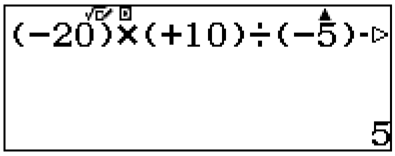
62. Fes aquestes operacions combinades.

a) $(-8) : (-2) \cdot (+3) \cdot (-4)$

b) $(-20) \cdot (+10) : (-5) : 8$

c) $1000 : (-10) : (-10) \cdot (-3)$

b) $(-\mathbf{20}) \cdot (+\mathbf{10}) : (-\mathbf{5}) : \mathbf{8}$

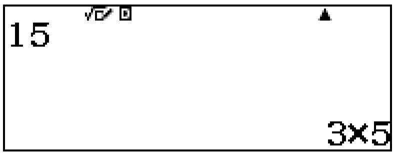


64. Obtín els divisors enters d'aquests nombres.

a) 15 b) −31 c) 81 d) −21

a) 15

Para obtener los divisores enteros de un número, primero los alumnos deberán factorizar este número con la calculadora.



A continuación, de la misma manera que se han calculado los divisores anteriormente, se calculan los divisores positivos.

$$(1+3) \cdot (1+5) = 1+3+5+15$$

Por último, los divisores enteros serán los divisores encontrados ahora y sus opuestos.

Por tanto, los divisores son: 1, -1, 3, -3, 5, -5, 15 y -15.

8. Operaciones combinadas con números enteros.

En este apartado se enseña la jerarquía de operaciones, la propiedad distributiva y la extracción de factor común, y todas ellas se pueden realizar en la calculadora.

Las operaciones combinadas resultan muy complicadas para los alumnos, más si estos presentan dificultades del aprendizaje, porque tienen muchos paréntesis y signos. Recordemos que este tema ya se ha explicado en repetidos cursos, por lo que, teóricamente, la jerarquía de las operaciones debería estar más que aprendida. Sin embargo, esto no es así. El objetivo es que los alumnos sepan hacer operaciones combinadas, por lo que, si hasta ahora no han aprendido la jerarquía de las operaciones por el método tradicional, se puede probar con otra metodología a ver si de esta manera consiguen resolver esta clase de problemas.

67. Resol les operacions següents.

a) $(-5) + (-5) \cdot 4 - (-2) \cdot (-9)$

b) $6 - 4 \cdot (-20) + 20 : (-5)$

c) $-(-8) \cdot (-11) + (-3) \cdot (-15) - 6 \cdot (-20)$

d) $200 - (-45) \cdot (-3) : (-5) + (-12) \cdot 8$

e) $150 : (-15) : (-5) - 20 \cdot (-18) + 300 \cdot (-1)$

f) $67 - 96 : (-12) + 43 - 5 \cdot (-17)$

e) $\mathbf{150}: (-\mathbf{15}): (-\mathbf{5}) - \mathbf{20} \cdot (-\mathbf{18}) + \mathbf{300} \cdot (-\mathbf{1})$

[1] [5] [0] [÷] [(] [−] [1] [5] [)] [÷] [(] [−] [5] [)] [−] [2] [0] [×] [(] [−] [1] [8] [)] [+] [3] [0] [0] [×] [(] [−] [1] [)] [=]

```
150÷(−15)÷(−5)−2(▷
                62
```

68. Calcula el resultat de les operacions següents.

a) $5 - 4 \cdot [12 + 3 \cdot (-6)]$

b) $(-8 + 3 \cdot 7) - [44 - (-6) + 5 \cdot (-9)]$

c) $18 : (-2) : 3 - (-5) \cdot (-6) : 2 - [(-7) - (-7) - 9]$

d) $(240 : (-2)) : (9 - (-3)) - [-148 - (-11) \cdot 12]$

e) $(-9 - 3 \cdot 2) - [34 - (-3) \cdot (-12)] - (-1) \cdot (-7)$

f) $[(-14) : 7 - (-25)] - [5 - (-6) \cdot (-8)] - [-(-7)]$

d) $(\mathbf{240}: (-\mathbf{2})): (\mathbf{9} - (-\mathbf{3})) - [-\mathbf{148} - (-\mathbf{11}) \cdot \mathbf{12}]$

[(] [2] [4] [0] [÷] [(] [−] [2] [)] [)] [÷] [(] [9] [−] [(] [−] [3] [)] [)] [−] [(] [−] [1] [4] [8] [−] [(] [−] [1] [1] [)] [×] [1] [2] [)] [=]

(240÷(−2))÷(9−(−:▷

$$-\frac{30}{7}$$

En cuanto a la extracción de factor común, a veces es bastante sencillo ver el factor común, pero para aquellos alumnos que no lo vean fácilmente, pueden hacer el máximo común divisor de los números con la calculadora.

73. Resol les operacions traient factor comú.

a) $25 \cdot 16 - 25 \cdot (-9)$

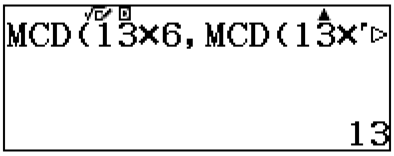
b) $13 \cdot 6 - 13 \cdot 7 + 13 \cdot 8 - 13 \cdot 9$

c) $41 \cdot 93 - 41 \cdot 18 + 41 \cdot (-25)$

d) $360 - 230 + 70 - 110$

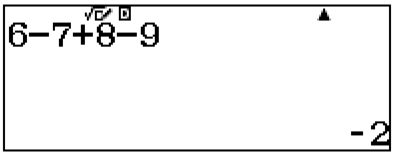
b) $\mathbf{13 \cdot 6 - 13 \cdot 7 + 13 \cdot 8 - 13 \cdot 9}$

ALPHA × 1 3 × 6 SHIFT) ALPHA × 1 3 × 7 SHIFT) ALPHA × 1 3 × 8 SHIFT) 1 3 × 9))) =



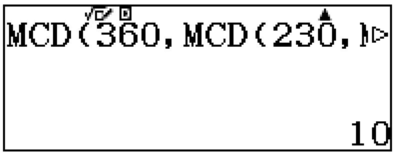
A continuación, se saca el factor común y se realiza la operación del paréntesis.

$$\mathbf{13(6 - 7 + 8 - 9) = 13 \cdot (-2) = -26}$$

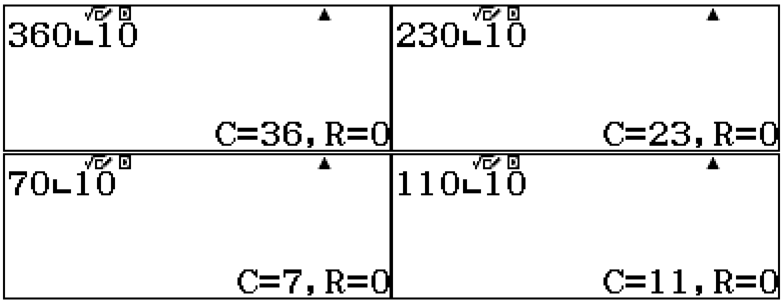


d) $\mathbf{360 - 230 + 70 - 110}$

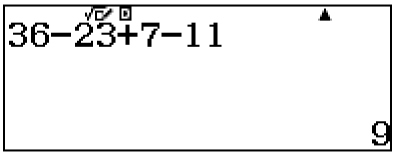
ALPHA × 3 6 0 SHIFT) ALPHA × 2 3 0 SHIFT) ALPHA × 7 0 SHIFT) 1 1 0))) =



Para obtener los números correspondientes a la operación del paréntesis, cada uno de ellos se divide por el factor común, usando la función de división exacta.

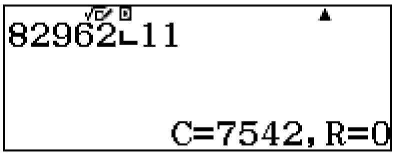


$$\mathbf{10(36 - 23 + 7 - 11) = 10 \cdot 9 = 90}$$



4. Resolución del examen.

1.- Explica el criterio de divisibilidad por 11 y aplícalo para ver si el numero 82962 es divisible por 11.

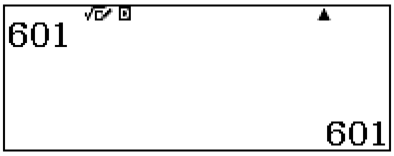


Puesto que el resto es cero, la división es exacta y, por lo tanto, es divisible por 11.

Los resultados obtenidos en esta pregunta por parte de los alumnos fueron pésimos. Tan sólo un alumno fue capaz de contestar bien la pregunta, por lo tanto, esto indica que las reglas de divisibilidad presentan una gran dificultad para la mayoría de los alumnos con dificultades del aprendizaje.

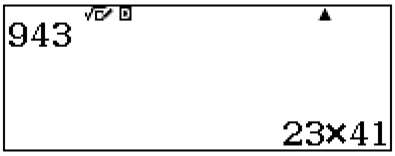
2.- Decir si los números siguientes son primos o compuestos (las operaciones tienen que estar hechas en el papel y explicar el razonamiento):

a) 601



Número primo

b) 943

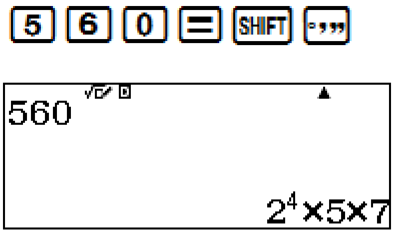


Número compuesto

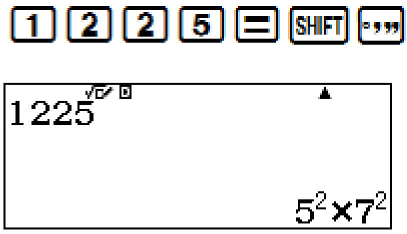
Este ejercicio tan sólo supo resolverlo correctamente un alumno de la clase, mientras que cinco de ellos no supieron hacer nada. Estos resultados demuestran que, como hemos dicho anteriormente, saber si un número es primo o no, conlleva memorización y un proceso tedioso de divisiones, por lo que presenta una gran dificultad para estos alumnos con dificultades del aprendizaje.

3.- Descompón en factores primos:

a) 560



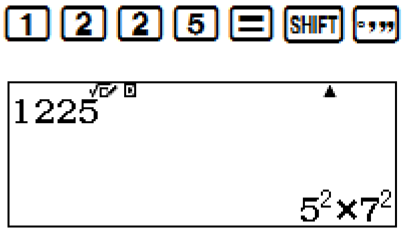
b) 1225



Al contrario que en los dos primeros ejercicios del examen, en este caso, siete alumnos consiguieron el punto completo de la pregunta mientras que solo uno de ellos no supo contestar nada bien.

4.- Calcula el número de divisores del número 1225

Para la factorización $p_1^a x p_2^b$, $ND = (a+1) \cdot (b+1)$



$$ND = (2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 3 = 9$$

Para resolver este ejercicio, los alumnos deben saber la fórmula necesaria para calcular el número de divisores de un número, pero, aun así, poder hacer la factorización con la calculadora facilitaría la resolución.

En cuanto a los resultados obtenidos en el examen, solamente tres de doce alumnos consiguieron resolver correctamente el ejercicio.

5.- Escribe todos los divisores del número 1225

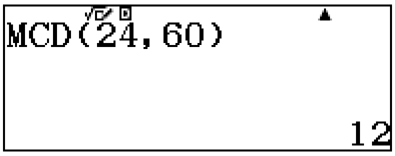
A partir de la factorización que ya se ha obtenido anteriormente, los alumnos seguirían el siguiente esquema para encontrar los divisores del número.

$$(1+5+5^2) \cdot (1+7+7^2) = 1+5+25+7+35+175+49+245+1225$$

Así pues, los divisores son: 1, 5, 7, 25, 35, 49, 175, 245, 1225

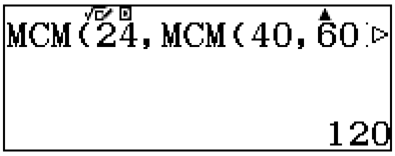
Solamente dos de los doce alumnos supieron resolver este ejercicio, mientras que ocho de ellos no contestaron nada bien.

6.- Calcula el Máximo común divisor de 24 y 60.



El MCD es uno de los conceptos más importantes de la divisibilidad y, aunque no es un concepto difícil de entender, parece que los alumnos presentan dificultades para realizar correctamente este algoritmo. Aun así, tal y como se ha señalado anteriormente, solamente un alumno fue incapaz de escribir nada en el ejercicio, cuatro lo resolvieron correctamente y el resto tuvo algunos fallos.

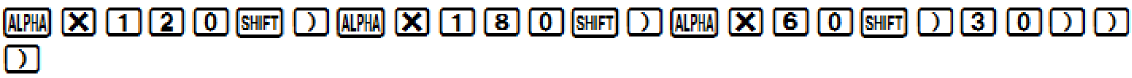
7.- Calcula el Mínimo común múltiplo de 24, 40 y 60

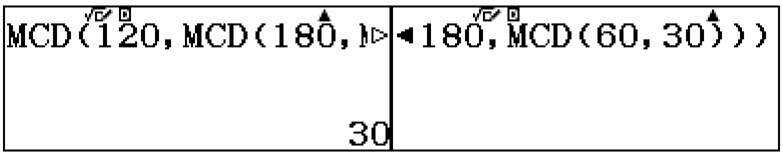


Junto con el MCD, el MCM es también uno de los conceptos más importantes de la divisibilidad, aunque parece que, a diferencia del anterior, los alumnos encuentran más facilidades a la hora de entender y resolver este tipo de problemas. Sin embargo, tan solo la mitad de la clase consiguió resolver bien este ejercicio.

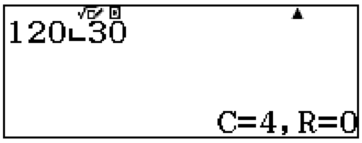
8.- Sacar factor común y calcula:

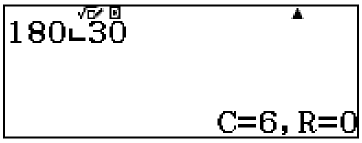
$$-120 + 180 + 60 - 30$$

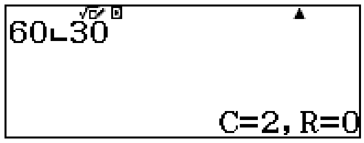




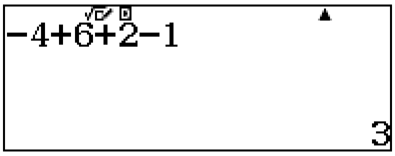
A partir del factor común, que es el máximo común divisor, se divide cada factor por el común para encontrarlo simplificado.







$$30 \cdot (-4 + 6 + 2 - 1) = 30 \cdot 3 = 90$$



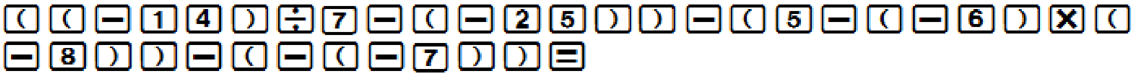
Los resultados obtenidos en este ejercicio fueron totalmente desastrosos, ya que nadie supo resolverlo correctamente. Los alumnos encuentran terriblemente complicado sacar el factor común, ya que, para empezar, no creen que vayan a poder verlo a simple vista y, para seguir, les resulta tedioso y complicado el algoritmo de resolución de este tipo de ejercicios.

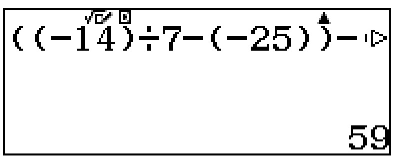
El método enseñado tradicionalmente trata de factorizar todos los números implicados en la operación y, seguidamente, encontrar los factores comunes a todos ellos. Aprovechando la función del MCD de la calculadora, los alumnos tienen una herramienta que les ayuda a sacar un factor común, en el caso de que no sean capaces de obtener un por ellos mismos.

9.- Indica cuantas operaciones hay y calcula el resultado de las operaciones siguientes (en cada paso debe hacerse una sola operación):

$$[(\mathbf{-14}):\mathbf{7} - (\mathbf{-25})] - [\mathbf{5} - (\mathbf{-6}) \cdot (\mathbf{-8})] - [-(\mathbf{-7})]$$

1. $(-14):7 = -2$
2. $(-2) - (-25) = 23$
3. $(-6) \cdot (-8) = 48$
4. $5 - 48 = -43$
5. $23 - (-43) = 66$
6. $66 - (-(-7)) = 59$





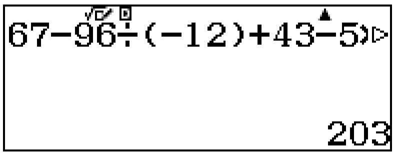
Este tipo de ejercicios presentan bastante dificultad para aquellos alumnos con problemas del aprendizaje, ya que normalmente, este tipo de personas tienden a despistarse, por lo tanto, tanta operación con tanto signo seguido les puede resultar complicado incluso haciéndolo con la calculadora, porque tienden a dejarse signos y números sin darse cuenta.

El resultado de este ejercicio en el examen es que simplemente tres de los doce alumnos supieron responder correctamente.

10.- Indica cuantas operaciones hay y calcula el resultado de las operaciones siguientes (en cada paso debe hacerse una sola operación):

$$\mathbf{67 - 96 : (-12) + 43 - 5 \cdot (-17)}$$

1. $96 : (-12) = -8$
2. $5 \cdot (-17) = -85$
3. $67 - (-8) = 75$
4. $43 - (-85) = 128$
5. $75 + 128 = 203$



Este ejercicio simplemente se diferencia del anterior en que no tiene paréntesis y los alumnos deben realizar las operaciones por jerarquía de multiplicación, división, suma y resta. Los resultados obtenidos en el examen revelan que la mayoría de alumnos presenta más dificultades a la hora de resolver operaciones combinadas con paréntesis, ya que, en la anterior actividad, como se ha señalado, tan sólo tres alumnos consiguieron resolverlo correctamente, mientras que este ejercicio que no tiene paréntesis fue resuelto correctamente por ocho de los doce alumnos.

El examen, en global, tuvo unos resultados desastrosos ya que, como se puede ver en la tabla del Anexo 2, la nota media del examen fue un 4,03; es decir, la clase suspendió el examen. En la Figura 2 del Anexo 3, se observa de una forma más visual que solo las preguntas 3 y 10 fueron contestadas correctamente por más de la mitad de la clase.

Por otro lado, en la Figura 1 del Anexo 3, se observa como sólo 3 de los 12 alumnos aprobaron el examen, de manera que se puede afirmar que la mayoría de la clase no tuvo un aprendizaje significativo del tema mediante la metodología tradicional.

5. Conclusiones y valoración personal.

Con este trabajo se pretendía comprobar que es posible dar los contenidos del tema de divisibilidad y números enteros, utilizando la calculadora científica CASIO fx-82SPXII que incorpora nuevas funciones como FACT que factoriza cualquier número, la división entera:  que nos da el cociente y el resto de cualquier división, y las funciones MCD y MCM que calculan el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números.

Es posible que estas nuevas funciones hagan replantearse la manera de resolver ejercicios, como ver si un número es primo o compuesto, la factorización, criterios de divisibilidad o cálculo del MCD y MCM, etc. De la misma forma que la aparición de las calculadoras y su función de cálculo de raíces cuadradas, cambió o desterró al algoritmo de cálculo de una raíz cuadrada, nos preguntamos si en un futuro, las nuevas funciones de esta calculadora cambiarán la forma de enseñar estos conceptos.

Esperemos que los “prejuicios didácticos” que muchos profesores tenemos ante la aplicación de las calculadoras, no impidan que estas se utilicen para resolver cálculos tediosos y complicados, desterrando algoritmos largos y difíciles de aplicar, y que su implantación no se retrase tanto como lo fue en el caso de la raíz cuadrada.

La implementación de esta mejora didáctica en el primer curso de PMAR nos parece muy interesante, dado las dificultades que los alumnos presentan, tal como se ha comprobado en los resultados obtenidos en la evaluación escrita de la unidad. Pensamos que, si hubiéramos cambiado la forma de explicar el tema, conforme a esta mejora, los resultados hubieran cambiado notablemente, y que la fuerza docente necesaria para la consecución de unos resultados mejores, sería sensiblemente inferior, ya que, con el mismo examen, hemos visto que los ejercicios se pueden resolver de una forma más fácil utilizando la calculadora CASIO fx-82SPXII.

La incorporación de la calculadora en la resolución de problemas, hace que, en muchos casos, el alumno se lo tome como un juego, fijando más su atención, ya que, todo lo que sea el manejo de máquinas (teléfono, *tablet*, ordenador, calculadora…) les motiva. De esta manera, el alumno participa de forma activa y manipulativa en la solución de los ejercicios, cosa que produce que se convierta en el actor de su propio proceso de enseñanza-aprendizaje y deje de ser un mero espectador.

También se debe analizar el posible inconveniente para su implantación, la compra, o bien por parte del alumnado o por parte del centro, de suficientes calculadoras para todos los alumnos. Respecto a este problema cabe señalar que, de la misma forma que se aconseja comprar unos libros, también puede recomendarse al principio de la etapa, la adquisición de la calculadora. Al igual que otras asignaturas recomiendan la compra de diccionarios o libros de lectura, la calculadora para el área de matemáticas puede ser considerado como material necesario. La otra opción de compra por parte del departamento, es también aceptable, dado que se pueden reutilizar para cursos siguientes, aunque el mayor inconveniente es que no la tendrían los alumnos en sus casas para utilizarla, por lo que se recomienda su compra individual, dado que seguirán utilizándolo en los cursos superiores. Para solucionar el posible problema de que algunos alumnos no pudieran comprarse la calculadora, el departamento o el centro debería disponer de algunas unidades para prestar. Puesto que la calculadora es totalmente asequible económicamente, ya que vale 15 euros, no parece ninguna barbaridad que los alumnos de 1º de ESO se compren esta calculadora ya que, como se ha comentado, la pueden seguir utilizando durante toda su etapa académica.

6. Bibliografía y webgrafía

BOE 93/8175. (1975). Recuperado el 18 de 10 de 2016, de Orden de 22/3/1975 que desarrolla el Plan de Estudios del Bachillerato: http://www.boe.es/boe/dias/1975/04/18/pdfs/A08049-08068.pdf

Bruno, A., & Martinón, A. (junio de 2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *SUMA34*, 27-43.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Educación y pedagogía, Vol XV Nº35*, 203-214.

de Guzmán Ozámiz, M. (s.f.). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Recuperado el 01 de 10 de 2016

Franklin, D., & Waist, B. K. (1997). The Evolution of Instructional Use of Hand Held Technology. What we wanted? What we got! *Technology Tansitions Calculus Conference.* Ohio.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathemátiques, 18/1*(52), 7-33.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,Vol. X nº2*, 213-222.

Las primeras calculadoras mecánicas. (s.f.). Recuperado el 20 de 10 de 2016, de Museo de la Técnica del Empordà: http://www.mte.cat/content/view/340/219/1/1/lang,cas/

LOCE. (2002). *Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación*.

LOE. (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*.

LOGSE. (1990). *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo*.

LOMCE. (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.*

Lupiáñez, J., & Moreno, L. (2003). Tecnología y Representaciones Semióticas en el aprendizaje de las Matemáticas. En P. Gómez, & L. Rico, *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (págs. 291 - 300). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Matemática incaica. (s.f.). Recuperado el 20 de 10 de 2016, de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_incaica#Quipus

Matemáticas 2ESO. (2016). SM (Savia).

Orozco-Moret, C., & Labrador, M. (2006). La tecnología digital en educación: Implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. *Theoria, Vol. 15(2)*, 81-89.

Pérez de Pablos, S. (04 de 09 de 2009). La promesa de un ordenador por alumno sólo llega a decenas de aulas. *El País*.

Pérez Sanz, A. (s.f.). *Historia de la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado el 01 de 10 de 2016, de http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/donosti/historia_%20ensenanza.htm

Primeras herramientas del cálculo. (s.f.). Recuperado el 28 de 10 de 2016, de Historia del computador: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/men_udea/pluginfile.php/28615/mod_imscp/content/1/Primeras_Herramientas_de_Calculo.html

Real Decreto 69/1981. (s.f.). Recuperado el 18 de 10 de 2016, de Real Decreto 69/1981, de 9 de enero, de ordenación de la Educación General Básica y fijación de las enseñanzas mínimas para el Ciclo Inicial: http://www.boe.es/boe/dias/1981/01/17/pdfs/A01096-01098.pdf

Soto, L. (12 de 10 de 2013). *Tipos de Ábacos - Ábaco mesopotámico*. Recuperado el 25 de 10 de 2016, de ALTHOX: Información pública de interés: http://althox.blogspot.com.es/2013/10/Tipos-de-Abacos-Abaco-Mesopotamico.html

Vázquez, J. (2000). Matemáticas, ciencia y tecnología: Una relación profunda y duradera. *Sociedades Matemáticas españolas. Año Matemático Mundial.*

Vilches Sánchez, J. (s.f.). *Las matemáticas a través de los tiempos*. Recuperado el 01 de 10 de 2016, de http://www.monografias.com/trabajos91/matematicas-traves-tiempos/matematicas-traves-tiempos.shtml

ANEXOS

ANEXO 1. Examen del tema de divisibilidad de 1 PMAR.

NOMBRE Y APELLIDOS :

FECHA: **CURSO :**

TEMA 1

1.- Explica el criterio de divisibilidad por 11 y aplícalo para ver si el numero 82962 es divisible por 11

2.- Decir si los números siguientes son primos o compuestos (las operaciones tienen que estar hechas en el papel y explicar el razonamiento):

a) 601

b) 943

3.- Descompon en factores primos:

a) 560

b) 1225

4.- Calcula el numero de divisores del numero 1225

5.- Escribe todos los divisores del número 1225

6.- Calcula el Máximo común divisor de 24 y 60

7.- Calcula el Mínimo común múltiplo de 24 , 40 y 60

8.- Sacar factor común y calcula:

$$-120 + 180 + 60 - 30$$

9.- Indica cuantas operaciones hay y calcula el resultado de las operaciones siguientes (en cada paso debe hacerse una sola operación):

$$[(-14):7 - (-25)] - [5 - (-6) \cdot (-8)] - [-(-7)]$$

10.- Indica cuantas operaciones hay y calcula el resultado de las operaciones siguientes (en cada paso debe hacerse una sola operación):

$$67 - 96:(-12) + 43 - 5 \cdot (-17)$$

ANEXO 2. Resultados obtenidos en el examen de divisibilidad.

Tabla 1. Resultados obtenidos en el examen**.**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA
Alumno 1	0,4	1	1	0,6	1	1	1	0,3	1	1	8,3
Alumno 2	0	0	1	0,4	0	0,2	0,2	0	0,4	0	2,2
Alumno 3	0	0	0,4	0	0	0,2	0,2	0	0,2	0,2	1,2
Alumno 4	0	0,4	1	0	0	0,4	1	0	0,2	1	4
Alumno 5	1	0,2	1	1	0,2	1	1	0	0,6	1	7
Alumno 6	0	0,5	1	0	0	0,2	1	0	0,3	1	4
Alumno 7	0	0,2	0,8	0	0	0	0	0,4	1	0,4	2,8
Alumno 8	0	0	0	0	0	1	1	0	0,2	1	3,2
Alumno 9	0,2	0,3	0,5	1	1	1	1	0	1	1	7
Alumno 10	0	0,3	0,7	0	0	0,3	0,3	0	0,2	0	1,8
Alumno 11	0	0	1	0	0	0,3	0,3	0	0,2	1	2,8
Alumno 12	0	0	1	1	0,4	0,3	0,3	0	0	1	4
MEDIA	0,13	0,24	0,78	0,33	0,22	0,49	0,61	0,06	0,44	0,72	4,03
BIEN (=1)	1	1	7	3	2	4	6	0	3	8	3
% BIEN	8%	8%	58%	25%	17%	33%	50%	0%	25%	67%	25%
REG. (0.5<X<1)	0	1	3	1	0	0	0	0	1	0	3
%REG.	0%	8%	25%	8%	0%	0%	0%	0%	8%	0%	25%
MAL (0<x<0.5)	11	10	2	8	10	8	6	12	8	4	6
% MAL	92%	83%	17%	67%	83%	67%	50%	100%	67%	33%	50%

ANEXO 3. Gráficos de los resultados obtenidos.

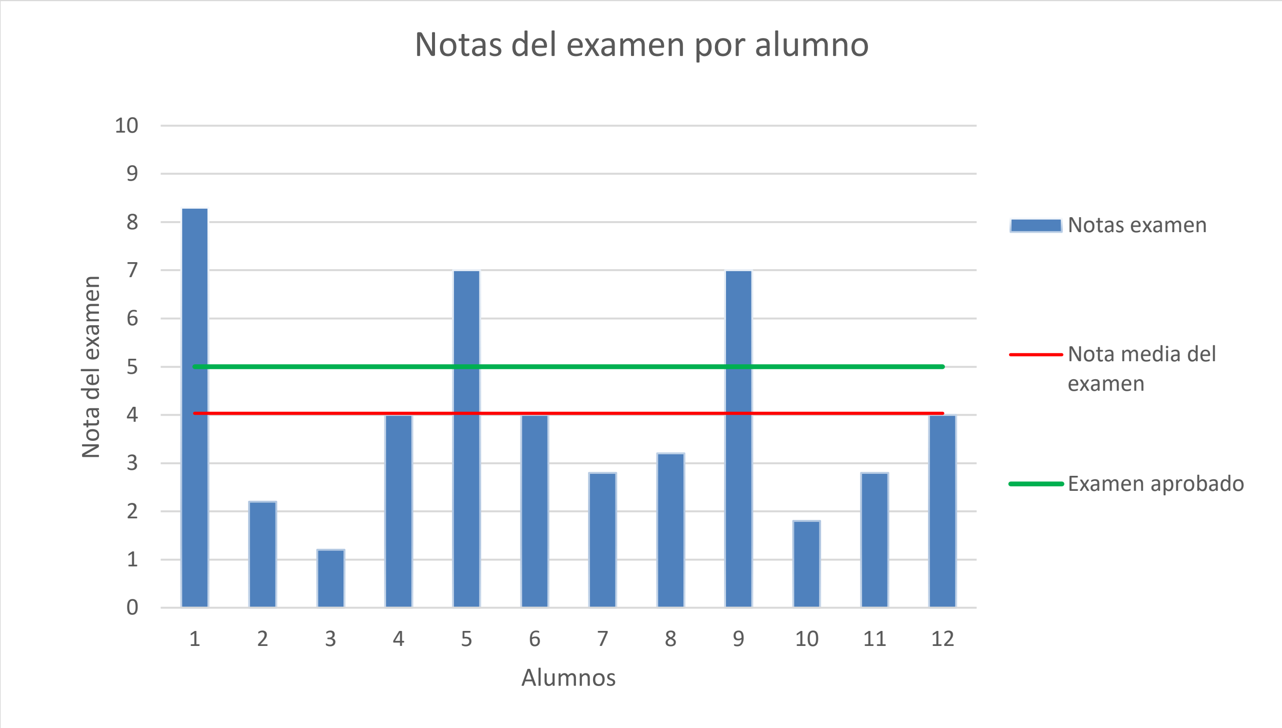


Figura 1. Notas del examen obtenidas por cada alumno. Comparación con la nota media y la nota necesaria para aprobar el examen.

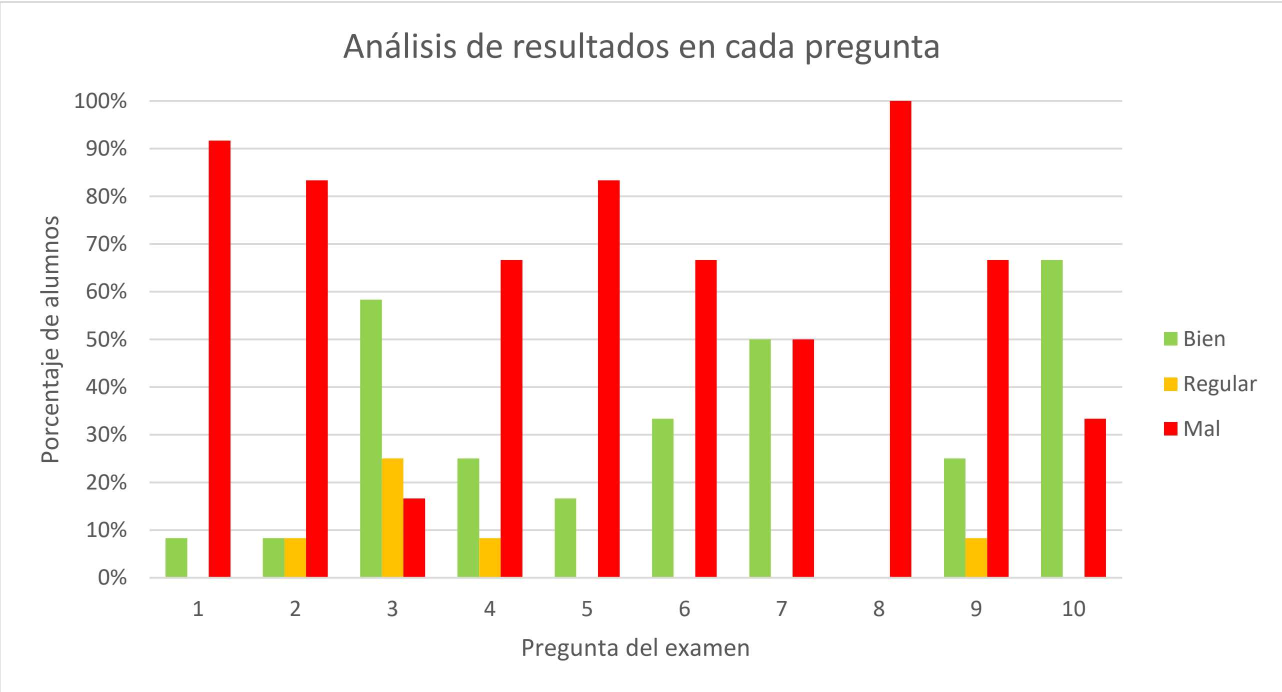


Figura 2. Porcentaje de alumnos que han resuelto cada pregunta bien, regular o mal.