UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Conhecimentos de Matemática dos Estudantes à Entrada do Ensino Superior de Ciências e Tecnologias: contributo para a definição de um perfil de exigências

Maria Helena Morgado Monteiro

Tese para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação de:

Professora Doutora Fernanda Marília Daniel Pires
e
Professora Doutora Maria João Rosado de Sousa Afonso

2015

Conhecimentos de Matemática dos Estudantes à Entrada do Ensino Superior de Ciências e Tecnologias: contributo para a definição de um perfil de exigências

Declaração de autoria do trabalho

Declaro ser a autora deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Helena Monteiro

Assinado de forma digital por Helena Monteiro
DN: cn=Helena Monteiro, o=IPT, ou=ESTA, email=helena.monteiro@ipt.pt, c=PT
Dados: 2015.10.08 23:45:00 +01'00'

Agradecimentos

Antes de apresentar a investigação que desenvolvi, quero expressar o meu sincero agradecimento a todos os que, de forma decisiva, contribuíram para a sua concretização.

As minhas primeiras palavras de apreço e gratidão vão para a Professora Marília Pires e para a Professora Maria João Afonso que, com empenho e mestria, me orientaram no esboço e na elaboração deste trabalho, em particular nas áreas de Matemática e de Psicologia, respetivamente, que sustentam o estudo realizado. A ambas agradeço as sugestões e as observações críticas, pautadas pelo saber e pelo rigor científico, o conhecimento que me transmitiram, o espírito de investigadora que desenvolvi, assim como a amizade com que me acompanharam nesta jornada.

Desde o início deste trabalho que contei com valiosos contributos da Sociedade Portuguesa de Matemática, proporcionados por dois dos seus presidentes - ao Professor Nuno Crato reconheço a sugestão da pesquisa que efetuei, o contacto com as minhas orientadoras e a oportunidade de fazer parte da equipa que construiu o PMAT, um teste de conhecimentos de Matemática; ao Professor Miguel Abreu agradeço a possibilidade de utilizar o PMAT como instrumento de avaliação no estudo empírico que realizei.

Os estudantes que entrevistei colaboraram com entusiasmo e manifestaram interesse pela investigação, o que foi muito gratificante. A forma como a Professora Ana Moura Santos me ajudou na organização das entrevistas foi inestimável, assim como a amabilidade com que me recebeu e acompanhou no contacto com os alunos. A todos eles, os meus calorosos agradecimentos.

Ao Professor Luís Merca, um grande amigo, expresso o meu reconhecimento pelo incentivo para investir na minha formação académica e para não abandonar o projeto nos momentos de desalento.

Com carinho, manifesto a minha sincera gratidão ao meu marido, Fernando Martins, e à minha filha, a Mónica. Devo-lhes a tolerância pela pouca atenção que lhes dispensei e a paciência com que sempre me trataram enquanto me dediquei a este trabalho, o qual não me teria sido possível concluir sem o apoio incondicional de ambos.

Resumo

Em Portugal, tal como no estrangeiro, verifica-se que os estudantes experimentam dificuldades em Matemática à entrada do ensino superior de ciências e tecnologias, as quais têm causado problemas de natureza pessoal, institucional e social. Neste trabalho, apresenta-se uma investigação desenvolvida com o propósito de obter resultados que facilitem a definição de estratégias que visem atenuar essas dificuldades.

Parte substancial do estudo, fundamentado no método correlacional, consiste na análise das respostas dadas por estudantes, no início de cursos superiores de ciências ou tecnologias, aos itens do PMAT - teste estandardizado de conhecimentos de Matemática, elaborado e aplicado pela Sociedade Portuguesa de Matemática, cuja construção foi baseada nas áreas de conteúdo e respetivos níveis de conhecimentos exigidos nas unidades curriculares de Matemática dos cursos em questão. Assim, depois de se confirmar um bom nível de confiança nas medidas do PMAT, identificam-se os conhecimentos que os estudantes têm e os que deveriam ter para transitarem da Matemática do ensino secundário para a do superior de forma progressiva, sem sobressaltos. Também se analisam as diferenças de desempenho no PMAT dos estudantes de grupos distintos, por género e escola, assim como antes e após a formação do 1.º semestre.

Tendo em vista propor medidas preventivas e remediativas adaptadas às necessidades e dificuldades sentidas pelos estudantes em Matemática, entrevistaram-se, de forma individual e semiestruturada, dois grupos de estudantes de Engenharia contrastados quanto ao nível de sucesso em Matemática no 1.º semestre do curso. Assim, procurou-se conhecer as suas emoções e atitudes em relação à Matemática, as dificuldades que tinham na adaptação à nova realidade académica e caracterizar os alunos com melhor desempenho.

Com as respostas obtidas nas entrevistas, algumas diferenciadas por grupo, e os resultados do PMAT, identificam-se fatores que influenciam o sucesso dos estudantes na Matemática do 1.º semestre e propõe-se um perfil de exigências.

Termos chave: Dificuldades em Matemática; Conhecimentos em Matemática; Adaptação ao ensino superior; PMAT; Itens de escolha múltipla; Análise de Rasch.

Abstract

In Portugal, as abroad, it is often found that students entering science and technology undergraduate programs experience difficulties in Mathematics, with problems of personal, institutional and social nature as a consequence. In this dissertation, we present a research aimed to evidence that support and facilitate the definition of strategies to reduce these difficulties.

Most of this study, based on the correlational method, consists in the analysis of students responses, at the beginning of their higher education courses in science or technology, to PMAT – a standardized Mathematics achievement test, developed and used by the Portuguese Mathematics Society. This test construction was based on the content areas and respective levels of expertise, required in Mathematics subjects of the courses at issue. After confirming a good level of confidence in PMAT's results, we identify what students know and what they should know, for a successful and smooth transition from secondary to tertiary education. We also observe the performance differences in PMAT of students from different groups, by gender and school, as well as before and after the Math training over the first semester.

In order to suggest relevant preventive and improvement actions to cope with the difficulties in Mathematics, we interviewed two groups of Engineering students, the first being a group of students who succeeded at the first semester of the course, in contrast with the second group, of students who did not succeed. This way, we explored their emotions and attitudes about Mathematics, their difficulties in adapting to the new academic reality and we reached a description of students with better performance.

By analyzing the students answers, some of them differentiated by group, alongside with the PMAT's results, it was possible to identify some factors impacting the success in the first semester of Mathematics and also to set a requirement profile.

Keywords: Difficulties in Mathematics; Mathematics achievement; Adaptation to higher education; PMAT; Multiple choice items; Rasch Measurement.

Índice de Matérias

Índice de Tabelas

Capítulo 3

Teste de Conhecimentos de Matemática: PMAT

Participantes no Estudo

Capítulo 4

Avaliação Objetiva de Conhecimentos: medidas dos participantes

Respostas aos Itens: conhecimentos dos participantes

Estudo Longitudinal: teste e reteste após treino de competências

Índice de Quadros e de Gráficos

QUADROS

Capítulo 1

Testes de Matemática para Ingresso no Ensino Superior: organização e características

Capítulo 3

Teste de Conhecimentos de Matemática: PMAT

Capítulo 4

Estudo de Casos: transição da Matemática do ensino secundário para a do superior

GRÁFICOS

Capítulo 2

Análise de Resultados dos Testes: teorias e procedimentos

Capítulo 3

Participantes no Estudo

Capítulo 4

Resultados do PMAT

Estudo longitudinal: teste e reteste após treino de competências

Lista de Abreviaturas

AL - Álgebra Linear dos cursos de Engenharia da universidade U1

APA - American Psychological Association

C-I - Cálculo Diferencial e Integral I dos cursos de Engenharia da universidade U1

EM - Item de escolha múltipla

EMC - Item de escolha múltipla convencional

GAVE - Gabinete de Avaliação Educacional

IAVE - Instituto de Avaliação Educativa

ICMI - International Commission on Mathematical Instruction

M - Melhores Alunos (entrevistados)

M12 - Média do 12.º ano de escolaridade

MCT - Matemática, Ciências e Tecnologia

NA - Alunos não admitidos a exame (reprovados)

OCDE - Organisation for Economic Co-operation and Development

P - Piores Alunos (entrevistados)

PI - Nota da Prova de Ingresso

PISA - Programme for International Student Assessment

RC - Item de resposta construída

RE - Alunos reprovados

SPM - Sociedade Portuguesa de Matemática

TIMSS - Trends in International Mathematics and Science Study

TM - Teste de Matemática

Introdução

Em Portugal, o 1.º ciclo de estudos superiores conduz ao grau de licenciado, que é conferido aos que demonstrem, além de outras capacidades, a de "resolução de problemas no âmbito da sua área de formação e de construção e fundamentação da sua própria argumentação" (Decreto-Lei n.º 115/2013, artigo 5.º).

Para desenvolver a mencionada capacidade dos estudantes, os objetivos da maioria das unidades curriculares específicas dos ciclos de estudos de licenciatura incluem a identificação, compreensão, explicação e resolução de problemas que se irão deparar ao futuro licenciado na sua vida profissional. No caso de problemas das áreas científicas do domínio das Ciências Exatas e da Engenharia, assim como de Economia, Finanças e Gestão, subáreas do domínio das Ciências Sociais e Humanidades[1], são necessários conhecimentos e ferramentas matemáticas para se atingirem os objetivos referidos. Por isso, nos cursos de licenciatura destas áreas, doravante designados por cursos superiores de ciências e tecnologias, é usual fornecer esses requisitos matemáticos aos alunos no início dos seus estudos, com maior incidência no 1.º semestre.

De um modo geral, no 1.º ano curricular dos cursos superiores de ciências e tecnologias constam duas ou mais unidades de Matemática. Neste trabalho, as mais comuns identificam-se por *Álgebra Linear* e *Cálculo*. Na primeira, são ensinados conteúdos de Matrizes, Determinantes, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares e Geometria Analítica.

[1] De acordo com a classificação de domínios, áreas e subáreas científicas da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Fundação para a Ciência e a Tecnologia, 2012).

Na segunda, os alunos adquirem conhecimentos de Séries, Cálculo Diferencial e Cálculo Integral em $\mathbb{R}$. Muitos cursos incluem ainda, no 1.º ano, unidades curriculares com conteúdos de Probabilidades e Estatística ou de Cálculo Diferencial e Integral em $\mathbb{R}^n$.

Transmitir conhecimento e desenvolver capacidades dos estudantes de *Álgebra Linear* e de *Cálculo* exige uma prática pedagógica bem planeada, com muita ponderação e criatividade. Para os objetivos destas unidades curriculares serem cumpridos, requer-se que os alunos pensem a Matemática de um modo diferente do que estavam habituados. Até então, eles aprenderam uma Matemática centrada nos objetos, nas suas propriedades e nos algoritmos, o que leva a uma decomposição dos conteúdos a ensinar (Duval, 2012). A aprendizagem da Matemática do ensino superior exige novos processos cognitivos. O entendimento de conceitos (muitos deles já abordados no secundário, como o de *limite*) ou a passagem de uma representação para outra com os objetos matemáticos, apenas acessíveis pelas informações semióticas que se produzem (Duval, 2012), são algumas das novas atitudes intelectuais solicitadas aos estudantes.

Ao professor de Matemática do 1.º semestre de um curso de ciências ou de tecnologias compete ajudar os seus alunos a transitar da Matemática do secundário para a do superior, reduzindo ou evitando dificuldades que, sistematicamente, eles manifestam na adaptação ao novo método de ensino e de aprendizagem. Na sua conduta pedagógica, o professor deve ter presente que os estudantes ainda não desenvolveram capacidades cognitivas exigidas pela Matemática do superior, que para muitos deles não é indiferente ter $2 = x$ ou $x = 2$, por exemplo. Além destes aspetos, é imprescindível que o professor tenha em consideração os conhecimentos em Matemática que os alunos possuem no início do curso, assim como os que deveriam ter para aprenderem, com sucesso, as matérias que lhes serão propostas.

Não se pode assumir, em absoluto, que o nível e o tipo de conhecimentos em Matemática são os mesmos para todos os estudantes, nem que são os que constam nos objetivos dos programas das disciplinas de Matemática do ensino secundário. Por outro lado, a experiência da prática de ensino é insuficiente para identificar as áreas de conteúdo mais consolidadas, as lacunas e as dificuldades dos novos alunos ou outros fatores que afetam o seu desempenho em Matemática. O estudo empírico não basta para organizar medidas de intervenção didática. Elas devem ser estruturadas a partir de uma base sólida dos conhecimentos dos estudantes, fundamentada cientificamente, para que exista confiança na sua adequação, tal como na análise dos seus resultados para as avaliar, comparar, corrigir e melhorar progressivamente. Citando Leonardo da Vinci, "os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino".

Para promover o sucesso nas unidades curriculares de Matemática do 1.º ano dos cursos superiores de ciências e tecnologias é, portanto, fundamental identificar os conhecimentos dos alunos, sobretudo nos conteúdos matemáticos requeridos para uma aprendizagem sustentada das matérias dessas unidades, através de uma avaliação objetiva e rigorosa. No entanto, na generalidade, os estudantes do ensino superior português não são submetidos a uma avaliação desta natureza – nem na conclusão do ensino secundário, nem no processo de ingresso no ensino superior, nem à entrada dos cursos superiores.

A investigação que se descreve na presente tese foi estruturada e desenvolvida com o intuito de superar a lacuna da avaliação atrás referida e analisar os respetivos resultados, o que a enquadra no âmbito da Didática da Matemática. O estudo alicerçou-se não só no campo da Matemática, mas também no da Psicologia, mais exatamente na área da Psicometria, o que lhe confere o carácter de trabalho interdisciplinar. A pesquisa teve como população alvo os estudantes do 1.º ano/1.ª inscrição de cursos superiores de ciências e tecnologias e tomou como principal momento de recolha de dados a entrada no ensino superior.

Atendendo a que a população alvo é confrontada com novas experiências no início dos cursos, as suas emoções e atitudes não podem ser abstraídas da construção de planos e métodos de atuação que visem facilitar a adaptação dos estudantes às exigências do ensino superior. Assim, além do diagnóstico de conhecimentos, analisaram-se as opiniões e os sentimentos de participantes no estudo em relação à Matemática, no contexto da transição do secundário para o superior. Essa análise foi sobretudo orientada no sentido de identificar as maiores dificuldades experimentadas pelos estudantes neste processo, os fatores influenciadores do seu desempenho em Matemática e o perfil dos que conseguem os melhores resultados.

A apresentação da investigação efetuada foi organizada em duas partes. Na Parte I encontra-se informação, recolhida na revisão da literatura, que fundamenta grande parte do estudo empírico desenvolvido, caracterizado na Parte II. Ambas as partes estão divididas em capítulos, cujo conteúdo se relata de seguida.

O **Capítulo 1** descreve o contexto em que se insere a pesquisa, começando por destacar as dificuldades experimentadas pelos estudantes, em Portugal e no estrangeiro, na transição do ensino secundário para o superior, sobretudo na aprendizagem da Matemática do 1.º ano dos cursos de ciências e tecnologias. Este capítulo contém informações sobre estudos desenvolvidos no sentido de minimizar as consequências que esta situação problemática acarreta, não só para os alunos mas também para a sociedade em geral. Alguns destes estudos têm por objetivo identificar causas do problema e propor soluções a nível de organização ou de funcionamento, outros, de carácter didático, propõem metodologias de ensino para facilitar a aprendizagem de conteúdos de *Álgebra Linear* ou de *Cálculo*.

A implementação com êxito, de qualquer uma das medidas sugeridas, num ou noutro âmbito, deve basear-se no desempenho em Matemática dos estudantes. Na segunda secção do Capítulo 1, constata-se que os professores do 1.º ano do ensino superior português, tal como outros agentes educativos, pouco sabem, de forma científica e sustentada, acerca do nível e do tipo de conhecimentos dos seus novos alunos ou da sua preparação para aprenderem as matérias das unidades curriculares do ensino superior.

O interesse em saber como se enquadra a organização do acesso ao ensino superior português no contexto internacional, assim como o exame nacional de *Matemática A*, motivou uma pesquisa que conduziu aos resultados apresentados na terceira secção deste capítulo. A utilização, em vários países, de testes estandardizados para medir com rigor e legitimidade o desempenho em Matemática dos estudantes, fundamentou o interesse por este tipo de instrumento de medida de conhecimentos, caracterizado na quarta secção.

O **Capítulo 2** é dedicado às técnicas de construção e à análise dos resultados dos instrumentos de avaliação objetiva de conhecimentos. As técnicas são descritas na primeira secção, onde se discute o formato dos itens a inserir num teste e se apresentam diretrizes para a construção de itens de escolha múltipla. Na segunda secção mostra-se como são analisados os resultados de um teste para aferir as suas características metrológicas, no âmbito das teorias utilizadas neste estudo – a Teoria Clássica dos Testes e a Teoria da Resposta ao Item. A anteceder os procedimentos de controlo da qualidade de um teste estandardizado, caracterizam-se as teorias e os respetivos modelos aplicados (modelo clássico e modelo de Rasch).

O **Capítulo 3** é o primeiro da Parte II, a parte onde se apresenta o estudo empírico realizado. Depois da exposição do problema e da importância da sua resolução, encontram-se os objetivos estabelecidos e as hipóteses a verificar com o estudo, que se descreve na segunda secção. A descrição do estudo inclui o método e as estratégias adotadas, os instrumentos de avaliação aplicados, a população e as amostras observadas e ainda as técnicas de análise de dados utilizadas.

A terceira secção do Capítulo 3 engloba a caracterização, o modo e o momento de aplicação dos instrumentos de avaliação: um teste de conhecimentos de Matemática constituído por itens de escolha múltipla (PMAT), a Escala Multidimensional de Auto-Eficácia Percebida (MSPSE) de Bandura e um protocolo de entrevista.

A entrevista individual e semiestruturada foi a melhor forma que se encontrou para conhecer a perspetiva dos estudantes em relação à transição da Matemática do ensino secundário para a do superior. Assim, construiu-se o respetivo protocolo para aplicar, no 2.º semestre, a duas subamostras de alunos contrastados quanto ao nível de conhecimentos de Matemática que demonstraram no final do 1.º semestre.

A MSPSE, administrada com o PMAT, foi aplicada para medir a autoeficácia dos participantes.

Relativamente ao PMAT, também se relata o processo da sua construção, desenvolvido por uma equipa da Sociedade Portuguesa de Matemática que integrou a autora deste trabalho e as suas orientadoras científicas - os testes referidos no Capítulo 1 e as técnicas de construção de testes mencionadas no Capítulo 2 serviram de base à elaboração da primeira versão do PMAT; a análise dos resultados do estudo piloto e de três ensaios experimentais do PMAT, conforme descrito no Capítulo 2, proporcionou progressivas melhorias do teste até à versão utilizada nesta investigação.

O PMAT foi aplicado no início do ano letivo com o propósito de identificar os conhecimentos dos participantes em conteúdos considerados, pela equipa que construiu o teste, facilitadores da adaptação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática do ensino superior.

O teste de um dos ensaios experimentais do PMAT foi administrado, aos mesmos alunos, no início de ambos os semestres do mesmo ano letivo (teste e reteste) com o objetivo de conhecer o efeito da formação das unidades curriculares do 1.º semestre.

A quarta secção do Capítulo 3 contém a caracterização dos participantes no estudo - alunos do 1.º ano/1.ª inscrição de cursos de ciências e tecnologias. Os participantes distinguem-se pelo momento e pela natureza da sua colaboração, pela instituição de ensino a que pertencem, pelo género, pela idade e ainda pelo exame nacional de Matemática que realizaram no final do secundário. Consideraram-se os quase 2000 estudantes que realizaram o exame nacional de *Matemática A* e a quem foram aplicados os instrumentos que forneceram os dados analisados no estudo, assim como os outros 6000 que colaboraram no processo de construção do PMAT.

O **Capítulo 4** contém a apresentação e análise dos resultados obtidos com os instrumentos de avaliação. No âmbito do método de investigação adotado para este estudo, o método correlacional, além da análise descritiva de variáveis que permitem distinguir os indivíduos, a sua principal incidência, também se estudaram relações entre essas variáveis ou entre elas e outras pertinentes (estudos correlacionais e de comparação intergrupal).

Na primeira secção deste capítulo encontram-se os resultados globais do PMAT e o estudo metrológico do teste. Após a garantia, dada por este estudo, de uma confiança aceitável nas medidas obtidas com o PMAT, é analisado o nível de desempenho e de competência dos participantes no teste.

A segunda secção do Capítulo 4 descreve o estudo quantitativo e interpretativo planeado - a partir da observação dos resultados de cada alternativa de resposta dos itens do PMAT, procurou-se identificar, analisar e caracterizar o tipo e o nível de conhecimentos em Matemática dos participantes. Os itens apresentam-se agrupados por área de conteúdo, estando uns descritos de forma sucinta e outros caracterizados com mais pormenor, alguns dos quais se mostram como constam no PMAT. Para os dois últimos tipos de itens apresentam-se hipóteses explicativas para a escolha das alternativas de resposta erradas.

Com o estudo longitudinal, fundamentado no desempenho dos estudantes no teste e no reteste do PMAT, obtiveram-se resultados acerca do efeito do treino de competências dos participantes, que se apresentam na terceira secção do Capítulo 4. Os dados deste estudo também foram utilizados para averiguar a utilidade preditiva ou de prognóstico do PMAT, no âmbito da análise da validade do teste inserida no seu estudo metrológico.

A quarta secção do Capítulo 4 relata o estudo de casos baseado nas entrevistas, com o qual se ficou a conhecer a opinião dos 25 participantes sobre o próprio percurso na aprendizagem da Matemática e o modo como ela lhes foi ensinada. Nesta secção também se encontra a perceção dos entrevistados acerca das dificuldades em Matemática sentidas pelos alunos, no geral, e as medidas que sugerem para reduzir o insucesso a Matemática no 1.º ano dos cursos que frequentam. Ao analisar as entrevistas, encontraram-se respostas diferenciadas por subamostra que se salientam na apresentação dos resultados.

O **Capítulo 5** apresenta uma síntese dos resultados obtidos e que requerem interpretação. Da discussão das respostas aos itens do PMAT decorre uma lista de necessidades de formação em Matemática dos estudantes, à entrada do ensino superior de ciências e tecnologias. Através dos resultados do estudo longitudinal detetam-se algumas lacunas de aprendizagem que os estudantes conseguiram superar com a formação do 1.º semestre. Por outro lado, a análise das respostas obtidas nas entrevistas indica medidas preventivas e remediativas de dificuldades em Matemática no 1.º semestre e facilita a caracterização dos participantes com melhor desempenho. A articulação de uns resultados com os outros contribui para a identificação de fatores que influenciam o desempenho em Matemática dos estudantes e também para a definição de um perfil de exigências para o sucesso na Matemática do 1.º semestre, um indicador de adaptação à Matemática do superior.

A apresentação deste trabalho termina com as conclusões da pesquisa desenvolvida, formuladas a partir da discussão dos resultados. A **Conclusão** reflete o grau de cumprimento dos objetivos estabelecidos, sugere a aceitação ou rejeição das hipóteses formuladas, aponta limitações dos estudos efetuados e indica possíveis aplicações dos resultados encontrados, assim como outros estudos a realizar.

Alguma informação complementar à que se encontra no corpo da tese foi organizada num anexo e em vários apêndices que sucedem a lista de referências relativas às citações que se fazem ao longo do trabalho, para as quais se utilizaram as normas da American Psychological Association (APA, 2000).

O **Apêndice A** engloba a definição e um exemplo dos itens utilizados num teste de conhecimentos, esclarecendo assim conceitos mencionados no decorrer do trabalho.

O **Apêndice B** acrescenta informação ao conteúdo da primeira secção do Capítulo 2. Este apêndice é dedicado ao âmbito de aplicação dos itens de escolha múltipla, à pontuação destes itens e ao número de alternativas de resposta de um item de escolha múltipla convencional.

O **Apêndice C** ajuda a compreender o modelo de Rasch, utilizado na construção do PMAT, e descreve uma técnica para obter uma primeira aproximação às medidas de Rasch (nível dos indivíduos na variável medida e nível de dificuldade dos itens) admitindo o ajustamento dos dados empíricos ao modelo.

O **Apêndice D** é composto pelo Guião de Entrevista e pelo Consentimento Informado que foi assinado pelos estudantes antes de serem entrevistados.

O **Apêndice E** reúne algumas tabelas com dados que completam a informação relativa às características dos participantes no PMAT, que consta no Capítulo 3, e à apresentação e análise de alguns resultados mencionados no Capítulo 4.

O **Anexo** a este trabalho contém testes de conhecimentos de Matemática dos candidatos ao ensino superior de ciências e tecnologias de alguns países. Estes testes são os que se consideraram mais relevantes entre os que se analisaram na secção 3 do Capítulo 1.

PARTE I

REVISÃO DA LITERATURA

Capítulo 1

ENQUADRAMENTO

A entrada no ensino superior é o início de uma etapa da vida dos estudantes, por eles aguardada com expectativa e também algum receio. Muitos deles, jovens, esperam que a frequência de um curso superior lhes proporcione diversos desafios e oportunidades, como a concretização de um projeto académico, novas amizades, diferentes relacionamentos e aumento de responsabilidades.

Um dos desafios que, certamente, os estudantes têm de enfrentar na transição do ensino secundário para o superior é a adaptação às novas realidades académicas, pessoais e sociais, que muitos têm de resolver longe da família e dos amigos. A organização curricular, os métodos de ensino e de relacionamento com os professores, o ritmo de estudo, a autonomia na organização do trabalho individual, as capacidades cognitivas e os métodos de raciocínio solicitados, as relações interpessoais e os espaços sociais são apenas alguns exemplos. Do ajustamento às novas experiências dependem os níveis de satisfação e de sucesso dos estudantes no domínio escolar e na vida, em geral.

Segundo Grácio (1995), o "(In)sucesso escolar dos alunos exprime-se institucionalmente em fenómenos de repetência e abandono prematuro do sistema educativo" (como citado em Nunes, 2006, p. 24). A frequência com que estes fenómenos ocorrem no ensino superior, em particular no 1.º ano dos cursos de ciências e tecnologias (Tavares, Santiago, & Lencastre, 2002), tem preocupado estudantes, pais, professores, órgãos de gestão das escolas e a sociedade em geral. É uma problemática, nacional e internacional, que tem levado à realização de diversos estudos.

Investigadores de várias áreas têm desenvolvido trabalhos no sentido de identificarem o problema do insucesso escolar no início do ensino superior, diagnosticarem as suas múltiplas causas ou encontrarem soluções para o minimizarem. Nos campos da Psicologia e da Educação encontram-se, por exemplo, os trabalhos de Berg e Hofman (2005), de Kreber, Castleden, Erfani e Wright (2005), de Richardson (2005) e, em Portugal, os de Almeida e Cruz (2010), de Tavares *et al.* (2002) e de Nunes (2006). A Sociologia é outra área onde também se desenvolvem projetos de investigação sobre esta temática (Costa & Lopes, 2008). Muitas instituições de ensino superior promoveram mesmo estudos com o objetivo de identificarem os fatores de (in)sucesso dos seus alunos e implementarem ações que lhes facilitem a adaptação à nova realidade académica, como a Universidade de Lisboa (Nóvoa, 2005). Refira-se também a Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra que tem uma página *web* (Universidade de Coimbra, 2013) através da qual alerta os alunos para as dificuldades que poderão encontrar no ensino superior e dá sugestões para as ultrapassarem.

1.1 Dificuldades em Matemática no 1.º ano do Ensino Superior: problemática e investigações

A amostra analisada na pesquisa efetuada por Tavares *et al.* (2002) foi constituída por estudantes do 1.º ano de cursos de licenciatura em Ciências e Engenharia da Universidade de Aveiro, no ano letivo de 1997/98. Dos resultados obtidos por estes investigadores, destaca-se o seguinte: entre as médias das classificações finais de Cálculo, Física, Química, Informática e Inglês (disciplinas do 1.º ano/1.º semestre, comuns a vários cursos) a de Cálculo foi a única negativa (7,0 valores).

Passadas quase duas décadas sobre este estudo empírico, as pautas das unidades curriculares de Matemática do 1.º ano, de cursos superiores de ciências ou tecnologias, continuam a apresentar classificações inferiores às da generalidade das outras unidades curriculares dos mesmos cursos. Muitos estudantes, alguns com boas notas a Matemática no ensino secundário, dizem que "não percebem a matéria" ou que "até estudam, mas chegam ao teste e não conseguem responder". Os docentes dessas unidades reconhecem que muitos dos alunos têm dificuldades de aprendizagem devido ao seu nível de conhecimentos em Matemática - cometem erros elementares do tipo $\sqrt{x^2+4}=x+2$, não dominam conceitos matemáticos básicos, têm dificuldades em simplificar expressões algébricas e em formular e resolver problemas. Os professores comentam ainda que os estudantes não sabem procurar e consultar elementos de estudo, não revelam espírito crítico, flexibilidade, capacidade de abstração, nem hábitos de trabalho. Alguns acrescentam "parece impossível terem feito a Matemática do 12.º ano e terem conseguido 9,5 valores no exame".

O problema não se confina aos últimos anos. Em 1943, Bento de Jesus Caraça publicou um artigo de opinião na Gazeta de Matemática que reflete a preocupação, já então existente, com os conhecimentos de Matemática dos alunos e a coordenação entre o ensino secundário e o superior. Nesse artigo, Caraça (1943) apresenta o número de aprovações e de reprovações nos exames de admissão ao Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras (aprovados: 64% dos candidatos vindos do liceu e 54% dos oriundos do ensino técnico); mostra algumas respostas com erros básicos e outras dadas por candidatos que revelam "um desprezo total pelos resultados e seu possível enquadramento dentro do problema a que dizem respeito" (p. 7); e comenta que "veem-se nas provas de muitos candidatos, que, no entanto, mostram não ser totalmente desprovidos de aptidões, certos hábitos e vícios de raciocínio e comportamento em face dos resultados do seu trabalho, que são altamente perniciosos" (p. 7). Caraça refere, em particular, erros persistentes e falta de espírito crítico em áreas da Matemática Elementar, como operações aritméticas e cálculo de áreas e volumes.

Mais tarde, em 1961, Jean Dieudonné, um dos principais líderes do movimento internacional da "Matemática Moderna", afirmava numa conferência:

> [No que diz respeito] ao problema estritamente prático da passagem dos estabelecimentos escolares à universidade (...) a maior parte dos professores da faculdade estão de acordo, creio eu, em pensar que a situação atual é neste campo infelizmente muito má e que se agrava de ano para ano. (como citado em Ponte, 2003, p. 25)

Como referem Davis e Hersh (1995), "a Matemática é um campo do saber com características próprias, marcadas pela sua tendência para a *generalização*, a *abstração* e a *formalização"* (como citado em Ponte, 2003, p. 34). A memorização e mecanização de definições e procedimentos não são suficientes para atingir os principais objetivos desta disciplina. Os alunos que ingressam no ensino superior de ciências ou tecnologias deveriam estar preparados para demonstrar resultados e reconhecer a sua importância (Ponte, 2003).

No processo de aprendizagem da Matemática no ensino superior, os estudantes enfrentam conceitos complexos dentro de uma área específica da disciplina e encontram situações que requerem a utilização conjunta de conceitos provenientes de ramos distintos da Matemática. Daí que tenham de os compreender efetivamente (não basta conhecer a definição) e ser capazes de consolidar a construção das relações entre eles (Trigueros, 2005). Como afirma Brolezzi (2007), devem ter pensamento reverso (saber executar determinada ação em sentido contrário ao da ação original). Segundo este autor "as dificuldades que os alunos apresentam na manipulação de processos reversíveis são, frequentemente, diagnosticadas pelos professores como ausência de pré-requisitos, causa importante do fracasso em disciplinas que envolvem matemática de nível superior" (Brolezzi, 2007, p. 4).

Reprovações sucessivas às unidades curriculares de *Álgebra Linear* ou de *Cálculo* podem ter efeitos negativos a nível pessoal, como baixa autoestima, frustrações, depressões e problemas familiares ou financeiros, os quais levam muitos estudantes a abandonar cursos de ciências e de tecnologias. Alguns destes indivíduos inscrevem-se depois noutro curso menos exigente na área da Matemática, enquanto outros desistem dos seus estudos superiores.

As dificuldades que os estudantes do ensino superior experimentam para conseguirem a aprovação nas unidades curriculares de Matemática são do domínio público. Este obstáculo não será alheio à preferência de muitos jovens por cursos superiores com pouca, ou mesmo nenhuma Matemática. Além dos alunos que optam por se afastar desta disciplina quando se inscrevem no 10.º ano escolaridade, existem muitos outros que, depois de frequentarem com sucesso cursos do ensino secundário com Matemática, se desviam dos cursos de ciências e de tecnologias na altura da sua candidatura ao ensino superior.

Esta atitude de evitar cursos de ciências ou de tecnologias não é exclusiva dos estudantes portugueses. No relatório da Rede Eurydice sobre o ensino da Matemática na Europa (Education, Audiovisual and Culture Executive Agency (EACEA P9 Eurydice), 2011), encontram-se gráficos com a evolução da percentagem de diplomados nas áreas de Matemática, Ciência e Tecnologia (MCT) nos países da União Europeia e noutros, também europeus, entre 2000 e 2009. Portugal é o único país que registou uma clara tendência de crescimento, embora tenha havido um decréscimo de 2008 para 2009. No final do período analisado, em 2009, a percentagem de diplomados portugueses em MCT era ligeiramente superior à da média da União Europeia em 2000, que foi de 24,8%.

Nos inquéritos aplicados no referido estudo da Rede Eurydice, mais de metade dos países participantes indicaram uma falta de pessoal altamente qualificado em Matemática e áreas afins que pode afetar a competitividade das suas economias. Daí que o declínio do número de diplomados em MCT seja motivo de preocupação para as autoridades educativas de 18 países europeus. O problema, contudo, não se restringe à Europa - nos Estados Unidos da América, o projeto *Fortifying Science, Technology, Engineering and Math (STEM) Education* faz parte da agenda política do 2.º mandato do Presidente Barack Obama (The White House, 2013).

As dificuldades na aprendizagem da Matemática em cursos de ciências e tecnologias são, assim, reconhecidas, nacional e internacionalmente, como motivo de preocupação em vários domínios. Transitar da Matemática do secundário para a do superior é um processo que exige ao estudante cruzar a fronteira que limita um ensino da Matemática em que lhe é exigida uma capacidade mais operacional e menos uma abordagem conceptual, para um ensino da Matemática mais abstrato e mais formal (Brolezzi, 2004).

Por força da necessidade de ajudar os estudantes a transporem esta fronteira, identificada como uma situação problemática, têm-se intensificado as discussões em busca de soluções, quer em debates realizados no âmbito de grupos restritos, quer em conferências internacionais onde são apresentadas comunicações científicas sobre este tema. Também têm sido desenvolvidos projetos e colocadas algumas medidas em prática, como a lecionação de cursos breves de Matemática Elementar no início do 1.º ano dos cursos superiores, à semelhança do que se faz na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, ou a disponibilização *online* de aulas gravadas pelos professores[1].

Grande parte dos estudos sobre as dificuldades dos estudantes na aprendizagem da Matemática do 1.º ano dos cursos de ciências e tecnologias encontra-se no domínio da Educação Matemática. Mais exatamente, da Didática da Matemática - o campo de estudos académicos da Educação Matemática que, como área de investigação, tem a função de

> [O papel da Didática é o de] formular e analisar os problemas com que se defronta o ensino e a aprendizagem da matemática, proporcionando conceitos, estratégias e instrumentos que podem ser de algum modo úteis para os que atuam no terreno profissional e na formação, para a administração educativa e para todos os que se interessam pelos problemas do ensino. (Ponte, 2000, p. 330)

[1] Ana Moura, professora de *Álgebra Linear*, tem algumas das suas aulas no YouTube (http://www.youtube.com/watch?v=8-TM-Sot4w4).

No entanto, algumas dessas dificuldades não se verificam apenas nas unidades curriculares de Matemática. Os estudantes também as experimentam na aprendizagem da Física e da Química, por exemplo, como constataram Tavares *et al.* (2002). Elas inserem-se em questões problemáticas mais vastas, muitas delas discutidas no âmbito do processo da transição do ensino secundário para o superior, em todos os seus aspetos. Daí a importância de considerar os estudos que se encontram na intersecção deste domínio com a Didática da Matemática, quer para utilizar os seus resultados na tentativa de minimizar contrariedades vividas pelos estudantes, quer para encetar novas investigações que visem o mesmo fim.

Da análise de diversos estudos, foram selecionados os que se apresentam a seguir. Uns identificam causas das dificuldades ou do insucesso dos estudantes, reflexo da interação de vários fatores, e sugerem medidas remediativas. Outros incidem sobre metodologias de ensino aplicadas a determinadas matérias de Matemática do ensino superior.

Na conferência do Seminário *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*, realizado pelo Conselho Nacional de Educação, em 2003, **Ponte** afirma que "a grande deficiência do ensino da Matemática em Portugal está no facto de não promover, como seria necessário, a capacidade de pensar em termos matemáticos e de usar as ideias matemáticas em contextos diversos" (p. 45). Ponte também sugere alguns aspetos que devem ser considerados no combate ao insucesso escolar. Entre eles, a diversificação dos programas de Matemática do secundário em função das características dos alunos e das realidades locais, a promoção de uma nova cultura profissional entre os professores e a criação de expectativas claras e positivas nos alunos, transmitindo-lhes o que se espera deles e que se acredita na sua capacidade para atingir os objetivos.

No relatório da **Rede Eurydice** atrás mencionado, que incide sobretudo nos ensinos básico e secundário, apontam-se como causas do insucesso escolar: a utilização da avaliação (mais sumativa do que formativa, mais para classificar os alunos do que para os ajudar a melhorar o desempenho); o elevado interesse nos resultados de alguns exames (que pode comprometer abordagens de ensino inovadoras); os sentimentos negativos, a ansiedade ou a falta de motivação dos alunos (que aumenta ao longo do ensino secundário).

O relatório identifica a álgebra, a comunicação matemática e a resolução de problemas em contexto como sendo as áreas problemáticas mais comuns entre os alunos de alguns países; refere que a autoeficácia (convicção pessoal nas próprias capacidades) é um bom indicador do desempenho académico, em particular na Matemática, e que as raparigas têm menos autoconfiança do que os rapazes nas suas capacidades em Matemática (embora não se verifique uma significativa disparidade de género quanto aos reais níveis de desempenho).

O documento sugere algumas medidas para combater o insucesso escolar em Matemática e a consequente escassez (europeia) de competências em MCT como, por exemplo, a utilização eficaz da avaliação na sala de aula e a promoção de atitudes positivas e de autoconfiança face à Matemática. Também recomenda que, na definição dessas medidas, seja dada atenção à relação entre os problemas de literacia e de numeracia, bem como aos resultados de práticas letivas e de estudos nacionais sobre a motivação, o fraco aproveitamento e a perceção dos alunos em relação à Matemática (em 2010/2011, ao contrário de vários países europeus, Portugal não apresentou relatórios desta natureza).

Almeida (2007) abordou vivências que descrevem o processo de transição e entrada dos alunos na universidade, que se assumem como fatores explicativos importantes do seu ajustamento académico, nomeadamente durante o 1.º ano na instituição. Para explicar o insucesso escolar e o abandono no ensino superior, o autor propõe um modelo multidimensional que integra variáveis do aluno (o conhecimento anterior nas áreas disciplinares do curso que frequenta; as capacidades intelectuais e cognitivas; as imagens pessoais acerca das suas capacidades e rendimento; o nível de participação ativa e crítica no processo de aprendizagem; o grau de autonomia, controlo, persistência e responsabilidade pelos resultados atingidos; o modo de abordar as tarefas de aprendizagem), variáveis do professor (as competências pedagógicas e a qualidade científica; o entusiasmo nas aulas e a diversificação nas estratégias de ensino) e variáveis do contexto académico (a capacidade de os contextos de ensino estimularem a curiosidade, a resolução de problemas e a autonomia de pensamento ou a capacidade crítica dos estudantes; a flexibilidade curricular; o impacto da imagem social do curso). Estas variáveis intervêm num processo dinâmico do qual decorre o estudo e a aprendizagem por parte do estudante.

No relatório *Estado da Educação-2011* do **Conselho Nacional da Educação** (Conselho Nacional de Educação, 2011) recomenda-se que a transição do secundário para o superior seja melhor articulada no plano curricular, de modo a garantir a preparação adequada dos alunos para o prosseguimento com sucesso dos estudos escolhidos.

Rezende (2004) investigou as causas das dificuldades de aprendizagem da disciplina *Cálculo* manifestadas pelos estudantes brasileiros (idênticas às dos estudantes de outras nacionalidades). Concluiu que a maioria dessas dificuldades são, fundamentalmente, de natureza epistemológica, sendo a principal fonte de obstáculos ao ensino desta disciplina a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico da Matemática.

Segundo este autor, o ensino de *Cálculo* deve centrar-se nos significados, nos problemas construtores e nas potencialidades do próprio Cálculo. Também refere que o facto de se dar ênfase, por um lado, à organização e à justificação lógica dos resultados e, por outro, ao treino exaustivo de técnicas de integração, de cálculo de derivadas e de limites, cria um problema de identidade no ensino da disciplina que terá de ser resolvido para minimizar as dificuldades dos estudantes. Nesse sentido, Rezende recomenda que seja repensada a abordagem analítica e algébrica de *Cálculo*.

David Bressoud, presidente da *Mathematical Association of America* em 2009-2010, é uma das personalidades americanas que têm revelado preocupação acerca das dificuldades que os estudantes sentem em Matemática na transição do ensino secundário para o superior. Em http://www.macalester.edu/~bressoud/index.html, a página *web* de Bressoud no Macalester College, encontram-se trabalhos que ele tem apresentado sobre este tema como, por exemplo, a sequência de artigos intitulados *Meeting the Challenge of High School Calculus* (Bressoud, 2010) e as comunicações acerca do projeto, que coordenou, *Characteristics of Successful Programs In College Calculus* (Bressoud, 2013).

Dos artigos referidos, salienta-se a necessidade da articulação entre o ensino e a aprendizagem dos níveis de ensino secundário e superior (construção de diretrizes para a definição dos conteúdos programáticos dos dois níveis; melhor conhecimento dos estudantes por parte dos docentes do superior; reformulação do programa de *Cálculo* do 1.º ano do ensino superior, de forma a adaptá-lo aos conhecimentos e às diversas necessidades de formação dos estudantes).

Das comunicações sobre o projeto, destacam-se os seguintes resultados:

- Dos questionários aplicados aos alunos do ensino superior (2010): verificou-se uma queda acentuada na confiança, no gosto e no desejo de continuar a estudar Matemática; o maior preditor de sucesso a nível da sala de aula foi o "Bom ensino"; entre os estudantes que ingressaram num curso de ciências ou de tecnologias com *Cálculo II* e que tiveram a classificação de A, B ou C em *Cálculo I*, 18% desistiram do *Cálculo II* (no género feminino, a percentagem foi o dobro da que se verificou no género masculino);
- Dos estudos de caso dos projetos de sucesso (entrevistas, observação de aulas e outros, realizados em 2012): alguns dos fatores que sustentam o sucesso são a

coordenação das aulas (de *Cálculo*); a formação dos docentes; a aprendizagem ativa na sala de aula; o rigor dos cursos e a existência de Centros de Aprendizagem bem geridos e bem utilizados.

Miguel de Guzmán (1936-2004) foi Presidente da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) entre 1991 e 1998, uma organização que tem fomentado estudos, conferências e congressos onde se discute, exclusiva ou inclusivamente, a problemática da aprendizagem da Matemática na transição do ensino secundário para o superior. Refira-se, por exemplo, o estudo sobre *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Holton, 2002) que foi promovido pela ICMI e apresentado numa conferência em Singapura, em 1998.

Na sequência de um debate realizado no *Congresso Internacional de Matemáticos de 1998*, Miguel de Guzmán publicou, com os outros intervenientes no debate, um artigo intitulado *Difficulties in the Passage from Secundary to Tertiary Education* (Guzmán, Hodgson, Robert, & Villani, 1998). O estudo reflete opiniões de estudantes e professores de cursos do ensino superior, com Matemática no 1.º ano, de universidades de Espanha, França e Canadá. Os autores relatam a perceção, dos dois grupos, em relação à transição da Matemática do ensino secundário para o superior, as dificuldades identificadas nesta passagem e propõem algumas medidas no sentido de as minimizar. Seguem-se alguns resultados e recomendações.

- Perceção dos estudantes: não estamos habituados a demonstrações; não nos é indicado o que é essencial e o que é acessório; há pouco tempo de aulas; os professores não apresentam exemplos concretos; a maioria dos professores não percebe o que nós não compreendemos.
- Perceção dos professores: os estudantes não estão interessados nos conteúdos dos cursos, mas apenas no sucesso dos exames; lamentamos que os alunos tenham falta de pré-requisitos a nível da Matemática, falta de organização, de rigor matemático e que tenham dificuldades em adquirir e consolidar conhecimento através do trabalho pessoal.
- Dificuldades
    · Epistemológicas e cognitivas: a necessidade de os estudantes passarem a ter de participar no processo do pensamento matemático, pois não basta aprender para reproduzir informação; o facto de muitos professores tenderem a identificar o estudante "médio" como o estudante ideal, que teve uma formação altamente

científica numa das melhores escolas secundárias; a falta de organização do conhecimento que se verifica nos estudantes;

· Sociais e Culturais: turmas muito grandes; ambiente de competição; alunos que não esperavam estudar Matemática no curso que escolheram;

· Didáticas: falta de métodos de ensino inovadores, de modelos de ensino e de cuidado na organização do curso.

- Para reduzir as dificuldades: estabelecer um melhor diálogo entre professores do secundário e do superior, assim como entre matemáticos e utilizadores de Matemática; informar os alunos daquilo que o professor espera deles; utilizar diferentes métodos de ensino; divulgar informação acerca de casos de sucesso pedagógico; criar centros de ajuda de Matemática; criar "cursos de transição" para alguns estudantes, no sentido de os ajudar a adaptar-se aos conteúdos, ao método de ensino e às capacidades matemáticas que lhes são exigidas.

Michèle Artigue também presidiu a ICMI (entre 2007 e 2010). É uma investigadora em Educação Matemática e defensora da Engenharia Didática (esquema experimental baseado em sequências didáticas que exploram um determinado domínio do conhecimento). Uma das suas principais áreas de interesse é o ensino e a aprendizagem ao nível universitário, especialmente a didática do *Cálculo*. Apresentou uma comunicação sobre este tema na conferência *The Futur of Mathematics Education in Europe* realizada na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (Artigue, 2007).

Um dos artigos publicados por Artigue (Artigue, 1999) apresenta dois tipos de resultados que, segundo a autora, reduzem todas as abordagens que se encontram nas investigações desenvolvidas acerca dos problemas do ensino e da aprendizagem da Matemática no ensino superior assim como de metodologias para o seu estudo. Um deles diz respeito às reconstruções e quebras na aprendizagem da Matemática. Artigue comprova a sua necessidade com exemplos de conteúdos programáticos de *Cálculo*, como o conceito de limite, cuja formalização exige que o aluno reorganize o seu conhecimento (a nível conceptual e a nível técnico) e tenha de reconstruir relações entre objetos familiares, como os números reais. O outro tipo de resultados refere-se a determinadas flexibilidades cognitivas. A autora recorre à *Álgebra Linear* para ilustrar como elas são indispensáveis à aprendizagem de alguns conteúdos. Por exemplo, é fundamental haver flexibilidade entre a forma de raciocinar quando os objetos são dados diretamente (para pensar nas soluções de um sistema de três equações e três incógnitas imaginando a posição relativa de três planos no espaço) e a forma que é utilizada quando os objetos são construídos através de definições e propriedades dos seus elementos (para pensar no problema anterior em termos de resultados possíveis da condensação de uma matriz de ordem três ou em termos de matrizes singulares e regulares). Estes resultados ajudam a compreender as dificuldades de aprendizagem sentidas pelos estudantes e, consequentemente, a melhorar as estratégias de ensino.

Artigue refere outros tópicos associados à problemática do ensino e da aprendizagem da Matemática no ensino superior: a necessidade de os docentes fazerem investigação (reduz o tempo disponível para as atividades de ensino); a forma de trabalhar dos estudantes; os modos de interação entre docentes e alunos; as formas e os conteúdos da avaliação dos estudantes.

No *Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012 - Práticas de Ensino da Matemática*, promovido pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, **Gonçalves e Costa** (2012) apresentaram um trabalho que desenvolveram na área da didática da *Álgebra Linear* - uma atividade de modelação matemática para introdução do método de eliminação de Gauss e aproximação à resolução de problemas com sistemas de equações lineares, de onde emerge o papel de mediação do professor.

Ponte, Pereira e Henriques (2012) analisaram os processos de raciocínio em tarefas de Matemática de dois alunos do 9.º ano do ensino básico e de dois alunos do 2.º ano do ensino superior. O modelo de análise que apresentaram, articulando raciocínio, representações e significação, revelou-se um bom instrumento para estudar os processos de raciocínio dos estudantes.

María Trigueros publicou um artigo (Trigueros, 2005) com as ideias fundamentais da teoria APOE (Ação, Processo, Objeto, Esquema). Mostra como esta teoria, baseada nos trabalhos de Piaget, permite estudar os esquemas dos estudantes numa determinada área da Matemática (coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas de um indivíduo que estão ligadas, consciente ou inconscientemente, de forma coerente na sua mente, e podem ser utilizadas numa situação problemática relacionada com essa área). Os estudos destacam as dificuldades dos alunos, assinalam as relações a que o professor deve dar mais ênfase e fornecem indicadores para o modo como o deve fazer. Neste artigo, a autora apresenta um trabalho feito na área do estudo de funções (*Cálculo*). Em Trigueros e Oktaç (2005) mostra como a APOE é um bom instrumento didático no ensino e aprendizagem dos espaços vetoriais (*Álgebra Linear*).

Para reduzir as dificuldades em Matemática que os estudantes têm manifestado na transição do ensino secundário para o superior, alguns dos estudos citados recomendam medidas de ação a nível do secundário, como a reestruturação dos programas de Matemática ou a revisão do papel da avaliação como fonte de ensino e aprendizagem. Outros sugerem uma melhor articulação dos programas de Matemática e dos métodos de ensino entre o secundário e o superior. No campo do ensino superior encontram-se propostas de metodologias de ensino de determinados conteúdos, que deverão ser enquadradas numa política de diversificação de estratégias de ensino, inovadoras e centradas no aluno.

A execução eficaz, pelos professores ou por outros agentes educativos, de qualquer uma das medidas apresentadas terá de se fundamentar nos conhecimentos dos estudantes - nos esperados, nos pretendidos e, sobretudo, nos que de facto possuem. Os primeiros estão sujeitos a critérios subjetivos e variáveis, como metodologias de ensino praticadas, ambição dos professores ou políticas educativas. Por outro lado, o nível e o tipo de conhecimentos que os estudantes revelam são independentes das preferências individuais ou institucionais e podem ser avaliados de forma objetiva. Conhecendo o desempenho dos estudantes, é possível compreender as suas dificuldades de aprendizagem e implementar métodos de ensino que reduzam o insucesso escolar.

1.2 Avaliação de Conhecimentos de Matemática: abordagens e resultados

Ao planear as suas lições, o professor define estratégias didáticas que permitam alcançar objetivos estabelecidos. Quer as estratégias sejam inovadoras quer sejam tradicionais, terão de ser adequadas aos conteúdos a ensinar e ao nível de desempenho dos seus alunos. Enquanto os conteúdos são, normalmente, bem conhecidos pelo professor, o mesmo não acontece com o nível de desempenho dos alunos, sobretudo quando se trata de alunos que estão a iniciar um ciclo de estudos, em particular o 1.º ciclo do ensino superior. A diversidade da proveniência geográfica e formativa destes alunos impede que, à partida, sem resultados de uma avaliação, o professor saiba em que medida eles dominam as matérias necessárias para a aprendizagem sustentada dos temas de estudo que lhes tenciona propor.

Contudo, após a lecionação da mesma disciplina durante alguns anos consecutivos ao mesmo tipo de alunos, conhecem-se dificuldades que, de modo sistemático, os estudantes manifestam. Mas não basta saber quais são as deficiências mais comuns, é fundamental conhecer e suprimir todos os obstáculos ao sucesso do ensino e da aprendizagem, sendo crucial identificar as suas causas de forma exata. Foi, aliás, esta necessidade que deu origem ao primeiro trabalho sobre o desempenho matemático dos alunos portugueses[2], segundo Ponte, Matos e Abrantes (1998). Este estudo foi desenvolvido por Maria Teodora Alves, na década de 1940, com o objetivo de "procurar, a respeito de cada aluno, as suas deficiências, as quais podem ser de muito variada natureza, a fim de as corrigir prontamente, evitando a formação de um complexo de inferioridade capaz de produzir graves perturbações" (Alves, 1947, p. 14).

Alguns estudos referidos na secção anterior, como os de Bressoud (2010) e Guzmán *et al.* (1998), apontam a falta de conhecimento, por parte dos professores, do nível de desempenho dos estudantes, como um dos fatores que limitam o sucesso nas unidades curriculares de Matemática do 1.º ano do ensino superior. Importa, pois, promover esse conhecimento para minimizar a experiência negativa que tem sido vivida no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática do superior.

Os dados que são disponibilizados aos professores do ensino superior português, acerca do desempenho dos seus alunos quando iniciam os cursos, estão relacionados com o ingresso dos alunos no ensino superior. Por isso, antes de relatar esses dados, apresenta-se uma breve descrição da forma de ingresso e da prova de Matemática que é exigida à maioria dos candidatos a cursos de ciências e de tecnologias.

Em Portugal, tal como noutros países, existem diversas modalidades no acesso ao ensino superior, as quais admitem estudantes com percursos escolares diferentes no ensino secundário, mesmo sem o terem concluído. No entanto, a maioria dos estudantes dos cursos superiores portugueses são admitidos através do Concurso Nacional de Acesso, que requer a conclusão prévia do ensino secundário. Em função do curso a que o estudante se candidata, é-lhe exigida a classificação mínima de 9,5 valores (ou superior, nalguns cursos) na escala de 0 a 20, em determinados exames nacionais de disciplinas do ensino secundário, que se realizam em junho ou julho. Em grande parte dos cursos, como nos de ciências e tecnologias, não existem outras provas de ingresso além destes exames que, para o efeito, se designam por Provas Específicas.

[2] Na década de 1940, no Liceu de Passos Manuel, sentiu-se necessidade de conhecer as deficiências de técnica de Cálculo Aritmético e Algébrico que, em cada ano do curso dos liceus, os alunos trazem do ano anterior. A professora Maria Teodora Alves organizou os testes e realizou a análise estatística dos resultados. Publicou o estudo relativo aos alunos do 2.º ano (atual 6.º ano de escolaridade) na Gazeta de Matemática.

Atualmente é necessária uma Prova Específica de Matemática (*Matemática A* ou *Matemática B*) para ingressar num curso de ciências ou de tecnologias. Além desta, muitos cursos solicitam também uma Prova Específica de Física e Química ou de outra área.

A disciplina de *Matemática A* é ministrada ao longo dos três anos de escolaridade do ensino secundário e é obrigatória, tal como o respetivo exame nacional[3], para os alunos que frequentam os cursos científico-humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Sendo proveniente destes cursos do secundário a maioria dos estudantes de cursos superiores de ciências e tecnologias, admite-se que grande parte dos candidatos a estes cursos concorre com a Prova Específica de *Matemática A*. Não havendo outra prova de ingresso que avalie os seus conhecimentos em Matemática, esta será a principal fonte de informação a que os professores do ensino superior podem recorrer para obterem dados acerca do desempenho em Matemática dos seus alunos do 1.º ano/1.ª inscrição.

Considerem-se as informações e os resultados do exame de *Matemática A* que são divulgados:

- Cerca de meio ano antes do período dos exames, o Instituto de Avaliação Educativa, I.P. (IAVE) publica, na sua página *web* dedicada às provas finais e aos exames nacionais (http://provas.iave.pt/np4/4.html), o objeto de avaliação de cada prova, a sua caracterização, os critérios gerais de classificação, o material autorizado e a duração. No caso de *Matemática A* é acrescentado um anexo com o formulário que será disponibilizado no exame. Na mesma página *web* são divulgados os enunciados das provas de exame, logo após a sua realização.
- A média nacional dos exames realizados no final de cada ano letivo é divulgada, antes do início do ano seguinte, pelo Júri Nacional de Exames (responsável pela coordenação e planificação dos processos de exames nacionais e provas de aferição). Estes, e outros dados estatísticos, encontram-se no *website* desta entidade (Júri Nacional de Exames, 2013)[4].
- O Júri Nacional de Exames tem publicado relatórios finais acerca do processo de operacionalização dos exames, das provas finais de ciclo e das provas de aferição realizados em cada ano. Estes documentos também apresentam algumas estatísticas, como as classificações médias obtidas pelos estudantes de cada distrito (ver,

[3] No período em que se realizou esta pesquisa, o exame nacional de *Matemática A* incidia nos conteúdos programáticos do 12.º ano. Em 2014, passou a incluir os conteúdos do 11.º ano e em 2015 os dos três anos do ensino secundário.

[4] A informação disponível em setembro de 2013 revela que na 1ª fase de exames dos anos de 2011, 2012 e 2013, a média de *Matemática A* foi igual a, respetivamente, 9,2, 8,7 e 8,2 (Monteiro, et al., 2013).

por exemplo, Monteiro *et al*. (2013)). Com exceção do relatório de 2012, os outros foram concluídos no final do ano civil (novembro ou dezembro) em que se realizaram os exames e as provas que reportam.

- Nos últimos anos, o Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), sucedido pelo IAVE em julho de 2013, promoveu a realização e deu a conhecer relatórios sobre os resultados dos exames finais nacionais e das provas finais de ciclo, realizados na 1.ª fase/1.ª chamada por alunos internos, em cada ano letivo. Como se informa no relatório de 2012 (Ferreira, Castanheira, Romão, Pereira, & Lourenço, 2013), o principal objetivo destes trabalhos é identificar fragilidades na qualidade da aprendizagem e sugerir medidas de intervenção didática que possam contribuir para as superar. Essa identificação é feita através do estudo dos resultados médios de cada item das provas, sendo destacados os itens com melhor e com pior desempenho, seguidos de breves comentários acerca dos conhecimentos que eles avaliam, da sua comparação com itens de anos anteriores e das respostas dos alunos. A divulgação destes trabalhos tem ocorrido na altura em que os examinados e admitidos ao ensino superior estão a concluir a frequência do seu 1.º ano.

Além destas informações sobre o exame *de Matemática A*, os professores podem conhecer os seguintes dados escolares relativamente a cada estudante admitido através do Concurso Nacional de Acesso, divulgados pela Direção-Geral do Ensino Superior em www.dges.mctes.pt[5] com os resultados do concurso (os das 1ª e 2ª fases em setembro, os da 3ª fase em outubro):

- Média das classificações das disciplinas do 12.º ano de escolaridade;
- Média das classificações das disciplinas dos 10.º e 11.º anos de escolaridade;
- Nota da prova de ingresso (Prova Específica ou média das Provas Específicas requeridas pelo curso em que foi colocado).

Os dados disponíveis são manifestamente reduzidos para um professor que esteja empenhado em coordenar um bom processo de ensino e aprendizagem.

No início do ano letivo, o professor sabe muito pouco acerca do nível e do tipo de conhecimentos de Matemática dos seus alunos que acabaram de entrar num curso superior de ciências ou tecnologias. No caso de alunos de cursos que requerem outra Prova Especí-

[5] Os dados encontram-se em "Ver Detalhes" na página de cada colocado, à qual se tem acesso com *N.º de BI* ou *Nome*, que se encontram na *Lista de Colocados*.

fica além de *Matemática A*, o professor nem sequer conhece, institucionalmente, as suas classificações neste exame. Apenas sabe que elas foram iguais ou superiores ao mínimo exigido pela respetiva instituição de ensino. Com tão pouca informação, o professor terá que se limitar à experiência da sua prática de ensino para delinear estratégias pedagógicas que ajudem os estudantes a colmatar as lacunas e os défices de conhecimento que justificam as contrariedades que têm sido manifestadas na aprendizagem das matérias que lhes vai ensinar. Desta forma, dificilmente conseguirá adotar a conduta pedagógica mais adequada ao nível e ao tipo de conhecimentos dos seus alunos, que lhes facilitaria o sucesso escolar.

O exame de *Matemática A* visa certificar a aprendizagem realizada pelos alunos no final do ensino secundário (GAVE, 2013), pelo que os seus resultados são um bom indicador do nível de desempenho dos examinandos relativamente aos conteúdos programáticos definidos para *Matemática A* e não, exatamente, do seu nível de preparação para estudarem as matérias de *Álgebra Linear, Cálculo* ou *Estatística.* Apesar disto e de os conteúdos e metodologias de ensino de *Matemática A* nem sempre estarem bem articulados com os das unidades curriculares de Matemática do ensino superior[6], os resultados globais e parciais do exame, relativos a cada estudante, contêm informação relevante para o professor poder analisar e ter uma noção dos conhecimentos dos seus alunos.

Os estudos publicados nos relatórios sobre os resultados dos exames finais, atrás mencionados, poderiam ser úteis ao professor, caso este os conhecesse atempadamente. No entanto, não dispensariam a análise dos resultados de uma prova que avalie o desempenho dos estudantes em conteúdos específicos, considerados necessários para o sucesso nas unidades curriculares de Matemática do 1.º ano. Uma vez que, em Portugal, os candidatos ao ensino superior não realizam qualquer prova de Matemática desta natureza, aos professores ou às instituições de ensino superior interessados nos referidos resultados, resta avaliar o nível de preparação dos próprios alunos, logo no início das aulas.

[6] No exame de *Matemática A*, os estudantes podem utilizar uma calculadora e consultar um formulário com regras de derivação e outras. Pelo que os resultados dos itens da área de *Cálculo Diferencial*, por exemplo, não serão suficientes para os professores de *Cálculo* que não permitam a utilização de formulário nem calculadora conhecerem o desempenho dos seus alunos nesta área.

1.3 Testes de Matemática para Ingresso no Ensino Superior: organização e características

O interesse pela construção de um teste de conhecimentos que avalie a preparação dos estudantes, de cursos de ciências e de tecnologias, para estudarem Matemática no 1.º ano dos cursos, motivou um levantamento das provas de Matemática aplicadas aos candidatos a estes cursos noutros países[7]. Esta pesquisa teve dois propósitos: recolher exemplos para orientar a construção do teste pretendido e enquadrar o exame nacional de *Matemática A* no contexto internacional.

Procuraram-se testes de Matemática administrados aos candidatos a cursos superiores do 1.º ciclo até 2009 (altura em que se partiu para a organização do teste de conhecimentos utilizado na presente investigação).

Os países do sul da Europa e o Brasil despertaram particular interesse, devido à sua proximidade geográfica ou cultural, assim como os Estados Unidos da América por utilizarem, desde 1920, testes para a admissão ao ensino superior, além dos resultados do ensino secundário (Urbina, 2004).

Também se pesquisaram testes desta natureza em países asiáticos com elevado desempenho em competições internacionais de Matemática, como o *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012), o *Programme for International Student Assessment* (PISA) (Organisation for Economic Co-operation and Development [OCDE], 2013a) e a *International Mathematical Olympiad* (International Mathematical Olympiad, 2013). No entanto, a busca só teve sucesso no Japão e em Singapura, relativamente a provas destinadas a candidatos estrangeiros (escritas em inglês). Hong Kong não disponibilizava as suas provas na Internet, mas vendia-as e enviava-as pelo correio, tendo sido deste modo que se tomou conhecimento das provas desta cidade estado.

A prova de ingresso no ensino superior israelita é identificada como um teste psicométrico, com valor preditivo relativamente ao sucesso académico. Por isso, também foi registada e observada a componente de Matemática desta prova.

Além da análise destes testes, entendeu-se relevante saber como se enquadram no acesso ao ensino superior e quais os organismos responsáveis pela sua organização.

[7] Alguns resultados desta pesquisa foram apresentados no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática de 2010, na secção Ensino da Matemática (Monteiro & Santos, 2010).

Em qualquer dos países analisados, existem regras de candidatura diferentes para os indivíduos que não estudam há alguns anos (*Mature Applicants*), para os que têm já alguma formação profissional e para os que concorrem apenas com o ensino secundário completo (os que correspondem ao contingente geral do Concurso Nacional de Acesso português). No âmbito deste estudo, apenas se considerou o último tipo de candidatura.

1.3.1 Organização do Acesso ao Ensino Superior e Provas de Ingresso

Da recolha efetuada, conclui-se que não há uniformidade de critérios para o acesso ao ensino superior, além da exigência do certificado de ensino secundário (designado por secundário superior, nalguns países), obtido após 12 ou 13 anos de escolaridade. Na maioria dos países em que incidiu esta pesquisa, esse certificado é obtido após uma avaliação final[8].

Dependendo do país, o teste de Matemática proposto aos candidatos ao 1.º ano dos cursos superiores de ciências e tecnologias pode ser uma das provas necessárias para concluir o ensino secundário e, simultaneamente, a sua classificação funcionar como critério de seleção para o ingresso; pode ter apenas como objetivo o acesso aos cursos; ou pode dar-se o caso de os estudantes terem de fazer um exame de Matemática para concluírem o ensino secundário e outro exame se quiserem ingressar numa determinada instituição de ensino.

Em muitos países, além do teste de Matemática, os candidatos têm de fazer outros testes, em momentos diferentes ou na mesma sessão, que abordam outras áreas de conhecimento. As mais comuns são a Língua Materna e uma Língua Estrangeira (os testes destas áreas podem ter prova oral). Para o ingresso em instituições que exigem a realização de provas que elas organizam e ministram, é frequente ser necessário realizar uma entrevista ou apresentar um portefólio. Estes procedimentos servem para garantir a adequação entre a qualificação dos candidatos e os conteúdos dos cursos que pretendem frequentar, bem como para limitar o número de admissões.

O controlo do acesso ao ensino superior, normalmente feito com *numerus clausus*, pode ser regulado pelo Governo, à escala nacional ou regional, como acontece em Portugal e em Espanha, ou pelas próprias instituições de ensino superior, caso do Reino Unido e de França. Há países que combinam os dois modelos anteriores, como a Suécia e a Eslovénia,

[8] Na Europa, em 2009, só Espanha, Suécia e Turquia não tinham exames finais do ensino secundário (Eurydice network, 2009).

e outros em que o acesso ao ensino superior é livre e sem restrições em quase todas as áreas de estudo, como na Bélgica, Malta, Islândia e Países Baixos (Eurydice network, 2009).

Quanto à entidade que elabora as provas de acesso ao ensino superior e organiza o processo da sua aplicação, ela pode depender diretamente do Governo, a nível nacional ou regional, ou pode ser regulamentada por este mas ser independente. Também pode ser um organismo de uma única ou de uma associação de instituições de ensino superior. Considere-se o que se passa nalguns países relativamente a esta questão.

Em **Portugal**, as provas de acesso ao ensino superior (também exames do ensino secundário), reguladas pelo Governo, são realizadas por um organismo dependente do Ministério da Educação - o GAVE[9] (GAVE, 2009). Têm missão idêntica o *Singapore Examinations and Assessement Board* em **Singapura** (Singapore Examinations and Assessment Board, 2009) e o *National Center for University Entrance Exams* no **Japão** (National Center for University Entrance Examinations, 2009)**.** De igual modo, na Coreia do Sul é o *Korean Institute for Curriculum and Evaluation* que supervisiona o *College Scholastic Ability Test*, desde a implementação de todos os procedimentos até à análise dos dados (Korea Institute for Curriculum and Evaluation, 2009).

Em **Hong Kong,** é o *Hong Kong Examinations and Assessment Authority* que organiza, entre outros, o *Hong Kong Diploma of Secondary Education Examination* (HKDSE), suficiente para o ingresso na maioria dos cursos superiores e, de um nível mais avançado, o *Hong Kong Advanced Level Examination* (HKALE) (Hong Kong Examinations and Assessment Authority, 2009). Enquanto um indivíduo com o HKALE (13 anos de estudos) pode concorrer diretamente a um dos cursos da Universidade da Cidade de Hong Kong, um estudante com o HKDSE (12 anos de estudos) pode candidatar-se, apenas, a uma escola ou faculdade desta universidade e, só depois de um ano de estudos, é que pode concorrer a um dos seus cursos de três anos (City University of Hong Kong, 2009).

Em **França**, de acordo com a informação disponível no *website* do seu Ministério da Educação (Ministère de l´Éducation Nationale, 2009), as Academias (instituições regionais) são dirigidas por um Reitor, representante dos ministros da educação nacional e do ensino superior e da investigação, que assegura a aplicação das políticas educativas definidas a nível nacional. Assistido por um elemento da *Inspection générale de l'éducation nationale*, existe um responsável pela atividade escolar dos estabelecimentos do segundo

[9] Substituído pelo IAVE em 2013.

grau das Academias, onde se inclui a aplicação das provas nacionais do *Baccalauréat* (provas de conclusão do ensino secundário, suficientes para o acesso à maioria das universidades). As provas das Academias de Paris, Créteil e Versailles são organizadas pelo *Service Interacadémique des Examens et Concours - Maison des Examens,* uma estrutura particular da Educação Nacional (SIEC - Maison des Examens, 2009).

Algumas instituições francesas de ensino superior, como as *Écoles Supérieurs d'Ingénieurs*, que fazem parte da *Fédération des Écoles Supérieures d'Ingénieurs et de Cadre*s (FESIC), exigem ainda que os seus candidatos realizem outras provas, que elas próprias organizam de modo direto ou indireto. Estas provas podem incluir uma entrevista além da parte escrita (*Concours Puissance 11,* 2011).

Em **Itália**, também são organismos regionais, como o *Coordinamento regionale degli Esami di Stato do Ufficio Scolastico per la Lombardia,* que garantem a aplicação das normas do *Osservatorio Nazionale sugli Esami di Stato* na organização dos exames de conclusão do ensino secundário superior (Ufficio Scolastico Regionale per la Lombardia, 2009).

Algumas instituições italianas exigem, além destes exames, a realização de um teste de ingresso, a *Prova di verifica delle conoscenze*, que, sendo obrigatório, pode ou não ser seletivo. Este teste, composto por itens de Matemática, Ciências (Física e Química), Lógica e Compreensão Verbal, é realizado pelo *Consorzio Interuniversitario Sistemi Integrati per l'Accesso*, um consórcio público sem fins lucrativos, formado exclusivamente por faculdades universitárias (Consorzio Interuniversitario Sistemi Integrati per l'Accesso, 2009). Por exemplo, o ingresso num curso de Engenharia da Universidade de Bolonha implica a realização do teste atrás referido, que não é seletivo. Se, nesse teste, os estudantes obtiverem menos de 24 pontos, num total de 80, são obrigados a fazer uma formação adicional de Matemática básica. Esta será avaliada com um exame, no qual o aluno deve ter mais de 8 pontos, em 20 (Scuola di Ingegneria e Architettura dell'Ateneo di Bologna, 2009).

Na **República Popular da China**, quase todas as instituições de ensino superior exigem que os seus candidatos realizem as provas do *National Higher Education Entrance Examination* - três provas obrigatórias (Matemática, uma Língua Estrangeira e Chinês - mandarim padrão) e várias optativas. Estas provas podem variar entre as diversas províncias, regiões autónomas ou municípios diretamente controlados pelo governo central, tal como varia também a classificação mínima para o acesso aos cursos superiores. No entanto, em cada uma das zonas, as provas são administradas de modo uniforme (Guangzhou

Integrated Image, 2008). Observe-se que, na China, o ensino superior é gerido pelo Conselho de Estado e de Governo Popular da respetiva província, região autónoma ou município diretamente subordinado ao governo central (Education Law of the People's Republic of China, 1995).

No **Reino Unido**, a maioria das universidades seleciona os seus candidatos com base no *General Certificate of Education Advanced Level*, conhecido por *A-level*[10]. Os estudantes obtêm este certificado após dois anos de estudo, entre os 16 e os 18 anos. As classificações obtidas nas respetivas provas são convertidas em graus (A*, A, B, C, D e E) e as universidades admitem os seus candidatos de acordo com várias combinações possíveis dos graus obtidos em determinadas provas. Por vezes, sobretudo quando se pretende fazer comparações entre qualificações diferentes, esses graus são convertidos em pontuações numéricas através da tabela da UCAS (Universities and Colleges Admissions Service, 2009), uma organização responsável pela gestão de candidaturas de cursos do ensino superior do Reino Unido.

As provas do *A-Level* são organizadas por cinco instituições, entre as quais o *The Council for the Curriculum Examinations and Assessment*, um organismo público, independente, vinculado ao Departamento de Educação da Irlanda do Norte (Council for the Curriculum, Examinations and Assessment, 2005), o *Oxford Cambridge and RSA Examinations* (OCR) que pertence ao Departamento *Cambridge Assessment* da Universidade de Cambridge (Oxford Cambridge and RSA Examinations, 2009) e a *Assessment and Qualifications Alliance* que, tal como a anterior, é uma instituição sem fins lucrativos, controlada pelo *Office of the Qualifications and Examinations Regulator.* Este é um organismo público, independente do Governo, que regula as qualificações, exames e avaliações em Inglaterra e as qualificações profissionais na Irlanda do Norte (Assessment and Qualification Alliance, 2009; Office of the Qualifications and Examinations Regulator, 2009).

Além do *A-Level*, algumas instituições de ensino superior do Reino Unido exigem, para o ingresso, a realização de outros exames que são da sua responsabilidade. É o caso da Universidade de Cambridge, cujas provas são elaboradas pelo, atrás citado, OCR.

Em **Israel**, as provas dos exames de acesso ao ensino superior, exigidos pelas universidades, são desenvolvidas e administradas pelo *National Institute for Testing and Evalua-*

[10] A África do Sul, o Paquistão, a Malásia, o Sri Lanka, a Nova Zelândia, Singapura e outros, aderiram também à qualificação *A-level* para os seus estudantes mas, de um modo geral, os exames são elaborados no próprio país (em Singapura, o *Singapore Examinations and Assessement Board* elabora os exames em colaboração com o *Cambridge Assessment*).

tion. Trata-se de uma instituição pública, sem fins lucrativos, criada pela Associação dos Reitores das Universidades de Israel, dedicada à construção e aplicação de vários tipos de testes. Os candidatos aos cursos superiores devem realizar o *Psychometric Entrance Test* que incide sobre três áreas: raciocínio verbal, raciocínio quantitativo e inglês. Além deste, os candidatos podem ter de fazer outros testes, como o *Mathematics Proficiency Test*, dependendo do curso em que pretendem ingressar (National Institute for Testing and Evaluation, 2009).

Em **Espanha** e na **Suécia** não há exames finais do ensino secundário. Para ingressarem no ensino superior, os candidatos devem fazer uma prova cujos resultados constituem critério de seleção no acesso a cursos superiores.

Na Suécia, a prova designa-se por *The Swedish Scholastic Assessment Test*, é da responsabilidade da *Högskoleverket (Swedish National Agency for Higher Education)* e elaborada por duas universidades - uma das cinco partes do teste é concebida e produzida pelo Departamento de Educação da Universidade de Gotemburgo e as outras quatro pelo Departamento de Avaliação Educacional da Universidade de Umeå (Högskoleverket, 2009).

Em Espanha, a prova de acesso tem o nome de *Prueba de Aptitud para el Acceso a la Universidad*. É regulamentada por Decreto Real (Real Decreto 1892/2008, 2008) e realiza-se nas universidades (ver, por exemplo, Universidad de Oviedo (2009)). De acordo com a lei, a prova divide-se em duas partes - a fase geral e a fase específica. A fase geral é obrigatória e incide sobre Língua Castelhana e Literatura, História de Espanha ou História da Filosofia, uma Língua Estrangeira e uma matéria específica do ensino secundário; a fase específica avalia os conhecimentos dos candidatos a uma matéria do ensino secundário, diferente da escolhida na fase geral. A aprovação na fase geral dá acesso a qualquer curso de uma universidade espanhola que não tenha limite de vagas. A fase específica permite melhorar a nota da fase geral, o que pode ser necessário para a admissão em cursos com número limitado de vagas.

No **Brasil** também não há exames obrigatórios de conclusão do ensino secundário, que neste país se designa por ensino médio. Cada universidade brasileira organiza as suas provas de ingresso, o *Vestibular*, através de um órgão da própria universidade, como o *Copeve* da Universidade Federal de Minas Gerais (Comissão Permanente do Vestibular UFMG, 2009) ou o *Comvest* da Universidade Estadual de Campinas (Comissão Permanente para os Vestibulares - Unicamp, 2009).

Em 2009, começou a ser aplicada uma medida política, nacional, para fazer com que o *Exame Nacional do Ensino Médio* (*Enem*), até então um exame voluntário, passe a ser utilizado como forma de seleção unificada nos processos seletivos das universidades federais públicas. O Governo brasileiro pretende que as universidades utilizem o *Enem* como único critério de seleção ou combinado com o próprio *Vestibular* (Ministério da Educação do Brasil, 2009).[11] O *Enem* é elaborado pelo *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*, uma entidade federal vinculada ao Ministério da Educação, que reestruturou este exame de modo a que seja comparável no tempo e que aborde diretamente os conteúdos programáticos do ensino secundário (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2009).

Nos **Estados Unidos da América** não há um currículo nacional. No entanto, os Estados, os distritos escolares e as associações nacionais exigem ou recomendam normas para orientar a instrução escolar (U.S. Network for Education Information, 2007). Assim, não há um processo único de um estudante norte-americano obter o seu *high school diploma* ou o *secondary diploma* (consoante o Estado) após 12 anos de escolaridade. Daí que a maioria das universidades exija que os seus candidatos sejam avaliados através de testes que são administrados e pontuados do mesmo modo a todos os indivíduos. Os mais comuns são o *American College Testing* (*ACT*) e o *Scholastic Assessment Test* (*SAT*).

O teste *ACT* é desenvolvido pela *ACT, Inc.*- uma organização independente, sem fins lucrativos, que oferece uma vasta gama de testes de avaliação e outros serviços. O teste aplicado aos estudantes do secundário ajuda-os a avaliar a sua capacidade para os estudos superiores (ACT, Inc., 2009). Algumas instituições exigem apenas o "comum" *ACT* (teste sobre Leitura, Matemática, Inglês e Ciências), enquanto outras requerem, além deste teste, o *ACT Writing Test* (ACT Assessment plus Writing Test).

O *SAT* é administrado pelo *College Board*, uma associação sem fins lucrativos, constituída por milhares de escolas, faculdades, universidades e outras organizações educativas. Além de diversas atividades escolares, esta associação organiza testes de admissão às universidades (The College Board, 2009). Há dois tipos de testes *SAT*: o *SAT Reasoning Test*, o mais solicitado, avalia os conhecimentos dos estudantes em Leitura, Escrita e Matemática, numa única prova; o *SAT Subject Tests* avalia o domínio do conteúdo de temas especí-

[11] Numa pesquisa efetuada em 2014, verificou-se que muitas universidades brasileiras têm vindo a adotar o *Enem* como única prova seletiva para o ingresso nos seus cursos, como a Universidade Federal de Minas Gerais. Esta prova, que não é obrigatória para a conclusão do ensino médio nem para o prosseguimento de estudos superiores, teve 9 519 827 estudantes inscritos em 2014. A partir de 2014, o *Enem* também pode ser utilizado como prova de ingresso em cursos de algumas instituições de ensino superior portuguesas.

ficos como Inglês, História, Matemática, Ciências e várias línguas estrangeiras. No último tipo de *SAT* existem duas provas de Matemática: Nível 1 e Nível 2.

Para um indivíduo se candidatar, por exemplo, ao *Henry Samueli School of Engineering and Applied Science* da Universidade da Califórnia, Los Angeles (UCLA) ou ao *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), terá de fazer o *SAT Reasoning Test* ou o *ACT Writing Test* e duas provas do *SAT Subject Test*: Matemática e Física ou Química ou Biologia. Para a escola de engenharia da UCLA, o candidato terá de fazer a prova de Matemática do Nível 2 (University of California, Los Angeles, 2009), enquanto para o MIT basta a prova do Nível 1, desde que acompanhada pelo *SAT Reasoning Test* (Massachusetts Institute of Technology, 2009).

Os estudantes **oriundos de outros países** têm equivalência ao ensino secundário do país da instituição de ensino superior que pretendem frequentar, se tiverem algum dos diplomas reconhecidos internacionalmente, como o *International Baccalaureate* (International Baccalaureate Organization, 2009) ou o *The European Baccalaureate*, validado na União Europeia e em outras regiões (Schola Europaea, 2009).

O *A-level* também dá equivalência aos exames do ensino secundário em muitos países, assim como outros certificados deste grau de ensino. Por exemplo, o certificado do ensino secundário português é aceite em Hong Kong (desde que o candidato tenha obtido uma classificação superior a 17 valores, na escala de 0 a 20).

As provas do *ACT* e do *SAT* são reconhecidas como provas de acesso a muitas universidades, a nível mundial, como as universidades de Singapura e de Haifa (Israel).

Algumas instituições têm testes de admissão organizados para os candidatos estrangeiros. É o caso da Universidade Nacional de Singapura (National University of Singapore, 2009) e de universidades do Japão (Japan Student Services Organization, 2007). Em Israel, são propostos cursos preparatórios para a frequência do ensino superior, sendo o acesso a esses cursos condicionado pelos resultados do *Entrance Test for Pre-Academic Preparatory Programs*. O objetivo destes cursos é elevar o nível de Matemática, Física e Inglês dos estudantes, articulando-o com o estudo do Hebraico para os novos imigrantes (National Institute for Testing and Evaluation, 2009).

Refira-se ainda que existem universidades que organizam cursos para os estudantes (estrangeiros ou nacionais) admitidos nos seus cursos, que funcionam antes do início das atividades escolares, propriamente ditas. Por exemplo, na Universidade Nacional de Singapura, os alunos podem frequentar um curso de Matemática a partir de julho.

1.3.2 Conteúdo, Formato e Aplicação dos Testes de Matemática

Nos *websites* das entidades responsáveis pela elaboração de provas de acesso ao ensino superior atrás referidas (agências governamentais nacionais ou regionais, organizações independentes do estado e universidades), encontram-se provas já aplicadas, modelos de provas ou exemplos de itens que as integram. Assim, organizou-se uma coleção de testes, parte dela apresentada em Anexo a este trabalho, que avaliam os conhecimentos de Matemática dos candidatos a cursos superiores do 1.º ciclo da área de ciências ou de tecnologias de vários países. Analisados os testes e considerando a informação disponível nos *websites* sobre o respetivo modo de aplicação (nem sempre esclarecido na prova) elaborou-se a seguinte síntese.

Os testes de Matemática (**TM**) observados foram divididos em dois grupos: testes com âmbito de aplicação nacional (**Testes Nacionais**) e testes administrados para admissão em determinadas instituições (**Testes Institucionais**). Os primeiros são obrigatórios ou alternativos a outras provas de Matemática e realizam-se individualmente ou integrados num caderno de exame sobre vários temas. Os outros substituem as provas nacionais ou são complementares destas.

Para facilitar a referência aos testes, os TM Nacionais identificam-se pelo país a que pertencem (exceto os dos Estados Unidos da América, por serem vários) e os TM Institucionais pela respetiva instituição. Em qualquer dos casos é apresentado o nome do teste e o ano de aplicação ou a informação de que apenas é conhecido um teste ou um conjunto de itens modelo.

TESTES NACIONAIS

TM de Portugal - *Prova Escrita de Matemática A* (2009), teste obrigatório;

TM de França - *Mathématiques, Série S* (2009), teste obrigatório;

TM de Itália - *Matematica, Scientifico* (2009), teste obrigatório;

TM do Brasil - *Prova de Matemática e suas Tecnologias* (2009), integrado no *Enem*, exame exigido para o ingresso em muitas universidades (1.º dia: Prova de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Prova de Ciências Humanas e suas Tecnologias; 2.º dia: Prova de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Prova de Matemática e suas Tecnologias e Redação);

TM de Israel - *Quantitative Reasoning* (modelo), integrado no *Psychometric Entrance Test* (Quantitative Reasoning, Verbal Reasoning, English), um teste obrigatório;

TM de Inglaterra - *Advanced GCE Further Mathematics* FP1+FP2 (modelo), uma das combinações possíveis para se obter o certificado *Further Mathematics*, exigido na admissão a muitas escolas de Engenharia de Inglaterra (outra seria, por exemplo, FP1+FP3)[12];

TM de Hong Kong - *Pure Mathematics A-Level* (2009), constituído por dois testes, é uma das provas disponíveis para, em combinação com outras, se conseguir o *HKALE* - requisito para a candidatura direta a cursos de algumas universidades, sujeita à classificação obtida em cada prova realizada;

TM do *ACT* (TM dos Estados Unidos da América) - *Mathematics* (modelo), integrado no *ACT* (English, Mathematics, Reading, Science), uma das possíveis provas a realizar pelos candidatos ao ensino superior dos EUA;

TM do *SAT* (TM dos Estados Unidos da América) - *Mathematics* (itens modelo), integrado no *SAT Reasoning Test* (Critical Reading, Mathematics, Writing), outra das possíveis provas a realizar por quem pretende ingressar numa instituição do ensino superior dos EUA;

TM do *SAT Subjects Tests* (TM dos Estados Unidos da América) - *Mathematics Level 2* (itens modelo), teste adicional ao *SAT* ou ao *ACT*, exigido por algumas escolas de tecnologias;

TM do Japão - *Mathematics, Course 2* (modelo), exigido aos candidatos estrangeiros para cursos de ciências e engenharias na maioria das instituições japonesas, sendo que, para algumas, os resultados deste teste funcionam como critério de seleção para a realização dos seus próprios exames de ingresso.

TESTES INSTITUCIONAIS

TM da FESIC (Fédération des Ecoles Supérieures d'Ingénieurs et de Cadres, França) - *Épreuve de Mathématiques* (2009), obrigatória para o ingresso nas escolas da FESIC (prova adicional ao TM de França);

[12] Os testes FP1 e FP2 analisados foram elaborados pela Oxford Cambridge and RSA Examinations (OCR), uma das agências do Reino Unido que atribui o *Further Mathematics.*

TM do CEFET-MG (Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Brasil) - *Matemática* (2010), integrado no *Vestibular* desta instituição (Matemática, Física, Biologia e Química), complementar ao TM do Brasil;

TM da UPCMad (Universidades Públicas de la Comunidad de Madrid, Espanha) - *Matemática II* (2009), facultativo mas que poderá ser necessário para o ingresso em cursos com vagas limitadas (prova realizada por estas universidades, mas válida para toda a Espanha);

TM da UCamb (University of Cambridge, Reino Unido) - *Problem Solving* (modelo), integrado no *Thinking Skills Assessment,* adicional às provas do *GCE Advanced Level* para os candidatos à maioria das escolas de Engenharia da Universidade de Cambridge; não avalia os conhecimentos de Matemática a nível do ensino secundário, mas sim a capacidade de aplicação da Matemática à resolução de problemas que podem ocorrer no contexto académico ou profissional;

TM do IBac (International Baccalaureate) - *Mathematics, Standard Level* (modelo), obrigatório para a obtenção do *Diploma IBac* da área de Matemática e Informática (grupo 5);

TM da NUSing (National University of Singapore, Singapura) - *Mathematics* (modelo), aplicado aos indivíduos estrangeiros que querem ingressar num curso de ciências ou de tecnologias da Universidade de Singapura.

Da análise à informação registada sobre cada um dos testes selecionados, retiraram-se as seguintes conclusões acerca das suas principais características.

- ***Áreas de Conteúdo***

No que respeita às áreas de conteúdo, pode-se dizer que há alguma uniformidade nas provas organizadas para os estudantes das áreas de ciências ou de tecnologias. Os temas mais comuns são: Funções Trigonométricas, Exponenciais e Logarítmicas; Limites, Continuidade e Gráficos de Funções; Sucessões; Cálculo Diferencial; Cálculo Integral; Cálculo Matricial; Geometria no Plano; Números Complexos; Probabilidades e Combinatória; Indução Matemática.

O nível de conhecimentos exigidos, em cada um destes domínios, difere de teste para teste - no Cálculo Integral, enquanto o TM da UPCMad solicita o cálculo da medida da área de uma região plana, limitada por retas e pelo gráfico de uma função elementar, o TM de Hong Kong requer que se calculem primitivas por substituição; as hipérboles são um dos tópicos do TM do *SAT Subjects Tests*, mas não do TM de Portugal, embora ambos os teste avaliem conhecimentos de geometria plana.

Nem todos os temas apresentados constam nas áreas de conteúdo de qualquer um dos testes. Por exemplo, o TM de Portugal não inclui matrizes, integrais, nem demonstrações por indução; estes dois últimos temas também não fazem parte da prova do *SAT Subjects Tests*, tal como as derivadas; o TM da UPCMad e o do IBac não têm itens sobre Números Complexos mas, em contrapartida, incidem sobre Geometria no Espaço, um tema comum ao TM de Itália, ao TM da FESIC e ao TM do *SAT Subjects Tests*.

No TM do Japão encontram-se itens sobre Lógica e Teoria de Conjuntos, assim como sobre Teoria de Números. Esta prova, como o *SAT*, o *ACT* e outras, tem itens que requerem, simplesmente, o cálculo de expressões algébricas, a factorização de polinómios, a resolução de uma equação, de uma inequação ou de um sistema de equações.

O TM de Singapura permite escolher entre Física (Mecânica) e Probabilidades e Estatística. Também a prova FP2 do TM de Inglaterra abrange outras áreas de conteúdo, como funções hiperbólicas, métodos numéricos e coordenadas polares. Este último tema é comum ao TM do *SAT Subjects Tests*, no qual existem questões sobre a reta dos mínimos quadrados e outros tópicos do tema Análise de Dados e Estatística.

O TM da UCamb avalia, essencialmente, a capacidade de resolução de problemas. Não é um teste convencional de Matemática, que avalia explicitamente os conhecimentos sobre os conteúdos específicos de um determinado nível de ensino - solicita aos estudantes que apliquem os seus conhecimentos numéricos ou espaciais para encontrarem ou criarem uma solução para os problemas apresentados nos vários itens. Estes dividem-se em três tipos: selecionar informação relevante, encontrar procedimentos e identificar semelhanças. Os conhecimentos de Matemática necessários para responder a estes itens são: conceito de número; operações numéricas (incluindo as operações com percentagens); quantidades (tempo, dinheiro, etc.); geometria no plano e no espaço; interpretação de gráficos e tabelas.

Também o TM do Brasil avalia a resolução de problemas, mas a um nível bastante elementar quando comparado com o TM da UCamb. É solicitado aos estudantes, de qualquer área do ensino secundário, que resolvam problemas em contexto que envolvem conhecimentos geométricos de espaço e forma (utilização da noção de escala na leitura da representação de uma situação do quotidiano), conhecimentos de estatística e probabilidades, e ainda problemas que compreendam a variação de grandezas (utilização de informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências).

Os testes do *SAT* e do *ACT*, exigidos a candidatos que pretendem frequentar cursos superiores de diversas áreas, contêm muitos itens que apresentam um problema em contexto. Apesar de estas provas incluírem os mesmos conteúdos da prova do *SAT Subject Tests* (números e operações, álgebra e funções, geometria e medida, análise de dados, estatística e probabilidades), os níveis de conhecimentos que exigem são bastante inferiores aos desta.

O TM de Israel, sendo aplicado aos candidatos de todo o ensino superior, avalia conhecimentos de Matemática ao nível do 9.º ou 10.º ano de escolaridade do sistema de ensino israelita: números, operações, proporções, média aritmética, probabilidades, combinatória, geometria no plano (ângulos, triângulos, polígonos), volumes e sistema de coordenadas cartesianas.

- ***Formato dos Itens, Número de Itens e Duração do Teste***

Em relação ao formato dos itens, que se classificam conforme o apresentado no Apêndice A, não se encontrou um padrão entre os testes considerados. Uns têm apenas itens de resposta construída (RC), outros apenas itens de escolha múltipla (EM) e, ainda outros, são construídos com itens dos dois formatos. Entre as respostas construídas solicitadas, umas são abertas (estruturadas, com todos os cálculos necessários e justificações para a resposta dada) e outras fechadas (a resposta é um valor numérico a indicar na folha de respostas, para leitura ótica). Também existem diversos tipos de itens de escolha múltipla: escolha múltipla convencional, uns com quatro e outros com cinco opções de resposta; escolha múltipla complexa; verdadeiro-falso. Nalguns testes, há itens de escolha múltipla cuja resposta depende do mesmo estímulo (tabela, gráfico ou outro material visual) - formam um conjunto de itens dependentes do contexto.

A duração dos testes também é muito diversa. A dos que são integrados numa prova que inclui outros temas, varia entre 25 minutos e 1 hora ou o estudante pode gerir o tempo total para responder aos itens dos vários temas. A duração dos outros testes varia entre 1 hora e 6 horas.

Com a diversidade de formato dos itens e do tempo de duração das provas, há também uma grande variedade do número total de itens por prova. Estando estas características de um teste relacionadas entre si, apresenta-se em quadro, para cada teste analisado, o tempo de duração e o número de itens a que o estudante deve responder, com os testes agrupados em função do formato dos itens.

Quadro 1.1 - Testes de Matemática compostos por itens de escolha múltipla

TESTES DE ESCOLHA MÚLTIPLA			
TESTE	**Nº DE ITENS**	**DURAÇÃO**	**OBSERVAÇÕES**
TM do Brasil	45	5 horas e 30 minutos (as 3 provas)	Os itens são do tipo convencional e todos apresentam um problema em contexto. Cada um tem cinco alternativas de resposta.
TM de Israel	25	25 minutos	O teste tem quatro itens dependentes do contexto e os outros são do tipo convencional. Todos têm quatro alternativas de resposta.
TM do *ACT*	60	1 hora	Um dos itens é de escolha múltipla complexa, seis formam dois conjuntos de itens dependentes do contexto e os restantes são do tipo convencional. Todos os itens têm cinco alternativas de resposta.
TM do *SAT Subjects Tests*	50	1 hora	A maioria dos itens é do tipo convencional (muitos deles com um problema em contexto), mas alguns são do tipo escolha múltipla complexa. Todos têm cinco alternativas de resposta.
TM da FESIC	48	2 horas e 30 minutos	O teste apresenta 16 exercícios, dos quais o estudante deve escolher 12. Cada exercício tem quatro itens do tipo verdadeiro-falso.
TM do CEFET-MG	20	3 horas e 30 minutos (as 4 provas)	Os itens de Matemática são todos do tipo convencional, com cinco alternativas de resposta.
TM da UCamb	25	1 hora e 30 minutos (os 2 temas)	O enunciado de cada item apresenta um problema em contexto, no qual o estímulo pode incluir um diagrama, uma tabela de informação ou um gráfico. A resposta certa à pergunta feita, sobre a situação em questão, é uma das cinco opções fornecidas.

Quadro 1.2 - Testes de Matemática compostos por itens de resposta construída aberta

TESTES DE RESPOSTA CONSTRUÍDA ABERTA			
TESTE	**Nº DE ITENS**	**DURAÇÃO**	**OBSERVAÇÕES**
TM de França	26	4 horas	Os itens são distribuídos por quatro exercícios, cada um com duas ou mais questões, a maior parte delas com alíneas.
TM de Itália	9	6 horas	O estudante deve escolher um de quatro problemas (cada um com quatro itens) e cinco de dez questões.
TM de Inglaterra	25 (F1) 20 (F2)	3 horas (1,5 + 1,5)	Em cada prova, os itens estão distribuídos por oito exercícios, cada um com várias alíneas.
TM de Hong Kong	36 a 39 (18 + 18 a 21)	6 horas (3+3)	O teste é composto por duas provas, cada uma com duas secções - a secção A tem seis exercícios de resposta obrigatória e a B tem cinco exercícios, dos quais o estudante deve escolher quatro para responder. Cada exercício tem duas a cinco questões, algumas com alíneas.
TM da UPCMad	7 ou 8	1 hora e 30 minutos	O estudante opta por uma de duas provas, cada uma com quatro exercícios. A opção A tem, ao todo, sete itens e a B oito itens.
TM do IBac	39	1 hora e 30 minutos	O teste tem cinco exercícios, cada um com várias questões, algumas com alíneas.

Quadro 1.3 - Testes compostos por itens de resposta construída e itens de escolha múltipla

TESTES DE RESPOSTA CONSTRUÍDA E DE ESCOLHA MÚLTIPLA			
TESTE	**Nº DE ITENS**	**DURAÇÃO**	**OBSERVAÇÕES**
TM de Portugal	11 RC + 8 EM	2 horas e 30 minutos	As respostas aos itens RC são abertas e distribuem-se por sete exercícios. Os itens EM são do tipo convencional com quatro alternativas de resposta. É dada uma tolerância de 30 minutos no tempo de duração do teste.
TM do *SAT*	10 RC + 44 EM	3 horas e 45 minutos (3 provas)	Os itens RC de Matemática são do tipo fechado e os EM do tipo convencional (a maioria) ou complexo, com cinco alternativas de resposta.
TM do Japão	14 RC + 7 EM	1 hora e 20 minutos	As respostas aos itens RC são fechadas e distribuem-se por nove exercícios. O teste tem cinco itens EM com cinco alternativas de resposta, um com quatro e outro com seis alternativas.
TM da NUSing	12 a 18 RC + 20 EM	2 horas	Os itens RC são de resposta aberta e escolhidos entre 44 - há três temas, cada um com quatro exercícios (com três a cinco alíneas) dos quais o estudante deve escolher quatro para responder mas, no máximo, a três do mesmo tema. Os itens EM são do tipo convencional com cinco alternativas de resposta.

- ***Formulário e Calculadora***

Utilizar, ou não, calculadora ou um formulário, não é um critério uniforme nos testes analisados:

Quadro 1.4 - Utilização de calculadora ou de formulário nos testes

TESTES	CALCULADORA Permitida	FORMULÁRIO*
TM de Portugal	Gráfica (necessária)	Disponiblizado
TM de Inglaterra **TM do *SAT***	Gráfica	Disponiblizado
TM do *SAT Subjects Tests*	Gráfica	Disponiblizado (volumes de sólidos e área de superfície da esfera)
TM de Hong Kong	Não Programável	Disponiblizado (fórmulas trigonométricas)
TM de França **TM de Itália** **TM da NUSing**	Não Programável	Nenhum
TM do IBac **TM do *ACT***	Gráfica	Nenhum
TM da UPCMad	Não gráfica	Nenhum
TM de Israel	Nenhuma	Disponiblizado
TM do Brasil **TM do Japão** **TM da FESIC** **TM do CEFET-MG** **TM da UCamb**	Nenhuma	Nenhum

*Os formulários disponibilizados estão incluídos no caderno de teste

Observe-se que qualquer teste composto exclusivamente por itens de escolha múltipla não pode ser resolvido com calculadora, exceto os TM do *ACT* e do *SAT Subjects Tests* que contêm 60 e 50 itens, respetivamente, para serem respondidos em 1 hora. O único TM com itens de resposta construída que não admite calculadora é o do Japão (recorde-se que todas as respostas construídas deste teste são fechadas).

- ***Pontuação dos Itens***

Todos os testes informam o valor máximo da sua pontuação e, a maioria, a cotação de cada item. Na pesquisa efetuada houve particular interesse em saber como são pontuados os itens de escolha múltipla. Encontrou-se essa informação apenas para algumas provas e constatou-se que, também neste aspeto, os critérios são diversos:

- Nos TM de Portugal, de Israel, do *ACT*, do *ACT Subjects Tests*, da UCamb e da NUSing, os estudantes não são penalizados por darem uma resposta errada;
- No TM do *SAT*, por cada resposta errada é descontado um quarto da cotação do item e as respostas omissas valem zero pontos;
- No TM da FESIC é descontada a cotação total de uma resposta errada, respostas omissas não são descontadas e é dada uma bonificação a quem responder corretamente aos quatro itens de um exercício.

Da revisão efetuada a testes de conhecimentos de Matemática dos candidatos ao ensino superior de ciências e tecnologias, não se pode afirmar que exista um padrão internacional, nem quanto às características, nem quanto ao modo como são utilizados na candidatura.

Com algumas áreas de conteúdo em comum, uns testes são constituídos por itens de um único formato e outros por itens de vários formatos. Um dos testes tem nove itens RC para resolver em seis horas e outro tem 60 itens EM para responder numa hora. Entre estes limites, o número de itens e o tempo de resolução do teste é muito diverso. Há testes que podem ser resolvidos com o auxílio de um formulário e de uma calculadora (com determinadas propriedades, variáveis entre as provas), outros só com formulário ou só com calculadora, e outros ainda sem calculadora nem formulário. Também existem diferentes modalidades de pontuação de itens EM - um item errado pode valer zero pontos ou implicar uma redução na pontuação, igual a uma parte ou à totalidade da cotação desse item; um grupo de itens respondidos corretamente pode dar um bónus na pontuação. Da análise dos itens dos vários testes, deduz-se que eles apresentam níveis de complexidade diferentes. Serão, admite-se, adequados ao que se pretende avaliar, a quem é avaliado e à finalidade da avaliação.

Alguns dos testes analisados são os únicos que os candidatos realizam, sendo aceites por todas as instituições do país, outros são específicos para a admissão a uma instituição e, ainda outros, são um dos testes de Matemática requeridos para o ingresso numa ou em várias instituições. Enquanto uns avaliam os conhecimentos dos estudantes como alunos do ensino secundário, potenciais candidatos a cursos de diversas áreas, outros avaliam a sua preparação para frequentarem, precisamente, cursos da área de ciências ou de tecnologias.

1.4 Testes Estandardizados de Conhecimentos: características e aplicações

Os testes da coleção recolhida, além de diferirem nos aspetos assinalados, acusam outra diferença que importa sublinhar. Percebeu-se, da informação *online* proporcionada pelas entidades responsáveis pelos testes, que todos eles envolvem um conjunto de procedimentos fixos e uniformes de administração, de pontuação e de interpretação dos resultados. No entanto, só alguns são construídos de modo a possibilitar a comparação dos seus resultados - com outros resultados ou com a distribuição da população (normas intragrupo). Tanto quanto foi possível apurar, é o caso dos TM do Brasil, de Israel, do *ACT*, do *SAT*, do *Sat Subjects Tests*, de Inglaterra, do Japão e da UCamb.

Nalgumas publicações, os testes que cumprem os procedimentos fixos e uniformes atrás referidos são classificados como estandardizados. Contudo, no âmbito deste trabalho, esta classificação restringe-se aos testes que atestam a precisão e a legitimidade dos seus resultados. Deste modo, adota-se o conceito que é utilizado pela Psicometria, o ramo da Psicologia que se ocupa dos desenvolvimentos teóricos e metodológicos que fundamentam a construção, avaliação e utilização de testes psicológicos (APA, 2009) - um teste é estandardizado se tiver regras bem definidas e uniformizadas de utilização e características metrológicas estabelecidas pela investigação empírica e por uma análise minuciosa (APA, 2009).

Um teste estandardizado garante uma avaliação objetiva, que constitui uma base sólida para a identificação do nível de desempenho dos estudantes e para o claro diagnóstico de lacunas e défices de conhecimentos. Assim, é o tipo de teste apropriado para organizar recomendações e esboçar soluções que visem a melhoria efetiva das práticas de ensino.

Existem testes estandardizados que são construídos com base em normas critério, nas quais a média e a variabilidade do desempenho coletivo de um grupo de indivíduos, em várias aplicações do teste, se adotam como *standard* para comparação com o desempenho posterior de outros indivíduos. Noutros, as pontuações obtidas no teste permitem avaliar o nível de desempenho através do posicionamento de cada pessoa que fez o teste em relação aos seus pares, bem como comparar e avaliar a evolução dos traços ou conhecimentos dos indivíduos - no contexto em análise, dos conhecimentos de Matemática dos candidatos admitidos ao ensino superior.

Um teste estandardizado de conhecimentos é, portanto, essencial à prática e à fundamentação científica da avaliação do progresso educativo dos estudantes e de todos os estudos comparativos, quer transversais, quer longitudinais.

Como se pode observar na identificação dos testes estandardizados analisados neste estudo, apenas são conhecidos exemplos de itens ou de testes, exceto no caso do TM do Brasil. Esta divulgação restrita é habitual em relação aos instrumentos de avaliação desta natureza, uma vez que eles contêm itens, devidamente calibrados, que se repetem em aplicações sucessivas e facilitam as comparações dos resultados. Também é comum que estes testes sejam organizados com itens de escolha múltipla ou de resposta construída fechada, por serem itens que procuram garantir uma pontuação objetiva.

Ao contrário de outros países, em Portugal não é comum aplicar testes estandardizados de conhecimentos. Reconhecida a sua importância na organização de planos de atuação dos agentes educativos, em especial dos professores, seria desejável que fossem utilizados ao longo do percurso escolar dos estudantes. Em particular, dos candidatos a cursos superiores de ciências e de tecnologias ou a estudantes colocados nestes cursos, no início das atividades letivas.

A necessidade de avaliar estes estudantes quanto ao conhecimento dos conteúdos básicos imprescindíveis ao sucesso nas unidades curriculares de Matemática que vão frequentar, motivou o interesse pela construção de um teste capaz de realizar essa avaliação, de forma objetiva e uniforme. Para tal, tornou-se imprescindível proceder a uma revisão da literatura, no sentido de recolher informação acerca das técnicas de construção de testes estandardizados de conhecimentos de Matemática – desde a conceção do formato e redação dos itens até à análise dos resultados que proporciona na população alvo, tendo em vista estimar as características metrológicas do teste e, assim, conhecer a sua qualidade enquanto instrumento para a medição dos conhecimentos de Matemática.

Capítulo 2

INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO OBJETIVA DE CONHECIMENTOS: CONSTRUÇÃO E ANÁLISE

No domínio da educação, recorre-se a testes para avaliar resultados do processo de ensino e de aprendizagem. Os professores utilizam-nos quando pretendem avaliar os conhecimentos dos seus alunos em relação aos conteúdos que lecionaram nas aulas. Com uma aplicação mais vasta, há testes que avaliam a capacidade de os estudantes executarem determinadas tarefas, baseados nos conteúdos aprendidos numa ou em várias disciplinas (avaliação de desempenho académico), como o PISA (OCDE, 2013b). Outros testes de conhecimentos são administrados com o objetivo de ponderar as classificações obtidas pelos estudantes em decisões de progressão escolar ou em processos de seleção, como o ingresso no ensino superior. Tal como os anteriores, podem servir para aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem - com base na informação que deles decorre, é possível averiguar os resultados de todo o processo, ou seja, verificar se os objetivos (conhecimentos a adquirir e capacidades a desenvolver pelos alunos) foram alcançados e se os métodos de ensino (meios pedagógicos para atingir os objetivos) foram adequados, o que permite, se necessário, reformular os objetivos e os métodos. Daí que a aplicação de um teste, com esta finalidade, não seja o fim de um processo mas sim um meio para o melhorar (Monteiro, Afonso, & Pires, 2013).

Embora muitos testes utilizados nas avaliações académicas admitam procedimentos uniformes de administração, de pontuação e de interpretação de resultados, poucos são construídos de modo a garantirem uma avaliação objetiva e estandardizada. No entanto, apenas os testes desta natureza permitem assegurar a legitimidade da comparação dos seus resultados, necessária para identificar, descrever ou explicar as diferenças de conhecimentos entre indivíduos ou grupos, tendo em vista a tomada de decisões que exijam a consideração dessas diferenças (Gregory, 2010).

Os testes estandardizados inserem-se nas técnicas de avaliação utilizadas na medição de variáveis psicológicas diferenciadoras, quer de indivíduos, quer de grupos, como por exemplo o conhecimento, a inteligência, os interesses e os traços de personalidade. Sendo utilizados em diversos contextos sociais, culturais ou científicos, as suas grandes áreas de aplicação são a educacional, a organizacional (orientação para uma área profissional, seleção de candidatos a um emprego, etc.) e a clínica (visam a autocompreensão e a promoção do desenvolvimento pessoal com fins terapêuticos ou científicos).

Foi uma necessidade de orientação profissional que deu origem aos primeiros testes: foram utilizados na China, há cerca de 2200 anos, num sistema competitivo de exames desenvolvido para selecionar indivíduos para cargos importantes do governo (Bowman, 1989, como citado em Urbina, 2004). Na história mais recente, quando os Estados Unidos da América entraram na Primeira Guerra Mundial, em 1917, foi desenvolvido o teste *Army Alpha* para ser aplicado aos recrutas do *U.S. Army*, com o objetivo de lhes atribuir as funções mais adequadas. Com base neste teste, na década de 1920, começaram a ser utilizados exames objetivos na tomada de decisão na admissão dos candidatos aos colégios e universidades americanos. Um processo que veio a culminar, em 1926, na criação do *Scholastic Aptitude Test*, um teste de avaliação académica que, com as devidas adaptações, ainda hoje é dos mais utilizados na seleção dos candidatos ao ensino superior nos Estados Unidos da América, sendo atualmente denominado *Scholastic Assessment Test* (Urbina, 2004).

Os testes de conhecimentos, de utilização primordial em contexto educacional e aos quais se vai restringir este estudo, são instrumentos de medida cognitivos, construídos em função da área do saber que se deseja medir. Pretende-se que descrevam numericamente o grau ou a quantidade de aprendizagem dos indivíduos, sob condições uniformes e estandardizadas de observação (Haladyna, 2004; Cohen, Swerdlik, & Sturman, 2013).

Como qualquer outro instrumento de medida, um teste de avaliação académica deve medir com rigor os conhecimentos que se querem medir, deve inspirar confiança aos seus utilizadores - quanto maior o grau de precisão e de adequação das medidas aos objetivos da avaliação, maior a convicção nas inferências feitas a partir dos resultados do teste.

A construção dos testes estandardizados é feita de acordo com procedimentos desenvolvidos no campo da investigação em Psicometria - é neste domínio que se estudam as metodologias de conceção, análise e seleção dos itens, organização dos itens no teste, administração do teste, cotação, interpretação, aferição dos resultados e ainda as que se utilizam na análise e discussão dos testes (Almeida & Freire, 2008).

O valor metrológico de um teste depende, essencialmente, da construção dos seus itens - questões, instruções ou outras formas de solicitar respostas. A literatura recomenda que este processo seja fundamentado em resultados de investigações orientadas para a pesquisa das melhores técnicas que facilitam a redação de itens, adequados aos propósitos do teste que se pretende construir. Tendo em mente a construção de um teste de conhecimentos de Matemática, selecionaram-se alguns desses resultados, que se organizaram juntamente com outras técnicas de construção de testes para apresentar na primeira secção deste capítulo.

Depois de o teste ser administrado, os resultados obtidos devem ser analisados no sentido de avaliar a qualidade do teste como instrumento de medida. Na segunda secção deste capítulo encontram-se os indicadores das características metrológicas de um teste e os procedimentos, qualitativos e quantitativos, para os conhecer.

Em rigor, a análise crítica da precisão e da legitimidade dos resultados de um teste, das medidas que ele proporciona, integra-se no processo de construção do teste - a análise faculta indicadores para os itens ou outros fatores que devem ser corrigidos no sentido de melhorar a qualidade do teste. Nova aplicação, seguida da análise aos resultados e consequente revisão, é mais um ciclo do processo de construção de um teste de conhecimentos. Um processo que, estritamente, nunca está concluído, pois exige constante escrutínio empírico, revisão de conteúdo e aperfeiçoamento técnico (Monteiro *et al*., 2013).

2.1 Técnicas de Construção dos Testes[1]

A primeira etapa da construção de um teste consiste na tomada de decisões que irão orientar todo o sistema de produção dos itens.

Atendendo às recomendações da Psicometria, ao formular os itens que vão compor um teste de conhecimentos, deve-se ter sempre presente ***o que*** se vai avaliar, ***para que*** se vai avaliar e ***quem*** vai ser avaliado. Segundo Almeida e Freire (2008), é com a definição

[1] Parte desta secção foi apresentada no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática de 2012, na secção Ensino da Matemática (Monteiro, Afonso, & Pires, 2012).

destes parâmetros que, de facto, se inicia a criação de um teste. Ainda de acordo com estes autores, o passo seguinte é decidir:

- Qual a forma como o teste vai ser aplicado (forma papel e lápis ou digital, com ou sem formulário, com ou sem calculadora, individual ou coletivo, etc.);
- Qual o grau de dificuldade ou o nível de complexidade que se deverá imprimir ao teste em face dos sujeitos e dos objetivos a que ele se destina;
- Qual o conteúdo dos itens (sobre que tópicos vão incidir);
- Qual o formato dos itens;
- Quantos itens vai ter o teste.

Quanto ao conteúdo dos itens, os peritos em técnicas de construção de itens para testes académicos, como Haladyna (2004), recomendam que cada item represente um único tipo de conteúdo e envolva um único tipo de processo cognitivo - se um item medir vários conteúdos ou processos, pode não se tornar possível compreender o significado das respostas dadas pelos estudantes.

Os processos cognitivos medidos pelos itens devem corresponder aos resultados das aprendizagens: o ***conhecimento***, associado ao "saber", que inclui factos, conceitos, princípios e procedimentos que podem ser memorizados ou compreendidos, sendo frequentemente organizado em domínios; a ***competência***, associada ao "saber fazer", à resolução de problemas, é um potencial que se desenvolve com o treino e a prática, requer conhecimento; a ***aptidão*** é um potencial existente para realizar uma determinada tarefa, mas que também se desenvolve com a aprendizagem, embora o processo seja longo e complexo, requerendo o uso interligado de conhecimentos e de competências.

Quem constrói um teste deve ser perito no que se pretende avaliar, conhecer o tipo de ensino e de aprendizagem dos indivíduos que vão ser avaliados e saber qual é o objetivo da avaliação em questão. Estas informações irão facilitar-lhe a tomada de decisão em relação a cada uma das questões atrás mencionadas.

Algumas dessas decisões estão interligadas, na medida em que a resolução de uma influencia ou determina as outras - o uso de calculadora num teste de Matemática poderá condicionar o seu conteúdo, a dificuldade e o formato dos itens; testes com itens de um determinado formato podem abranger mais conteúdos, do que se tiverem outro formato, o que poderá ser relevante se houver limite de tempo para a realização do teste. Esta e outras consequências de cada formato de itens são fundamentais para reflectir e fixar as condições de construção do teste.

2.1.1 Formato dos Itens

Desde a natureza dos processos cognitivos a medir até aos recursos disponíveis, são diversos os fatores que condicionam a escolha do formato dos itens que irão compor um teste académico, quer seja um teste típico de aplicação em sala de aula, quer seja um teste de larga escala - teste que avalia o desempenho dos estudantes de vários países, incidindo em conteúdos de aprendizagem definidos por programas de ensino diferentes, como o PISA (OCDE, 2013b) ou o TIMSS (National Center for Education Statistics, 2013).

Considerem-se as vantagens dos itens de escolha múltipla (EM) em relação aos itens de resposta construída (RC) e vice-versa (no Apêndice A encontra-se a caracterização destes itens).

Vantagens dos itens EM em relação aos itens RC[2]:

- O procedimento da pontuação dos itens EM pode ser feito automaticamente ou por alguém que não é perito na matéria avaliada, o que os torna mais económicos do que os itens RC (normalmente, é atribuído 1 ponto a quem escolhe a alternativa de resposta certa e 0 pontos a quem escolhe uma opção errada ou não responde ao item; há casos em que se atribui uma pontuação negativa a respostas erradas);
- A facilidade da pontuação dos itens EM permite apurar os resultados mais rapidamente do que nos itens RC, o que proporciona, aos avaliadores e aos avaliados, o *feedback* sobre o desempenho de um modo mais oportuno;
- A pontuação dos itens EM é objetiva e relativamente fiável, pelo que são mais equitativos para os estudantes do que os itens RC;
- O grau de dificuldade dos itens EM não aumenta para os alunos que têm dificuldade de expressão, o que pode acontecer nos itens RC;
- Os enunciados dos itens EM são, geralmente, mais objetivos que os dos itens RC;
- Os itens EM podem ser respondidos mais rapidamente do que os itens RC, pelo que um teste pode ter um maior número de itens EM e, assim, abranger mais tópicos dos conteúdos a avaliar.

[2] Excluindo os itens de resposta construída fechada que solicitam a resposta marcada numa folha de respostas, de acordo com um determinado código.

Apesar do tempo e do custo em pontuar itens RC, bem como a menor objetividade da pontuação e quantidade de temas a avaliar, há razões que justificam a escolha deste formato.

Vantagens dos itens RC em relação aos itens EM:

- Um item RC é mais fácil de construir do que um item EM;
- Um item RC permite obter toda a gama de respostas dadas pelos estudantes e incentiva a criatividade;
- Ao responder com as suas próprias palavras a um item RC, o estudante revela melhor o seu nível de conhecimentos de que num item EM;
- Por não ser mostrada a resposta certa, o estudante que não a conhece tem menos probabilidade de responder corretamente do que num item EM;
- Os itens RC são mais adequados para medirem aptidões, pois elas exigem processos construtivos, frequentemente complexos.

As vantagens dos itens RC em relação aos itens EM têm promovido muitas investigações no sentido de minimizar as limitações deste último formato, de identificar o tipo de aprendizagens que os itens EM avaliam eficazmente ou de comparar os resultados de testes com itens de um ou outro formato. No Apêndice B faz-se referência a algumas destas investigações, relacionadas com os seguintes tópicos: conhecimento parcial por parte do estudante, intuição e acaso; resultados da aprendizagem; avaliação de conhecimentos em Matemática.

Em face das conclusões dos estudos apresentados no Apêndice B, a maioria de natureza empírica, pode-se afirmar que não há formatos de itens melhores que outros, em sentido absoluto. Cada formato tem características que o tornam mais adequado aos conteúdos a avaliar, à natureza dos avaliados e às condições de aplicação e procedimentos de apuramento dos resultados do teste. São essas características que devem determinar o formato, ou formatos, dos itens de um teste de avaliação académica, em particular, de um teste de Matemática.

Os itens dos testes estandardizados têm, na sua maioria, o formato EM. Os itens RC utilizados nos testes desta natureza são, sobretudo, do formato fechado, que requerem uma resposta numérica, facilmente codificável para ser assinalada numa folha de respostas de leitura ótica.

2.1.2 Matriz dos Itens

Tomada a decisão sobre o formato dos itens e estabelecidas todas as outras condições da construção do teste, antes de começar a redigir os itens é imprescindível elaborar a ***Matriz dos Itens*** - tabela de dupla entrada onde se estabelece o número de itens que devem constituir o teste, distribuídos em função de dois critérios de classificação estruturantes do teste: área de conteúdo e nível de complexidade, no caso de teste de conhecimentos.

A área de conteúdo de um item é definida pela matéria em que ele vai incidir.

O nível de complexidade de um item pode ser classificado em *baixo*, *moderado* ou *elevado*, consoante o processo ou processos mentais envolvidos. Segue-se uma descrição destes níveis de complexidade, influenciada por Martin, Olson e Wilson (2008), com identificação das categorias da clássica Taxonomia de Bloom relacionadas com cada nível. Adaptados de Bloom (1956), referem-se os objetivos cognitivos das categorias e os verbos que lhes estão associados. Dão-se também alguns exemplos de ações que podem ser solicitadas por um item para que ele seja considerado de um ou outro nível de complexidade.

Nível de Complexidade Baixo - Itens que exigem recuperação da memória ou reconhecimento de conceitos ou princípios previamente aprendidos; especificam o que o estudante deve fazer ou envolvem a utilização de procedimentos automatizados. Não se exige que o estudante utilize um método de resolução original.

Categorias da Taxonomia de Bloom:

- *Conhecimento*: recuperação de informação memorizada.
  Verbos associados: reconhecer, definir, identificar, reproduzir, rotular, designar, mostrar, listar.
- *Compreensão*: compreensão do significado, interpretação ou extrapolação de instruções e de problemas.
  Verbos associados: compreender, traduzir, interpretar, justificar, explicar, descrever, resumir, demonstrar.

Exemplos de ações solicitadas pelos itens de complexidade baixa: recordar ou reconhecer um facto, termo ou propriedade; reconhecer um exemplo de um conceito; calcular uma soma, uma diferença, um produto ou um quociente; reconhecer uma representação equivalente; utilizar um procedimento específico; resolver um problema verbal num passo de resolução; desenhar ou medir figuras geométricas simples; localizar informação num gráfico, numa tabela ou numa figura.

Nível de Complexidade Moderado - Itens que exigem flexibilidade de pensamento e escolha entre alternativas de solução; que exigem resposta sem especificação de procedimentos ou que envolvem mais do que um passo de resolução. O estudante deve decidir que estratégias de resolução utilizar, recorrendo a conhecimentos de diversos domínios.

Categorias da Taxonomia de Bloom:

- *Aplicação:* utilização de conhecimentos na resolução de uma nova situação ou problema; utilização espontânea de abstração.

  Verbos associados: aplicar, apurar, calcular, determinar, resolver, solucionar, fazer, construir, mostrar, ilustrar, experimentar.

- *Análise*: separação de fenómenos ou conceitos em componentes de modo a compreender a organização de uma estrutura; separação entre factos e inferências.

  Verbos associados: analisar, relacionar, comparar, distinguir, classificar, categorizar, organizar, agrupar, arranjar, discriminar, diferenciar, deduzir.

São exemplos de itens de nível de complexidade moderada os que requerem as seguintes ações: representar matematicamente uma situação de modos diferentes; selecionar e utilizar diversas representações em função do problema e dos objetivos; resolver um problema colocado na forma verbal com recurso a vários passos; comparar figuras ou afirmações; fornecer justificação para os passos de um processo de resolução; interpretar uma representação gráfica; prolongar um padrão; localizar informação (em gráficos, tabelas ou figuras) e usá-la na resolução de um problema com vários passos; formular um problema de rotina, perante dados e condições; interpretar um argumento simples.

Nível de Complexidade Elevado - Itens que exigem raciocínio abstrato, planeamento, capacidade de síntese, juízo avaliativo e pensamento criativo. O estudante tem que pensar de maneira abstrata e complexa.

Categorias da Taxonomia de Bloom:

- *Síntese*: construção de uma estrutura ou padrão a partir de diversos elementos; associação de partes de modo a criar uma nova estrutura ou um novo significado.

  Verbos associados: sintetizar, integrar, projetar, combinar, compor, formular, inventar, criar, imaginar, inferir, produzir, predizer.

- *Avaliação*: emissão de juízos de valor relativamente a ideias ou fenómenos.

  Verbos associados: avaliar, julgar, criticar, corrigir, verificar, discutir, escolher, decidir.

Exemplos de ações necessárias para responder corretamente a um item de complexidade elevada: descrever como diferentes representações podem ser usadas para diferentes finalidades; aplicar um procedimento com diferentes passos e pontos de decisão; analisar semelhanças e diferenças entre procedimentos ou conceitos; generalizar um padrão; formular um problema original perante uma situação; resolver um problema novo; resolver um problema de mais do que uma maneira; explicar e justificar a resolução de um problema; descrever, comparar e contrastar métodos de resolução; formular um modelo matemático para resolução dum problema complexo; analisar os postulados assumidos num modelo; analisar ou produzir um argumento dedutivo; fornecer uma justificação matemática.

Preenchida a matriz dos itens, ou seja, fixado o número de itens relativos a cada área de conteúdo e, entre estes, quantos devem pertencer a cada nível de complexidade, estão reunidas as condições para iniciar o processo da construção dos itens.

2.1.3 Construção de Itens de Escolha Múltipla

As características dos itens EM e as suas vantagens em relação aos itens RC são determinantes na preferência deste formato para construir, total ou parcialmente, um teste estandardizado de avaliação académica. No entanto, a opção por itens EM requer que, no processo da sua elaboração, sejam consideradas as limitações e críticas que lhes são apontadas, algumas das quais podem ser minimizadas, ou mesmo eliminadas, se os itens forem bem construídos.

Quem já construiu itens de escolha múltipla, por certo que experimentou dificuldades para os escrever e concordará com as palavras escritas por Ebel, em 1951:

> Escrever um item é uma arte. Exige uma invulgar combinação de aptidões especiais. Consegue-se apenas através de uma prática intensa e criticamente supervisionada. Exige e tende a desenvolver elevados padrões de qualidade e um sentimento de orgulho num trabalho manual. (como citado em Rodriguez, 2005, p. 3, tradução nossa)

Visando nortear e facilitar o trabalho de construir itens EM que venham a integrar um teste com boas propriedades metrológicas, existem algumas diretrizes de escrita ou regras básicas para a construção destes itens.

Na sequência de uma revisão da literatura sobre diretrizes de conceção de itens EM para utilizar na avaliação em sala de aula, Haladyna, Downing e Rodriguez (2002) publicaram um artigo onde apresentam 31 normas para a construção de itens deste tipo. Tinham como objetivo fornecer orientações para a elaboração de um bom instrumento de medida das aprendizagens dos estudantes, em particular das mais complexas (uma das restrições apontadas aos itens EM).

Como os autores referem, estas normas foram validadas através de um processo lógico, que inclui duas fontes: o consenso obtido a partir dos conteúdos encontrados na revisão de 27 livros de testes educacionais e os resultados de 27 estudos de pesquisa e revisões publicados desde 1990. Segundo eles, embora estas diretrizes se destinem, sobretudo, aos itens a utilizar na avaliação em sala de aula, também podem ser relevantes na construção de instrumentos de avaliação de larga escala.

Na literatura sobre construção de testes de escolha múltipla encontram-se outras listas de diretrizes de escrita de itens. Umas mais extensas, como a de Zimmaro (2010), e outras mais concisas, como a de Moreno, Martínez e Muñiz (2006) que criticam a de Haladyna, Downing e Rodriguez por incluir demasiadas normas. Em 2004, Haladyna apresentou, em livro, as mesmas diretrizes que tinha elaborado com os outros autores, embora algumas estejam escritas e agrupadas de um modo ligeiramente diferente. Apesar de a lista de Haladyna (2004) não ser a mais recente, a brevidade, clareza e objetividade das suas normas determinaram que ela fosse a preferida para este trabalho. Apresenta-se de seguida, adaptada da original, com a recomendação do autor de que as diretrizes devem ser aplicadas de modo criterioso mas não rígido.

Diretrizes para a Escrita de Itens de Escolha Múltipla:[3]

Relativamente ao Conteúdo

1. Cada item deve refletir um conteúdo específico e um único processo cognitivo, de acordo com a matriz dos itens do teste;
2. Cada item deve incidir num conteúdo importante da aprendizagem e devem evitar-se conteúdos triviais;
3. Devem ser usados conteúdos ou cenários diferentes dos referidos no manual ou nas aulas para medir a compreensão e a aplicação de conhecimentos e de competências;
4. O conteúdo de cada item deve ser independente do conteúdo dos outros itens do teste;
5. Devem ser evitados conteúdos demasiado gerais e demasiado específicos;

[3] Algumas destas diretrizes não se aplicam diretamente ao formato Verdadeiro-Falso.

6. Devem ser evitados itens baseados em opiniões;
7. Devem ser evitados itens com rasteiras.

Relativamente ao Estilo e ao Formato

8. A estrutura do item (disposição das alternativas de resposta) deve ser vertical e não horizontal;
9. A ideia central de um item deve ser apresentada com clareza;
10. A escrita do item deve ser correta quanto à construção gramatical, à pontuação, à ortografia e ao uso de letras maiúsculas;
11. O vocabulário do item deve ser simples, de modo a que a compreensão da leitura não interfira com o que se pretende avaliar;
12. O tempo de leitura do item deve ser o menor possível, devendo evitar-se palavras desnecessárias (como iniciar cada alternativa de resposta com a mesma palavra);
13. Deve ser feita a revisão de cada item (uma boa regra: se, no final da revisão do teste, forem localizados três erros, provavelmente ficou um por encontrar).

Relativamente à Escrita do Enunciado

14. As instruções, no enunciado, devem ser o mais objetivas possível (ao ler o enunciado, o estudante deve saber logo o que o item foca);
15. O enunciado deve o mais curto possível;
16. A ideia central do item deve estar no enunciado e não nas alternativas de resposta;
17. Deve ser evitada informação irrelevante;
18. O enunciado deve ser escrito na positiva (se, com cuidado, forem usadas palavras na negativa, como **NÃO** e **EXCETO**, elas devem ser escritas com letras maiúsculas e a negrito).

Relativamente à Escrita das Alternativas de Resposta

19. Deve ser criado o maior número possível de alternativas de resposta efetivas, mas duas ou três podem ser suficientes;
20. A posição da resposta certa deve variar entre os itens, devendo esta posição ser escolhida aleatoriamente;
21. As alternativas de resposta devem ser colocadas numa ordem lógica ou numérica;
22. As alternativas de resposta devem ser independentes, não devem ser sobrepostas;
23. As alternativas de resposta devem ser homogéneas no conteúdo e na estrutura gramatical;

24. As alternativas de resposta devem ter comprimentos sensivelmente iguais;
25. A alternativa "Nenhuma das anteriores" deve ser usada com moderação;
26. Evitar usar a alternativa de resposta “Todas as anteriores”;
27. Evitar usar palavras na negativa, tais como NÃO ou EXCETO;
28. Evitar alternativas de resposta que dão pistas para a resposta certa;
29. Os distratores devem ser plausíveis;
30. Devem ser usados erros típicos dos estudantes para escrever os distratores;
31. Pode ser usado o humor, se ele for compatível com o professor e o ambiente de aprendizagem.

Há, por fim, uma recomendação de Zimmaro (2010) que parece importante mencionar, por se entender pertinente na construção de itens para testes de avaliação de conhecimentos de Matemática: as alternativas de resposta devem ser identificadas com letras e não com números.

Seguem-se exemplos de itens EM que não obedecem a algumas das diretrizes apresentadas (são exemplos de maus itens) com o intuito de ilustrar a necessidade de cumprir essas regras para reduzir o número de respostas certas dadas por estudantes que, de facto, não as conhecem - ou porque conseguem identificar a resposta certa por intuição, seguindo pistas não intencionais, ou porque têm algum conhecimento que lhes permite eliminar os distratores ou ainda porque, por intuição ou conhecimento parcial, excluem algumas respostas erradas e, por acaso, selecionam a certa entre as opções que restaram. Combater estes procedimentos dos estudantes é, acredita-se, o maior desafio que se apresenta a quem pretende construir um teste com itens EM.

Exceto a primeira, todas as regras mencionadas nos exemplos estão relacionadas com a escrita das alternativas de resposta. A resposta certa de cada item está assinalada com *.

✓ **O conteúdo de cada item deve ser independente do conteúdo dos outros itens do teste.**

1. Qual dos seguintes valores é igual a 2^7?

A. 14

B. 49

C. 128*

2. Qual deve ser o valor de n para que $2^n = 128$?

A. 7*

B. $\sqrt{128}$

C. 64

Se o mesmo teste contiver estes dois itens, os estudantes encontram no item 2 a solução do item 1 e vice-versa. Esta dependência do conteúdo dos itens, um erro trivial da construção de testes EM, mas nem por isso raro, pode ocorrer quando os itens são revistos individualmente e não no seu conjunto - deve ser feita uma revisão completa do teste, antes da sua administração.

✓ **A posição da resposta certa deve variar entre os itens, devendo esta posição ser escolhida aleatoriamente.**

✓ **As alternativas de resposta devem ser colocadas numa ordem lógica ou numérica.**

3. Qual dos seguintes valores é igual a $15{,}33 \div 15$?

A. $0{,}122$

B. $1{,}022$*

C. $1{,}02$

Ao construir os itens, algumas pessoas tendem a colocar as alternativas de resposta corretas nas mesmas posições, normalmente nas centrais, padrão que pode ser detetado pelos alunos que respondem por intuição. Tem-se constatado que também os alunos que respondem ao acaso têm tendência a rejeitar a primeira e a última opções. Para contrariar esta vantagem de quem não conhece a resposta certa, as alternativas de resposta devem ser distribuídas aleatoriamente pelas várias posições. Além disso, estas alternativas devem ser colocadas numa ordem numérica ou lógica (alfabética, comprimento das opções ou outra). Esta disposição das opções, além de desencorajar a resposta intuitiva, não aumenta o grau de dificuldade que se pretende para o item, como por vezes acontece quando as opções não são colocadas por ordem lógica ou numérica.

O item 3 poderia ser melhorado escrevendo as alternativas de resposta por ordem decrescente (ou crescente) e com o mesmo número de casas decimais: A. $1{,}022$*; B. $1{,}020$; C. $0{,}122$.

✓ **As alternativas de resposta devem ter comprimentos sensivelmente iguais.**

4. Qual das seguintes opções representa o domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$?

A. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

B. $[2, +\infty[$

C. $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$*

Na escrita dos itens EM, é comum escrever-se o enunciado e a resposta certa e, mais tarde, criar os distratores. Um erro frequente que ocorre nesta fase é construir opções erradas mais curtas do que a certa. Esta tendência pode ser reconhecida pelos alunos, que a utilizarão como critério para escolher a sua resposta ao item. Uma possível correção do item seria:

A. $\mathbb{R} \setminus]-4,4[$;

B. $[2,+\infty[$;

C. $\mathbb{R}\setminus]-2,2[$*.

✓ **As alternativas de resposta devem ser homogéneas no conteúdo e na estrutura gramatical.**

✓ **Evitar alternativas que dão pistas para a resposta certa.**

5. A soma das idades do João e da sua irmã Ana é igual a nove e, daqui a três anos, a Ana terá o dobro da idade do João. Portanto, o João

A. Tem menos cinco anos que a Ana.*

B. É 1 ano mais novo que a Ana.

C. É 2 anos mais novo que a Ana.

A opção A, por se distinguir das outras, poderá ser a escolhida por quem responder por intuição. O item tem uma pista para a resposta certa, o que é de evitar. No caso de a opção B ser substituída por "Tem menos um ano que a Ana", fica a opção C a distinguir-se das outras e, neste caso, o item dá uma falsa pista, o que vai contra as regras de escrita de itens (regra 7). Substituir também a opção C por "Tem menos dois anos que a Ana" evita a heterogeneidade das alternativas de resposta e, por consequência, pistas para a resposta certa ou rasteiras para os alunos.

✓ **As alternativas de resposta devem ser independentes, não devem ser sobrepostas.**

✓ **Os distratores devem ser plausíveis.**

6. Qual dos seguintes conjuntos está contido no conjunto solução da inequação $\frac{x^2-9}{x} < 0$?

A. $]0,2[$*

B. $]0,5[$

C. $]-\infty,0[$

D. $]-\infty,-1[$

Um aluno que não seja capaz de determinar o conjunto solução da inequação, poderá fazer o seguinte raciocínio para eliminar distratores: Se B fosse a opção correta, também A seria, logo B deve ser incorreta; entre C e D acontece o mesmo. Portanto, a resposta certa será A ou D. Para evitar a sobreposição das alternativas de resposta deste item, admita-se a seguinte alteração:

A. $[-2, 0]$;

B. $[3, +\infty[$;

C. $]-\infty, 0[$

D. $]0, 2[$*

A resposta certa poderá ser escolhida entre as opções C e D por um aluno que repare que o limite superior do intervalo de A não pertence ao domínio da inequação e que o limite inferior do intervalo de B anula o 1.º membro da inequação. Embora estas alternativas de resposta não se sobreponham, dois dos distratores são facilmente identificados - não são plausíveis. Em boa verdade, tanto esta versão do item como a anterior, apesar de terem quatro opções, só têm um distrator para os alunos que não sabem resolver esta inequação mas têm alguns conhecimentos sobre expressões algébricas e teoria de conjuntos.

Pretende-se que um item seja respondido corretamente apenas pelos estudantes que têm um elevado grau de conhecimento. Para que tal aconteça, qualquer distrator deve ser plausível, isto é, não deve revelar facilmente que é uma resposta errada a quem não tem o conhecimento necessário para ter a certeza da resposta certa. Um distrator que não seja plausível, não é um distrator efetivo. Depois de o teste ser aplicado, um distrator deste tipo identifica-se pelo número reduzido de indivíduos que o selecionaram como resposta certa (menos de 5%, segundo Linacre (2012b) e Haladyna e Downing (1988)).

Tanto a primeira como a segunda versões do item 6 poderão ser respondidas corretamente por um aluno que não seja capaz de resolver a inequação mas conseguir, com algum conhecimento parcial, eliminar opções erradas. Na construção destes itens não se atendeu à primeira diretriz relativa à escrita de alternativas de resposta: Deve ser criado o maior número possível de alternativas de resposta efetivas, mas duas ou três podem ser suficientes**.**

Com a aplicação de "Deve ser criado o maior número possível de alternativas de resposta efetivas" pretende-se reduzir a probabilidade de um estudante acertar a resposta por acaso - quantas mais opções tiver, menos hipóteses tem de escolher a correta. No entanto, nem sempre se consegue construir quatro ou cinco alternativas de resposta efetivas, e o item acaba por ficar, na realidade, com um ou dois distratores plausíveis. Nestes casos, em vez de ter "falsas" opções, talvez seja preferível ter só duas ou três "verdadeiras" opções. Daí a advertência, "mas duas ou três podem ser suficientes".

Haladyna, Downing e Rodriguez (2002) justificam esta aparente contradição com o facto de 70% da literatura que reviram aconselhar a construção do maior número possível de opções efetivas (do total, apenas 4% defende quatro opções e os restantes abstêm-se de fazer qualquer recomendação), mas eles serem a favor de poucas alternativas de resposta.

Uma das diretrizes para a escrita de itens EM propostas por Moreno, Martínez e Muñiz (2006) indica que três é o número adequado de alternativas de resposta, embora um número maior também o possa ser. A eficácia dos itens EM com três opções também é defendida por outros peritos na matéria. No Apêndice B referem-se algumas investigações teóricas e outras empíricas cujas conclusões sustentam a utilização de itens EM com duas alternativas de resposta erradas (plausíveis).

Além das propriedades metrológicas dos itens e do teste que justificam os itens EM com três opções, Rodriguez (2005) acrescenta argumentos práticos persuasivos:

- É necessário menos tempo para criar dois distratores plausíveis do que três ou mais;
- Podem ser administrados mais itens com três alternativas de resposta, por unidade de tempo, do que com quatro ou cinco, o que potencia uma maior abrangência do conteúdo a avaliar;
- Mais alternativas de resposta podem resultar no fornecimento de pistas para a resposta certa e para outros itens.

Para criar um teste com itens EM, os peritos recomendam que se construam mais itens do que os que se pretendem ter na versão final do teste - Almeida e Freire (2008) sugerem o dobro dos itens; segundo Haladyna (2004), devem ser construídos 250% do número de itens decidido para o teste. Reunidos todos estes itens, selecionam-se e organizam-se os mais adequados, de acordo com a matriz dos itens previamente definida, e obtém-se a primeira versão do teste.

A qualidade de um teste não depende apenas do rigor técnico da redação dos itens. Depois de aplicado, há que analisar as suas características metrológicas e o respetivo impacto nos seus resultados. Este estudo tem por objetivo averiguar se as medidas proporcionadas pelo teste são suficientemente precisas para, então, se poder examinar se ele mede, de facto, o que se pretende (Monteiro, Afonso, & Pires, 2013).

2.2 Análise de Resultados dos Testes: teorias e procedimentos[4]

A aplicação de um teste subentende o objetivo de obter uma pontuação que represente o nível dos indivíduos, a quem é administrado, num determinado construto latente (um traço ou uma dimensão latente do comportamento de um indivíduo, como os conhecimentos em Matemática após um período de aprendizagem). Os indicadores dos níveis desse construto, uma entidade abstrata, não observável, terão sido identificados numa variável observável (a pontuação) por quem construiu o teste (Prieto, 2010). Dessa identificação depende a qualidade do teste como instrumento de medida.

Pretende-se que um teste efetue uma avaliação objetiva, que os seus resultados sejam generalizáveis e replicáveis (Abell, Springer, & Kamata, 2009), tal como os resultados de um instrumento de medida de uma grandeza física. Mesmo calibrado, um instrumento que mede diretamente um objeto nem sempre dá as mesmas medidas, uma vez que está sujeito à variação de fatores como a temperatura ou a pressão atmosférica do meio em que o objeto se encontra. Por maioria de razão, é de esperar alguma variabilidade dos resultados de um instrumento que faz medições indiretas de algo que varia em função do humor, da confiança ou do cansaço dos indivíduos a quem é aplicado. No entanto, apesar de a precisão das suas medidas estar sujeita a limitações, um teste deve dar uma garantia rigorosa e científica de que mede o que se pretende e que o faz com bastante precisão - só deste modo, quem aplica o teste pode ter confiança nas conclusões que formula, a partir dos resultados, e tomar decisões legítimas (Abreu & Afonso, 2010). Esta garantia requer a constatação de que as características metrológicas do teste são suficientemente boas para assegurarem a qualidade das suas medidas, o que decorre do processo de análise dos resultados do teste.

A análise de um teste, que utiliza métodos qualitativos e quantitativos, pode ser entendida como o controlo da qualidade dos seus resultados. Se não for satisfatória, é na própria análise que se identificam os tópicos a corrigir ou a melhorar, como por exemplo a elaboração dos itens, o número de itens relativos a cada aspeto do construto, o tempo ou a forma de administração do teste.

[4] Parte desta secção foi apresentada por Monteiro, Pires e Afonso (2011) numa palestra inserida na série de seminários sobre Matemática e o Ensino da Matemática promovida pelo Centro de Estudos e Desenvolvimento da Matemática no Ensino Superior da Universidade do Algarve.

Depois de construída a primeira versão do teste, deve ser feito um estudo piloto, com uma amostra representativa da população alvo, para se corrigirem, pelo menos, os erros mais grosseiros. Após essa correção, se necessária, o teste deve ser ensaiado experimentalmente, com uma amostra tão grande quanto possível. A análise dos resultados obtidos indicará se a qualidade do teste é suficiente para ele poder ser aplicado ou se deve ser melhorado.

A sequência *Ensaio Experimental → Registo dos Resultados → Análise dos Resultados → Revisão e Aperfeiçoamento do Teste* deve ser repetida tantas vezes quantas as necessárias, até se obter a versão do teste que apresenta resultados que o certificam como um instrumento de medida estandardizado.

Estudos psicométricos ajudam a estabelecer normas acerca da qualidade dos testes estandardizados, como o de *Joint Committee on Standards for Educational Evaluation* (2012). Neste trabalho, organizou-se uma breve exposição sobre teorias de análise de testes e respetivas metodologias de verificação do rigor e da legitimidade dos seus resultados, que se elaborou a partir de uma revisão da literatura e de um curso sobre *Construção e Validação Estatística de Testes e Exames*, lecionado por Gerardo Prieto (2010).

2.2.1 Teorias de Análise de Testes: modelos e interpretação das medidas

Destacam-se duas grandes teorias adotadas na construção e análise científica dos testes psicométricos: A ***Teoria Clássica dos Testes*** (TCT) e a ***Teoria da Resposta ao Item*** (TRI).

Segundo Urbina (2004), a designação *Teoria Clássica dos Testes* utiliza-se para, em oposição à TRI, mencionar todos os métodos psicométricos tradicionais de aperfeiçoamento e avaliação de testes anteriores à TRI. Admite-se que a TCT foi criada em 1904, com os trabalhos de Spearman, e que em 1950 estava já bem axiomatizada, tendo continuado a evoluir e a ser utilizada até aos dias de hoje (Pasquali & Primi, 2003).

Tendo sido detetadas algumas limitações na TCT, em particular, o facto de o instrumento de medida depender do objeto medido (os resultados do teste dependem dos indivíduos a quem foi aplicado), desde o final da década de 1920 que foram sendo desenvolvidas investigações no sentido de as resolver. Foi, contudo, apenas em meados do século XX que os psicometristas começaram a encontrar as soluções que procuravam e a constituir as bases da TRI, teoria que foi axiomatizada por Birnbaum, em 1968, e por Lord, em 1980 (Pasquali & Primi, 2003).

A ideia primordial da TRI, também conhecida por *Teoria do Traço Latente*, consiste em utilizar uma função matemática que permita prever a probabilidade de sucesso de um indivíduo ao responder a um item, dependente do nível do traço latente do indivíduo e das características do item (Gregory, 2010; Wu & Adams, 2007). Prosseguindo esta ideia, Georg Rasch (1901-1980) apresentou, em 1960, o modelo de Rasch - o primeiro modelo da TRI que permite estimar o nível de um indivíduo num determinado construto latente a partir das características dos itens que compõem o teste[5], não a partir da comparação dos seus resultados com os dos outros indivíduos, como acontece na TCT.

Georg Rasch foi um matemático dinamarquês que iniciou os seus trabalhos na área da Psicometria em 1945, quando ajudou a construir um teste de inteligência estandardizado para o Departamento de Defesa da Dinamarca (Wright, 1998). Rasch recorreu à função logística para definir o seu modelo, tal como tinha sugerido Birnbaum, em 1957. A utilização dos logaritmos, em vez de integrais, simplificou bastante os cálculos exigidos pelas metodologias conhecidas até então, baseadas na função de distribuição normal acumulada, mas, apesar dessa simplificação, os modelos de medida da TRI continuaram mais complexos e menos intuitivos do que os da TCT. Só duas décadas mais tarde, após o desenvolvimento de programas informáticos, como o BICAL ou o BILOG, que fazem os cálculos matemáticos da TRI, é que os modelos desta teoria foram, de facto, aplicados na prática.

A facilidade da análise dos resultados dos testes proporcionada pelo *software* e a publicação de *Applications of Item Response Theory to Practical Testing*, de F. M. Lord, em 1980 impulsionaram a expansão e a consolidação da TRI, a ponto de se poder dizer que esta teoria é a mais usada na Psicometria moderna (Andriola, 2009). A TRI é utilizada, por exemplo, pelos reconhecidos *Programme for International Student Assessment* (PISA) (OCDE, 2012) e *National Assessment of Education Progress* (NAEP) (National Center for Education Statistics, 2011). Em Portugal, o GAVE criou o *Projecto IRT – Item Response Theory* que pretendia, numa primeira fase, proceder à análise dos resultados das provas de aferição e de exames realizados em anos anteriores, tendo por quadro teórico a TRI e, numa fase posterior, a aplicação desta teoria à construção de um banco de itens. No âmbito deste projeto, foram publicados, na página eletrónica do GAVE, relatórios técnicos de Provas de Aferição de Língua Portuguesa e de Matemática dos 1.º e 2.º ciclos de 2008 e 2009 (GAVE, 2012).

[5] O contrário também se verifica, ou seja, conhecido o nível de um indivíduo no construto, é possível estimar as características dos itens a que ele respondeu (Pasquali & Primi, 2003).

Apesar de terem sido limitações da TCT que conduziram ao aparecimento da TRI, esta não substitui a primeira. Enquanto o foco da TCT são as características métricas do teste, no seu todo, a TRI centra-se mais nas características métricas dos itens. Daí que estas teorias se completem e ambas sejam utilizadas para estimar as propriedades dos testes, enquanto instrumentos de medida estandardizados.

São os modelos de medida que, a partir dos resultados de um teste, tornam legítimo representar numericamente o nível dos indivíduos no construto em questão (e também dos itens) de acordo com os indicadores dos vários níveis possíveis, identificados nas suas respostas.

Seguem-se algumas considerações sobre um modelo da TCT e outro da TRI (os utilizados nesta investigação), bem como sobre a interpretação das medidas que eles proporcionam. Pretende-se, assim, facilitar a compreensão dos aspetos fundamentais das metodologias propostas no âmbito de ambas as teorias. Em particular, na análise de um teste de conhecimentos composto por itens dicotómicos, em que uma resposta certa vale um ponto, uma resposta errada ou omissa zero pontos e a pontuação de um indivíduo é igual ao número de itens a que respondeu corretamente.

A TCT e o Modelo da Pontuação Verdadeira

Se um indivíduo fizer o mesmo teste duas vezes, em condições semelhantes, é muito provável que não obtenha a mesma pontuação, porque há sempre alguma quantidade de erro na medida observada. Daí que, com X a representar a pontuação empírica de um indivíduo (a pontuação que ele obtém no teste), V a pontuação verdadeira desse indivíduo no teste (a pontuação que obteria se não houvesse erro de medida) e E o erro de medida, Spearman tenha proposto o modelo linear

$$X = V + E$$

Este modelo, que segundo Muñiz (2010) foi o que se mostrou mais eficaz na TCT, é conhecido por ***modelo clássico*** ou ***modelo da pontuação verdadeira***.

O modelo da pontuação verdadeira admite vários pressupostos ou postulados, ou seja, admite que se verificam determinadas condições básicas. Muñiz (2010) refere os três primeiros postulados que se apresentam a seguir e Prieto (2010) acrescenta o quarto.

Postulados da TCT:

- A pontuação verdadeira é o valor da esperança matemática da pontuação empírica (supõe-se que a pontuação verdadeira de um indivíduo é a média das pontuações que ele obteria ao realizar o teste um número infinito de vezes);
- Não existe relação entre o valor da pontuação verdadeira de um indivíduo e a dimensão do erro que afeta essa pontuação (não existe correlação entre V e E);
- Os erros de medida dos indivíduos numa aplicação do teste são independentes dos seus erros de medida noutra aplicação;
- Os erros de medida distribuem-se normalmente.

No cerne da TCT, além do modelo e dos pressupostos, encontra-se também a seguinte definição:

Testes Paralelos - testes com itens distintos mas que medem exatamente o mesmo.

Em testes paralelos, as pontuações verdadeiras dos indivíduos tendem a ser iguais, assim como as variâncias dos erros de medida.

Não é possível aplicar um teste infinitas vezes a um indivíduo para calcular a sua pontuação verdadeira, tal como não é possível conhecer o erro contido numa pontuação empírica, uma vez que o erro de medida pode dever-se a muitos fatores não controláveis e é causa da instabilidade das medidas observadas. Assim, no modelo da pontuação verdadeira apenas se conhece o valor de X. Contudo, é possível estimar os erros de medida e, daí, avaliar a qualidade das medidas de um teste - quanto menores forem os erros, mais precisas são as pontuações empíricas.

No modelo da pontuação verdadeira, e na TCT, a medida de um indivíduo é a pontuação que ele obtém no teste, o seu desempenho, e as pontuações são interpretadas, ou avaliadas, de forma relativa a partir de normas de grupo (há um grupo normativo, de referência, representativo da população em estudo, a partir do qual se constroem as chamadas normas intragrupo).

No que respeita aos itens, eles são pontuados de forma invariante (0 pontos para resposta errada e 1 ponto para resposta certa) independentemente de o item ter sido acertado por muitos ou por poucos indivíduos, de exigir mais ou menos competência. No entanto, na análise e construção de um teste, a TCT considera as seguintes características metrológicas dos itens, que controlam a qualidade das medidas obtidas com o teste de acordo com os critérios apresentados.

- ***Índice de Dificuldade de um item***: razão entre o número de respostas certas dadas ao item e o total de indivíduos a quem foi administrado o teste.

Num teste ideal, a distribuição dos índices de dificuldade é simétrica, com média igual a $0{,}50$, 80% dos índices estão compreendidos entre $0{,}20$ e $0{,}80$, 10% são superiores a $0{,}80$ e os restantes inferiores a $0{,}20$.

Note-se que quanto maior o índice de dificuldade de um item, que varia entre 0 e 1, mais fácil é o item, uma vez que ele é respondido corretamente por um maior número de indivíduos (são os participantes no teste que determinam a dificuldade dos itens).

Aconselha-se que os itens de um teste estejam ordenados do mais fácil para o mais difícil, sobretudo nos testes que têm limite de tempo e se resolvem com papel e lápis.

- ***Índice de Discriminação de um item***: correlação corrigida entre as pontuações dos indivíduos nesse item e no teste.

O índice de discriminação de um item, que varia entre -1 e 1, é tanto melhor quanto maior for o seu valor, considerando-se aceitável se for superior a $0{,}30$. Uma discriminação negativa é desadequada, podendo ser indicadora de um item mal construído.

Quanto maior for o índice de discriminação de um item, maior é o seu valor para predizer o resultado total de cada indivíduo no teste, mais útil é para distinguir os indivíduos em função do seu nível no construto (um item é discriminativo se indivíduos com níveis diferentes responderam ao item de modo diferente). Dada a importância da capacidade de discriminação de um item, para a grande maioria dos testes ela é considerada, segundo Urbina (2004), a melhor qualidade básica dos seus itens.

A TCT também proporciona indicadores da qualidade de um teste baseados na seleção dos distratores dos itens (alternativas de resposta erradas). Nesse âmbito, são tomados como referência os seguintes critérios:

- Para cada distrator, a correlação entre a sua escolha (0 ou 1) e a pontuação dos indivíduos no teste deve ser inferior a $-0{,}15$;
- Qualquer distrator deve ter sido escolhido por mais de 5% dos indivíduos.

Os valores destes e de outros indicadores das características dos itens e do teste utilizados no âmbito da TCT obtêm-se facilmente com *software* adequado, como o SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*).

A TRI e o Modelo de Rasch

No âmbito da TRI, é possível construir uma escala para medir o nível de um indivíduo num determinado construto latente, por exemplo, na competência em Matemática. A medida do indivíduo, o seu nível no construto, é estimada a partir do seu desempenho ao responder aos itens de um determinado teste, construído para esse efeito. Os itens do teste em questão (o instrumento de medida) terão sido calibrados a partir do padrão de respostas de uma amostra da população alvo. Na base deste procedimento encontra-se uma função matemática, um modelo.

Atualmente são conhecidos mais de 100 modelos da TRI (Prieto, 2010). Para proporcionarem boas estimativas, estes modelos exigem amostras de estudo de maior dimensão do que o modelo da pontuação verdadeira - enquanto a TCT pode funcionar bem com amostras de 200 a 500 elementos, para a TRI recomendam-se amostras com mais de 500 indivíduos (Muñiz, 2010).

Também os postulados da TRI são mais fortes e restritivos que os da teoria clássica. Embora estas suposições sejam empíricas, os modelos proporcionam resultados que sugerem a sua confirmação, ou não. Considerem-se os que são requeridos pela maioria dos modelos (Almeida, Vieira, & Ribeiro, 2009; Andriola, 2009; Muñiz, 2010).

Postulados da TRI:

- *Curva Característica do Item*

A probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um item, que mede um determinado construto latente, depende exclusivamente do nível desse indivíduo no construto medido e das características do item, sendo essa relação formalizada por uma expressão matemática. Fixado um item, o gráfico da função, estritamente crescente, que descreve a relação entre a medida do indivíduo e a probabilidade de ele acertar o item designa-se por Curva Característica do Item (CCI).

- *Unidimensionalidade dos Itens*[6]

Os itens de um teste são unidimensionais, isto é, há apenas um fator responsável pelas respostas dos indivíduos aos itens.

Na realidade, qualquer comportamento humano é determinado por vários fatores e não é provável encontrar dois itens que avaliem exatamente a mesma ação (para resolver um problema de Matemática, além de conhecimentos desta área, o estudante deve saber ler

[6] Embora pouco utilizados, no âmbito da TRI também existem modelos multidimensionais (Andriola, 2009).

e interpretar o enunciado; multiplicar números irracionais e adicionar números inteiros requerem desempenhos diferentes, no entanto, ambos podem ser utilizados para avaliar os conhecimentos dos alunos sobre operações com números reais).

Assim, na prática, o pressuposto da unidimensionalidade verifica-se quando, entre os fatores que têm impacto nas respostas aos itens, um deles tem um contributo relevante. Ou seja, quando é identificado um construto dominante como causa do desempenho dos indivíduos num conjunto de itens. Wu e Adams (2007) consideram que se verifica este pressuposto quando o teste é suficientemente unidimensional para o seu propósito. Além disso, constata-se que os modelos da TRI são bastante robustos face a violações moderadas da unidimensionalidade (Cuesta & Muñiz, 1999, como citado em Muñiz, 2010).

- *Independência Local dos Itens*

Os itens são independentes uns dos outros, ou seja, a resposta que um indivíduo dá a um deles não está condicionada pelas que deu aos outros itens.

Observe-se que quando se verifica a unidimensionalidade também ocorre a independência local - admitindo que os fatores que podem influenciar o desempenho de um indivíduo se mantêm constantes, com exceção do construto a medir, as suas respostas são independentes, porque ele responde exclusivamente em função do seu nível de construto. Por outro lado, se não houvesse independência local, dificilmente haveria unidimensionalidade.

Os modelos unidimensionais mais utilizados são o Modelo de Rasch, o ML1, o ML2 e o ML3 (Andriola, 2009). Todos eles são modelos logísticos, isto é, são definidos através de uma função logística: $f(x) = \frac{\exp(Dx)}{1+\exp(Dx)}, x, D \in \mathbb{R}$.

O Modelo de Rasch e o ML1 são modelos de um parâmetro - a dificuldade dos itens; o ML2, proposto por A. Birnbaum, é um modelo de dois parâmetros - a dificuldade dos itens e o poder discriminativo dos itens; a função do modelo ML3 engloba a dificuldade e a discriminação dos itens e ainda a probabilidade de acerto ao acaso (a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um item, quando o seu nível no traço latente tende para o menor possível do que é esperado para o conseguir).[7]

Fixando, no ML3, o parâmetro da probabilidade de acerto ao acaso em 0, obtém-se o ML2; ao fixar, neste modelo, a discriminação dos itens em 1, obtém o ML1. O modelo de Rasch estima a dificuldade dos itens admitindo, também, que a probablilidade de acerto ao

[7] Embora pouco utilizado, existe um modelo de quatro parâmetros, que inclui os três referidos, e serve para analisar situações em que indivíduos com um nível elevado no construto não conseguem acertar um item.

acaso e a discriminação dos itens são constantes e iguais a 0 e 1, respetivamente. Daí que, algebricamente, os modelos de Rasch e o ML1 sejam muito parecidos (apenas diferem no valor da constante D na função logística: no modelo de Rasch tem-se $D = 1$, enquanto no ML1 se faz $D = 1{,}7$, caso em que a distribuição logística não dista mais de $0{,}01$ da distribuição Normal). Apesar da semelhança dos modelos (que, erradamente, alguns autores não distinguem) o seu princípio é diferente - ao contrário do ML1, o modelo de Rasch não assume que a medida dos indivíduos da amostra tem uma distribuição Normal e estima a medida de cada um individualmente, como referência não utiliza a média das medidas dos indivíduos, mas sim a média das medidas dos itens, dos seus níveis de dificuldade (Linacre, 2012b).

Um modelo ML3 utiliza mais informações sobre as características dos itens que os outros modelos e, por isso, parece ser preferível. Contudo, a opção por um ou outro tipo de modelo não depende só deste aspeto - quanto maior for o número de parâmetros, maior é a exigência no ajustamento dos dados ao modelo, o que implica amostras maiores e testes com mais itens. Esta limitação foi constatada por Almeida, Vieira e Ribeiro (2009) ao testarem o ajustamento dos resultados de uma prova, aplicada a 1918 indivíduos, aos modelos de um, dois e três parâmetros - concluiram que o primeiro se ajustou a todos os itens da prova, o segundo apenas a cerca de metade dos itens e o terceiro não chegou a cumprir as pré-condições.

Na comparação destes modelos da TRI, Harris (1989) refere que, por vezes, o ML2 é preferível ao ML3 devido à dificuldade em estimar o parâmetro do acerto ao acaso e indica algumas vantagens do modelo de Rasch em relação aos outros: o total dos resultados de um teste é uma estatística suficiente para estimar a medida dos indivíduos e o número de respostas corretas dadas a um item é uma estatística suficiente para estimar a dificuldade desse item, pelo que o modelo de Rasch se ajusta muito bem com as pontuações; com este modelo, indivíduos com o mesmo resultado no teste terão a mesma estimativa para a sua medida, o que não acontece com os outros modelos.

Outros psicometristas, como Dickson e Köhler (1996, citados em Linacre, 1996) são a favor do modelo de Rasch. Um dos motivos é por entenderem que, se além da dificuldade, os parâmetros dos itens variarem ao longo da amostra, então é porque o construto foi alterado (existem outros fatores, além do construto a medir, que condicionaram o desempenho dos indivíduos), pelo que as medidas não podem ser comparadas entre amostras e haverá apenas uma vaga noção do que se está a medir.

Atendendo aos argumentos apresentados, e sabendo que o modelo de Rasch permite obter uma aproximação inicial do valor dos parâmetros da discriminação e da probabilidade de acerto ao acaso dos itens (através do cálculo dos índices de discriminação e de acerto ao acaso), optou-se por estudar este modelo com o objetivo de o utilizar na investigação a desenvolver. Considere-se a definição do modelo e a interpretação das medidas.

Sendo $\boldsymbol{P_{ni}}$ a probabilidade de o indivíduo n ter sucesso no item i, isto é, de responder corretamente ao item i, $\boldsymbol{\theta_n}$ o nível do indivíduo n no construto medido e $\boldsymbol{\partial_i}$ o nível de dificuldade do item i, o ***Modelo de Rasch*** define-se por:

$$P_{ni} = \frac{e^{\theta_n - \delta_i}}{1 + e^{\theta_n - \delta_i}}$$

A probabilidade P_{ni} depende de θ_n e de ∂_i, das medidas do indivíduo n e do item i. Ambas são aditivas e estimadas a partir do padrão de respostas dos indivíduos de uma amostra, representativa da população alvo, aos itens de um teste (resultados dos indivíduos e dos itens, os dados empíricos).

No Apêndice C descrevem-se alguns procedimentos para obter estas estimativas, com as quais se espera que os valores observados sejam os mais prováveis de ocorrer. Ou seja, espera-se que as medidas estimadas sejam aquelas que tornam mais verosímeis as respostas dos indivíduos a cada item. No entanto, os valores estimados não passarão de meros números, sem qualquer interesse, se o padrão de respostas não se ajustar ao modelo de Rasch. Assim, é fundamental avaliar o ajustamento dos dados empíricos ao modelo e, para tal, calculam-se e analisam-se estatísticas de ajuste, sobretudo as que se caracterizam após esta apresentação do modelo de Rasch.

Na dedução do modelo de Rasch, que se encontra no Apêndice C, constata-se que: o valor de θ_n é o logaritmo natural da chance[8] de o indivíduo n acertar um item com nível de dificuldade zero; δ_i é o simétrico do logaritmo natural da chance de um indivíduo com nível zero no construto acertar o item i; a diferença $\theta_n - \delta_i$ é igual ao logaritmo natural da chance de o indivíduo n acertar o item i.

Todas esta medidas, assim como o valor de estatísticas, gráficos ou outros resultados associados ao modelo de Rasch, obtêm-se facilmente com programas informáticos como o que se utilizou nesta investigação, o Winsteps (Versão 3.74.0; Linacre, 2012a). Conforme

[8] Se a probabilidade de um indivíduo ter sucesso num item é igual a p, então ele tem uma *chance* de acertar o item igual a $p/(1-p)$.

se lê na página *web* do Winsteps (http://www.winsteps.com/index.htm), este programa baseia-se no modelo de Rasch para medir indivíduos e itens de escolha múltipla e de outros formatos. Começou a ser desenvolvido por Benjamin Wright e John Michael Linacre na Universidade de Chicago, na década de 80 do século passado e apresenta, entre outras, as seguintes características: pode ser articulado com outros, como o Excel; admite a falta de alguns dados; identifica e relata, de várias formas, os dados inesperados; permite efetuar análises com medidas ancoradas a valores pré-estabelecidos; diagnostica a multidimensionalidade e quantifica subestruturas nos dados.

Para analisar os resultados fornecidos pelos programas informáticos, é fundamental saber interpretar o modelo e ter noção do significado dos valores de θ_n e de δ_i.

Relativamente a P_{ni}, uma função de $\theta_n - \delta_i$, crescente, de domínio[9] $\mathbb{R}$ e contradomínio $]0,1[$, considere-se a sua representação gráfica:

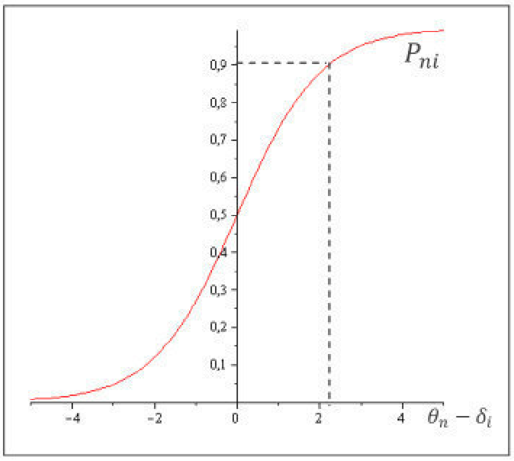


Gráfico 2.1 - Representação gráfica de P_{ni}

Repare-se como um indivíduo tem uma probabilidade de 0,5 de ter sucesso num item cuja dificuldade tem um valor igual ao seu nível no construto medido; se a medida do indivíduo é superior à do item, então terá mais probabilidade de sucesso do que de insucesso no item. Assim sendo, os valores de θ_n e de δ_i podem ser interpretados do seguinte modo:

- θ_n é o valor da dificuldade dos itens até à qual o indivíduo n tem mais probabilidade de ter sucesso do que insucesso;
- δ_i indica a medida de um indivíduo que tem uma probabilidade de 0,5 de acertar o item i.

[9] Na prática, a diferença $\theta_n - \delta_i$ varia entre -5 e 5, ou apenas entre -3 e 3, uma vez que, por exemplo, $P_{ni}(10) = 0{,}99995$ e $P_{ni}(-10) = 0{,}00005$; também é costume ter-se $-3 \leq \delta_i \leq 3$.

Do Gráfico 2.1 também se deduz que, por exemplo, se a diferença entre a medida do indivíduo P e a medida do item I for superior a 2,2, então P tem uma probabilidade maior que 0,9 de responder corretamente a I.

É a equação $ln\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right)=\theta_n-\delta_i$ que define a (mesma) escala de intervalo para a medida dos indivíduos e para a medida dos itens. Daí que a unidade de medida desta escala seja conhecida por *logit* (contração de "log odds unit") e a escala por ***escala logit***, na qual **o zero corresponde ao valor médio da dificuldade dos iten**s (é o parâmetro dificuldade que introduz a métrica, daí ser designado por parâmetro de localização do item). As diferenças $\theta_n-\delta_i$ exprimem-se em *logit*, tal como θ_n e δ_i.

Neste contexto, os valores absolutos de θ_n e δ_i são distâncias em relação à origem, medidas sobre a reta real, sendo a origem o ponto que corresponde ao item com nível médio de dificuldade (zero) e ao indivíduo que tem uma probabilidade de o acertar igual a 0,5.

A representação de θ_n e de δ_i, além de facilitar a perceção das posições relativas dos indivíduos[10] e dos itens, permite visualizar as diferenças entre as medidas das pessoas e as dos itens. Ao serem colocados na mesma escala (representação conjunta) concretizam as diferenças entre pessoas e itens, isto é, a interação entre eles. Considere-se o seguinte exemplo que ilustra as medidas dos participantes num teste e dos respetivos itens - coordenadas dos pontos da reta real que correspondem à posição dos nomes dos indivíduos e dos números dos itens (*It*).

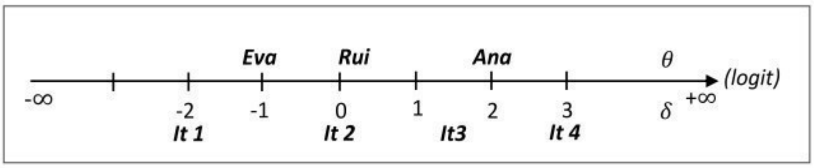


Gráfico 2.2 - Representação conjunta das medidas

Podem fazer-se interpretações do género:

- $\theta_{Ana}-\delta_{It2}=2{,}0\ logit$ e $\theta_{Rui}-\delta_{It2}=0{,}2\ logit$ o que significa que a Ana tem uma probabilidade igual a 0,88 ($P_{ni}(2)$) de acertar o item It2 enquanto o Rui tem uma probabilidade de 0,55 ($P_{ni}(0{,}2)$) de responder corretamente ao mesmo item;

[10] O modelo de Rasch não altera a ordenação dos indivíduos segundo a sua pontuação no teste (Wu & Adams, 2007).

- $\theta_{Eva} - \delta_{It4} = -4\ logit$ e $\theta_{Eva} - \delta_{It1} = 1\ logit$, pelo que a Eva tem apenas uma probabilidade de $0{,}02$ ($P_{ni}(-4)$) de ter sucesso no item It4, mas uma probabilidade de $0{,}73$ ($P_{ni}(1)$) de acertar o item It1;
- O nível da Ana no construto medido é superior ao da Eva em $3\ logit$;
- O item I3 é mais difícil que o item I1, sendo de $3{,}5\ logit$ a diferença entre os respetivos níveis de dificuldade.

Estimado o parâmetro de dificuldade de um item e substituindo o seu valor em P_{ni}, obtém-se um dos elementos fundamentais da TRI - a *Curva Característica do Item* (CCI). Geometricamente, a dificuldade do item é a abcissa do ponto de inflexão da CCI, onde ela tem a inclinação máxima, a discriminação é o declive da reta tangente à CCI no ponto de inflexão e a probabilidade de acerto ao acaso é o $\lim_{\theta \to -\infty} P_{ni}(\theta)$.

O índice de acerto ao acaso de um item calculado através do modelo de Rasch, não é mais do que uma aproximação de $\lim_{\theta \to -\infty} P_{ni}(\theta)$ - o valor da assíntota horizontal, $y = b$, à respetiva CCI, quando o nível dos indivíduos (na variável latente medida) tende para o seu menor valor possível. A literatura sugere que quando $b \geq 0{,}10$ a probabilidade de resposta ao acaso é significativa (Reise & Walter, 2003, como citado em Linacre, 2012b).

Considere-se o Gráfico 2.3 onde se representam as curvas características de dois itens. Atendendo ao que se referiu atrás, observa-se que o Item 1 é mais fácil e que existe mais probabilidade de ter sido respondido ao acaso que o Item 2.

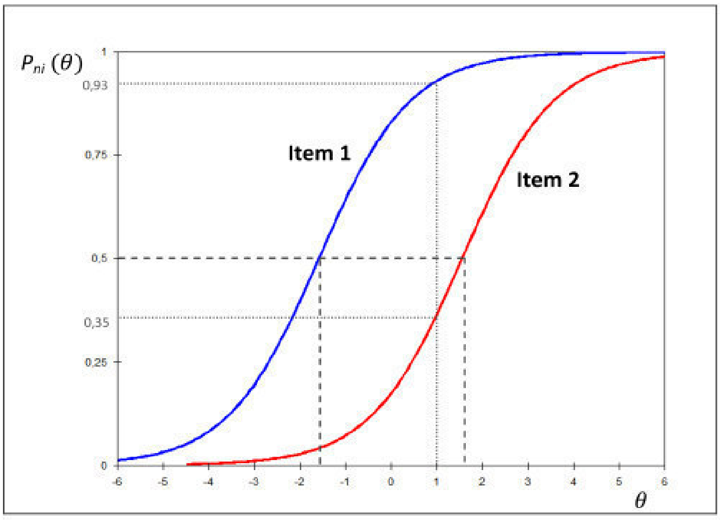


Gráfico 2.3 - Curvas Características de dois itens

A CCI permite visualizar a probabilidade de um indivíduo responder corretamente ao item, em níveis distintos da variável. No caso da CCI do Item 1, por exemplo, um indivíduo com nível igual a $1\ logit$ tem uma probabilidade de $0{,}93$ de ter sucesso no item, enquanto outro com $\theta < -1{,}62$ tem mais probabilidade de errar do que acertar o item. O indivíduo com $\theta = 1$ tem uma probabilidade de $0{,}35$ de acertar o Item2 - teria de ter um nível superior a $1{,}6$ no construto para ter mais probabilidade de sucesso do que de insucesso neste item.

A medição conjunta de indivíduos e itens é, claramente, uma vantagem da TRI em relação à TCT. Outra superioridade da TRI prende-se com o nível de dificuldade dos itens- enquanto na TCT um item é mais fácil ou mais difícil em função do número de indivíduos que o acertaram, na TRI também é considerada a medida dos indivíduos que responderam ao item. Além disso, na TRI, os itens têm valores diferentes para representar o construto em questão, pelo que a medida de um indivíduo não depende apenas do número de itens que acertou mas também de quais acertou (na TCT os itens têm todos o mesmo valor, pelo que pontuações iguais têm o mesmo significado).

Outra vantagem que se destaca do modelo de Rasch, e da TRI, é permitir fazer interpretações referidas à variável - fixado o nível do indivíduo n no construto, as suas respostas aos itens são acontecimentos independentes, pelo que é possível responder a perguntas do género "Qual é a probabilidade de o indivíduo n ter sucesso nos itens i e j e insucesso no item r?" calculando $P_{ni} \times P_{nj} \times (1 - P_{ri})$. Assim, a TRI permite conhecer, por exemplo, a probabilidade de um aluno saber adicionar números reais, que será igual ao produto das suas probabilidades de sucesso nos itens que avaliam este conhecimento.

Por fim, mencione-se uma propriedade do modelo de Rasch considerada, por alguns psicometristas, como sendo a característica mais importante deste modelo que, como referem Wu e Adams (2007), não se encontra em nenhum dos outros modelo da TRI. Esta propriedade consiste no seguinte.

A comparação entre dois indivíduos que resolveram o mesmo teste depende, naturalmente, dos itens utilizados no teste. No entanto, não é influenciada, em particular, pelos itens usados na comparação. Veja-se porquê:

Considere-se um item com medida ∂_i e dois indivíduos com medidas θ_m e θ_n, tais que um tem probabilidade P_{mi} de ter sucesso no item e o outro probabilidade P_{ni}.

De $ln\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right) = \theta_m - \partial_i$ e $ln\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right) = \theta_n - \partial_i$, deduz-se que

$$\theta_m - \theta_n = (\theta_m - \partial_i) - (\theta_n - \partial_i) = ln\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right) - ln\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right),$$ ou seja

$$\theta_m - \theta_n = ln\left(\frac{P_{mi}\,(1 - P_{ni})}{P_{ni}(1 - P_{mi})}\right)$$

De igual modo, também a comparação dos itens não depende, em particular, de nenhum indivíduo que tenha participado no teste (demonstração análoga à anterior).

Estas comparações entre dois objetos (entre indivíduos ou entre itens) independentes das condições em que são feitas (do teste ou da amostra, respetivamente) obedecem ao princípio "a diferença entre dois indivíduos, num atributo, não deve depender dos itens específicos com que é estimada e a diferença entre dois itens não deve depender dos indivíduos específicos que se utilizam para a quantificar", uma propriedade que Rasch (1977) designou por *Objetividade Específica*, como citado em Prieto e Delgado (2003).

Devido à objetividade específica, é possível omitir alguns itens do teste, em diferentes níveis da escala, sem afetar os resultados individuais (as distâncias relativas entre os indivíduos mantêm-se); o mesmo acontece com as diferenças entre a dificuldade dos itens se o teste for aplicado a outro grupo de pessoas, nas mesmas condições do primeiro.

Esta propriedade também tem reflexos na recolha da amostra para fazer o ensaio de um teste - se a análise for feita com o modelo de Rasch, a amostra não precisa ser tão representativa da população como se fosse feita só pela TCT.

Refira-se ainda que a objetividade específica facilita a comparação das medidas obtidas pelos indivíduos em testes diferentes e a construção de um banco de itens - coleções organizadas de itens de teste calibrados, destinadas a desenvolver, definir e quantificar um tema comum, proporcionando uma definição operacional de variável (Wright & Bell, 1984); os itens são selecionados em função do teste que se pretende construir e o seu nível de dificuldade, já conhecido, é utilizado para estimar o nível dos indivíduos no construto em questão).

Quando se utiliza o Modelo de Rasch, é imprescindível saber se os resultados do teste se ajustam ao modelo. Caso não se ajustem, os valores estimados não correspondem às medidas que se pretendem, são apenas números, e não se tira qualquer vantagem do modelo.

Ajustamento dos dados empíricos ao modelo de Rasch

Existem diversos fatores que contribuem para o não ajustamento dos dados empíricos ao modelo de Rasch, como a multidimensionalidade, a dependência dos itens e as respostas dadas ao acaso. Daí que se tenham definido diferentes estatísticas de ajuste que detetam diferentes violações ao modelo.

As estatísticas de ajuste mais comuns são baseadas nos ***resíduos*** - diferenças entre as respostas observadas e as esperadas. Representando a resposta dada pela pessoa n ao item i por X_{ni}, pode-se escrever o resíduo como $\boldsymbol{X_{ni} - E(X_{ni})}$. Considere-se a definição destas estatísticas.

Sendo P_{ni} a probabilidade de o indivíduo n responder corretamente ao item i e porque os itens são dicotómicos, tem-se

$$E(X_{ni}) = 1 \times P_{ni} + 0 \times (1 - P_{ni}) = P_{ni}$$
$$Var(X_{ni}) = (0 - P_{ni})^2(1 - P_{ni}) + (1 - P_{ni})^2 P_{ni} = P_{ni}(1 - P_{ni})$$

Assim, os resíduos estandardizados, que quantificam a imprevisibilidade da observação, definem-se por:

$$Z_{ni} = \frac{X_{ni} - P_{ni}}{\sqrt{P_{ni}(1 - P_{ni})}}$$

O ajustamento do item i ao modelo é quantificado pelas seguintes estatísticas, admitindo que o teste foi administrado a N indivíduos e que W_{ni} representa $Var(X_{ni})$.

$$\boldsymbol{Outfit} = \frac{\sum_{n=1}^{N} {Z_{ni}}^2}{N} \qquad \boldsymbol{Infit} = \frac{\sum_{n=1}^{N} {Z_{ni}}^2 W_{ni}}{\sum_{n=1}^{N} W_{ni}}$$

De modo análogo, definem-se as estatísticas de ajuste para cada um dos indivíduos que respondeu ao teste com L itens.

O *Outfit* é bastante sensível a *outliers*, a respostas muito improváveis de indivíduos a itens com nível de dificuldade afastado do seu nível no construto medido e vice-versa. Por exemplo, uma resposta certa a um item difícil dada por um indivíduo com pontuação baixa - o padrão 1110000001, com os itens seriados por ordem crescente de dificuldade, onde 1 indica resposta certa e 0 resposta errada, é absurdo[11].

O *Infit*, um indicador mais robusto que o *Outfit*, é sensível a um padrão de respostas inconsistente com respostas inesperadas de indivíduos a itens com medidas próximas da sua e vice-versa, como acontece no padrão 1101010110.

O valor esperado destas estatísticas é igual a 1. Por isso, a diferença entre 1 e os valores de *Outfit* e de *Infit*, de um indivíduo ou de um item, é um indicador do ajuste dos objetos ao modelo. Por exemplo, um valor de 1,3 significa que há mais 30% de variação nos dados observados do que a que o modelo prediz, ou seja, do que se esperava se os

[11] Note-se que enquanto as respostas incoerentes passam despercebidas na TCT, com o modelo de Rasch elas são detetadas e identificadas (sabe-se exatamente quem foi o indivíduo que respondeu a um determinado item de forma incoerente com as outras respostas que deu).

dados e o modelo fossem perfeitamente compatíveis (Bond & Fox, 2007). Consoante a amplitude do intervalo, centrado no 1, que contém os valores de *Outfit* e de *Infit,* registam-se conclusões acerca desta compatibilidade.

Para avaliar a *Precisão e Desajuste* dos dados, Linacre (2011) propõe a seguinte interpretação para os valores de *Outfit* e *Infit*:

- Entre 0,5 e 1,5: valores desejáveis para medir de forma ótima;
- Menor que 0,5: o padrão de respostas é determinístico (é muito previsível);
- Entre 1,5 e 2,0: desajuste moderado (mas não altera as medidas);
- Superiores a 2,0: revelam um grande desajuste.

Considera ainda que os valores de *Outfit* e *Infit* indicam ajustamento dos dados se variarem entre 0,7 e 1,3. Para decisões a nível individual, a amplitude deste intervalo deve ser menor: de 0,8 a 1,2.

Outros autores, como Smith, Schumacker e Bush (1998), citados em Prieto e Delgado (2003), sugerem intervalos que dependem do número de participantes:

- De 0,7 a 1,3 para amostras inferiores a 500 indivíduos;
- De 0,8 a 1,2 para amostras com 500 a 1000 indivíduos;
- De 0,9 a 1,1 para amostras com mais de 1000 indivíduos.

Os valores de *Outfit* e *Infit* têm uma distribuição do tipo Qui-Quadrado. O Winsteps identifica-os por **MNSQ** (mean square) e, para cada um deles, calcula uma estatística que é a probabilidade associada à hipótese nula "*Estes dados ajustam-se ao modelo*". Representadas por **ZSTD** (standardized like a Z-score), estas estatísticas indicam desajuste quando o seu valor absoluto é superior ou igual a 1,96 (na prática, procuram-se valores absolutos superiores ou iguais a 2 para indicar desajustes ao modelo, estatisticamente significativos). A consideração destes indicadores é importante na análise do ajustamento dos dados ao modelo, na medida em que eles têm em conta a dimensão da amostra.

Outro indicador do ajustamento dos dados ao modelo é a aproximação entre o valor observado e o valor esperado da correlação pontuação-medida: correlação entre as respostas dadas pelos indivíduos a um item (observadas ou esperadas) e as respetivas medidas estimadas. Também a comparação, em cada item, entre a percentagem de dados que diferem menos de 0,5 dos seus valores esperados e a que se espera que difira quando o modelo se adequa aos dados (coincidência do modelo) dá informações acerca do ajustamento dos dados empíricos ao modelo de Rasch.

Tal como o índice de acerto ao acaso, o índice de discriminação dos itens também proporciona informação acerca do ajuste dos dados ao modelo. Apesar de o modelo de Rasch admitir que os itens têm o mesmo poder de discriminação, com índice igual a 1,0, ele estima a discriminação como um tipo de estatística de ajuste - valores maiores que 1,0 significam que o item discrimina mais do que o esperado, para um item com a sua dificuldade, entre altos e baixos desempenhos dos indivíduos, sendo contrária a interpretação no caso dos itens com valores inferiores a 1,0.

O Winsteps proporciona vários outros resultados sob a forma de tabelas, gráficos e figuras que, quando interpretados em conjunto, ajudam a decidir se os dados estão suficientemente ajustados ao modelo. Esta decisão depende da finalidade do teste, em particular do nível de exigência das inferências que se pretendem fazer com base nos resultados que se obtêm quando ele é aplicado.

Identificados os itens e os indivíduos que menos se ajustam ao modelo, verifica-se facilmente o seu efeito, no ajustamento dos dados ao modelo, fazendo nova estimativa das medidas depois de retirar os itens ou os indivíduos "suspeitos" da amostra. Não que isso signifique que a melhor opção seja a sua exclusão definitiva, particularmente a dos itens - os itens desajustados devem ser examinados e procuradas fontes de desajuste para decidir se eles devem ser rejeitados ou reconstruídos porque, como advertem Wu e Adams (2007), se corre o risco de perder o contributo favorável de um item à qualidade do teste, no global, caso se opte pela sua eliminação.

Observe-se que o facto de as estatísticas de ajuste sugerirem o ajustamento dos dados ao modelo, não é suficiente para concluir que as medidas dos indivíduos estimadas pelo modelo sejam aceitáveis, que sejam bons indicadores do nível dos indivíduos no construto latente em questão. Esta conclusão só pode ser formulada depois de se ponderarem, em conjunto, as estatísticas de ajuste com as que se obtêm da análise dos itens e com resultados de outras análises ao teste, como as que se descrevem na secção seguinte.

2.2.2 Características Metrológicas dos Resultados de um Teste

A análise de um teste é fundamental para ter a noção do nível da qualidade dos seus resultados, quer em relação ao rigor com que medem, quer à adequação daquilo que medem ao que se pretende medir. Neste âmbito, a pesquisa incide sobre diversos aspetos, uns quantificáveis e outros de natureza qualitativa, alguns referem-se aos itens e outros ao teste, no seu todo. Segue-se uma breve referência aos principais aspetos a serem considerados num teste de conhecimentos e ao modo como devem ser analisados. Parte das metodologias são próprias da TCT e outras só são possíveis com a TRI. Os procedimentos apresentados relativos à TRI têm por base o modelo de Rasch e inserem-se na chamada análise de Rasch.

Fiabilidade

Se um teste de avaliação académica for aplicado em momentos diferentes aos mesmos indivíduos que, entretanto, não tiveram oportunidade de melhorar o seu nível na variável medida, devem obter-se resultados iguais ou muito aproximados, ou seja, espera-se estabilidade dos resultados. O teste também deve ter consistência interna, isto é, deve haver um elevado grau de coerência entre as respostas dadas a cada um dos itens do teste, que se apresentam como um todo homogéneo. Dito de outro modo, um teste deve ter ***fiabilidade*** (ou ***precisão***) - uma característica dos resultados dos testes que sugere que eles são suficientemente consistentes e livres de erros de medida para serem úteis (Urbina, 2004).

Na TCT, a fiabilidade dos resultados de um teste é quantificada através do ***coeficiente de fiabilidade***, que se define como sendo o coeficiente de correlação entre duas medidas paralelas (resultados de dois testes paralelos). Atendendo a que as pontuações verdadeiras são independentes dos erros, a variância observada é igual à soma da variância verdadeira com a do erro. Como em testes paralelos as pontuações verdadeiras são iguais e as variâncias dos erros também, deduz-se que

$$Coeficiente\ de\ Fiabilidade = \frac{Variância\ Verdadeira}{Variância\ Observada}$$

Assim, este coeficiente pode ser interpretado como sendo a proporção da variância verdadeira na variância observada.

Sendo a variância verdadeira um valor desconhecido, o coeficiente de fiabilidade é uma medida empírica. Para obter uma estimativa deste coeficiente são utilizados vários métodos, sendo os mais comuns:

- *Teste-reteste*: correlação entre os resultados de duas aplicações do teste à mesma amostra;
- *Bipartição*: correlação entre os resultados dos itens do teste, obtidos numa amostra, agrupados em duas metades semelhantes[12];

[12] Como a fiabilidade de uma metade dos itens é inferior à da totalidade, sobretudo se houver poucos itens, é usual corrigir esta subavaliação da fiabilidade através do cálculo do coeficiente de *Spearman-Brown*: $2R_{12}/(1+R_{12})$, com R_{12} o coeficiente de fiabilidade calculado com as duas metades.

- *Formas-paralelas*: correlação entre os resultados do teste e os de um outro de conteúdo paralelo, obtidos na mesma amostra;
- *Coeficiente Alpha de Cronbach* (α) é a média de todos os coeficientes de fiabilidade que se obteriam a partir de todas as divisões do teste em duas metades (só deve ser utilizado se os itens forem homogéneos[13]);

  $\alpha = \frac{n}{n-1} \times \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i^2}{S_X^2}\right)$, com n o número de itens, S_i^2 a variância dos resultados no item i e S_X^2 a variância dos resultados no teste
- *Coeficiente Alpha de Cronbach estandardizado:* é definido por $\frac{n\bar{r}}{1+(n-1)\bar{r}}$, com $\bar{r}$ a média dos $\frac{n(n-1)}{2}$ coeficientes de correlação entre itens distintos.

Para itens dicotómicos, também se utiliza o *Coeficiente de Kuder-Richardson* (R_{K-R20}) que é um caso particular do *Coeficiente Alpha de Cronbach.* Este, mais geral, é aplicável aos casos em que as respostas aos itens se distribuem por uma escala ordinal.

Os métodos *Teste-reteste* e *Formas-paralelas* são mais adequados para avaliar a estabilidade dos resultados. Os outros são preferíveis para estimar a consistência interna ou a fiabilidade no seu sentido mais geral, uma vez que a estabilidade dos resultados é tanto maior quanto mais elevada for a sua consistência interna (Almeida & Freire, 2008). Os *Coeficiente de Kuder-Richardson* e *Coeficiente Alpha de Cronbach* são mesmo identificados por ***índices de consistência interna***.

Os valores aconselháveis para os índices de consistência interna dependem da importância das decisões que se vão tomar com base nos resultados do teste:

- Entre 0,70 e 0,80, se as decisões forem a nível de grupo;
- Entre 0,80 e 0,90 se as decisões forem a nível individual.

Segundo Almeida e Freire (2008), os valores dos índices de consistência interna abaixo de 0,60 são inaceitáveis e se forem superiores a 0,90 deve ser ponderada a redução do número de itens ou verificar se eles não são demasiado homogéneos (redundantes) na sua formulação.

O valor do coeficiente de fiabilidade depende de diversos fatores, como o número de itens do teste ou a variabilidade da amostra - quanto maiores, maior é a fiabilidade. Tam-

[13] Se os itens de um teste forem diversos, em termos de dimensionalidade, este coeficiente não é adequado para medir a fiabilidade do teste - os itens homogéneos devem ser agrupados e calcular a consistência interna de cada grupo.

bém quanto maior for o poder discriminativo dos itens (indicador de um grupo pouco homogéneo) maior é o valor do *Coeficiente Alpha de Cronbach*. Daí a sugestão de se analisar o efeito, neste coeficiente, de excluir um item com discriminação baixa para decidir se esse item deve, ou não, ser melhorado ou eliminado do teste.

Na TCT admite-se que o teste mede com a mesma fiabilidade todos os indivíduos avaliados (porque o desvio padrão dos erros é invariante). Este facto não corresponde à realidade, pois existe a evidência empírica de que os testes não medem todos os indivíduos com a mesma precisão, dependendo esta, em grande parte, do nível dos indivíduos na variável medida. Ao fazer depender deste nível a estimação da fiabilidade de um teste, a TRI superou mais uma limitação da TCT (Muñiz, 2010).

Na análise de Rasch, existem estatísticas que medem a precisão de cada uma das medidas estimadas, indicando o grau com que elas podem ser replicadas. Com W_{ni} a variância dos valores observados, num teste com L itens aplicado a N indivíduos, essas estatísticas definem-se por:

- Erro padrão do modelo (*Erro do Modelo*) para a medida θ_n[14]: $SE(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{L} W_{ni}}}$

- Erro padrão do modelo (*Erro do Modelo*) para a medida δ_i: $SE(\delta_i) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} W_{ni}}}$

Estas estatísticas são calculadas partindo do princípio que os dados se ajustam ao modelo de Rasch. Admitindo que desajustes imprevisíveis nos dados contradizem o modelo, é calculado, para θ e para δ, o *Erro Real:*

$$Real\ SE = SE \times Max\left(1{,}0; \sqrt{Infit\ MNSQ}\right)$$

O *Verdadeiro Erro*, desconhecido, está algures entre o *Erro Real* e o *Erro do Modelo*. Nos relatórios finais de testes com resultados ajustados ao modelo de Rasch é indicado o valor de *Erro do Modelo*.

A variância dos valores observados, W_{ni}, também avalia a qualidade dos dados - designa-se por *Informação do Item* (I_i) e indica a quantidade de informação dos dados para estimar a dificuldade do item i (a máxima informação do item corresponde ao ponto em que $\theta_n = \delta_i$).

A função que a cada valor de θ faz corresponder a soma das informações dos L itens do teste (a *Informação do Teste)* designa-se por *Função Informação do Teste.*

[14] Se, por exemplo, o *Erro do Modelo* de um indivíduo com $\theta = 0$ é igual a 0,4, isso significa que há cerca de 68% de certeza de que a medida exata está entre $-0{,}4$ e 0,4, ou uma certeza de 95% em como está entre $-0{,}8$ e 0,8.

No âmbito da análise de Rasch estima-se a fiabilidade das medidas dos indivíduos (equivalente à fiabilidade do teste na TCT) e a fiabilidade das medidas dos itens. Os valores obtidos são indicadores de, respetivamente, replicabilidade da ordenação dos indivíduos, se a mesma amostra fizer um teste paralelo, e replicabilidade da posição dos itens, se eles forem dados a outra amostra, da mesma dimensão, com o mesmo comportamento (Bond & Fox, 2007).

A estimativa do coeficiente de fiabilidade é baseada no mesmo conceito da TCT: *variância verdadeira/variância observada*.

A *variância observada* dos indivíduos $\left(SD_{In}{}^{2}\right)$ e a dos itens $\left(SD_{It}{}^{2}\right)$ é a variância do total das medidas dos indivíduos e dos itens, respetivamente.

Elevando *Erro do Modelo* ao quadrado (SE^2) obtém-se o *erro de variância* da respetiva medida. A média destes erros, relativos aos indivíduos ou aos itens, é o *erro de variância do modelo* ($RMSE_{In}{}^{2}$e $RMSE_{It}{}^{2}$, respetivamente).

Assim, os indicadores de quão bem se podem diferenciar os indivíduos e os itens na variável medida, ou seja, os ***Índices de Fiabilidade*** (*do modelo*) dos ***indivíduos*** e os dos ***itens***, são definidos, respetivamente, por:

$$IF_{In} = \frac{SD_{In}{}^{2} - RMSE_{In}{}^{2}}{SD_{In}{}^{2}} \quad \text{e} \quad IF_{It} = \frac{SD_{It}{}^{2} - RMSE_{It}{}^{2}}{SD_{It}{}^{2}}$$

O Winsteps calcula um limite inferior e um limite superior para o *Índice de Fiabilidade Verdadeiro* - o inferior é o da *Real Fiabilidade* e o superior é o da *Fiabilidade do Modelo***.** Quando as fontes de ruído são eliminadas dos dados, isto é, quando os dados ficam bem ajustados ao modelo, os índices de fiabilidade do modelo e o verdadeiro tendem a aproximar-se.

Um valor elevado do índice de fiabilidade dos indivíduos significa que o desempenho dos indivíduos está suficientemente distribuído, alguns têm pontuações altas e outros baixas, e que se pode esperar consistência dessas inferências.

Segundo Linacre (2011), um valor deste índice superior a 0,9 sugere que o teste discrimina a amostra em 3 ou 4 níveis; um valor próximo de 0,8 aponta para 2 ou 3 níveis; quando se aproxima de 0,5 existe apenas 1 ou 2 níveis.

A interpretação do índice de fiabilidade dos itens é análoga - um valor elevado indica que os itens estão suficientemente espalhados, em oposição a aglomerados (uns são mais difíceis e outros fáceis) e que estas inferências são consistentes (Bond & Fox, 2007). Se este índice tiver um valor baixo, então é porque a amostra é demasiado pequena para estimativas estáveis.

Como os índices de fiabilidade variam entre 0 e 1, eles não são sensíveis a erros de medida pequenos. Daí que Ben Wright tenha criado os ***Índices de Separação*** de indivíduos e itens (Linacre, 2011):

$$IS_{In} = \sqrt{\frac{IF_{In}}{1 - IF_{In}}} \qquad \text{e} \qquad IS_{It} = \sqrt{\frac{IF_{It}}{1 - IF_{It}}}$$

A interpretação destes índices é análoga à dos de fiabilidade mas, por se exprimirem em unidades de erro padrão, são mais fáceis de interpretar - o quadrado do seu valor é igual à porção de variância verdadeira que não é explicada pelo modelo de Rasch[15].

Ter bons indicadores da fiabilidade dos resultados de um teste não assegura a sua qualidade. Também é fundamental garantir que as inferências feitas a partir desses resultados são válidas, porque eles medem o que se pretende. Para isso, têm de ser analisados sob outra perspetiva.

Validade

De acordo com o documento *Standards for Education and Psychological Testing* (AERA, APA, NCME, 2014), a ***validade*** dos resultados de um teste refere-se à legitimidade científica das inferências que se fazem a partir das suas pontuações. Designa-se por *validação* o processo de acumulação de provas empíricas para justificar essas inferências, a interpretação, a utilização, as decisões tomadas com base nos resultados, etc..

O foco da validação não é o teste, mas sim a interpretação das suas pontuações em relação a um objetivo ou aplicação concreta (os resultados podem ter validade para um propósito e não ter para outro). Como as utilizações e as interpretações podem ser muito variadas, as fontes de validação são diversas e a sua importância varia em função dos objetivos da medição. Considerem-se de seguida as mais relevantes[16], de acordo com Prieto e Delgado (2010), tendo presente que a validade não obedece ao princípio do "tudo ou nada" - ela é gradual, importando que a informação dada por um teste ajude nas decisões e reduza erros de inferência que poderiam ser cometidos se fossem apenas consideradas as leis do acaso (Almeida & Freire, 2008).

[15] $IS^2 = \frac{SD^2 - RMSE^2}{RMSE^2}$

[16] Opta-se por uma classificação clássica das técnicas de validação - Conteúdo, Critério e Construto - ainda que reconhecendo ser possível equacionar o estudo da validade de formas alternativas, tal como é feito, por exemplo, no âmbito das edições mais recentes dos *Standards for Educational and Psychological Testing* (AERA, APA, & NCME, 1999, 2014).

- ***Validade de Conteúdo***

Os itens de um teste devem representar as diferentes facetas das manifestações do construto. O grau de ajustamento dos itens ao conteúdo e objetivos fixados é fonte de validação. Segundo Almeida e Freire (2008), esta adequação, dos itens ao conteúdo a avaliar, obedece aos critérios da *relevância* e da *representatividade* dos itens - as definições mais importantes do construto devem ser focados por itens do teste (*relevância*) e os conteúdos que mais se repetem nos itens devem corresponder às definições mais comuns do construto (*representatividade*).

Também são foco da validação as condições de aplicação do teste, como o conteúdo das instruções, o material da prova, o tempo de realização, etc.

Para apreciar a qualidade do conteúdo de um teste, o processo mais comum consiste em recorrer à opinião de peritos, sobretudo no domínio educacional. Também se utilizam métodos qualitativos baseados em arquivos, na observação direta e em entrevistas aos participantes na prova, principalmente para analisar as condições da aplicação.

- ***Validade Relativa a um Critério***

No processo de validação de um teste, é importante analisar o grau de relacionamento que é possível obter entre os resultados obtidos na prova (preditores) e o desempenho dos participantes em critérios externos, supostamente associados ou dependentes da dimensão psicológica ou académica que a prova avalia (Almeida & Freire, 2008). O critério externo é uma medida da variável que se deseja prognosticar (o aproveitamento escolar, por exemplo) e deve ser fiável, objetivo, suficiente e representativo do construto de interesse.

Para quantificar a relação entre os resultados do teste e o(s) critério(s) externo(s) selecionado(s) recorre-se à análise estatística: correlação entre as respetivas medidas, regressão linear, teste *t-Student*, análise de variância, etc.. Neste tipo de análise, é fundamental verificar se a utilidade preditiva é invariante em grupos distintos de pessoas.

- ***Validade de Construto***

A validade de um instrumento de medida é tanto maior quanto maior for o grau em que se conhece aquilo que ele está a medir. Com a análise da estrutura interna de um teste pretende-se verificar, empiricamente, se os itens estão ajustados à dimensionalidade prevista por quem o construiu, ou seja, se as respostas aos itens estão coerentes com a estrutura interna baseada na teoria que o teste operacionaliza.

No domínio académico, os testes são aplicados aos estudantes para medir o seu nível de conhecimentos numa determinada área de conteúdo, mais ou menos específica. Daí que se pretenda que as respostas aos itens se devam apenas a um construto - o conhecimento do conteúdo sob avaliação. Deseja-se, portanto, que o teste estime só uma medida, que seja unidimensional.

Na realidade, há sempre mais do que um fator a influenciar as respostas aos itens de um teste. No limite, podem existir tantos fatores quantos os itens. Ao analisar a unidimensionalidade dos itens, procura-se saber se eles contribuem para um fator dominante ou se acusam mais do que um fator a condicionar, de modo significativo, o desempenho dos indivíduos quando responderam ao teste.

Há vários procedimentos para analisar a unidimensionalidade. No entanto, nenhum deles garante, em absoluto, que ela se verifica - qualquer estudo deste tipo é orientado para procurar fortes indicadores de que existe um principal fator responsável pelas respostas dos indivíduos. Caso se encontrem, as medidas proporcionadas pelo teste corresponderão ao nível dos indivíduos nesse fator.

O modelo de Rasch pressupõe que existe unidimensionalidade dos itens. Alguns autores consideram, simplesmente, que a unidimensionalidade é confirmada com o ajustamento dos dados empíricos ao modelo. Outros entendem que as estatísticas de ajuste não são suficientes para detetarem esta violação ao modelo, por serem demasiado locais, e que também se deve efetuar uma Análise de Componentes Principais dos resíduos. Segundo alguns peritos, além das informações proporcionadas pela análise de Rasch, deve ser feita a Análise Fatorial Exploratória (no âmbito da TCT) - uns antes de exportar os dados para o Winsteps, ou outro programa informático análogo, e outros depois de observar os resultados fornecidos pelo programa. Como mostra a revisão da literatura, nos últimos anos esta matéria tem sido objeto de intensas discussões entre os psicometristas, pelo que se encontram diferentes procedimentos para a estudar (Christensen, Engelhard, & Salzberg, 2012; Tennant & Pallant, 2006).

No âmbito da Análise Fatorial Exploratória procura-se identificar e interpretar os fatores (dimensões) que mais contribuíram para as respostas dadas aos itens, estimados a partir das correlações observadas entre os itens.

Quando se aplica um método de Análise Fatorial Exploratória, a informação redundante é reduzida, ou mesmo eliminada, com perda mínima de informação. Esta simplificação consegue-se com a redução do número de variáveis iniciais (igual ao número de itens, indicadores de diferentes fatores) aos fatores mais importantes que lhes são comuns.

Segundo Maroco (2010), um dos métodos mais utilizados neste procedimento é o Método das Componentes Principais - as componentes principais são representadas pelos vetores próprios, ortonormados, associados aos valores próprios da matriz de variâncias-covariâncias das variáveis originais (matriz de correlações populacionais, da qual a matriz de correlações amostrais é uma estimativa, no caso de as variáveis estarem estandardizadas); as componentes principais não são correlacionadas entre si e resumem a informação das variáveis originais medidas, das quais são uma combinação linear; cada coeficiente λ_{ij} destas combinações designa-se por *peso* da variável j na componente i, sendo estimado de modo a que verifique determinadas condições.

Ao dividir o valor próprio de uma componente pelo total de itens do teste, obtém-se a porção da variância total observada na amostra que a componente explica (é desejável que o total da variância explicada pelas componentes seja superior a 50%). Como refere Maroco (2010), o número mínimo de componentes principais necessário para explicar a variância total é decidido por aplicação de duas regras: por defeito, a componente é considerada necessária se o seu valor próprio é superior a 1 (critério de Kaiser); no *Scree Plot* (gráfico com uma linha poligonal aberta que une os pontos que representam os pares ordenados (componente, valor próprio) com as componentes organizadas por ordem decrescente de relevância) devem ser selecionadas as componentes que correspondem aos pontos da linha até esta ser quase horizontal.

No âmbito da Análise Fatorial, cada variável original é definida como a soma de um fator específico com uma combinação linear dos fatores comuns. Na tentativa de identificar os fatores que têm um contributo relevante para as respostas dadas aos itens, aplica-se o método das componentes principais à matriz das correlações das variáveis originais com uma estimativa inicial dos elementos principais. De seguida, aplicam-se as regras anteriores para reter alguns fatores (componentes principais) que se escrevem como combinação linear das variáveis iniciais. Para obter uma solução interpretável, multiplica-se a matriz dos pesos das variáveis nos fatores por uma matriz ortogonal (matriz de rotação). Espera-se encontrar uma estrutura em que os pesos, designados por *saturações fatoriais,* de um conjunto reduzido de variáveis sejam, em valor absoluto, o maior possível num desses fatores e o menor possível nos outros (Maroco, 2010), a partir da qual seja possível identificar a natureza dos fatores retidos.

Um item é tão bom indicador de um fator (um item avalia tão bem uma dimensão) quanto maior o seu contributo para esse fator - considera-se que o contributo é razoável quando o valor absoluto da saturação do item no fator é superior a 0,30 e que o item representa bem o fator quando a saturação é, em valor absoluto, superior a 0,50 (Almeida & Freire, 2008). Atribui-se um significado a cada fator a partir da análise dos itens que têm a sua maior saturação nesse fator (que saturam nesse fator).

Com a Análise de Componentes Principais dos resíduos faz-se uma abordagem diferente aos dados para avaliar a dimensionalidade - entre os resíduos não explicados pelo modelo, procuram-se componentes que revelem contrastes entre fatores opostos, suficientemente fortes para se admitir a existência de mais do que uma dimensão.

A análise incide nas relações residuais entre itens, onde se pesquisa a presença de uma componente que explique uma proporção significativa da variância não explicada pelo modelo. Para tal, tenta-se negar a hipótese de que os resíduos são ruído aleatório. Este ruído será devido a grupos de itens com padrões inesperados, que não estão de acordo com as medidas de Rasch. Provavelmente, cada grupo partilha um atributo comum - uma dimensão diferente. Neste caso, será conveniente separar os itens em testes diferentes, ou construir novos testes, um para cada dimensão (Linacre, 2012b).

Se a segunda dimensão não tiver a força de, pelo menos, dois itens para estar acima do nível de ruído e a percentagem da variância explicada pelo modelo for moderadamente alta (aceitável se maior de 20% e ótima se maior de 50%), confirma-se o pressuposto da unidimensionalidade.

Um destes métodos de observação dos dados para procurar indicadores de que existe unidimensionalidade dos itens poderá, nalguns casos, dar informações que não são detetadas pelo outro método. Daí que alguns psicometristas aconselhem ambas as análises.

No âmbito da análise de Rasch e no estudo da unidimensionalidade de uma prova também se examina o ***Funcionamento Diferencial dos Itens*** (DIF). Um item tem DIF se a diferença entre os parâmetros de dificuldade de dois grupos distintos (de género, de cultura ou outros) é superior a 0,50 *logit* e for significativa. Se os itens não apresentarem DIF, o teste terá uma validade semelhante em grupos distintos. No caso de um item revelar DIF, deve-se investigar se a diferença de respostas é provocada por diferenças no construto ou por variáveis externas, para saber se a validade do teste varia em função dos grupos. Para analisar estas diferenças entre grupos devem ser excluídos os itens com DIF - às vezes, eliminando um item a validade dos resultados passa a ser a mesma para todos os grupos; outras vezes, resolve-se o problema dividindo um item em dois.

Ainda sobre a recolha de provas da validade dos resultados de um teste, com a análise de Rasch e utilizando o Winsteps, apresenta-se um procedimento sugerido por Linacre (2012b). Trata-se de uma primeira abordagem à qualidade dos dados empíricos:

- Antes de fazer a análise dos resultados, escrever os itens pela ordem crescente de dificuldade que se espera para os indivíduos a quem se aplicou ou vai aplicar o teste. Se o gráfico da representação conjunta (das medidas dos indivíduos e dos itens) mostrar os itens na mesma ordem, então o teste mede o que se pretende medir.
- Antes de analisar os resultados, identificar as caraterísticas que se esperam de um indivíduo com nível elevado no construto a medir e as de um com nível baixo. De preferência, estas características devem ser codificadas e etiquetadas aos participantes na base de dados. Se o gráfico da representação conjunta mostrar os indivíduos ordenados, por nível no construto, de acordo com o que se esperava, então o teste tem utilidade preditiva.

Tal como um atirador ao alvo só é considerado bom se acertar sempre no centro do alvo, também um bom teste deve ser, simultaneamente, preciso e adequado à medição de um construto - de nada serve se não mede o que se pretende, mesmo que meça com precisão, ou se os seus resultados são devidos ao acaso, mesmo que seja aparentemente legítimo. Daí que se analise a fiabilidade, uma questão relativa à qualidade dos dados, e a validade, que se refere à qualidade das inferências que a partir deles se fazem (Zumbo, 2007).

Qualquer uma destas características metrológicas de um teste pode ser avaliada através da TCT. No entanto, como na TRI a informação dada pelas respostas de cada indivíduo é mais precisa, é vantajoso utilizar um modelo desta teoria para avaliar o nível de confiança que se pode ter nas medidas efetuadas com o teste.

Saliente-se ainda que, com base nas informações obtidas na análise de um teste, além de se estimar a sua qualidade, também se identificam itens e outros aspetos que devem ser revistos para o melhorar. Com essa revisão completa-se mais um ciclo do processo de construção do teste estandardizado, tendo em vista o seu progressivo aperfeiçoamento.

PARTE II

ESTUDO EMPÍRICO

Capítulo 3

METODOLOGIA

Neste capítulo caracteriza-se o estudo empírico subjacente à investigação descrita no presente trabalho. Definido o problema que a motivou, os objetivos que se pretenderam atingir e as hipóteses que se quiseram testar, descreve-se a estrutura do estudo empírico realizado, de acordo com o plano que o norteou. Este plano não é exatamente igual ao original, o que se apresentou no projeto de tese, mas ajustado a acontecimentos que foram ocorrendo ao longo do desenvolvimento dos trabalhos e que condicionaram o percurso traçado inicialmente. No entanto, esta adaptação, imposta essencialmente por limitações de natureza funcional, não interferiu na coerência e na essência da investigação principal.

Depois da forma como o estudo foi organizado, mostra-se como foi operacionalizado: caracterizam-se os instrumentos de avaliação utilizados, indicando os procedimentos de construção dos que foram criados para concretizar alguns estudos e informa-se como e quando foram aplicados. Os participantes na pesquisa, que proporcionaram os resultados analisados, caracterizam-se na última secção do capítulo.

3.1 Problema, Objetivos e Hipóteses

A revisão de literatura efetuada revela que, na organização de medidas estratégicas que visem reduzir as dificuldades em Matemática que os alunos de cursos superiores de ciências e tecnologias têm vindo a experimentar no 1.º ano/1.ª inscrição, é fundamental considerar o desempenho em Matemática desses alunos quando iniciam os cursos. A literatura também sublinha que esse desempenho deve ser avaliado através da identificação objetiva e uniforme dos conhecimentos em Matemática que os estudantes possuem, dos que lhes foram efetivamente transmitidos, e dos que foram remetidos para os seus estudos superiores. Trata-se de uma forma de avaliação estandardizada que não é comum praticar em Portugal. Ao contrário do que acontece em alguns países, o nível de conhecimentos dos estudantes admitidos no ensino superior português não é medido com instrumentos de avaliação estandardizados, como testes de escolha múltipla construídos e aperfeiçoados de acordo com os procedimentos científicos referidos no capítulo anterior.

Para promover o sucesso na adaptação às exigências da Matemática do ensino superior, além da identificação rigorosa dos conhecimentos e das necessidades de formação dos estudantes, também é importante saber o que eles sentem e como reagem perante essas exigências. Os planos de ação a implementar poderão ser mais incisivos se, ao serem desenhados, for considerada a perspetiva dos estudantes sobre a transição da Matemática do ensino secundário para a do superior. A ponderação da sua autoconfiança, da opinião que têm sobre o modo como a Matemática é ensinada, das dificuldades que sentem no ensino superior e das medidas que sugerem para as suprimir, facilitará a eficácia dos planos. Da auscultação dos estudantes sobre estas questões poderá ainda ser possível caracterizar aqueles que conseguem os melhores resultados e reconhecer fatores que influenciam o seu desempenho em Matemática. Admite-se que estas informações reforçam o contributo da identificação dos conhecimentos dos estudantes, das suas dificuldades e lacunas de formação, à entrada do ensino superior, no esboço de um perfil de exigências para o sucesso na Matemática do 1.º ano do ensino superior científico e tecnológico.

De acordo com o exposto, o problema que promoveu esta investigação e os objetivos que a orientaram definiram-se do modo que se descreve a seguir, no qual o termo "estudantes" se refere a estudantes do 1.º ano/1.ª inscrição do ensino superior de cursos de ciências e de tecnologias.

PROBLEMA

Identificar os conhecimentos de Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior.

OBJETIVOS

O1: Avaliar, de forma objetiva e rigorosa, os conhecimentos de Matemática de uma amostra de estudantes, através da utilização de um teste estandardizado de conhecimentos de Matemática, depois de analisadas as propriedades metrológicas do teste e constatado que elas garantem um elevado grau de confiança nos seus resultados;

O2: Identificar, analisar e caracterizar os conhecimentos em Matemática dos estudantes quando iniciam os cursos;

O3: Conhecer as dificuldades, emoções e atitudes dos estudantes em relação à Matemática, procurando diferenças e semelhanças entre os que revelarem melhor e pior desempenho no 1.º semestre dos cursos;

O4: Caracterizar o perfil dos 20% de estudantes com melhor desempenho em Matemática no 1.º semestre dos cursos;

O5: Identificar fatores que influenciam o desempenho em Matemática dos estudantes;

O6: Traçar um perfil de exigências para o sucesso dos estudantes na Matemática do 1.º semestre.

A experiência na lecionação de unidades curriculares de Matemática do 1.º ano de cursos superiores suscitou o interesse em analisar relações entre algumas variáveis, a definir no âmbito deste estudo. Também houve a intenção de confirmar resultados conhecidos empiricamente, com base no estudo dos dados a recolher. Assim, formularam-se algumas hipóteses.

HIPÓTESES

H1: Os estudantes do género masculino revelam melhor desempenho em Matemática, no geral, do que os do género feminino;

H2: Em algumas áreas de conteúdo de Matemática, estudantes de género diferente têm níveis de desempenho diferentes;

H3: Existem diferenças entre o desempenho em Matemática dos estudantes com formações académicas distintas;

H4: O desempenho dos estudantes melhora significativamente após a formação proporcionada pelas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre;

H5: Existe uma correlação positiva entre os resultados da avaliação estandardizada e as classificações nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre;

H6: A restrição ao uso de calculadora e de formulários causa dificuldades na adaptação dos estudantes à Matemática do 1.º semestre.

3.2 Estrutura do Estudo Empírico

Tomando por referência os objetivos deste trabalho, traçaram-se as linhas de orientação para os alcançar. Assim, decidiram-se as estratégias de investigação a executar, adaptadas à metodologia de pesquisa que se reconheceu mais adequada ao tipo de estudo a desenvolver. Também se definiram os instrumentos de avaliação a utilizar, assim como os momentos da sua aplicação aos elementos da população alvo disponíveis para colaborar na pesquisa. No planeamento do trabalho, incluiu-se ainda a decisão acerca das técnicas de análise a aplicar aos dados recolhidos, quer no âmbito do estudo fundamental da investigação, quer no da análise das características metrológicas do instrumento de avaliação de conhecimentos a utilizar.

De acordo com estabelecido, o estudo empírico foi estruturado da seguinte forma.

MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO

A metodologia de investigação utilizada pode ser definida genericamente como “correlacional” ou “diferencial”. Situada entre o método experimental (de natureza laboratorial, envolvendo a manipulação de variáveis independentes e o estabelecimento de relações causais) e os métodos qualitativos (que não produzem, regra geral, dados submetidos a tratamento estatístico, centrando-se frequentemente numa compreensão e interpretação holista dos fenómenos sob estudo), o método correlacional caracteriza-se por adotar uma postura baseada na análise quantitativa de dados, mas com uma preocupação descritiva das relações entre variáveis recolhidas em condições naturais, sem estabelecer entre elas, necessariamente, nexos lineares ou de natureza causal (Almeida & Freire, 2008; Christensen, 2007; Gilles, 2008).

Assim, no âmbito dos procedimentos deste método de investigação, incidiu-se primordialmente na análise descritiva de variáveis diferenciadoras dos indivíduos com impacto no seu sucesso académico, nomeadamente em unidades curriculares de Matemática do 1.º ano do ensino superior. Em simultâneo, estudaram-se as relações entre essas mesmas variáveis, ou entre elas e outras de interesse como, por exemplo, variáveis demográficas (género e outras) ou de subdivisão da amostra (como diferentes instituições de ensino).

ESTRATÉGIAS DE INVESTIGAÇÃO

Realizaram-se estudos de natureza diversa, alicerçados na metodologia correlacional, tendo em vista os diferentes objetivos propostos.

Estudo metrológico - analisaram-se as características metrológicas do teste de conhecimentos utilizado nesta investigação;

Estudo quantitativo e interpretativo - analisaram-se os resultados da avaliação estandardizada praticada na investigação, quer quantitativamente, quer qualitativamente (interpretando as respostas dadas face ao enunciado e às alternativas de resposta dos itens) a fim de identificar o nível de conhecimentos dos estudantes por área de conteúdo e os erros mais comuns que cometeram;

Estudos correlacionais - estabeleceram-se correlações entre variáveis observadas (classificações nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, resultados em provas de conhecimentos de Matemática, em questionários de dados pessoais e noutras técnicas diferenciais de avaliação de construtos pertinentes) a fim de identificar as relações e associações, bem como o seu valor preditivo relativamente a critérios de sucesso académico;

Estudos de comparação intergrupal - estudou-se o impacto diferenciador no desempenho em Matemática de fatores que distinguem grupos, com base nos resultados obtidos por amostras diferenciadas em variáveis pertinentes, como o género, a área de formação e as notas da prova de ingresso e do 12.º ano de escolaridade;

Estudo longitudinal - estabeleceram-se comparações entre os resultados dos mesmos participantes na mesma prova de conhecimentos de Matemática, recolhidos no início de cada semestre do 1.º ano, para determinar o efeito do treino de competências no âmbito da formação proporcionada pelas unidades curriculares do 1.º semestre;

Estudo de casos - entrevistaram-se estudantes, de uma subamostra da amostra geral, contrastados quanto ao nível de conhecimentos em Matemática demonstrado no 1.º semestre do ensino superior, no sentido de averiguar a natureza das dificuldades que experimentaram na aprendizagem da Matemática, assim como as suas emoções e atitudes em relação a esta disciplina, procurando identificar semelhanças e diferenças entre os grupos, em particular fatores facilitadores do sucesso para os estudantes com resultados mais elevados.

Instrumentos de Avaliação

Para se realizarem os estudos atrás mencionados, foi necessário utilizar os seguintes instrumentos de avaliação.

***Teste de Conhecimentos de Matemática* (PMAT)** - instrumento de avaliação estandardizado construído e aperfeiçoado, em ligação com a presente investigação, de modo a criar um método para avaliação objetiva de conhecimentos de Matemática e para despiste de dificuldades, lacunas e necessidades de formação, no início das aulas do 1.º ano do ensino superior científico e tecnológico;

Escala Multidimensional de Auto-Eficácia Percebida de Bandura - questionário administrado após a entrega das respostas do PMAT, tendo em vista a validação do teste de conhecimentos;

Protocolo de entrevista semiestruturada - documento concebido, no âmbito desta investigação, para orientar as entrevistas do estudo de casos, depois de conhecido o desempenho dos estudantes nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre;

***Questionário de dados pessoais* -** questões incluídas na folha de respostas do PMAT, solicitando aos participantes o ano do seu nascimento, o género e o tipo de exame nacional de Matemática que realizaram no final do ensino secundário.

População e Amostras

Identificada a população alvo com os estudantes que estão a iniciar cursos superiores portugueses com, pelo menos, duas unidades curriculares obrigatórias da área de Matemática no plano de estudos do 1.º ano, recolheram-se amostras por conveniência.

Embora com limitações de representatividade da população, observaram-se amostras formadas por alunos das instituições de ensino superior que colaboraram na aplicação das diferentes versões do PMAT, sucessivamente aperfeiçoadas. Destes participantes, extraiu-se uma amostra objetiva para desenvolver o estudo de casos, constituída pelos estudantes com os melhores e os piores níveis de desempenho em Matemática no 1.º semestre do respetivo curso superior.

TÉCNICAS DE ANÁLISE DE DADOS

As técnicas de análise de dados utilizadas envolvem a aplicação dos métodos estatísticos mais adequados aos propósitos do estudo e à natureza correlacional predominante da metodologia. Em particular, técnicas de estatística descritiva, de correlação e de comparação de grupos (amostras independentes e emparelhadas), em função da natureza de cada questão de investigação, respeitando a verificação dos pressupostos para a aplicação de cada tipo de técnica estatística.

O estudo metrológico do PMAT, que envolve técnicas de análise de itens e de estudo da precisão e validação das medidas proporcionadas pelo teste, teve por referência dois modelos de medida - o modelo clássico da Teoria Clássica dos Testes e o modelo de Rasch da Teoria da Resposta ao Item.

As respostas aos itens do PMAT e os dados recolhidos nas entrevistas foram submetidos a uma análise interpretativa e comparativa. No caso das respostas aos itens, no sentido de estabelecer hipóteses explicativas dos erros cometidos pelos estudantes e caracterizar o seu conhecimento na área de conteúdo abrangida por cada item; no caso das entrevistas, para sintetizar as respostas obtidas e identificar padrões entre elas.

Os programas informáticos escolhidos para analisar os dados foram o SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*) (versão 20; IBM Corp., 2011) e o Winsteps (versão 3.74.0; Linacre, 2012a). O Microsoft Excel (2007) foi utilizado para tratar os dados, depois de as respostas dos participantes no PMAT terem sido obtidas por leitura ótica, um trabalho efetuado pelo Núcleo de Estatística e Prospetiva do Instituto Superior Técnico.

3.3 Instrumentos de Avaliação

Identificados os instrumentos de avaliação utilizados na implementação das estratégias de investigação, propõe-se a sua caracterização e a descrição do modo como foram administrados, referindo também quando e a quem foram aplicados.

3.3.1 Teste de Conhecimentos de Matemática: PMAT

O instrumento basilar desta investigação é o PMAT - teste estandardizado de medida de conhecimentos de Matemática destinado a ser aplicado, no início do ano letivo, aos alunos que frequentam pela primeira vez o 1.º ano de cursos superiores portugueses de ciências e tecnologias.

O PMAT foi construído no âmbito do desenvolvimento de um projeto da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). Um projeto que, na sua submissão ao Concurso de Projetos de I&D da Fundação para a Ciência e Tecnologia, em 2009, foi designado por *O desempenho em Matemática na transição para o ensino superior científico e tecnológico em Portugal: da avaliação de conhecimentos à predição do sucesso*.

Como se lê no documento de apresentação do projeto, a SPM, associando investigadores da área da Matemática e da Psicologia, propunha-se estudar o nível de conhecimentos de Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior científico e tecnológico português e identificar fatores, individuais e contextuais, que afetam o sucesso académico nas unidades curriculares da área de Matemática, ao longo do 1.º ano do curso. Assim, o projeto consistia em dois estudos que se complementavam entre si. Um deles incidia na exploração do valor preditivo de uma diversidade de indicadores do nível de conhecimentos de Matemática, como as classificações da disciplina de Matemática do ensino secundário ou as classificações do exame nacional de Matemática, para o sucesso nas disciplinas de Matemática do 1.º ano do ensino superior. O outro constava na construção e aperfeiçoamento sucessivo de uma prova estandardizada de medida de conhecimentos de Matemática - Prova de Matemática.

Para abreviar a denominação da prova utilizou-se a sigla PMAT, que também corresponde à designação do teste em língua inglesa, para efeitos de publicação, “Portuguese Mathematic Achievement Test”.

Embora o projeto não tenha sido financiado, a SPM promoveu a construção do PMAT, cujo processo já tinha iniciado. Na equipa envolvida nesse trabalho, incluem-se as investigadoras do presente estudo. Com autorização da SPM, utilizaram os resultados do teste com o intuito de alcançar um dos objetivos propostos no projeto atrás referido: fornecer uma base sólida para a identificação dos níveis de desempenho dos estudantes portugueses em diversas áreas de conteúdo de Matemática, quando ingressam em cursos científicos e tecnológicos do ensino superior.

A participação ativa das investigadoras envolvidas neste trabalho no desenvolvimento do PMAT aconteceu desde a sua génese. Uma delas participou na discussão, com o Professor Doutor Nuno Crato, na altura Presidente da SPM, e o Professor Doutor Pedro Rosário, do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho, de onde decorreu a ideia de construir e aplicar o PMAT.

O tema central da discussão era o insucesso em Matemática dos estudantes do 1.º ano do ensino superior de ciências e tecnologias. Para implementar medidas que minimizem este problema, seria importante avaliar os conhecimentos de Matemática dos estudantes quando iniciam os cursos superiores de ciências e tecnologias. Os conteúdos testados, a nível do ensino secundário, teriam de ser as matérias que os estudantes deveriam conhecer, compreender, aplicar e analisar para terem sucesso nas unidades curriculares de Matemática de cursos de Engenharia, Ciências e Economia. O instrumento de avaliação a utilizar, além de proporcionar a identificação das dificuldades dos alunos e das lacunas nos seus conhecimentos, também deveria assegurar a legitimidade, porque cientificamente fundamentados, de estudos comparativos entre o desempenho de subpopulações, quer transversais, quer longitudinais. Esta característica do teste também iria facilitar a aferição dos resultados da implementação de novas medidas educativas.

Motivada pelo interesse de uma avaliação desta natureza, a SPM organizou um grupo de investigação para, de modo sistemático e de acordo com procedimentos científicos, criar o teste pretendido - o "Teste Nacional de Diagnóstico de Matemática", como era designado na altura. A equipa que viria a participar na construção do PMAT, sob a coordenação da SPM, teve a sua primeira reunião em julho de 2008, na sede desta sociedade. Constituída por matemáticos e psicólogos, investigadores e docentes do ensino superior, incluía os seguintes elementos (designação das instituições no início da investigação):

Área de Matemática

- Ana Moura Santos, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa;
- Ana Rute Domingos, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa;
- Filipe Oliveira, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova e Direção da SPM;
- Helena Monteiro, Escola Superior de Tecnologia de Abrantes do Instituto Politécnico de Tomar;
- Isabel Faria, Instituto Superior de Agronomia da Universidade de Lisboa;
- Marília Pires, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;
- Miguel Abreu, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa e Direção da SPM;
- Nuno Crato, Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa e Direção da SPM;
- Rogério Martins, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova.

Área de Psicologia

- Ana Teresa Gouveia, Instituto Superior de Educação e Ciências;
- Maria João Afonso, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Lisboa;
- Pedro Rosário, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

No final da reunião estavam constituídos grupos de trabalho para:

Grupo 1 - Fazer o levantamento de sistemas de avaliação, tipos de testes, técnicas de construção e de estudo metrológico da avaliação de conhecimentos de Matemática, na transição do ensino secundário para o ensino superior, a nível nacional e internacional, de preferência em países onde se avalia o progresso educativo da população escolar (Ana Moura Santos, Helena Monteiro, Isabel Faria e Rogério Martins);

Grupo 2 - Estabelecer uma taxonomia de objetivos de avaliação, incluídos nas áreas de conteúdo consideradas pertinentes, e pesquisar procedimentos recomendados pela teoria psicométrica para a construção e estudo metrológico de itens e de testes de avaliação de conhecimentos, em particular de conhecimentos de Matemática (Ana Moura Santos, Ana Rute Domingos, Helena Monteiro e Maria João Afonso);

Grupo 3 - Recolher informação sobre a metodologia a implementar para que o teste tenha valor preditivo, nomeadamente no sucesso em unidades curriculares de Matemática do 1.º ano do ensino superior (Ana Teresa Gouveia e Maria João Afonso).

A equipa voltou a reunir em outubro de 2008. Entretanto, foi abandonada por Pedro Rosário e Isabel Faria e integrou duas professoras de Matemática do ensino secundário:

- Isabel Augusto, Escola Secundária Filipa de Lencastre;
- Isabel Hormigo, Escola Secundária Filipa de Lencastre e Direção da SPM.

Nessa reunião, depois de analisados os trabalhos desenvolvidos pelos vários grupos, foram tomadas decisões acerca da construção e desenvolvimento experimental do, ainda, Teste Nacional de Diagnóstico de Matemática. Essas decisões respeitaram as normas internacionais para a construção e investigação psicométrica, os *Standards for Educational and Psychological Testing* (AERA, APA & NCME, 1999), onde se inclui a sequência de etapas *Ensaio Experimental → Análise dos Resultados → Revisão e Aperfeiçoamento do Teste*.

Construído o primeiro teste, designado por PMAT-12, foi feito um estudo piloto, em maio de 2009, com estudantes do 12.º ano de escolaridade. Corrigidos os erros detetados no PMAT-12, na sequência da análise feita e apresentada por Afonso (2009), elaborou-se o teste para o primeiro ensaio experimental. Designado por PMAT-00, foi aplicado a indivíduos da população alvo, em setembro de 2009. Desta forma, deu-se início à sequência de etapas atrás referida. Com base na análise dos resultados[1], foi efetuada a revisão da prova. Do aperfeiçoamento do PMAT-00 resultou o PMAT-01[2]. Visando a gradual melhoria do teste, o ciclo de etapas foi repetido e surgiu o PMAT-02 que, por sua vez, conduziu ao PMAT-03, o último ensaio experimental do PMAT, realizado em 2012.

Tal como o PMAT-00, os testes dos outros ensaios experimentais foram aplicados a amostras de estudantes da população alvo. Todos foram administrados em setembro, de anos consecutivos, na primeira semana de aulas do ano letivo das instituições de ensino superior que colaboraram nos ensaios.

A análise dos resultados do PMAT-03, apresentada na secção 4.1.2, mostra que as características metrológicas desta prova são bastante satisfatórias. Embora possa ser melhorado, o PMAT-03 pode considerar-se já bastante aproximado do teste estandardizado que se pretendia. Foram os seus resultados que sustentaram a maior parte da investigação acerca dos conhecimentos em Matemática dos estudantes, apresentada neste trabalho, e é a ele que se faz referência quando, de um modo genérico, se menciona "PMAT". Considere-se a descrição do processo de construção e as principais características do PMAT.

Caracterização do PMAT: da primeira à última versão

Depois de cada ensaio experimental do PMAT anterior ao PMAT-03, os resultados obtidos foram tratados, analisados e apresentados a todos os elementos da equipa por Afonso e Monteiro (2010, 2011, 2012). As consequentes discussões permitiram que, progressivamente, se corrigissem os erros detetados e melhorassem os procedimentos e as técnicas de análise metrológica de resultados. Daí que algumas das decisões tomadas no início tenham vindo a sofrer alteração como, por exemplo, o número de itens do teste. Fundamentando as opções tomadas e apontando as diferenças entre os testes aplicados, segue-se a caracterização do PMAT, determinada pelo que se pretendia avaliar, para que se queria avaliar e quem se ia avaliar.

[1] Os resultados das respostas aos itens do PMAT-00 foram apresentados por Monteiro, Afonso e Pires (2010) no Encontro Nacional da SPM de 2010, na secção Ensino da Matemática.

[2] A construção do PMAT-01 serviu de base à elaboração de um Poster apresentado por Monteiro e Afonso (2011) na XV Conferência Internacional de Avaliação Psicológica.

ÁREAS DE CONTEÚDO

O PMAT foi construído a partir de uma matriz que especificou as características que deveriam contemplar os seus itens. Esta matriz cruzou cinco áreas de conteúdo com três níveis de complexidade. Assim, o PMAT questiona os estudantes sobre os seguintes temas[3], ao nível do 12.º ano de escolaridade, com uma quantidade de itens que respeita, tanto quanto possível, o valor percentual indicado:

- ***Análise*** **(35%)**
  - · *Estudo de Funções* racionais, irracionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas elementares (domínio, continuidade, injetividade e sobrejetividade, zeros, teorema de Bolzano, cálculo de limites, derivadas, máximos e mínimos, intervalos de monotonia, problemas de otimização, sentido da concavidade do gráfico, representação gráfica);
  - · *Estudo de Sucessões* (cálculo de limites, monotonia, progressões aritméticas e geométricas).
- ***Álgebra*** **(30%)**
  - · *Manipulação de Expressões Algébricas;*
  - · *Resolução de Equações e Inequações* polinomiais, racionais e irracionais (zeros de polinómios, factorização de polinómios, regra de Ruffini, algoritmo da divisão de polinómios, quadro de sinais);
  - · *Números Complexos.*
- ***Geometria*** **(15%)**
  - · *Geometria Euclidiana;*
  - · *Geometria Analítica* no plano e no espaço (resolução de sistemas de equações lineares e interpretação geométrica, representação de domínios planos, operações com vetores);
  - · *Números Complexos* no plano de Argand (domínios planos e condições em variável complexa).

[3] No estudo piloto não foram incluídos itens sobre números complexos porque não havia a certeza se, no momento da aplicação do teste, esta matéria já teria sido lecionada.

- ***Probabilidades e Estatística* (15%)**

  · *Probabilidades* (cálculo de probabilidades envolvendo técnicas de contagem, propriedades e distribuição de probabilidades);

  · *Estatística* (medidas de localização e medidas de dispersão de uma amostra).

- ***Lógica* e Teoria de Conjuntos (5%)**

  · *Lógica* (operações lógicas, quantificadores e Leis de De Morgan);

  · *Teoria de Conjuntos* (operações com conjuntos).

A experiência de alguns elementos da equipa do PMAT na lecionação de *Álgebra Linear*, *Estatística* ou *Cálculo (I* ou *II),* unidades curriculares de Matemática do 1.º ano do ensino superior, permite-lhes conhecer, de modo empírico, as matérias cuja aprendizagem é necessária para o sucesso nestas unidades. Essa experiência facilitou a decisão sobre as áreas de conteúdo, subáreas e respetivos pesos na prova. O levantamento internacional efetuado também contribuiu para esta decisão, na medida em que deu a conhecer o que, em geral, é avaliado em testes desta natureza. As professoras do ensino secundário da equipa regularam os níveis de conhecimentos das matérias ensinadas até ao final do 12.º ano de escolaridade.

NÍVEIS DE COMPLEXIDADE

Os itens do PMAT distribuem-se por três níveis de complexidade. Estes níveis baseiam-se na clássica taxonomia de objetivos educativos (domínio cognitivo) de Bloom (1956) e encontram-se descritos no Capítulo 2, na secção 2.1.2. Em termos dos níveis de complexidade, os itens distribuem-se do seguinte modo:

- *Nível de Complexidade Baixo* (conhecimento e compreensão): 35%
- *Nível de Complexidade Moderado* (aplicação e análise): 50%
- *Nível de Complexidade Elevado* (síntese e avaliação): 15%

CARACTERÍSTICAS DOS ITENS

- ***Formato***

  Os itens do PMAT são do formato escolha múltipla convencional (EMC), com três alternativas de resposta - uma correta (a chave) e duas incorretas (distratores). As alternativas de resposta são identificadas pelas letras A, B e C.

O primeiro teste do PMAT, o PMAT-12, começou a ser construído com itens EMC com cinco alternativas de resposta. Foi a revisão da literatura sobre construção de itens que induziu a equipa a alterar o número de alternativas de resposta dos itens, ainda antes da versão final do PMAT-12.

Como se constata no Apêndice B, um teste de avaliação académica destinado a medir os conhecimentos de Matemática dos estudantes de forma direta e objetiva, em sala de aula, reúne condições para ser constituído por, apenas, itens de escolha múltipla (EM). Com esta garantia dada pela literatura, houve alguns fatores que pesaram a favor da adoção deste tipo de itens, com preferência pelos que solicitam a seleção de uma, e uma só, alternativa de resposta (itens EM com o formato convencional): a quantidade de estudantes a que se pretendia aplicar o PMAT, a escassez de recursos humanos e financeiros da SPM para apurar os resultados manualmente em tempo oportuno, a facilidade da leitura e da pontuação automáticas proporcionadas por estes itens e ainda a possibilidade de abordar mais tópicos com itens deste tipo do que com itens de resposta construída. Também o facto de, em vários países, serem utilizados testes de avaliação académica estandardizados compostos só por itens EMC, deu confiança à equipa pela sua preferência.

Conscientes de que itens EM mal elaborados são a razão de muitas das limitações apontadas a este formato, a equipa investiu na construção criteriosa de itens para o PMAT. Para tal, a tarefa de criação dos itens das diferentes áreas de conteúdo foi atribuída aos membros da área de Matemática. Estes, por sua vez, orientaram-se por diretrizes provenientes do domínio psicométrico e organizadas pelos membros da equipa da área de Psicologia. De salientar, em particular, as diretrizes de redação de itens de escolha múltipla sugeridas por Haladyna, Downing e Rodriguez (2002), apresentadas no Capítulo 2, secção 2.1.3. Uma destas regras recomenda que se concebam tantos distratores quanto possível mas, acrescenta, dois ou três podem ser suficientes. Vários estudos, teóricos e empíricos, defendem itens EMC com apenas três alternativas de resposta (ver Apêndice B). Razão por que não se justifica o esforço despendido com a construção de mais de dois distratores plausíveis, como se verificou na primeira experiência de redação de itens do PMAT.

- ***Resolução SEM máquina de calcular NEM formulários***

  Os estudantes não podem utilizar máquina de calcular nem outro equipamento ou material auxiliar para responder ao PMAT.

- ***Nível de leitura***

O nível de leitura dos itens é o do 12.º ano de escolaridade.

- ***Tempo de resolução***

O tempo esperado para os estudantes resolverem um item depende do seu nível complexidade. Os itens do PMAT foram concebidos na tentativa de os estudantes demorarem:

1 minuto para resolverem cada item de nível de complexidade *baixo*;

2 minutos para resolverem cada item de nível de complexidade *moderado*;

4 minutos para resolverem cada item de nível de complexidade *elevado*.

- ***Pontuação***

A pontuação do PMAT é obtida de acordo com o seguinte critério:

Resposta *certa*: 1 ponto;

Resposta *errada*: 0 pontos;

Resposta *omissa*: 0 pontos.

No PMAT-12, cada resposta certa valia 1 ponto, cada resposta omissa 0 pontos e, por cada resposta errada, era descontado 0,5 pontos no total de respostas certas.

A revisão da literatura, efetuada depois do estudo piloto, não fundamentou suficientemente o sistema de pontuação adotado (ver Apêndice B). A equipa do PMAT também reconheceu que, com a penalização de respostas erradas, alguns estudantes inibem-se de responder a um item quando não têm a certeza absoluta da resposta correta. Assim, a equipa ponderou sobre o número de respostas obtidas e o número de respostas dadas ao acaso - se as respostas erradas não forem descontadas, há mais estudantes a responder a cada item; por outro lado, este estímulo também promove o aumento de respostas dadas ao acaso.

O interesse em conhecer as alternativas de resposta escolhidas pelos alunos foi considerado mais relevante do que o controlo das respostas ao acaso. Daí que, seguindo a recomendação da literatura e à semelhança de alguns testes internacionais de admissão ao ensino superior, como o *American College Testing* (ACT, Inc., 2009) ou o *University Entrance Examination* (National University of Singapore, 2009), desde o primeiro ensaio experimental que as respostas erradas ao PMAT valem 0 pontos.

NÚMERO DE ITENS E TEMPO DE RESOLUÇÃO DO TESTE

O PMAT é uma prova com 32 itens que devem ser respondidos em 120 minutos**.**

O número de itens e o tempo de resolução do PMAT variaram ao longo do seu desenvolvimento, efeito da revisão e aperfeiçoamento do teste. No decorrer da construção deste instrumento de avaliação, os vários testes tiveram os seguintes números de itens e respetivo tempo de resolução: PMAT-12: 40 itens - 120 minutos; PMAT-00: 30 itens - 90 minutos; PMAT-01: 40 itens - 120 minutos; PMAT-02: 32 itens - 120 minutos.

As propriedades metrológicas satisfatórias do PMAT-02 fixaram esta característica do PMAT.

MATRIZ DOS ITENS

Os itens do PMAT distribuem-se por área de conteúdo e por nível de complexidade do modo seguinte:

Tabela 3.1 - Matriz dos itens do PMAT

MATRIZ DOS ITENS DO PMAT						
Área de Cont. / Nível de Compl.	Prob. Est.	Álgebra	Análise	Lóg. T. Conj.	Geometria	Total
Baixo	1	4	4	0	2	11
Moderado	2	4	6	1	3	16
Elevado	1	1	2	0	1	5
Total	4	9	12	1	6	32

Depois de fixadas as características e o número de itens do PMAT-12, a equipa do PMAT construiu a matriz dos itens do teste. Nas reuniões de apresentação e discussão dos resultados do estudo piloto e dos ensaios experimentais, foi definida a matriz dos itens para o teste do ensaio seguinte. Houve sempre preocupação de, tanto quanto possível, obedecer às percentagens, já fixadas, de itens por nível de complexidade e por área de conteúdo.

A matriz final nem sempre coincidiu com a projetada: no PMAT-00 foi necessário eliminar um item de Álgebra porque, devido a um erro de escrita, ficou com todas as alternativas de resposta erradas; nos PMAT-02 e PMAT-03 foi substituído um item de Álgebra por um de Análise.

Para os dois últimos testes do PMAT foi utilizada a mesma matriz dos itens, diferente da dos anteriores. Para facilitar a comparação entre as matrizes finais dos vários testes do PMAT, foram elaboradas as Tabelas 3.2 e 3.3 com a distribuição dos itens em cada teste, por nível de complexidade e área de conteúdo.

Tabela 3.2 - Distribuição dos itens no PMAT: Áreas de conteúdo/Níveis de complexidade

DISTRIBUIÇÃO DOS ITENS NO PMAT ÁREAS DE CONTEÚDO (AC)/NÍVEIS DE COMPLEXIDADE (NC)																
AC/NC	**Baixo**					**Moderado**					**Elevado**					**Total**
PMAT	**PE**	**Al**	**An**	**LC**	**Ge**	**PE**	**Al**	**An**	**LC**	**Ge**	**PE**	**Al**	**An**	**LC**	**Ge**	
12	2	4	5	1	2	3	6	7	1	3	1	2	2	0	1	**40**
			14 (35,0%)					**20** (50,0%)					**6** (15,0%)			
00	1	3	4	0	2	2	5*	6	1	2	1	1	1	0	1	**30***
			10 (33,3%)					**16** (53,3%)					**4** (13,3%)			
01	2	4	4	1	2	2	6	7	1	4	1	3	2	0	1	**40**
			13 (32,5%)					**20** (50%)					**7** (17,5%)			
02 03	1	4	4	0	2	2	4	6	1	3	1	1	2	0	1	**32**
			11 (35,0%)					**16** (50,0%)					**5** (15,0%)			

* Excluído um item da análise do teste por não ter qualquer alternativa de resposta correta.

Tabela 3.3 - Distribuição dos itens no PMAT: Níveis de complexidade/Áreas de conteúdo

DISTRIBUIÇÃO DOS ITENS NO PMAT NÍVEIS DE COMPLEXIDADE (NC)/ ÁREAS DE CONTEÚDO (AC)																
NC/AC	**Prob. Est.**			**Álgebra**			**Análise**			**Lóg. T. Conj.**			**Geometria**			**Total**
PMAT	**B**	**M**	**E**	**B**	**M**	**E**	**B**	**M**	**E**	**B**	**M**	**E**	**B**	**M**	**E**	
12	2	3	1	4	6	2	5	7	2	1	1	0	2	3	1	**40**
		6 (15,0%)			**12** (30%)			**14** (35,0%)			**2** (5,0%)			**6** (15,0%)		
00	1	2	1	3	5*	1	4	6	1	0	1	0	2	2	1	**30***
		4 (13,3%)			**9*** (30%)			**11** (36,7%)			**1** (3,3%)			5 (16,7%)		
01	2	2	1	4	6	3	4	7	2	1	1	0	2	4	1	**40**
		5 (12,5%)			**13** (32,5%)			**13** (32,5%)			**2** (5,0%)			**7** (17,5%)		
02 03	1	2	1	4	4	1	4	6	2	0	1	0	2	3	1	**32**
		4 (12,5%)			**9** (28,1%)			**12** (37,5%)			**1** (3,1%)			**6** (18,8%)		

* Excluído um item da análise do teste por não ter qualquer alternativa de resposta correta

ORGANIZAÇÃO DOS ITENS NO TESTE

- ***Agrupamento e ordenação***

Os itens do PMAT estão dispostos por ordem crescente de nível de complexidade:

Baixo (B) → Moderado (M) → Elevado (E)

Em cada nível estão agrupados por área de conteúdo, apresentadas na sequência que a equipa julgou, antes de construir os itens, que corresponderia à ordem crescente de dificuldade para os estudantes:

Probabilidades e Estatística (PE) → Álgebra (Al) →Análise (An) →
→ Lógica e Teoria de Conjuntos (LC) → Geometria (Geo)

E, em cada área de conteúdo, apresentam-se por *ordem crescente de índice de dificuldade*, segundo os resultados obtidos no ensaio experimental anterior.

- ***Versões da prova***

O PMAT tem duas versões - provas com os mesmos itens, nas mesmas posições, mas com as alternativas de respostas ordenadas de modo diferente.

Para todos os testes do PMAT foram feitas, e aplicadas, duas versões. Pretendia-se, deste modo, dificultar o plágio entre estudantes que estivessem sentados lado a lado.

Enquanto os testes do PMAT-00, PMAT-01 e PMAT-03 tiveram apenas uma forma[4] os outros tiveram duas formas (A e B):

- O estudo piloto foi feito com duas formas paralelas do PMAT-12 (provas equivalentes, constituídas por itens diferentes mas que avaliam o mesmo objeto, com igual nível de complexidade) aplicadas aos mesmos alunos em momentos diferentes;
- O PMAT-02 teve duas formas, ambas com os mesmos itens, mas organizados de modo distinto.

Na Forma A do PMAT-02 os itens foram organizados como no PMAT-03. Na Forma B, com o objetivo de verificar se a posição dos itens tinha influência nas suas características metrológicas, os itens foram dispostos de uma forma que se designou por aleatória-controlada: sem estarem agrupados por nível de complexidade ou área de conteúdo, houve algum controlo na posição que ocuparam no teste (analisados os resultados, não se encon-

[4] Numa das universidades que colaboraram nos ensaios experimentais, metade dos testes das versões A1 e A2 dos PMAT-01 e o PMAT-03 foram designados por B2 e B1, respetivamente. Na realidade, só foram aplicados dois testes distintos que diferiam pela ordenação das alternativas de resposta dos itens, apresentados na mesmas posições.

traram diferenças significativas no número de respostas certas aos itens que ocuparam posições diferentes nas formas do PMAT-02).

Os itens dos PMAT-12, PMAT-00 e PMAT-01 foram organizados por nível de complexidade e área de conteúdo como no PMAT-03. Dentro de cada área de conteúdo apresentam-se de acordo com o que foi decidido pela equipa do PMAT (exceto no PMAT-12).

FORMATO DO TESTE

O PMAT tem o formato de *papel-e-lápis*. Os seus itens são apresentados num caderno, no qual estão identificados com o sistema de numeração arábica, numerados de acordo com a posição que ocupam. Os estudantes devem responder individualmente ao teste, assinalando numa folha que lhes é distribuída para o efeito (folha de respostas) a alternativa de resposta que consideram correta em cada item.

- ***Caderno de Teste***

  Composto por sete folhas A4, agrafadas no canto superior esquerdo, contém uma capa (página 1), instruções (página 2) e os itens (páginas 3 a 14).

  Na *capa* do caderno consta a identificação do teste (nome, versão, mês e ano da aplicação), da instituição de ensino em que é aplicado e, para preencher pelo estudante, um espaço com o seu nome e outro com o número do bilhete de identidade ou cartão do cidadão.

  As *instruções*, que incluem informações sobre o conteúdo e o objetivo fundamental do teste, referem o modo de assinalar a resposta certa na folha de respostas, a não permissão do uso de máquina de calcular nem de qualquer outro equipamento ou material auxiliar, a possibilidade de usar o caderno de teste para rascunho (com a advertência de que este deverá ser devolvido com a folha de respostas), o modo de pontuação das respostas e o tempo disponível para a resolução do teste.

  Os *itens* estão distribuídos por 12 páginas. Quatro delas têm dois itens e as restantes três. Cada item é seguido de algum espaço em branco, limitado por um traço contínuo, que poderá ser utilizado como rascunho para a resolução do item.

Na capa dos testes com mais de uma forma também se identificava a respetiva forma. No PMAT-12 requeria-se a turma e o número de aluno. Nas instruções desta prova solicitava-se aos alunos que registassem, no verso da folha de respostas, a hora em que concluíram o teste.

- ***Folha de respostas***

Uma folha de formato A4, impressa num dos lados, preparado para leitura ótica. Apresenta um campo com as instruções de preenchimento e campos próprios para o estudante indicar o número do bilhete de identidade ou cartão do cidadão, a escola que frequenta, o ano de nascimento, o género, o exame nacional de Matemática que realizou e ainda a forma (e versão) do PMAT a que responde. Para responder a cada item, o aluno deve preencher o retângulo que corresponde à letra da alternativa de resposta que considera correta, situado à frente do número do item, no campo das respostas. Nesta folha, também é solicitada a data em que é respondido o teste, o nome e assinatura do estudante, e ainda a assinatura de um docente presente na sala.

Construção dos Itens do PMAT

A unidade fundamental constituinte de um teste é o item. Daí que a qualidade de um teste dependa, essencialmente, do modo como os seus itens estão construídos. Tal como em qualquer outro teste, a melhoria dos itens do PMAT foi determinante para o seu aperfeiçoamento. Obedecendo, desde o início, às características atribuídas à prova, a maioria dos itens foi reestruturada ao longo do processo de construção do PMAT. Importa, pois, conhecer a origem e a evolução de cada item.

Na mesma reunião em que a equipa do PMAT definiu a primeira Matriz dos Itens, constituíram-se grupos de trabalho. Cada um tomou a seu cargo a construção e a revisão dos itens das áreas de conteúdo que lhes foram atribuídas. Estes procedimentos obedeceram às opções tomadas pela equipa, no início do processo, ou depois de serem conhecidos os resultados e a respetiva análise do estudo piloto e dos ensaios experimentais. Desde o PMAT-12 ao PMAT-03 os grupos responsáveis por cada tipo de itens não sofreram alteração. Organizaram-se do seguinte modo:

Probabilidades e Estatística - Isabel Augusto e Isabel Hormigo

Análise e *Álgebra* - Ana Moura Santos, Ana Rute Domingos e Helena Monteiro

Lógica e Teoria de Conjuntos - Marília Pires

Geometria - Filipe Oliveira e Rogério Martins

O processo de construção dos itens teve início com a criação de cerca de 120 itens, de todas as áreas, de onde a equipa do PMAT selecionou os que deveriam integrar as duas formas do PMAT-12. Após a construção das duas versões de cada forma, da sua resolução e de algumas correções, obteve-se a versão final dos itens do estudo piloto.

A partir da análise metrológica dos resultados do PMAT-12, que permitiu conhecer as propriedades dos itens, no seu todo e individualmente, foram identificados os que tinham indicadores pouco satisfatórios, ou seja, os que deveriam ser melhorados. Nesse sentido, cada grupo reestruturou os itens que tinha construído, alterando o enunciado ou uma ou várias alternativas de resposta. Nalguns casos foi preferível criar novos itens para substituir outros, tendo em consideração os restantes itens da mesma área de conteúdo, as subáreas de conteúdo a fazer constar no teste, a distribuição dos itens pelos níveis de complexidade e as diretrizes técnicas para a construção de itens. Organizados numa versão do teste, os itens foram de seguida respondidos pela própria equipa do PMAT. Aperfeiçoados alguns itens, obteve-se o PMAT-00. De modo análogo, construíram-se os itens que viriam a integrar as subsequentes versões do PMAT.

No Quadro 3.1 é possível localizar a origem dos itens e as suas alterações até ao PMAT-03. Por exemplo, na linha 3, lê-se que o item 4 da Forma B do PMAT-12 foi alterado (enunciado e alternativas de resposta) e passou a item 3 no PMAT-00; além da posição no teste, não sofreu mais alterações até ao PMAT-03. No caso do item 30 do PMAT-01 (linha 10), que foi criado para este teste, as suas alternativas de resposta foram alteradas para o PMAT-02 (item 10) e voltaram a ser modificadas para o item 10 do PMAT-03.

Na secção 4.2, quando se analisam as respostas dos estudantes ao PMAT, revelam-se alguns itens do PMAT-03 e descrevem-se outros, em termos dos conhecimentos e das competências necessárias para identificar a sua resposta certa.

Quadro 3.1 - Origem e alterações dos itens do PMAT

PMAT-12 Forma A	PMAT-12 Forma B	PMAT-00	PMAT-01	PMAT-02 (Forma 1/2)	PMAT-03
	2		2	1/1	1
	3	2	3	2/3	2
	4 (alterado)	3	4	3/5	5
22			6 (ops. alters.)	4/2	3
--	--	--	--	5/4	4
--	--	--	--	6/8 (alterado)	9
7 (alterado)		5 (alterado)	7	7/7	7
--	--	20 (alterado)	16	8/15	15
--	--	--	--	9/11	11
--	--	--	30 (op. alter.)	10/10 (op. alterada)	10
15		11	14	11/12	12
17		12	15	12/13	13
	19 (op. alter.)	14 (alterado)	18 (alterado)	13/19	17
--	--	18 (alterado)	23 (alterado)	14/21	21
	20 (ops. alter.)	15 (corrigido)	19 (ops. alter.)	15/16	16
--	--	--	22 (enu. alter.)	16/20	20
10 (alterado)		7 (alterado)	9 (alterado)	17/9	8
	24 (alterado)		27 (alterado)	18/24 (ops. alters.)	24
37 (ops. alts.)		28 (alterado)	39 (alterado)	19/31 (ops. alters.)	31
	14		29	20/14	14
35		27	34	21/28	28
--	--	9 (complexos)	11 (alterado)	22/26	25
	32		31	23/27	27
	40	30	40	24/32 (alterado)	32
--	--	17 (compl; alt.)	21 (ops. alters.)	25/17	18
36				26/29	29
--	--	--	35	27/30	30
--	--	21 (alterado)	26	28/23	23
--	--	23	28	29/22	22
21		16	20	30/18	19
26		8	10	31/6 (op. alterada)	6
	33	26	32	32/25	26

Características Metrológicas do PMAT

As características metrológicas dos testes dos ensaios experimentais foram analisadas no âmbito da Teoria Clássica dos Testes (TCT) e da Teoria da Resposta ao Item (TRI) com base no Modelo de Rasch - um modelo unidimensional com um parâmetro (a dificuldade do item).

Existem modelos unidimensionais da TRI que estimam outros parâmetros além da dificuldade do item, como a sua discriminação e a probabilidade de ter sido respondido ao acaso, sendo, em contrapartida, mais exigentes no ajustamento dos dados ao modelo. Alguns peritos em Psicometria (Bond & Fox, 2007; Harris, 1989; Wu & Adams, 2007) argumentam que as propriedades do Modelo de Rasch justificam a sua utilização no processo de construção de testes como o PMAT. Uma delas é proporcionar indicadores sobre os parâmetros estimados por outros modelos (ver secção 2.2.1, p. 71).

Assim, admitiu-se que as informações dadas pelas estatísticas do Modelo de Rasch acerca dos itens com resultados mais desajustados iriam permitir melhorar o teste até se conseguir um bom ajustamento dos dados ao modelo e, por consequência, construir um instrumento de medida bem calibrado para medir do nível de conhecimentos de Matemática dos estudantes, como se pretendia.

A repetição do processo *Ensaio Experimental → Análise dos Resultados → Revisão e Aperfeiçoamento do Teste* refletiu-se na melhoria gradual das propriedades metrológicas dos itens e, no geral, do teste.

Ao comparar as análises dos resultados dos sucessivos ensaios experimentais, percebe-se que as características metrológicas dos testes foram progredindo. Exceto do PMAT-02 para o PMAT-03, onde apenas se verifica uma ligeira melhoria, nota-se uma evolução significativa de um teste para o seguinte. Em particular, na discriminação dos itens, na fiabilidade dos resultados e na unidimensionalidade do teste.

Das avaliações feitas à qualidade dos testes como instrumento de medida de conhecimentos, apenas se apresenta a do PMAT-03, uma vez que foram os resultados deste teste que se utilizaram na presente investigação. Tratando-se de uma análise de resultados, as características metrológicas do PMAT não se descrevem neste ponto, mas mais adiante, no capítulo dedicado à apresentação e análise de resultados (secção 4.1.2). Adianta-se apenas que elas sugerem um bom nível de confiança nas inferências feitas a partir dos resultados obtidos com o teste, tanto pelo rigor das medidas como naquilo que mede. Ou seja, existem indicadores para que se considere o PMAT como um instrumento de medida suficientemente fiável para aferir o nível e o tipo de conhecimentos de Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior científico e tecnológico. Sendo estandardizado, fundamenta todas as comparações entre os resultados obtidos por subpopulações.

Aplicação do PMAT

As duas formas paralelas do PMAT-12 foram aplicadas a alunos que frequentavam a disciplina de *Matemática A* do 12.º ano de escolaridade. Ambas foram aplicadas no mês de maio de 2009, com duas semanas de intervalo, em oito estabelecimentos de ensino. Tomando como referência as subdivisões de Portugal em NUTS II (Nomenclatura Comum das Unidades Territoriais Estatísticas, nível 2), seis destas escolas pertencem à Região de Lisboa, uma à Região do Centro e outra à Região do Algarve. Foram contactos pessoais de elementos da equipa do PMAT com docentes destas escolas, que se disponibilizaram a colaborar na administração dos testes, que determinaram a escolha da amostra de conveniência para o estudo piloto. Os estudantes que resolveram os testes entenderam a sua participação como um treino para o exame nacional.

Também a realização dos quatro ensaios experimentais do PMAT decorreu da disponibilidade manifestada pelos dirigentes de cinco instituições de ensino superior – três universidades da Região de Lisboa e uma universidade e um instituto politécnico da Região do Centro. Uma universidade colaborou nos quatro ensaios, duas universidades participaram em três ensaios e as restantes instituições num único ensaio.

Os testes dos ensaios experimentais (PMAT-00, PMAT-01, PMAT-02 e PMAT-03) foram aplicados em setembro de 2009, 2010, 2011 e 2012, respetivamente, aos alunos que estavam a iniciar os seus estudos em cursos de licenciatura ou de mestrado integrado, da área de ciências ou de tecnologias. As aplicações ocorreram todas na primeira semana de aulas das instituições de ensino participantes. Nalgumas escolas, o PMAT foi realizado em simultâneo por todos os alunos, enquanto noutras foi realizado no horário das aulas de unidades curriculares de Matemática. Tanto professores como alunos que colaboraram entenderam o PMAT como um teste diagnóstico.

No início dos trabalhos desta investigação, planeou-se que o PMAT seria aplicado no final do ano letivo, aos mesmos estudantes que o tinham resolvido no início do ano, para efetuar análises comparativas longitudinais, quer para avaliar o efeito, no desempenho dos estudantes, da formação em Matemática do 1.º ano, quer para averiguar em que medida o PMAT avalia o que se pretende, sendo sensível às experiências de aprendizagem e treino (validação). No entanto, este segundo momento de aplicação veio a revelar-se inconveniente pelas instituições participantes, por estar previsto para a época de entrega de trabalhos e de preparação para as avaliações finais. A complexidade da logística do processo de administração do PMAT também dificultou a repetição da aplicação do teste, tendo sido possível realizá-la apenas uma vez, no início do 2º semestre, com o PMAT-01.

O PMAT-01 foi aplicado pela segunda vez a estudantes que já tinham resolvido a prova, no início do ano letivo, durante a sua primeira semana de aulas do 2.º semestre, em fevereiro de 2011. Os participantes nesta aplicação, designada por ***reteste após treino de competências***, frequentemente abreviada para *reteste*, eram alunos de cursos de Engenharia da uma mesma universidade.

Quer no estudo piloto, quer nos ensaios experimentais e no reteste, as instituições de ensino onde os testes foram aplicados responsabilizaram-se pela administração das provas.

A SPM enviou, para o professor responsável pela aplicação dos testes em cada instituição, folhas de resposta e, para fotocopiar, um exemplar dos diferentes cadernos de teste - dois cadernos nos casos em que o teste teve uma forma e quatro cadernos quando o teste teve duas formas (cada forma tinha duas versões). Foi recomendado aos professores cooperantes que, em cada sala, as versões deveriam ser distribuídas pelos alunos de modo alternado e as instruções lidas por um docente. No final, além das folhas de resposta, também os cadernos de teste deveriam ser recolhidos.

Qualquer uma das aplicações decorreu com normalidade. No entanto, quando o PMAT-00 e o PMAT-03 estavam a ser resolvidos pelos participantes, detetou-se um erro em cada teste - o item 15 do PMAT-00 e o item 25 da versão A2 do PMAT-03 não tinham qualquer alternativa de resposta correta. Por consequência, estes itens foram anulados. O primeiro, a todos os participantes; o segundo, apenas aos estudantes a quem tinha sido distribuída a versão A2 com o item errado, uma vez que foi possível corrigi-lo antes de o teste ser aplicado nas outras escolas.

3.3.2 Escala Multidimensional de Auto-Eficácia Percebida (MSPSE)

O construto de autoeficácia foi definido por Bandura (1977), no âmbito da sua teoria sociocognitiva, como sendo o juízo sobre a capacidade pessoal para realizar uma tarefa ou atividade. Este construto é mensurável e a sua medida foi operacionalizada por Bandura (1990), através do questionário *Multidimensional Scales of Perceived Self-Efficacy* (MSPSE).

A investigação tem mostrado que existe uma relação entre a perceção que um estudante tem da sua eficácia no contexto académico e os seus resultados escolares (Delgado, 2012). Esta informação suscitou o interesse pelas correlações entre as pontuações do PMAT e os itens da MSPSE. Assim, em articulação com um estudo desenvolvido por Delgado (2012), que conduziu a uma dissertação de mestrado, orientada pela psicóloga que orientou esta investigação, procuraram-se essas correlações.

A versão portuguesa da MSPSE (Escala Multidimensional de Auto-Eficácia Percebida) destinada aos estudantes do ensino superior (Teixeira, 2008) foi aplicada a alunos de uma universidade que colaborou no 2.º ensaio experimental do PMAT, em setembro de 2010. Depois de os participantes entregarem o caderno de teste e a folha de respostas do PMAT-01, foi-lhes solicitado que respondessem ao questionário que se caracteriza do seguinte modo.

A MSPSE é composta por 57 itens, cada um com cinco alternativas de resposta de uma escala de Likert [(1) Nada Fácil (2) Não Muito Fácil (3) Fácil (4) Bastante Fácil (5) Muito Fácil], agrupados em nove escalas:

- Auto-eficácia para a obtenção de recursos sociais (4 itens; 1-4);
- Auto-eficácia para o sucesso académico (9 itens; 5-13; Item 5-Matemática, Item 6-Físico-Química);
- Auto-eficácia para a aprendizagem auto-regulada (11 itens; 14-24);
- Auto-eficácia para os tempos livres e atividades extracurriculares (8 itens; 25-32);
- Eficácia auto-regulatória (9 itens; 33-41);
- Auto-eficácia para ir ao encontro das expectativas dos outros (4 itens; 42-45);
- Auto-eficácia-social (4 itens; 46-49);
- Eficácia auto-assertiva (4 itens; 50-53);
- Auto-eficácia para a obtenção de recursos parentais e comunitários (4 itens; 54-57).

A MSPSE é um instrumento de avaliação utilizado na área da Psicologia, com o qual se esperam respostas espontâneas. Para não comprometer essa espontaneidade, o conteúdo do teste não é divulgado. O que, aliás, é imposto pelo Código Deontológico da Ordem dos Psicólogos Portugueses[5], que abrange a psicóloga que supervisionou os trabalhos do mestrado acima referido.

No presente estudo, a MSPSE foi utilizada como fonte de validação do PMAT (secção 4.1.2). Para esse efeito, analisaram-se as correlações entre os itens deste questionário e as pontuações no teste e no reteste do PMAT-01, obtidas pelos estudantes que participaram nas duas aplicações do teste.

3.3.3 Protocolo de Entrevista Semiestruturada

Tendo como objetivo conhecer a perspetiva dos estudantes sobre a transição da Matemática do ensino secundário para a do superior e detetar fatores que influenciam o seu desempenho em Matemática, em março e abril de 2011, entrevistaram-se alguns participantes no teste e no reteste do PMAT-01, para efetuar um estudo de casos. Estes estudantes agruparam-se em duas subamostras contrastadas quanto aos resultados no PMAT e nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre. Os elementos de uma subamostra designaram-se por Melhores Alunos e os da outra por Piores Alunos. Os critérios definidos para selecionar os estudantes de cada uma destas subamostras encontram-se na secção 3.4.3, na qual se caracterizam os entrevistados.

As entrevistas realizadas no âmbito desta investigação foram preparadas para serem individuais, presenciais, semiestruturadas e realizadas em 15 minutos. Neste período de tempo, pretendia-se conhecer, sob a forma de uma conversa orientada, a opinião dos estudantes acerca do ensino e aprendizagem da Matemática, tanto no ensino secundário como no superior, as suas experiências neste domínio, a natureza das dificuldades que têm para aprender as matérias e ainda as medidas que sugerem para combater o insucesso escolar em Matemática. Foram estas características das entrevistas que determinaram a construção do seu protocolo ou guião, que se encontra no Apêndice D, com base nas diretrizes recomendadas por peritos, como Foddy (2002 [1993]) e Tuckman (2002).

[5]No Ponto 4.5 dos Princípios Específicos do Código Deontológico da Ordem dos Psicólogos (Regulamento n.º 258/2011) lê-se "…Os materiais e protocolos de avaliação, incluindo manuais, itens, e sistemas de cotação e interpretação, não são disponibilizados aos clientes ou a outros profissionais não qualificados. Os/as psicólogos/as asseguram a protecção e segurança dos materiais de avaliação, prevenindo a sua divulgação para o domínio público."

Organização do Protocolo da Entrevista

O desenvolvimento das entrevistas semiestruturadas deve ser adaptado ao entrevistado, o que implica, normalmente, que as questões semiabertas não sejam apresentadas sempre na mesma ordem e que cada uma delas tenha graus de exploração distintos. O guião de entrevista permite que o entrevistador oriente as entrevistas, garantindo que os diversos participantes respondem às mesmas questões dentro do período estabelecido. Este documento, além das perguntas a fazer aos entrevistados, descreve o propósito da entrevista e o perfil dos entrevistados, informa sobre o meio de comunicação utilizado, o local, a data e a hora da realização da entrevista. O espaço em branco associado a cada questão permite registar, por escrito, a resposta do entrevistado ou qualquer anotação relativa aos seus gestos ou expressões.

O protocolo, organizado para as entrevistas realizadas neste estudo, guia o entrevistador no sentido de solicitar as seguintes informações ou opiniões aos entrevistados, agrupadas por temas:

1. **Do Ensino Secundário -** classificações a Matemática, designação do curso que frequentaram e de atividades extracurriculares de Matemática em que tenham participado;

2. **História pessoal da relação com a Matemática** – desempenho na disciplina de Matemática ao longo do percurso escolar, identificação de fatores que influenciaram a aprendizagem desta disciplina e a autoavaliação da preparação para estudar Matemática no ensino superior, em dois momentos distintos: após a conclusão do secundário e no início do 2.º semestre do ensino superior;

3. **A Matemática no ensino superior**, em particular sobre
   - O **PMAT-01** e a comparação entre a dificuldade de resolução do teste nas duas aplicações;
   - O **Funcionamento** das unidades curriculares de Matemática do 1.º ano do curso - número de horas de aulas, quantidade de matéria lecionada, métodos de ensino e de avaliação, material de estudo, relacionamento com os docentes e o uso, ou não, de calculadora;
   - A **Aprendizagem** da Matemática no ensino superior - as matérias onde tiveram mais dificuldades de aprendizagem (superadas ou não), comparação entre a Matemática ensinada no ensino secundário e a do superior, a capacidade de um

estudante com menos de 13 valores a Matemática no secundário compreender os conteúdos ensinados no superior e ainda a relação entre o tipo de ensino, de aprendizagem e de exigência destes dois níveis de ensino;

- Os fatores que permitiram (para os Melhores Alunos) ou não permitiram (para os Piores Alunos) obter **Aproveitamento** às unidades curriculares de Matemática do 1.º ano;

4. **As Dificuldades a Matemática -** dificuldades que, no geral, os alunos têm no ensino superior, medidas a tomar para as superar e quais os fatores que consideram indispensáveis para se ter sucesso a Matemática.

Por último, o protocolo sugere que se peça aos entrevistados para darem a sua opinião sobre o conteúdo da entrevista e a forma como foi orientada.

Entrevistas

Depois do tratamento dos dados da segunda aplicação do PMAT-01, foram identificados os 20% de participantes para integrarem a subamostra dos Melhores Alunos e os 20% para a subamostra dos Piores Alunos. A professora de *Álgebra Linear* dos estudantes selecionados contactou-os pessoalmente e solicitou-lhes que concedessem uma entrevista no âmbito desta investigação. Todos manifestaram interesse em participar e concordaram com o dia e a hora agendados para serem entrevistados.

No âmbito da preparação das entrevistas, foi preenchida a parte inicial do guião de cada uma: dados pessoais e classificações do entrevistado. As classificações relativas ao ingresso no ensino superior obtiveram-se na página *web* de colocações de 2010 no *site* da Direção Geral do Ensino Superior (http://www.dges.mctes.pt/coloc/2010/), utilizando o número do Cartão de Cidadão dos estudantes.

A literatura que a entrevistadora consultou para construir o protocolo também lhe sugeriu os procedimentos que deveria tomar ao conduzir as entrevistas. Assim, preparou-se para respeitar as seguintes atitudes: receber o entrevistado com cordialidade, informá-lo da confidencialidade dos seus dados, dos objetivos da entrevista e da importância da sua colaboração; garantir que a entrevista decorre num ambiente agradável; começar por fazer perguntas fáceis de responder; evitar influenciar as respostas pela entoação ou destaque oral de palavras.

No dia 25 de março de 2011 foram entrevistados, individualmente, 12 dos Melhores Alunos, no dia 1 de abril dois dos Melhores e cinco dos Piores e, no dia 15 de abril, seis dos Piores Alunos (3 dos Piores Alunos não compareceram no dia 1 nem no dia15, como tinha sido acordado). As entrevistas decorreram numa sala do edifício em que os entrevistados tinham aulas, amavelmente reservada para o efeito pela sua professora de *Álgebra Linear*.

Com uma duração entre 15 e 20 minutos, as entrevistas foram registadas sob a forma de gravação áudio, após consentimento informado dos entrevistados - cada entrevistado declarou estar disposto a participar na investigação, assinando uma ficha que contém informações sobre a entrevista, como a confidencialidade das suas respostas, o objetivo da entrevista e a importância da sua colaboração, a qual já lhe tinha sido agradecida quando foi recebido e saudado. Esta ficha, denominada Consentimento Informado, encontra-se no Apêndice D.

Com o registo prévio de alguns dados pessoais e de classificações académicas dos alunos, a entrevistadora dirigiu a entrevista, orientando-se pelo guião. Fez as perguntas pela ordem sugerida ou alterou-a sempre que entendeu oportuno, procurando utilizar um tom informal, de conversa, e adotar outros procedimentos recomendados para o efeito, tendo concluído as entrevistas com mais um agradecimento pela colaboração.

Nalguns casos, depois de a entrevista ser dada como terminada, a conversa desenvolvida foi prolongada, mas agora entre um indivíduo que experimenta dificuldades próprias dos estudantes do 1.º ano do ensino superior e outro que tem acompanhado de perto, já há alguns anos, muitos desses estudantes.

3.3.4 Questionário de Dados Pessoais

No âmbito deste trabalho, designa-se por questionário de dados pessoais o conjunto de três itens incluídos na folha de respostas do PMAT que solicitam o ano de nascimento, o género e o tipo de exame nacional realizado, ou não, pelo estudante.

Em relação a todos os participantes no PMAT, apenas se conhecem estes dados biográficos porque não foi viável reter os estudantes por mais de duas horas, o tempo disponibilizado para a resolução do teste. No decorrer desta investigação ainda se aplicaram outros dois questionários mais completos, mas que acabaram por não ser utilizados como instrumentos de avaliação no presente trabalho.

Feita a descrição dos materiais utilizados neste estudo e do modo como foram administrados segue-se a caraterização dos indivíduos a quem foram aplicados.

3.4 Participantes no Estudo

Esta investigação não teria sido possível, nos termos em que foi desenvolvida, se não tivesse contado com a colaboração de milhares de estudantes, ao longo da construção do PMAT. Todos os alunos que resolveram alguma versão do teste contribuíram, não só para a melhoria gradual da prova, mas também para o desenvolvimento do estudo, no seu âmbito mais geral.

Os outros instrumentos de avaliação utilizados foram aplicados a estudantes que já tinham resolvido uma versão do PMAT. Assim, o total de participantes no estudo coincide com o número de indivíduos a quem foi aplicado, pelo menos, um teste do PMAT.

A par dos procedimentos de amostragem adotados, segue-se a caracterização dos estudantes que participaram nesta investigação. Além de outros aspetos mais específicos, relevantes para cada um dos estudos desenvolvidos, os estudantes diferenciam-se pelo género, pela idade, pelo tipo de exame nacional de Matemática que realizaram e pela instituição de ensino a que pertenciam. Recorde-se que, exceto os participantes no estudo piloto, todos os outros colaboraram como alunos que estavam a iniciar o 1.º ano, pela primeira vez, de cursos superiores de ciências ou de tecnologias.

As instituições de ensino que colaboraram na aplicação do PMAT, fizeram-no na sequência de contactos pessoais de elementos da SPM, como se referiu atrás. Nesta apresentação, elas não serão nomeadas por não se dispor de autorização prévia para a sua identificação. Assim, distinguem-se do seguinte modo: as universidades representam-se por U1, U2, U3 e U4, o instituto politécnico por P; U1, U2 e U4 são as universidades da Região de Lisboa, U3 a da Região do Centro; os participantes de U2 e U4 frequentavam cursos de Economia e Gestão, enquanto os outros eram alunos de cursos de Ciências Exatas e Engenharias.

Antes de caracterizar as amostras analisadas em cada estudo desenvolvido neste trabalho, considere-se a Tabela 3.4 onde se incluem todos os participantes na investigação. Com exceção dos que colaboraram no PMAT-12, alunos do 12.º ano de escolas secundárias e colégios, os estudantes estão associados à instituição que estavam a frequentar. Os números sombreados indicam o total de indivíduos que já tinham participado noutra aplicação do PMAT.

Tabela 3.4 - Participantes no estudo piloto, nos ensaios experimentais e no reteste do PMAT

PARTICIPANTES NO ESTUDO PMAT/INSTITUIÇÃO (N=7910)								
INSTITUIÇÃO / PMAT	Escol. Secundárias e Colégios		U1	U2	U3	U4	P	Total
PMAT-12	Forma A	Forma B	-	-		-		437
maio.2009	168+41*	168+60*						
PMAT-00 set.2009	-		1247	176	-	-	126	1549
PMAT-01 set.2010	-		1220+75	-	671	69	-	2035
fev.2011	-		75+18**	-	-	-	-	93
PMAT-02 set.2011	-		1263	153	672	-	-	2088
PMAT-03 set.2012	-		1292	127	532			1951
Total de estudantes	269 (437-168*)		5115 (5190-75**)	456	1875	69	126	8153 / **7910**

* 168 participantes fizeram ambas as formas do PMAT-12; 41 fizeram apenas a Forma A e 60 a B.
** O PMAT-01 foi aplicado duas vezes a 75 estudantes; 18 alunos participaram apenas no reteste.

Observe-se que, além dos referidos 7910 estudantes, houve mais 110 que participaram em algum teste do PMAT, mas foram excluídos do estudo porque não preencheram corretamente todos os campos da folha de respostas - não indicaram o ano em que nasceram, ou o género, ou a versão do teste a que responderam ou, ainda, assinalaram uma letra que não correspondia a qualquer alternativa de resposta a algum item. Assim, no total, o PMAT foi aplicado, pelo menos uma vez, a 8020 estudantes.

Caracterizam-se de seguida as diversas amostras e subamostras dos quatro ensaios experimentais do PMAT, entre os quais se destaca o mais recente por se apresentarem e analisarem os seus resultados, os participantes nos estudos longitudinal e de validação, assim como os estudantes entrevistados.

3.4.1 Amostras dos Ensaios Experimentais do PMAT

Os participantes nos ensaios experimentais do PMAT candidataram-se ao ensino superior com o exame nacional de *Matemática A* (Mat A) ou com o de *Matemática B* (Mat B) ou foram admitidos sem qualquer um destes exames (Mat X). A Tabela 3.5 mostra o número de estudantes de cada um destes grupos.

Tabela 3.5 - Participantes nos ensaios experimentais: Exame Nacional/Instituição

PARTICIPANTES NOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS DO PMAT EXAME NACIONAL/INSTITUIÇÃO					
Teste		**EXAME NACIONAL**			**Total**
	INSTITUIÇÃO	**Mat A**	**Mat B**	**Mat X**	
PMAT-00 (set.2009)	**U1**	1201	29	17	1247
	U2	168	0	8	176
	P	31	28	67	126
	Total	**1400** (90,38%)	**57**(3,68%)	**92** (5,94%)	**1549**
PMAT-01 (set.2010)	**U1**	1227	40	28	1295
	U4	69	0	0	69
	U3	602	55	14	671
	Total	**1898** (93,27%)	**95** (4,67%)	**42** (2,06%)	**2035**
PMAT-02 (set.2011)	**U1**	1221	28	14	1267
	U2	148	0	5	153
	U3	583	44	45	672
	Total	**1952** (93,49%)	**72** (3,45%)	**64** (3,06%)	**2088**
PMAT-03 (set.2012)	**U1**	1236	25	31	1292
	U2	127	0	0	127
	U3	516	5	11	532
	Total	**1879** (96,31%)	**30** (1,54%)	**42** (2,15%)	**1951**
TOTAL		**7129** (93,52%)	**254** (3,33%)	**240** (3,15%)	**7623**

A grande maioria dos participantes pertence ao grupo Mat A. A percentagem de estudantes que não realizaram o exame nacional de *Matemática A* foi diminuindo de um ensaio experimental para o seguinte, variando entre os 9,6% e os 3,7%. Em rigor, nem tantos alunos dos grupos Mat B ou Mat X deveriam ter participado no PMAT, por não fazerem parte da população em estudo (sabe-se que entre os participantes de uma das universidades existem alunos do curso de Arquitetura, admitidos com *Matemática B*). Porém, a falta de informação relativa ao curso frequentado pelos estudantes não permitiu a sua identificação e conduziu à consequente eliminação dos respetivos dados das amostras. Também no que respeita a Mat X, acredita-se que alguns dos alunos incluídos neste grupo pertencem, na realidade, a Mat A ou Mat B mas não preencheram o campo da folha de respostas que solicitava este dado.

Importa caracterizar os participantes no que respeita ao género. A Tabela 3.6 mostra como eles se distribuem por ensaio experimental, instituição, género e exame nacional.

Tabela 3.6 - Participantes nos ensaios experimentais: Género/Exame Nacional/Instituição

PARTICIPANTES NOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS DO PMAT GÉNERO/EXAME NACIONAL/INSTITUIÇÃO										
Teste		GÉNERO/EXAME NACIONAL								Total
	INSTIT.	Masculino				Feminino				
		Mat A	Mat B	Mat X	Total	Mat A	Mat B	Mat X	Total	
PMAT-00 (set.2009)	**U1**	880	8	10	898	321	21	7	349	1247
	U2	90	0	6	96	78	0	2	80	176
	P	24	21	59	104	7	7	8	22	126
	Total	**994**	**29**	**75**	**1098 (70,88%)**	**406**	**28**	**17**	**451 (29,12%)**	**1549**
PMAT-01 (set.2010)	**U1**	892	14	23	929	335	26	5	366	1295
	U4	42	0	0	42	27	0	0	27	69
	U3	375	46	11	432	227	9	3	239	671
	Total	**1309**	**60**	**34**	**1403 (68,94%)**	**589**	**35**	**8**	**632 (31,06%)**	**2035**
PMAT-02 (set.2011)	**U1**	892	18	11	921	329	10	3	342	1263
	U2	86	0	3	89	62	0	2	64	153
	U3	365	31	21	417	218	13	24	255	672
	Total	**1343**	**49**	**35**	**1427 (68,34%)**	**609**	**23**	**29**	**661 (31,66%)**	**2088**
PMAT-03 (set.2012)	**U1**	903	15	24	942	333	10	7	350	1292
	U2	59	0	0	59	68	0	0	68	127
	U3	305	1	9	315	211	4	2	217	532
	Total	**1267**	**16**	**33**	**1316 (67,45%)**	**612**	**14**	**9**	**635 (32,55%)**	**1951**
TOTAL		**4913**	**154**	**177**	**5244 (68,79%)**	**2216**	**100**	**63**	**2379 (31,21%)**	**7623**

Da observação desta tabela, nota-se que o número de alunos do género masculino ronda os dois terços da amostra em todos os ensaios e em quase todas as instituições. As subamostras de U2 e de U4 são as mais equilibradas quanto ao género, embora com o masculino em maioria, exceto no PMAT-03. Provavelmente, esta diferença entre escolas é justificada pela natureza dos cursos - em U2 e U4 os participantes frequentam cursos de Economia ou Gestão, enquanto nas outras os cursos são, essencialmente, de Engenharia.

Registe-se ainda que as raparigas representam 39% dos participantes com o exame nacional de *Matemática B* e que 26% dos elementos do grupo Mat X são do género feminino.

O total de estudantes de cada género que participaram nos ensaios experimentais encontra-se no Gráfico 3.1.

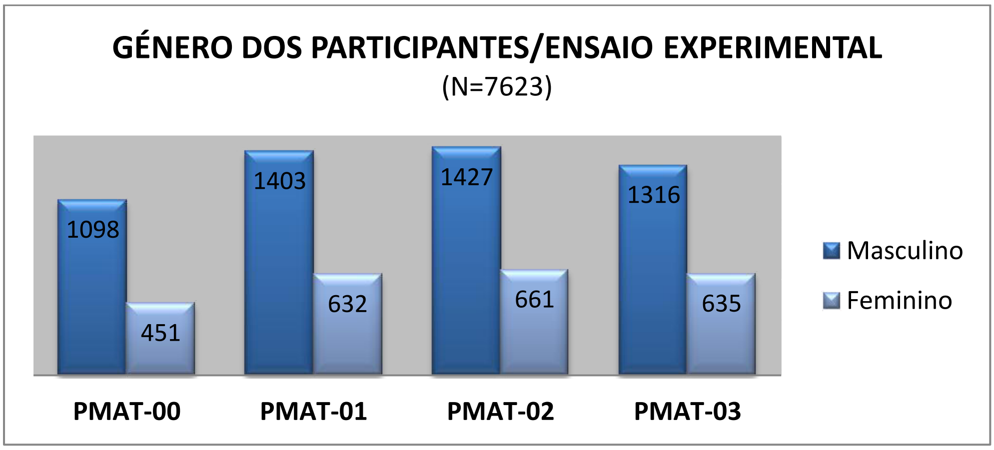


Gráfico 3.1 - Género dos participantes em cada ensaio experimental do PMAT

Com base na informação dada pelos participantes na folha de respostas, foi possível caracterizá-los por idade. Nas Tabelas E.1, E.2, E.3 e E.4 do Apêndice E, encontra-se a distribuição por género e por idade dos estudantes que resolveram algum teste do PMAT em setembro.

Nestas tabelas verifica-se uma grande concentração nos 18 anos. Cerca de 86% dos participantes tinham menos de 19 anos quando resolveram o PMAT, donde se deduz que ingressaram no ensino superior logo após a conclusão do ensino secundário. Há uma grande dispersão das amostras a partir dos 19 anos, mesmo na subamostra Mat X, onde se poderia contar com os "Maiores de 23 anos". De facto, os indivíduos com, pelo menos, 23 anos representam pouco mais de 1% do total dos participantes, dos quais só 4% são do género feminino. Registe-se também que, nos quatro ensaios, apenas 16 alunas tinham mais de 21 anos, o que representa 0,2% da totalidade dos participantes.

Como já foi mencionado, as amostras recolhidas em cada um dos ensaios do PMAT são constituídas, essencialmente, por estudantes que realizaram o exame nacional de

Matemática A (93,57%). Por ser pouco significativo o número de participantes que se candidataram com o exame de *Matemática B* ou sem qualquer um destes exames de Matemática, as respostas destes alunos não foram consideradas na análise dos testes. Pelo mesmo motivo, a investigação sobre os conhecimentos de Matemática dos estudantes baseou-se apenas nos resultados obtidos nas subamostras Mat A. Assim, não foi efetuado o estudo das subpopulações de estudantes definidas pela sua forma de ingresso no ensino superior, como planeado na fase inicial dos trabalhos.

Apesar de os participantes das subamostras Mat A estarem caracterizados por género e por idade nas Tabelas E.1, E.2, E.3 e E.4 do Apêndice E, optou-se por destacar no corpo do texto, sob a forma de gráfico, o modo como se distribuem. As idades dos participantes no último ensaio experimental estão mais detalhadas porque são as suas respostas ao PMAT que se apresentam e analisam neste trabalho.

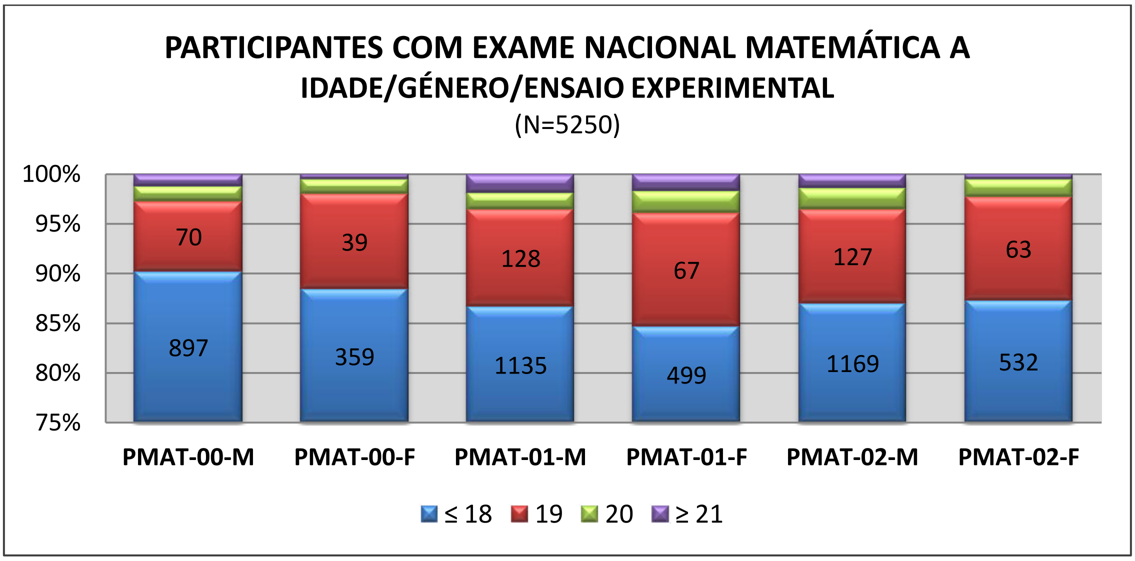


Gráfico 3.2 - Idade e género dos participantes das amostras Mat A nos PMAT-00 a PMAT-02

PARTICIPANTES NO PMAT-03 COM MATEMÁTICA A
IDADE/GÉNERO
(N=1879)

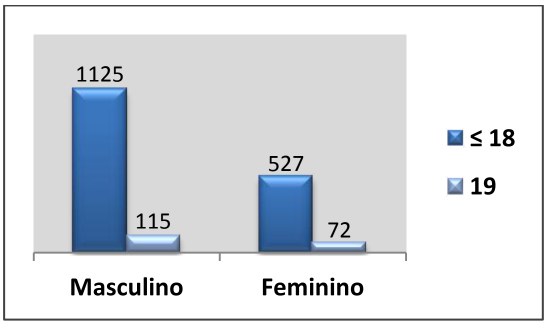


Gráfico 3.3 - PMAT-03/MAT A/<20 anos

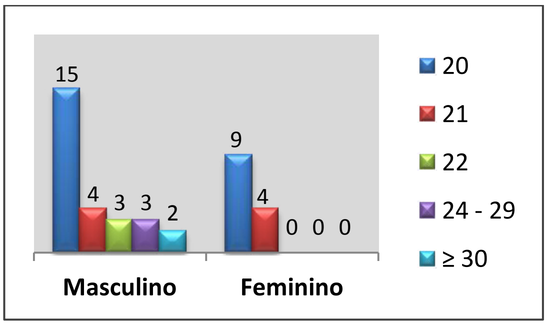


Gráfico 3.4 - PMAT-03/MAT A/≥20 anos

Observe-se que no PMAT-02, ao contrário dos outros ensaios, a percentagem de rapazes com menos de 19 anos é inferior à das raparigas. Note-se também que no PMAT-03 todas as participantes (do grupo Mat A) tinham menos de 22 anos de idade.

3.4.2 Amostra dos Estudos Longitudinal e de Validação

Como referido na secção 3.3.1, o PMAT-01 foi aplicado duas vezes (teste e reteste após treino de competências). A primeira aplicação ocorreu em setembro de 2010 à amostra caracterizada na secção anterior. A segunda aconteceu em fevereiro de 2011, na primeira semana de aulas do 2.º semestre, e contou com a colaboração de alunos de cursos de Engenharia da universidade U1, que tinham participado na primeira aplicação.

O principal objetivo do reteste do PMAT-01 era analisar a diferença de desempenho dos alunos antes e depois das aulas do 1.º semestre destes alunos. Deste modo, além de se efetuar um estudo de validação empírica do PMAT, também se conhece o efeito do treino de competências e da aprendizagem das matérias das unidades curriculares da área de Matemática do 1.º semestre, dos cursos destes alunos. Essas unidades foram *Álgebra Linear* (AL) e *Cálculo Diferencial e Integral I* (C-I), cujos conteúdos programáticos se passam a descrever:

Álgebra Linear **-** Resolução de sistemas de equações lineares. Método de eliminação de Gauss. Matrizes e vectores. Inversão de matrizes. Espaços lineares e transformações lineares. Independência linear. Bases e dimensão. Núcleo e contradomínio de uma transformação linear. Aplicações a equações diferenciais lineares. Produtos internos e normas. Bases ortogonais e ortogonalização de Gram-Schmidt. Complementos ortogonais e projecções. Equações de rectas e planos. Mínimos quadrados. Determinantes e aplicações. Valores e vectores próprios. Subespaços invariantes. Diagonalização de matrizes. Transformações hermiteanas, anti-hermiteanas e unitárias. Formas quadráticas.

Cálculo Diferencial e Integral I - Números reais (propriedades de corpo; relação de ordem e axioma do supremo). Números naturais. Método de indução. Sucessões: limite, sucessão de Cauchy. Funções reais de variável real: limite e continuidade; diferenciabilidade - teoremas fundamentais; Regra de Cauchy e levantamento de indeterminações; Fórmula de Taylor. Primitivação. Cálculo integral em R: integral de Riemann; integrabilidade de funções seccionalmente contínuas; teorema fundamental do cálculo; fórmulas de integração por partes e por substituição. Funções transcendentes elementares: logaritmo, exponencial e funções hiperbólicas. Séries numéricas: série geométrica; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências.

Entre os estudantes convidados a participar na segunda aplicação do PMAT-01, compareceram 75 que já tinham resolvido o teste em setembro e 18 que ainda não conheciam o teste, como se verifica na Tabela 3.4.

Tendo em vista o objetivo supracitado da segunda aplicação do PMAT-01, para se estabelecerem comparações entre os resultados do teste e os do reteste, na análise dos últimos foram apenas consideradas as respostas dos estudantes com o exame nacional de *Matemática A* que tinham realizado o PMAT-01 em setembro. Também foi com estas subamostras emparelhadas que se analisaram as correlações existentes entre as classificações finais de *Álgebra Linear* e de *Cálculo Diferencial e Integral I* e as pontuações obtidas nas aplicações do PMAT-01.

Todos os participantes no reteste responderam à *Escala Multidimensional de Auto-Eficácia Percebida* de Bandura (1990) (MSPSE), depois de resolverem o PMAT-01 em setembro. Na Tabela 3.7 caracterizam-se aqueles cujos resultados foram analisados no âmbito dos dois estudos de validação.

Tabela 3.7 - Caracterização da amostra Questionário MSPSE e Teste-Reteste

PARTICIPANTES (MAT A) NO TESTE-RETESTE E NA MSPSE GÉNERO/IDADE				
Género	**Idade** (em 2010)			**Total**
	≤18	**19**	**25**	
M	52	6	1	**59**
F	12	0	0	**12**
Total	**64**	**6**	**1**	**71**

Note-se como nesta amostra o género feminino ainda está menos representado, percentualmente, do que nas amostras dos ensaios experimentais. A este facto não será estranha a natureza dos cursos destes estudantes - são todos de Engenharia.

3.4.3 Amostra das Entrevistas

Os estudantes entrevistados incluem-se na amostra caracterizada na última tabela. Dos 71 participantes, selecionaram-se duas subamostras, cada uma com 14 indivíduos (20% da amostra), contrastadas quanto aos resultados no PMAT e nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, com base nos seguintes critérios, definidos para o efeito:

Melhores Alunos (M) - alunos que tiveram aproveitamento em *Álgebra Linear* e em *Cálculo Diferencial e Integral I*, com as médias mais elevadas das respetivas classificações finais e das pontuações dos testes do PMAT-01;

Piores Alunos (P) - alunos que tiveram as piores classificações nos testes do PMAT-01 e nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, tendo sido avaliados em ambas (reprovaram a, pelo menos, uma das unidades), mas melhoraram a pontuação do teste para o reteste.

A razão do estabelecimento destes critérios prende-se com o facto de se querer selecionar estudantes que se empenharam nos estudos e que foram bem-sucedidos ou, por determinado motivo que se pretendia conhecer, não conseguiram ter aproveitamento nas duas unidades curriculares, apesar de algum esforço investido.

Embora os 28 estudantes tenham aceitado o convite para serem entrevistados, apenas 25 compareceram à entrevista: os 14 melhores e 11 dos piores. Caracterizam-se do seguinte modo, quanto ao género e à idade.

Tabela 3.8 - Caracterização dos entrevistados: Tipo/Género/Idade

PARTICIPANTES NAS ENTREVISTAS TIPO/GÉNERO/IDADE			
Tipo de Aluno (Mat A)	**Género**		**Total**
	M	**F**	
Melhores	9	5	14
Piores	10	1	11
Total	**19**	**6**	**25**
Idade	Todos os participantes tinham 18 anos em 2010		

Repare-se que, embora as raparigas constituam 17% da amostra dos 71 estudantes considerados (Tabela 3.7), elas representam 36% da subamostra dos Melhores alunos.

Além das classificações ponderadas para distinguir os entrevistados, foram recolhidos outros dados, no *site* da Direção Geral do Ensino Superior (http://www.dges.mctes.pt/coloc/2010/), que facilitam a caracterização destes estudantes: a nota de candidatura, a nota da prova de ingresso, a média de 10.º/11.º e a média do 12.º ano de escolaridade.

Com estes dados, construiu-se a Tabela 3.9 para descrever cada entrevistado relativamente aos aspetos relevantes para o estudo a desenvolver. As abreviaturas que constam na tabela têm o seguinte significado:

Est/Ent: estudante entrevistado, identificado por **Mi** ou **Pi**, consoante se trate de um dos melhores ou um dos piores, respetivamente, com $i = 1, \ldots, 25$, o número de ordem da sua entrevista;

NC: Nota de candidatura (0-200);

PI: Nota da prova de ingresso (0-200), sendo *Matemática A* para um dos cursos e *Matemática A* e *Física e Química* para os outros;

M12º: Média do 12.º ano de escolaridade (0-200), igual à do 10.º/11.º para todos os alunos;

C-I: Classificação final a *Cálculo Diferencial e Integral I* (0-20);

AL: Classificação final a *Álgebra Linear* (0-20);

PM/T: Pontuação no teste do PMAT-01 (0-40);

PM/R: Pontuação no reteste do PMAT-01 (0-40);

A Tabela 3.9 foi organizada de modo a separar os entrevistados por tipo, Melhores ou Piores, e, dentro de cada tipo, apresentados por ordem decrescente da nota de candidatura.

Tabela 3.9 - Estudantes entrevistados: Tipo/Género/Classificações

PARTICIPANTES NAS ENTREVISTAS TIPO/GÉNERO/CLASSIFICAÇÕES (N=25)								
Est/Ent	**Género**	**NC** (0-200)	**PI** (0-200)	**M12º** (0-200)	**C-I** (0-20)	**AL** (0-20)	**PM/T** (0-40)	**PM/R** (0-40)
M1	F	191,8	196,5	187,0	15	16	22	24
M19	M	181,0	190,0	172,0	14	15	17	24
M7	M	176,8	167,5	186,0	16	19	26	30
M6	M	176,0	183,0	169,0	17	17	24	35
M10	M	175,3	176,5	174,0	16	16	26	33
M2	F	166,5	170,0	163,0	16	15	20	22
M5	M	166,5	154,0	179,0	13	15	23	22
M3	M	166,3	171,5	161,0	14	14	28	28
M9	M	163,0	156,0	170,0	14	16	24	27
M4	M	162,0	171,0	153,0	16	12	21	26
M14	F	154,8	162,5	147,0	11	16	13	20
M11	F	154,3	138,5	170,0	12	14	17	15
M8	M	154,0	147,0	161,0	14	14	24	22
M12	F	136,3	136,5	136,0	14	14	11	16
P13	M	159,8	150,5	169,0	RE	10	20	25
P24	F	159,0	154,0	164,0	RE	RE	14	17
P23	M	154,5	149,0	160,0	RE	11	18	22
P17	M	153,0	152,0	154,0	RE	RE	21	26
P20	M	141,3	146,5	136,0	12	RE	20	21
P16	M	139,0	131,0	147,0	11	RE	11	16
P25	M	138,3	125,5	151,0	RE	RE	12	18
P15	M	137,8	121,5	154,0	11	RE	14	20
P21	M	133,3	125,5	141,0	RE	10	16	18
P18	M	130,8	121,5	140,0	RE	RE	10	14
P22	M	124,8	123,5	126,0	RE	RE	14	14

Observe-se que, entre os Melhores Alunos, que têm médias do 12º ano desde 136,0 a 187,0 pontos, as classificações de C-I variam entre 11 e 17 valores e as de AL entre 12 e 19. Os que conseguiram a melhor média das notas de C-I e de AL (M6, M7 e M10) também obtiveram as melhores pontuações nos testes do PMAT.

Por outro lado, os Piores Alunos candidataram-se ao ensino superior com nota da prova de ingresso compreendida entre 121,5 e 154,0, sendo as duas melhores notas de alunos que reprovaram a *Cálculo I* e a *Álgebra Linear* (P24 e P17), tendo um deles (P17) obtido uma pontuação nos testes do PMAT acima da média.

Além das características quantitativas desta amostra, é de salientar o empenho dos entrevistados em colaborar na investigação. A sua franqueza nas respostas comprova que expressaram aquilo que realmente pensam acerca dos tópicos abordados na entrevista.

Capítulo 4

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Após a aplicação dos instrumentos de avaliação utilizados nesta investigação, procedeu-se ao tratamento dos dados recolhidos. Os resultados obtidos foram analisados tendo como referência os objetivos da pesquisa e as hipóteses formuladas, segundo procedimentos que se enquadram nas técnicas de investigação da metodologia correlacional que orienta o estudo, articulados com a revisão da literatura efetuada.

A maioria dos resultados apresenta-se em quadros, tabelas ou gráficos, acompanhados de comentários que os relacionam com a questão que motivou a sua análise. A interpretação do seu significado, no âmbito da investigação, não é feita de imediato, mas sim no Capítulo 5, que se organizou com a discussão de todos os resultados a que a pesquisa conduziu. Algumas tabelas com dados complementares são apresentadas no Apêndice E, sendo identificadas por Tabela E.#.

4.1 Avaliação Objetiva de Conhecimentos: medidas dos participantes

Os resultados apresentados, analisados e discutidos relativos ao PMAT, o teste de conhecimentos de Matemática utilizado nesta investigação, são os que se obtiveram com o **PMAT-03,** aplicado a estudantes que realizaram o exame nacional de ***Matemática A***.

Como antes referido, este teste resultou de quatro revisões e aperfeiçoamentos sucessivos, que sucederam a análise metrológica dos resultados do estudo piloto e de ensaios experimentais do PMAT, efetuadas e apresentadas à SPM por, respetivamente, Afonso (2009) e Afonso e Monteiro (2010, 2011, 2012).

Os dados observados nesta secção foram recolhidos em setembro de 2012, na primeira semana de aulas dos alunos do 1.º ano de três universidades, designadas U1, U2 e U3. Os estudantes que resolveram o PMAT estavam a iniciar os seus estudos superiores - os da universidade U2 em cursos de Economia ou Gestão e os das outras universidades em cursos de Ciências ou de Tecnologias.

Admite-se que a maior parte dos participantes deve ter concluído o ensino secundário nesse mesmo ano, sem qualquer reprovação no percurso escolar, pois 88% deles completavam 17 ou 18 anos de idade em 2012, como se verifica na Tabela E.4. Os rapazes estão em maioria na amostra analisada, dado que representam 67% da amostra, como se depreende da mesma tabela e da Tabela 3.6.

As respostas dos estudantes ao PMAT são analisadas sob duas perspetivas. Nesta secção, apresenta-se uma análise quantitativa, na qual se consideram as respostas apenas como resultados de um teste, sem atender ao objeto de avaliação, que permite deduzir o nível de desempenho e o nível de competência dos participantes no PMAT. Na secção seguinte, as respostas são observadas em face do conteúdo do enunciado, da resposta certa e dos distratores de cada item, sendo efetuada uma análise mais qualitativa.

O rigor científico de qualquer um destes estudos requer confiança nos dados em que eles se fundamentam, ou seja, exige que as respostas dadas pelos estudantes sejam o resultado de uma avaliação objetiva dos seus conhecimentos em Matemática. Assim, no sentido de procurar indicadores fidedignos da qualidade do PMAT como teste estandardizado, fez-se um estudo das características metrológicas das suas medidas. Este estudo apresenta-se no âmbito da análise quantitativa dos resultados do teste, uma vez que se baseia no número (e no padrão) de respostas certas, erradas e omissas dos participantes aos itens do PMAT.

4.1.1 Respostas Certas, Erradas e Omissas ao PMAT

O PMAT tem duas versões (A1 e A2), cada uma com 32 itens de escolha múltipla (convencional) com três alternativas de resposta. As versões diferem apenas na ordenação das alternativas de resposta dos itens, uma vez que eles são os mesmos e estão apresentados na mesma sequência.

Na Tabela 4.1 encontra-se o número de estudantes da amostra observada que responderam a cada uma das versões do PMAT, distribuídos pelas universidades a que pertenciam.

Tabela 4.1 - Número de estudantes, por universidade, que realizaram cada versão do PMAT

DISTRIBUIÇÃO DAS VERSÕES DO PMAT POR UNIVERSIDADE n (% do TOTAL)				
VERSÃO	Universidade			TOTAL
	U1	U2	U3	
A1	623 (33,2%)	65 (3,5%)	262 (13,9%)	**950** (50,6%)
A2	613 (32,6%)	62 (3,3%)	254 (13,5%)	**929** (49,4%)
TOTAL	**1236** (65,8%)	**127** (6,8%)	**516** (27,5%)	1879 (100%)

Em cada instituição houve preocupação em distribuir, pelos participantes, tantos testes A1 como A2. Apesar de não ter havido esse cuidado em relação ao género, registaram-se quase tantos indivíduos de cada género a resolver a versão A1 como a versão A2, o que se observa no Gráfico 4.1.

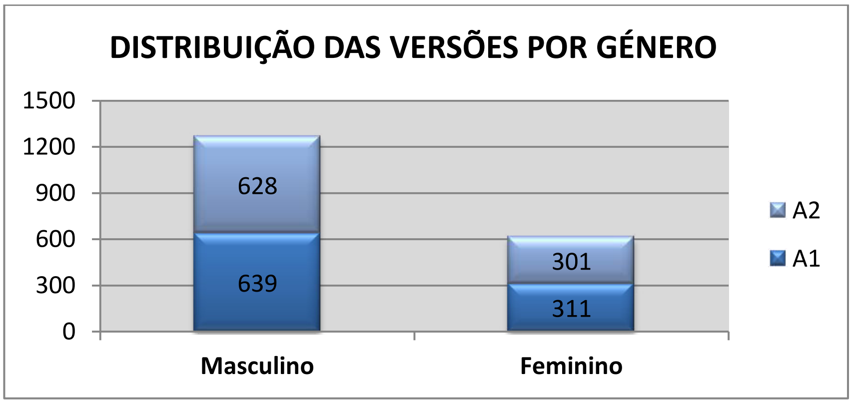


Gráfico 4.1 - Número de estudantes, por género, que realizaram cada versão do PMAT

É de assinalar que o item 25 da versão A2 aplicada aos participantes da universidade U1, por lapso, não tinha qualquer alternativa de resposta correta. Entre transformar em omissas as respostas que estes estudantes deram ao item, excluir estes indivíduos do estudo ou excluir o item, optou-se por esta última hipótese para apresentar os resultados do PMAT, por se entender que este é o modo em que se perde menos informação. Assim, daqui em diante, e salvo informação em contrário, quando se faz referência à **amostra total**, pretende-se dizer que estão a ser considerados os **1879 participantes** e, apenas, **31 itens** do teste.

A partir dos dados da amostra total, construíram-se os seguintes gráficos com o total de respostas certas, erradas e omissas, obtidas em cada versão do PMAT. Saliente-se o Gráfico 4.5, onde se pode ver que os estudantes que omitiram respostas são *outliers*.

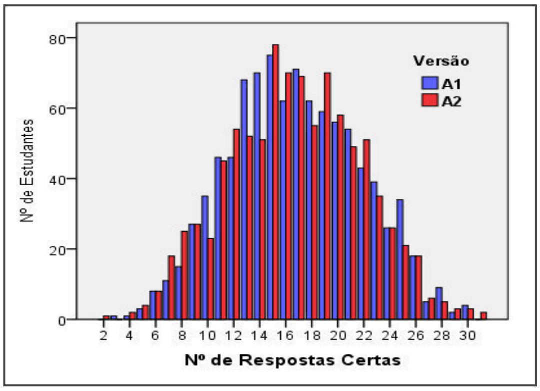


Gráfico 4.2 - Pontuação dos estudantes em cada versão do PMAT

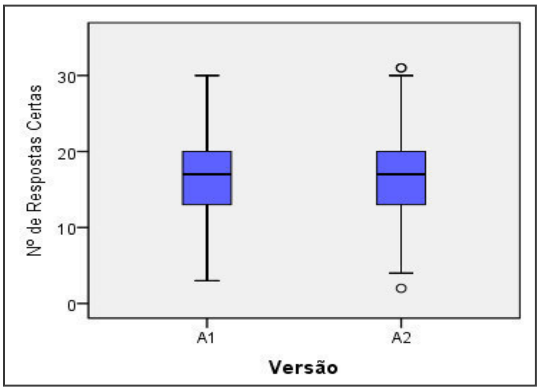


Gráfico 4.3 - Extremos e quartis das respostas certas em cada versão do PMAT

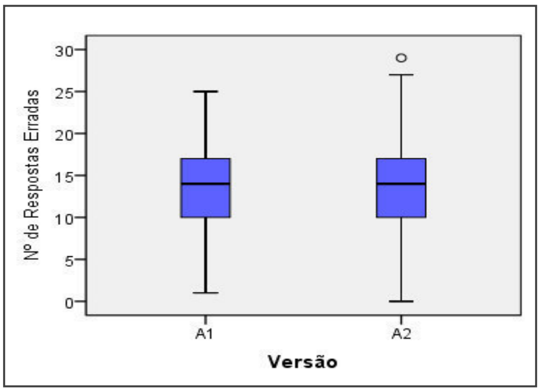


Gráfico 4.4 - Extremos e quartis das respostas erradas em cada versão do PMAT

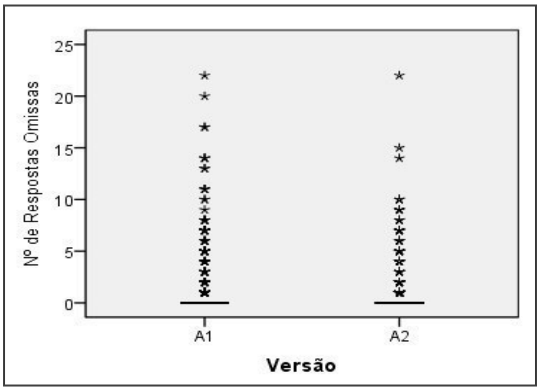


Gráfico 4.5 - Extremos e quartis das respostas omissas em cada versão do PMAT

Para comparar resultados das versões A1 e A2 e verificar a legitimidade de serem, de seguida, tratadas como um mesmo teste, analisaram-se os dados da Tabela 4.2, sendo os das últimas três colunas o *p-value* dos testes de hipóteses aplicados.

Tabela 4.2 - Comparação das versões do PMAT

COMPARAÇÃO DAS VERSÕES A1 e A2 DO PMAT Amostra Total (A1: n=950; A2: n=929)								
Variável (0-31)	**Versão**	**Min-Max**	**Mediana**	**Média**	**Desvio Padrão**	**Kolmog-Smirnov (*p*)**	**Levene (*p*)***	**Mann-Whitney (*p*)****
Certas	A1	3-30	17	16,79	5,03	0,000	0,865	0,966
	A2	2-31	17	16,65	5,10	0,000		
Erradas	A1	1-25	14	13,58	4,90	0,000	0,993	0,661
	A2	0-29	14	13,85	5,01	0,000		
Omissas	A1	0-22	0	0,63	2,15	0,000	0,160	0,641
	A2	0-22	0	0,50	1,72	0,000		

*baseado na mediana;   ** comparando medianas

Na versão A2 houve, pelo menos, um estudante que respondeu corretamente aos 31 itens (concretamente, houve dois), enquanto na versão A1 todos erraram, pelo menos, um item (dois indivíduos tiveram 30 respostas certas); os valores das medianas e das médias de cada variável sugerem semelhança entre os resultados das duas versões.

Da aplicação do teste de Kolmogorov-Smirnov conclui-se que não existe normalidade nas distribuições mas, em contrapartida, para qualquer das variáveis, não se rejeita a hipótese nula do teste de Levene (há igualdade de variâncias entre as distribuições); a comparação das duas distribuições, feita com o teste não paramétrico de Mann-Whitney dado não se ter confirmado a normalidade das distribuições, permite inferir que elas não são significativamente diferentes ($p > 0{,}05$).

Perante estes resultados, que legitimam o agrupamento das respostas da versão A1 com as da versão A2, converteram-se as respostas dadas a A2 em respostas de A1, ordenando as alternativas de resposta dos itens de A2 como as dos itens da versão A1. Assim, o PMAT passou a ser analisado com sendo um único teste.

Considerem-se as medidas de localização, de dispersão, de assimetria e de curtose das respostas certas, erradas e omissas dadas por todos os estudantes, apresentadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 - Estatísticas descritivas das respostas certas, erradas e omissas

ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DO PMAT Amostra Total (N=1879)								
Respostas	**Min - -Max**	**Amplitude**	**Mediana**	**Média**	**Variância**	**Desvio Padrão**	**Assimetria**	**Curtose**
Certas	2-31	29	17	16,72	25,60	5,06	0,06	-0,43
Erradas	0-29	29	14	13,71	25,54	4,95	-0,08	-0,47
Omissas	0-22	22	0	0,57	3,82	1,95	5,43	37,73

Excetuando as respostas omissas, pode dizer-se que a distribuição das variáveis é simétrica e que a sua curva de frequências é um pouco mais fechada que a de uma distribuição Normal, como se pode observar no Gráfico 4.6. O número reduzido de respostas omissas traduz-se numa distribuição assimétrica positiva com uma curtose elevada, como é patente no histograma do Gráfico 4.7.

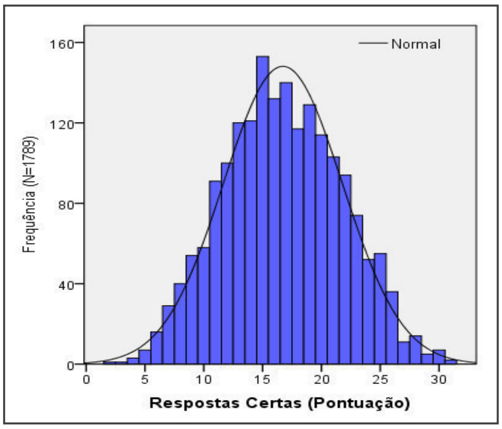


Gráfico 4.6 - Respostas certas no PMAT

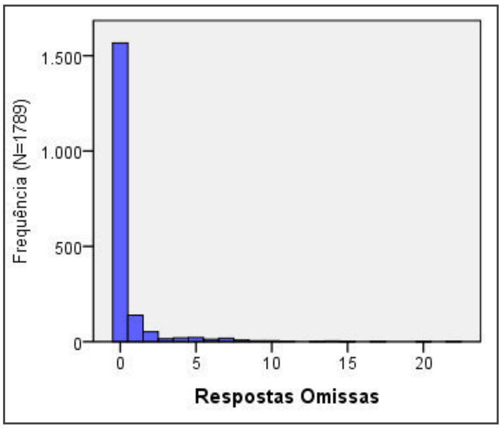


Gráfico 4.7 - Respostas omissas no PMAT

A amostra total foi dividida em subamostras em função da variável género e da variável universidade e procuraram-se os valores que se apresentam nas Tabela 4.4 e 4.5.

Os dados da Tabela 4.4 revelam uma tendência de superioridade das pontuações obtidas pelos estudantes do género masculino. Os rapazes erraram menos itens e omitiram mais respostas do que as raparigas[1].

Tabela 4.4 - Estatísticas descritivas das respostas certas, erradas e omissas por género

COMPARAÇÃO DE SUBAMOSTRAS - RESPOSTAS/GÉNERO Amostra Total (Masculino: n=1267; Feminino: n=612)									
Estatísticas Descritivas	**Respostas Certas**			**Respostas Erradas**			**Respostas Omissas**		
	Total	**Género**		**Total**	**Género**		**Total**	**Género**	
		M	**F**		**M**	**F**		**M**	**F**
Min-Max	2-31	2-31	5-30	0-29	0-29	1-25	0-22	0-22	0-14
Amplitude	29	29	25	29	29	24	22	22	14
Mediana	17	17	15	14	13	15	0	0	0
Média	16,72	17,15	15,82	13,71	13,26	14,65	0,57	0,59	0,53
Desvio-padrão	5,06	5,20	4,63	4,95	5,03	4,66	1,95	2,08	1,65
Assimetria	0,06	-0,06	0,26	-0,08	0,02	-0,25	5,43	5,61	4,26
Curtose	-0,43	-0,43	-0,33	-0,47	-0,48	-0,29	37,73	39,10	20,50

[1] Esta última constatação contraria a tendência sustentada por alguns estudos, como o de Ben-Shakhar e Sinai (1991, citado em Beller e Gafni, 1996) de os indivíduos do género feminino omitirem mais respostas nos testes de escolha múltipla. Segundo estes autores, a utilização da Fórmula de Pontuação (ver Apêndice B) apenas reduz ligeiramente a maior tendência dos rapazes para responder ao acaso.

As distribuições de respostas certas e erradas na amostra do género masculino podem considerar-se simétricas, enquanto a das respostas certas do género feminino é moderadamente assimétrica positiva e a das respostas erradas assimétrica negativa.

Ao contrário das outras distribuições, as das respostas omissas têm uma curva de frequência bastante achatada (curtose elevada). Nestas distribuições, o valor superior da média em relação à mediana traduz a sua forte assimetria positiva.

A sugestão dos dados da Tabela 4.4 de que os estudantes do género masculino tiveram melhor desempenho que os do género feminino é confirmada pelo teste de Mann-Whitney, que infere a existência de diferenças muito significativas ($p < 0{,}01$) entre as distribuições de respostas certas e as de respostas erradas dos dois géneros.

A partir das respostas certas, erradas e omissas dos estudantes de cada universidade, obtiveram-se os seguintes resultados.

Tabela 4.5 - Estatísticas descritivas das respostas certas, erradas e omissas por universidade

COMPARAÇÃO DE SUBAMOSTRAS - RESPOSTAS/UNIVERSIDADE Amostra Total (U1: n=1236; U2: n=127; U3: n=516)												
Estatísticas Descritivas	**Respostas Certas**				**Respostas Erradas**				**Respostas Omissas**			
	Total	**Universidade**			**Total**	**Universidade**			**Total**	**Universidade**		
		U1	**U2**	**U3**		**U1**	**U2**	**U3**		**U1**	**U2**	**U3**
Min-Max	2-31	5-31	8-29	2-28	0-29	0-25	2-23	1-29	0-22	0-13	0-14	0-22
Amplitude	29	26	21	26	29	25	21	28	22	13	14	22
Mediana	17	18	16	13	14	13	15	16	0	0	0	0
Média	16,72	18,1	16,1	13,6	13,71	12,6	14,4	16,2	0,57	0,32	0,46	1,19
Desvio-padrão	5,06	4,84	4,44	4,27	4,95	4,78	4,53	4,53	1,95	1,19	1,53	3,07
Assimetria	0,06	-0,1	0,45	0,16	-0,08	0,06	-0,4	-0,4	5,43	5,43	6,52	3,65
Curtose	-0,43	-0,4	0,02	-0,1	-0,47	-0,5	-0,1	0,1	37,73	35,4	51,9	15,73

Verifica-se que os estudantes (do género masculino) que responderam corretamente aos 31 itens pertencem a U1. As distribuições das respostas certas e das respostas erradas dos estudantes desta universidade estão mais próximas de distribuições simétricas do que as das outras instituições e têm maior frequência nos valores centrais do que se fossem normalmente distribuídas. Em média, os estudantes da universidade U3 omitiram mais respostas, sendo a sua distribuição de respostas omissas a que tem o maior desvio-padrão e a menor assimetria (positiva).

Ao confrontar as medidas de tendência central das distribuições das variáveis (respostas certas, respostas erradas e respostas omissas) das três universidades, percebe-se que os participantes da universidade U1 tiveram melhor desempenho que os da U2 e o destes, por sua vez, foi melhor que o dos estudantes da U3 - mais respostas certas, menos erradas e menos omissas. Este resultado foi confirmado pela comparação múltipla de médias das ordens das três subamostras, relativamente às três variáveis - apenas as diferenças entre as respostas omissas dos estudantes de U1 e U2 não são estatisticamente significativas ($p < 0{,}01$). Note-se que se efetuou a comparação múltipla depois de se concluir, com o teste de Kruskal-Wallis, que as distribuições dos valores de cada variável nas três universidades não são idênticas.

4.1.2 Características Metrológicas do PMAT: análise de itens, fiabilidade e validade

A pesquisa de indicadores credíveis da qualidade dos resultados do PMAT, que determinam o grau de confiança nas suas medidas, será feita no âmbito da Teoria Clássica dos Testes (TCT) e da Teoria da Resposta ao Item (TRI), como exposto na secção 2 do Capítulo 2. Uma vez que é das respostas a um teste que se deduzem as estatísticas que o caracterizam metrologicamente, estas serão calculadas e comentadas a par da apresentação dos resultados obtidos com o PMAT.

Análise de Itens no âmbito da TCT

Na Tabela 4.6 encontram-se, para cada item, a proporção de respostas certas (o seu índice de dificuldade), de respostas erradas, distribuídas pelos distratores, e de respostas omissas (identificadas pela letra O). Também está indicada a correlação entre a pontuação dos estudantes em cada alternativa de resposta (0 ou 1) e a respetiva pontuação total no teste. A alternativa de resposta certa está assinalada a negrito, assim como o índice de dificuldade do item. As outras alternativas apresentam-se por ordem crescente de preferência, pelos participantes.

Os itens estão identificados pela posição que ocupam no teste e pela sua área de conteúdo e nível de dificuldade. Por exemplo, 1-PE.B é o primeiro item do teste (1), insere-se na área de Probabilidades e Estatística (PE) e tem nível de complexidade baixo (B).

Tabela 4.6 – Análise de itens: respostas dos estudantes por alternativa de resposta

ANÁLISE DE ITENS **PROPORÇÃO DE RESPOSTAS POR ALTERNATIVA; CORRELAÇÃO *ALTERNATIVA - TOTAL*** Amostra Total (N=1879)											
Item	**Alt.**	**P. Re.**	***r***	**Item**	**Alt.**	**P. Re.**	***r***	**Item**	**Alt.**	**P. Re.**	***r***
1- PE.B	O	0,00	--	**2- Al.B**	O	0,01	-0,14	**3- Al.B**	O	0,02	-0,12
	C	0,08	-0,25		C	0,06	-0,23		B	0,14	-0,24
	A	0,14	-0,26		A	0,14	-0,28		C	0,14	-0,22
	B	**0,78**	0,38		**B**	**0,79**	0,40		**A**	**0,71**	0,38
4- Al.B	O	0,02	-0,12	**5- Al.B**	O	0,01	-0,07	**6- An.B**	O	0,00	-0,09
	C	0,15	-0,25		C	0,20	-0,29		C	0,12	-0,23
	A	0,36	-0,14		B	0,24	-0,25		A	0,13	-0,20
	B	**0,47**	0,35		**A**	**0,55**	0,47		**B**	**0,74**	0,34
7- An.B	O	0,01	-0,09	**8 - An.B**	O	0,02	-0,13	**9- An.B**	O	0,01	-0,11
	A	0,14	-0,26		C	0,11	-0,19		A	0,15	-0,27
	B	0,24	-0,29		B	0,27	-0,19		B	0,46	-0,10
	C	**0,62**	0,46		**A**	**0,60**	0,32		**C**	**0,38**	0,33
10- Geo.B	O	0,01	-0,08	**11- Geo.B**	O	0,02	-0,10	**12- PE.M**	O	0,00	-0,03
	C	0,06	-0,20		C	0,06	-0,18		A	0,12	-0,25
	B	0,27	-0,30		A	0,30	-0,22		C	0,15	-0,27
	A	**0,66**	0,40		**B**	**0,62**	0,32		**B**	**0,73**	0,40
13- PE.M	O	0,00	-0,06	**14- LC.M**	O	0,00	-0,07	**15- An.M**	O	0,02	-0,12
	B	0,07	-0,13		A	0,02	-0,07		A	0,19	-0,20
	A	0,37	-0,21		B	0,59	-0,24		B	0,22	-0,28
	C	**0,55**	0,28		**C**	**0,38**	0,27		**C**	**0,57**	0,43
16- Al.M	O	0,01	-0,16	**17- Al.M**	O	0,03	-0,11	**18- Al.M**	O	0,03	-0,19
	C	0,19	-0,29		C	0,19	-0,23		A	0,19	-0,22
	B	0,27	-0,04		B	0,23	-0,21		B	0,24	-0,18
	A	**0,53**	0,30		**A**	**0,55**	0,40		**C**	**0,54**	0,39
19- Al.M	O	0,02	-0,13	**20- An.M**	O	0,03	-0,12	**21- An.M**	O	0,02	-0,12
	B	0,23	-0,21		A	0,16	-0,14		A	0,24	-0,19
	C	0,27	-0,15		B	0,24	-0,24		B	0,27	-0,20
	A	**0,48**	0,34		**C**	**0,57**	0,36		**C**	**0,47**	0,38
22- An.M	O	0,01	-0,09	**23- An.M**	O	0,01	-0,08	**24- An.M**	O	0,02	-0,09
	B	0,16	-0,27		C	0,16	-0,17		B	0,17	-0,15
	A	0,47	-0,06		B	0,59	-0,12		C	0,35	-0,16
	C	**0,36**	0,29		**A**	**0,24**	0,30		**A**	**0,46**	0,30
25- Geo. M*	O	0,02	-0,18	**26- Geo.M**	O	0,04	-0,13	**27- Geo.M**	O	0,03	-0,14
	A	0,05	-0,14		B	0,16	-0,08		C	0,20	-0,09
	B	0,27	-0,20		A	0,18	-0,24		A	0,27	-0,15
	C	**0,66**	0,30		**C**	**0,62**	0,30		**B**	**0,50**	0,25
28- PE.E	O	0,02	-0,09	**29- Al.E**	O	0,02	-0,15	**30- An.E**	O	0,03	-0,16
	C	0,28	-0,10		A	0,13	-0,27		B	0,21	-0,16
	A	0,36	-0,09		C	0,30	-0,13		C	0,26	-0,16
	B	**0,34**	0,22		**B**	**0,54**	0,35		**A**	**0,50**	0,33
31- An.E	O	0,03	-0,17	**32- Geo.E**	O	0,05	-0,18	**Legenda:**			
	A	0,14	-0,08		A	0,17	-0,05	**Alt.** → Alternativa de Resposta			
	C	0,37	-0,11		C	0,37	-0,11	**P. Re.** → Proporção de Respostas			
	B	**0,46**	0,22		**B**	**0,41**	0,22	***r*** → Correlação			

* Excluindo os 613 participantes da universidade U1 que resolveram a versão A2 (n=1266)

Por opção, os itens foram organizados no teste por área de conteúdo/nível de complexidade/índice de dificuldade. Como se verifica na Tabela 4.6, este último critério, baseado nos resultados do PMAT-02, foi cumprido quase na totalidade: o item 4 deveria estar trocado com o item 5, o item 16 com o 17 e o item 24 deveria estar a seguir ao item 21. A maior diferença ocorre neste último caso, que pode dever-se à reconstrução das alternativas de resposta do item 24, depois da análise do PMAT-02, que o transformou num item mais fácil (de acordo com o que se verificou no PMAT-03).

Da observação da Tabela 4.6 nota-se uma tendência de aumento da dificuldade do item (diminuição da proporção de respostas certas) com o aumento da sua complexidade. No entanto, o item mais difícil do teste (item 23) é de complexidade moderada.

Verifica-se que qualquer item tem um número reduzido de respostas omissas, o qual tem propensão para aumentar nos últimos itens do teste. Exceto nos itens 9, 14, 22, 23 e 28, os itens mais difíceis, houve mais estudantes a selecionar a resposta certa do que algum dos distratores. Por sua vez, excluindo um distrator do item 14 (e um do item 25), todos os distratores foram selecionados por mais de 5% dos estudantes.

Em todos os itens, a correlação entre a pontuação numa das alternativas de resposta (alternativa) e a pontuação no teste (total) é superior a $0{,}20$ quando a alternativa é a correta (em 81% dos itens é um valor aceitável, superior a $0{,}30$) e negativa nos outros casos. A correlação omissa-total é superior ou igual à de qualquer distrator-total em 74% dos itens. Embora a correlação distrator-total seja sempre negativa, há vários casos (27% dos distratores) em que é superior a $-0{,}15$, o valor máximo desejável - alguns deles ocorrem nos itens em que um dos distratores foi escolhido por mais estudantes do que a resposta certa; com a correlação mais elevada, entre $-0{,}04$ e $-0{,}09$, existem oito distratores (um deles é o não funcional); três itens do PMAT têm ambos os distratores com uma correlação superior a $-0{,}15$ (são todos de complexidade elevada, sendo dois deles os últimos do teste).

Considerem-se as estatísticas descritivas do índice de dificuldade dos itens do PMAT, que se apresentam na Tabela 4.7.

As estatísticas revelam que a distribuição desta variável é simétrica, centrada num valor muito próximo do ideal $(0{,}50)$, com uma amplitude igual a 0,55. Registe-se que as estatísticas descritivas apresentadas, que não incluem o item 25, coincidem com as que se obtêm ao considerar este item, exceto a assimetria (com os itens todos é igual a 0,05).

Tabela 4.7 - Estatísticas descritivas do índice de dificuldade

ÍNDICE DE DIFICULDADE DOS ITENS - ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS Amostra Total (N=1879)					
Mínimo	**Máximo**	**Mediana**	**Média**	**Desvio-padrão**	**Assimetria**
0,24	0,79	0,54	0,54	0,13	-0,03

Para cada item do teste calculou-se o respetivo índice de discriminação, isto é, a correlação entre a pontuação dos estudantes no item e no teste, depois de excluída a do item em causa (correlação item-total corrigida). Apresentam-se na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 - Índice de discriminação dos itens

ÍNDICE DE DISCRIMINAÇÃO DOS ITENS - CORRELAÇÃO ITEM-TOTAL CORRIGIDA (*r*) Amostra Total (N=1879)							
Item	***r***	**Item**	***r***	**Item**	***r***	**Item**	***r***
1-PE.B	0,308	**2-Al.B**	0,336	**3-Al.B**	0,309	**4-Al.B**	0,266
5-Al.B	0,392	**6-An.B**	0,271	**7-An.B**	0,372	**8 -An.B**	0,234
9-An.B	0,240	**10-Geo.B**	0,314	**11-Geo.B**	0,235	**12-PE.M**	0,327
13-PE.M	0,188	**14-LC.M**	0,176	**15-An.M**	0,350	**16-Al.M**	0,206
17-Al.M	0,312	**18-Al.M**	0,299	**19-Al.M**	0,253	**20-An.M**	0,270
21-An.M	0,289	**22-An.M**	0,201	**23-An.M**	0,227	**24-An.M**	0,202
25-Geo.M	0,221*	**26-Geo.M**	0,223	**27-Geo.M**	0,158	**28-PE.E**	0,125
29-Al.E	0,261	**30-An.E**	0,242	**31-An.E**	0,125	**32-Geo.E**	0,128
Mínimo: 0,125	**Máximo:** 0,392	**Mediana:** 0,25	**Média:** 0,25	**Desv-Padrão:** 0,07			

* Excluindo os 613 participantes da universidade U1 que resolveram a versão A2 (n=1266)

O item 5 é o mais discriminativo e os itens 28 e 31 são os que menos distinguem os estudantes em relação à sua pontuação no teste. Com uma discriminação inferior a 0,20 encontram-se 19% dos itens; 29% dos itens do PMAT registam uma discriminação superior a 0,30, sendo o máximo igual a 0,39.

Análise de Itens no âmbito da TRI (Modelo de Rasch)

Apesar de a análise dos itens do PMAT no âmbito da TCT ter sido efetuada sem o item 25, o interesse em conhecer as características metrológicas deste item, assim como do teste completo, levantou a hipótese de, no âmbito da TRI, analisar os 32 itens.

Uma vez que o número de participantes que respondeu ao item 25 redigido corretamente é suficientemente grande para viabilizar a análise de Rasch ($n = 1266$) e não são evidentes diferenças estatísticas significativas entre esta amostra e a amostra total, optou-se por apresentar a análise de Rasch da primeira.

As medidas estimadas pelo modelo de Rasch só têm significado quando o modelo é adequado aos dados empíricos. Assim, inicia-se esta secção com a análise do ajustamento dos resultados dos itens e dos estudantes ao modelo, fundamentada pelo exposto na secção 2.2.1 (p. 77).

- ***Ajustamento dos Dados Empíricos ao Modelo de Rasch***

Após duas iterações com o algoritmo PROX e três pelo método da Máxima Verosimilhança Conjunta, aplicadas aos dados, o Winsteps estimou as medidas de Rasch - o nível de dificuldade dos itens e o nível dos estudantes no construto medido, o seu nível de competência nos conteúdos do PMAT.

Foi feita uma primeira abordagem à qualidade dos resultados observando algumas tabelas e o gráfico das medidas conjuntas (análogo ao Gráfico 4.13) - as medidas dos estudantes distribuem-se de modo quase simétrico em torno do ponto médio, ao longo de um intervalo de amplitude 7 *logit*; os itens têm uma variação de 3 *logit*, embora alguns apresentem a mesma medida e exista uma diferença maior que o desejável entre os dois mais difíceis; a ordenação dos itens, por dificuldade, é semelhante à que se esperava. Perante os resultados observados, considerados favoráveis ao ajustamento dos dados empíricos ao modelo de Rasch, procedeu-se à análise das estatísticas de ajuste.

- *Estatísticas de Ajuste Global*

As primeiras estatísticas analisadas foram o *Infit* e o *Outfit* dos estudantes e dos itens, que quantificam o ajustamento dos dados empíricos ao modelo de Rasch com base nas diferenças entre valores observados (1 ou 0) e valores esperados (probabilidade de o estudante n acertar o item i).

Verificou-se que o *Infit* e o *Outfit* dos estudantes variava de 0,71 a 1,38 e de 0,54 a 1,64, respetivamente; o *Infit* dos itens, de 0,89 a 1,10 e o *Outfit* de 0,86 a 1,15. Nos dois casos, a média destas estatísticas era igual a 1,00.

Com apenas nove estudantes a acusar um *Outfit* superior a 1,5, optou-se por eliminar alguns participantes do estudo, na tentativa de conseguir obter uma subamostra de estudantes com padrões de resposta ajustados ao modelo de Rasch. Assim, foram eliminados 55 elementos da amostra. Restaram **1211 estudantes** e as suas respostas aos **32 itens** do PMAT. Foi sobre estes resultados do PMAT que incidiu a análise da exatidão das medidas de Rasch. Para simplificar as referências a esta subamostra, ela será designada por **amostra-Rasch**.

Considere-se o sumário das medidas dos itens e dos estudantes que compõem a amostra-Rasch estimadas pelo modelo, assim como o das respetivas estatísticas de ajuste (na forma MNSQ e ZSTD), apresentado na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 - Valores globais das medidas e respetivas estatísticas de ajuste da amostra-Rasch ao modelo de Rasch

AMOSTRA-RASCH Estudantes: 1211 Itens: 32		MEDIDAS DOS ESTUDANTES E DOS ITENS SUMÁRIO						
		Pontuação (R. Certas)	Medida	Erro do Modelo	*Infit*		*Outfit*	
					MNSQ	ZSTD	MNSQ	ZSTD
Estudantes	Média	16,8	0,13	0,40	1,00	0,0	1,00	0,0
	Desv-padrão	5,2	0,81	0,05	0,10	0,8	0,15	0,8
	Máximo	31	3,62	1,02	1,29	2,0	1,56	2,0
	Mínimo	3	-2,42	0,37	0,76	-2,4	0,60	-2,3
Itens	Média	635,5	0,00	0,06	1,00	0,0	1,00	0,1
	Desv-padrão	157,5	0,63	0,00	0,05	2,3	0,08	2,4
	Máximo	928	1,58	0,07	1,10	4,3	1,13	4,2
	Mínimo	261	-1,21	0,06	0,90	-5,7	0,86	-5,2

Observe-se que o intervalo de variação das medidas dos estudantes tem uma amplitude de 6,04 *logits* e o das medidas dos itens de 2,79 *logits*.

Considerando o intervalo de 0,9 a 1,1 para os valores desejáveis de *Infit* e *Outfit*, para aqueles que sugerem uma boa adequação do modelo aos dados empíricos, pode dizer-se que o *Infit* e o *Outfit* dos itens apontam para a sua utilidade na construção de um instrumento de medida estandardizado. Quanto aos estudantes, nem todos têm um padrão de respostas ajustado ao modelo de Rasch.

Ao analisar as estatísticas de ajuste de cada estudante, verificou-se que a quantidade de indivíduos desajustados é insignificante (inferior a 10%) - 8,8% dos estudantes têm um

Outfit superior a 1,1, embora só 3,7% deles apresentem o valor absoluto de ZSTD maior que 1,96; entre os que têm o *Outfit* elevado encontram-se os 5,4% com *Infit* superior a 1,1, dos quais 7,7% têm um valor absoluto de ZSTD que sugere desajuste; a ultrapassar os limites de 1,3 e 1,5 de *Outfit* estão, respetivamente, 2,0% e 0,03% dos estudantes.

- *Estatísticas de Ajuste dos Itens*

Para analisar o ajuste de cada item individualmente, elaborou-se a Tabela 4.10, onde se apresentam os itens por ordem decrescente do *Outfit*.

Da observação desta tabela, constata-se que muitos itens têm valores de *Infit* e *Outfit* muito próximos do ideal (1,00), estando um deles, o item 9, perfeitamente ajustado. Nota-se uma tendência para os itens com nível de complexidade elevado serem os menos ajustados.

O item que teve menos respostas certas (item 23) ajusta-se muito bem ao modelo, apresentando valores observados e esperados de correlação pontuação-medida quase iguais, tal como os de coincidência do modelo.

O item 5 (o que tem menor *Infit*) e o item 27 são os que apresentam menor coincidência do modelo, com uma diferença de 5,5 entre a percentagem dos valores observados e a dos esperados. A percentagem dos valores esperados é superior à dos observados no item 27, enquanto que no item 5, tal como em mais de metade dos itens, é inferior - em 56% dos itens do PMAT, os dados são um pouco mais previsíveis do que se esperava no caso de eles estarem perfeitamente ajustados ao modelo.

Também é no item 5 que ocorre a maior diferença entre as correlações pontuação--medida observadas e esperadas, sendo apenas de 0,13. É seguido pelo item 32, com uma diferença de 0,12 mas, ao contrário do item 5, o valor esperado deste item é superior ao observado[2], como acontece em 41% dos itens.

Saliente-se ainda que apenas para os itens mais fáceis (itens 1 e 2) era esperada uma correlação pontuação-medida menor que 0,30, o limite inferior aconselhado para esta estatística. A correlação observada dos nove itens menos ajustados ao modelo não ultrapassa este limite. No entanto, os menores valores encontrados são, para um item, 0,23 e, para dois itens, 0,24 (respetivamente, itens 32, 28 e 31).

[2] Esta inversão de grandezas, entre valor esperado e valor observado, é previsível se for tida em conta a posição dos itens na tabela - o item 32 tem dos maiores valores de *Infit* e *Outfit*, o que reflete a existência de respostas inesperadas a este item (nos extremos e na zona central dos padrões de resposta); o item 5 tem os menores valores de *Infit* e *Outfit*, efeito de respostas demasiado previsíveis.

Tabela 4.10 - Parâmetro de dificuldade, estatística de precisão e índices de ajuste dos itens do PMAT ao modelo de Rasch

ANÁLISE DOS ITENS (TRI) Amostra-Rasch (n=1211)												
Item (R. certas)	**δ**	**Erro do Modelo**	**Infit**		**Outfit**		**Pt-Medida**		**Coincid. do Modelo**		**Dis.**	**As. Inf.**
			MNSQ	**ZSTD**	**MNSQ**	**ZSTD**	**Cor.**	**Esp.**	**Obs. (%)**	**Esp. (%)**		
28-PE.E (387)	0,98	0,07	1,07	2,6	1,13	3,2	0,24	0,34	70,7	71,3	0,80	0,05
13-PE.M (661)	-0,09	0,06	1,06	3,1	1,12	4,2	0,26	0,34	60,9	64,5	0,70	0,07
31-An.E (532)	0,39	0,06	1,09	4,3	1,12	4,1	0,24	0,35	61,3	65,4	0,62	0,08
32-Geo.E (487)	0,57	0,06	1,10	4,3	1,11	3,6	0,23	0,35	61,5	66,7	0,66	0,07
27-Ge.M (606)	0,12	0,06	1,08	4,1	1,11	4,0	0,25	0,35	58,8	64,3	0,62	0,09
8 -An.B (707)	-0,27	0,06	1,02	1,1	1,11	3,4	0,30	0,34	63,3	65,3	0,88	0,00
14-LC.M (435)	0,77	0,06	1,06	2,5	1,10	3,0	0,26	0,34	66,1	68,8	0,81	0,04
24-An.M (532)	0,39	0,06	1,05	2,4	1,06	2,1	0,29	0,35	62,1	65,4	0,80	0,05
22-An.M (399)	0,92	0,07	1,04	1,4	1,05	1,4	0,29	0,34	69,0	70,6	0,90	0,02
16-Al.M (638)	-0,01	0,06	1,03	1,4	1,04	1,4	0,31	0,34	63,3	64,2	0,87	0,01
19-Al.M (553)	0,31	0,06	1,02	1,1	1,03	1,1	0,32	0,35	63,5	64,9	0,90	0,03
26-Ge.M (715)	-0,30	0,06	1,00	0,2	1,02	0,6	0,33	0,33	67,5	65,5	0,97	0,00
30-An.E (575)	0,23	0,06	1,02	0,9	1,02	0,6	0,33	0,35	64,0	64,6	0,93	0,02
25-Ge.M (809)	-0,67	0,06	1,02	0,6	1,00	0,1	0,30	0,32	69,8	69,5	0,96	0,03
23-An.M (261)	1,58	0,07	0,98	-0,4	1,00	0,1	0,33	0,32	79,5	79,3	1,02	0,00
11-Geo.B (736)	-0,38	0,06	1,00	0,1	0,99	-0,4	0,33	0,33	65,2	66,2	1,00	0,04
9-An.B (439)	0,76	0,06	1,00	0,0	1,00	0,0	0,34	0,34	69,4	68,6	1,00	0,01
21-An.M (552)	0,32	0,06	0,98	-1,0	1,00	-0,1	0,37	0,35	68,0	65,0	1,07	0,00
4-Al.B (539)	0,37	0,06	0,99	-0,4	0,99	-0,5	0,36	0,35	66,3	65,2	1,04	0,00

Tabela 4.10 - Parâmetro de dificuldade, estatística de precisão e índices de ajuste dos itens do PMAT ao modelo de Rasch (cont.)

ANÁLISE DOS ITENS (TRI) Amostra-Rasch (n=1211)												
Item (R. certas)	δ	Erro do Modelo	Infit		Outfit		Pt-Medida		Coincid. do Modelo		Dis.	As. Inf.
			MNSQ	ZSTD	MNSQ	ZSTD	Cor.	Esp.	Obs. (%)	Esp. (%)		
29-Al.E (645)	-0,03	0,06	0,98	-1,0	0,97	-1,0	0,37	0,34	64,5	64,3	1,09	0,00
10-Geo.B (790)	-0,59	0,06	0,98	-1,0	0,94	-1,5	0,36	0,32	68,2	68,5	1,08	0,00
6-An.B (860)	-0,89	0,07	0,97	-0,9	0,97	-0,6	0,34	0,31	73,7	72,5	1,05	0,00
20-An.M (651)	-0,05	0,06	0,97	-1,6	0,95	-1,8	0,38	0,34	65,8	64,4	1,15	0,00
17-Al.M (644)	-0,03	0,06	0,96	-2,0	0,94	-2,2	0,39	0,34	65,9	64,3	1,18	0,00
18-Al.M (629)	0,03	0,06	0,96	-2,1	0,94	-2,4	0,39	0,34	65,0	64,2	1,20	0,00
15-An.M (677)	-0,15	0,06	0,95	-2,8	0,93	-2,6	0,41	0,34	68,0	64,7	1,24	0,00
12-PE.M (853)	-0,86	0,07	0,94	-2,0	0,89	-2,4	0,38	0,31	72,7	72,0	1,14	0,00
3-Al.B (835)	-0,78	0,07	0,94	-2,1	0,92	-1,8	0,38	0,31	73,1	71,0	1,14	0,00
1-PE.B (907)	-1,11	0,07	0,94	-1,8	0,89	-2,1	0,37	0,29	76,8	75,6	1,11	0,00
2-Al.B (928)	-1,21	0,07	0,93	-2,1	0,86	-2,6	0,38	0,29	77,6	77,1	1,13	0,00
7-An.B (736)	-0,38	0,06	0,92	-3,9	0,89	-3,6	0,43	0,33	70,4	66,2	1,30	0,00
5-Al.B (619)	0,07	0,06	0,90	-5,7	0,87	-5,2	0,47	0,34	69,8	64,3	1,48	0,00
Média	0,00	0,06	1,00	0,0	1,00	0,1	-	-	67,5	67,6	-	-
Des-Pad.	0,63	0,00	0,05	2,3	0,08	2,4			4,9	4,0		

Legenda: δ - parâmetro de dificuldade do item; **Erro do Modelo** - erro padrão do modelo para a medida estimada do item (quantifica a precisão da medida); **Pt-Medida -** correlação entre as medidas estimadas dos estudantes e as respostas que eles deram ao item (**Cor.**) e entre as medidas estimadas dos estudantes e as respostas que se esperava que eles dessem (**Esp.**); **Coincid. do Modelo** (Coincidência do Modelo) - percentagem de dados que diferem menos de 0,5 dos respetivos valores esperados **(Obs.)** e a que se espera que difira quando o modelo se ajusta aos dados **(Esp.); Dis.** (Discriminação) - Índice de discriminação do item; **As. Inf.** (Assíntota Inferior) - Índice de acerto ao acaso do item.

Na Tabela 4.10 observa-se que os itens do PMAT que discriminam menos que o esperado (Disc. < 1,0) são os que apresentam maiores valores de *Infit* ou de *Outfit* - para os cinco itens menos ajustados é estimada uma discriminação entre 0,6 e 0,8. Os itens 5 e 7, os que têm menores valores de *Infit* ou de *Outfit*, são os que discriminam mais do que o esperado, com os valores de 1,5 e 1,3, respetivamente. Sete itens do PMAT (26, 25, 23, 11, 9, 4 e 6) têm um poder de discriminação igual ao esperado.

Como em qualquer teste com itens de escolha múltipla, admite-se que algumas alternativas de resposta do PMAT tenham sido selecionadas ao acaso, em particular a resposta certa. No entanto, como se verifica na última coluna da Tabela 4.10, o modelo de Rasch estima que o índice de probabilidade de acerto ao acaso[3] de qualquer item do PMAT é inferior a 0,10, pelo que a frequência deste acontecimento não é significativa. O maior valor deste índice, igual a 0,09, ocorre no item 27 (o item com menor percentagem de respostas que diferem menos do que 0,5 dos valores esperados). A maioria dos itens (81%) tem valores inferiores a 0,05 e mais de metade um índice de acerto ao acaso igual a zero, o valor admitido pelo modelo de Rasch para todos os itens.

Perante os valores apresentados pelas estatísticas de ajuste, pode-se concluir que os itens do PMAT e os padrões de resposta selecionados revelam um bom ajustamento ao modelo de Rasch.

- ***Alternativas de Resposta Selecionadas***

Um dos indicadores da qualidade de construção dos itens e, por consequência, do teste, está relacionado com a frequência com que as alternativas de resposta foram selecionadas, o que já foi analisado para a amostra total. Também a correlação entre a medida estimada dos indivíduos e a sua pontuação em cada alternativa de resposta (1 ou 0, consoante a escolheram ou não) caracteriza a qualidade metrológica do item.

Os valores destas frequências e correlações relativos à amostra-Rasch encontram-se na Tabela E.5. Quer uns, quer os outros são muito idênticos aos que constam na Tabela 4.6, construída a partir da amostra total e da pontuação total dos estudantes, no âmbito da análise TCT. Daí que as conclusões relacionadas com estes tópicos sejam análogas às que se formularam a partir dos valores apresentados na referida tabela.

[3] O índice de probabilidade de acerto ao acaso de um item é aproximadamente igual à ordenada na origem da assíntota horizontal inferior à curva característica desse item (ver p. 75).

Outro aspeto relevante para cada alternativa de resposta de um item é a média da medida dos estudantes que a escolheram, em relação à medida do item. Espera-se que a média do nível de competência dos que selecionaram a alternativa correta de um item seja maior que o nível de dificuldade desse item.

Os valores destas medidas médias dos estudantes, assim como os respetivos erros padrão, também se encontram na Tabela E.5. Da consulta desta tabela conclui-se que, exceto em dois itens (5 e 12), os estudantes que preferiram omitir a resposta têm uma medida média inferior à dos que selecionaram algum dos distratores; para todos os itens, o erro da medida média dos indivíduos que omitiram a resposta é bastante superior ao dos que responderam; em qualquer item, a medida média dos estudantes que selecionaram a resposta certa é superior à dos que escolheram um distrator, variando entre 0,30 (nos itens mais fáceis) e 0,64 (no item mais difícil).

O Gráfico 4.8 representa os valores das medidas médias que constam na Tabela E.5, exceto os que se referem às respostas omissas, com os itens apresentados por ordem crescente de dificuldade[4]. As letras identificam as alternativa de resposta dos itens, com a correta assinalada a negrito, e estão colocadas nos pontos que correspondem ao valor da respetiva medida média dos estudantes (em *logit*).

A visualização dos valores facilita a percepção do seu significado (diferença entre o nível médio da competência dos indivíduos que escolheram a alternativa de resposta e a dificuldade do respetivo item), assim como as diferenças entre o nível médio de competência dos estudantes que escolheram cada alternativa de resposta do mesmo item.

Observe-se que, embora na maioria dos itens exista pouca diferença entre as medidas médias dos estudantes que optaram por uma ou outra resposta errada, nalguns deles essa medida é bem distinta de um distrator para outro.

[4] Observe-se que esta ordem difere da ordem do índice de dificuldade da amostra total apenas em sete valores centrais, os quais variam entre 0,53 e 0,57.

```
-3     -2      -1       0       1       2       3
|-------+-------+-------+-------+-------+-------| Item
|                     C B    A                  | 23-An.M
|                       AC B                    | 28-PE.E
|                    B   A  C                   | 22-An.M
|                    A  B  C                    | 14-LC.M
|                    A  B   C                   | 9-An.B
|                       AC B                    | 32-Geo.E
|                      BC  A                    | 24-An.M
|                       AC B                    | 31-An.E
|                     C A   B                   | 4-Al.B
|                      AB   C                   | 21-An.M
|                      BC  A                    | 19-Al.M
|                      BC  A                    | 30-An.E     D
|                      AC  B                    | 27-Geo.M    I
|                     BC    A                   | 5-Al.B      F
|                     AB   C                    | 18-Al.M     I
|                    C  B  A                    | 16-Al.M     C
|                     CB   A                    | 17-Al.M     U
|                    A  C  B                    | 29-Al.E     L
|                     BA   C                    | 20-An.M     D
|                     BA   C                    | 13-PE.M     A
|                     BA   C                    | 15-An.M     D
|                     CB   A                    | 8-An.B      E
|                     A B  C                    | 26-Geo.M
|                    AB    C                    | 7-An.B
|                    C A   B                    | 11-Geo.B
|                   C B    A                    | 10-Geo.B
|                    A B  C                     | 25-Geo.M
|                    BC    A                    | 3-Al.B
|                    AC    B                    | 12-PE.M
|                    CA   B                     | 6-An.B
|                   CA    B                     | 1-PE.B
|                   CA    B                     | 2-Al.B
|-------+-------+-------+-------+-------+-------|
-3     -2      -1       0       1       2       3 Logit
        Medidas médias dos estudantes
```

Gráfico 4.8 – Média das medidas dos estudantes que selecionaram cada alternativa de resposta, em relação à medida do respetivo item

- ***Funcionamento Diferencial dos Itens***

Como já se observou, os estudantes do género masculino tiveram melhor desempenho no PMAT do que os do género feminino. Importa saber se a superioridade das pontuações dos rapazes acontece em todos ou só em alguns itens, se decorre de diferenças entre eles e as raparigas nos conhecimentos de Matemática, detetadas pelo teste, ou se são devidas a alguma variável externa (mais facilidade ou mais familiaridade para um grupo do que para o outro). Para o efeito, analisou-se o funcionamento diferencial dos itens (DIF) nos dois géneros (ver secção 2.2.2).

O Gráfico 4.9 representa o nível de dificuldade dos itens para o género feminino (F) e para o género masculino (M).

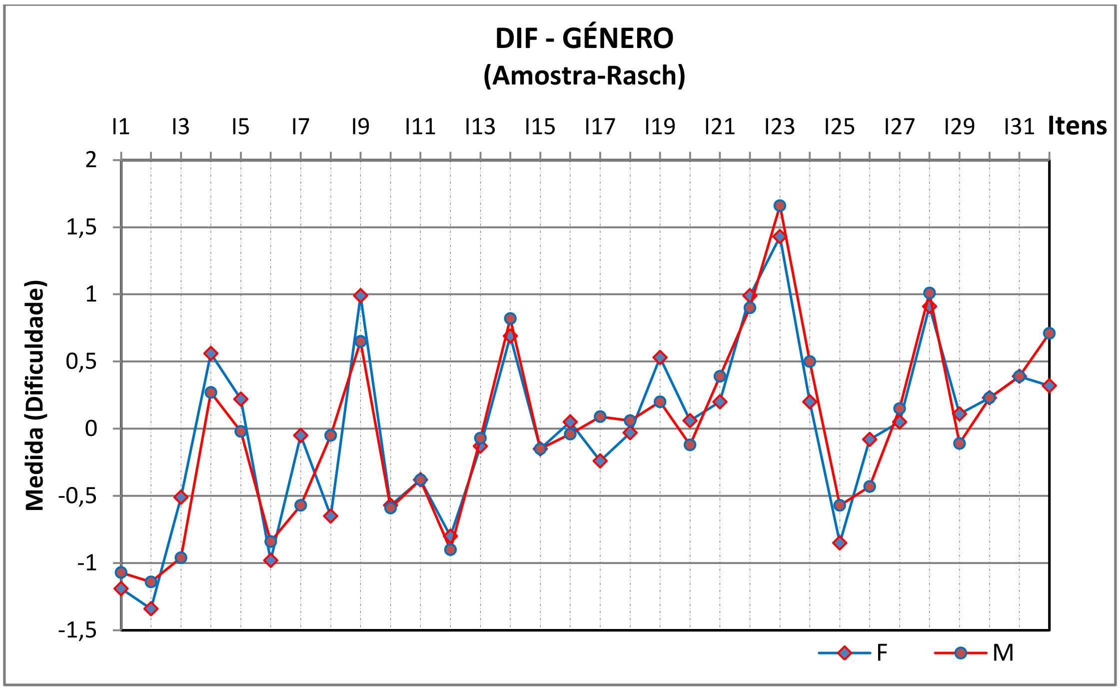


Gráfico 4.9 - Funcionamento diferencial dos itens por género

O nível de dificuldade de quatro itens é igual, para rapazes e para raparigas, e o de 13 itens ligeiramente superior para as raparigas. No entanto, estatisticamente, só os itens 7 e 8 apresentam diferenças significativas (ver Tabela E.6) - por ordem crescente de dificuldade dos itens, o item 7 ocupa a 14.ª posição na amostra do género feminino e a 6.ª posição na amostra do género masculino, enquanto o item 8 é o 6.º mais fácil para as raparigas e o 15.º para os rapazes. Uma vez que o item 7 foi mais difícil para as raparigas e o item 8 mais fácil, o efeito destas diferenças tende a anular-se.

Também interessa saber se o PMAT detetou diferenças entre os conhecimentos de Matemática dos estudantes de U1, de U2 e de U3, ou se foram itens mal construídos, que tornaram o teste mais fácil ou mais familiar para alguns dos estudantes, que causaram as diferenças entre as pontuações destes grupos, apresentados na Tabela 4.5. Assim, tal como se fez para a variável género, compararam-se os níveis de dificuldade dos itens, registados em cada universidade. Considere-se o Gráfico 4.10.

Existem itens com níveis de dificuldade quase iguais nas três instituições e itens com níveis de dificuldade significativamente diferentes em duas ou mesmo nas três universidades, como se pode confirmar na Tabela E.7.

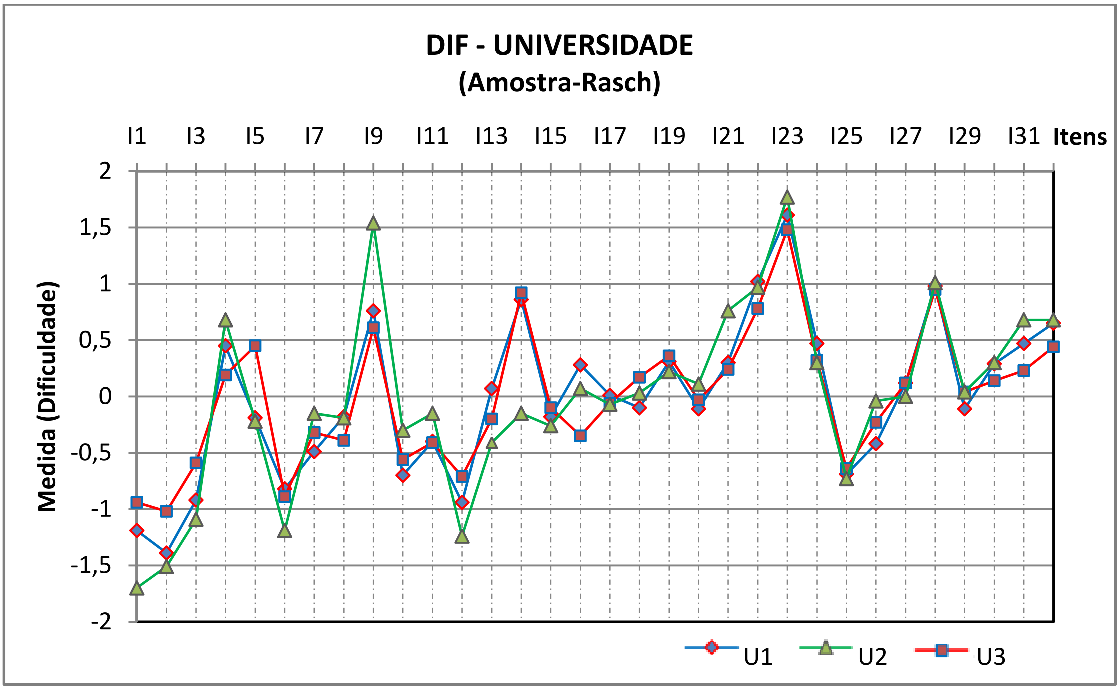


Gráfico 4.10 - Funcionamento diferencial dos itens por universidade

Os casos onde ocorreram diferenças significativas entre os parâmetros de dificuldade dos itens são:

- U1/U3: itens 5 e 16 (o item 5 é o 12.º e o item 16 é o 20.º mais fácil para os estudantes de U1, enquanto o item 5 é o 27.º e o item 16 é o 10.º mais fácil para os estudantes de U3);
- U1/U2: itens 9 e 14 (o item 9 ocupa a 28.ª posição e o item 14 a 29.ª posição na ordem crescente de dificuldade dos itens na amostra U1 e as posições 31.ª e 12.ª na mesma ordenação dos itens para os estudantes de U2);
- U2/U3: itens 1, 5, 9, 12, 14 e 21 (os itens 9 e 21 são mais fáceis e os itens 1, 5, 12 e 14 mais difíceis para os estudantes de U3 do que para os de U2).

Observe-se como o item 9 é bastante mais fácil para os estudantes das universidades U1 e U3 do que para os de U2, enquanto o item 14 tem comportamento contrário. Repare-se também como os pares U1/U3 e U1/U2 tendem a estar equilibrados quanto à medida dos itens com DIF. Assim, deduz-se que o funcionamento diferencial dos itens em relação à variável universidade não terá um efeito significativo no teste, no geral, pelo que as inferências que se fazem a partir dos resultados do PMAT serão válidas para todos os participantes.

Fiabilidade dos Resultados

Estimado o nível de exatidão das medições feitas com o PMAT, há interesse em verificar a sua precisão e consistência. Por outras palavras, importa saber se os resultados do PMAT têm fiabilidade. Assim, tendo por base o referido na secção 2.2.2, calcularam-se coeficientes relativos a esta propriedade metrológica do teste (uma vez que os coeficientes dependem da amostra utilizada, é mais correto falar na fiabilidade dos resultados do teste para esta amostra do que na fiabilidade do teste (Linacre, 2011)).

No âmbito da TCT, a fiabilidade dos resultados do PMAT foi estimada através do cálculo do coeficiente *Alpha de Cronbach estandardizado*, considerando a amostra total e o PMAT sem o item 25. Atendendo a que os itens pertencem a áreas de conteúdo diversas, o que pode pôr em causa a homogeneidade do teste, também foi calculado este índice de consistência interna para os itens de cada área de conteúdo, mesmo sabendo que a sua informação seria limitada pelo número reduzido de itens. Apresentam-se na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 - Fiabilidade dos resultados do PMAT (TCT)

FIABILIDADE DOS RESULTADOS (TCT) COEFICIENTE ALPHA DE CRONBACH ESTANDARDIZADO Amostra Total (N=1879)						
ESCALA (nº de itens)	**PMAT** (31)	**Análise** (12)	**Álgebra** (9)	**Geometria** (5)	**Prob. e Estat.** (4)	**Lóg. e Conj.** (1)
Coeficiente	**0,746**	0,53	0,53	0,24	0,28	---

Enquanto o coeficiente de fiabilidade do PMAT é um valor satisfatório, não acontece o mesmo com os grupos de itens que pertencem à mesma área de conteúdo. Com poucos itens em cada área, não seria de esperar índices de fiabilidade elevados (por exemplo, para se obter um valor igual a 0,75 para os itens de Análise, seriam necessários 32 itens desta área de conteúdo[5]).

Depois de se excluir qualquer um dos 31 itens do teste, verificou-se que a fiabilidade dos resultados se mantém num dos casos e diminui em todos os outros, pelo que todos os itens contribuem para o nível de consistência interna do PMAT.

Enquanto na TCT a fiabilidade é estimada a partir da informação do teste, como um todo, na TRI é estimada a partir da informação dada pelas respostas de cada pessoa a cada item. Trata-se, portanto, de uma informação mais precisa, logo mais fiável (Urbina, 2004).

[5] Equação da profecia de Spearman-Brown: $0{,}75 * (1 - 0{,}53)/[0{,}53 * (1 - 0{,}75)\,] = 2{,}66;$
$2{,}66 * 12 = 31{,}9.$

Na TRI há indicadores de fiabilidade individuais e globais. Os primeiros referem-se às estimações dos parâmetros das medidas dos indivíduos e dos itens (os erros padrão de medida, identificados por erros do modelo) e os segundos à estimação destes parâmetros na globalidade dos itens e dos participantes no teste.

Retome-se a amostra-Rasch. Na Tabela 4.9 encontram-se algumas estatísticas dos erros da estimativa da dificuldade dos itens e da competência dos estudantes, onde é manifesto que existe mais fiabilidade nas medidas dos itens do que nas medidas dos estudantes.

Os valores do erro do modelo de cada item encontram-se na Tabela 4.10, onde se verifica que só tomam dois valores: $0{,}06$ e $0{,}07$. Da observação dos erros do modelo associados às medidas dos estudantes (não se apresentam neste trabalho devido à elevada quantidade de dados) constatou-se que o valor máximo $(1{,}02)$ ocorre nas medidas estimadas de três indivíduos, sendo o valor imediatamente inferior igual a $0{,}65$.

A função informação de um teste, soma das informações dos itens, depende das medidas dos indivíduos, θ, e define-se como sendo o inverso do quadrado dos erros do modelo para estas medidas, $SE\ (\theta_n)$. A função informação do PMAT tem a seguinte representação gráfica.

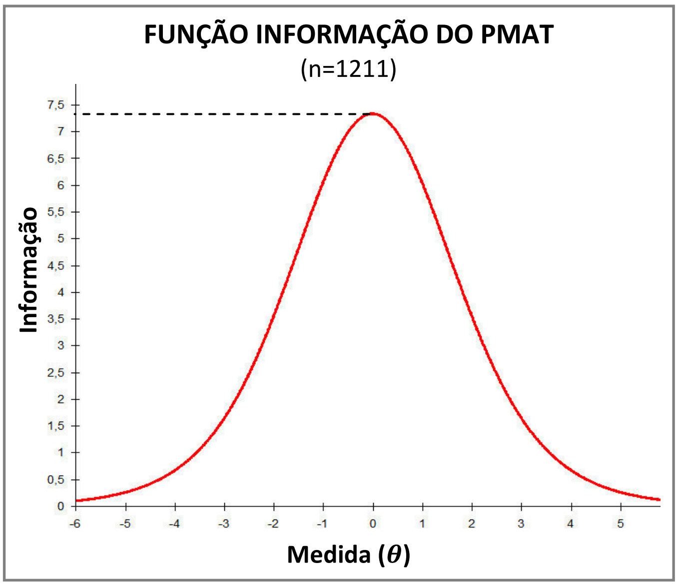


Gráfico 4.11 - Função informação do PMAT

Para $\theta = 0$, a informação do teste é aproximadamente igual a $7{,}33$. Logo, pode-se deduzir que o erro do modelo para esta medida, $SE(\theta = 0)$, é igual a $\frac{1}{\sqrt{7{,}33}}$, ou seja, 0,37.

Daqui se conclui que 95% dos estimadores de $\theta = 0$ variam entre $-0{,}73$ e $0{,}73$ $(\pm 0{,}37 \times 1{,}96)$, o que sugere um bom nível de fiabilidade.

Quanto às estatísticas globais que medem a fiabilidade dos resultados do PMAT, indicadores da replicabilidade da posição relativa das medidas, têm-se os índices de fiabilidade e de separação que, em termos de fiabilidade, têm interpretações análogas. Os seus valores encontram-se na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 - Índices de fiabilidade e de separação das medidas

FIABILIDADE DAS MEDIDAS (TRI) - Estatísticas globais Amostra-Rasch (n=1211)		
ÍNDICES (Modelo)	**Fiabilidade**	**Separação**
Medidas dos estudantes	0,76	1,76
Medida dos itens	0,99	9,83

Com o índice de separação das medidas dos estudantes próximo de 2,0 e o de fiabilidade de 0,8, pode-se afirmar que o PMAT tem sensibilidade para distinguir entre altos e baixos desempenhos. Por sua vez, o índice de fiabilidade das medidas dos itens está muito próximo do seu valor máximo.

Observe-se que o coeficiente de fiabilidade dos estudantes é um valor aproximado do coeficiente *Alpha de Cronbach*. Na amostra-Rasch é igual a 0,75 (como na amostra total).

Validade dos Resultados

Depois de se analisar a questão relativa à qualidade dos resultados do PMAT, importa ter uma noção da qualidade das inferências que se podem fazer a partir dos mesmos. Ou seja, é necessário analisar a validade dos resultados do teste.

O PMAT foi construído com o propósito de avaliar os conhecimentos de Matemática dos estudantes de ciências e tecnologias, à entrada do ensino superior. Para saber até que ponto os resultados do PMAT medem esses conhecimentos, foram averiguadas algumas fontes de validação da interpretação das pontuações obtidas pelos participantes em relação ao objetivo estabelecido.

- *Conteúdo do Teste*

Como referido em 3.3.1, as áreas de conteúdo do PMAT e o peso de cada uma delas no teste foram definidas por professores de Matemática do ensino secundário e do ensino superior - professores com vasta experiência profissional que lecionavam, na altura, no 12.º ano de escolaridade ou no 1.º ano de cursos superiores de ciências ou tecnologias. Esta definição resultou de uma ponderação sobre os conteúdos programáticos da disciplina de

Matemática do secundário e sobre os pré-requisitos das matérias que normalmente são lecionadas nas unidades curriculares de Matemática do 1.º ano dos cursos superiores de ciências e tecnologias.

Foi o mesmo grupo de professores, peritos nas matérias a avaliar, que organizou a Matriz dos Itens e, de seguida, construiu os itens do teste de cada ensaio experimental do PMAT.

Da observação da atitude dos estudantes que realizaram o PMAT, deduz-se que as instruções são objetivas e completas, e que as condições de aplicação são adequadas, assim como o material da prova. Relativamente ao tempo de duração do teste, os 120 minutos pareceram ser suficientes. No entanto, admite-se que o número de respostas omissas aos dois últimos itens, maior que aos outros itens (ver Tabela 4.6), pode estar relacionado com a falta de tempo para resolver o teste e não com o nível de complexidade dos itens.

Também se encontram provas de que o PMAT mede o que se pretende, ao comparar a ordenação dos itens, por índice de dificuldade, que se esperava obter com a que se veio a verificar. A ordem determinada pelas respostas dos estudantes encontra-se no Gráfico 4.8, já analisado, onde os itens estão ordenados pelo respetivo parâmetro de dificuldade.

Da observação deste gráfico conclui-se que os itens mais fáceis são, tendencialmente, de complexidade baixa ou moderada. Contudo, alguns itens com nível de complexidade baixo apresentam um parâmetro de dificuldade acima da média, como os itens 9 e 4.

Era de esperar que o item 9 não fosse dos mais fáceis, uma vez que, após operações de cálculo, exige a distinção de conceitos que os estudantes tendem a confundir. Também não se estranha que o item 4 seja dos mais difíceis porque, além da resolução de uma equação, requer uma análise da solução encontrada, que não é solicitada explicitamente pelo item.

Na ordenação expectável dos itens, o item 29 seria colocado acima do nível médio de dificuldade - é um item que requer operações mentais de associar, avaliar ou analisar e é diferente dos itens dos últimos exames nacionais de *Matemática A*. Tratando-se de um item bem ajustado, com a aproximação inicial para o parâmetro de acerto ao acaso igual a 0,00, constata-se que, de facto, o item 29 é mais fácil do que o esperado pelos autores do teste.

- ***Associação das Pontuações com Outras Variáveis***

Tendo por objetivo a validação empírica do PMAT, procurou-se reunir fontes de validação no âmbito da associação das pontuações que os estudantes obtiveram no teste com outras variáveis.

- Variável *Género*

Na apresentação dos resultados globais obtidos pelos indivíduos do género masculino e do género feminino detetou-se a superioridade de desempenho dos primeiros em relação aos segundos (Tabela 4.4). Esta constatação pode ser entendida como uma prova da validade dos resultados do PMAT, na medida em que vai ao encontro de resultados obtidos por diversos estudos: no teste do PISA, têm-se verificado diferenças estatisticamente significativas entre a pontuação média dos rapazes e das raparigas nos itens de Matemática, favoráveis aos rapazes, em muitos países participantes, sendo um deles Portugal (OCDE, 2014); Beller e Gafni (1996) citam trabalhos de vários autores, como Hedges e Nowell (1995) e Linn (1991), onde se conclui que os rapazes têm melhor desempenho do que as raparigas em diversas áreas da Matemática; Delgado e Prieto (2004) confirmaram resultados de pesquisas anteriores, ao encontrarem pequenas diferenças de desempenho entre rapazes e raparigas espanhóis de 13 anos (os rapazes são melhores em geometria e problemas em contexto, as raparigas em aritmética); Beller e Gafni (1996) referem também, citando Benbow (1988), Maccoby e Jacklin (1974) e Willingham e Cole (1977), que os rapazes tendem a ter melhores classificações em Matemática, do que as raparigas, à medida que vão progredindo na escolaridade.

- Variável *Universidade*

Os dados da Tabela 4.5 sugerem que as pontuações dos estudantes variam em função das universidades – os estudantes de U1 tiveram o melhor desempenho e os de U3 o pior. Este resultado, confirmado por testes de hipóteses, era previsível, uma vez que se sabia que as notas de candidatura aos cursos de ciências e de tecnologias da universidade U1 são, em média, superiores às notas de candidatura aos cursos análogos de U3[6].

[6] Nos resultados da 1.ª fase do Concurso Nacional de Acesso de 2012, verifica-se que nos cursos de U1 e U3 que têm a mesma designação, a nota do último colocado em U1 foi de 122,0, 160,0, 148,3, 147,5 e 155,5, enquanto a do último colocado em U3 foi, respetivamente, igual a 116,3, 145,5, 117,6, 138,8 e 133,0.

- Variável *Conhecimentos de Matemática antes e após treino de competências*

Um dos estudos desenvolvidos no âmbito da validação do PMAT consiste na comparação dos resultados obtidos, pelos mesmos estudantes, no teste e no reteste após treino de competências (apenas realizado com o PMAT-01). Assim, a análise comparativa que se descreve a seguir é tomada como um indicador genérico da validade do PMAT para a avaliação de conhecimentos de Matemática.

Os 71 participantes neste estudo, caracterizados em 3.4.2, resolveram o PMAT-01 no início do ano letivo e também depois das aulas e avaliações do 1.º semestre do mesmo ano, ou seja, depois de os estudantes reforçarem o treino de competências que tinham desenvolvido antes de entrar no ensino superior e de adquirirem conhecimentos acerca da maioria dos conteúdos avaliados pelo PMAT (os conteúdos de Probabilidades e Estatística, por exemplo, não foram estudados por estes alunos). Deste modo, a comparação dos resultados do teste com os do reteste permite analisar a sensibilidade do PMAT à aquisição de conhecimentos de Matemática pelos estudantes, em particular, pelos alunos de cursos de Engenharia da universidade U1.

Na secção 3 deste capítulo, *Estudo Longitudinal: teste e reteste após treino de competências*, apresentam-se e comparam-se estatísticas descritivas das respostas dos estudantes no teste e no reteste (Tabelas 4.35 e 4.36), de onde se conclui que o desempenho dos estudantes melhorou da primeira para a segunda aplicação do teste. Com as amostras emparelhadas, obtiveram-se os dados da Tabela E.8 que consistem no número de respostas certas, erradas e omissas dadas a cada item, salientando assim a variação do desempenho dos estudantes por item.

Para analisar a sensibilidade dos itens ao treino procurou-se, para cada item, a significância da diferença entre as respostas certas, no teste e no reteste. Na Tabela 4.37 (secção 4.3) encontram-se os respetivos *p-value* e os índices de dificuldade dos itens em cada aplicação do PMAT-01. Esta tabela também apresenta, para cada item, a correlação entre as respostas certas antes e depois da formação do 1.º semestre, um indicador de fiabilidade, de estabilidade temporal - embora os resultados tenham melhorado em função do treino, manteve-se, em larga medida, a forma como se ordenaram os estudantes entre si, mostrando que o PMAT é simultaneamente sensível às oportunidades de treino e estável no poder discriminativo das diferenças interindividuais nos conhecimentos de Matemática.

Da análise da Tabela 4.37 destaca-se o seguinte: após o treino de competências, há mais estudantes a responder corretamente a 52,5% dos itens do teste; existe uma diferença significativa ($p < 0{,}05$) entre o índice de dificuldade de um quarto dos itens em cada aplicação - apenas um deles, da área de Probabilidades e Estatística, teve mais respostas certas antes do treino; há uma correlação positiva e significativa ($p < 0{,}05$) entre as respostas certas dadas a 37,5% dos itens, antes e depois do 1.º semestre de aulas, sendo que 22,5% dos itens passaram a ser significativamente mais fáceis após o treino de competências.

- Variável *Conhecimentos de Matemática avaliados nas unidades curriculares do 1.º semestre*

Tendo em vista a validação empírica do PMAT, também se associaram as pontuações obtidas por participantes no teste e reteste após treino de competências, referido no estudo anterior, com as suas classificações nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre - *Álgebra Linear* (AL) e *Cálculo Diferencial e Integral I* (C-I). Consideraram-se apenas os 49 alunos que tiveram aproveitamento a AL ou a C-I, uma vez que os reprovados (avaliados ou não) não têm uma avaliação quantitativa.

Para analisar a validade preditiva ou de prognóstico do PMAT, calcularam-se as correlações de Pearson[7] entre as pontuações no PMAT aplicado em setembro (teste) e as classificações finais de AL e de C-I. Por outro lado, estas classificações constituem um critério externo obtido antes dos resultados do PMAT aplicado em fevereiro (reteste), pelo que também se analisou a correlação entre eles.

Com o objetivo de verificar se o teste tem utilidade preditiva nos dois géneros, calcularam-se as referidas correlações para cada um deles, que se apresentam na Tabela 4.13.

Tabela 4.13 - Correlação, por género, entre as classificações de AL e de C-I e as pontuações do PMAT-01

CORRELAÇÃO COM CLASSIFICAÇÕES* UNIDADES CURRICULARES DE MATEMÁTICA/PMAT-01 *r* (*p-value*)						
PMAT-01 (n=49)	**ÁLGEBRA LINEAR**			**CÁL. DIFERENCIAL E INTEGRAL I**		
	Masculino (n=32)	**Feminino** (n=9)	**Total** (n=41)	**Masculino** (n=33)	**Feminino** (n=9)	**Total** (n=42)
TESTE	0,610 (0,000)	-0,085 (0,828)	0,453 (0,003)	0,549 (0,001)	0,088 (0,822)	0,462 (0,002)
RETESTE	0,452 (0,009)	-0,130 (0,730)	0,320 (0,041)	0,736 (0,000)	-0,160 (0,682)	0,580 (0,000)

*Coeficiente de correlação de Pearson

[7] As pontuações do teste e as do reteste tendem a ser normalmente distribuídas, segundo a análise feita na secção 4.3 (Tabela 4.36).

Como se esperava, no total da amostra existem correlações positivas, estatisticamente significativas ($p < 0{,}05$) ou, na maioria, muito significativas ($p < 0{,}01$), entre as pontuações do PMAT-01 e os critérios externos considerados. Tendo em conta que as matérias de C-I recorrem mais às áreas de conteúdo do PMAT do que as de AL, também seria de esperar que as pontuações do reteste do PMAT-01 tivessem maior correlação com as classificações da primeira unidade curricular do que com as da segunda.

Enquanto para os indivíduos do género masculino existe sempre uma correlação significativa, o mesmo não acontece com os do género feminino. No entanto, o número reduzido de elementos desta subamostra não é suficiente para tirar conclusões acerca desta questão.

- Variável *Perceção de Autoeficácia*

A Escala Multidimensional de Auto-Eficácia Percebida de Bandura (MSPSE) constituiu outra fonte de validação do PMAT.

A MSPSE é um questionário composto por itens que medem a perceção de autoeficácia dos respondentes através de nove escalas, caracterizado na secção 3.3.2. No âmbito deste estudo, analisaram-se os resultados da aplicação da MSPSE aos estudantes observados nos dois estudos anteriores. Recorde-se que os participantes responderam ao questionário imediatamente depois de entregarem o caderno de teste e a folha de respostas do PMAT-01, na sua 1.ª aplicação.

Analisados os resultados da MSPSE, verificou-se que o coeficiente *Alpha de Cronbach* de sete escalas é maior ou igual a $0{,}70$, sendo o das outras duas superior a $0{,}60$.

Procuraram-se as correlações entre as escalas da MSPSE e as pontuações do PMAT no teste e no reteste. Como pode ser observado na Tabela E.9, existe apenas uma correlação significativa ($p < 0{,}05$) entre os dois instrumentos (entre a auto-eficácia para ir ao encontro das expectativas dos outros e o reteste). No entanto, ao nível dos itens, encontram-se correlações positivas e significativas. Na Tabela 4.14 destacam-se as que ocorrem com itens da escala de auto-eficácia para o sucesso académico (itens 5 e 6) e da escala de auto-eficácia para a aprendizagem auto-regulada (itens 19 e 20).

Os itens mencionados na Tabela 4.14 permitem identificar perceções de autoeficácia elevadas. Daí que as correlações entre eles e as pontuações do PMAT (com destaque para as do reteste) confirmem a validade dos resultados do teste por serem coerentes com as expectativas que poderiam formular-se com base na teoria psicológica (Teixeira, 2008, como citado em Delgado, 2012).

Tabela 4.14 - Itens da MSPSE significativamente correlacionados com o PMAT-01

MSPSE/PMAT - ALGUMAS CORRELAÇÕES r (*p-value*)		
ESCALAS	**PMAT-01** (n=69*)	
	Teste	**Reteste**
Item 5. "É fácil aprender Matemática"	0,34 (0,005)	0,43 (0,000)
Item 6. "É fácil aprender Físico-Química"	0,23 (0,048)	0,29 (0,016)
Item 19. "É fácil conseguires planear o trabalho académico?"	-	0,36 (0,003)
Item 20. "É fácil conseguires organizar o trabalho académico?"	-	0,32 (0,008)

* Foram eliminados dois casos da amostra teste-reteste por terem mais de duas respostas omissas na MSPSE.

- ***Estrutura Interna do Teste***

O ajustamento dos dados de um teste ao modelo de Rasch apoia a unidimensionalidade dos itens (Christensen, Engelhard, & Salzberg, 2012; Prieto & Delgado, 2003), isto é, sugere que entre os fatores ou dimensões latentes, de que decorrem as respostas aos itens, existe um único com um contributo relevante.

Contudo, aceitando a sugestão de outros psicometristas, como Tennant e Pallant (2006), efetuou-se a *Análise Fatorial Exploratória* dos dados e a *Análise de Componentes Principais* dos resíduos. A primeira no âmbito da TCT e a segunda no âmbito da TRI (estas duas análises completam-se, na medida em que uma delas pode detetar pormenores que a outra não revela). Deste modo, analisou-se a estrutura interna do teste para verificar, empiricamente, se as respostas estão coerentes com a estrutura prevista.

A confirmar-se a existência de um construto dominante, subjacente a todos os itens do teste, pode ser considerada a qualidade das inferências, relativas aos conhecimentos de Matemática avaliados pelo PMAT, baseadas nas pontuações dos estudantes.

- *Análise Fatorial Exploratória*

Para verificar se as correlações entre as respostas certas a cada item do teste são suficientemente elevadas para que a Análise Fatorial tenha utilidade na estimação de fatores comuns aos itens (que influenciaram as respostas dos indivíduos), aplicou-se o teste *Esfericidade de Bartlett*. Como refere Maroco (2010), a hipótese nula deste teste é a de que a matriz dos coeficientes de correlação (populacionais) das variáveis é a matriz identidade, ou seja, que as correlações entre os itens são nulas. Ainda segundo este autor, o teste de *Esfericidade de Bartlett* é sensível à dimensão da amostra, pelo que se calculou a *medida da adequação da amostragem de Kaiser-Meyer-Olkin*, o índice KMO. Também se procuraram os itens que apresentam fraca correlação significativa com todos e com cada um dos outros itens (MSA<0,50). A Tabela 4.15 mostra os resultados obtidos.

Tabela 4.15 - Adequação da amostragem à Análise Fatorial Exploratória

ANÁLISE FATORIAL: VERIFICAÇÃO DE PRESSUPOSTOS **Amostra Total** (N=1879)					
PMAT	**Índice KMO**	**Nº de itens com MSA<0,50**	**Teste de *Esfericidade de Bartlett***		
			χ^2 aprox.	**g.l.**	***p-value***
31 itens	0,872	0	3622,48	465	0,000

Uma vez que o índice KMO é um valor compreendido entre 0,8 e 0,9, a utilidade da Análise Fatorial classifica-se de Boa (Sharma, 1996, como citado em Maroco, 2010). Ao rejeitar a hipótese nula do teste de *Esfericidade de Bartlett*, conclui-se que na matriz de correlações existem relações internas significativas entre os itens, ou seja, que os itens estão suficientemente correlacionados entre si para justificarem a Análise Fatorial.

Extraídos os fatores dos resultados do PMAT, pelo método da análise das componentes principais, organizou-se a Tabela 4.16 com a percentagem de variância total explicada por cada componente com valor próprio superior a 1.

Tabela 4.16 - Variância explicada pelas componentes principais com valor próprio superior a 1 (Critério de Kaiser)

ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS: VARIÂNCIA EXPLICADA **Amostra Total** (N=1879)			
Componente	**Valor Próprio**	**Percentagem da Variância Total Explicada**	**Percentagem Acumulada**
1	3,78	12,18	12, 18
2	1,23	3,97	16,15
3	1,15	3,70	19,85
4	1,13	3,64	23,50
5	1,08	3,49	26,99
6	1,05	3,38	30,36
7	1,04	3,35	33, 71
8	1,03	3,33	37,05
9	1,02	3,28	**40,33**

Apesar de a regra do valor próprio superior a 1 implicar a seleção de nove componentes, a análise do *Scree Plot* (Gráfico 4.12) sugere que as relações entre as variáveis originais dependem sobretudo de uma componente principal, o que confirma o pressuposto da unidimensionalidade.

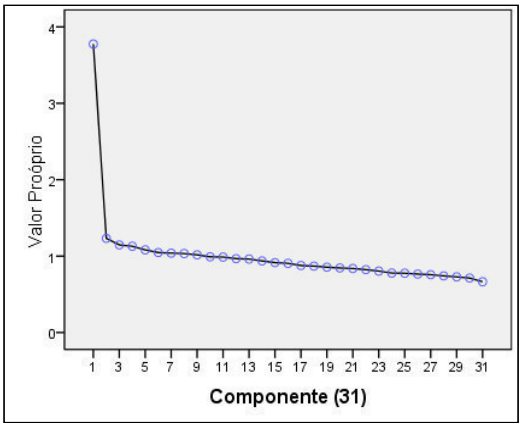


Gráfico 4.12 - Scree Plot das componentes

Com os resultados a indicar a possibilidade de resumir a informação relacional entre os itens na componente "conhecimento em Matemática", procuraram-se de seguida fatores que contribuem para a medida das diferenças individuais de conhecimentos em Matemática com o PMAT. Para tal, retiveram-se as componentes (fatores) com valor próprio superior a 1,05 (admitindo que as outras podem ter sido erradamente identificadas devido a arredondamentos) para pesquisar a saturação dos itens em cada fator (estimados pelo método Varimax).

A partir da matriz obtida construiu-se a Tabela 4.17, na qual se assinalaram as saturações fatoriais cujo valor absoluto é superior a 0,50 (negrito e itálico), está entre 0,40 e 0,50 (negrito) e é inferior a 0,40 mas corresponde ao valor com que os respetivos itens saturam no fator (itálico). Recorde-se que os primeiros indicam os itens que definem e os segundos os itens que têm um contributo bastante razoável para os fatores.

Observando os itens que saturam no mesmo fator, verifica-se que os cinco fatores retidos englobam itens de várias áreas de conteúdo. Com base na análise das competências[8] solicitadas por esses itens, é possível identificar a natureza dos fatores como se indica a seguir, admitindo que cada um deles pode ser lido como envolvendo a capacidade que lhe está associada.

Fator 1 - Raciocínio lógico-dedutivo; **Fator 2** - Domínio de procedimentos automatizados; **Fator 3** - Intuição lógico-indutiva; **Fator 4** - Recuperação de informação memori-

[8] As competências exigidas por cada item encontram-se na secção 4.2.

zada; **Fator 5** - Apreensão analítica *versus* apreensão global do problema (item 14 e item 16 *vs* item 13 e item 31).

Tabela 4.17 – Correlação entre os itens e as componentes retidas

SATURAÇÃO DOS ITENS NOS FATORES* Amostra Total (N=1879)					
Itens	**COMPONENTES/FATORES**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1-PE.B	*0,303*	0,256	0,138	-0,010	-0,025
2-Al.B	0,326	**0,421**	0,010	-0,150	0,014
3-Al.B	***0,548***	0,024	0,065	-0,035	0,048
4-Al.B	*0,389*	0,053	0,145	0,025	-0,043
5-Al.B	*0,394*	0,351	0,089	-0,019	-0,018
6-An.B	**0,417**	0,125	-0,135	0,204	-0,008
7-An.B	**0,422**	0,175	0,338	-0,073	-0,098
8-An.B	-0,035	***0,621***	-0,005	-0,086	-0,010
9-An.B	*0,381*	0,033	0,038	0,093	-0,001
10-Geo.B	0,258	*0,262*	0,191	0,070	-0,030
11-Geo.B	*0,357*	0,164	-0,195	0,138	0,145
12-PE.M	*0,335*	0,322	0,047	-0,050	0,001
13-PE.M	0,188	0,303	0,013	-0,294	**0,421**
14-LC.M	0,243	0,097	0,084	0,035	**-0,471**
15-An.M	0,223	*0,382*	0,135	0,122	0,034
16-Al.M	0,137	0,230	0,226	-0,046	*-0,324*
17-Al.M	0,178	0,298	0,075	*0,349*	0,137
18-Al.M	0,087	*0,346*	0,293	0,129	0,043
19-Al.M	0,169	0,055	**0,409**	0,211	0,030
20-An.M	*0,310*	0,055	0,194	0,197	0,040
21-An.M	0,073	**0,477**	0,038	0,168	-0,049
22-An.M	**0,410**	-0,068	0,152	-0,070	-0,082
23-An.M	0,094	0,151	**0,442**	0,022	-0,096
24-An.M	-0,123	***0,546***	-0,002	0,166	-0,034
26-Geo.M	*0,370*	-0,009	0,057	0,136	0,111
27-Geo.M	-0,004	0,092	0,177	**0,469**	0,022
28-PE.E	0,009	-0,053	***0,625***	-0,020	0,077
29-Al.E	*0,318*	0,219	-0,132	0,174	-0,065
30-An.E	0,096	0,125	0,244	*0,358*	0,331
31-An.E	0,161	0,002	0,089	0,027	***0,633***
32-Geo.E	0,140	-0,027	-0,124	***0,612***	-0,149

* Método de rotação: Varimax com Normalização de Kaiser

- Análise de Componentes Principais dos resíduos

Retome-se a amostra-Rasch. Como já se verificou, os dados desta subamostra ajustam-se de forma adequada ao modelo de Rasch, pelo que a análise dos resíduos é legítima e potencialmente informativa.

Para conhecer a percentagem de variância dos dados explicada pelas medidas do modelo, bem como para depreender se existe, ou não, uma dimensão alternativa à dimensão latente a medir, suficientemente forte para distorcer as medições feitas com o teste, procuraram-se os resultados relativos à variância dos resíduos (estandardizados) que se encontram sintetizados na Tabela 4.18.

A variância esperada pelo modelo indica a variância esperada para os dados no caso de eles se ajustarem ao modelo, ou seja, no caso de estarem em concordância com a definição de unidimensionalidade de Rasch. No caso da amostra em análise, todas as variâncias esperadas coincidem com as observadas.

Tabela 4.18 - Variância dos resíduos: análise de componentes principais

ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS DOS RESÍDUOS Amostra Rasch (n=1211)				
VARIÂNCIA DOS RESÍDUOS (ESTANDARDIZADOS)	**OBSERVADA**			**ESPERADA (pelo modelo)**
	Valor próprio	**% do total da variância**	**% da variância inexplicada**	**%**
Variância total nas observações	38,8	100,0	---	100,0
Variância explicada pelas medidas de Rasch	6,8	17,6	---	17,6
Variância explicada pela competência dos estudantes	2,3	5,9	---	5,9
Variância explicada pela dificuldade dos itens	4,6	11,7	---	11,7
Total da variância não explicada pelas medidas de Rasch	32,0*	82,4	100	82,4
Variância inexplicada no 1.º contraste	1,4	3,7	4,5	---
Variância inexplicada no 2.º contraste	1,4	3,6	4,4	---
Variância inexplicada no 3.º contraste	1,3	3,3	3,9	---

* Número de itens

As variâncias inexplicadas em cada contraste (componente) referem-se a porções da variância que não são explicadas pelas medidas de Rasch, mas sim pelo respetivo contraste. Neste caso, como o maior valor próprio é inferior a 2,0, deduz-se que não há dois itens a partilharem o mesmo padrão de imprevisibilidade, pelo que os resíduos são ruído aleatório. Assim, apesar de a percentagem de variância explicada pelo modelo ser inferior a 20%, há indicadores de que existe uma componente geral única com influência dominante nas respostas aos itens (Smith & Miao, 1994, com citados em Linacre, 2012b) - os conhecimentos de Matemática dos estudantes.

Apesar de estes resultados serem favoráveis à unidimensionalidade do PMAT, procurou-se alguma fonte de ruído que a possa afetar. Seguindo as recomendações da literatura, analisando o funcionamento diferencial dos itens (DIF).

Recorde-se que já foram identificados os itens que revelaram DIF nos géneros e nas universidades (os itens 7 e 8 nos géneros e os itens 1, 5, 9, 12, 14, 16 e 21 nas universidades), não tendo sido detetado um efeito relevante destes itens nas diferenças de pontuação verificadas pelos grupos.

Para analisar o efeito dos itens com DIF na unidimensionalidade do teste, eliminaram-se estes itens e observaram-se as alterações ocorridas no sumário das medidas de Rasch e na variância dos resíduos da amostra-Rasch (Tabelas 4.9 e 4.18, respetivamente).

Depois de os itens 7 e 8 serem eliminados, continuam a existir itens com DIF entre as universidades (os mesmos sete já identificados e também o item 4, entre U2 e U3). De igual modo, quando se excluem os itens com diferentes níveis de dificuldade entre as universidades, os itens 7 e 8 continuam a apresentar DIF entre os géneros. Quer num caso quer no outro, não se registam alterações significativas quanto ao ajustamento dos dados empíricos ao modelo de Rasch e à dimensionalidade do teste.

Observe-se que depois de excluir os nove itens que acusam funcionamento diferencial em relação ao género ou à universidade, outros três revelaram-se significativamente mais difíceis para os estudantes de uma universidade do que para os de outra. No entanto, depois de excluídos, restaram 20 itens que não apresentam funcionamento diferencial. Deste modo, salienta-se a qualidade da maioria dos itens do PMAT como medidas de um constructo latente, não prejudicadas por fatores alheios ao construto que se pretende medir.

4.1.3 Nível de Desempenho e de Competência dos Participantes

Os indicadores da qualidade metrológica do PMAT apontam para um elevado grau de confiança nos seus resultados. Tanto as pontuações, que traduzem o nível de desempenho, como as medidas de Rasch, que indicam o nível de competência, são suficientemente precisas e representam o nível dos estudantes nos conhecimentos de Matemática medidos.

Enquanto o nível de desempenho de um indivíduo corresponde ao número de itens a que ele respondeu corretamente, o seu nível de competência, estimado a partir do seu padrão de respostas, pode ser interpretado como sendo o valor do parâmetro de dificuldade dos itens até ao qual ele tem mais probabilidade de sucesso do que de insucesso.

Sempre que os dados empíricos se ajustam ao modelo de Rasch, há uma forte correlação positiva entre as pontuações e as medidas estimadas pelo modelo (no caso da amostra em análise, é igual a 0,99) e a disposição dos indivíduos por ordem de pontuação é igual à que se obtém quando o critério de ordenação é a medida de Rasch.

Na secção 4.1.1 apresentaram-se os resultados globais dos estudantes que participaram no PMAT, em termos de pontuação. Considerem-se agora, na Tabela 4.19, as pontuações que eles obtiveram, distribuídas por percentis.

Tabela 4.19 - Distribuição das pontuações dos estudantes por percentis

PONTUAÇÕES DOS PARTICIPANTES NO PMAT - DISTRIBUIÇÃO POR PERCENTIS Amostra Total (N=1879)													
Percentil	1	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95	99
Pontuação (0 - 31)	6	8	10	12	14	15	17	18	20	21	23	25	28

Observe-se que 10% dos estudantes erraram mais de 20 itens. Por outro lado, 30% dos estudantes, responderam corretamente a, pelo menos, 20 itens.

Com os itens calibrados pela amostra-Rasch, cujos parâmetros se encontram na Tabela 4.10, mediu-se o nível de competência de todos os participantes no PMAT (ancorou-se o parâmetro de dificuldade dos itens, exceto do item 25, na amostra total e estimaram-se as medidas dos estudantes).

Porque as medidas de Rasch estão na mesma escala intervalar (escala *logit*) é possível representá-las em conjunto (ver 2.2.1). Neste caso, obteve-se o Gráfico 4.13, um gráfico que ilustra muitas das informações recolhidas com as estatísticas de Rasch.

```
MEDIDA Estudante-MAP-Item                      Amostra Total (N=1879)

   4             .  +
                    |
                    |
                 .  |
                    |
                    |
                    |
                    |
   3                +
                 .  |
                    |
                    |
                    |
                .#  |
                    |
                 .  |
   2                +
                   T|
               ###  |
                    |  23-An.M
             .####  |
             .####  |
                    |T
           .######  |
   1      .####### S+  28-PE.E
         .########  |  22-An.M
                    |  14-LC.M  9-An.B
        .#########  |S 32-Geo.E
       .##########  |
        .#########  |  21-An.M   24-An.M  31-An.E  4-Al.B
      .########### M|  19-Al.M   30-An.E
       ###########  |  27-Geo.M  5-Al.B
   0 .############  +M 16-Al.M   17-Al.M  18-Al.M  20-An.M  29-Al.E
                    |  13-PE.M   15-An.M
       .##########  |  26-Geo.M  8-An.B
        ##########  |  11-Geo.B  7-An.B
         .########  |
          .####### S|S 10-Geo.B
             .####  |  3-Al.B
                    |  12-PE.M   6-An.B
  -1         .####  +
              .###  |  1-PE.B
               .##  |T 2-Al.B
                   T|
                .#  |
                    |
                 .  |
                    |
  -2             .  +
                    |
                    |
                 .  |
                    |
                    |
                    |
                 .  |
  -3                +
             <less>|<frequent>

Cada "#" representa 12. Cada "." representa 1 a 11 estudantes
```

Gráfico 4.13 - Medição conjunta de estudantes e itens (itens calibrados na amostra-Rasch)

Note-se que a escala *logit* não determina uma localização absoluta da competência dos indivíduos e da dificuldade dos itens. Ela apenas determina uma diferença relativa entre competências, entre dificuldades e entre competências e dificuldades.

Do Gráfico 4.13 deduz-se, por exemplo, que um estudante com nível médio de competência tem mais probabilidade de acertar do que errar um item com parâmetro de dificuldade negativo; o item 23 requer bastante mais competência do que qualquer outro - só indivíduos com mais de $2{,}7$ *logit* $(1{,}58 + 1{,}12)$ têm uma probabilidade superior a $0{,}75$ de responder corretamente a este item[9]; se a medida de um estudante for igual a 1 logit, então a probabilidade de acertar o item 16 é igual a $0{,}73$, enquanto que a de acertar o item 16 e errar o item 10 é igual a $0{,}123$.[10]

As diferenças entre as medidas que se visualizam no Gráfico 4.13 também facilitam a análise dos resultados do PMAT sob diversos aspetos como, por exemplo: as medidas distribuem-se de modo semelhante em torno do ponto médio; as medidas estão suficientemente distribuídas entre os valores extremos (com menos certeza para as dos estudantes); há uma diferença (demasiado) grande entre os dois itens mais difíceis; existem grupos de quatro ou cinco itens que dão a mesma informação (por terem o mesmo nível de dificuldade); a grande maioria dos itens está alinhada com estudantes, ou seja, há estudantes que têm uma probabilidade de o acertar igual a $0{,}5$, o que significa que esses itens têm informação máxima (outro indicador da precisão das medidas).

A análise quantitativa dos resultados do PMAT é fundamental para avaliar o desempenho e a competência dos participantes no teste. Contudo, não é suficiente para identificar os conhecimentos dos estudantes em Matemática, o principal objetivo desta investigação. Para isso, também é necessário saber quais as alternativas de resposta certas e erradas que eles selecionaram e enquadrá-las no conteúdo específico do respetivo item, no tipo de conhecimento que se pretende avaliar. Por outras palavras: é necessário efetuar uma análise qualitativa e interpretativa das respostas que os estudantes deram aos itens.

[9] $P(X = 2{,}7|\delta = 1{,}58) = \frac{e^{2{,}7-1{,}58}}{1+e^{1{,}12}} = 0{,}754$

[10] $P(X = 1|\delta = 0{,}00) \times \left(1 - P(X = 1|\delta = -0{,}59)\right) = \frac{e}{1+e} \times \left(1 - \frac{e^{1{,}59}}{1+e^{1{,}59}}\right) = 0{,}73 \times 0{,}169 = 0{,}123.$

4.2 Respostas aos Itens: conhecimentos dos participantes

A análise das características metrológicas do PMAT, descrita na secção 4.1.2, reconhece que este instrumento de medida de conhecimentos de Matemática apresenta indicadores de fiabilidade e de validade que justificam um bom grau de credibilidade nos seus resultados. Assim, é legítimo ter por base esses resultados para identificar, analisar e caracterizar o nível e o tipo de conhecimentos de Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior de ciências e de tecnologias.

As estatísticas descritivas do número de respostas certas, de respostas erradas e de respostas omissas que os estudantes deram à totalidade dos itens do teste, representadas na Tabela 4.3, assim como a distribuição das suas pontuações por percentis, que se encontram na Tabela 4.19, proporcionam um panorama geral do desempenho dos participantes.

Os resultados obtidos em cada item do PMAT, apresentados na Tabela 4.6, foram utilizados para analisar os itens, possibilitando também uma análise das respostas aos itens. Em particular, eles permitem relacionar a percentagem de indivíduos que responderam corretamente a um item com a respetiva área de conteúdo, obtendo-se assim informação sobre os conhecimentos de Matemática dos estudantes. No entanto, esta informação pode ser melhorada com a observação criteriosa dos resultados, examinando e interpretando as opções feitas pelos estudantes face à redação do enunciado e das alternativas de resposta de cada item. Na presente secção procura-se fazer esta análise.

Os itens do PMAT estão sujeitos a confidencialidade, uma vez que esta prova faz parte de um projeto da Sociedade Portuguesa de Matemática, em que colaborámos. Obtivemos autorização, por parte do coordenador do projeto, para divulgar alguns dos itens, o que fazemos. Além destes, apresentam-se outros itens, mas não como os estudantes os leram - são descritos em termos de conhecimentos e competências relativos ao conteúdo que representam e à ação que solicitam. Entre os itens que se caracterizam deste modo e os que se revelam encontram-se representantes de cada área de conteúdo, os itens mais fáceis, alguns dos mais difíceis e outros que foram respondidos de alguma forma que interessa destacar. Os restantes itens do PMAT são apresentados de modo mais sucinto.

Para organizar esta secção, agruparam-se os itens por área de conteúdo. Depois de se ter observado o sucesso dos participantes em cada grupo, optou-se por ordenar as áreas de conteúdo segundo o valor decrescente desse sucesso. Para listar os itens dentro de cada grupo, adotou-se o mesmo critério: os itens são apresentados por ordem crescente do respetivo parâmetro de dificuldade, estimado a partir da amostra-Rasch.

Cada item é identificado pela posição que ocupa no teste, área de conteúdo a que pertence e respetivo nível de complexidade, como tem sido feito ao longo deste trabalho. A seguir à identificação encontra-se, entre parênteses, a colocação do item na organização de todos os itens do PMAT por ordem crescente do parâmetro de dificuldade, tal como foi feito no Gráfico 4.8.

Após a apresentação do item, de forma explícita ou através dos conhecimentos e das competências que requer, encontra-se uma tabela com a percentagem de estudantes que selecionaram cada uma das alternativas de resposta do item ou que optaram por não responder. A primeira coluna da tabela, na qual se lê o índice de dificuldade do item (percentagem de respostas certas), diz respeito à totalidade dos estudantes. Os valores das outras colunas foram calculados em relação ao número de participantes de cada género e de cada universidade (recorde-se que os participantes das universidades U1 e U3 são alunos de cursos de Engenharia e de Ciências Exatas, enquanto os da U2 frequentam cursos de Economia ou Gestão).

Com base no enunciado e nas alternativas de resposta do item, elaboraram-se hipóteses explicativas para a escolha dos distratores. Elas foram formuladas partindo do princípio que foram alguns dos erros mais comuns cometidos pelos estudantes que os induziram a responder incorretamente - os mesmos erros típicos dos alunos, bem conhecidos após uma longa experiência de lecionação de unidades curriculares de Matemática do 1.º ano do ensino superior, que inspiraram a escrita dos distratores, de acordo com as diretrizes de construção de itens.

Ao examinar os dados das tabelas com as percentagens de respostas detetam-se algumas particularidades dos itens e conhecem-se melhor as diferenças de desempenho entre grupos, definidos por género e universidade, já identificadas pelos estudos de comparação intergrupal (Tabelas 4.4 e 4.5; Gráficos 4.9 e 4.10). As observações mais relevantes são mencionadas após as hipóteses explicativas.

Depois dos itens revelados ou descritos da mesma área de conteúdo, caracterizam-se os restantes itens dessa área de forma mais concisa - indica-se o respetivo índice de dificuldade, o tipo de conhecimento que o item avalia ou as competências necessárias para reconhecer a sua resposta certa e sugerem-se explicações para a escolha de respostas erradas.

A interpretação dos resultados que constam nesta secção facilita a identificação dos conhecimentos e das lacunas de aprendizagem manifestados pelos estudantes, que será feita no capítulo seguinte.

Antes de se apresentar e analisar, de forma quantitativa e interpretativa, as respostas aos itens do PMAT, recorde-se que elas foram dadas por indivíduos que estavam a iniciar os seus estudos superiores. Todos eles fizeram o exame nacional de *Matemática A*, a maioria no ano de 2012, dispuseram de duas horas para responder aos itens, sem calculadora nem qualquer formulário, assinalando a sua resposta, escolhida entre três alternativas por item, numa folha destinada a leitura ótica. Os participantes foram informados de que as respostas erradas, assim como as omissas, seriam pontuadas com zero pontos, o que terá incentivado a seleção de alguma alternativa de resposta e motivado o baixo número de respostas omissas. Contudo, em relação a qualquer dos itens, não se encontraram indicadores de ter havido um número significativo de respostas certas dadas ao acaso.

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Item 1-PE.B (2.º)

Conhecimentos: Distribuição de probabilidades e valor médio de uma variável aleatória discreta.

Competências: Determinar valores em falta na tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta, conhecendo o seu valor médio.

Tabela 4.20 - Respostas ao item 1-PE.B

ITEM 1-PE.B Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	B	78	78	76	82	83	64
Erradas	A	14	15	13	12	10	21
	C	8	7	10	6	6	15
Omissa		0	0	0	0	0	0

Hipóteses explicativas

A: Os estudantes não relacionaram o valor médio da variável com a sua distribuição de probabilidade, limitando-se a aplicar o conhecimento de que a probabilidade de um acontecimento certo é igual a 1.

C: Os estudantes assumiram, erradamente, que a soma dos valores da variável tem de ser igual a 1.

Tal como na amostra total, este item foi o segundo mais fácil em todas as subamostras, exceto na dos estudantes de U2, onde foi o item mais fácil. Este item foi significativamente mais fácil para os estudantes de U2 do que para os de U3 (ver Gráfico 4.10).

Item 12-PE.M (4.º)

Conhecimentos: Probabilidade da intersecção de acontecimentos.

Competências: Calcular a probabilidade da intersecção de dois acontecimentos, a partir da probabilidade de cada um deles e do complementar da sua reunião.

Tabela 4.21 - Respostas ao item 12-PE.M

ITEM 12-PE.M Respostas (%)								
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		**TOTAL** (N=1879)	**M** (n=1267)	**F** (n=612)	**U1** (n=1236)	**U2** (n=127)	**U3** (n=516)
Certa	**B**	73	73	72	78	78	60
Erradas	**A**	12	11	14	10	11	17
	C	15	15	14	12	11	22
Omissa		**0**	1	0	0	0	1

Hipóteses Explicativas

A e C: Os estudantes não sabiam que $P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y)$ ou não aplicaram a propriedade $P(\bar{X}) = 1 - P(X)$ ou não sabem o que são acontecimentos independentes nem acontecimentos incompatíveis.

A resposta certa deste item foi identificada por mais participantes do que a da maioria dos itens com nível de complexidade baixo. Na amostra-Rasch deteta-se uma diferença estatisticamente significativa entre a dificuldade do item em U2 e em U3, tal como no item 1 (ver Gráfico 4.10).

No PMAT existem ainda mais dois itens da área de conteúdo Probabilidades e Estatística, ambos apresentando um problema em contexto.

O item **13-PE.M** (13.º) solicita a aplicação da análise combinatória na contagem dos acontecimentos possíveis que podem ocorrer na situação descrita no enunciado. A única alternativa de resposta que propõe combinações foi escolhida por 55% dos estudantes. Os restantes mostraram que não conhecem esta técnica de contagem.

O item **28-PE.E** (31.º) incide sobre o cálculo da probabilidade de acontecimentos que podem ocorrer no contexto apresentado. Este item, o segundo mais difícil do teste, foi respondido corretamente por 34% dos participantes. Um dos seus distratores foi preferido à resposta certa por 36% dos estudantes que, supõem-se, souberam calcular a probabilidade de um acontecimento que ocorre só de um modo mas não a probabilidade de um acontecimento que pode ocorrer de maneiras diferentes, porque erraram a contagem dessas ocorrências.

GEOMETRIA

Item 10-Geo.B (7.º)

Conhecimentos: Perpendicularidade de retas.

Competências: Reconhecer a relação entre os declives de duas retas perpendiculares.

Tabela 4.22 - Respostas ao item 10-Geo.B

ITEM 10-Geo.B Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	A	66	67	64	70	61	56
Erradas	B	27	28	26	24	34	33
	C	6	5	9	5	6	9
Omissa		1	1	0	0	0	1

Hipóteses Explicativas

B: Os estudantes acharam que se os declives de duas retas são simétricos (e diferentes de 1) então elas são perpendiculares.

C: Os estudantes assumiram que se o declive de uma reta é o inverso do declive da outra, então as retas são perpendiculares.

Observe-se que um terço dos participantes não reconheceu a relação entre os declives de retas perpendiculares.

Item 26 - Geo.M (10.º)

Conhecimentos: Paralelismo e perpendicularidade de vetores no espaço.

Competências: Averiguar se um plano, do qual se conhecem três pontos, é paralelo ou perpendicular a um vetor.

Tabela 4.23 - Respostas ao item 26-Geo.M

ITEM 26-Geo.M Respostas (%)								
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	C	62	66	56	69	54	49
Erradas	A	18	16	22	12	28	28
	B	16	15	17	17	14	14
Omissa		4	3	6	2	3	9

Hipóteses Explicativas

A: Os estudantes não distinguiram ponto de vetor.

B: Os estudantes não souberam identificar o plano que contém os três pontos dados.

Este item é o segundo com mais respostas omissas, destacando-se a omissão de respostas por parte do grupo de estudantes da universidade U3 e do grupo das raparigas, tendo sido a este item que elas mais se escusaram a responder.

Item 32-Geo.E (27.º)

Conhecimentos: Teorema de Pitágoras e definição do produto interno de vetores.

Competências: Decidir calcular o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, conhecidos os comprimentos dos catetos, para depois calcular o co-seno de um ângulo interno desse triângulo.

Tabela 4.24 - Respostas ao item 32-Geo.E

ITEM 32-Geo.E Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	B	41	40	44	45	37	35
Erradas	A	17	18	16	17	18	17
	C	37	37	37	36	39	39
Omissa		5	5	4	3	6	9

Hipóteses Explicativas

A e **C:** Os estudantes não se lembraram da definição de produto interno de vetores, percebendo-se que os estudantes que escolheram a alternativa C calcularam o seno do ângulo formado pelos vetores em vez do co-seno.

Este item é o que teve mais respostas omissas (na amostra total e nas subamostras, exceto na do género feminino). Em qualquer subamostra, mais de um terço dos estudantes escolheu o distrator C, o qual foi preferido à resposta certa nas universidades U2 e U3.

O item 25 da versão A2 que, por lapso, não tinha qualquer alternativa de resposta correta quando o PMAT foi aplicado aos participantes da universidade U1, pertence à área de conteúdo de Geometria. Por isso, os seguintes resultados do item **25-Geo.M** (6.º) restringem-se às respostas dos outros 1266 participantes: a grande maioria dos estudantes soube adicionar geometricamente os dois números complexos dados (na forma geométrica) mas apenas 66% do total conseguiu identificar o quadrante do plano complexo a que pertence o produto desses complexos ou o conjugado de um deles. Este item, de complexidade moderada, revelou-se o mais fácil da área de Geometria.

O item **11-Geo.B** (8.º) avalia conhecimentos sobre semelhança de triângulos. Foi respondido corretamente por 62% dos estudantes e, admite-se, 30% dos participantes reconheceram que os triângulos dados no enunciado são semelhantes mas não recordaram como se calcula a razão de semelhança.

O outro item de Geometria do PMAT, o item **27-Geo.M** (13.º), incide sobre a equação cartesiana do plano e perpendicularidade de vetores com base nas suas coordenadas. A resposta certa só foi identificada por metade dos participantes, aqueles que souberam analisar a perpendicularidade de dois vetores em $\mathbb{R}^3$.

ÁLGEBRA

Item 2-Al.B (1.º)

Conhecimentos: Operações algébricas com raízes quadradas.

Competências: Utilizar as regras operatórias de números reais na adição de um número irracional com uma fração irracional e simplificar a expressão algébrica obtida.

Tabela 4.25 - Respostas ao item 2-Al.B

ITEM 2-Al.B Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		**TOTAL** (N=1879)	**M** (n=1267)	**F** (n=612)	**U1** (n=1236)	**U2** (n=127)	**U3** (n=516)
Certa	**B**	79	79	78	84	80	66
Erradas	**A**	14	14	15	11	13	21
	C	6	6	6	4	6	11
Omissa		1	1	1	0	1	2

Hipóteses explicativas

A: Os estudantes fizeram $a + \frac{b}{c} = ac + b$.

C: Os estudantes fizeram $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.

Este item foi o mais fácil para a amostra total, bem como para as subamostras definidas por cada género e pelos estudantes das universidades U1 e U3. Para os estudantes de U2 não foi tão fácil como o Item 1-PE.B.

Item 16-Al.M (17.º)

Conhecimentos: Inequações racionais.

Competências: Resolver uma inequação racional e representar o conjunto-solução sob a forma de intervalo de números reais.

Tabela 4.26 - Respostas ao item 16-Al.M

ITEM 16-Al.M Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		**TOTAL** (N=1879)	**M** (n=1267)	**F** (n=612)	**U1** (n=1236)	**U2** (n=127)	**U3** (n=516)
Certa	**A**	**53**	54	49	53	52	51
Erradas	**B**	27	26	30	29	27	23
	C	19	19	20	18	20	23
Omissa		1	1	1	0	2	3

Hipóteses Explicativas

B: Os estudantes multiplicaram ambos os membros da inequação pela incógnita, como se ela fosse sempre um número positivo.

C: Os estudantes cometeram o mesmo erro dos que selecionaram o distrator B e não souberam resolver a inequação do 2.º grau, incompleta, que obtiveram.

Na amostra-Rasch, este item foi significativamente mais fácil para os estudantes da universidade U3 do que para os da U1 - enquanto em U3 foi o 10.º item mais fácil, em U1 foi o 20.º (ver Gráfico 4.10).

Observe-se que a solução da inequação apresentada neste item pode ser encontrada sem realizar qualquer cálculo, bastando ter algum conhecimento de gráficos de funções elementares.

Item 5-Al.B (19.º)

Conhecimentos: Operações algébricas com logaritmos.

Competências: Utilizar as regras operatórias com logaritmos, na mesma base, na resolução de uma equação do 1.º grau.

Tabela 4.27 - Respostas ao item 5-Al.B

ITEM 5-Al.B Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	A	55	59	49	64	58	34
Erradas	B	24	22	28	20	26	32
	C	20	19	22	15	13	32
Omissa		1	1	2	1	2	3

Hipóteses Explicativas

B: Os estudantes igualaram $\ln a + \ln b$ a $\ln ab$ mas fizeram $\frac{1}{c}\ln d = \ln\frac{d}{c}$.

C: Os estudantes acharam que $\ln a + \ln b$ é igual a $\ln(a+b)$.

Ao contrário do item anterior, este item é significativamente mais fácil para os participantes da universidade U1 (e da U2) do que para os da U3 (ver Gráfico 4.10).

Item 4 - Al.B (24.º)

Considere a equação

$$\frac{9}{4\cos x} = \cos x\,.$$

Assinale a única opção correta.

A) A equação tem uma única solução no intervalo $[0, \pi/2\,[$.

B) A equação não tem soluções no intervalo $[0, \pi/2\,[$.

C) A equação tem duas soluções no intervalo $[0, \pi/2\,[$.

Tabela 4.28 - Respostas ao item 4-Al.B

ITEM 4-Al.B Respostas (%)								
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		**TOTAL** (N=1879)	**M** (n=1267)	**F** (n=612)	**U1** (n=1236)	**U2** (n=127)	**U3** (n=516)
Certa	**B**	47	51	39	51	37	40
Erradas	**A**	36	35	39	36	29	35
	C	15	12	21	12	23	21
Omissa		2	2	1	1	2	4

Hipóteses Explicativas

A: Os estudantes sabiam que $\cos x$ é uma função positiva em $[0, \pi/2\,[$, mas cometeram o erro de admitir que ela pode ser igual a 3/2.

C: Os estudantes assumiram que tanto $3/2$ como $-3/2$ podem ser valores para $\cos x$.

Este é o item de Álgebra com nível de dificuldade mais elevado, embora seja um item com nível de complexidade baixo.

O PMAT contém mais cinco itens da área de conteúdo de Álgebra. Um deles, o item **3-Al.B** (5.º), requer que o estudante interprete o problema em contexto apresentado, o qual relaciona a parte com o todo, que o equacione (através de uma equação do 1.º grau) e o resolva. Apenas 71% dos participantes identificaram a resposta certa.

No item **29-Al.E** (15.º) é necessário encontrar o número de zeros de uma função polinomial do 2.º grau que depende do valor de um parâmetro real m envolvido nos três coeficientes da expressão quadrática. Apesar de a resolução deste item exigir diversas operações mentais, ele foi respondido corretamente por 54% dos participantes no PMAT.

Admite-se que os restantes indivíduos não chegaram a associar o binómio discriminante à resolução do item.

O item **17-Al.M** (16.º) avalia o conhecimento sobre a decomposição de polinómios em fatores, tendo-se verificado que 44% dos estudantes não relacionaram a fatorização com a divisão de polinómios ou não sabiam dividir polinómios.

O item **18-Al.M** (18.º) incide sobre números complexos. As alternativas de resposta são o resultado, na forma trigonométrica, de operações algébricas que envolvem o complexo dado no enunciado, escrito na forma algébrica. Os 46% dos participantes que não identificaram a resposta certa não souberam representar um número complexo na forma trigonométrica ou então erraram o cálculo da divisão de um complexo por outro e também o do quadrado de um número complexo ou da divisão de um complexo pelo seu módulo.

Menos de metade (48%) dos participantes identificou a resposta certa do item **19-Al.M** (22.º), para o que é necessário resolver uma inequação que compreende módulos de expressões algébricas lineares. Presume-se que os outros estudantes não aprenderam o significado de módulo de um número real.

ANÁLISE

Item 8 - An.B (11.º)

Conhecimentos: Regras de derivação e derivada da função exponencial.

Competências: Recordar e utilizar regras de derivação e a derivada da função exponencial para derivar a função f definida pelo produto de uma função polinomial de grau 3 com uma exponencial e calcular f' num ponto.

Tabela 4.29 - Respostas ao item 8-An.B

ITEM 8-An.B Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	A	60	58	63	64	56	52
Erradas	B	27	28	25	25	31	30
	C	11	11	11	10	12	14
Omissa		2	2	1	1	1	4

Hipóteses Explicativas

B: Os estudantes não memorizaram a regra de derivação do produto de funções e limitaram-se a derivar a função polinomial.

C: Os estudantes calcularam o valor de $f(-1)$ e não o de $f'(-1)$.

Este item revelou-se significativamente mais difícil para os rapazes do que para as raparigas - foi o 6.º item do PMAT mais fácil para as raparigas, enquanto os rapazes resolveram 14 itens com mais facilidade do que este (ver Gráfico 4.9).

Registe-se também que a resposta certa deste item é a única que não foi identificada por dois participantes no PMAT (ambos do género masculino).

Item 21-An.M (23.º)

Considere a função

$$g(x) = \frac{x^3 - 8}{(x-1)(x-2)}.$$

Assinale a única opção correta.

A) Não existe $\lim_{x\to 2} g(x)$.

B) $\lim_{x\to 2} g(x) = +\infty$.

C) $\lim_{x\to 2} g(x) = 12$.

Tabela 4.30 - Respostas ao item 21-An.M

ITEM 21-An.M Respostas (%)								
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		**TOTAL** (N=1879)	**M** (n=1267)	**F** (n=612)	**U1** (n=1236)	**U2** (n=127)	**U3** (n=516)
Certa	**C**	47	48	46	52	36	39
Erradas	**A**	24	24	26	22	31	29
	B	27	26	27	25	32	28
Omissa		2	2	1	1	0	4

Hipóteses Explicativas

A: Os estudantes aperceberam-se da indeterminação $\frac{0}{0}$, mas não a souberam levantar.

B: Os estudantes limitaram-se a comparar o grau dos polinómios do numerador e do denominador.

Este item foi significativamente mais fácil para os estudantes da universidade U3 do que para os da U2 (ver Gráfico 4.10).

Item 31 - An.E (25.º)

Considere a função $f: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3 - x + \sqrt{x}\,.$$

Assinale a única opção correta.

A) O contradomínio de f é o intervalo $\left[\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3}\right]$.

B) No intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ a função f é decrescente.

C) A reta $y - \sqrt{3} = -(x-3)$ é tangente ao gráfico de f em $\left(3, \sqrt{3}\right)$.

Tabela 4.31 - Respostas ao item 31-An.E

ITEM 31-An.E Respostas (%)								
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		**TOTAL** (N=1879)	**M** (n=1267)	**F** (n=612)	**U1** (n=1236)	**U2** (n=127)	**U3** (n=516)
Certa	**B**	46	46	44	50	35	39
Erradas	**A**	14	13	16	12	23	17
	C	37	36	38	36	38	38
Omissa		3	4	2	2	4	6

Hipóteses Explicativas

A: Os estudantes não calcularam ou erraram o cálculo do valor máximo de f.

C: Os estudantes limitaram-se a verificar que o ponto $\left(3, \sqrt{3}\right)$ pertence à reta que se afirmava ser tangente ao gráfico, nesse ponto.

A opção C deste item, que não foi dos mais difíceis, foi escolhida por mais de um terço dos estudantes, tendo sido a preferida pelos estudantes da universidade U2.

Item 9-An.B (28.º)

Conhecimentos: Extremos de uma função quadrática.

Competências: Identificar o minimizante de uma função quadrática dada, f, e calcular o valor mínimo correspondente.

Tabela 4.32 - Respostas ao item 9-An.B

ITEM 9-An.B Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	C	38	42	30	42	23	31
Erradas	A	15	14	15	12	17	20
	B	46	43	53	45	58	46
Omissa		1	1	1	1	2	3

Hipóteses Explicativas

A: Os estudantes sabiam que o valor mínimo de f é da forma $f(a)$, mas não souberam determinar o valor de a.

B: Os estudantes souberam calcular o minimizante de f mas acharam que ele era o valor mínimo.

Entre os itens de nível de complexidade baixo, este foi o mais difícil. Relativamente a todos os itens, só existem quatro com menos respostas certas que o item 9. Observe-se que o distrator B foi selecionado por muitos mais estudantes do que a resposta certa. Na amostra-Rasch, este item foi significativamente mais difícil para os estudantes da universidade U2 do que para os da U1 ou U3 (ver Gráfico 4.10).

Item 23-An.M (32.º)

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} -x+1, & x > 0 \\ e^x + \frac{x}{2}, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Assinale a única opção correta.

A) A função g anula-se no intervalo $]-1, 0[$.

B) A equação $g(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução.

C) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

Tabela 4.33 - Respostas ao item 23-An.M

ITEM 23-An.M Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	A	24	24	22	26	20	18
Erradas	B	59	58	60	58	59	61
	C	16	16	18	15	17	19
Omissa		1	2	1	1	3	2

Hipóteses Explicativas

B: Os estudantes acharam, erradamente, que a solução de uma equação do 1.º grau que estabeleceram pertence a um dos ramos da função ou não têm noção do valor numérico da exponencial de um número negativo.

C: Os estudantes não aplicaram o teorema de Bolzano-Cauchy nem souberam calcular o limite indicado na alternativa de reposta, limitando-se ao conhecimento de que e^x tende para zero quando x tende para $-\infty$.

Este item foi o mais difícil para todas as subamostras de participantes, tendo-se constatado que mais de metade deles escolheu o mesmo distrator (B) para responder ao item. Na universidade U3, qualquer distrator foi preferido à resposta certa.

O item **6-An.B** (3.º) avalia a interpretação geométrica da derivada de uma função. Os estudantes devem determinar a monotonia de uma função, numa parte do seu domínio, a partir da representação gráfica da sua derivada. Este item é o mais fácil da área de conteúdo de Análise, tendo sido respondido corretamente por 74% dos participantes. Outros terão respondido em relação à monotonia da função derivada e não à da função.

O item **7-An.B** (9.º) solicita o domínio e o contradomínio de uma função definida por um radical quadrático, para o que é necessário resolver uma inequação que envolve a função exponencial. A resposta certa deste item foi identificada por 62% dos participantes. Presume-se que alguns dos outros admitiram que e^x era a solução da inequação ou que e^x pode ser negativa. Este item é o único que se revelou significativamente mais fácil para os rapazes do que para as raparigas (ver Gráfico 4.9).

O item **15-An.M** (12.º) incide sobre o cálculo do limite de uma sucessão - a partir de duas sucessões dadas no enunciado, cujo limite é infinito, os estudantes devem calcular o limite da soma, da diferença ou do produto dessas sucessões. Embora 57% dos participantes tenham identificado a resposta certa, outros fizeram a diferença entre os limites das sucessões conhecidas e concluíram que "$\infty - \infty = 0$".

A resolução de uma inequação que envolve um logaritmo não neperiano de um polinómio completo do 2.º grau é avaliada pelo item **20-An.M** (14.º). Verificou-se que 57% dos indivíduos responderam corretamente ao item, mas quase um quarto dos participantes não estudou o polinómio, para o que é necessário aplicar a fórmula resolvente.

O item **30-An.E** (21.º) avalia o conhecimento sobre funções contínuas. Além da aplicação do conceito de continuidade de uma função, os estudantes precisam resolver uma equação trigonométrica do 2.º grau incompleta para identificarem a resposta certa do item, o que foi feito por 50% dos participantes. Admite-se que 21% dos indivíduos erraram este item porque não relacionaram os valores que encontraram para *sin x* com o domínio da função em estudo. Os restantes 29% dos participantes não devem ter sido capazes de aplicar o conhecimento sobre funções contínuas.

O item **24-An.M** (26.º) é outro item do PMAT sobre cálculo de derivadas - requer o sinal da segunda derivada num ponto de uma função racional que envolve a função logarítmica natural. Apenas 46% dos participantes responderam corretamente ao item.

Para identificar a resposta certa do item **22-An.M** (30.º) é necessário conhecer um corolário do teorema de Bolzano-Cauchy e aplicá-lo a uma função contínua em $[a, b]$, tal que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, para deduzir o valor lógico de três afirmações. Este item foi um dos mais difíceis do PMAT. Além dos 36% dos estudantes que selecionaram a resposta certa, supõe-se que quase metade dos participantes reconheceu o corolário, invocado numa das afirmações, mas não o soube aplicar na análise do valor lógico de outra afirmação.

LÓGICA E TEORIA DE CONJUNTOS

Item 14 - LC.M (29.º)

Indique a única opção que é a negação da afirmação: "Todos os meus filmes são pirateados".

A) Alguns dos meus filmes são pirateados.

B) Nenhum dos meus filmes é pirateado.

C) Pelo menos um dos meus filmes não é pirateado.

Tabela 4.34 - Respostas ao item 14-LC.M

ITEM 14-LC.M Respostas (%)							
ALTERNATIVAS de RESPOSTA		TOTAL (N=1879)	M (n=1267)	F (n=612)	U1 (n=1236)	U2 (n=127)	U3 (n=516)
Certa	C	38	39	38	42	57	26
Erradas	A	2	2	2	2	3	2
	B	59	59	60	56	40	72
Omissa		0	0	0	0	0	1

Hipóteses Explicativas

A: Os estudantes acharam que a negação de "todos" é "alguns".

B: Os estudantes acharam que a negação de "todos" é "nenhum".

O distrator A deste item revelou-se pouco funcional em todas as subamostras, uma vez que mais de 95% dos indivíduos não o escolheu. Observa-se que os estudantes da universidade U2 tiveram mais facilidade em responder a este item do que os outros, uma diferença que é significativa na amostra-Rasch.

Feita a apresentação e a análise das respostas aos itens de cada área de conteúdo do PMAT, registam-se alguns resultados, de caracter quantitativo, relativos às respostas dadas aos itens, no geral.

- A resposta correta foi identificada por mais de metade dos participantes em 19 itens;
- O número de respostas omissas é muito reduzido, tendo sido a dois itens de Geometria que os estudantes mais se escusaram a responder (26-Geo.M e 32-Geo.E);
- Os rapazes omitiram mais respostas do que as raparigas, exceto em quatro itens (26-Geo.M, 5-Al.B, 18-Al.M e 19-Al.M);
- Exceto no item 23-An.M, os estudantes da universidade U3 omitiram mais respostas do que os outros participantes;
- Os cinco itens mais fáceis do teste (1-PE.B, 12-PE.M, 2-Al.B, 3-Al.B e 6-An.B) foram respondidos corretamente por mais de 70% e menos de 80% dos participantes, tendo sido os únicos itens em que a resposta certa foi selecionada por mais de dois terços dos estudantes;

- A resposta certa dos cinco itens mais difíceis (28-PE.E, 9-An.B, 22-An.M, 23-An.M e 14-LC.M) foi selecionada por menos de 39% e mais de 23% dos estudantes, tendo sido nestes itens que uma das respostas erradas foi preferida à certa;
- Os cinco itens mais difíceis para a amostra total também foram os mais difíceis para as raparigas, enquanto os rapazes tiveram mais facilidade no item 9-An.B e menos no item 32-Geo.E;
- Em cada universidade, os cinco itens mais difíceis são os mesmos que os da amostra total, exceto o item 14-LC.M que, na universidade U2, foi mais fácil do que o item 31-An.E;
- O género masculino teve melhores pontuações, no geral, mas o género feminino revelou melhor desempenho em quatro itens (25-Geo.M, 32-Geo.E, 17-Al.M e 8-An.B) e teve a mesma percentagem de respostas certas num item (24-An.M);
- A superioridade dos estudantes da universidade U1 manifesta-se em 28 itens, verificando-se nos outros quatro um desempenho melhor (1-PE.B, 13-PE.M, 14-LC.M) ou igual (12-PE.M) por parte dos estudantes da universidade U2.

Os conhecimentos avaliados pelo PMAT são alguns dos que a equipa que o construiu considera indispensáveis para o sucesso nas unidades curriculares de Matemática do ensino superior de ciências e tecnologias. Espera-se, portanto, que os estudantes utilizem esses conhecimentos na aprendizagem dos conteúdos programáticos dessas unidades e que o seu desempenho na Matemática do 1.º semestre se correlacione positivamente com os resultados do PMAT que resolveram no início do ano letivo. Além disso, ao estudarem temas baseados nos que aprenderam no ensino secundário, os estudantes deverão desenvolver competências para obterem melhores pontuações no PMAT, caso voltem a resolver o teste no final do 1.º semestre.

4.3 Estudo Longitudinal: teste e reteste após treino de competências

Para analisar a diferença de desempenho dos estudantes no PMAT antes e depois do 1.º semestre de aulas, desenvolveu-se um estudo longitudinal com base nos resultados de duas aplicações do mesmo teste aos mesmos indivíduos (teste e reteste após treino de competências).

Este estudo realizou-se com os resultados do segundo ensaio experimental do PMAT, o PMAT-01, uma vez que não foi possível repetir a aplicação da versão do PMAT que sustenta esta investigação. No entanto, apesar de carecer de algumas melhorias a nível de metrológico, o PMAT-01 proporciona um grau de confiança aceitável nas suas medidas. Observe-se que 15 dos seus 40 itens constam no PMAT-03, sem terem sofrido alterações, os quais podem ser identificados no Quadro 3.1 pela posição que ocupam em cada teste.

O PMAT-01 foi aplicado em setembro de 2010 e em fevereiro de 2011, desta vez administrado a estudantes que estavam a iniciar o 2.º semestre. Muitos destes participantes tinham resolvido o teste em setembro e, entretanto, estudaram matérias baseadas nas do secundário, pelo que tiveram oportunidade de adquirir mais conhecimentos e reforçar o treino de competências necessárias para responder ao teste.

No âmbito desta investigação, os resultados do teste e reteste após treino de competências são os que se obtiveram nas duas aplicações do PMAT-01 aos 71 estudantes caracterizados na Tabela 3.7. Todos eles eram alunos de cursos de Engenharia da universidade U1, que se candidataram ao ensino superior com o exame nacional de *Matemática A*. Trata-se de alunos do 1.º ano, 1.ª matrícula, que estiveram inscritos em *Álgebra Linear* (AL) e em *Cálculo Diferencial e Integral I* (C-I), as unidades curriculares da área científica de Matemática do 1.º semestre dos respetivos cursos, cujos conteúdos programáticos se apresentam na secção 3.4.2.

Com as amostras do teste e do reteste emparelhadas, compararam-se as respostas dos estudantes para perceber o efeito, nos seus conhecimentos em Matemática à entrada do ensino superior, da formação que lhes foi proporcionada no decorrer do 1.º semestre. Também se confrontaram as classificações finais de AL e de C-I com as pontuações em ambas as aplicações do PMAT-01, com a nota da prova de ingresso e com a média do ensino secundário dos participantes no estudo. Os resultados das comparações entre as pontuações no PMAT-01 e entre estas e as classificações finais de AL e de C-I também foram utilizados como fonte de validação empírica do PMAT (secção 4.1.2).

A partir do número total de respostas certas (pontuação), respostas erradas e omissas dadas pelos participantes aos itens do PMAT-01, em cada aplicação, calcularam-se medidas de localização, de dispersão, de assimetria e de curtose que se organizaram na Tabela 4.35.

Tabela 4.35 - Comparação das estatísticas descritivas das respostas do teste e do reteste

COMPARAÇÃO DO TESTE COM O RETESTE DO PMAT-01: ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS (N=71)								
Variáveis (máx: 40)	**Teste-T Reteste-R**	**Min - -Max**	**Moda**	**Mediana**	**Média**	**Desvio Padrão**	**Assimetria**	**Curtose**
Certas	T	10 - 28	20	18	18,17	4,39	-0,01	-0,86
	R	9 - 35	24	20	20,17	4,97	0,55	0,50
Erradas	T	11 - 30	20	20	20,79	4,75	-0,07	-0,78
	R	5 - 27	18*	19	18,96	4,72	-0,58	0,34
Omissas	T	0 - 17	0	0	1,04	2,73	4,09	18,98
	R	0 - 16	0	0	0,87	2,68	4,30	19,82

* Existindo várias modas, apresenta-se o valor da menor.

As medidas de tendência central evidenciam alguma superioridade das pontuações obtidas pelos estudantes no reteste, mais acentuada na moda, acompanhada de uma ligeira quebra na omissão de respostas (comportamento manifesto nos gráficos que se apresentam de seguida). As distribuições das respostas certas e das erradas passaram de simétricas, no teste, para moderadamente assimétricas, no reteste, onde se nota uma maior concentração das observações nos valores centrais das variáveis. Em ambas as aplicações, a curva da distribuição das respostas omissas é bastante assimétrica positiva e achatada.

Considerem-se os diagramas de extremos e quartis das respostas certas, erradas e omissas, com indicação do número de *outliers*.

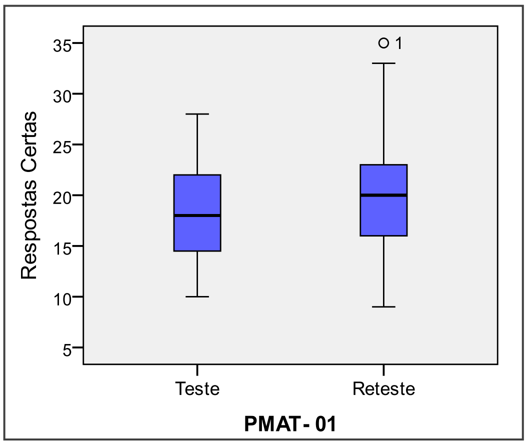


Gráfico 4.14 - Extremos e quartis das respostas certas no teste-reteste

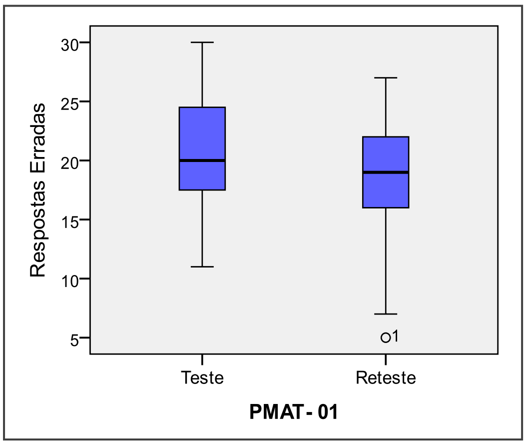


Gráfico 4.15 - Extremos e quartis das respostas erradas no teste-reteste

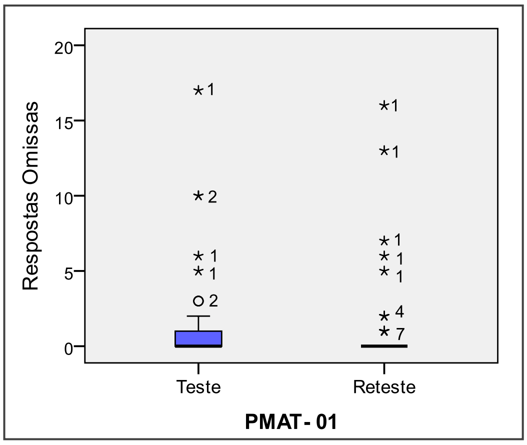


Gráfico 4.16 - Extremos e quartis das respostas omissas no teste-reteste

Observe-se que enquanto metade dos participantes omitiu uma ou duas respostas no teste, um estudante que se tenha escusado a dar alguma resposta no reteste já é considerado *outlier* severo (apenas 16 o fizeram).

Para comparar o total de respostas certas, erradas e omissas dadas por cada estudante, antes e depois de frequentarem as aulas do 1.º semestre, aplicaram-se testes de hipóteses às distribuições destas variáveis. Considere-se a Tabela 4.36.

Tabela 4.36 - Comparação das respostas do teste e do reteste com testes de hipóteses

COMPARAÇÃO DO TESTE COM O RETESTE DO PMAT-01: TESTES DE HIPÓTESES (N=71)						
Variáveis (máx: 40)	**Teste-T Reteste-R**	**Kolm-Smirnov (*p*)**	**Levene (*p*)**	**Teste t* (*p*)**	Média	Desvio Padrão
Certas	T	0,085	0,649	0,000	18,17	4,39
	R	0,200			20,17	4,97
Erradas	T	0,200	0,608	0,001	20,79	4,75
	R	0,200			18,96	4,72
Omissas	T	0,000	0,801	0,653	1,04	2,73
	R	0,000			0,87	2,68

* Amostras emparelhadas

O teste de Kolmogorov-Smirnov permite inferir que o total de respostas certas e o de respostas erradas, tanto no teste como no reteste, tende a ser normalmente distribuído, o que não acontece com as respostas omissas.

Segundo o teste de Levene, para qualquer uma das variáveis, não se rejeita a hipótese de a sua variância populacional no teste ser igual à que se verifica no reteste.

Ao aplicar o teste *t*-Student para comparar as médias das variáveis, conclui-se que existem diferenças muito significativas entre as médias das respostas certas e entre as das erradas. Pelo contrário, em relação à média do número de respostas omissas, a diferença entre as aplicações não é estatisticamente significativa.

Confirmada a melhoria de desempenho dos estudantes do teste para o reteste, analisaram-se os totais de respostas certas, erradas e omissas que deram a cada item, em cada aplicação, apresentados na Tabela E.8 (recorde-se que os 15 itens do PMAT-01 que fazem parte do PMAT-03 podem ser identificados através do Quadro 3.1).

Ao observar a referida Tabela E.8 é evidente a redução do número de respostas omissas do teste para o reteste - apenas o item 2 e os itens de complexidade elevada registaram o mesmo ou um número maior de respostas omissas na segunda aplicação do PMAT-01. Nem todos os itens tiveram mais respostas certas no reteste. De facto, houve menos estudantes a responder corretamente a 42,5% dos itens depois do 1.º semestre de aulas. Daí que o acréscimo do número total de respostas certas no reteste não possa ser atribuído, em absoluto, à conversão de respostas erradas ou omissas em respostas certas[11].

A partir dos dados das duas primeiras colunas da Tabela E.8 construiu-se o Gráfico 4.17 que facilita a visualização da diferença entre o número de respostas certas de cada item, no teste e no reteste após treino de competências.

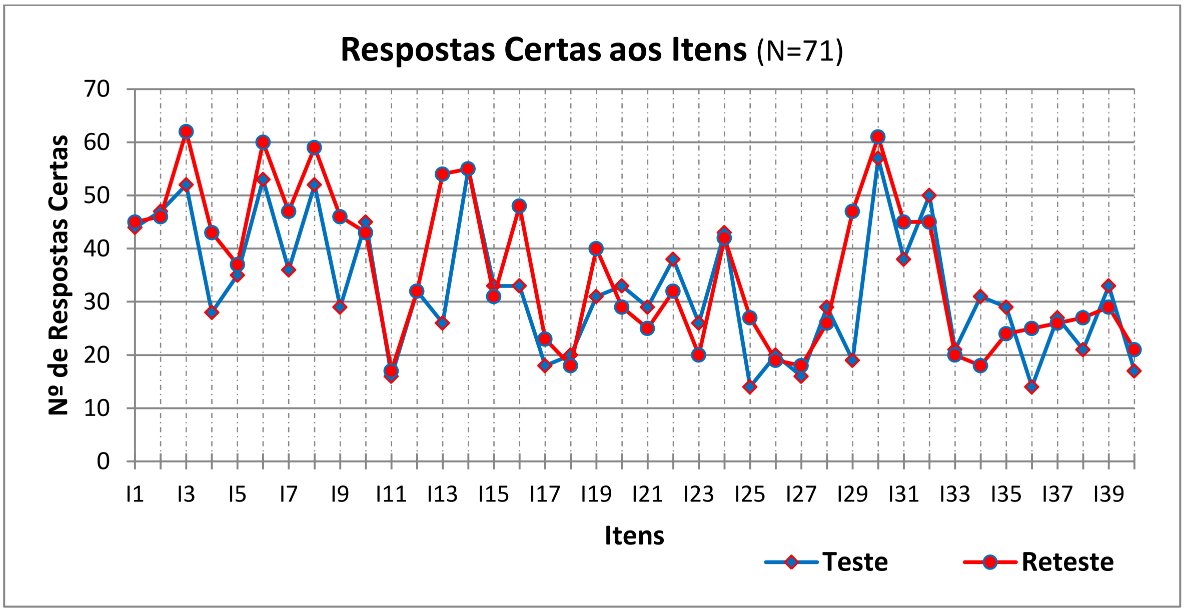


Gráfico 4.17 - Número de respostas certas aos itens no teste e no reteste

[11] Acontece o mesmo em alguns itens que têm mais respostas certas no reteste, como o item 27 - apesar de o aumento de duas respostas certas no reteste ser igual à redução das omissas, mantendo-se o número de erradas, algumas respostas certas transformaram-se em erradas e vice-versa (informação retirada da análise da base de dados com as respostas de cada participante).

Com, pelo menos, mais 7 respostas certas na segunda aplicação do que na primeira, contam-se 13 itens. Cinco deles pertencem à área de conteúdo de Álgebra: item 3 (operações com irracionais), item 4 (operações com logaritmos), item 6 (problema em contexto), item 19 (inequação racional) e item 36 (inequações com módulos); outros cinco são de Análise: item 7 (funções irracionais e exponencial), item 8 (funções pares), item 9 (derivadas de funções), item 16 e item 25 (limites de sucessões e de funções); um é de Geometria: item 31 (geometria analítica); os restantes são de Lógica e Teoria de Conjuntos: item 13 (conjuntos) e item 29 (lógica).

Pelo contrário, existe apenas um item com, pelo menos, mais 7 respostas certas no teste do que no reteste - um item de Probabilidades e Estatística, o item 34 (cálculo de probabilidades). Os outros itens que registaram um decréscimo de respostas certas (inferior a 7) incidem sobre probabilidades e combinatória, operações algébricas com números complexos, assíntotas, inequações com logaritmos, geometria analítica, extremos de funções irracionais, continuidade e funções trigonométricas.

Para avaliar a sensibilidade dos itens ao treino, analisou-se a diferença entre os números de respostas certas dadas aos itens, no teste e no reteste. Na Tabela 4.37 encontram-se, para cada item, os índices de dificuldade (proporção de respostas certas) nas duas aplicações do PMAT-01 e o *p-value* da significância da diferença entre eles. Nesta tabela também se encontra a correlação entre as respostas certas de cada item, para que se possa analisar a estabilidade dos resultados em termos da ordenação dos participantes.

Como já foi referido em 4.1.2, no âmbito da validade dos resultados do PMAT, as diferenças significativas entre as respostas certas devem-se, com exceção de um item, ao seu aumento do teste para o reteste. Elas ocorrem num quarto dos itens do teste, em todos os que registaram uma diferença do total de respostas certas superior ou igual a 10 (Tabelas E.8 e 4.37).

Com base nestas diferenças significativas e no conteúdo dos itens em questão, conclui-se que os participantes neste estudo pioraram o seu desempenho, do teste para o reteste, no item que requer a contagem de acontecimentos dados em contexto para o cálculo das probabilidades que solicita. Por outro lado, melhoraram o desempenho nos seguintes temas: manipulação de expressões algébricas com radicais quadráticos; operações algébricas com logaritmos; inequações com módulos; estudo de uma função irracional que envolve a exponencial; derivadas de funções; limites de sucessões; limites de funções; teoria de conjuntos; quantificadores.

Tabela 4.37 - Diferença e correlação entre as respostas certas no teste e no reteste

ITENS	TESTE E RETESTE DO PMAT-01 DIFERENÇA E CORRELAÇÃO ENTRE RESPOSTAS CERTAS*				
	Índice de Dificuldade		Significância da diferença (*p*) entre Resp. Certas	Correlação entre Resp. Certas	
	Teste	Reteste		C. Pearson	*p*
1 - PE.B	0,62	0,63	0,837	0,31	**0,009**
2 - PE.B	0,66	0,65	0,810	0,41	**0,001**
3 - Al.B	0,73	0,87	**0,028**	0,26	**0,028**
4 - Al.B	0,39	0,61	**0,007**	0,24	**0,048**
5 - Al.B	0,49	0,52	0,686	0,32	**0,008**
6 - Al.B	0,75	0,85	0,159	0,21	0,076
7 - An.B	0,51	0,66	**0,049**	0,26	**0,029**
8 - An.B	0,73	0,83	0,135	0,30	**0,012**
9 - An.B	0,41	0,65	**0,015**	0,01	0,957
10 - An.B	0,63	0,61	0,535	0,30	**0,010**
11 - Geo.B	0,23	0,24	--	0,10	0,413
12 - Geo.B	0,45	0,45	0,829	0,39	**0,001**
13 - LC.B	0,37	0,76	**0,000**	0,16	0,187
14 - PE.M	0,77	0,77	---	0,27	**0,021**
15 - PE.M	0,46	0,44	0,698	0,26	**0,028**
16 - An.M	0,46	0,68	**0,022**	0,04	0,730
17 - Al.M	0,25	0,32	0,321	0,10	0,452
18 - Al.M	0,28	0,25	0,698	0,01	0,948
19 - Al.M	0,44	0,56	0,103	0,30	**0,013**
20 - Al.M	0,46	0,41	0,709	0,15	0,244
21 - Al.M	0,41	0,35	0,616	-0,07	0,566
22 - An.M	0,54	0,45	0,088	0,36	**0,003**
23 - An.M	0,37	0,28	0,242	0,16	0,182
24 - An.M	0,61	0,59	---	0,07	0,593
25 - An.M	0,20	0,38	**0,006**	0,22	0,078
26 - An.M	0,28	0,27	0,859	-0,10	0,403
27 - An.M	0,23	0,25	0,829	0,16	0,207
28 - An.M	0,41	0,37	0,605	0,01	0,910
29 - LC.M	0,27	0,66	**0,000**	0,28	**0,019**
30 - Geo.M	0,80	0,86	0,254	0,02	0,861
31 - Geo.M	0,54	0,63	0,292	0,05	0,704
32 - Geo.M	0,70	0,63	0,242	0,14	0,242
33 - Geo.M	0,30	0,28	0,829	0,27	**0,024**
34 - PE.E	0,44	0,25	**0,022**	-0,01	0,911
35 - Al.E	0,41	0,34	0,223	0,24	0,052
36 - Al.E	0,20	0,35	**0,017**	0,09	0,470
37 - Al.E	0,38	0,37	0,849	0,13	0,305
38 - An.E	0,30	0,38	0,223	0,20	0,118
39 - An.E	0,46	0,41	0,718	0,07	0,566
40 - Geo.E	0,24	0,30	0,553	0,03	0,800

* Os *p-value* inferiores a 0,05 estão grafados a negrito.

Na Tabela 4.37 verifica-se uma tendência para os participantes responderem de forma consistente a 15 itens, àqueles que apresentam correlações positivas e significativas entre as respostas certas. Entre eles encontram-se quase todos os itens de Probabilidades e Estatística, itens de Álgebra (simplificação de expressões algébricas com irracionais, operações com logaritmos e resolução de inequações com expressões racionais), itens de Análise (funções irracionais, função exponencial e função logarítmica), itens de Geometria (semelhança de triângulos e posição relativa de retas) e um item de Lógica e Teoria de Conjuntos (quantificadores).

Para 12 itens, a correlação entre as respostas certas é quase nula, o que sugere alterações nas respostas dadas. De referir que, entre eles, os que se revelaram significativamente mais fáceis no reteste são itens que requerem a derivada de uma função, o limite de sucessões e a resolução de uma inequação com módulos.

Com os estudantes agrupados em função das classificações finais que obtiveram nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, AL e C-I, foi elaborada a Tabela 4.38 com as suas pontuações no teste e no reteste, estando assinaladas a negrito as do reteste que são superiores ou iguais às do teste (72% dos casos).

Nesta tabela, para cada unidade curricular, os participantes aprovados separaram-se pela nota obtida: 10-12; 13-15; 16-17 e 19 para AL (nenhum aluno teve 18 valores, mas um deles teve 19 a AL); os reprovados dividiram-se conforme a informação que consta nas pautas: NA (não avaliados) e RE (avaliados).

Observando as pontuações no PMAT-01 registadas na Tabela 4.38, salienta-se o facto de os estudantes que tiveram, pelo menos, 30 pontos no reteste após treino de competências tinham sido aprovados a AL e a C-I com mais de 15 valores. Há uma exceção: um aluno que teve mais de 15 a C-I, mas entre 10 e 12 a AL.

Note-se que dois alunos obtiveram mais de 20 pontos em cada aplicação do PMAT-01 (responderam corretamente a mais de metade dos itens) e não conseguiram a aprovação em qualquer das unidades curriculares. Por outro lado, sete alunos não alcançaram os 20 pontos, nem no teste, nem no reteste, mas ficaram aprovados a AL e a C-I, um deles com classificações de 13 a 15 valores.

Tabela 4.38 - Classificação a C-I e a AL *versus* pontuação no teste e no reteste do PMAT-01

TESTE/RETESTE PONTUAÇÃO (0-40)		**Cálculo Diferencial e Integral I** (0-20)					
		Reprovados		**10-12**	**13-15**	**16-17**	**Total**
		Não Avaliad.	**Avaliados**				
Álgebra Linear (0-20)	**Reprovados Não Avaliados**	21/**23** 12/**20** 19/**19** 18/**18** 23/18	12/**15** 22/14	--	--	--	
	Total	5	2	0	0	0	**7**
	Reprovados Avaliados	13/**15** 22/19 20/15 10/9	21/**26** 16/**24** 18/**19** 12/**18** 17/**17** 14/**17** 15/**16** 10/**14** 14/**14** 13/**13** 16/13	20/**21** 14/**20** 11/**16** 15/**15** 23/17	15/**16** 24/22 24/21	--	
	Total	4	11	5	3	0	**23**
	10-12	11/**21**	20/**25** 17/**24** 18/**22** 16/**18** 17/14	18/**27** 21/**24** 22/**24** 14/**23** 20/**23** 14/**23** 15/**20** 14/**14**	--	18/**30** 21/**26**	
	Total	1	5	8	0	2	**16**
	13-15	20/**20**	--	24/**24** 20/**21** 13/**19** 22/21 20/19 22/19 19/18 16/15 17/15 17/14	28/**28** 17/**24** 19/**20** 11/**16** 23/22 24/22 23/22	20/**22**	
	Total	1	0	10	7	1	**19**
	16-17	--	--	13/**20**	24/**27** 22/**24**	24/**35** 26/**33**	
	Total	0	0	1	2	2	**5**
	19	--	--	--	--	26/**30**	
	Total	0	0	0	0	1	**1**
	Total	**11**	**18**	**24**	**12**	**6**	**71**

Na tabela anterior, ao tomar como referência as classificações em AL e em C-I, verifica-se que os participantes com 10 a 12 valores em AL e C-I mantiveram ou melhoraram a sua pontuação do teste para o reteste (quase todos para mais de 20 pontos).

Também se constata que dos 41 estudantes com menos de 13 valores em AL e C-I, apenas oito conseguiram mais de 20 pontos no teste, metade dos quais baixou a pontuação no reteste. Por outro lado, dos 13 estudantes com mais de 12 valores a AL e a C-I, só três tiveram menos de 20 pontos no teste, tendo melhorado o seu desempenho no reteste.

Uma simples observação da Tabela 4.38 sugere que quanto melhores as classificações a AL e a C-I, melhores são as pontuações no PMAT-01, o que é confirmado pelos coeficientes de correlação de Pearson entre estas variáveis, já apresentados na Tabela 4.13, no âmbito da validação do PMAT.

Para mostrar também as correlações entre as classificações de AL e de C-I e entre as pontuações no teste e no reteste, construiu-se a Tabela 4.39, recuperando dados da Tabela 4.13 (recorde-se que apenas se conhece a classificação quantitativa dos alunos aprovados, pelo que os outros não foram considerados no cálculo destes coeficientes).

Tabela 4.39 - Correlação entre pontuações no teste, no reteste e notas positivas de Al e C-I

CORRELAÇÕES (Coef. Pearson)	**Álgebra Linear**	**Teste**	**Reteste**
Cálculo Dif. Int. I (C-I)	0,502 (sig.=0,002) (n=34)	0,462 (sig.=0,002) (n=42)	0,580(sig.=0,000) (n=42)
Álgebra Linear (AL)	-	0,453 (sig.=0,003) (n=41)	0,320 (sig=0,041) (n=41)
Teste	-	-	0,598 (sig.=0,000) (n=71)

Entre as correlações encontradas, todas positivas e estatisticamente significativas ($p < 0{,}05$), observe-se como são semelhantes os valores dos coeficientes de Pearson entre C-I e o teste e entre este e AL. Repare-se ainda como a correlação entre C-I e o PMAT-01 aumentou do teste para o reteste, enquanto a correlação entre AL e o PMAT-01 diminuiu.

A correlação entre o teste e o reteste sugere alguma estabilidade nos resultados, na ordenação dos participantes nos conhecimentos de Matemática medidos.

A coerência entre as classificações de AL e de C-I e a pontuação no teste do PMAT-01 despertou o interesse por outros indicadores do desempenho em Matemática dos participantes, antes de entrarem no ensino superior. Assim, procurou-se a nota da prova de ingresso (PI) e a média do 12.º ano de escolaridade (M12) dos alunos que tiveram aproveitamento e dos que, sendo avaliados, reprovaram a AL e a C-I.

Tendo-se verificado que, entre os 34 estudantes aprovados a AL e a C-I, apenas sete registaram uma diferença superior a dois valores entre as classificações destas unidades curriculares, optou-se por excluir alguns deles e agrupar as classificações dos restantes em intervalos da forma $[a, a+2]$, com $a = 10, 13, 16$, que contêm a média das notas de AL e de C-I tais que pertencem a $[a-1, a+3]$. Com base neste critério, que pareceu o mais adequado para retirar conclusões pertinentes dos dados com a menor perda de informação, construiu-se a Tabela 4.40 com medidas de dispersão e de localização das variáveis PI e M12.

Apesar de as pontuações no PMAT-01 terem sido já consideradas, organizou-se uma tabela idêntica à Tabela 4.40, a Tabela 4.41, com medidas relativas à pontuação na 1.ª aplicação do teste e ao nível de competência (estimado a partir da amostra dos 1898 participantes no PMAT-01) dos mesmos 40 estudantes.

Observe-se que em ambas as tabelas, exceto os valores do desvio-padrão, os das outras medidas apresentam-se por ordem crescente, tal como as classificações de AL e C-I, salvo os da mediana e da média da segunda para a quarta coluna da Tabela 4.40 e alguns do mínimo e do máximo da Tabela 4.41.

Tabela 4.40 - Nota da prova de ingresso e média do 12.º ano de alunos aprovados e dos reprovados a AL e a C-I

NOTA DA PROVA DE INGRESSO (PI) E MÉDIA DO 12.º ANO (M12) (0-200) **ESTUDANTES REPROVADOS A AL E A C-I** (n=11) **ESTUDANTES APROVADOS A AL E A C-I** (n=29)								
Estatísticas Descritivas	**Reprovados a AL e a C-I**		**Aprovados a AL e a C-I** **Média das notas de AL e C-I** (10 - 20)					
			10 - 12* (n=10)		**13 - 15**** (n=14)		**16 - 18***** (n=5)	
	PI	**M12**	**PI**	**M12**	**PI**	**M12**	**PI**	**M12**
Mínimo	108,5	126,0	118,0	127,0	131,5	136,0	167,5	163,0
Máximo	159,5	166,0	162,5	174,0	190,0	180,0	196,5	187,0
Mediana	123,5	151,0	134,0	139,0	155,0	165,5	176,5	174,0
Média	131,7	147,1	136,3	142,9	156,9	163,1	178,7	175,8
Des. Pad.	19,8	13,4	12,0	15,8	19,4	12,4	9,1	10,5

Fonte: Direção Geral do Ensino Superior (http://www.dges.mctes.pt/coloc/2010/)
* Nota mínima: 10; Nota máxima: 13; ** Nota mínima: 12; Nota máxima: 16
*** Nota mínima: 15; Nota máxima: 19

Tabela 4.41 - Pontuação no PMAT-01 e medida de Rasch de alunos aprovados e dos reprovados a AL e a C-I

PONTUAÇÃO (0 - 40) **E MEDIDA DE RASCH NO PMAT-01** (-2,4 - 2,13) **ESTUDANTES REPROVADOS A AL E A C-I** (n=11) **ESTUDANTES APROVADOS A AL E A C-I** (n=29)								
Estatísticas Descritivas	**Reprovados a AL e a C-I**		**Aprovados a AL e a C-I Média das notas de AL e C-I** (10 - 20)					
			10 - 12* (n=10)		**13 - 15**** (n=14)		**16 - 18***** (n=5)	
	Pont.	**Medida**	**Pont.**	**Medida**	**Pont.**	**Medida**	**Pont.**	**Medida**
Mínimo	10	-1,22	14	-0,68	11	-1,08	20	0,02
Máximo	21	0,13	24	0,47	28	0,96	26	0,71
Mediana	15	-0,56	18	-0,21	21	0,13	24	0,47
Média	15	-0,56	18	-0,21	20	0,02	24	0,47
Des. Pad.	3,0	0,32	3,7	0,43	4,2	0,5	2,6	0,3

* Nota mínima: 10; Nota máxima: 13 ** Nota mínima: 12; Nota máxima: 16
*** Nota mínima: 15; Nota máxima: 19

O facto de a nota da prova de ingresso e a média do 12.º ano englobarem classificações de outras disciplinas além da *Matemática A* não favorece o valor preditivo destas variáveis. O certo é que o valor mínimo de PI e o de M12 dos estudantes desta amostra que tiveram aproveitamento a AL e a C-I com média das duas classificações finais menor ou igual a 12 é igual a 118,0 e a 127,0, respetivamente. Por outro lado, os que conseguiram uma média superior a 15 tiveram, pelo menos, 167,5 pontos em PI e 163,0 pontos em M12. Qualquer um destes alunos teve, pelo menos, 20 pontos no PMAT.

Saliente-se também o facto de dois estudantes terem reprovado a AL e a C-I, apesar de um ter conseguido 159,5 pontos na PI (e 157,0 em M12) e o outro 166,0 em M12 (e 158,0 em PI). Contudo, quer um, quer o outro tiveram 16 pontos no PMAT, o que corresponde a um nível de competência abaixo da média ($-0{,}19\ logit$), embora superior ao de, pelo menos, um aluno que teve 12 ou mais valores a AL e a C-I.

O estudo longitudinal efetuado reconhece que os bons resultados da aprendizagem pré-universitária dos conteúdos avaliados pelo PMAT, em particular aqueles que são recuperados e desenvolvidos no estudo das matérias de AL e C-I, facilitam o sucesso nestas unidades. Mas, embora fundamental, este fator não será o único a potenciar o desempenho em Matemática no 1.º semestre dos cursos superiores.

4.4. Estudo de Casos: transição da Matemática do secundário para a do superior

Para, entre outros objetivos, identificar fatores que influenciam os resultados em Matemática no 1.º semestre do ensino superior de ciências e de tecnologias, além dos conhecimentos que os estudantes adquiriram antes de entrarem nos cursos, entrevistaram-se 25 participantes no estudo longitudinal, caracterizados na secção 3.4.3.

Nas entrevistas, presenciais, individuais e semiestruturadas, os estudantes foram questionados sobre o método de ensino e de aprendizagem que lhes é proposto, que comparações fazem com a Matemática do ensino secundário, como avaliam a preparação que ela proporciona para o prosseguimento dos seus estudos, que dificuldades sentem no estudo da Matemática e que medidas sugerem para as prevenir e remediar (ver protocolo da entrevista no Apêndice D ou a sua descrição na secção 3.3.3).

O estudo de casos desenvolvido a partir dos resultados das entrevistas, apresentados nesta secção, sugere a perspetiva dos estudantes acerca da transição da Matemática do ensino secundário para a do superior[12].

Os estudantes entrevistados foram selecionados e agrupados em duas subamostras, a dos Melhores Alunos (**M)** e a dos Piores Alunos (**P**), conforme se descreve na secção 3.4.3. Saliente-se que a média das classificações de AL e C-I dos Melhores Alunos varia entre 13,0 e 17,5 valores, enquanto os Piores Alunos não foram além dos 12,0 valores na única unidade curricular em que conseguiram aproveitamento (ver Tabela 3.9).

Após o tratamento dos dados recolhidos nas entrevistas, a informação obtida foi resumida e organizada em tabelas, quadros ou descrita em texto, do modo que mais pareceu facilitar a análise das respostas dos entrevistados, que se apresentam na ordem sugerida pelo protocolo.

Sempre que necessário, cada entrevistado é identificado pela subamostra a que pertence e pela ordem da respetiva entrevista (por exemplo, P25 representa o aluno entrevistado em 25.º lugar, que pertence ao grupo dos Piores Alunos). Representa-se por #M ou #P o número de indivíduos, de M ou de P, associados a uma determinada resposta ou resultado.

[12] Os resultados deste estudo foram apresentados no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática de 2014, na secção Ensino da Matemática (Monteiro, Afonso, & Pires, 2014).

Para se analisarem de modo adequado os resultados das entrevistas, deve ter-se presente a Tabela 3.9, onde se caracterizam os entrevistados quanto ao género e classificações (nota de candidatura, prova de ingresso, média do 12.º ano, classificação final em AL e em C-I e pontuação nos teste e reteste).

1. Do Ensino Secundário

- Todos os entrevistados frequentaram o **curso** Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologia.
- As **classificações** obtidas pelos entrevistados na disciplina de Matemática, no 3.º período dos 11.º e 12.º anos de escolaridade, variaram entre os seguintes valores:

Tabela 4.42 - Variação das classificações a Matemática no ensino secundário

CLASSIFICAÇÕES A MATEMÁTICA NO ENSINO SECUNDÁRIO 3.º PERÍODO DOS 11.º E 12.º ANOS					
ENTREVISTADOS	11.º ano		12.º ano		Observações
	Min	Max	Min	Max	
Melhores Alunos	14	20	14	19	- 7M e 2P melhoraram a classificação do 11.º para o 12.º
Piores Alunos	10	19	10	16	- P23 teve 19 no 11.º e 16 no 12.º

- Entre os entrevistados, 2M e 6P nunca participaram em qualquer **atividade extracurricular de Matemática**. Os restantes participaram, pelo menos uma vez, no 3.º ciclo ou no secundário, nas *Olimpíadas Portuguesas de Matemática*, no *Canguru Matemático sem Fronteiras*, no *mat12*, no *Problema do Mês* ou em *Jogos Matemáticos*.

2. História Pessoal da Relação com a Matemática

- Mais de metade dos participantes considerou que, no secundário, foram **bons alunos** a Matemática. Dois dos Melhores e cinco dos Piores classificaram-se como medianos ou razoáveis e um dos Piores, o que teve a nota de candidatura mais baixa, disse que não era bom aluno. Os restantes não responderam à pergunta.
- No grupo dos estudantes que se consideraram bons alunos a Matemática, apenas quatro (2M e 2P) não tiveram **classificações regulares**. Esta irregularidade também foi confirmada por outros seis entrevistados (1M e 5P). Os motivos apresentados são

diversos: o tipo de matéria; os testes intermédios (mais fáceis que os do professor); falta de estudo para alguns testes (um entrevistado do grupo dos Piores disse que se a classificação do último teste tivesse sido baixa, estudava mais para o teste seguinte e acabava por tirar melhor nota).

- No que respeita a **fatores que influenciaram positivamente a aprendizagem** da Matemática, registaram-se as seguintes respostas.

Quadro 4.1 - Fatores que influenciaram a aprendizagem da Matemática

INFLUÊNCIAS POSITIVAS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	
Familiares	- O gosto do pai pela Matemática (3M*; 1P); - O incentivo ao estudo dado pelos pais (2M); - A ordem da irmã para estudar (1P); - O aconselhamento dos pais para ter explicações (3P).
Outros Fatores	- Bons professores (6M; 3P); - O gosto pela Matemática (4M; 1P); - Bom explicador (4P); - O estudo/a resolução de muitos exercícios (2M); - O próprio sentido de responsabilidade (1M); - Gosto em fazer exercícios difíceis (1P).

* Dois deles tiveram as melhores notas de candidatura

- **A Matemática foi determinante na escolha do curso** superior para 7M e 2P, por gostarem de Matemática (dois alunos ainda colocaram a hipótese de fazerem um curso de Matemática, mas a perspetiva de terem que estudar muita teoria fê-los desistir dessa alternativa).

- Após um semestre de aulas, apenas três estudantes respondem às questões ***Gosta de Matemática?***, ***Como avalia o seu relacionamento com a Matemática?, Como avalia a sua preparação pré-universitária para estudar a Matemática do curso que frequenta?*** do mesmo modo como responderiam antes de entrarem no ensino superior. Os outros mudaram de opinião, conforme se constata no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 - Respostas dos entrevistados antes e depois da entrada no ensino superior

<table>
<tr><th colspan="7">Gosta(va) de Matemática?
Como avalia(va) o seu relacionamento com a Matemática?
Como avalia(va) a sua preparação para estudar a Matemática do curso que frequenta?</th></tr>
<tr><th rowspan="2">ESTUDANTES (comentários)</th><th colspan="3">ANTES DE ENTRAR NO E. SUPERIOR</th><th colspan="3">DEPOIS DO 1.º SEMESTRE DO ENSINO SUPERIOR</th></tr>
<tr><th>Gosta?</th><th>Relação?</th><th>Preparação?</th><th>Preparação?</th><th>Relação?</th><th>Gosta?</th></tr>
<tr><td>M10; M12;
M5 g)</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">Boa</td><td>Boa</td><td rowspan="2">Sim
g)</td></tr>
<tr><td>M1;
M19 h)</td><td></td><td></td><td></td><td>Já foi melhor h)</td></tr>
<tr><td>P16
M4</td><td></td><td></td><td></td><td>Depende da matéria</td><td>De C-I sim; de AL não</td></tr>
<tr><td>M6 d); M8 e)
M9; M11;
M14 a);
P21; P23</td><td></td><td></td><td>Boa</td><td rowspan="4">Não era muito boa
d)</td><td rowspan="2">Boa
e)</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td>M3 d)</td><td></td><td>Boa
a)</td><td></td><td>Já gostei mais</td></tr>
<tr><td>P24</td><td></td><td></td><td></td><td>Já foi melhor</td><td rowspan="2">Sim
f)</td></tr>
<tr><td>P17 b), f)</td><td>Sim</td><td></td><td>Não era muito boa
b)</td><td>Boa</td></tr>
<tr><td>M7 c)</td><td></td><td></td><td rowspan="2">Razoável</td><td>Boa
c)</td><td rowspan="2">Já foi melhor</td><td>Tenho curiosidade</td></tr>
<tr><td>M2 d)</td><td></td><td></td><td>Não era muito boa
d)</td><td rowspan="2">Sim</td></tr>
<tr><td>P13</td><td></td><td>Variava com a matéria</td><td>Boa</td><td>Razoável</td><td>Agora é mais a sério …</td></tr>
<tr><td>P15</td><td></td><td>Era pior que agora</td><td>Razoável</td><td>Medíocre</td><td>Percebo melhor agora do que antes</td><td>Sim, se não tiver de estudar</td></tr>
<tr><td>P18</td><td></td><td rowspan="2">Não era muito boa</td><td>Razoável</td><td>Razoável</td><td>Boa</td><td rowspan="2">Sim</td></tr>
<tr><td>P20</td><td></td><td>Boa</td><td>Aprendi, mas esqueci</td><td>Não é muito boa</td></tr>
<tr><td>P25</td><td>Mais ou menos</td><td rowspan="2">Não era muito boa</td><td>Razoável</td><td rowspan="2">Não era boa</td><td>Não é muito boa</td><td>Mais ou menos</td></tr>
<tr><td>P22</td><td>Não</td><td>Não era boa</td><td>Piorou</td><td>Não</td></tr>
</table>

Algumas células do Quadro 4.2 remetem para os seguintes comentários, mais extensos, feitos pelos estudantes:

a) *Mas com muito estudo em casa;*

b) *Pelo que ouvia dizer;*

c) *Porque estudei além do exigido nas aulas do secundário;*

d) *No secundário devia haver mais exigência;*

e) *Aqui, percebe-se o porquê das coisas;*

f) *Exceto das demonstrações;*

g) *Sobretudo de AL;*

h) *Aqui, a matéria é muito teórica.*

Por exemplo, em relação ao entrevistado M14 pode-se ler: antes de entrar no curso, gostava de Matemática, tinha uma boa relação com ela *mas com muito estudo em casa*, e achava que tinha uma boa preparação; depois de um semestre de aulas, percebeu que a sua preparação não era assim tão boa, mantém um bom relacionamento com a Matemática e continua a gostar desta disciplina.

Da análise do Quadro 4.2, deduz-se que a maioria dos estudantes gostava e continua a gostar de Matemática, embora alguns gostassem mais dela no secundário; 2P melhoraram o seu relacionamento com esta disciplina, enquanto 4M e 1P pioraram.

O entrevistado M7 foi o único que, antes de entrar no ensino superior, achava a sua preparação razoável e depois veio a verificar que ela era boa. Tanto indivíduos do grupo M como do grupo P reconheceram que a sua preparação pré-universitária não era tão boa (6M e 5P) ou razoável (2P) como a julgavam, antes de entrarem no ensino superior.

Saliente-se que os entrevistados P22 e P25, os que não disseram que gostavam de Matemática antes da entrada no ensino superior, candidataram-se com nota inferior a 140,0 valores e recorreram a explicações no ensino secundário.

Embora continuem a gostar de Matemática no ensino superior, os entrevistados que tiveram as melhores notas de candidatura, M1 e M19, pioraram o seu relacionamento com esta disciplina.

Todos os entrevistados reconheceram a **importância da Matemática no curso** que frequentam - quer para utilizar nas outras disciplinas, quer para estruturar o raciocínio. No entanto, 1P observou que a Matemática é importante, mas não ao nível que é exigido na universidade que está a frequentar.

3. A Matemática no Ensino Superior

3.1. No que respeita ao **PMAT-01**, que todos os entrevistados resolveram em setembro e em fevereiro, recolheram-se as seguintes informações:

- Relativamente ao teste que os estudantes resolveram em setembro, a característica mencionada com mais frequência foi "muito grande" (para 8M e 3P). Alguns referiram que na segunda metade do teste deram muitas respostas ao acaso (recorde-se que este teste tinha 40 itens). Apenas dois entrevistados acharam o teste difícil (o M4 e o P21 que tiveram, respetivamente, 21 pontos e 16 pontos). Muitos deles classificaram a dificuldade de baixa ou razoável e reconheceram a matéria do secundário no conteúdo do teste. Um estudante, dos Melhores, disse que a calculadora lhe fez falta.
- Ao resolverem o PMAT-01 em fevereiro, mais de metade dos entrevistados achou o teste mais fácil, tendo um acrescentado "porque tinha ganho resistência com os testes do 1.º semestre". Segundo um deles, foi mais fácil na lógica, nos conjuntos e nas funções; segundo outro, foi mais fácil nas derivadas e mais difícil nos complexos. Embora tivessem mantido a pontuação, dois estudantes (1M e 1P) consideraram o reteste mais difícil porque estavam esquecidos da matéria. Também a aluna com melhor nota de candidatura teve esta opinião, apesar de ter tido mais dois pontos do que no teste. Cinco entrevistados acharam que o nível de dificuldade se manteve, incluindo um dos que acharam o teste difícil. Um aluno mencionou o desfasamento do teste em relação à Matemática que aprendeu no 1.º semestre.

3.2. Questionados sobre o **funcionamento** das unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, C-I e AL, os entrevistados responderam aos itens de modo igual, ou muito semelhante, para ambas as unidades.

- A maioria dos alunos concorda com o **número de horas de aulas**, com a **quantidade de matéria** lecionada por aula e também com o **método de ensino**. Apesar disso, preferiam que as aulas não fossem dadas "tão depressa" e que lhes facultassem mais tempo para resolver exercícios. Esse tempo podia ser conseguido se tivessem mais aulas práticas, o que também evitaria que fosse dada tanta matéria por aula (uma crítica apontada por 5M e 2P). Um aluno sugeriu que uma maneira de ter mais tempo para resolver exercícios seria reduzir a quantidade de matéria teórica (que muitos acham demasiada). Destacam-se as opiniões de dois alunos em relação ao método de ensino: um deles (M14) gosta muito porque não está sempre a dar a mesma coisa, como acontecia no secundário, e os exercícios são sempre diferentes; o outro (P15, o que gosta de Matemática se não tiver de a estudar) entende que o método é, apenas, razoável, porque os professores insistem demasiado em coisas simples e depois não há tempo para as mais complexas.

- Quanto à **proibição da utilização da calculadora** nos testes, a maioria dos entrevistados concorda com esta medida (10M e 5P). Entre eles, um dos Melhores Alunos disse ter ficado "chocado" com este impedimento; um dos Piores (o que teve pior nota de candidatura) observou que "não usar calculadora ajuda a pensar melhor". Outros estudantes fizeram comentários idênticos, tendo um deles sugerido que esta proibição deveria ocorrer no secundário. Foi, precisamente, por estarem habituados a utilizar a calculadora que alguns entrevistados não concordaram com esta restrição. Outros motivos apresentados para o desacordo foram: faz falta para confirmar resultados; faz falta para os gráficos; faz falta para poupar tempo nos cálculos intermédios.

  Em relação ao ***software*** a que os estudantes podem recorrer para estudar as matérias das unidades curriculares de Matemática, poucos o utilizaram e nenhum o considerou indispensável.

- As opiniões não foram unânimes em relação ao **material de estudo** disponível para os alunos. No entanto, a grande maioria considera que é de boa qualidade e em quantidade suficiente.

- Excetuando o **nível de dificuldade dos testes**, que muitos entrevistados consideraram elevado (sobretudo o do primeiro teste, por ser inesperado), a maioria concordou com o modo de **correção dos testes** e com o **número de momentos de avaliação** (dois testes a C-I e três testes a AL). Não foi detetado um padrão nas respostas dos que não concordaram - uns preferiam mais testes a C-I, outros menos testes a AL, alguns defendem mais fichas de trabalho e outros que não deviam fazer nenhuma.

- No que respeita à **relação do aluno com os professores**, apenas se registou um tipo de resposta: "a relação é boa".

3.3. Quanto à **aprendizagem** da Matemática no ensino superior:

- Quase todos os entrevistados apontaram um ou mais temas das matérias de C-I ou de AL em que sentiram alguma dificuldade na sua aprendizagem. As Transformações Lineares e os Integrais foram os mais mencionados, quer entre os Melhores, quer entre os Piores Alunos. Os Espaços Vetoriais e as Séries também foram referidos. Alguns entrevistados sentiram mais dificuldades na teoria, tendo dois dos Melhores Alunos especificado que o mais difícil foi, para um, a definição de limite e, para outro (o que disse que no ensino superior se percebe o porquê das coisas) o "provar por definição".

  As **causas** apontadas para as dificuldades sentidas foram diversas. Os entrevistados do grupo dos Melhores Alunos referiram: poucos momentos de avaliação; ritmo das aulas teóricas (muito rápido); estudar apenas para o próximo teste e deixar de acompanhar as outras disciplinas; falta de bases. Esta também foi uma causa das dificuldades de um dos Piores Alunos. A muita teoria, a dificuldade de aplicar a teoria à prática e a não compreensão da matéria foram outros motivos apresentados.

  Os Melhores Alunos **superaram**, total ou parcialmente, **as dificuldades** sentidas. Entre os Piores, alguns resolveram-nas ainda no 1.º semestre e outros acham que as conseguem ultrapassar nas aulas que estão a frequentar no 2.º semestre (nesta instituição, as unidades curriculares do 1.º semestre também são lecionadas no 2.º).

  Apesar de a questão ***Gosta mais de estudar Matemática no ensino superior do que no secundário?*** ter sido pensada só para os alunos que não sentiram dificuldades, ela acabou por ser feita a todos os entrevistados, embora alguns tenham respondido com “não sei”. Excluindo estas respostas, construiu-se o Quadro 4.3 com as restantes e a respetiva justificação dada por alguns dos entrevistados.

  Registe-se que, além do entrevistado P25 (o que, tal como antes de entrar no curso, gosta mais ou menos de Matemática) assinalado no quadro, também o P21 e o P15 (o que agora percebe melhor Matemática do que antes) preferem estudar Matemática no ensino superior. As classificações destes três alunos na disciplina de Matemática no final dos 11º e 12º anos foram, respetivamente: 13 e 11; 14 e 12; 11 e 10.

Quadro 4.3 - Estudar Matemática no secundário *versus* no ensino superior

Gosta mais de estudar Matemática no ensino secundário ou no superior?	
Resposta	**Porque no ensino superior …**
No ensino superior (3M e 3P)	- A matéria é mais específica (M5); - A matéria é mais consistente (M6); - Aprende-se mais (M14); - A matéria não é sempre igual (P25).
No ensino secundário (6M e 7P)	- A Matemática tem muita matéria teórica (maioria dos estudantes); - A matéria é mais difícil (P13 e M4); - O método de ensino não é tão bom como o do secundário (M4); - O ambiente escolar (turma, escola, professores) é mais "frio" (P16).

- A questão ***Ter notas entre 10 e 13 a Matemática, no ensino secundário, é suficiente para compreender a Matemática do ensino superior?*** foi interpretada pela maioria dos entrevistados como se em vez de "compreender" tivesse sido dito "ter sucesso".

  A opinião dos estudantes parece ter variado em função das próprias classificações nos dois sistemas de ensino, como se pode ver no Quadro 4.4. Este quadro foi construído de modo a fazer corresponder, a cada um dos três tipos de respostas obtidas, acrescidas das justificações mais frequentes, a variação da nota de candidatura dos entrevistados e a das suas classificações na disciplina de Matemática no 3.º período dos 11.º e 12.º anos (recorde-se que estas classificações foram ditadas pelos próprios alunos).

  Observe-se que os estudantes que tiveram classificações inferiores a 13 no final do 11.º e do 12.º anos (P18, P22 e P25) consideraram que no ensino secundário aprenderam o suficiente para poderem ter aproveitamento em C-I e em AL. Por outro lado, só alunos que tiveram sucesso nestas disciplinas e, pelo menos, 15 valores no secundário, são de opinião que com notas inferiores a 13 não é possível obter aprovação a C-I e a AL. Segundo alguns estudantes, estas aprovações são possíveis, mas com muitas dificuldades, como respondeu o estudante P24, que reprovou nas duas unidades curriculares.

Quadro 4.4 - Nível de conhecimentos de Matemática no secundário e o sucesso no ensino superior

<table>
<tr><th colspan="5">Ter notas entre 10 e 13 a Matemática, no secundário, é suficiente para compreender/ter sucesso a Matemática no ensino superior?</th></tr>
<tr><th>Respostas</th><th>Estudantes</th><th>11.º</th><th>12.º</th><th>Candidatura</th></tr>
<tr><td>Não.
- As bases não são suficientes
- Nem que seja muito trabalhador</td><td>M1, M2, M4, M5, M10, M11, M19</td><td>16 - 20</td><td>15 - 19</td><td>154,3 - 191,8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sim, mas com muitas dificuldades.
- A menos que não faça as outras disciplinas (P24)</td><td>M3, M6, M9</td><td>17 - 18</td><td>18 - 19</td><td>163,0 - 176,0</td></tr>
<tr><td>P13, P24</td><td>16</td><td>15 - 16</td><td>159,0 - 159,8</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sim.
- Qualquer aluno pode ter sucesso no ensino superior (M14)
- Com esforço consegue-se
- A dedicação e o empenho do aluno são mais importantes que as notas (P23)</td><td>P23</td><td>19</td><td>16</td><td>154,5</td></tr>
<tr><td>M8, M14, P17</td><td>14 - 18</td><td>14 - 18</td><td>153,0 - 154,8</td></tr>
<tr><td>P18, P20, P21, P22, P25</td><td>10 - 14</td><td>10 - 15</td><td>124,8 - 141,3</td></tr>
</table>

Quando o guião das entrevistas foi elaborado, pretendia-se questionar sobre a **preparação dos estudantes no ensino secundário e o nível de exigência do ensino superior,** apenas os alunos que tinham respondido "não" à pergunta anterior. No entanto, no decorrer das entrevistas, entendeu-se conveniente fazer estas perguntas a todos. Assim, menos de metade dos estudantes (4M e 5P), tal como já tinham dado a entender ao longo da entrevista, consideram que o ensino secundário não prepara bem os alunos para os cursos superiores que estão a frequentar. Algumas das justificações dadas são: o facilitismo nas avaliações (conseguem-se boas notas com pouco estudo); a demasiada repetição de matérias (que conduz ao desinteresse dos alunos); a lacuna do ensino e da exigência de bons métodos de trabalho; a omissão de demonstração de resultados; a falta do ensino de certas matérias que são básicas para o ensino superior.

Dois dos entrevistados que acham que os alunos não vêm bem preparados do ensino secundário e sete dos restantes (4M e 3P) comentaram ainda que o ensino superior é exigente, mas não demasiado - "está a preparar os alunos para o mercado de trabalho", como alguns referiram. Dois dos Melhores Alunos consideram que o ensino superior é demasiado exigente em relação ao secundário. Um deles sugeriu a criação de uma disciplina optativa de Matemática no 12.º ano, para ser frequentada pelos estudantes que pretendem candidatar-se a um curso de Engenharia. Dois alunos que reprovaram a C-I e a AL responderam que o secundário prepara bem os alunos para a universidade, tendo um deles, o P17, dito: "As bases do secundário estão bem. O superior não é demasiado exigente, nós é que temos de desenvolver as bases que trazemos".

3.4. Exceto um, todos os entrevistados do grupo dos que tiveram melhores classificações (entre 11 e 17 a C-I; entre 12 e 19 a AL), **atribuíram o sucesso alcançado** ao muito estudo. Quatro deles mencionam ainda o acompanhamento dos professores (nos dois sistemas de ensino). Para o bom aproveitamento também contribuíram: a boa preparação anterior; o gosto pela Matemática; o método de estudo; a frequência das aulas; o modo de organizar o tempo disponível para estudar; a atitude de não desistir perante as dificuldades. O entrevistado M4 apontou como razão dos seus 16 valores a C-I a resolução dos exames anteriores (não superou as dificuldades que teve nas Séries e nos Integrais e tem consciência de que não sabe bem a matéria).

A falta de estudo foi a principal razão apresentada por cinco entrevistados para as suas reprovações, a uma ou às duas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre. Dois destes alunos reconheceram que estudaram pouco porque tiveram preguiça. Outro (o P17, que reprovou a C-I e a AL e teve uma pontuação acima da média nos testes do PMAT) acrescentou ainda a falta a algumas aulas (para fazer trabalhos) e o "susto" que teve com o 1.º teste de AL. A não compreensão dos conteúdos, de C-I ou de AL, fez com que três deles se dedicassem mais a outras unidades curriculares do curso. Demasiada teoria, muitos trabalhos para entregar (faltou tempo para estudar) e pouca organização no estudo foram os **motivos das reprovações ou baixas classificações** dos outros entrevistados (recorde-se que as classificações positivas destes estudantes variaram entre o 10 e o 12).

4. As Dificuldades a Matemática

As respostas obtidas às perguntas relacionadas com as dificuldades que os alunos, em geral, experimentam na aprendizagem dos conteúdos programáticos de C-I e de AL (dos cursos dos alunos entrevistados) apresentam-se resumidas nos Quadros 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8.

A maioria dos entrevistados respondeu com vários tópicos, a cada questão, sendo os mais comuns referidos tanto pelos da subamostra dos Melhores como da subamostra dos Piores Alunos. Indicam-se estes tópicos como tendo sido indicados por **Ambos**.

Quadro 4.5 - O que "assusta" os alunos nas disciplinas de Matemática do ensino superior?

Os alunos ficam "assustados" com …	
Melhores Alunos	- As notas dos alunos nos anos anteriores; - O desconhecido; - A diferença entre as matérias do secundário e as do superior; - A sensação de não ter bases suficientes; - A quantidade de matéria.
Ambos	- O grau de exigência; - O ritmo a que é dada a matéria.
Piores Alunos	- Muitas disciplinas de Matemática; - Turmas muito grandes; - O 1.º teste; - Pouco tempo para fazer os testes.

O nível de exigência em AL e C-I foi apontado como um dos fatores que intimida os alunos no início das aulas, embora não tenha sido indicado como causa das dificuldades dos estudantes. Em contrapartida, o ritmo a que são dadas as aulas (muita matéria e muito depressa) parece assustar os alunos e causar-lhes dificuldades, como se verifica nos Quadros 4.5 e 4.6.

Quadro 4.6 - Que tipo de dificuldades enfrenta grande parte dos alunos nas disciplinas de Matemática do ensino superior?

Grande parte dos alunos tem dificuldades em …	
Melhores Alunos	- Saber estudar (alguns perdem muito tempo com pormenores superficiais e depois não têm tempo para os mais importantes); - Perceber a matéria; - Saber organizar o tempo.
Ambos	- Acompanhar o ritmo das aulas; - Não desistir perante um exercício mais difícil.
Piores Alunos	- Adaptar-se à mudança do método de ensino; - Adotar um novo método de trabalho e não estudar só na véspera do teste; - Ter aulas demasiado teóricas.

Alguns entrevistados acrescentaram ainda os fatores que, no seu entender, provocam as dificuldades que apontaram: falta de bases; pouco estudo ou estudar só na véspera do teste; faltar às aulas ("se faltarmos a uma aula não percebemos nada na seguinte"); deixar acumular as dúvidas; o trabalho das outras disciplinas.

As críticas já apontadas ao método de ensino da Matemática, no secundário e no superior, e as razões do próprio sucesso ou insucesso nas unidades curriculares do 1.º semestre refletiram-se nas respostas dos entrevistados às duas últimas questões.

Quadro 4.7 - Como se poderia promover o sucesso dos alunos com dificuldades em Matemática?

	Para promover o sucesso …
Melhores Alunos	- O método de ensino devia ser parecido com o do secundário; - As turmas deviam ser mais pequenas; - Devia haver mais interação nas aulas; - Devia haver aulas de apoio; - Deviam ser criadas atividades de Matemática; - Os professores deviam mandar fazer fichas regularmente; - Devia ser o mesmo professor a dar as aulas teóricas e as práticas; - Devia ser desenvolvido o espírito de perspicácia dos alunos para ele saber qual o método/fórmula mais adequado e mais simples a aplicar (decorar não basta); - Os professores deviam ensinar a estudar de modo adequado.
Ambos	- Os professores deviam motivar os alunos e convencê-los de que conseguem fazer as disciplinas; - No secundário deviam ser introduzidas algumas matérias do superior, como, por exemplo, as primitivas; - Devia haver mais aulas práticas.
Piores Alunos	- Os alunos deviam ser convencidos a ir às aulas de dúvidas e a fazer mais exercícios (mas não sabe como); - As fórmulas das derivadas deviam ser decoradas no secundário; - Devia haver mais exigência no secundário e menos no superior; - Deviam ser dados exemplos práticos nas aulas teóricas (reduzir um bocadinho a teoria); - A 1ª parte da matéria de C-I devia ser dada mais depressa (porque é uma extensão do secundário) para haver mais tempo para a 2ª parte, onde é quase tudo novo; - Os professores deviam dar aulas de resolução de testes de anos anteriores; - Devia ser permitido o uso de calculadora; - No início do ano o ritmo das aulas devia ser menor e depois ir aumentando progressivamente (o baque inicial faz com que alguns alunos desistam).

Para promover o sucesso a C-I e a AL, os entrevistados propõem, entre outras medidas, um método de ensino mais parecido com o do secundário. No entanto, este deveria ser mais rigoroso e exigente, de modo que os alunos ficassem com uma melhor preparação para a Matemática dos cursos de Engenharia. Segundo metade dos alunos do grupo dos Piores, o secundário não prepara bem os estudantes para o ensino superior, uma opinião partilhada por poucos elementos do outro grupo.

A grande maioria dos entrevistados, mostrando não ter compreendido a importância da componente teórica das unidades curriculares de Matemática, sugere a sua redução e o aumento da parte prática.

Muitas das medidas apontadas pelos estudantes para reduzir o insucesso a AL ou a C-I requerem a intervenção dos professores. Para os alunos com piores resultados, no âmbito do esclarecimento de dúvidas e na ajuda à resolução de exercícios, ou mesmo de testes. Para os outros alunos, que reconhecem num método de estudo adequado um fator indispensável para o sucesso, os professores deveriam ensinar os estudantes a encontrar esse método. Entre os Melhores e entre os Piores Alunos, alguns consideram que se os professores motivassem os estudantes, estes teriam mais sucesso na aprendizagem.

Quadro 4.8 - Quais os fatores críticos indispensáveis para um aluno ter sucesso em Matemática?

Não se consegue ter sucesso a Matemática sem …	
Melhores Alunos	- Capacidade de organização; - Motivação; - Concentração no trabalho; - Estudar de modo adequado (diferente de muito); - Tirar as dúvidas assim que elas surgem.
Ambos	- Ter boas bases; - Gostar de Matemática; - Estudar muito / Fazer muitos exercícios; - Ter empenho e determinação; - Assistir, com atenção, às aulas teóricas e às aulas práticas.
Piores Alunos	- Vontade de aprender; - Estudar diariamente (nem que seja só uma hora); - Tirar dúvidas com os professores; - Estar quase preparado para os testes, duas semanas antes de os fazer; - … e, se calhar, reprovar (como me aconteceu).

Os entrevistados entendem que para se ter sucesso em Matemática é fundamental gostar da disciplina, assistir às aulas e estudar muito, com empenho e determinação. O estudo deve ser diário (segundo alguns dos Piores Alunos) e adequado (sugestão de Melhores Alunos). Esclarecer as dúvidas com os professores é outro fator crítico indispensável aos bons resultados em AL e em C-I.

Validação da Entrevista

Todos os entrevistados concordaram com o conteúdo da entrevista e com o modo como foi orientada. Alguns comentaram ainda que consideram muito importante a resolução do problema do insucesso a Matemática no ensino superior e ofereceram-se para continuar a colaborar na investigação, caso fosse necessário.

Conhecidos os resultados das entrevistas, importa fazer a sua interpretação e identificar relações entre eles e os resultados encontrados nos outros estudos efetuados no decorrer da investigação, que também já foram apresentados mas não discutidos.

Capítulo 5

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com os instrumentos de avaliação utilizados nesta pesquisa, obtiveram-se dados que proporcionaram os resultados apresentados no capítulo anterior. Da análise dos resultados decorre a sua interpretação, a procura do seu significado. Assim, este capítulo foi organizado com o propósito de apresentar uma discussão, no âmbito dos objetivos da investigação, dos resultados encontrados nos diversos estudos efetuados, que incidiram em amostras da população alvo - os estudantes que realizaram o exame nacional de *Matemática A* e estão a iniciar os seus estudos superiores em cursos de ciências ou tecnologias.

5.1 Resultados do PMAT

O estudo sobre o nível e o tipo de conhecimentos em Matemática da população alvo foi baseado nas respostas de 1879 estudantes, de três universidades, aos 32 itens de escolha múltipla que compõem o PMAT, um teste de conhecimentos de Matemática, na sua primeira semana de aulas do ensino superior, em 2012.

Antes de interpretar as respostas dos estudantes ao PMAT, importa saber em que medida elas constituem uma base suficientemente sólida e fiável para fundamentar um estudo rigoroso e científico. Ou seja, é necessário saber se o PMAT, resultado de quatro revisões e aperfeiçoamentos sucessivos, é uma prova estandardizada de medida de conhecimentos de Matemática como se pretendia.

5.1.1 Qualidade do PMAT como Instrumento de Medida

A análise dos resultados do PMAT, realizada no âmbito da Teoria Clássica dos Testes (TCT), incidiu sobre as respostas de todos os participantes a 31 itens do teste, depois de se ter excluído o item 25. Com o objetivo de estudar o PMAT completo, na análise dos seus resultados no âmbito da Teoria da Resposta ao Item (TRI) consideraram-se, apenas, os padrões de resposta dos 1211 estudantes que resolveram o PMAT com o item 25 corrigido e que se mostraram bem ajustados ao modelo utilizado, o modelo de Rasch (ver Tabela 4.9). A articulação dos resultados obtidos com as duas teorias, relativos aos itens, à fiabilidade e à validade dos resultados do teste, permite caracterizar o PMAT como instrumento de medida de conhecimentos de Matemática do modo que se apresenta a seguir.

Características dos Itens

Na Tabela 4.7 e no Gráfico 4.13 verifica-se que o intervalo de variação do índice de dificuldade dos itens não é muito adequado para avaliar indivíduos com nível de desempenho muito elevado ou muito baixo - alguns itens deveriam ser reconstruídos de modo a que uns se tornassem mais fáceis e outros mais difíceis. No entanto, o PMAT é um teste equilibrado quanto ao índice de dificuldade, que tem uma distribuição centrada num valor muito aproximado do desejável (Tabela 4.7). Além disso, como se observa no Gráfico 4.13, os itens (as suas medidas) estão distribuídos em torno do ponto médio de forma semelhante e também de modo suficiente (confirmado pelos índices de fiabilidade do teste), acontecendo o mesmo com o nível de competência dos participantes.

No Gráfico 4.13 também se observa que alguns itens estão concentrados, isto é, dão a mesma informação metrológica - seria preferível que eles tivessem níveis de dificuldade distintos para se conseguir mais informação do teste.

Como se verifica na Tabela 4.8, os itens não têm grande poder discriminativo - desejava-se que alguns itens fossem fortes indicadores das diferenças de sucesso no teste, que permitissem predizer a pontuação total de um indivíduo. Contudo, para os itens mais ajustados ao modelo de Rasch estima-se um índice de discriminação igual ou muito próximo do ideal (Tabela 4.10).

Com exceção de uma, qualquer alternativa de resposta errada do PMAT é funcional, ou seja, representa bem o seu papel de distrator, como se verifica na Tabela 4.6. Esta tabela também mostra que, na sua maioria, as correlações alternativa-total são valores aceitáveis, ou mesmo desejáveis no caso das correlações distrator-total, não se encontrando suspeitas de itens mal construídos.

A indicação de que existe coerência nos padrões de resposta dos estudantes é reiterada pela análise de Rasch: em todos os itens, a média, em relação à dificuldade do item, do nível de competência dos estudantes que selecionaram a resposta certa é superior à dos que escolheram qualquer distrator, sendo também superior à dificuldade do item (Gráfico 4.8). Esta análise também estima que a probabilidade de resposta ao acaso a qualquer um dos itens do PMAT não é significativa (Tabela 4.10).

Não se detetou um efeito significativo do funcionamento diferencial dos itens por género ou por universidade nos resultados do PMAT (Gráficos 4.9 e 4.10), pelo que se deduz que não foi a maior facilidade ou familiaridade do PMAT para algumas das subamostras, definidas por género ou universidade, que causou as diferenças de pontuação encontradas entre elas (Tabelas 4.4 e 4.5).

Fiabilidade dos Resultados

A partir das estatísticas do erro do modelo relativas às medidas estimadas pelo modelo de Rasch, que se encontram na Tabela 4.9, deduz-se que a precisão das medidas dos itens é muito boa, o que é reforçado pela Tabela 4.12.

Atendendo à diversificação das áreas de conteúdo do PMAT, a fiabilidade das medidas dos estudantes pode considerar-se bastante satisfatória. Os índices que a representam na TCT (Tabela 4.11) e na TRI (Tabela 4.12) sugerem confiança na tomada de decisões a nível de grupo e que o teste poderá discriminar a amostra em dois ou três níveis de competência. A eliminação de qualquer item do PMAT não iria melhorar o grau de coerência entre as respostas dadas a cada um deles, uma vez que todos os itens contribuem favoravelmente para a precisão das medidas dos estudantes.

A função informação do teste também aponta para um bom grau de fiabilidade nas medidas estimadas (Gráfico 4.11), que é reforçado pelo nível de estabilidade na ordenação dos participantes, nos conhecimentos de Matemática medidos, sugerido pelo valor da correlação entre as pontuações do teste e do reteste do PMAT-01 (Tabela 4.39). Esta consistência no desempenho dos estudantes verifica-se, em particular, em 38% dos itens do teste, como se observa na Tabela 4.37 (correlações positivas e significativas).

Os valores dos índices de fiabilidade dos resultados do PMAT permitem concluir que eles são replicáveis, que não aconteceram por acaso. Assim, é bastante razoável esperar a mesma ordenação dos itens (por nível de dificuldade) se o PMAT for aplicado a outra amostra de estudantes, de dimensão análoga, com o mesmo tipo de conhecimentos. Embora menos expectável, poder-se-ia prever que os estudantes ficariam ordenados do mesmo modo (segundo o seu nível de competência) se tivessem feito um teste paralelo ao PMAT.

Validade dos Resultados

O facto de a equipa que preparou, construiu e melhorou o PMAT incluir professores de Matemática do 12.º ano de escolaridade ou do 1.º ano do ensino superior, favorece a adequação dos itens do teste ao conteúdo e aos objetivos fixados, satisfazendo os critérios da relevância e da representatividade. A atitude dos participantes durante a realização do teste é outro indicador da validade de conteúdo do PMAT, assim como a ordenação dos itens por grau de dificuldade, uma vez que é semelhante à que se esperava.

O PMAT acusa diferenças entre as pontuações dos estudantes, agrupados por género ou por instituição de ensino (Tabela 4.4 e Tabela 4.5) da forma que seria de esperar - o melhor desempenho dos indivíduos do género masculino está de acordo com resultados de estudos desenvolvidos por diversos autores, mencionados na secção 4.1.2; sendo as notas de candidatura aos cursos da universidade U1 mais elevadas que as de U3, era expectável que os alunos de U1 tivessem melhores resultados no PMAT.

A comparação dos resultados obtidos nas aplicações do PMAT-01, o segundo ensaio experimental do PMAT, aos mesmos alunos no início de cada semestre do mesmo ano letivo, também contribui para a validação empírica dos resultados do PMAT, enquanto medidas de conhecimento de Matemática. A melhoria da pontuação dos participantes depois dos estudos do 1.º semestre (Tabelas 4.35 e 4.36), o aumento do número de respostas certas a mais de metade dos itens, sendo significativo em nove deles, o não aumento, ou mesmo redução, de respostas corretas a itens de conteúdos não treinados (Tabela 4.37), demonstram que o teste é discriminativo dos conhecimentos de Matemática dos estudantes deste nível de ensino.

Na Tabela 4.39 (e na Tabela 4.13) também se observa que as classificações finais nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre dos estudantes aprovados, que participaram nas duas aplicações do PMAT-01, correlacionam-se de modo positivo e significativo com as pontuações dos mesmos estudantes no teste e no reteste após treino de competências. Este resultado constitui outra prova de que o PMAT mede o que se pretende, nomeadamente, que o teste avalia conhecimentos necessários ao sucesso nas unidades curriculares de Matemática dos cursos superiores de ciências e tecnologias, como se queria.

As correlações entre os resultados das duas aplicações do PMAT-01 e os de alguns itens do questionário Escala Multidimensional de Auto-Eficácia de Bandura (Tabela 4.14) reforçam a legitimidade das inferências baseadas nos resultados do PMAT - mostram que quanto melhores as pontuações dos estudantes no teste e no reteste, maior é a sua perceção da facilidade que têm em aprender Matemática (e Físico-Química) e em conseguir planear e organizar o trabalho académico.

Na primeira abordagem à unidimensionalidade do PMAT, feita no âmbito da TCT, não se encontra um indicador forte de que existe um único fator responsável pelas respostas dos estudantes - na Tabela 4.16 observa-se que existem nove componentes principais com valor próprio superior a 1, que elas explicam apenas 40% do total da variância das variáveis originais e, além disso, que a primeira componente explica menos variância do que é desejável para um teste unidimensional, o que pode dever-se à diversidade de áreas de conteúdo do PMAT.

Contudo, o *Scree Plot* (Gráfico 4.12) aponta para a existência de um único fator. Por isso, optou-se por reter apenas as cinco componentes com valor próprio superior a 1,05 e analisar as características comuns dos itens que definem ou que contribuem para a definição do mesmo fator (Tabela 4.17). Deste modo, foi possível identificar os fatores com as seguintes capacidades: raciocínio lógico-dedutivo; domínio de procedimentos automatizados; intuição lógico-indutiva; recuperação de informação memorizada; apreensão analítica *versus* apreensão global do problema. O facto de os fatores não dependerem das áreas de conteúdo abrangidas pelo PMAT mas sim da natureza da capacidade exigida pelos itens, sugere que "conhecimento em Matemática" é o construto dominante manifesto nas respostas dos estudantes aos itens.

Por outro lado, o ajustamento dos dados empíricos ao modelo de Rasch é, só por si, um indicador de que o desempenho dos estudantes no PMAT é devido a um construto dominante. A unidimensionalidade também é confirmada pelo facto de as medidas estimadas pelo modelo de Rasch explicarem a quantidade esperada de variância nos dados, como se constata na Tabela 4.18. Desta tabela também se deduz que a segunda dimensão, a causar ruído nos dados, não é suficientemente expressiva para distorcer as medidas obtidas com o PMAT, o que é favorável à existência de uma única componente com impacto relevante nas respostas que os estudantes deram ao PMAT. Estes resultados não sofrem alterações significativas quando se analisa a unidimensionalidade do teste sem os itens que acusam funcionamento diferencial.

Como qualquer outro teste, o PMAT está sujeito a uma melhoria contínua. No entanto, o seu estudo metrológico sugere que, com um nível suficiente a elevado, ele mede com rigor aquilo que se pretende medir, o que confere um grau de confiança, bastante razoável, nas inferências feitas a partir dos seus resultados. Assim, admite-se que o PMAT é um instrumento de medida bem calibrado que permite avaliar, de forma objetiva e uniforme, os conhecimentos em Matemática dos estudantes de cursos de ciências e tecnologias, quando entram no ensino superior.

O PMAT é, portanto, um teste adequado a esta investigação, tal como a qualquer outro estudo científico que se baseie nos seus resultados, nomeadamente, estudos comparativos transversais ou longitudinais para aferir os efeitos de medidas educativas.

5.1.2 Medidas dos Estudantes

Os estudantes que participaram no PMAT obtiveram, em 31 itens, uma pontuação média igual a 16,72 (Tabela 4.3) e revelaram um nível médio de competência de 0,20 *logit* (Gráfico 4.13), o qual representa uma taxa de sucesso igual a 55%.

Embora dois estudantes tenham identificado todas as respostas certas (dois rapazes de U1), apenas 10% dos participantes acertaram mais de 75% dos itens. Por outro lado, 5% dos estudantes erraram, pelo menos, 75% dos itens (Tabela 4.19). Quanto ao número de respostas certas por item, só em 58% dos casos é que ele foi superior ao número de respostas erradas.

Assim, a primeira interpretação que se faz das medidas obtidas com o PMAT é que o nível de conhecimentos dos participantes, no geral, é mediano. Na subamostra dos indivíduos do género masculino e na dos estudantes da universidade U1, ambas com cerca de dois terços do total dos participantes, a média da pontuação no PMAT foi ligeiramente superior. No entanto, quer a média de 17,15 obtida pelos rapazes (Tabela 4.4), quer a de 18,1 dos alunos de U1 (Tabela 4.5), são valores que ficam aquém do que seria desejável para estudantes que estão a iniciar os seus estudos superiores de ciências ou de tecnologias.

É de salientar que as pontuações obtidas pelos participantes devem-se, sobretudo, às suas respostas certas e às erradas, uma vez que se registou um número reduzido de respostas omissas a qualquer item (Tabela 4.6), sendo menor no género feminino do que no masculino (só em quatro itens é que as raparigas omitiram mais respostas que os rapazes).

A não penalização de respostas erradas pode ter incentivado os estudantes a responder, mesmo sem terem a certeza da resposta certa. Contudo, como mostra a Tabela 4.10, a probabilidade de acerto ao acaso, de qualquer item, não é significativa. Aliás, constata-se que os estudantes da universidade U3, os que obtiveram pontuações mais baixas, foram os que omitiram mais respostas em todos os itens, exceto no item mais difícil.

Os últimos itens do teste foram os que tiveram mais respostas omissas, o que se atribui à falta de tempo dos estudantes para os resolverem, embora se possa dever também ao nível de complexidade elevado dos itens ou ao seu conteúdo - o último item do teste foi o menos respondido, mas é da mesma área de conteúdo do segundo item com mais respostas omissas, o item 26-Geo.M, embora nenhum deles seja dos cinco mais difíceis do teste (Tabela 4.6).

5.1.3 Conhecimentos e Lacunas de Aprendizagem

A análise das respostas aos itens do PMAT, apresentada na secção 4.2, sugere o tipo e o nível de conhecimentos da generalidade dos participantes no teste, assim como as áreas em que eles apresentam lacunas de aprendizagem, quer porque não demonstram saber e compreender conceitos, propriedades ou procedimentos, quer porque não revelam capacidade de aplicar os conhecimentos que possuem.

As interpretações que se apresentam a seguir são as explicações mais plausíveis para as respostas dadas, no geral. É importante ter presente que o conhecimento parcial sobre o tema avaliado, a intuição ou o acaso proporcionam respostas que podem não corresponder ao nível de conhecimento que os participantes realmente possuem. Além disso, as medidas obtidas com o PMAT referem-se a um construto cognitivo, pelo que a sua interpretação não é rigorosa como a das medidas de uma grandeza física.

A seguinte discussão das respostas aos itens do PMAT, por área de conteúdo, tem em conta que a grande maioria dos participantes no teste frequentou o 12.º ano de escolaridade e realizou o exame nacional de *Matemática A* no ano letivo de 2011/2012 (o objeto de avaliação do exame deste ano foi o programa do 12.º ano).

Probabilidades e Estatística

Todos os itens desta área avaliam conhecimentos em matérias ensinadas no 12.º ano de escolaridade. Tal como no exame nacional de *Matemática A*, foi nesta área (identificada por Probabilidades e Combinatória no exame) que os participantes no PMAT revelaram melhor desempenho. A este resultado não será alheio o facto de a construção de alguns itens ser idêntica nas duas provas, assim como à de itens de provas de exame nacional ou de testes intermédios de anos anteriores (Ferreira *et al.*, 2013).

Ao analisar as respostas dos estudantes, verifica-se que cerca de 75% soube aplicar os conhecimentos sobre distribuição de probabilidades, valor médio de uma variável aleatória discreta e propriedades das probabilidades a acontecimentos não contextualizados.

Registaram-se menos respostas certas aos dois itens desta área de conteúdo que requerem flexibilidade de pensamento e capacidade de interpretação de situações reais. Num deles, pouco mais de metade dos estudantes soube aplicar o conhecimento de cálculo combinatório. No outro, embora pareça que os estudantes sabem como se calcula a probabilidade de um acontecimento, cerca de dois terços acusaram dificuldades na contagem dos acontecimentos mencionados no item.

Geometria

Quase todos os itens de Geometria incidem sobre tópicos que se inserem em conteúdos programáticos do 11.º ano de escolaridade, que os alunos não treinaram no 12.º ano. Talvez seja por este motivo que os estudantes omitiram mais respostas nos itens de Geometria do que nos das outras áreas de conteúdo do PMAT.

Apenas cerca de dois terços dos estudantes conseguiram recuperar a informação da relação entre os declives de retas perpendiculares. A mesma porção de participantes soube interpretar geometricamente algumas operações com complexos, um tema que faz parte do programa do 12.º ano. Admite-se que muitas das respostas erradas ao item em questão tenham sido causadas pela não apropriação do conceito de conjugado de um complexo. Contudo, essas respostas também se podem dever ao esquecimento deste conceito, embora a matéria dos complexos seja das últimas a serem lecionadas na Matemática do secundário.

Os conhecimentos sobre triângulos semelhantes, adquiridos no 3.º ciclo, parecem estar esquecidos, uma vez que só 62% dos participantes chegaram a utilizar o valor da razão de semelhança.

Pouco mais de metade dos estudantes conseguiu identificar a resposta certa dos itens sobre geometria no espaço, manipulando as coordenadas de pontos e vetores. No entanto, admite-se que 18% dos participantes trataram um ponto como se fosse um vetor, cometendo um erro básico.

Partindo do pressuposto que os estudantes conseguiam planear a resolução e encontrar os valores em falta no item que solicita o produto interno de dois vetores, 59% dos participantes não responderam corretamente porque, supõe-se, não foram capazes de recordar a definição de produto interno.

Álgebra

Os dois itens mais fáceis de Álgebra avaliam conhecimentos que foram transmitidos aos estudantes no 3.º ciclo, mas que são frequentemente utilizados na aprendizagem de conteúdos do secundário. Ao responderem a estes itens, mais de 70% dos estudantes, mas menos de 80%, mostraram que sabem utilizar as regras e as propriedades operatórias em expressões algébricas com raízes quadradas, assim como interpretar, equacionar e resolver um problema em contexto que relaciona a parte com o todo.

Os outros sete itens de Álgebra referem-se a matérias lecionadas nos três anos do ensino secundário. Nenhum deles foi respondido corretamente por mais de 55% dos estudantes, embora os cinco itens que se mencionam a seguir tenham tido mais de metade de respostas certas.

Assim, considera-se mediano o nível de desempenho dos estudantes nos itens que incidem sobre polinómios, quer na decomposição em fatores que requer uma divisão de polinómios, quer no número de raízes reais que depende de um parâmetro, ambos tópicos do 10.º ano. Admite-se que muitos alunos não sabiam dividir polinómios nem discutir o sinal do binómio discriminante, mas certamente que teria havido mais respostas certas se os itens especificassem os procedimentos a utilizar para serem resolvidos.

O nível de desempenho dos estudantes não foi melhor no item que, explicitamente, solicita o conjunto-solução de uma inequação racional. A precipitação na resolução do item, que com alguma flexibilidade de pensamento dispensava qualquer cálculo, pode ter levado muitos participantes a manusear a variável da inequação como uma constante positiva. Também se admite que alguns deles não souberam resolver uma inequação do 2.º grau incompleta.

Outro item que só foi respondido por pouco mais de metade dos estudantes é o que incide sobre operações algébricas entre números complexos e representação do resultado na forma trigonométrica. Sendo uma matéria que é ensinada no final do 12.º ano e as competências evocadas pelo item, de forma objetiva, idênticas às de itens de provas do exame nacional, atribui-se muitas das respostas erradas à não aprendizagem deste tema, em particular a representação de complexos na forma trigonométrica.

Também as operações algébricas com logaritmos são estudadas no 12.º ano. No item que avalia este conhecimento, um item operacional de nível de complexidade baixo, quase metade dos alunos revelou não saber efetuar as operações solicitadas. Supõe-se que neste item, tal como no das operações algébricas com números irracionais, os alunos sentiram falta da calculadora que utilizavam no secundário.

Apenas 48% dos participantes no PMAT conseguiram resolver uma inequação que envolve módulos de expressões algébricas lineares. Provavelmente, os outros não conseguiram estabelecer uma estratégia de resolução do item.

Também menos de metade dos participantes (47%) conseguiu resolver uma equação trigonométrica elementar. Justifica-se o insucesso na resolução desta equação, solicitada de forma explícita, com a falta de análise crítica dos valores obtidos para a função trigonométrica, um assunto estudado no 11.º ano.

Análise

A grande maioria dos itens de Análise avalia conhecimentos que os estudantes adquiriram no 12.º ano de escolaridade e que foram objeto de avaliação no exame nacional de *Matemática A*. Contudo, a aprendizagem recente dos conteúdos em questão e a preparação para o exame não facilitaram muito as respostas aos itens desta área, uma vez que mais de metade apresenta um parâmetro de dificuldade acima da média. Refira-se que no exame nacional, foi nos itens que avaliam conteúdos idênticos aos de Análise do PMAT que se registou o pior desempenho (Ferreira *et al*., 2013).

Para resolver cinco dos itens de Análise são necessários conhecimentos de cálculo diferencial. Um deles solicita a interpretação do gráfico da derivada de uma função, o que foi feito corretamente por 74% dos participantes no teste.

A percentagem de estudantes que responderam corretamente aos dois itens que requerem explicitamente o cálculo de derivadas foi de 46% e 60% - as regras de derivação e as derivadas de funções elementares, fornecidas aos alunos nas avaliações do ensino secundário, parecem ter feito falta para a identificação da resposta certa.

O estudo de funções com aplicação do cálculo diferencial não foi efetuado com êxito por mais de metade dos estudantes, que nem devem ter reconhecido a possibilidade de utilizar derivadas para responder aos dois itens em questão. Na realidade, um deles pode ser resolvido sem recorrer ao cálculo diferencial, com base em matéria que os alunos aprenderam no 10.º ano. No caso deste item, admite-se que a aplicação incorreta de conhecimento, mais do que a não apropriação de conceitos, foi a principal causa do insucesso registado – para indicar o valor mínimo da função quadrática f, o valor de a foi selecionado por mais estudantes que o de $f(a)$, o que revela alguma confusão entre os conceitos de mínimo e de minimizante de uma função. Este item, que teve apenas 38% de respostas certas, foi mais difícil para os participantes no PMAT do que o item que solicita o estudo de uma função com um radical quadrático, o qual envolve diversos conceitos e requer planeamento de resolução e pensamento crítico.

O conhecimento da função exponencial é solicitado por três itens, sendo que um avalia a aplicação das regras de derivação.

O domínio e o contradomínio de uma função, definida por um radical quadrático que envolve a função exponencial, não foram bem determinados por 38% dos estudantes porque, supõe-se, não souberam aplicar o conhecimento da exponencial.

Saber utilizar o conhecimento da função exponencial também é essencial para detetar a resposta certa do item que veio a ser o mais difícil do PMAT - apenas 24% dos participantes responderam corretamente ao item, revelando ter pensamento crítico e flexível sobre conhecimentos de diversos domínios e capacidade para efetuar várias operações mentais. Além da exponencial, a resposta certa deste item evoca, de forma implícita, o teorema de Bolzano-Cauchy, pelo que a diversidade de temas também pode estar na origem do fraco desempenho dos participantes.

A aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy também não teve sucesso no item que incide exclusivamente sobre este tópico, já que foi o terceiro mais difícil do teste, com 36% de respostas certas. Admite-se que os alunos conhecem o teorema mas não o compreendem efetivamente, não o sabem interpretar para o aplicar e associar a outros conhecimentos.

Um dos itens do PMAT exige a resolução de uma inequação que envolve uma função logarítmica de um polinómio do 2.º grau. Apenas 57% dos estudantes selecionaram a resposta certa, sugerindo que conhecem a função logarítmica e que sabem resolver uma inequação do 2.º grau completa. A dificuldade de muitos estudantes que erraram o item parece estar relacionada com a resolução desta inequação, eventualmente por não terem a fórmula resolvente memorizada.

O cálculo do limite de uma sucessão e a continuidade de uma função também são abordados pelo PMAT. No item que incide sobre o primeiro tópico, 43% dos estudantes limitaram-se a pensar no limite das sucessões dadas para determinar, erradamente, o limite do resultado de operações entre elas. Deste modo, revelaram falta de conhecimento sobre limites e sucessões.

A não apropriação do conceito de continuidade pode ser a razão de metade dos participantes ter errado o item que avalia este conteúdo. No entanto, também pode ter sido a incapacidade ou o esquecimento de interpretar e criticar valores calculados para a função *seno,* no contexto do problema, que levou à escolha de um dos distratores (uma atitude análoga à que foi detetada no item mais difícil de Álgebra, que envolve a função *co-seno*).

Relacionar os polinómios do numerador e do denominador de uma fração e reconhecer que têm um fator comum é essencial para identificar a resposta certa do item do PMAT que incide sobre limites de funções racionais. Apenas 47% dos participantes tiveram flexibilidade de pensamento para fazerem esse reconhecimento e efetuaram a divisão necessária para levantar uma indeterminação. Admite-se que alguns dos outros estudantes se aperceberam da existência do fator comum mas não conseguiram fazer a divisão, uma lacuna na aprendizagem já assinalada no item de Álgebra sobre fatorização de polinómios. Quanto aos alunos que se limitaram a comparar os graus dos polinómios do numerador e do denominador, resta concluir que necessitam de formação sobre limites de funções.

Lógica* e *Teoria de Conjuntos

O tema Lógica e Teoria de Conjuntos é transversal ao programa da disciplina de *Matemática A* dos três anos do ensino secundário e não é avaliado de modo objetivo no exame nacional.

O número elevado de estudantes que negaram "todos" com "nenhum" (59%) revela alguma deficiência no seu raciocínio lógico. Apesar de o item em questão ser objetivo e apenas ser necessário um passo de resolução para identificar a sua resposta certa, a análise de Rasch coloca-o no grupo dos itens que exigem mais competência.

Como se verificou no processo de validação do PMAT, existe uma correlação positiva entre as classificações dos estudantes aprovados em unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre do ensino superior e as suas pontuações no PMAT. Deduz-se, portanto, que os conhecimentos e as lacunas de aprendizagem na Matemática do ensino secundário, detetadas nos participantes no PMAT, influenciam a aprendizagem da Matemática do ensino superior. As necessidades de formação, quer ao nível de conhecimentos quer ao de competências, justificarão algumas dificuldades que, de um modo geral, os estudantes experimentam no processo de transição da Matemática do secundário para a do superior.

Para reduzir essas dificuldades, propõe-se uma lista de temas a ter em conta na organização de sessões de ensino integradas em planos de ação que visem remediar os défices de aprendizagem dos estudantes, sobretudo nos temas que sustentam os conteúdos programáticos das unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, e promover o sucesso na Matemática do ensino superior.

A lista foi organizada tomando como referência os 15 itens do PMAT que registaram um parâmetro de dificuldade acima da média (Tabela 4.10), 11 dos quais foram respondidos corretamente por menos de metade dos participantes (Tabela 4.6).

Para facilitar a identificação das necessidades de formação detetadas pelo PMAT, quer a nível de conhecimentos quer de competências, faz-se a sua associação aos itens em que elas se fizeram sentir.

Necessidades de Formação em Matemática dos Estudantes à Entrada do Ensino Superior:

Conhecimentos

- Técnicas de contagem (item 28-PE.E);
- Geometria analítica (item 27-Geo.M);
- Operações algébricas com logaritmos (item 5-Al.B);
- Números complexos (item 18-Al.M)
- Limites de funções (item 21-An.M);
- Função exponencial (item 23-An.M);
- Cálculo diferencial (itens 24-An.M e 31-An.M), com incidência na memorização das regras de derivação, sobretudo no caso de o formulário não ser autorizado;
- Lógica (item 14-LC.M).

Competências

- Espírito crítico para analisar resultados obtidos no contexto do problema (itens 4-Al.B, 23-An.M, 30-An.E e 31-An.E);
- Pensamento flexível (itens 22-An.M, 23-An.M, 31-An.E e 14-LC.M);
- Recuperação de informação memorizada (itens 27-Geo.M, 32-Geo.E, 5-Al.B, 31-An.M e 24-An.M);
- Aplicação do conhecimento de
    - · Funções, em particular da exponencial (itens 9-An.B e 23-An.M);
    - · Módulos, sobretudo na resolução de inequações (item 19-Al.M);
- Interpretação e aplicação de conceitos e propriedades, especialmente da área do cálculo diferencial (itens 22-An.M, 23-An.M e 31-An.E);
- Definição de estratégias de resolução de problemas (itens 19-Al.M, 23-An.M e 31-An.E).

O desenvolvimento destas competências, de modo a que os estudantes consigam responder às exigências da Matemática do ensino superior, é um processo lento, que requer muito treino. Só um trabalho continuado e articulado entre alunos e professores, de qualquer nível de ensino, pode proporcionar esse nível de desenvolvimento.

As necessidades de formação dos estudantes assinaladas são mais ou menos significativas consoante os conteúdos programáticos das unidades curriculares de Matemática que vão frequentar no 1.º semestre. Também variam conforme as características dos próprios estudantes, nomeadamente o género e a formação académica, como se detetou com o PMAT da forma que se passa a descrever.

Diferenças entre géneros

O género feminino revelou ter mais facilidade em dividir polinómios (item 17-Al.M), em calcular o produto interno de vetores por definição (item 32-Geo.E), em efetuar operações geométricas com números complexos (item 25-Geo.M) e, de modo significativo, em derivar uma função num ponto (item 8-An.B). Este desempenho pode atribuir-se a uma maior capacidade das raparigas em memorizar ou em recuperar informação memorizada e em utilizar procedimentos automatizados.

Embora os rapazes tenham conseguido mais respostas certas na maioria dos itens, destacaram a sua superioridade ao determinar o domínio e o contradomínio de uma função irracional que envolve uma exponencial (item 7-An.B), um possível indicador de que têm o raciocínio dedutivo mais desenvolvido.

A maior diferença entre as percentagens de respostas omissas de rapazes e raparigas ocorreu no item que relaciona pontos e vetores do espaço, onde as raparigas se escusaram mais a responder, o que se poderá dever a uma menor capacidade de visualização geométrica. Recorde-se que, no geral, o género feminino foi mais confiante a responder ao PMAT (Tabela 4.4).

Diferenças entre formações académicas

Como já foi dito, os participantes das universidades U1 e U3 eram alunos de cursos de Engenharia ou de Ciências Exatas, enquanto os da universidade U2 frequentavam cursos de Economia ou Gestão (Ciências Sócio-Económicas). Estes dois grupos de estudantes que, em princípio, frequentaram disciplinas do ensino secundário diferentes, tiveram desempenhos significativamente diferentes em dois itens do PMAT (Gráfico 4.10).

Atribui-se à formação académica a maior facilidade que os estudantes de U2 tiveram, em relação aos de U1 e U3, em responder ao item de Lógica e Teoria de Conjuntos e a maior dificuldade em identificar a resposta certa do item de Análise que solicita o valor mínimo de uma função quadrática.

Registe-se também que os alunos de U2 tiveram um desempenho igual ou superior aos alunos de U1 em três dos quatro itens de Probabilidades e Estatística (recorde-se que os estudantes de U1 conseguiram os melhores resultados em 28 itens do PMAT).

5.1.4 Efeito da Formação Escolar

No âmbito da validação do PMAT já se fez referência ao estudo comparativo dos resultados obtidos pelos participantes nas duas aplicações do PMAT-01, o teste do segundo ensaio experimental do PMAT, e destes com as classificações, dos mesmos indivíduos, nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre.

Estas comparações enquadram-se no estudo longitudinal realizado que proporcionou outros resultados, apresentados na secção 4.3 e agora discutidos. Recorde-se que o estudo desenvolveu-se a partir dos resultados no PMAT-01 de 71 alunos de cursos de Engenharia da universidade U1, caracterizados na Tabela 3.7, que participaram no teste (1.ª aplicação) e no reteste após treino de competências (2ª aplicação). Entre o teste e o reteste decorreu o 1.º semestre letivo que, nos cursos destes estudantes, inclui duas unidades curriculares de Matemática - *Álgebra Linear* (AL) e *Cálculo Diferencial e Integral I* (C-I), cujos conteúdos programáticos se encontram em 3.4.2.

Da comparação dos resultados do teste com os do reteste após treino de competências, com as amostras emparelhadas, observa-se a tendência para os estudantes omitirem menos respostas (Tabela 4.35 ou Gráfico 4.16) e a melhoria significativa do seu desempenho após um semestre de aulas (Tabela 4.36) – a maioria dos participantes (72%) identificou mais respostas certas na segunda aplicação do teste e a pontuação máxima obtida na prova aumentou sete pontos (Tabela 4.35).

O maior número de respostas certas que se registou no reteste não ocorreu em todos os itens (Gráfico 4.17). Com resultados estatisticamente significativos, um item revelou-se mais difícil no reteste e nove foram mais fáceis após o treino de competências (Tabela 4.37). O primeiro incide sobre o cálculo de probabilidades e requer a contagem de acontecimentos em contexto, uma matéria que os participantes no estudo longitudinal não abordaram no 1.º semestre. Os outros itens, cuja resposta certa no reteste foi identificada por mais 10% a 40% de estudantes do que no teste, incidem sobre os seguintes conteúdos: manipulação de expressões com radicais quadráticos; operações algébricas com logaritmos; resolução de inequações com módulos; estudo de uma função irracional que envolve a exponencial; limites de sucessões; limites de funções; derivadas de funções; teoria de conjuntos; quantificadores.

Nos itens que avaliam conhecimentos sobre resolução de inequações com módulos, derivadas de funções e limites de sucessões, não se encontrou consistência entre as respostas certas que os participantes deram no teste e no reteste (Tabela 4.37). Uma vez que estes conteúdos foram objeto de estudo no 1.º semestre, admite-se que no teste alguns alunos responderam aos itens em questão apenas com conhecimento parcial dos respetivos temas e que no reteste já o fizeram com a certeza de qual é a resposta certa.

A melhoria significativa do desempenho dos estudantes nos conteúdos atrás referidos sugere que estes são os temas do ensino secundário mais solicitados pelos conteúdos de AL ou de C-I. Assim, seria nestas matérias que a melhoria do ensino e da aprendizagem no secundário, ou as medidas remediativas a praticar no início do superior, teria mais efeito na redução das dificuldades que os estudantes, com *Álgebra Linear* e *Cálculo* no 1.º semestre, experimentam na transição da Matemática de um para outro nível de ensino.

Entre os itens com índice de dificuldade significativamente diferente no teste e no reteste, seis incluem-se nos 15 itens que não foram alterados do PMAT-01 para o PMAT-03, pelo que seria de esperar que os participantes no PMAT-03 de cursos de Engenharia, depois de estudarem *Álgebra Linear* e *Cálculo*, mas não *Estatística*, tivessem um desempenho diferente daquele que manifestaram no início do ano letivo, ao responder a esses seis itens: haveria menos estudantes a identificar a resposta certa do item 28-PE.E e mais estudantes a acertar os itens 2-Al.B, 5-Al.B, 7-An.B, 15-An.M e 14-LC.M (ver a descrição dos itens em 4.2).

Verifica-se, portanto, que o reforço do treino de competências e o acréscimo de conhecimentos em temas avaliados pelo PMAT, promovidos essencialmente em C-I, permitem que os estudantes colmatem algumas lacunas de aprendizagem em Matemática com que entraram no ensino superior, em particular as que foram identificadas pelos itens 5-Al.B e 14-LC.M. Admite-se que a unidade curricular de *Programação,* que os participantes no teste e no reteste frequentaram no 1.º semestre, também contribuiu para a melhoria do desempenho nos itens de Lógica e Teoria de Conjuntos, os itens do PMAT-01 que verificaram o maior aumento de respostas certas.

No entanto, também é de salientar que o estudo longitudinal não revela indicadores de que tenha havido, ao longo do 1.º semestre, um desenvolvimento significativo do espírito crítico, do pensamento flexível ou da capacidade dos estudantes em aplicar o conhecimento. Por exemplo, os itens 26 e 35, respetivamente iguais aos itens 23-An.M e 30-An.M do PMAT-03 que requerem estas competências (ver secção anterior), incidem sobre conteúdos que são recuperados em C-I e, no entanto, tiveram menos respostas certas no reteste do que no teste. O mesmo aconteceu com o item 39, análogo ao item 31-An.M.

Ao analisar as pontuações que os estudantes obtiveram no teste e no reteste a par das suas classificações a AL e a C-I, verifica-se que os piores resultados das primeiras tendem a estar associados aos piores das segundas (Tabela 4.38). Além disso, ter mais de 20 pontos no teste parece ser preditivo de classificações superiores a 12 valores em AL e em C-I.

Como já foi mencionado, existe uma correlação positiva, estatisticamente significativa, entre as pontuações do PMAT e as notas positivas de AL e C-I. Além deste resultado, importa frisar que essa correlação é maior com as classificações de C-I, tendo aumentado do teste para o reteste (Tabela 4.39). Este resultado é expectável, uma vez que muitas das matérias abordadas pelo PMAT são necessárias à aprendizagem das matérias de C-I.

As Tabelas 4.40 e 4.41 apresentam resultados que, apesar de terem sido retirados de uma amostra reduzida, apontam para a coerência entre as classificações de AL e C-I com as pontuações no PMAT (aplicado em setembro), as notas da prova de ingresso e as médias do 12.º ano de participantes no estudo longitudinal. Nessas tabelas lê-se, por exemplo, que entre os estudantes da amostra observada que conseguiram as melhores classificações a AL e a C-I (pelo menos 15 e média superior ou igual a 16), a média da nota da prova de ingresso é igual a 178,7 pontos, a da média do 12.º ano a 175,8 pontos e a do número de respostas certa no PMAT-01 é igual a 24, o que corresponde a um nível de competência igual a 0,47.

Deste modo, torna-se evidente que os conhecimentos em Matemática que os estudantes adquiriram no ensino secundário, refletidos no desempenho no PMAT e nos exames do ensino secundário, são determinantes no sucesso a AL e a C-I como, aliás, seria de esperar.

5.2 Resultados das Entrevistas

Da amostra observada no estudo longitudinal, selecionaram-se 40% dos indivíduos para efetuar um estudo de casos – conhecer atitudes, opiniões e sentimentos dos estudantes em relação à Matemática na fase de transição desta disciplina do ensino secundário para o superior.

Os estudantes foram escolhidos com base nos resultados que obtiveram em AL, em C-I e nos testes do PMAT-01, de acordo com o critério fixado na secção 3.4.3, sendo divididos em duas subamostras de igual dimensão: Melhores Alunos (M) e Piores Alunos (P).

O estudo de casos é fundamentado nos resultados de entrevistas, presenciais, individuais e semiestruturadas, que se realizaram a 25 participantes, caracterizados quanto ao género e idade na Tabela 3.8 e quanto a classificações académicas na Tabela 3.9. Nesses resultados, apresentados e analisados na secção 4.4, pesquisaram-se diferenças e semelhanças, relevantes para a investigação, entre as duas subamostras contrastadas quanto ao desempenho em Matemática no final do 1.º semestre, que se propõem para discussão.

Do Ensino Secundário

Os entrevistados não se distinguem pelo percurso escolar, uma vez que todos frequentaram o curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias do ensino secundário, mas as suas classificações em Matemática foram diferentes - os melhores resultados em Matemática nos 11.º e 12.º anos de escolaridade tendem a estar associados ao melhor desempenho na Matemática do 1.º semestre do ensino superior (Tabela 4.42). No entanto, é de salientar que o entrevistado P23, reprovado a C-I, teve 19 valores no 11.º ano, 16 no 12.º ano e, como se observa na Tabela 3.9, 149,0 na Prova de Ingresso (*Matemática* e *Física e Química*), uma nota superior à de três alunos aprovados a AL e a C-I.

História Pessoal da Relação com a Matemática

O gosto pela Matemática, do próprio estudante ou do pai, foi identificado por alguns dos Melhores Alunos como um fator que influenciou positivamente a sua aprendizagem da disciplina no secundário (os alunos com as duas melhores notas de candidatura ao ensino superior referiram o gosto do pai pela Matemática). Apenas os Piores Alunos mencionaram o facto de terem tido explicações, mas a influência dos bons professores foi lembrada por estudantes de ambos os grupos (Quadro 4.1).

Enquanto alunos do ensino secundário, cerca de um quarto dos entrevistados não teve classificações regulares a Matemática, sendo que a maioria deles reprovou a AL e a

C-I. Também foram estes alunos que menos participaram em atividades extracurriculares de Matemática, no ensino básico ou no secundário.

Decorrido o 1.º semestre de aulas do ensino superior, a maior parte dos entrevistados continua a gostar de Matemática (Quadro 4.2). No entanto, mais de metade preferia estudar esta disciplina no ensino secundário porque, entre outras razões, não era tão teórica e o método de ensino era melhor. Em contrapartida, três dos Melhores e três dos Piores Alunos gostam mais da Matemática do superior porque, disseram, a matéria é mais específica, mais consistente e não é sempre igual, como acontece no secundário (Quadro 4.3).

No que respeita ao relacionamento dos estudantes com a Matemática, ele tende a piorar no superior, tanto para os que tinham uma boa relação com a disciplina no secundário (a maioria) como para os outros (seis dos Piores Alunos), mesmo para os estudantes que conseguiram notas entre 15 e 19 a AL e a C-I. A componente teórica destas disciplinas parece estar na origem deste afastamento entre os estudantes e a Matemática. Contudo, um dos Melhores Alunos reconheceu que no superior "percebe-se o porquê das coisas", o que o leva a manter uma boa relação com a Matemática (Quadro 4.2).

Quanto à preparação do secundário para estudar as unidades curriculares de C-I e de AL, a maior parte dos Melhores Alunos achava que estava bem preparado antes de as conhecer mas, cerca de metade mudou de opinião quando começou a frequentar as aulas. Do grupo dos Piores Alunos, metade considerava-se apto antes de entrar no ensino superior, mas só um deles manteve essa ideia depois do 1.º semestre (Quadro 4.2).

Da mudança de opinião dos entrevistados em relação à preparação que traziam do ensino secundário para estudarem Matemática no superior, percebe-se que a sua transição de um para outro sistema de ensino não foi tão gradual como seria desejável. Presumindo que a boa preparação, que os estudantes pensavam ter, corresponde ao cumprimento dos objetivos que lhes foram propostos, deduz-se que esses objetivos não estão bem ajustados ao que lhes é exigido na Matemática do superior. Uma dessas exigências é a aprendizagem da teoria de AL e de C-I, a que muitos alunos reagem de forma negativa porque, admite-se, ainda não reconheceram a sua importância. Provavelmente, não teriam essa reação se o ensino secundário tivesse promovido um maior desenvolvimento do seu pensamento crítico, das suas capacidades de memorização, de aplicação de conhecimentos, de construção de relações entre conceitos e outras competências solicitadas pela teoria matemática. Recorde-se que as respostas aos itens do PMAT-03 refletem esta lacuna na aprendizagem dos participantes no teste.

A Matemática no Ensino Superior

A maioria dos entrevistados reconheceu que teve mais facilidade em resolver o PMAT-01 depois do 1.º semestre de aulas. Quanto à primeira aplicação do PMAT-01, acharam o teste muito grande e com nível de dificuldade razoável.

As matérias Transformações Lineares de AL e Integrais de C-I foram as mais apontadas, quer pelos Melhores quer pelos Piores Alunos, como sendo aquelas em que tiveram mais dificuldades. Um dos obstáculos que enfrentaram nestas unidades curriculares foi a sua componente teórica (muita e dada depressa), como afirmou a maioria. Esta é uma das razões apontadas por mais de metade dos entrevistados para preferirem a Matemática do ensino secundário. O método de ensino, o ambiente escolar e a maior facilidade em aprender as matérias também contribuem para essa preferência.

Embora a falta de bases tenha sido uma das causas das dificuldades experimentadas pelos Melhores Alunos, segundo eles, grande parte admitiu que o ensino secundário prepara bem os estudantes para o superior, cujo nível de exigência não consideram demasiado, uma opinião partilhada com alguns dos Piores Alunos. Outros entrevistados disseram que o ensino secundário devia ser mais rigoroso nas avaliações, assim como ensinar os alunos a demonstrar resultados e a praticar bons métodos de trabalho.

Quanto à proibição de utilizar calculadora em AL e em C-I, uma restrição comum a *Álgebra Linear* e a *Cálculo* de muitas instituições de ensino superior, trata-se de uma medida que foi mal acolhida pelos entrevistados mas que veio a ser reconhecida como positiva pela maioria dos Melhores e dos Piores Alunos.

Não houve uniformidade nas opiniões quanto ao desempenho dos estudantes com notas entre 10 e 13 no secundário, mas identificou-se um padrão de respostas baseado nas classificações obtidas pelos entrevistados: a maioria dos Piores Alunos, com classificações mais baixas, entende que um aluno deste nível tem conhecimentos suficientes para ter sucesso a AL e a C-I, desde que se esforce; metade dos Melhores Alunos, com notas entre 15 e 20, não acreditam nesse sucesso, mesmo que o aluno seja muito trabalhador; os outros participantes (três dos Melhores e dois dos Piores), com notas entre 15 e 19 no secundário, admitem que seja possível mas com muitas dificuldades (Quadro 4.4).

Estas opiniões são, provavelmente, reflexo da atitude dos entrevistados face ao trabalho que lhes foi solicitado em AL e em C-I. Os Melhores Alunos atribuem o seu sucesso nestas unidades curriculares ao muito estudo, uma capacidade que talvez não reconheçam nos estudantes com notas mais baixas no secundário. Os Piores justificaram o seu fracasso com situações cuja resolução lhes parece estar ao alcance - falta de tempo para estudar, de empenho ou mesmo de organização do trabalho (o que vai de encontro aos resultados da MSPSE que se encontram na Tabela 4.14).

Acredita-se que alguns dos Piores Alunos não são tão exigentes nas notas como os Melhores Alunos e que ainda não se aperceberam das suas necessidades de formação. No entanto, a pouca autoeficácia ou a inadaptação à nova realidade académica não terão sido alheias ao insucesso de parte dos Piores Alunos, como o entrevistado P17 - reprovou a AL e a C-I mas obteve classificações no secundário idênticas às de alguns dos Melhores Alunos e uma pontuação acima da média nas duas aplicações do PMAT-01 (Tabela 3.9).

As Dificuldades a Matemática

As respostas que os entrevistados deram às questões relacionados com as dificuldades em Matemática que os estudantes do ensino superior sentem, no geral, encontram-se listadas nos Quadros 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, nos quais se distinguem as que foram dadas por cada grupo de entrevistados e por ambos.

Quer os Melhores quer os Piores Alunos mencionam o método de estudo como estando associado a dificuldades experimentadas no início dos estudos superiores, os primeiros porque os alunos não sabem estudar, os segundos porque só estudam na véspera do teste - o tipo de estudo que muitos alunos praticavam no secundário parece deixar de ser eficaz no superior.

O aumento da carga de trabalho individual dos estudantes quando entram no ensino superior deve-se, em parte, ao maior nível de exigência dos testes e ao ritmo a que é dada a matéria - muita matéria em pouco tempo é a opinião generalizada dos entrevistados. Segundo eles, este problema podia ser remediado com mais aulas práticas. Acrescentam que se os professores motivassem os alunos e se algumas matérias de AL e de C-I tivessem sido introduzidas no secundário, era mais fácil estudar estas disciplinas.

Como fatores indispensáveis ao sucesso em Matemática, os entrevistados apontam, por exemplo, uma boa preparação do secundário, o gosto pela Matemática, o estudo, o empenho e a determinação.

Segundo os Piores Alunos, os estudantes ficam assustados com a dimensão das turmas, o que dificulta o imediato esclarecimento das dúvidas. O pouco tempo de resolução dos testes também os intimida. Eles sentem dificuldades nas aulas teóricas, assim como na adaptação ao novo método de ensino e de aprendizagem. Adiantam que esta adaptação seria mais fácil se os alunos pudessem utilizar calculadora e se tivessem memorizado as regras de derivação no ensino secundário, o qual deveria ser mais exigente. Para promover o sucesso em Matemática, os Piores Alunos também sugerem que os professores resolvam testes de anos anteriores, que não seja dada tanta teoria e que o ritmo das aulas seja menor (propõem a redução do tempo dedicado a matérias que eles julgam ter aprendido no secundário). Segundo este tipo de entrevistados, para alguém ter sucesso a uma unidade curricular de Matemática terá de estudar diariamente e procurar os professores para esclarecer as dúvidas que forem surgindo.

Os Melhores Alunos referem que a sensação de não ter bases suficientes para aprender os conteúdos de AL ou de C-I assusta os alunos e que algumas das dificuldades dos estudantes consistem em perceber a matéria na aula e em saber organizar o tempo. Na opinião deles, os alunos teriam mais sucesso se o método de ensino fosse mais parecido com o do secundário, se o professor das aulas teóricas também lecionasse as aulas práticas e se os professores ensinassem os alunos a estudar. Acrescentam ainda que o sucesso na Matemática do ensino superior só é alcançado por estudantes motivados que tenham capacidade de organização e adotem um método de estudo adequado.

Ao analisar as respostas dos entrevistados que se distinguem por grupo, percebe-se que os Piores Alunos têm menos capacidade de trabalho autónomo, estando mais dependentes do professor para estudar, ressentem-me mais do ritmo a que são dadas as aulas e do esforço que lhes é exigido, o que se pode dever a uma maior necessidade de formação. Por outro lado, os Melhores Alunos mostram maior preocupação em relação aos conhecimentos e ao modo como se deve estudar.

Conhecidas as opiniões dos entrevistados sobre as dificuldades que os estudantes têm na Matemática do superior, é de salientar a analogia entre alguns dos seus comentários e a perceção dos estudantes de Espanha, França e Canadá observados por Guzmán, Hodgson, Robert e Villani (1998) acerca da Matemática do ensino superior - as dificuldades em Matemática dos estudantes portugueses no início dos cursos são idênticas às dos estudantes noutros países, trata-se de um problema que ultrapassa fronteiras.

Tendo em consideração os resultados das entrevistas, sugerem-se as seguintes medidas para facilitar a transição da Matemática do ensino secundário para a do superior.

Medidas Preventivas e Remediativas de Dificuldades em Matemática à Entrada do Ensino Superior:

- Diferenciar o programa da disciplina de Matemática do 12.º ano de escolaridade para os alunos que pretendem frequentar cursos superiores com uma forte componente nesta área, ajustando-o aos pré-requisitos das unidades curriculares do 1.º semestre desses cursos, quer a nível de conteúdos, quer a nível de resultados da aprendizagem;
- Aproximar os métodos de ensino e de aprendizagem praticados nos dois sistemas, a concretizar na disciplina atrás referida e nas de Matemática do 1.º semestre do superior, procurando que os estudantes, enquanto alunos do secundário, demonstrem resultados, dispensem a calculadora e os formulários e adotem métodos de trabalho autónomo e eficiente, assim como aproximar o ritmo a que é lecionada a matéria nas primeiras aulas do superior ao das aulas do secundário;
- Remeter conteúdos da Matemática do secundário para a do superior e vice-versa, de modo a reforçar a aprendizagem de alguns conteúdos no secundário e evitar a repetição da lecionação de outros no superior;
- Esclarecer os estudantes, à entrada do ensino superior, da importância da teoria matemática na aprendizagem desta área disciplinar, através de seminários de motivação;
- Informar os alunos do que se espera que eles aprendam nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre e que será objeto de avaliação;
- Envolver os estudantes na organização de estratégias que visem promover o sucesso na Matemática do ensino superior[1];
- Reduzir as atividades de natureza científica ou de gestão e de extensão exigidas aos professores das unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre para acompanharem melhor os seus alunos na adaptação à Matemática do ensino superior, quer através do desdobramento de turmas, quer na organização de sessões de ensino de conteúdos onde os alunos manifestam mais necessidades de aprendizagem;

[1] Esta medida não é explícita nos resultados do estudo de casos, mas o entusiasmo manifestado pelos entrevistados sobre os assuntos focados nas entrevistas sugeriu que ela poderá ajudar os estudantes a superar algumas das suas dificuldades em Matemática à entrada do ensino superior.

- Incentivar os professores de Matemática do 1.º semestre do ensino superior a diversificar as suas estratégias de ensino, a ensinar os estudantes a desenvolver métodos de estudo eficazes e autónomos e a promover nos alunos atitudes positivas e de autoconfiança face à Matemática, de modo a manter o bom relacionamento com a Matemática que eles trazem do secundário.

Com base nas respostas dos entrevistados e na informação disponível acerca das suas classificações académicas, elaborou-se o seguinte perfil dos Melhores Alunos.

Perfil dos Estudantes com Melhor Desempenho em Matemática no 1.º Semestre:

- Têm boas a muito boas classificações no ensino secundário[2] (a Matemática e a outras disciplinas);
- Têm um desempenho regular em Matemática ao longo do percurso académico;
- Participam em atividades matemáticas extracurriculares;
- Têm grande capacidade de trabalho e de organização do tempo disponível;
- São empenhados e persistentes;
- Revelam capacidade de trabalho autónomo;
- Sabem estudar ou têm noção de que precisam de melhorar o método de estudo;
- Frequentam as aulas e procuram os professores para esclarecer dúvidas.

5.3 Resultados Gerais

No decorrer da análise dos resultados obtidos nesta investigação, através do PMAT ou das entrevistas, detetaram-se fatores que limitam ou potenciam o desempenho em Matemática dos estudantes no seu 1.º semestre do ensino superior. Descrevem-se a seguir os que mais se destacaram.

Fatores que Influenciam o Desempenho em Matemática dos Estudantes:

- Aprendizagem de conceitos, propriedades e procedimentos relativos aos conteúdos programáticos da Matemática do ensino secundário;

  No geral, os mais relevantes são os que o PMAT avalia, descritos na secção 4.2. Para os cursos de Engenharia frequentados pelos participantes no estudo longitudinal, os conhecimentos da área de Probabilidades e Estatística não têm muita influência no desempenho na Matemática do 1.º semestre.

[2] Os estudantes da subamostra observada tiveram uma média do 11.º/12.º, nota de prova de ingresso e nota de candidatura que variou, respetivamente, de 14 a 19, de 14 a 20 e de 14 a 19, na escala de 0 a 20.

- Espírito crítico, pensamento flexível, recuperação de informação memorizada, aplicação de conhecimentos em domínios diversos (o que exige a compreensão efetiva dos conteúdos estudados e o estabelecimento de relações entre eles) e planeamento de estratégias de resolução de problemas;

  Estas competências são exigidas por alguns itens do PMAT (ver secção 5.1.3), daí serem consideradas necessárias à aprendizagem da Matemática do superior. As dificuldades experimentadas pelos estudantes entrevistados relativamente à componente teórica da Matemática também são um indicador da influência destas capacidades no seu desempenho.

- Gosto pela Matemática, empenho, determinação e persistência;

  Estes fatores são fundamentais para o treino necessário ao desenvolvimento das competências atrás referidas.

- Professores que estimulam e orientam o treino para o desenvolvimento das capacidades requeridas pela aprendizagem da Matemática;

  Esta é a interpretação que se julga mais provável da expressão "bons professores" mencionada pelos entrevistados.

- Incentivo dos pais ou de outros familiares para estudar Matemática;
- Participação em atividades matemáticas extracurriculares;
- Assiduidade às aulas e esclarecimento de dúvidas com os professores antes de elas se acumularem;
- Capacidade de estudar muito, de forma dedicada, organizada e eficiente;

  Para os estudantes entrevistados, no geral, este é o fator que tem mais peso no sucesso em Matemática.

- Autonomia no estudo;

  A capacidade de trabalho autónomo é um fator indispensável à adoção de um método de estudo produtivo, adequado às exigências individuais. O desenvolvimento desta capacidade pode ser prejudicado pelo hábito de recorrer a um explicador para estudar a matéria, a julgar pelos resultados das entrevistas.

- Resistência às contrariedades escolares;

  A pouca resistência às contrariedades que surgem no início do ensino superior, como o ritmo a que é dada a matéria, a restrição do uso de calculadora, as aulas teóricas, o grau de dificuldade da matéria, a sensação de não ter bases ou o nível de exigência do 1.º teste, é um fator prejudicial ao sucesso em Matemática.

- Adaptação ao ensino superior;

  No âmbito das entrevistas, os estudantes referiram apenas a necessidade de adaptação ao método de ensino e de aprendizagem do ensino superior como um fator de sucesso em Matemática mas, como se menciona no início deste trabalho, o desempenho dos estudantes do 1.º ano/1.ª inscrição é influenciado pela adaptação a estas e a outras realidades com que se deparam, quer académicas, que vão além das atividades letivas, quer pessoais e sociais.

- Articulação entre a Matemática do ensino secundário e a do superior, quer ao nível de conteúdos programáticos quer ao nível de ensino e de resultados da aprendizagem;

  Quanto melhor o ajustamento da Matemática do secundário à do superior, maior é a aproximação das expectativas dos alunos à realidade do 1.º semestre do ensino superior, o que lhes evitará algumas adversidades.

- Adequação das estratégias de ensino ao nível e ao tipo de conhecimentos dos estudantes.

  Os resultados de um teste estandardizado de medida de conhecimentos de Matemática aplicado aos estudantes no início do 1.º semestre do ensino superior, que poderá ser inspirado no PMAT, constituem uma base sólida para o professor identificar as necessidades de formação dos seus alunos. Com esta informação, o professor pode ajustar a sua conduta pedagógica aos conhecimentos e às lacunas de aprendizagem dos alunos e, deste modo, facilitar a adaptação dos estudantes às exigências da Matemática do superior e promover o sucesso nas unidades curriculares do 1.º semestre.

Com base nas características identificadas nos Melhores Alunos entrevistados e nos resultados apresentados nas Tabelas 4.40 e 4.41, que associam as classificações finais de AL e de C-I de alguns participantes no estudo longitudinal à pontuação no PMAT, à nota da prova de ingresso e à média do 12.º ano, é possível fazer o esboço de um perfil de exigências para o sucesso na Matemática do 1.º semestre.

Embora o sucesso em Matemática possa ser entendido como ter aproveitamento em *Álgebra Linear* e em *Cálculo*, no âmbito da definição do perfil de exigências proposto neste trabalho, considera-se que o alcance e o significado desse resultado é bem mais amplo: os alunos que têm sucesso em Matemática demonstram bom potencial de adaptação aos novos métodos de ensino e aprendizagem desta disciplina, o qual lhes permitiu atingir um nível de conhecimentos suficiente a bom naquelas unidades curriculares. Empiricamente, admite-se que este sucesso formativo tende a refletir-se em classificações de, pelo menos, 12 valores a *Álgebra Linear* e a *Cálculo*, com uma média igual ou superior a 13 valores.

Para o nível de desempenho fixado, ou para outras exigências, como a simples aprovação ou ambas as classificações superiores a 14 valores e média maior ou igual a 15, encontram-se possíveis indicadores nas Tabelas 4.40 e 4.41 ao fazer o seguinte exercício:

Consulta-se a coluna "13 - 15" da Tabela 4.40 para obter um indicador da nota da prova de ingresso e da média do 12.º ano. Optando pela mediana, encontram-se os valores 155,0 e 165,5, respetivamente.

Para identificar o nível de competência consulta-se a coluna "13 - 15" da Tabela 4.41 e, mantendo o critério da mediana, encontra-se o valor 0,13 *logit*. Assumindo que este nível se mantinha caso os alunos observados tivessem resolvido o PMAT-03 (os testes são análogos) a mediana da sua pontuação neste teste teria sido de 17 pontos[3].

Também se podem identificar os itens do PMAT relativamente aos quais os indivíduos com 0,13 *logit* de competência têm uma probabilidade superior a 0,50 de identificar a resposta certa – a Tabela 4.10 mostra que estes estudantes teriam mais probabilidade de acertar do que errar os 20 itens mais fáceis do teste (ver Gráficos 4.8 e 4.13).

Observe-se que é de esperar que um participante no PMAT com nível de competência igual ou superior a 0,13 responda corretamente a cerca de metade dos itens que definem ou que contribuem razoavelmente para quatro fatores identificados na Tabela 4.17: itens 3-Al.B, 6-An.B e 7-An.B para o fator “raciocínio lógico-dedutivo”; itens 2-Al.B e 8-An.B para o fator “domínio de procedimentos automatizados”; item 27-Geo.M para o fator "recuperação de informação memorizada"; item 13-PE.M para o fator "apreensão analítica *versus* apreensão global do problema”, mas apenas no que respeita à apreensão analítica (também se espera que estes participantes reconheçam a resposta certa do item 16-Al.M que tem algum contributo para este fator, mas em relação à apreensão global do problema).

Caso o perfil de exigências a fixar englobe a probabilidade de sucesso em, pelo menos, um item que represente o fator "intuição lógico-dedutiva", o nível de competência

[3] Outras estimativas do nível de competência para a pontuação obtida no PMAT: −1,08 *logit* - 9 pontos; −0,68 *logit* - 11 pontos; −0,56 *logit* - 12 pontos; −0,21 *logit* - 14 pontos; 0,02 *logit* - 16 pontos; 0,47 *logit* - 19 pontos; 0,71 *logit* - 21 pontos; 0,96 *logit* - 23 pontos.

teria de ser igual ou superior a 0,31, o qual foi alcançado por alguns alunos da amostra analisada (um deles, não foi além dos 12 valores de média).

Reunindo os resultados do exercício apresentado atrás com as características dos Melhores Alunos entrevistados (todos conseguiram, pelo menos, uma média de 13 valores a AL e a C-I) pode-se afirmar que, na instituição dos participantes no estudo longitudinal, os estudantes com potencial para ter sucesso em Matemática (traduzido em notas superiores a 11 a AL e a C-I, com média superior a 12) tendem a apresentar o seguinte perfil.

Perfil de Exigências:

- Traços de personalidade e atitudes listados no perfil dos estudantes com melhor desempenho em Matemática no 1.º semestre;
- Classificação da prova de ingresso superior ou igual a 155 pontos (0-200);
- Classificação média do 12.º ano de escolaridade superior a 165 pontos (0-200);
- Pontuação no PMAT, no início do curso, superior a 16 pontos (0-32).

Saliente-se que os valores apresentados são apenas indicadores, relativos a medianas da amostra observada. Entre os participantes no estudo longitudinal existem alunos que não tiveram estas classificações mas conseguiram atingir o sucesso estabelecido (ver M12 na Tabela 3.9). Por outro lado, existem alunos que não tiveram aproveitamento a AL nem a C-I, embora tenham tido classificações muito próximas das indicadas no perfil (ver P13 na Tabela 4.9).

Esta última situação comprova que os resultados de aprendizagem do ensino secundário, refletidos na média do 12.º ano, na Prova de Ingresso e, neste caso, na pontuação do PMAT, são apenas um dos fatores que determinam o desempenho na Matemática do ensino superior. Outros fatores, individuais ou contextuais, poderão criar dificuldades aos estudantes que os impedem de conseguir ter aproveitamento a *Álgebra Linear* e a *Cálculo*. Eventualmente, serão características que se identificaram nos Melhores Alunos ou alguns dos fatores que se listaram atrás como tendo influência no desempenho em Matemática no 1.º semestre do ensino superior ou, ainda, fatores de outra natureza.

A combinação de todas estas variáveis, umas com mais peso do que outras no comportamento de cada indivíduo, irá ditar o desfecho da primeira etapa do percurso dos alunos na aprendizagem da Matemática dos cursos superiores de ciências e de tecnologias.

Conclusão

Quando um professor do ensino superior português começa a trabalhar com os seus alunos do 1.º ano/1.ª inscrição, não tem dados, sustentados por uma base sólida e científica, que lhe permitam conhecer o nível e o tipo de conhecimentos dos estudantes. Deste modo, não poderá adotar a conduta pedagógica mais adequada para prevenir ou remediar as dificuldades que os alunos manifestam.

No caso particular de estudantes de cursos de ciências e tecnologias, esta falta de informação é apontada, por diversos estudos realizados sobre as suas dificuldades na Matemática do ensino superior, como uma das causas do insucesso nas unidades curriculares de Matemática do 1.º ano destes cursos, uma realidade identificada como problemática a nível internacional.

Reconhecendo como problema a identificação dos conhecimentos em Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior português de ciências e tecnologias, estruturou-se um estudo empírico que deu corpo a esta investigação. O interesse em ir além do mero diagnóstico, fez com que o estudo fosse desenhado de modo a englobar também a pesquisa de fatores, individuais e contextuais, que afetam o desempenho na Matemática no 1.º semestre. A natureza dos objetivos estabelecidos determinou que esta investigação tivesse um carácter interdisciplinar, fundamentando-se nas áreas da Psicometria e da Didática da Matemática.

Segue-se uma síntese do trabalho desenvolvido e dos principais resultados obtidos através de procedimentos que se enquadram na metodologia correlacional.

A identificação, objetiva e uniforme, do nível e do tipo de conhecimentos em Matemática dos estudantes foi feita a partir da análise, quantitativa e interpretativa, das respostas de 1879 estudantes ao itens do PMAT, uma prova estandardizada de medida dos conhecimentos de Matemática, obtidas no início do ano letivo de 2012/2013.

Os estudantes eram alunos do 1.º ano/1.ª inscrição de cursos de ciências e tecnologias, de três universidades, aos quais se candidataram com o exame nacional de *Matemática A*.

O PMAT foi construído, a par da presente investigação, por iniciativa da Sociedade Portuguesa de Matemática que, para o efeito, constituiu uma equipa que incluía as investigadoras deste trabalho. A pesquisa sobre as técnicas de construção de testes estandardizados e sobre as provas de acesso ao ensino superior utilizadas noutros países, bem como a participação na construção e melhoria contínua do PMAT são exemplos dessa colaboração.

A análise metrológica dos resultados do quarto ensaio experimental do PMAT (objetivo O1 deste trabalho) mostrou que esta versão constitui um instrumento de medida de conhecimentos bem calibrado para a população alvo - garante confiança na identificação do nível de conhecimentos em Matemática medidos e legitima a correspondência das capacidades matemáticas avaliadas pelos itens com os temas e os resultados de aprendizagem, ao nível do ensino secundário, que vêm a ser mais úteis aos estudantes na Matemática do ensino superior de ciências e tecnologias.

Confirmada a adequação metrológica do PMAT à sua utilização em investigação, procedeu-se à identificação, análise e caracterização dos conhecimentos em Matemática dos participantes nesta pesquisa (objetivo O2).

O melhor desempenho dos estudantes revelou-se nos itens de Probabilidades e Estatística e o pior nos itens de Análise, registando-se uma pontuação média no teste aquém do desejável para indivíduos que acabaram de entrar em cursos superiores com uma forte componente em Matemática.

Os conceitos, propriedades, procedimentos e capacidades matemáticas avaliados pelos itens com parâmetro de dificuldade positivo (acima da média), quase todos com menos de metade de respostas certas, permitiram elaborar uma lista de necessidades de formação dos estudantes, no geral, organizada em domínios de conhecimento e competências. É de salientar que as competências referidas nesta lista também são mencionadas noutros estudos como lacunas de aprendizagem dos estudantes, mas neste trabalho estão associadas a itens, a temas específicos, o que lhes confere mais objetividade.

A análise das respostas aos itens do PMAT confirmou que, de um modo geral, os estudantes do género masculino revelam melhor desempenho em Matemática do que os do género feminino, uma das hipóteses que se pretendia testar (H1). Também se aceitam as hipóteses de que, nalgumas áreas de conteúdo, o desempenho dos estudantes é diferente consoante o género (H2) ou consoante a formação que tiveram no ensino secundário (H3).

O estudo longitudinal efetuado com o segundo ensaio experimental do PMAT, que incidiu sobre 71 estudantes de Engenharia de uma universidade, revelou que o teste é sensível ao treino de competências e à formação obtida no decorrer do 1.º semestre.

As pontuações que os participantes obtiveram nas duas aplicações do teste, no início de cada semestre do mesmo ano letivo, mostraram que os estudantes melhoraram o seu nível de conhecimento em Matemática da primeira para a segunda vez que resolveram o PMAT, o que confirma a hipótese H4.

A comparação dos resultados das amostras emparelhadas identificou os itens que, de modo significativo, os participantes tiveram mais facilidade em responder após um semestre de aulas. Deste modo, conheceram-se os conteúdos do ensino secundário que são mais utilizados e, por isso, mais importantes para os estudantes na aprendizagem das matérias de *Álgebra Linear* e de *Cálculo*, com mais expressividade em *Cálculo* devido à natureza dos pré-requisitos desta unidade curricular.

As correlações positivas e significativas entre as pontuações no PMAT, aplicado no início do ano letivo, e as classificações positivas nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre confirmam a hipóteses H5. Além disso, sugerem que o PMAT tem valor preditivo.

Esta investigação também revelou, através de entrevistas, a perspetiva de 25 estudantes sobre a transição da Matemática do ensino secundário para a do superior, após a sua experiência de alunos do 1.º semestre de cursos de Engenharia. Os participantes foram selecionados em função do seu desempenho em Matemática neste período, de modo a formarem duas subamostras contrastadas.

O estudo de casos efetuado, com base nas respostas dos entrevistados, deu a conhecer o que os eles pensam sobre o método de ensino e de aprendizagem da Matemática do superior, como avaliam a preparação que a Matemática do secundário lhes proporcionou e que dificuldades sentiram no estudo da Matemática.

Os participantes nas entrevistas também apontaram algumas medidas preventivas e remediativas de dificuldades que tiveram na aprendizagem da Matemática do 1.º semestre do ensino superior. Embora alguns entrevistados tivessem proposto a utilização da calculadora para facilitar a adaptação à nova forma de ensinar e aprender Matemática (eles não podiam utilizar calculadoras nem formulários nos testes de Matemática) a maioria reconheceu vantagens nesta restrição e não fez qualquer referência aos formulários. Assim, rejeita-se a hipótese H6 (a restrição ao uso de calculadora e de formulário dificulta a adaptação), apesar de as respostas aos itens do PMAT, obtidas na 1.ª semana de aulas, sugerirem que os participantes sentiram falta da calculadora e do formulário das derivadas.

Em vários tópicos abordados, identificaram-se diferenças e semelhanças nas opiniões dos estudantes que revelaram melhor e pior desempenho, tal como se pretendia quando se estabeleceu o objetivo O3. Como exemplo, refira-se a opinião dos entrevistados sobre os professores: para ambas as subamostras, o desempenho dos professores é indispensável ao aproveitamento escolar mas, segundo os alunos com piores resultados, no âmbito do esclarecimento de dúvidas e na ajuda à resolução de exercícios, ou mesmo de testes, enquanto para os outros alunos, que reconhecem num método de estudo adequado um fator crítico para o sucesso, os professores deveriam ensinar os estudantes a encontrar esse método.

A análise das respostas obtidas nas entrevistas também permitiu caracterizar o perfil dos estudantes com melhores resultados em Matemática no 1.º semestre, o objetivo O4 fixado para a investigação. Além disso, também possibilitou a identificação de fatores que influenciam o desempenho em Matemática dos estudantes (objetivo O5).

Com os resultados das entrevistas, de algumas classificações escolares e da pontuação no PMAT de participantes no estudo longitudinal, foi possível fazer o esboço de um perfil de exigências para a adaptação ao ensino e à aprendizagem da Matemática do superior e consequente sucesso do desempenho nas unidades curriculares do 1.º semestre, com o qual se finaliza o presente trabalho.

Refira-se que a generalização à população alvo das conclusões retiradas do estudo de casos e do estudo longitudinal está limitada pela natureza das amostras observadas - são curtas, enviesadas e os participantes não resolveram, neste estudo específico, a melhor versão do PMAT. Contudo, a semelhança entre os resultados obtidos e os esperados, baseada no conhecimento empírico de alunos de *Álgebra Linear* e de *Cálculo*, sugere que, com ponderação e cuidado, essas conclusões podem ser generalizadas a estudantes de Engenharia e adaptadas a estudantes de outros cursos com duas ou três unidades curriculares de Matemática no 1.º ano.

Em rigor, também o desempenho dos participantes no PMAT não pode ser assumido como o desempenho da população alvo, uma vez que a amostra observada é formada por estudantes de, apenas, três universidades. Contudo, o grau de fiabilidade dos resultados do PMAT permite esperar que outros estudantes, com o mesmo tipo de conhecimentos dos da amostra, tenham um desempenho análogo na resolução do teste.

Um dos resultados encontrados neste trabalho sugere o valor preditivo do PMAT para o desempenho na Matemática do 1.º semestre. No entanto, reconhece-se alguma fragilidade nos dados que proporcionaram este indicador, pelo que se justifica a realização de um estudo mais consistente, numa investigação que daria continuidade a este trabalho.

Caso o valor preditivo do PMAT se confirme, ele pode fundamentar a organização de um módulo de Matemática para os estudantes que não obtenham uma determinada pontuação no PMAT, fixada num perfil de exigências (norma critério). Eventualmente, estes alunos teriam de atingir um estabelecido nível de desempenho nesse módulo para frequentarem unidades curriculares de Matemática, à semelhança do que se faz nalgumas universidades italianas.

Outro trabalho que pode ser feito na sequência desta investigação é utilizar o PMAT para comparar o nível de conhecimentos dos estudantes observados com o dos estudantes que realizaram o exame de *Matemática A* sobre toda a matéria do ensino secundário ou, daqui a três anos, com o nível de conhecimentos dos estudantes que aprenderem os novos conteúdos programáticos de *Matemática A* que, prevê-se, entram em vigor em 2015. As análises comparativas efetuadas permitiriam avaliar de forma objetiva o efeito das alterações ao programa da disciplina, tal como qualquer outro estudo comparativo realizado com o PMAT para avaliar o progresso educativo.

Dado que as dificuldades em Matemática dos estudantes, no início dos cursos, são um problema que ultrapassa fronteiras e que tem vindo a ser estudado por muitos investigadores, justifica-se uma pesquisa das experiências bem-sucedidas, na prevenção dessas dificuldades e a sua adaptação à realidade portuguesa.

As práticas pedagógicas que tendem a facilitar a transição da Matemática do secundário para a do ensino superior também podem ser investigadas em Portugal, através da realização de estudos transversais dos resultados no PMAT de alunos do 12.º ano de escolaridade, de várias escolas, que pretendem candidatar-se a cursos de ciências ou tecnologias. Este procedimento, além de permitir identificar as melhores práticas de ensino, para o objetivo em questão, seria útil para os próprios estudantes - conseguiriam um diagnóstico do seu nível de desempenho (uma informação a registar no seu processo individual de aluno) e ficariam sensibilizados para as capacidades matemáticas que lhes vão ser solicitadas no ensino superior, o que facilitaria o seu confronto com a Matemática do 1.º semestre.

Observe-se que a repetição da aplicação do PMAT requer a organização de um banco de itens, devidamente calibrados, para que uns possam substituir outros de modo a alterar o elenco de itens, mas não a forma como o teste mede os conhecimentos dos estudantes.

As potencialidades encontradas no PMAT convidam, aliás, à construção de uma prova análoga para medir os conhecimentos dos estudantes que ingressam num curso Técnico Superior Profissional (CTeSP). Esta construção já foi definida como uma das atividades, para 2015, do Centro de Estudos e de Desenvolvimento da Matemática no Ensino Superior da Universidade do Algarve, integrado por duas investigadoras deste trabalho. Espera-se conseguir desenvolver, neste contexto, um estudo semelhante ao que agora se apresenta.

Muitos professores de Matemática do 1.º ano do ensino superior de ciências e tecnologias reconhecerão os seus alunos nas amostras observadas neste estudo, cujas necessidades de formação, sentimentos e atitudes conhecem empiricamente.

Com esta investigação organizou-se uma base sólida e rigorosa para dar a conhecer, não só aos professores de Matemática do ensino superior mas também aos professores e alunos do ensino secundário, aos dirigentes escolares e aos responsáveis pela política educativa, o nível de conhecimentos em Matemática dos estudantes quando entram no ensino superior, a natureza das dificuldades que eles experimentam e os fatores que potenciam ou limitam o seu desempenho em Matemática. Também se pretende sensibilizar todos os intervenientes na Educação Matemática para a necessidade de implementar medidas que promovam a melhoria contínua e sustentada da aprendizagem da Matemática e que permitam reduzir ou evitar posteriores insucessos, inadaptações ou mesmo o abandono escolar dos alunos do ensino superior, dos quais decorrem elevados custos pessoais, institucionais e socias.

Para definir planos de ação eficazes, que facilitem a transição da Matemática do ensino secundário para a do superior, é necessário conhecer todas as variáveis envolvidas neste processo, que se insere em problemáticas de âmbito muito mais vasto. A investigação apresentada não passa, portanto, de uma pequena colaboração para a resolução deste problema. Contudo, fica a satisfação de ela poder contribuir para prevenir e remediar dificuldades em Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior de ciências e de tecnologias.

Referências

Abell, N., Springer, D. W., & Kamata, A. (2009). *Developing and validiting rapid assessment instruments.* Oxford: Oxford University Press, Inc.

Abreu, M., & Afonso, M. J. (2010, julho). *Prova de Matemática da SPM: propósitos e metodologia de construção de um teste estandardizado.* Comunicação ao Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2010, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Leiria.

ACT, Inc. (2009). *About us.* Obtido em 29 de dezembro de 2009, de http://www.act.org/about-us/#.UHvvpMXA8qw

Afonso, M. J. (2009). *PMAT-12. Estudo Piloto. Análise de resultados do estudo metrológico.* Documento base da comunicação à SPM dos resultados do Estudo Piloto do PMAT (PMAT-12) na população do 12.º ano (Tabelas de Resultados), Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa.

Afonso, M. J., & Monteiro, H. (2010). *PMAT-00. Ensaio Experimental I. Análise de resultados do estudo metrológico.* Documento base da comunicação à SPM dos resultados do Ensaio Experimental I do PMAT na população do 1.º ano universitário (Tabelas de Resultados), Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa.

Afonso, M. J., & Monteiro, H. (2011). *PMAT-01. Ensaio Experimental II. Análise de resultados do estudo metrológico.* Documento base da comunicação à SPM dos resultados do Ensaio Experimental II do PMAT na população do 1.º ano universitário (Tabelas de Resultados), Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa.

Afonso, M. J., & Monteiro, H. (2012). *PMAT-02. Ensaio Experimental III. Análise de resultados do estudo metrológico.* Documento base da comunicação à SPM dos resultados do Ensaio Experimental III do PMAT na população do 1.º ano universitário (Tabelas de Resultados), Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa.

Almeida, L. S. (2007). Transição, adaptação académica e xito escolar no ensino superior. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 15*(2), 203-215.

Almeida, L. S., & Cruz, J. F. (2010). Transição e adaptação académica: Reflexões em torno dos alunos do 1.º ano da Universidade do Minho. *Actas do Congresso Ibérico - Ensino Superior em Mudança: Tensões e Possibilidades* (pp. 429-440). Braga: Universidade do Minho. Centro de Investigação em Educação (CIEd).

Almeida, L. S., & Freire, T. (2008). *Metodologia da investigação em Psicologia e Educação* (5ª ed.). Braga: Psiquilíbrios Edições.

Almeida, L. S., Vieira, M. J., & Ribeiro, R. B. (2009). As potencialidades da teoria da resposta ao item na validade dos testes: aplicação a uma prova de dependência-independência de campo. *Análise Psicológica, 4* (XXVII), pp. 455-462.

Alves, M. T. (1947). Algumas deficiências em matemática de alunos dos liceus. *Gazeta de Matemática, 32*, 14-16.

American Educational Research Association (AERA), American Psychological Association (APA), & National Council on Measurement in Education (NCME). (1999). *Standards for educational and psychological testing.* Washington, DC: American Educational Research Association.

American Educational Research Association (AERA), American Psychological Association (APA), & National Council on Measurement in Education (NCME). (2014). *Standards for educational and psychological testing.* Washington, DC: American Educational Research Association.

American Psychological Association. (2009). *APA concise dictionary of psychology.* Washington, D.C.: Autor.

American Psychological Association. (2010). *Publication manual of the American* (6th ed.). Washington, DC: APA.

Andriola, W. B. (2009). Psicometria moderna: Características e tendências. *Estudos em Avaliação Educacional, 20*(43), 319-340.

Artigue, M. (1999). The teaching and learning of mathematics at the university level. *Notices of the AMS, 46*(11), 1377-1385.

Artigue, M. (2007, December). *Mathematics learning and teaching in tertiary.* Comunicação apresentada na conferência The Futur of Mathematics Education in Europe, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Assessment and Qualification Alliance. (2009). *About us*. Obtido em 6 de dezembro de 2009, de http://web.aqa.org.uk/about-us/

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral Change. *Psychological Review, 84*(2), 191-215.

Bandura, A. (1990). *Multidimensional scales of perceived academic efficacy*. Stanford, CA: Stanford University.

Beller, M., & Gafni, N. (1996). *Can item format (multiple-choice vs. open-ended) account for gender differences in mathematics achievement?* Obtido em 11 de Setembro de 2011, de National Institute for Testing and Evaluation: https://www.nite.org.il/files/reports/e215.pdf

Berg, M. van den, & Hofmann, W. (2005). Student success in university education: A multimeasurement study of the impact of student and faculty factors on study progress. *Higher Education, 50*(3), 413-446. doi: 10.1007/s10734-004-6361-1

Bloom, B. S. (Ed.). (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educacional goals. Handbook I, cognitive domain.* New York; Toronto: Longmans, Green.

Bond, T. F., & Fox, C. M. (2007). *Applying the Rasch model - Fundamental measurement in the human sciences* (2nd ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Bressoud, D. M. (2010, March). *Meeting the challenge of high school Calculus: Introduction.* Obtido em 20 de julho de 2013, de Macalester College: http://www.macalester.edu/~bressoud/pub/launchings/launchings_03_10.html

Bressoud, D. M. (2013, June). *Characteristics of successful programs in College Calculus (Poster).* Obtido em 20 de julho de 2013, de Macalester College: http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/2013/CSPCC-poster-final.pdf

Brolezzi, A. C. (2004, junho). *Mudanças na matemática da escola básica para o ensino superior: reflexo no uso da história da matemática.* Obtido em 12 de março de 2009, de http://www.sbempaulista.org.br/

Brolezzi, A. C. (2007, julho). *Pensamento reverso no ensino da matemática.* Comunicação ao IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Bruno, J. E., & Dirkzwager, A. (1995). Determining the optimal number of alternatives to a multiple-choice test item: an information theoretic perspective. *Educational and Psychological Measurement, 55*(6), 959-966.

Caraça, B. J. (1943). Algumas reflexões sôbre os exames de aptidão. *Gazeta de Matemática, 17*, 6-8.

Christensen, B., Engelhard, G., & Salzberg, T. (2012). Ask the experts: Rasch vs. Factor Analysis. *Rasch Measurement Transactions, 26*(3), 1373-1378. Obtido em 13 de junho de 2014, de http://www.rasch.org/rmt/rmt263a.htm

Christensen, L. B. (2007). *Experimental methodology* (10th ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

City University of Hong Kong. (2009). *Admission arrangements - Undergraduate admissions to City University of Hong Kong.* Obtido em 14 de dezembro de 2009, de http://www.admo.cityu.edu.hk/direct/adm_arrange

Cohen, R., Swerdlik, M., & Sturman, E. (2013). *Psychological testing and assessment: An introduction to testes and measurement* (8th ed.). New York: McGraw-Hill.

Comissão Permanente do Vestibular UFMG. (2009). *A Copeve*. Obtido em 14 de dezembro de 2009, de http://www.ufmg.br/copeve/

Comissão Permanente para os Vestibulares - Unicamp. (2009). *Página inicial*. Obtido em 13 de dezembro de 2009, de http://www.comvest.unicamp.br/

Concours Puissance 11. (2011). *Concours école d'ingénieurs - Concours Puissance 11.* Obtido em 13 de outubro de 2012, de http://www.concourspuissance11.fr/concours-ecoles-ingenieurs.html

Conselho Nacional de Educação. (2011). *O estado da educação 2011. A qualificação dos portugueses.* Lisboa: Autor.

Consorzio Interuniversitario Sistemi Integrati per l'Accesso. (2009). *CISIA*. Obtido em 14 de dezembro de 2009, de http://www.cisiaonline.it

Costa, A.; Lopes, J. (Coord.). (2008). *Os estudantes e os seus trajectos no ensino superior: sucesso e insucesso, factores e processos, promoção de boas práticas.* Lisboa: ISCTE.

Council for the Curriculum, Examinations and Assessment. (2005). *About us*. Obtido em 6 de dezembro de 2009, de http://www.ccea.org.uk/

Couto, G., & Primi, R. (2011). Teoria de resposta ao item (TRI): Conceitos elementares dos modelos para itens dicotômicos. *Boletim de Psicologia 61*(134), 1-15. Obtido em 25 de novembro de 2012, de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0006-59432011000100002&lng=pt&tlng=pt

Decreto-Lei n.º 115/2013, de 7 de agosto (2013). Graus académicos e diplomas do ensino superior. Lisboa.

Delgado, A. (2012). *Perceção de auto-eficácia e conhecimento de matemática no 1.º ano universitário.* Dissertação de mestrado, Faculdade de Psicologia da Universidade de Lisboa, Portugal.

Delgado, A., & Prieto, G. (2004). Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence, 32*, 25-32. doi:10.1016/S0160-2896(03)00061-8

Downing, S. M. (2003). Guessing on selected-response examinations. *Medical Education, 37*, 670-671. doi: 10.1046/j.1365-2923.2003.01585.x

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis Educativa, 7*(2), 305-330. doi:10. 5212/PraxEduc.v.7i2.0001

Education Law of the People's Republic of China (1995). Obtido em 29 de dezembro de 2009, de Ministry of Education of the People's Republic of China: http://www.moe.gov.cn/publicfiles/business/htmlfiles/moe/moe_2803/200905/48457.html

Education, Audiovisual and Culture Executive Agency (EACEA P9 Eurydice). (2011). *O ensino da matemática na Europa: Desafios comuns e políticas nacionais.* (Edição portuguesa). Lisboa: Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência.

Eurydice network. (2009). *Key data on education in Europe 2009.* Obtido em 8 de outubro de 2009, de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/key_data_en.php

Ferreira, M., Castanheira, M., Romão, R., Pereira, S., & Lourenço, V. (2013). *Relatório provas finais de ciclo e exames finais nacionais 2012*. GAVE. Obtido em 8 de agosto de 2013, de http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RelExames_2012_23jul.pdf

Foddy, W. (2002 [1993]). *Como perguntar, teoria e prática da construção de perguntas em entrevistas e questionários.* Oeiras: Celta Editora.

Frary, R. B. (1988). Formula scoring of multiple-choice tests (correction for guessing). *Educational Measurement: Issues and Practice, 7*(2), 33-38.

Fundação para a Ciência e a Tecnologia. (2012). *Domínios e áreas científicas.* Obtido em 14 de junho de 2012, de http://www.fct.pt/apoios/projectos/concursos/2012/docs/Dominios_e_Areas_Cientificas_C2012.pdf

Gabinete de Avaliação Educacional. (2004). *PISA 2003 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação da literacia matemática.* Mem Martins: Editorial do Ministério da Educação.

Gabinete de Avaliação Educacional. (2009). *GAVE: Missão*. Obtido em 11 de dezembro de 2009, de http://www.gave.min-edu.pt/np3/2.html

Gabinete de Avaliação Educacional. (2010). *PISA - Itens libertos.* Obtido em 15 de janeiro de 2010, de http://www.gave.min-edu.pt/np3/134.html

Gabinete de Avaliação Educacional. (2012). *GAVE: Projecto IRT - Item Response Theory*. Obtido em 25 de Abril de 2012, de http://www.gave.min-edu.pt/np3/17.html

Gabinete de Avaliação Educacional. (2013). *GAVE: Provas finais e exames nacionais*. Obtido em 22 de agosto de 2013, de http://www.gave.min-edu.pt/np3/39.html

Gilles, P. -Y. (Ed.). (2008). *Psychologie différentielle.* Paris: Bréal.

Gonçalves, R., & Costa, C. (2012). A mediação do professor e a exploração de uma atividade de modelação matemática no ensino da Álgebra Linear. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012. Práticas de ensino em matemática* (pp. 187-199). Portalegre: ESE de Portalegre.

Gregory, R. J. (2010). *Psychological testing: History, principles and applications* (6nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Guangzhou Integrated Image. (2008). *Education - National higher education entrance examination.* Guangzhou: Autor. Obtido em 28 de dezembro de 2009, de Fotoe: http://www.fotoe.com/english/topic/900221

Guzmán, M., Hodgson, B., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta Mathematica. Extra Volume ICM III (1998)*, 747-762.

Haladyna, T. M. (2004). *Developing and validating multiple-choice test items* (3rd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Haladyna, T. M., & Downing, S. M. (1988, April). Functional distractors: Implications for test-item writing and test design. *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* New Orleans, LA.

Haladyna, T., Downing, S., & Rodriguez, M. (2002). A review of multiple-choice item-writing guidelines for classroom assessement. *Applied Measurement in Education, 15*(3), 309-334.

Harris, D. (1989). Comparison of one-, two-, and three-parameter IRT models. In F. Brown (Ed.), *ITEMS: The instructional topics in edication measurement series* (Vol. 8, pp. 35-41). Iowa City: National Council on Measurement in Education. doi: 10. 10.1111/j.1745-3992.1989.tb00313.x

Högskoleverket . (2009). *Start page*. Obtido em 8 de dezembro de 2009, de http://www.hsv.se/

Holton, D. (Ed.). (2002). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Hong Kong Examinations and Assessment Authority. (2009). *About HKEAA.* Obtido em 10 de dezembro de 2009, de http://www.hkeaa.edu.hk/en/about_hkeaa/

IBM Corp. (2011). IBM SPSS Statistics for Windows (Version 20.0) [Computer software]. Armonk, NY: IBM Corp.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2009). *Conheça o Inep*. Obtido em 13 de dezembro de 2009, de http://portal.inep.gov.br/conheca-o-inep

International Baccalaureate Organization. (2009). *Diploma programme at a glance*. Obtido em 20 de dezembro de 2009, de http://www.ibo.org/diploma/

International Mathematical Olympiad. (2013). *Results.* Obtido em 24 de agosto de 2013, de http://www.imo-official.org/results.aspx

Japan Student Services Organization. (2007). *What is EJU?* Obtido em 30 de dezembro de 2009, de http://www.jasso.go.jp/eju/whats_eju_e.html

Joint Committee on Standards for Educational Evaluation. (2012). *Student evaluation standards*. Obtido em 25 de novembro de 2012, de JCSEE: http://www.jcsee.org/ses

Júri Nacional de Exames. (2013). *Estatísticas*. Obtido em 7 de novembro de 2013, de http://www.dgidc.min-edu.pt/jurinacionalexames/index.php?s=directorio&pid=4

Korea Institute for Curriculum and Evaluation. (2009). *Key functions*. Obtido em 8 de dezembro de 2009, de http://kice.re.kr/en/index.do

Kreber, C., Castleden, H., Erfani, N., & Wright, T. (2005). Self-regulated learning about university teaching: an exploratory study. *Teaching in Higher Education, 10*(1), 75-97. doi: 10.1080/1356251052000305543

Linacre, J. M. (1996). The Rasch model cannot be "Disproved"! *Rasch Measurement Transactions, 10*(3), 512-514. Obtido em 5 de Maio de 2012, de Rasch Measurement Transactions: http://www.rasch.org/rmt/rmt103e.htm

Linacre, J. M. (2011). *Practical Rasch measurement - Core topics*. Curso da Statistics.com [e-learning].

Linacre, J. M. (2012a). Winsteps® (Version 3.74.0) [Computer software]. Beaverton, Oregon: Winsteps.com. Available from http://www.winsteps.com/.

Linacre, J. M. (2012b). *Winsteps® Rasch measurement computer program User´s Guide.* Beaverton, Oregon: Winsteps.com.

Lissitz, R. W., & Hou, X. (2008). *Multiple choice items and constructed response items: Does it matter?* Obtido em 11 de julho de 2011, de Maryland Assessment Research Center for Education Success: http://www.education.umd.edu/EDMS/MARCES/Completed.htm

Lord, F. M. (1977). Optimal number of choices per item - A comparison of four approaches. *Journal of Educational Measurement, 14*, 33-38.

Maroco, J. (2010). *Análise Estatística com utilização do SPSS* (3a ed.). Lisboa: Edições Sílabo, Lda.

Martin, W., Olson, J., & Wilson, L. (2008). *Mathematicas framework for the 2009 National Assessement of Educational Progress (NAEP).* Washington, DC: National Assessment Governing Board (U.S. Department of Education). Obtido em 19 de setembro de 2010, de http://www.nagb.org/content/nagb/assets/documents/publications/frameworks/math-framework09.pdf

Massachusetts Institute of Technology. (2009). *Tests & Scores - MIT admissions*. Obtido em 28 de dezembro de 2009, de http://mitadmissions.org/apply/freshman/tests

Ministère de l´Éducation Nationale. (2009). *Le système éducatif - Les acteurs du système éducatif*. Obtido em 2 de dezembro de 2009, de http://www.education.gouv.fr/pid8/le-systeme-educatif.html

Ministério da Educação do Brasil. (2009). *Novo Enem*. Obtido em 14 de dezembro de 2009, de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310

Monteiro, A., Fonseca, D., Monteiro, I., Rebelo, I., Silva, M., Duque, M., & Ferreira, R. (2013). Processo de avaliação externa da aprendizagem - Provas de aferição, provas finais de ciclo e exames nacionais 2012. Júri Nacional de Exames. Obtido em 16 de junho de 2013, de http://www.dgidc.min-edu.pt/jurinacionalexames/index.php?s=directorio&pid=21

Monteiro, H., & Afonso, M. J. (2011, julho). *PMAT: construção e estudo metrológico de um teste de conhecimentos de Matemática para o 1.º ano do ensino superior.* Comunicação ao VIII Congresso Iberoamericano de Avaliação/Evaluación Psicológica e XV Conferência Internacional Avaliação Psicológica: Formas e Contextos, Faculdade de Psicologia da Universidade de Lisboa.

Monteiro, H., & Afonso, M. J. (2013). *PMAT-03. Ensaio Experimental IV. Análise de resultados do estudo metrológico.* Documento base para comunicação à SPM dos resultados do Ensaio Experimental IV do PMAT (PMAT-03) na população do 1.º ano universitário (Tabelas de Resultados), Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa.

Monteiro, H., & Santos, A. (2010, julho). *Testes estandardizados de Matemática: O que se faz lá por fora.* Comunicação ao Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2010, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Leiria.

Monteiro, H., Afonso, M. J., & Pires, M. (2010, julho). *Respostas erradas aos itens do PMAT-00: Hipóteses explicativas.* Comunicação ao Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2010, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Leiria.

Monteiro, H., Afonso, M. J., & Pires, M. (2012, julho). *Testes de escolha múltipla: Construção dos itens.* Comunicação ao Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2012, Universidade do Algarve, Faro.

Monteiro, H., Afonso, M. J., & Pires, M. (2013). Testes de escolha múltipla: Construção de itens. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática - Actas do Encontro Nacional da SPM 2012* (pp. 53-56). Lisboa: SPM.

Monteiro, H., Afonso, M. J., & Pires, M. (2014, julho). *Transição da matemática do secundário para a do superior: O ponto de vista dos estudantes.* Comunicação ao Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2014, Universidade Nova de Lisboa.

Monteiro, H., Pires, M., & Afonso, M. J. (2011, junho). *Construção e validação estatística de testes.* Comunicação em Seminário do Centro de Estudos e Desenvolvimento da Matemática no Ensino Superior da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, Faro.

Moreno, R., Martínez, R., & Muñiz, J. (2006). New guidelines for developing multiple-choice items. *Methodology, 2*, 65-72. doi: 10.1027/1614-2241.2.2.65

Mueller, J. (2011). *What is authentic assessment?* Obtido em 30 de Setembro de 2011, de Authentic Assessment Toolbox: http://jfmueller.faculty.noctrl.edu/toolbox/whatisit.htm

Mullis, I., Martin, M., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 international results in mathematics. Chestnut Hill and Amsterdam: TIMSS & PIRLS. Obtido em 12 de setembro de 2013, de http://www.timss.org/

Muñiz, J. (2010). Las teorias de los test: teoría clásica y teoría de respuesta a los ítems. *Papeles del Psicólogo, 31*(1), 57-66.

National Center for Education Statistics. (2011). *NAEP - Analysis and Scaling.* Obtido em 25 de abril de 2012, de http://nces.ed.gov/nationsreportcard/tdw/analysis/

National Center for Education Statistics. (2013). *Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Obtido em 18 de abril de 2013, de http://nces.ed.gov/Timss/index.asp

National Center for University Entrance Examinations. (2009). *About the National Center*. Obtido em 5 de dezembro de 2009, de http://www.dnc.ac.jp/modules/info/content0005.html

National Institute for Testing and Evaluation. (2009). *About NITE.* Obtido em 28 de dezembro de 2009, de https://www.nite.org.il/index.php/en/about-nite-157.html

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: Department of Education.

National University of Singapore. (2009). *University entrance examinations.* Obtido em 30 de dezembro de 2009, de http://www.nus.edu.sg/oam/uee/index.html

Ng, A. W., & Chan, A. H. (2009). Different methods of multiple-choice test: Implications and design for further research. In S. Ao, O. Castillo, C. and Douglas, D. Dagan, & J. Lee (Edits.), *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2009* (Vol. 2, pp. 1958-1963). Hong Kong: Newswood Limited.

Nóvoa, A. (Coord.). (2005). *Percursos escolares dos estudantes da Universidade de Lisboa: Factores de sucesso e insucesso na Universidade de Lisboa.* Lisboa: Reitoria da Universidade de Lisboa.

Nunes, M. M. (2006). *(In)sucesso escolar no ensino superior: Variáveis biopsicossociais* (Vol. 5). (Colecção Ensino Superior e Ciência). Castelo Branco: POLITÉCNICA-Associação dos Institutos Politécnicos do Centro.

Office of the Qualifications and Examinations Regulator. (2009). *About us*. Obtido em 5 de dezembro de 2009, de http://www.ofqual.gov.uk/about-us/

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2012). *PISA 2009 Technical Report.* PISA. Paris: Autor.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2013a). *PISA 2012 Results in focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know.* Paris: Autor.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2013b). *About PISA*. Obtido em 18 de abril de 2013, de http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2014). *PISA 2012 Results: What students know and can do - Student performance in Mathematics, Reading and Science.* (Volume I, Revised edition). Paris: Autor.

Oxford Cambridge and RSA Examinations. (2009). *About OCR*. Obtido em 7 de dezembro de 2009, de http://www.ocr.org.uk/aboutus/

Pasquali, L., & Primi, R. (2003). Fundamentos da teoria da resposta ao item: TRI. *Avaliação Psicológica*, *2*(2), 99-110. Obtido em 3 de janeiro de 2010, de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1677-04712003000200002&lng=pt&tlng=pt

Ponte, J. P. (2000). A investigação em didáctica da matemática pode ser (mais) relevante? In J. P. Ponte, & L. Serrazina (Ed.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 327-336). Lisboa: SEM da SPCE.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In CNE (Ed.), *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J., Matos, J., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática - Implicações curriculares.* Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J., Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático dos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Práxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Prieto, G. (2010). *Construção e Validação Estatística de Testes e Exames*. [Apontamentos do curso Construção e Validação Estatística de Testes e Exames]. Lisboa: Instituto Superior de Economia e Gestão.

Prieto, G., & Delgado, A. (2003). Análisis de un test mediante el modelo de Rasch. *Psicothema, 15*(1), 94-100.

Prieto, G., & Delgado, A. R. (2010). Fiabilidad y Validez. *Papeles del Psicólogo, 31*(1), 67-74.

Real Decreto 1892/2008 de 14 de noviembre (2008). Por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas. Madrid. Obtido em 13 de setembro de 2009, de http://sid.usal.es/idocs/F3/LYN13429/3-13429.pdf

Regulamento n.º 258/2011 (2011). Código Deontológico da Ordem dos Psicólogos Portugueses, publicado em Diário da República n.º 78, 2ª série, de 20 de abril. Lisboa.

Rezende, W. M. (2004). O ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de matemática?. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 21-33). Recife, PE, Brasil: SBEM.

Richardson, J. T. (2005). Student´s approaches to learning and teacher´s approaches to teaching in higher education. *Educational Psychology, 25*(6), 673-680. doi: 10.1080/ 01443410500344720

Rodriguez, M. C. (2005). Three options are optimal for multiple-choice items: a meta-analysis of 80 years of research. *Educational Measurement: Issues and Practice, 24*(2), 3-13. doi: 10. 1111/j.1745-3992.2005.00006.x

Schola Europaea. (2009). *The European Baccalaureate*. Obtido em 27 de dezembro de 2009, de http://www.eursc.eu/index.php?l=2

Scuola di Ingegneria e Architettura dell'Ateneo di Bologna. (2009). *Futuri studenti*. Obtido em 16 de dezembro de 2009, de http://www.ingegneriarchitettura.unibo.it/it/studenti-in-arrivo

SIEC - Maison des Examens. (2009). *Nos missions*. Obtido em 2 de dezembro de 2009, de http://www.siec.education.fr/la-mde/nos-missions

Singapore Examinations and Assessment Board. (2009). *About us*. Obtido em 30 de dezembro de 2009, de http://www.seab.gov.sg/aboutUs/aboutSEAB.html

Tavares, J., Santiago, R. A., & Lencastre, L. (2002). *Insucesso no 1.º ano do ensino superior: Um estudo no âmbito dos cursos de licenciatura em ciências e engenharia na universidade de Aveiro* (2a ed.). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Teixeira, M. O. (2008). A escala multidimensional de Auto-Eficácia Percebida: um estudo exploratório numa amostra de estudantes do ensino superior. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación Psicológica, 25*(1), 141-157.

Tennant, A., & Pallant, J. (2006). Unidimensionality matters! (A tale of two Smiths?). *Rasch Measurement Transactions, 20*(1), 1048-1051. Obtido em 13 de junho de 2014, de http://www.rasch.org/rmt/rmt201c.htm

The College Board. (2009). *About us*. Obtido em 28 de dezembro de 2009, de http://about.collegeboard.org/

The College Board. (2012). *Free SAT practice test.* Obtido em 4 de novembro de 2012, de SAT: http://sat.collegeboard.org/practice/sat-practice-test

The White House. (2013). *Reform for the future*. Obtido em 15 de julho de 2013, de whitehouse.gov: http://www.whitehouse.gov/issues/education/reform

Trevisan, M. S., Sax, G., & Michael, W. B. (1994). Estimating the optimum number of options per item using an incremental option paradigm. *Education and Psychological Measurement, 54*, 86-91. doi: 10.1177/0013164494054001008

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*, 5-31.

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l´enseignement de l´Algèbre Linéaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives* (pp. 157-176). Strasbourg: IREM de Strasbourg.

Tuckman, B. (2002). *Manual de Investigação em Educação* (2a ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Tversky, A. (1964). On the optimal number of alternatives at a choice point. *Journal of Mathematical Psychology, 1*, 386-391.

U.S. Network for Education Information. (2007). *Education in the United States*. Obtido em 10 de dezembro de 2009, de U.S. Department of Education: http://www2.ed.gov/about/offices/list/ous/international/usnei/us/edlite-index.html

Ufficio Scolastico per la Lombardia. (2009). *Incarichi speciali, progetti, servizi*. Obtido em 15 de dezembro de 2009, de http://www.istruzione.lombardia.it

Universidad de Oviedo. (2009). *Pruebas de acceso a la Universidad.* Obtido em 16 de setembro de 2009, de http://www.uniovi.es/accesoyayudas/estudios/pau

Universidade de Coimbra. (2013). *Informações úteis - Transição para o ensino superior*. Obtido em 14 de junho de 2013, de http://www.uc.pt/fctuc/ceip/metodos_estudo/transicao

Universities and Colleges Admissions Service. (2009). *UCAS Tariff*. Obtido em 14 de dezembro de 2009, de http://www.ucas.com/how-it-all-works/explore-your-options/entry-requirements/tariff-tables

University of California, Los Angeles. (2009). *Undergraduate admissions*. Obtido em 28 de dezembro de 2009, de http://www.seasoasa.ucla.edu/admissions/undergraduate-admissions#freshman

Urbina, S. (2004). *Essentials of psychological testing.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Wright, B. (1977). *Solving Measurement problems with the Rasch model.* Obtido em 10 de Maio de 2012, de Institute for Objective Measurement, Inc.: http://www.rasch.org/memo42.htm

Wright, B. (1998). Georg Rasch - The men behind the model. *Popular Measurement*, 15-22.

Wright, B., & Bell, S. (1984). Item banks: what, why, how. *Journal of Educational Measurement, 21*(4), 331-345.

Wright, B., & Stone, M. H. (1999). *Measurement essentials* (2nd ed.). Wilmington, Delaware: Wide Range, Inc.

Wu, M., & Adams, R. (2007). *Applying the Rasch model to psycho-social measurement: A practical approach.* Melbourn: Educational Measurement Solutions.

Zimmaro, D. M. (2010). *Writing good multiple-choice exams.* Obtido em 15 de Setembro de 2011, de Center for Teaching and Learning: http://ctl.utexas.edu/assets/Evaluation-Assessment/Writing-Good-Multiple-Choice-Exams-04-28-10.pdf

Zumbo, B. D. (2007). Validity: Foundational issues and statistical methodology. In C. Rao, & S. Sinharay (Edits.), *Handbook of Statistics: Psychometrics* (Vol. 26, pp. 45-79). The Netherlands: Elsevier Science B.V.

APÊNDICES

A, B, C, D e E

Apêndice A

FORMATO DOS ITENS

Os testes de conhecimentos são, normalmente, compostos por várias questões, instruções ou outras formas de solicitar respostas, que se designam por itens.

De um modo geral, um item tem três componentes: o enunciado (estímulo para a resposta) que pode ter a forma de pergunta aberta, de uma afirmação incompleta ou de uma instrução que requer uma resposta verbal ou comportamental; algumas condições fixadas para a resposta; método de pontuação.

Para responder ao item pode ser necessário elaborar a resposta ou selecioná-la entre várias opções fornecidas no item. É em função do modo como a resposta é dada que se distinguem, quanto à estrutura, os formatos dos itens. Neste sentido, os itens podem ser agrupados em:

Itens de Resposta Construída **(RC) -** solicitam uma resposta que deve ser elaborada sem qualquer informação além da que se encontra no enunciado;

Itens de Escolha Múltipla **(EM) -** solicitam uma resposta que não é elaborada, mas selecionada entre as várias opções que são apresentadas, podendo esta seleção ser feita, por exemplo, entre o *sim* e o *não* ou entre o *verdadeiro* e o *falso*.

Os itens EM com dois níveis de pontuação (certo/errado) dizem-se *dicotómicos*, em oposição aos *politómicos.*

Entre os **Itens RC** diferenciam-se dois tipos de formatos:

- **Resposta fechada**: resposta dada através do preenchimento de espaço(s) em branco numa frase, numa tabela ou outra estrutura, apresentado(s) para completar.

  Exemplo: As retas de equação $y = 2x + 1$ e $y = 3x + 2$ intersectam-se no ponto (__ , __).

- **Resposta aberta**: resposta completa e estruturada, do modo que parecer mais conveniente ao respondente que, na maioria dos casos, deve explicar como obteve essa resposta.

  Exemplo: Determine o ponto de intersecção das retas de equação $y = 2x + 1$ e $y = 3x + 2$ (apresente todos os cálculos que efectuar).

Entre os **Itens EM**, distinguem-se os seguintes formatos, de acordo com Haladyna, Downing e Rodriguez (2002):

- **Escolha Múltipla Convencional**[1] **(EMC)**: item composto pelo enunciado e por três a cinco alternativas de resposta ou opções - uma correta, *a chave*, e as outras erradas, *os distratores* (o avaliado deve indicar a chave).

  Exemplo: Considere os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$. Qual das seguintes opções é a correta?

  A) $\frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5}$

  B) $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$

  C) $\frac{2}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

- **Escolha Alternativa**: item composto pelo enunciado e duas alternativas de resposta - uma certa e outra errada (o avaliado deve indicar a resposta certa).

  Exemplo: Considere os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$. Diga qual das seguintes opções é a correta.

  A) $\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{1}{3}$

  B) $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$

[1] Os itens EMC, talvez por serem os itens EM mais utilizados, são conhecidos por, simplesmente, itens de escolha múltipla.

- **Verdadeiro-Falso**: item que consiste numa afirmação que pode ser verdadeira ou falsa (o avaliado deve indicar se a afirmação é verdadeira ou falsa).

  Exemplo: Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$.

- **Múltiplo Verdadeiro-Falso**: item formado pelo enunciado e por 3 a 30 opções, verdadeiras ou falsas (o avaliado deve indicar, para cada opção, se é verdadeira ou falsa).

  Exemplo: Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa.

  A) $\sqrt{x^2} = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

  B) $\sqrt{10^2 - 4^2} > 8$.

  C) $\frac{x^2+2x^3}{x^2} = 2x$, com $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

  D) $x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$.

  E) $3 - 5 \times 2 = -7$.

- **Associação:** item constituído por grupos de opções (3 a 12) que o avaliado deve associar, em função de uma questão ou tarefa solicitada.

  Exemplo: Ligue, com um traço, cada proposição verdadeira do grupo A a uma proposição falsa do grupo B.

Grupo A	Grupo B
$\sqrt{x^2} = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$	$\frac{x^2+2x^3}{x^2} = 2x$, com $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\sqrt{10^2 - 4^2} > 8$	$(n+2)^2 \neq n^2 + 4$, com $n \in \mathbb{N}$.
$3 - 5 \times 2 = -7$	$x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

- **Escolha Múltipla Complexa**: item formado pelo enunciado seguido de afirmações, numeradas, que são agrupadas em três a cinco alternativas de resposta, só uma delas correta.

Exemplo: Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

1. $\ln\frac{1}{e} = -1$ 2. $\ln 4 + \ln 5 = \ln 9$ 3. $\ln\frac{3}{25} = \ln 3 - 2\ln 5$

A) 1 e 2

B) 2 e 3

C) 1 e 3

D) 1, 2 e 3

- **Conjunto de Itens Dependentes do Contexto:** conjunto de 2 a 12 itens, com um dos formatos anteriores, cuja resposta depende do mesmo estímulo, dado por um poema, uma fotografia, uma tabela, um gráfico ou outro material visual.

Exemplo (Retirado de *Preparing for the ACT*, 2009/2010):

Utilize a informação que se segue para responder às questões 1 - 3.

Antes da eleição para Presidente da Câmara de Springdale foi selecionada uma amostra de 200 eleitores. Todos eles indicaram um de quatro candidatos em que iriam votar. Os resultados da sondagem são apresentados na tabela abaixo.

Candidatos	Número de Votos
Blackcloud	50
Lue	80
Gomez	40
Whitney	30

1. Que percentagem, de eleitores da amostra, escolheram Whitney para Presidente da Câmara?

A. 15%
B. 20%
C. 25%
D. 30%
E. 40%

2. Se a sondagem for indicativa de que os 10.000 eleitores de Springdale votarão na eleição, qual das seguintes é a melhor estimativa do número de votos que Lue irá receber?

F. 1.500
G. 2.500
H. 4.000
J. 5.000
K. 8.000

3. Se a informação da tabela for convertida num gráfico circular (sectograma), quantos graus medirá o ângulo ao centro do sector correspondente a Gomez?

A. 54°
B. 72°
C. 90°
D. 108°
E. 144°

Um teste pode ser organizado com itens do mesmo formato ou de formatos diferentes. Como exemplo do primeiro caso, tem-se o teste de Matemática de acesso às escolas francesas que integram a *Fédération des Écoles Supérieures d'Ingénieurs et de Cadre*s (FESIC) (Concours Puissance 11, 2011). Os testes do *SAT Reasoning Test* (The College Board, 2012) ou do PISA (GAVE, 2010) são exemplos de testes constituídos por itens de vários formatos.

Cada formato de item tem características que o tornam mais adequado aos conteúdos a avaliar, às condições de aplicação do teste ou à natureza dos avaliados. No Capítulo 2 encontra-se informação relativa às vantagens dos itens EM em relação aos itens RC e vice-versa.

Apêndice B

ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA: APLICAÇÃO E CONSTRUÇÃO

A utilização de itens de escolha múltipla (EM) apresenta vantagens em relação aos itens de resposta construída (RC), mas também manifesta algumas limitações. No sentido de as minimizar ou mostrar como não têm fundamento algumas críticas que são apontadas à aplicação ou à pontuação de itens EM, têm sido efetuadas diversas pesquisas, algumas das quais se apresentam neste apêndice.

Outra questão relacionada com os itens EM, que tem alimentado muitas discussões e enriquecido a literatura, desde os anos 20 do século passado, é o número ótimo de alternativas de resposta de um item EMC. Apesar de, tipicamente, estes itens serem construídos com quatro alternativas de resposta, encontrando-se muitos testes com cinco alternativas por item, as conclusões de diversos estudos, teóricos e empíricos, defendem a redução do número de distratores, como se constata na segunda parte deste apêndice.

B.1 Âmbito de Aplicação e Pontuação de Itens EM

As investigações mencionadas nesta secção foram organizadas em função dos seus objetivos: estudar a melhor forma de pontuar os itens EM, no sentido de atenuar as consequências da atitude dos estudantes que não têm a certeza da resposta certa; identificar os resultados da aprendizagem mais adequados para serem medidos por itens EM; analisar a diferença entre itens EM e itens RC na avaliação de conhecimentos em Matemática.

B.1.1 Conhecimento Parcial, Intuição e Acaso

Um estudante que não conhece a resposta correta a um item mas tem algum conhecimento sobre o conteúdo em questão, tem oportunidade de mostrar esse conhecimento parcial se o item for do tipo RC. No caso de o item ser do tipo EM, a incerteza na resposta pode levá-lo a omitir ou a errar a resposta e não revela o seu conhecimento.

Por outro lado, um estudante pode responder corretamente a um item EM sem conhecer, de facto, a resposta certa. Esta situação pode ocorrer quando o conhecimento parcial do estudante lhe permite identificar todos os distratores do item e também quando ele seleciona a resposta certa apenas por intuição - encontra pistas que apontam para aquela resposta, é a que lhe parece mais plausível. O estudante pode ainda acertar um item EM por acaso - tem sorte ao escolher a correta de entre todas as alternativas de resposta, mesmo sem ler o item, ou de entre as alternativas que sobraram depois de ter eliminado um ou mais distratores com base no seu conhecimento ou na sua intuição.

Estas situações incentivaram a introdução de métodos alternativos para administrar itens EM, que aumentam a complexidade da resposta e da pontuação.

Para desencorajar as respostas dadas por intuição ou acaso e permitir que as respostas reflitam o conhecimento parcial por parte dos estudantes, alguns dos métodos mais utilizados, segundo Ng e Chan (2009), são:

- Escolha Múltipla Liberal

O estudante deve selecionar mais do que uma alternativa de resposta se não tiver a certeza de qual é a correta. Há vários processos de pontuar estes itens. Um deles consiste no seguinte: num item com cinco opções, só uma delas correta, atribuir três pontos a quem escolhe apenas a opção correta; dois pontos a quem escolhe duas opções, uma delas a correta; um ponto a quem escolhe três opções, desde que uma delas seja a correta (Hobson & Ghoshal, 1996, como citados em Ng & Chan, 2009).

- Teste de Eliminação

O estudante deve selecionar todas as alternativas de resposta que, no seu entender, são incorretas. É atribuído um ponto para cada opção errada identificada, mas subtraídos $N - 1$ pontos se a opção correta foi selecionada, com N o número de alternativas de resposta do item.

- Atribuição de grau de confiança na opção

O estudante deve atribuir um nível ou grau de confiança à sua melhor resposta para cada item. Uma pontuação possível destes itens é atribuir cinco pontos a "muito confiante e resposta certa"; três pontos a "bastante confiante e resposta certa"; um ponto a "não confiante e resposta certa"; retirar dois pontos a "muito confiante e resposta errada"; retirar um ponto a "bastante confiante e resposta errada"; pontuar com zero a situação "não confiante e resposta errada" (Davies, 2002, como citado em Ng & Chan, 2009).

Ng e Chan (2009) analisaram vários estudos sobre a comparação de diferentes métodos de aplicação de itens de escolha múltipla. Concluíram que os resultados obtidos não permitem decidir qual é o melhor método para medir a quantidade de aprendizagem de um indivíduo. Também fizeram um estudo comparativo entre testes com itens de escolha múltipla convencional, com escolha múltipla liberal e com atribuição de grau de confiança. Mais uma vez, foram levados a concluir que, com os resultados conhecidos, não é possível identificar qual o melhor método a utilizar com itens de escolha múltipla.

Uma vez que a resposta certa a um item EM é apresentada numa das alternativas de resposta, há sempre a possibilidade de um estudante a escolher e não ter qualquer conhecimento sobre o conteúdo que se pretende medir com o item - teve sorte, ao responder ao acaso. Por consequência, o resultado do seu teste será sobrestimado.

Para reduzir o efeito das respostas certas dadas ao acaso na pontuação de um teste com itens EM, todos a valer 1 ponto e com o mesmo número de alternativas de resposta, pode ser utilizada uma fórmula de correção - a *Fórmula de Pontuação* (Frary, 1988):

$$\boldsymbol{FP = C - E/(N - 1)}$$

onde, FP representa a pontuação "corrigida"; C é o número de itens respondidos corretamente; E é o número de itens respondidos incorretamente; N é o número de alternativas de resposta por item.

Quando se aplica esta fórmula, cada resposta errada é descontada na pontuação das respostas certas ($1/(N-1)$ pontos) e as respostas omissas não são consideradas certas nem erradas. Daí que se instruam os estudantes de que devem omitir uma resposta quando não conseguem eliminar qualquer uma das opções erradas. Caso consigam, é preferível responderem. No entanto, é importante ter a noção de que um indivíduo pode contrariar as instruções e, dependendo da sorte, pode ter melhor ou pior resultado no teste do que se não respondesse a alguns itens por acaso. Por outro lado, um indivíduo com conhecimento parcial que se abstenha de responder, tende a obter pior pontuação do que se escolher, ao acaso, uma das opções que restaram depois de excluir as que identificou como erradas.

Frary (1988) adverte que a fórmula da pontuação não pretende evitar as respostas dadas ao acaso quando os estudantes têm algum conhecimento sobre a matéria. Com a sua aplicação, espera-se reduzir a quantidade de respostas dadas absolutamente ao acaso, quando a ignorância do estudante é total, e ajustar os resultados dos testes. Não é considerada adequada para a maioria dos testes em sala de aula, mas pode ser apropriada para testes muito rápidos ou testes muito difíceis com baixa exigência de pontuação. Acrescenta ainda que as investigações empíricas realizadas para analisar as vantagens ou desvantagens da utilização da fórmula de pontuação não produziram resultados consistentes.

Segundo Downing (2003), a maioria dos especialistas em instrumentos de avaliação educacional recomendam que a pontuação do teste seja igual ao total das respostas certas.

Fazer suposições baseadas na tendência do professor, procurar pistas que sugerem a resposta certa ou identificar as opções menos plausíveis para reduzir o número de distratores e, a seguir, escolher ao acaso uma das opções não rejeitadas, são procedimentos treinados por alguns alunos (o que, muitas vezes, lhes exige mais tempo de resolução do teste). Para contrariar a possibilidade de os estudantes responderem corretamente a um item EM por intuição, devem ser consideradas diretrizes para a escrita dos itens, como por exemplo as de Haladyna, Downing e Rodriguez (2002) ou as de Moreno, Martínez e Muñiz (2006).

B.1.2 Resultados da Aprendizagem

A natureza do resultado da aprendizagem que se pretende medir deve ser ponderada para decidir qual o melhor formato dos itens a utilizar. As conclusões que Haladyna (2004) apresentou, sobre um estudo que desenvolveu relativo a esta questão, resumem-se no seguinte: para avaliar uma aprendizagem que pode ser medida direta e objetivamente (aprendizagem definida em concreto), como um domínio do conhecimento e muitas competências, os itens EM são uma boa opção; para medir uma aprendizagem que não é facilmente observável, que comprova o uso de conhecimentos e de competências através de processos complexos, que requer uma avaliação feita por peritos, que não é medida objetivamente (aprendizagem definida em abstrato), devem ser utilizados itens RC de resposta aberta, casualmente conjuntos de itens EM dependentes do contexto.

Para avaliar aprendizagens definidas em abstrato, há avaliadores que optam por grupos de itens EM para testarem a resolução de problemas, sendo cada grupo respondido e entregue pelo estudante antes de passar ao grupo seguinte. No entanto, a investigação não produziu resultados sobre as vantagens e desvantagens do uso desta técnica neste tipo de critério de medição.

Nos últimos anos, peritos em educação têm defendido a *Avaliação de Desempenho em contexto* - uma forma de avaliação na qual os estudantes são convocados a realizar tarefas do mundo real (Mueller, 2011). Neste tipo de avaliação são utilizados instrumentos como espetáculos, produtos (relatórios de pesquisa, posters, portefólios, etc.) e itens RC que, normalmente, requerem uma aplicação direta de conhecimentos e capacidades. No entanto, como refere Mueller (2011), a *Avaliação de Desempenho* também comporta, com frequência, a aplicação de testes com itens EM como complemento, pelo que este formato continua a exercer um papel importante na sala de aula e nas avaliações de larga escala.

B.1.3 Avaliação de Conhecimentos em Matemática

As considerações feitas até ao momento são, naturalmente, válidas para um teste de qualquer área de conhecimento, em particular de Matemática. Apesar de muitos educadores defenderem que os itens RC são superiores aos itens EM na medição das competências matemáticas, esta opinião não é sustentada pela literatura científica.

Além dos comentários referidos atrás, devidos a Haladyna e a Mueller, no relatório final *Foundations for Success* do National Mathematics Advisory Panel (2008) constata-se que o painel examinou a literatura sobre propriedades metrológicas dos itens RC comparadas com as dos itens EM e não encontrou fundamento para a suposição de que uma resposta construída, em particular de resposta fechada, meça aspetos de competência matemática diferentes dos que se podem medir com os itens EM.

Por outro lado, no relatório *PISA 2003 – Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação de Literacia Matemática* (GAVE, 2004) defende-se a utilização de itens EM para avaliar algumas competências relacionadas com a literacia matemática:

> Com base na experiência adquirida no desenvolvimento e na aplicação dos itens de teste do estudo PISA 2000, o tipo escolha múltipla é geralmente considerado como o mais adequado para avaliar itens associados às constelações de competências *reprodução* e *conexão*. (p. 36)

Para concluir este resumo de resultados sobre o formato EM para os itens a utilizar na medição dos resultados da aprendizagem de conteúdos de Matemática, considere-se um estudo desenvolvido por Lissitz e Hou (2008), da Universidade de Maryland. O objetivo destes investigadores era avaliar o impacto da remoção de itens RC das provas *Maryland High School Assessments* - provas de final de curso, constituídas por quatro testes (um deles de Álgebra), cada um composto por itens RC e itens EM.

Os autores do estudo procuraram utilizar cada um dos métodos de pesquisa conhecidos das investigações empíricas sobre a equivalência dos itens RC e EM (equivalência dos formatos para medir o mesmo processo cognitivo): um utiliza itens com enunciados equivalentes em ambos os formatos para controlar diferenças de conteúdo e isolar o efeito do formato (Ackerman & Smith, 1988; Frisbie & Cantor, 1995, como citados em Lissitz & Hou, 2008); o outro utiliza itens com enunciados independentes em cada formato, que incidem em conhecimentos ou aptidões semelhantes ou diferentes (Rodriguez, 2003, como citado em Lissitz & Hou, 2008).

Lissitz e Hou obtiveram, de cada um dos quatro testes de 2007, o número de respostas certas do teste completo (itens EM e itens RC), só dos itens EM e só dos itens RC. Compararam, em cada teste, as correlações entre estes valores, dois a dois; examinaram a fiabilidade dos testes com e sem itens RC (uma qualidade dos resultados dos testes que sugere que eles são suficientemente consistentes e independentes de erros de medida para que sejam úteis (Urbina, 2004)); analisaram as diferenças de formato relacionadas com o sexo e a raça e ainda a saturação de cada formato numa análise de componentes principais (peso de cada formato nos fatores que influenciam as respostas dadas pelos indivíduos).

Os resultados obtidos foram análogos para os quatro testes. Em relação ao de Álgebra, em particular, os autores concluem que existem algumas diferenças associadas à eliminação de itens RC. No entanto, por essas diferenças serem pequenas, não veem qualquer problema em eliminar os itens RC dos testes de Maryland High School Assessments.

Assinale-se o facto de o género masculino ter obtido pontuações um pouco mais altas do que o feminino nos itens EM, enquanto no teste completo as classificações dos dois géneros foram idênticas. Este resultado poderá sugerir que os itens EM são favoráveis ao género masculino. No entanto, esta sugestão não é confirmada pelos resultados de investigações desenvolvidas no sentido de descobrir se o formato dos itens tem influência no desempenho dos géneros, como as que se mencionam a seguir.

Willingham e Cole (1977, como citados em Beller & Gafni, 1996), na sequência de uma revisão global sobre *Género e Avaliação Justa/Imparcial,* concluíram que o formato EM dos itens não é suscetível de apresentar um problema significativo de equidade.

Na área específica da Matemática, Beller e Gafni (1996) pesquisaram o efeito dos itens RC e EM no género, com uma amostra de crianças de 13 anos de 8 países e outra de crianças de 9 a 13 anos de 30 países. Os resultados que obtiveram sugeriram que o formato dos itens, *per si*, não influencia a diferença de desempenho nos géneros. No geral, em Matemática, os rapazes tiveram melhor desempenho. Independentemente do formato dos itens, os investigadores identificaram variáveis que influenciaram este resultado: uma relação entre o género e a dificuldade dos itens, de qualquer formato, que aponta para a superioridade dos rapazes nos itens mais difíceis; a superioridade das raparigas na aptidão verbal, o que as favorece nos itens RC; diferentes estratégias de resposta, que interferem nos resultados dos testes - dependendo da cultura, as raparigas tendem a omitir mais as respostas e os rapazes tendem mais a dá-las ao acaso, o que se pode traduzir numa pequena influência da diferença de géneros nos itens EM.

B.2 Número de Alternativas de Resposta de um Item EMC

Um item EMC é formado por um enunciado, que pode ser uma pergunta, uma afirmação incompleta ou uma instrução que requer uma resposta, e três a cinco alternativas de resposta, ou opções, uma delas a resposta certa. Alguns psicometristas são a favor de, apenas, duas respostas erradas ou distratores. Considerem-se os argumentos de alguns deles.

Tversky (1964) demonstrou, teoricamente, que três é o número ideal de alternativas de resposta para um item EMC - além de minimizar a confusão e a sobrecarga da memória dos estudantes, maximiza a capacidade de discriminação (o número de possíveis padrões de resposta a um teste), a potência (a probabilidade de não dar a resposta certa a todos os itens, apenas por acaso) e a informação do teste (a redução da incerteza associada ao conjunto dos padrões de resposta), por unidade de tempo.

Tversky assumiu, no seu estudo, que o tempo de resolução do teste é proporcional à sua dimensão, entendida como o número total de alternativas de resposta. Este tempo é fixado, à partida, e não tem que ser igualmente distribuído pelos itens.

Bruno e Dirkzwager (1995) também desenvolveram uma investigação teórica sobre o número de opções de um item EMC. Admitiram que os itens de um teste têm todos o mesmo número de alternativas de resposta, que são construídos corretamente e que cada opção tem a mesma probabilidade de ser escolhida por um indivíduo que responde meramente ao acaso. Concluíram que, com estas condições, o máximo da informação média, por alternativa de resposta, que o examinador obtém sobre o examinado ocorre quando o número de opções é igual a três.

Com base na curva de informação dos itens (indicador da quantidade de informação dos dados para estimar a dificuldade do item), Lord (1977) concluiu que: os itens com três alternativas de resposta fornecem o máximo de informação quando aplicados a indivíduos com pontuações intermédias na escala de avaliação; os itens com duas opções funcionam melhor para indivíduos com pontuações elevadas; itens com quatro ou cinco opções são preferíveis para as pontuações baixas, onde as respostas dadas ao acaso são mais frequentes.

No que concerne a investigações empíricas, realizadas com o objetivo de encontrar o número ótimo de alternativas de resposta de um item EMC, considerem-se, por exemplo, resultados mencionados por Haladyna, Downing & Rodriguez (2002): nalgumas investigações empíricas concluiu-se que a redução do número de opções provoca uma diminuição da dificuldade do item, enquanto noutras o efeito foi contrário; também não há consenso quanto à discriminação dos itens (grau em que os itens permitem predizer o resultado total de um indivíduo avaliado), uma vez que nuns estudos se constatou que a discriminação aumentava com a redução do número de opções e noutros que não havia alteração na discriminação; há investigações que consideram ser muito improvável que alguém consiga criar itens com três distratores que tenham um padrão de resposta ao item consistente com a ideia de plausibilidade.

Segundo estes autores, provavelmente não se justifica o esforço exigido para criar uma quarta opção nos itens EMC.

A esta ideia, de um eventual esforço desnecessário, não serão estranhas as conclusões de um estudo efetuado por Haladyna e Downing (1988) no sentido de analisarem a funcionalidade dos distratores[1] de um teste de conhecimentos estandardizado (aplicado a

[1] Entendem por ***distrator funcional*** uma opção de resposta errada que é selecionada por mais de 5% dos indivíduos, tem discriminação negativa com o desempenho total do teste e, além disso, quanto mais elevada a pontuação de um indivíduo, menor é a probabilidade de ele escolher essa opção (alguns autores consideram que um distrator é funcional desde que verifique a primeira destas condições).

médicos dos Estados Unidos da América). Nesse estudo, os avaliados foram divididos em três grupos, em função da pontuação obtida, e constatou-se o seguinte: na terça parte dos avaliados com melhores resultados, o mais frequente foi haver um distrator funcional por item, entre as quatro respostas erradas; aconteceu o mesmo no grupo que teve pontuações intermédias; no grupo das piores pontuações, surgiram, frequentemente, um ou dois distratores funcionais (apenas um item apresentou quatro).

Perante estes resultados, os autores do estudo concluíram que, num teste bem construído, é raro que um item de escolha múltipla tenha mais de dois distratores funcionais, os quais não contribuem, necessariamente, para melhorar as medidas de avaliação. Defendem, assim, a construção de itens EMC com três opções – a resposta certa e dois distratores funcionais.

Argumentando a favor dos itens EMC com três alternativas de resposta, Rodriguez (2005) publicou um artigo onde relata o trabalho que desenvolveu no sentido de analisar estudos, sobre o número de opções de um item EMC, publicados entre 1925 e 1999. A estimativa dos efeitos da redução do número de opções (de 5 para 4, 3 ou 2 e de 4 para 3 ou 2) nas propriedades metrológicas dos itens e dos testes revelou que mais de duas opções de resposta erradas pouco melhoram o item e o teste e, normalmente, revertem em distratores não plausíveis. Refira-se, em particular, que não se verificou a maior probabilidade de um estudante acertar por acaso na resposta certa quando tem três opções, em vez de quatro ou cinco - não é provável que o estudante se envolva em palpites cegos, mas sim que procure os distratores menos plausíveis que deve eliminar, reduzindo, assim, as quatro ou cinco opções para três ou duas.

Partindo de um teste constituído por itens EMC com duas alternativas de resposta, às quais foram acrescentando um, dois e três distratores, de acordo com as diretrizes de escrita de itens, também Trevisan, Sax e Michael (1994) mostraram a eficácia dos itens EMC com três alternativas de resposta, em particular quanto à fiabilidade dos resultados do teste.

Apêndice C

MODELO DE RASCH: DOS DADOS EMPÍRICOS ÀS MEDIDAS ESTIMADAS

O modelo de Rasch é considerado o primeiro modelo da Teoria da Resposta ao Item (TRI). Foi apresentado, em 1960, por Georg Rasch (1901-1980) - matemático dinamarquês que iniciou os seus trabalhos na área da psicometria em 1945, quando ajudou a construir um teste de inteligência estandardizado para o Departamento de Defesa dinamarquês (Wright, 1998).

O modelo de Rasch, tal como os outros modelos da TRI, permite construir uma escala para medir o nível de um indivíduo num determinado construto latente. A medida obtida corresponde ao resultado das respostas que ele deu aos itens de um teste (o instrumento de medida) com características que legitimam a identificação do desempenho de um participante (pontuação) com o seu nível no construto em questão (medido na escala). Os itens que definem a escala terão sido calibrados a partir do padrão de respostas de uma amostra suficientemente grande (500 ou mais indivíduos, segundo Muñiz (2010)).

Tal como a medida dos indivíduos não pode depender do instrumento de medida utilizado, também a medida do item, a sua dificuldade, não pode depender dos elementos da amostra. Os itens do teste também devem ser independentes entre si, isto é, nenhum deve conter informação que possa ser utilizada para responder a outro. Além deste pressuposto, o modelo de Rasch admite que há apenas um construto dominante responsável pelo desempenho dos indivíduos no teste e que a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um item depende exclusivamente do seu nível no construto medido e do nível de dificuldade do item (o parâmetro do modelo).

O modelo de Rasch, definido por uma função logística, permite prever a probabilidade de sucesso de um indivíduo que responde a um determinado item. Considere-se a sua dedução sugerida por Wright e Stone (1999).

C.1 Dedução do Modelo de Rasch

Admita-se que um teste é aplicado a uma amostra de indivíduos, suficientemente grande, e com apenas um fator a variar entre eles (no mesmo sentido em que se despreza o peso das pessoas quando apenas há interesse em medir a sua altura). Fixem-se dois itens, i e j, que foram respondidos corretamente por alguns indivíduos, mas não por todos. Como se acredita que um item resolvido corretamente é mais fácil do que um item resolvido incorretamente, pelo mesmo indivíduo, considerem-se apenas os indivíduos da amostra que responderam de modo diferente a estes itens (os que se podem comparar).

Representando por N_{ij} o número de indivíduos que responderam corretamente ao item i e incorretamente ao item j ($i = 1, j = 0$) e por N_{ji} os que responderam corretamente ao j e incorretamente ao i ($i = 0, j = 1$), têm-se as seguintes razões:

$$\frac{N_{ij}}{N_{ij}+N_{ji}} \quad \text{e} \quad \frac{N_{ji}}{N_{ij}+N_{ji}}$$

Observe-se que $\frac{N_{ij}}{N_{ji}}$ indica a diferença de dificuldade entre os itens i e j (se $\frac{N_{ij}}{N_{ji}} = 9$, isso significa que por cada nove respostas certas ao item i há uma certa ao j) .

As frequências relativas $\frac{N_{ij}}{N_{ij}+N_{ji}}$ e $\frac{N_{ji}}{N_{ij}+N_{ji}}$ podem ser extrapoladas conceptualmente para as probabilidades L_{ij} e L_{ji}, com L_{ij} a probabilidade de um indivíduo ter o resultado $i = 1, j = 0$, e L_{ji} a probabilidade de ter o resultado $i = 0, j = 1$.

Seja $\boldsymbol{P_{ni}} = f(n, i)$ **a probabilidade de o indivíduo *n* ter sucesso no item *i*** (de responder corretamente ao item i). Uma vez que as respostas dos indivíduos são independentes, a razão da comparação dos itens i e j, $\frac{L_{ij}}{L_{ji}}$, pode ser escrita na forma

$$\frac{L_{ij}}{L_{ji}} = \frac{P_{ni}(1 - P_{nj})}{(1 - P_{ni})P_{nj}}$$

A suposição de que a medida dos itens não depende dos indivíduos exige que a comparação da dificuldade dos itens i e j seja igual para qualquer par de indivíduos, tal como os indivíduos m e n, ou seja,

$$\frac{P_{ni}(1-P_{nj})}{(1-P_{ni})P_{nj}} \equiv \frac{P_{mi}(1-P_{mj})}{(1-P_{mi})P_{mj}}$$

Uma vez que os indivíduos e os itens são quaisquer, pode-se escolher para origem da escala das medidas dos indivíduos e para origem da escala das medidas dos itens o indivíduo $m = 0$ e o item $j = 0$, respetivamente, tais que $P_{mj} = P_{00} = 0{,}5$. Assim, substituindo m por 0 e j por 0 na seguinte igualdade, equivalente à anterior,

$$\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}} = \frac{P_{nj}}{1-P_{nj}} \times \frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} \times \frac{1-P_{mj}}{P_{mj}}$$

tem-se

$$\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}} = \frac{P_{n0}}{1-P_{n0}} \times \frac{P_{0i}}{1-P_{0i}} \times \frac{1-P_{00}}{P_{00}} = g(n) \times h(i) \times \frac{1-0{,}5}{0{,}5} = g(n) \times h(i)$$

Para indicar a relação entre o indivíduo n e o item i sob a forma de diferença, aplicam-se logaritmos à equação anterior:

$$ln\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right) = ln\big(g(n) \times h(i)\big) = ln\big(g(n)\big) + ln\big(h(i)\big)$$

Representando $ln\big(g(n)\big)$ por θ_n e $-ln\big(h(i)\big)$ por δ_i, vem que

$$ln\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right) = \theta_n - \delta_i$$

Resolvendo esta equação em ordem a P_{ni}, obtém-se o **Modelo de Rasch**:

$$P_{ni} = \frac{e^{\theta_n - \delta_i}}{1 + e^{\theta_n - \delta_i}}$$

Sendo θ_n o nível do indivíduo n na variável latente medida e δ_i o nível de dificuldade do item i utilizado para medir essa variável. De forma abreviada, θ_n e δ_i são a medida (de Rasch) do indivíduo n e a do item i, respetivamente.

C.2 Estimação do Nível dos Indivíduos e Calibragem dos Itens

Um teste só poderá ser um bom instrumento de medida se os seus itens estiverem calibrados, ou seja, se o nível de dificuldade dos itens estiver bem estimado, quando se tem por base o modelo de Rasch para a construção do teste. A calibragem de um conjunto de itens é feita a partir do padrão de respostas, a esses itens, dos indivíduos de uma amostra selecionada da população alvo. De um modo geral, desconhece-se o nível destes indivíduos na variável latente medida, no entanto, ele é necessário para calibrar os itens. Por esta razão, estimam-se em conjunto as medidas dos itens e dos indivíduos.

Existem processos para estimar manualmente as medidas dos indivíduos e dos itens. Citando Cohen (1976), Wright (1977) apresenta um método eficiente que, além das medidas estimadas também calcula os erros que lhes estão associados. Nesta secção apresenta-se outro método manual de estimação conjunta, menos rigoroso, mas que permite fazer uma primeira aproximação às medidas de Rasch, admitindo o ajustamento dos dados ao modelo. Foi apresentado por Prieto (2010) conforme se descreve:

Conhecidas as respostas de cada indivíduo a cada item do teste, eliminam-se os itens que não têm qualquer resposta certa e os que não têm qualquer resposta errada. Também se excluem os indivíduos que não acertaram qualquer item e os que acertaram os itens todos (a partir dos dados iniciais e dos que foram resultando das eliminações). Admita-se que se obtêm os seguintes dados, com os itens escritos por ordem decrescente de acertos (de facilidade):

Nº de itens respondidos corretamente	**X=1**	**X=2**	**X=3**	**X=4**	**X=5**
Nº de indivíduos	20	90	130	100	30

Itens	$\boldsymbol{I_1}$	$\boldsymbol{I_2}$	$\boldsymbol{I_3}$	$\boldsymbol{I_4}$	$\boldsymbol{I_5}$	$\boldsymbol{I_6}$
Nº de respostas certas	350	290	190	150	100	60

A partir dos dados observados, calcula-se, para cada par (I_i, X=n), a proporção de respostas certas ao item i dadas pelos indivíduos que acertaram n itens (p_{ni}).

Itens	Indivíduos	X=1	X=2	X=3	X=4	X=5
		20	90	130	100	30
I_1	350	0,39	0,59	0,79	0,9	0,98
I_2	290	0,22	0,45	0,7	0,89	0,95
I_3	190	0,1	0,3	0,64	0,7	0,84
I_4	150	0,05	0,2	0,5	0,65	0,72
I_5	100	0,03	0,08	0,28	0,5	0,64
I_6	60	0,01	0,04	0,12	0,4	0,52

Para cada entrada desta tabela (p_{ni}), calcula-se ln $\left(\frac{p_{ni}}{1-p_{ni}}\right)$, ou seja, $\theta_n - \delta_i$, com $n = 1, \ldots, 5$ e $i = 1, \ldots, 6$.

Itens	Indivíduos	X=1	X=2	X=3	X=4	X=5
		20	90	130	100	30
I_1	350	-0,45	0,36	1,32	2,20	3,89
I_2	290	-1,27	-0,20	0,85	2,09	2,94
I_3	190	-2,20	-0,85	0,58	0,85	1,66
I_4	150	-2,94	-1,39	0,00	0,62	0,94
I_5	100	-3,48	-2,44	-0,94	0,00	0,58
I_6	60	-4,60	-3,18	-1,99	-0,41	0,08

A média dos valores da coluna n, Mc_n, $n = 1, \ldots, 5$, é igual à diferença entre o nível dos indivíduos, no construto medido, que acertaram n itens, θ_n, e a média da dificuldade dos itens. Por outro lado, a média dos valores da linha i, Ml_i, $i = 1, \ldots, 6$, é igual à diferença entre a média do nível dos indivíduos e a dificuldade do item i, δ_i.

Para que, na escala *logit*, os itens com o valor médio da dificuldade se posicionem no zero, os mais fáceis abaixo de zero e os mais difíceis acima de zero, faz-se uma transformação linear do parâmetro de dificuldade estimado: $\boldsymbol{\delta_i = -(Ml_i - Mcl)}$, $i = 1, \ldots, 6$, com Mcl a média dos Ml_i, igual à dos Mc_n. Donde, $\boldsymbol{\theta_n = Mc_n - Mcl}$, para cada $n = 1, \ldots, 5$.

Com base nos resultados que se encontram na tabela seguinte, pode-se afirmar, por exemplo, que um indivíduo que tenha acertado dois itens tem um nível igual a $-1{,}03$ no construto medido; o nível de dificuldade do item mais fácil é igual a $-1{,}72$; só um indivíduo que tenha acertado cinco itens tem uma probabilidade superior a 0,5 de responder corretamente ao item mais difícil.

Itens	Indivíduos	X=1	X=2	X=3	X=4	X=5	Ml_i	$\boldsymbol{\delta_i}$
		20	90	130	100	30		
$\boldsymbol{I_1}$	350	-0,45	0,36	1,32	2,20	3,89	1,47	**-1,72**
$\boldsymbol{I_2}$	290	-1,27	-0,20	0,85	2,09	2,94	0,88	**-1,13**
$\boldsymbol{I_3}$	190	-2,20	-0,85	0,58	0,85	1,66	0,01	**-0,26**
$\boldsymbol{I_4}$	150	-2,94	-1,39	0,00	0,62	0,94	-0,55	**0,30**
$\boldsymbol{I_5}$	100	-3,48	-2,44	-0,94	0,00	0,58	-1,26	**1,01**
$\boldsymbol{I_6}$	60	-4,60	-3,18	-1,99	-0,41	0,08	-2,02	**1,77**
	Mc_n	-2,49	-1,28	-0,03	0,89	1,68	-0,25 ($\boldsymbol{Mcl}$)	**0,00**
	$\boldsymbol{\theta_n}$	**-2,24**	**-1,03**	**0,22**	**1,14**	**1,93**	**-**	

Os processos manuais estão longe de serem os mais eficientes para casos práticos, com amostras de grande dimensão. Nestas situações, para estimar as medidas dos indivíduos e dos itens, recorre-se à ajuda de programas informáticos, como o RUMM, o RASCAL ou o Winsteps, que utilizam métodos iterativos. Nesta investigação optou-se pelo último, de John M. Linacre. No manual deste programa (Linacre, 2012b) encontra-se a seguinte descrição do modo como ele faz a estimação do nível dos indivíduos e a calibragem dos itens.

Numa primeira fase da estimação, o Winsteps utiliza o algoritmo PROX (*Aproximação Normal*) que assume que o nível dos indivíduos e a dificuldade dos itens são variáveis normalmente distribuídas. Admitindo que N indivíduos respondem aos L itens do teste (se omitirem uma resposta, esta será considerada errada), que o seu nível no construto medido tem um valor médio μ_N e desvio padrão σ_N, e que a dificuldade média dos itens é igual a μ_L, com desvio padrão σ_L, as equações utilizadas são:

$$\theta_n = \mu_L + \ln\left(\frac{R_n}{L - R_n}\right) \times \sqrt{1 + \frac{\sigma_L^2}{2{,}9}}$$

onde θ_n é a medida estimada e R_n é a pontuação observada para a pessoa n;

$$\delta_i = \mu_N - \ln\left(\frac{R_i}{N - R_i}\right) \times \sqrt{1 + \frac{\sigma_N^2}{2{,}9}}$$

com δ_i a medida estimada para o item i e R_i o número de resposta certas ao item i.

Com os valores de θ_n e δ_i encontrados a partir dos dados empíricos, determinam-se "novas" medidas utilizando os valores encontrados no segundo membro das equações de estimação. As iterações terminam quando o aumento das medidas dos indivíduos ou dos itens, de uma iteração para a seguinte, é inferior a 0,5 *logit*.

As estimativas obtidas pelo PROX vão ser os valores iniciais do método de estimação de *Máxima Verosimilhança Conjunta*, que proporciona uma maior exatidão das estimativas. Com esses valores iniciais, o Winsteps calcula os valores esperados para cada observação, de acordo com o modelo de Rasch, e com eles faz novas estimativas. O processo de iteração termina quando converge, isto é, quando a diferença máxima entre os valores dos itens e dos indivíduos em iterações sucessivas tende para o mesmo valor. Espera-se que as medidas assim estimadas sejam as que tornam mais verosímeis as respostas dos indivíduos a cada item.

Este método também calcula os erros padrão das medidas estimadas, bem como estatísticas de ajuste dos dados empíricos ao modelo de Rach. O modelo só é útil, ou seja, os valores estimados só têm significado, para indivíduos e itens ajustados ao modelo.

Apêndice D

CONSENTIMENTO INFORMADO E GUIÃO DA ENTREVISTA

Para entrevistar os estudantes que participaram no estudo de casos realizado nesta investigação, organizou-se um Guião da Entrevista e um Consentimento Informado, que se apresentam neste apêndice.

O Consentimento Informado dá a conhecer, ao estudante, o objetivo da entrevista, o modo como ela será efetuada, assim como o tratamento e a confidencialidade dos dados a recolher. Caso o estudante aceite ser entrevistado, assina o Consentimento Informado como forma de reconhecimento da sua colaboração no estudo e autorização de uso das suas respostas no âmbito da investigação.

O Guião da Entrevista orienta o entrevistador na realização da entrevista, recordando-lhe as perguntas que deve fazer, e permite-lhe anotar respostas ou atitudes dos entrevistados.

Conhecimentos de Matemática dos Estudantes à Entrada do Ensino Superior de Ciências e Tecnologia: contributo para a definição de um perfil de exigências

Consentimento Informado

A investigação para a qual foi convidado(a) a participar tem o propósito de estudar o problema do ensino e da aprendizagem da Matemática na transição do ensino secundário para o ensino superior português, que professores e alunos, do primeiro ano dos cursos superiores de ciências e tecnologias, têm vindo a experimentar.

Será necessário estimar os conhecimentos de Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior, mas também é importante conhecer as suas emoções e atitudes em relação à Matemática, como a autoconfiança, o interesse e a vontade de a compreender. É ainda fundamental identificar os fatores que lhes facilitam o sucesso nesta área do saber, para se delinearem planos e métodos de atuação que contribuam para aproximar os níveis de ensino em questão.

Caro(a) estudante, solicitamos a sua participação nesta investigação respondendo, com sinceridade, às questões que lhe iremos colocar, sobre os conteúdos acima mencionados, e autorizando o registo das suas respostas sob a forma de gravação áudio.

Garantimos a confidencialidade de todos os dados recolhidos, os quais se destinam a ser tratados no conjunto da amostra, não de modo individual - o foco do estudo será a informação obtida, não as pessoas que participam no estudo.

A SUA PARTICIPAÇÃO É MUITO IMPORTANTE!

Li a informação que consta nesta ficha de Consentimento Informado e estou disposto(a) a participar nesta investigação.

Local da entrevista, 15.04.11

ASSINATURA: ____

Muito obrigado pela sua participação!

- GUIÃO DE ENTREVISTA -

Fatores de Sucesso e Dificuldades na Aprendizagem da Matemática

No âmbito da investigação *Conhecimentos de Matemática dos estudantes à entrada do ensino superior de ciências e tecnologias: contributo para a definição de um perfil de exigências*, pretende-se fazer um estudo de casos para identificar dificuldades sentidas pelos estudantes e fatores que lhes facilitam o sucesso em Matemática no início dos cursos. Também há interesse em conhecer a perspetiva dos estudantes em relação à transição da Matemática do ensino secundário para a do superior.

Com o objetivo de entrevistar estudantes para recolher dados que fundamentem o referido estudo, apresenta-se este documento para enquadrar e guiar essas entrevistas.

Os estudantes convidados a colaborar nesta pesquisa participaram nas duas aplicações do PMAT-01, a segunda versão experimental de um teste de conhecimentos de Matemática, e frequentam, pela 1.ª vez, o 1.º ano de cursos de Engenharia, aos quais se candidataram com o exame nacional de *Matemática A*. As entrevistas serão realizadas, individualmente e de forma semiestruturada, no decorrer no 2.º semestre de aulas destes alunos, altura em que já podem pronunciar-se acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática à entrada do ensino superior, fazer comparações com a disciplina de Matemática do ensino secundário e relatar a sua experiência da passagem de um para outro sistema de ensino.

Os estudantes a entrevistar dividem-se em dois grupos: o dos Melhores alunos (M) e o dos Piores alunos (P). O primeiro grupo é constituído pelos 14 alunos que obtiveram aproveitamento nas duas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre (*Álgebra Linear* e *Cálculo Diferencial e Integral I*) e as médias mais elevadas das respetivas classificações finais e das pontuações dos testes do PMAT-01; o segundo grupo é formado pelos 14 alunos que tiveram as piores classificações nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre e nos testes do PMAT-01, foram avaliados e reprovaram a, pelo menos, uma dessas unidades e melhoraram a pontuação da 1.ª para a 2.ª aplicação do PMAT-01.

Dado que as entrevistas são semiestruturadas, o meio de comunicação oral é o mais adequado. As entrevistas devem ser presenciais e realizadas nas instalações da universidade que os alunos frequentam.

No momento da entrevista, o entrevistador já conhece alguns dados do entrevistado, dos quais se deve fazer acompanhar. Nomeadamente, dados pessoais recolhidos nas folhas de resposta do PMAT-01 e as notas ponderadas no acesso ao ensino superior que se encontram em http://www.dges.mctes.pt/coloc/2010/, o *site* da Direção Geral do Ensino Superior. As classificações nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre e no PMAT-01, consideradas na seleção dos participantes neste estudo, também devem ser levadas para a entrevista. Concretamente, na preparação da conversa que vai desenvolver com o entrevistado, o entrevistador deve registar e considerar o seguinte:

Dados Pessoais

Instituição de Ensino que frequenta -

Curso em que está inscrito -

N.º do Bilhete de Identidade/Cartão de Cidadão -

Ano de Nascimento -

Género -

Classificações

Na candidatura ao ensino superior:

Nota de candidatura - Prova de Ingresso -

Média do 12.º ano - Média do 10.º/11.º anos -

Nos testes PMAT-01 :

1.ª Aplicação - 2.ª Aplicação -

Nas unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre :

Cálculo Diferencial e Integral I - Álgebra Linear -

Foram as classificações destas unidades curriculares que determinaram se o entrevistado integra o grupo dos estudantes com mais sucesso ou o grupo com mais dificuldades a Matemática. Por consequência, também são elas que motivam o entrevistador a selecionar as perguntas que se apresentam de seguida.

A Entrevista

Depois de saudar o entrevistado, o entrevistador deve informá-lo do que pretende e do objetivo da entrevista, de que a sua identidade e as suas respostas são confidenciais e ainda da importância da sua colaboração para esta investigação. Deve ainda pedir-lhe autorização para gravar a entrevista e que assine o Consentimento Informado, que lhe apresentará. Caso a gravação não seja autorizada, a entrevista será registada em papel.

0. Dados da entrevista

a. Local da entrevista -
b. Data da entrevista -
c. Hora do início da entrevista -
d. Tipo de entrevistado (M ou P) -

1. Do Ensino Secundário

a. Qual foi o curso que frequentou no ensino secundário?
b. Qual foi a sua classificação na disciplina de *Matemática* no 3.º período do
11.º ano de escolaridade? 12.º ano de escolaridade?
c. Quantos anos decorreram desde que concluiu o ensino secundário até à sua inscrição neste curso? (Só para o aluno com 25 anos)
d. Enquanto frequentou o ensino secundário, participou em atividades extra-curriculares de Matemática?
Se sim, quais?

2. História Pessoal da Relação com a Matemática

a. Acha que, no ensino secundário, era um bom aluno a Matemática?
b. As suas classificações eram regulares ou teve "altos" e "baixos"?
Se teve "altos" e "baixos", que fatores determinaram essas variações?
c. Os seus familiares tiveram alguma influência na sua aprendizagem da Matemática?
Se sim, de que modo?
d. Pode identificar (outros) fatores que influenciaram positivamente a sua aprendizagem da Matemática?
e. A Matemática foi determinante na escolha do curso que está a frequentar?
Se sim, de que modo?

f. Antes de iniciar as aulas do curso que frequenta,
   i. Como avaliava a sua preparação para estudar as disciplinas de Matemática do curso?
   ii. Como avaliava o seu relacionamento com a Matemática?
   iii. Gostava de Matemática?

g. Neste momento de frequência no curso,
   i. Como avalia a sua preparação pré-universitária para estudar as disciplinas de Matemática do curso?
   ii. Como avalia o seu relacionamento com a Matemática?
   iii. Gosta de Matemática?
   iv. Qual a importância da Matemática nas outras disciplinas do seu curso?

3. A Matemática no Ensino Superior

3.1. O PMAT

a. Qual a sua opinião sobre o 1.º teste do PMAT?

b. Teve mais facilidade em resolver o 2.º teste do PMAT do que o 1.º?

3.2. Funcionamento

Relativamente a cada uma das unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, qual é a sua opinião acerca

a. Do número de horas de aulas;

b. Da quantidade de matéria lecionada por aula;

c. Da não autorização de utilizar calculadora;

d. Da utilização, obrigatória ou opcional, de *software* de Matemática (*Mathematica, Maple*, etc.);

e. Do material de estudo disponível
   i. Quanto à quantidade,
   ii. Quanto à qualidade;

f. Do método de ensino;

g. Do sistema de avaliação
   i. Número de momentos de avaliação,
   ii. Nível de dificuldade dos testes,
   iii. Correcção dos testes;

h. Da relação do aluno com o(s) professor(es).

3.3. Aprendizagem

a. Para aprender as matérias das unidades curriculares de Matemática do 1.º semestre, sentiu alguma dificuldade?

   i. Se sim, ou algumas,

      - Identifique as causas
      - Em que tipo de matérias teve mais dificuldades?
      - Conseguiu superar todas essas dificuldades até ao final do 1.º semestre? Se não, continua a ter dificuldades em quais?

   ii. Se não, gosta mais de estudar Matemática no ensino superior do que no secundário?

b. Na sua opinião, ter notas entre 10 e 13 a *Matemática* no ensino secundário é suficiente para compreender a Matemática do ensino superior?

   Se não, acha que o ensino secundário não prepara bem os alunos para o ensino superior? Acha que o ensino superior é demasiado exigente?

3.4. Aproveitamento

Para os entrevistados com piores classificações:

Qual a razão, ou razões, por que não obteve melhores classificações às disciplinas de Matemática do 1.º semestre?

Para os entrevistados com melhores classificações:

No seu entender, a que se deve o sucesso que obteve nas disciplinas de Matemática do 1.º semestre?

4. *As Dificuldades a Matemática*

a. O que lhe parece que em geral "assusta" os estudantes nas disciplinas de Matemática?
b. Que tipo de dificuldades acha que enfrenta uma grande parte dos alunos do ensino superior nas disciplinas de Matemática?
c. Como pensa que se poderia promover o sucesso dos alunos com dificuldades em Matemática?
d. Quais lhe parecem ser os fatores críticos sem os quais um aluno não consegue alcançar sucesso na Matemática?

Fim da Entrevista

O entrevistador dá por terminada a entrevista, agradece a colaboração do entrevistado e pergunta-lhe se pretende acrescentar alguma informação ou sugestão. Após o registo desses comentários adicionais, caso existam, o entrevistador faz a última pergunta:

Validação da Entrevista

Pode dar-me a sua opinião sobre o conteúdo e a orientação desta entrevista?

Apêndice E

TABELAS

Neste apêndice encontram-se tabelas com informação complementar à que se apresenta nos Capítulos 3 e 4. As tabelas que se referem ao Capítulo 3 caracterizam os participantes no PMAT (secção 3.4); as outras tabelas contêm dados que se utilizam no estudo metrológico do PMAT (secção 4.1.2).

No cabeçalho de cada página identifica-se o capítulo a que pertence cada tabela.

Tabela E.1 - Caracterização dos participantes no PMAT-00: Idade/Género/Exame de Matemática

Teste	Género	IDADE ≤17	18	19	20	21	22	23	24-25	26-29	≥30	Total
PMAT-00	**M**	19	878	70	15	3	3	1	0	1	4	994
	F	7	352	39	6	0	0	1	0	1	0	406
Mat A	Total	26	**1230 (87,86%)**	109 **(7,79%)**	21	3	3	2	0	2	4	35
	M	2	13	7	3	1	2	0	0	1	0	29
	F	1	19	8	0	0	0	0	0	0	0	28
Mat B	Total	3	32	15	3	1	2	0	0	1	0	57
	M	0	14	4	4	7	4	8	6	6	22	75
	F	1	8	2	1	1	1	0	1	2	0	17
Mat X	Total	1	22	6	5	8	5	8	7	8	22	92
Total		30 (1,94%)	**1284 (82,89%)**	130 **(8,39%)**	29	12	10	10	7	11	26	1549

Tabela E.2 - Caracterização dos participantes no PMAT-01: Idade/Género/Exame de Matemática

Teste	Género	IDADE ≤17	18	19	20	21	22	23	24-25	26-29	≥30	Total
PMAT-01	**M**	24	1111	128	22	9	7	3	2	1	2	1309
	F	10	489	67	13	3	5	0	1	0	1	589
Mat A	Total	34	**1600 (84,30%)**	195 **(10,27%)**	35	12	12	3	3	1	3	1898
	M	0	35	15	1	2	2	2	0	1	2	60
	F	0	28	5	1	1	0	0	0	0	0	35
Mat B	Total	0	63	20	2	3	2	2	0	1	2	95
	M	0	19	5	0	0	5	1	1	2	1	34
	F	0	4	1	0	2	0	0	0	0	1	8
Mat X	Total	0	23	6	0	2	5	1	1	2	2	42
Total		34 (1,67%)	**1686 (82,85%)**	221 **(10,86%)**	37	17	19	6	4	4	7	2035

Tabela E.3 - Caracterização dos participantes no PMAT-02: Idade/Género/Exame de Matemática

Teste	Género	IDADE ≤17	18	19	20	21	22	23	24-25	26-29	≥30	Total
PMAT-02	**M**	25	1144	127	28	11	5	1	1	0	1	1343
	F	10	522	63	11	2	0	1	0	0	0	609
Mat A	Total	35	**1666 (85,35%)**	**190 (9,73%)**	39	13	5	2	1	0	1	1952
	M	1	24	14	7	1	0	0	1	1	0	49
	F	0	19	3	0	0	0	1	0	0	0	23
Mat B	Total	1	43	17	7	1	0	1	1	1	0	72
	M	0	22	6	3	0	1	0	2	1	0	35
	F	1	18	8	2	0	0	0	0	0	0	29
Mat X	Total	1	40	14	5	0	1	0	2	1	0	64
Total		37 (1,77%)	**1749 (83,76%)**	**221 (10,58%)**	51	14	6	3	4	2	1	2088

Tabela E.4 - Caracterização dos participantes no PMAT-03: Idade/Género/Exame de Matemática

Teste	Género	IDADE ≤17	18	19	20	21	22	23	24-25	26-29	≥30	Total
PMAT-03	**M**	33	1092	115	15	4	3	0	1	2	2	1267
	F	17	510	72	9	4	0	0	0	0	0	612
Mat A	Total	50 (2,66%)	**1602 (85,26%)**	**187 (9,95%)**	24	8	3	0	1	2	2	1879
	M	0	11	5	0	0	0	0	0	0	0	16
	F	0	11	2	1	0	0	0	0	0	0	14
Mat B	Total	0	22	7	1	0	0	0	0	0	0	30
	M	0	24	2	3	1	0	0	2	0	1	33
	F	0	6	2	1	0	0	0	0	0	0	9
Mat X	Total	0	30	4	4	1	0	0	2	0	1	42
Total		50 (2,56%)	**1654 (84,78%)**	**198 (10,15%)**	29	9	3	0	3	2	3	1951

Tabela E.5 - Medida média dos estudantes e correlação pontuação-medida por alternativa de resposta

ANÁLISE DE ITENS (Medidas de Rasch) MEDIDA MÉDIA DOS ESTUDANTES; CORRELAÇÃO *PONTUAÇÃO - MEDIDA* Amostra-Rasch (n=1211)											
Item	**Op.**	**%**	**Med. Média**	**S.E.**	**Pt-Me (r)**	**Item**	**Op.**	**%**	**Med. Média**	**S.E.**	**Pt-Me (r)**
1- PE.B	O	0	-	-	-	**2- Al.B**	O	1	-1,0	0,19	-0,14
	C	9	-0,47	0,06	-0,24		C	7	-0,56	0,06	-0,24
	A	16	-0,34	0,05	-0,25		A	15	-0,34	0,05	-0,24
	B	75	0,30	0,03	0,37		**B**	77	0,30	0,03	0,38
3- Al.B	O	2	-0,72	0,13	-0,15	**4- Al.B**	O	2	-0,48	0,21	-0,11
	B	14	-0,35	0,05	-0,24		C	17	-0,31	0,04	-0,25
	C	15	-0,27	0,05	-0,20		A	36	-0,02	0,03	-0,14
	A	69	0,34	0,03	0,38		**B**	45	0,45	0,04	0,36
5- Al.B	C	22	-0,29	0,04	-0,27	**6- An.B**	O	0	-0,98	0,53	-0,10
	O	1	-0,27	0,16	-0,06		C	13	-0,33	0,06	-0,23
	B	25	-0,23	0,04	-0,26		A	15	-0,24	0,05	-0,19
	A	51	0,50	0,03	0,47		**B**	71	0,30	0,03	0,34
7- An.B	O	1	-0,59	0,24	-0,10	**8 - An.B**	O	2	-0,65	0,15	-0,15
	A	13	-0,40	0,05	-0,25		C	12	-0,27	0,05	-0,18
	B	25	-0,24	0,04	-0,27		B	27	-0,07	0,04	-0,15
	C	61	0,41	0,03	0,43		**A**	58	0,33	0,03	0,30
9- An.B	O	2	-0,65	0,16	-0,13	**10- Geo.B**	O	1	-1,03	0,41	-0,12
	A	15	-0,39	0,05	-0,26		C	6	-0,50	0,07	-0,20
	B	47	0,03	0,03	-0,11		B	28	-0,20	0,04	-0,25
	C	36	0,50	0,04	0,34		**A**	65	0,34	0,03	0,36
11- Geo.B	O	2	-0,48	0,17	-0,11	**12- PE.M**	C	16	-0,35	0,05	-0,26
	C	7	-0,42	0,06	-0,19		A	13	-0,35	0,05	-0,23
	A	30	-0,14	0,04	-0,22		O	1	-0,20	0,36	-0,03
	B	61	0,35	0,03	0,33		**B**	70	0,33	0,03	0,38
13- PE.M	O	0	-0,88	0,27	-0,08	**14- LC.M**	O	0	-1,01	0,51	-0,09
	B	7	-0,25	0,09	-0,13		A	2	-0,37	0,16	-0,09
	A	38	-0,07	0,03	-0,19		B	62	-0,01	0,03	-0,23
	C	55	0,32	0,03	0,26		**C**	36	0,42	0,04	0,26
15- An.M	O	2	-0,61	0,18	-0,13	**16- Al.M**	O	1	-1,13	0,16	-0,18
	B	22	-0,27	0,04	-0,26		C	19	-0,33	0,04	-0,28
	A	20	-0,17	0,04	-0,19		B	27	0,06	0,04	-0,05
	C	56	0,42	0,03	0,41		**A**	53	0,37	0,03	0,31
17- Al.M	O	4	-0,40	0,13	-0,13	**18- Al.M**	O	4	-0,74	0,10	-0,22
	C	20	-0,26	0,04	-0,24		A	19	-0,22	0,04	-0,21
	B	23	-0,13	0,04	-0,18		B	25	-0,10	0,04	-0,16
	A	53	0,43	0,03	0,39		**C**	52	0,44	0,03	0,39

Tabela E.5 - Medida média dos estudantes e correlação pontuação-medida por alternativa de resposta (cont.)

ANÁLISE DE ITENS (Medidas de Rasch) MEDIDA MÉDIA DOS ESTUDANTES; CORRELAÇÃO *PONTUAÇÃO - MEDIDA* Amostra-Rasch (n=1211)											
Item	**Op.**	**%**	**Med. Média**	**S.E.**	**Pt-Me (r)**	**Item**	**Op.**	**%**	**Med. Média**	**S.E.**	**Pt-Me (r)**
19- Al.M	O	3	-0,50	0,15	-0,13	**20- An.M**	O	3	-0,45	0,13	-0,13
	B	25	-0,13	0,04	-0,18		B	26	-0,21	0,04	-0,25
	C	27	-0,05	0,04	-0,13		A	17	-0,14	0,04	-0,15
	A	46	0,41	0,04	0,32		**C**	54	0,42	0,03	0,38
21- An.M	O	2	-0,54	0,14	-0,12	**22- An.M**	O	2	-0,65	0,22	-0,12
	A	24	-0,15	0,04	-0,20		B	17	-0,34	0,05	-0,26
	B	28	-0,11	0,04	-0,18		A	48	0,09	0,03	-0,05
	C	46	0,45	0,03	0,37		**C**	33	0,47	0,04	0,29
23- An.M	O	2	-0,51	0,26	-0,10	**24- An.M**	O	3	-0,36	0,13	-0,10
	C	17	-0,20	0,05	-0,18		B	18	-0,11	0,05	-0,14
	B	60	0,06	0,03	-0,11		C	35	-0,04	0,04	-0,15
	A	22	0,64	0,06	0,33		**A**	44	0,39	0,04	0,29
25- Geo.M	O	1	-1,03	0,17	-0,18	**26- Geo.M**	O	5	-0,45	0,11	-0,16
	A	5	-0,36	0,08	-0,14		A	20	-0,27	0,04	-0,25
	B	26	-0,14	0,04	-0,20		B	17	-0,02	0,06	-0,08
	C	67	0,30	0,03	0,30		**C**	59	0,35	0,03	0,33
27- Geo.M	O	4	-0,43	0,11	-0,14	**28- PE.E**	O	3	-0,41	0,16	-0,11
	A	27	-0,07	0,04	-0,15		A	36	0,00	0,04	-0,12
	C	19	0,00	0,05	-0,08		C	29	0,02	0,04	-0,09
	B	50	0,33	0,03	0,25		**B**	32	0,41	0,05	0,24
29- Al.E	O	3	-0,71	0,17	-0,18	**30- An.E**	O	3	-0,67	0,12	-0,19
	A	14	-0,43	0,04	-0,28		B	21	-0,09	0,04	-0,14
	C	30	-0,02	0,04	-0,12		C	28	-0,08	0,04	-0,16
	B	53	0,41	0,03	0,37		**A**	47	0,41	0,03	0,33
31- An.E	O	4	-0,65	0,12	-0,20	**32- Geo.E**	O	6	-0,51	0,10	-0,19
	A	15	-0,03	0,06	-0,08		C	37	0,02	0,03	-0,10
	C	37	0,02	0,03	-0,10		A	17	0,04	0,05	-0,05
	B	44	0,35	0,04	0,24		**B**	40	0,36	0,04	0,23

Legenda:

Op. - alternativas de resposta ao item, com O a indicar resposta omissa e a resposta certa grafada a negrito;

% - percentagem de respostas dadas a cada alternativa de resposta;

Med. Média - média da medida dos estudantes que escolheram a alternativa de resposta, em relação à dificuldade do item; **S.E.** - erro padrão da medida média;

Pt-Me - correlação entre a pontuação na alternativa de resposta (1 ou 0) e a medida estimada dos estudantes.

Tabela E.6 - Funcionamento diferencial dos itens relativamente ao género

FUNCIONAMENTO DIFERENCIAL DOS ITENS RELATIVAMENTE AO GÉNERO DIFERENÇAS SIGNIFICATIVAS ENTRE A DIFICULDADE DOS ITENS Amostra-Rasch (Feminino/F: n=423; Masculino/M: n=788)									
Item	**Medida DIF**		**DIF Contraste**	**Prob.**	**Item**	**Medida DIF**		**DIF Contraste**	**Prob.**
	F	**M**				**F**	**M**		
1-PE.B	-1,19	-1,07	-0,12	0,4069	**2-Al.B**	-1,34	-1,14	-0,19	0,1918
3-Al.B	-0,51	-0,96	0,44	0,0010	**4-Al.B**	0,56	0,27	0,29	0,0276
5-Al.B	0,22	-0,02	0,24	0,0647	**6-An.B**	-0,98	-0,84	-0,14	0,3105
7-An.B	-0,05	-0,57	**0,52**	**0,0001**	**8 - An.B**	-0,65	-0,05	**-0,60**	**0,0000**
9-An.B	0,99	0,65	0,34	0,0140	**10-Geo.B**	-0,57	-0,59	0,03	0,8298
11-Geo.B	-0,38	-0,38	0,00	1,000	**12-PE.M**	-0,80	-0,90	0,10	0,4882
13-PE.M	-0,13	-0,07	-0,06	0,6602	**14-LC.M**	0,69	0,82	-0,13	0,3439
15-An.M	-0,15	-0,15	0,00	1,000	**16-Al.M**	0,05	-0,04	0,09	0,4995
17-Al.M	-0,24	0,09	-0,34	0,0087	**18-Al.M**	-0,03	0,06	-0,10	0,4471
19-Al.M	0,53	0,20	0,34	0,0101	**20-An.M**	0,06	-0,12	0,18	0,1613
21-An.M	0,20	0,39	-0,19	0,1443	**22-An.M**	0,99	0,90	0,09	0,5197
23-An.M	1,43	1,66	-0,22	0,1461	**24-An.M**	0,20	0,50	-0,31	0,0176
25-Geo.M	-0,85	-0,57	-0,28	0,0411	**26-Geo.M**	-0,08	-0,43	0,35	0,0065
27-Geo.M	0,05	0,15	-0,10	0,4295	**28-PE.E**	0,91	1,01	-0,10	0,4553
29-Al.E	0,11	-0,11	0,23	0,0780	**30-An.E**	0,23	0,23	0,00	1,000
31-An.E	0,39	0,39	0,00	1,000	**32-Geo.E**	0,32	0,71	-0,39	0,0025

Legenda:

Medida DIF: medida do item para cada um dos grupos;

DIF Contraste: diferença da dificuldade do item entre os grupos;

Prob.: probabilidade de observar o valor do contraste por acaso.

Critério para identificar a sensibilidade diferencial de um item: **|DIF Contraste|** $\geq \mathbf{0,5}$ **e Prob.** $<$ 0,05.

Tabela E.7 - Análise do funcionamento diferencial dos itens relativamente à universidade

FUNCIONAMENTO DIFERENCIAL DOS ITENS RELATIVAMENTE À UNIVERSIDADE DIFERENÇAS SIGNIFICATIVAS ENTRE A DIFICULDADE DOS ITENS Amostra-Rasch (U1: n=599; U2: n=120; U3: n=492)														
Item	U1-U2		U1-U3		U2-U3			Item	U1-U2		U1-U3		U2-U3	
	DIF Contr.	Prob.	DIF Contr.	Prob.	DIF Contr.	Prob.			DIF Contr.	Prob.	DIF Contr.	Prob.	DIF Contr.	Prob.
1-PE.B	0,51	0,0631	-0,25	0,0948	**-0,76**	**0,0055**		2-Al.B	0,13	0,6400	-0,37	0,0161	-0,49	0,0610
3-Al.B	0,17	0,4837	-0,33	0,0190	-0,50	0,0379		4-Al.B	-0,23	0,2888	0,26	0,0456	0,49	0,0274
5-Al.B	0,03	0,8865	**-0,64**	**0,0000**	**-0,67**	**0,0023**		6-An.B	0,37	0,1329	0,07	0,6092	-0,30	0,2248
7-An.B	-0,34	0,1163	-0,16	0,2233	0,18	0,4133		8 -An.B	0,01	0,9657	0,21	0,1067	0,20	0,3508
9-An.B	**-0,78**	**0,0016**	0,15	0,2620	**0,93**	**0,0002**		10-Geo.B	-0,41	0,0634	-0,15	0,2818	0,26	0,2328
11-Geo.B	-0,25	0,2407	0,01	0,9170	0,27	0,2181		12-PE.M	0,30	0,2320	-0,23	0,1033	**-0,52**	**0,0328**
13-PE.M	0,48	0,0262	0,27	0,0383	-0,21	0,3274		14-LC.M	**1,01**	**0,0000**	-0,06	0,6660	**-1,07**	**0,0000**
15-An.M	0,08	0,6938	-0,08	0,5647	-0,16	0,4611		16-Al.M	0,20	0,3432	**0,63**	**0,0000**	0,43	0,0481
17-Al.M	0,08	0,7074	0,06	0,6308	-0,02	0,9356		18-Al.M	-0,12	0,5569	-0,27	0,0415	-0,14	0,5072
19-Al.M	0,09	0,6660	0,13	0,7298	-0,14	0,5278		20-An.M	-0,22	0,2925	-0,08	0,5246	0,14	0,5122
21-An.M	-0,46	0,0356	0,06	0,6363	**0,52**	**0,0194**		22-An.M	0,05	0,8105	0,25	0,0753	0,19	0,4108
23-An.M	-0,16	0,5379	0,13	0,4241	0,29	0,2940		24-An.M	0,17	0,4099	0,15	0,2484	-0,02	0,9119
25-Geo.M	0,04	0,8617	-0,06	0,6865	-0,09	0,6760		26-Geo.M	-0,38	0,0761	-0,18	0,1693	0,20	0,3552
27-Geo.M	0,11	0,5897	0,00	1,000	-0,11	0,5958		28-PE.E	-0,04	0,8715	0,03	0,8434	0,06	0,7839
29-Al.E	-0,15	0,4808	-0,16	0,2346	-0,01	0,9795		30-An.E	-0,01	0,9739	0,15	0,2578	0,15	0,4770
31-An.E	-0,21	0,3389	0,25	0,0596	0,45	0,0415		32-Geo.E	-0,03	0,8785	0,21	0,1119	0,24	0,2748

Legenda:

DIF Contraste (DIF Contr.): diferença da dificuldade do item entre os grupos;

Prob.: probabilidade de observar o valor do contraste por acaso.

Critério para identificar a sensibilidade diferencial de um item: **|DIF Contraste|** $\geq \mathbf{0,5}$ **e Prob.**$<$ 0,05.

Tabela E.8 - Respostas certas, erradas e omissas por item, no teste e reteste do PMAT-01

ITENS	TESTE E RETESTE DO PMAT-01: RESPOSTAS AOS ITENS (N=71)					
	Respostas Certas		Respostas Erradas		Respostas Omissas	
	Teste	Reteste	Teste	Reteste	Teste	Reteste
1 - PE.B	44	**45**	27	26	0	0
2 - PE.B	47	46	22	22	2	3
3 - Al.B	52	**62**	18	9	1	0
4 - Al.B	28	**43**	41	28	2	0
5 - Al.B	35	**37**	35	34	1	0
6 - Al.B	53	**60**	17	11	1	0
7 - An.B	36	**47**	34	24	1	0
8 - An.B	52	**59**	17	12	2	0
9 - An.B	29	**46**	39	23	3	2
10 - An.B	45	43	25	28	1	0
11 - Geo.B	16	**17**	53	53	2	1
12 - Geo.B	32	**32**	37	39	2	0
13 - LC.B	26	**54**	44	17	1	0
14 - PE.M	55	**55**	16	16	0	0
15 - PE.M	33	31	38	40	0	0
16 - An.M	33	**48**	35	23	3	0
17 - Al.M	18	**23**	46	46	7	2
18 - Al.M	20	18	47	52	4	1
19 - Al.M	31	**40**	38	29	2	2
20 - Al.M	33	29	35	40	3	2
21 - Al.M	29	25	42	44	0	2
22 - An.M	38	32	30	37	3	2
23 - An.M	26	20	44	50	1	1
24 - An.M	43	42	27	27	1	2
25 - An.M	14	**27**	53	42	4	2
26 - An.M	20	19	51	51	0	1
27 - An.M	16	**18**	52	52	3	1
28 - An.M	29	26	42	44	0	1
29 - LC.M	19	**47**	50	23	2	1
30 - Geo.M	57	**61**	14	9	0	1
31 - Geo.M	38	**45**	31	26	2	0
32 - Geo.M	50	45	20	25	1	1
33 - Geo.M	21	20	50	49	0	2
34 - PE.E	31	18	38	51	2	2
35 - Al.E	29	24	40	42	2	5
36 - Al.E	14	**25**	54	43	3	3
37 - Al.E	27	26	42	40	2	5
38 - An.E	21	**27**	47	39	3	5
39 - An.E	33	29	36	37	2	5
40 - Geo.E	17	**21**	49	43	5	7

Nota: Os números grafados a negrito assinalam o mesmo ou maior número de respostas certas no reteste do que no teste.

Tabela E.9 - Correlações entre as escalas da MSPSE e os resultados do PMAT-01

ESCALA MULTIDIMENSIONAL DE AUTO-EFICÁCIA PERCEBIDA **Correlações com as Pontuações do PMAT** r (*p-value*)		
ESCALAS	**PMAT-01** (n=69*)	
	Teste	**Reteste**
Auto-eficácia para a obtenção de recursos sociais (4 itens)	0,02 (0,857)	0,05 (0,669)
Auto-eficácia para o sucesso académico (9 itens)	-0,01 (0,913)	0,07 (0,574)
Auto-eficácia para a aprendizagem auto-regulada (11 itens)	0,08 (0,523)	0,19 (0,111)
Auto-eficácia para os tempos livres e actividades extra-curriculares (8 itens)	-0,04 (0,737)	0,02 (0,865)
Eficácia auto-regulatória (9 itens)	-0,10 (0,418)	-0,06 (0,603)
Auto-eficácia para ir ao encontro das expectativas dos outros (4 itens)	0,03 (0,790)	0,25 (0,041)
Auto-eficácia social (4 itens)	-0,03 (0,816)	0,17 (0,167)
Eficácia auto-assertiva (4 itens)	0,08 (0,506)	0,11 (0,352)
Auto-eficácia para a obtenção de recursos parentais e comunitários (4 itens)	-0,01 (0,954)	0,04 (0,747)

* Foram eliminados dois casos da amostra teste-reteste por terem mais de duas respostas omissas na *MSPSE*.

ANEXO

Testes de Acesso ao Ensino Superior

EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO
2009

2

ENEM
EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO
UM ENSAIO PARA A VIDA

Prova de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Redação
Prova de Matemática e suas Tecnologias

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES SEGUINTES

1. Este CADERNO DE PROVAS contém a Proposta de Redação, a Prova de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e a Prova de Matematica e suas Tecnologias, cada uma delas contendo 45 questões objetivas de múltipla escolha.
2. Fazem parte deste CADERNO DE PROVAS a FOLHA DE RESPOSTAS, destinada à marcação das respostas da parte objetiva e a FOLHA DE REDAÇÃO para elaboração da Redação.
3. Destaque, no local indicado neste Caderno, a FOLHA DE RESPOSTAS e a FOLHA DE REDAÇÃO e verifique se os seus dados estão corretamente registrados no cabeçalho de cada uma dessas Folhas. Em caso de divergência, notifique imediatamente o Aplicador.
4. Após a conferência, assine seu nome nos espaços próprios da FOLHA DE RESPOSTAS e da FOLHA DE REDAÇÃO, utilizando caneta esferográfica de tinta azul escura ou preta.
5. Na FOLHA DE RESPOSTAS, marque, para cada questão, a letra correspondente à opção escolhida para a resposta, preenchendo todo o espaço compreendido nas quadrículas com caneta esferográfica de tinta azul escura ou preta. Preencha completamente os campos de marcação, sem deixar espaços em branco.
6. Não dobre, não amasse nem manche a FOLHA DE RESPOSTA e a FOLHA DE REDAÇÃO. Elas não poderão ser substituídas.
7. Para cada uma das questões objetivas, são apresentadas 5 opções, identificadas com as letras **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Apenas uma responde corretamente à questão. Você deve, portanto, assinalar apenas uma opção em cada questão. A marcação em mais de uma opção anula a questão, mesmo que uma das respostas esteja correta.
8. O tempo disponível para estas Provas, incluído o de elaboração da Redação, é de **cinco horas e trinta minutos.** Recomenda-se que você não ultrapasse o período de uma hora e trinta minutos para elaborar sua Redação. O participante com necessidades educacionais especiais que, por esse motivo, precise de maior tempo para a realização das Provas disporá de 1 (uma) hora a mais para realizá-las, desde que tenha comunicado previamente a sua necessidade ao INEP.
9. Reserve os 30 minutos finais para marcar sua FOLHA DE RESPOSTAS. Os rascunhos e as marcações assinaladas no CADERNO DE PROVAS não serão considerados na avaliação.
10. Quando terminar as Provas, entregue ao Aplicador este CADERNO DE PROVAS, a FOLHA DE RESPOSTAS e a FOLHA DE REDAÇÃO. Em seguida, assine a LISTA DE PRESENÇA.
11. Você só poderá deixar o local de Prova após decorridas 2 (duas) horas do início da sua aplicação. Caso permaneça na sala por, no mínimo, 4 (quatro) horas após o início da prova, você poderá levar este CADERNO DE PROVAS.
12. Você será excluído do Exame caso:
    a) utilize, durante a realização das Provas, máquinas e/ou relógios de calcular, bem como rádios, gravadores, *headphones*, telefones celulares ou fontes de consulta de qualquer espécie;
    b) aja com incorreção ou descortesia para com qualquer participante do processo de aplicação das Provas;
    c) seja surpreendido, durante as Provas, em comunicação com outro participante, verbalmente, por escrito ou por qualquer outra forma, bem como utilizando livros, notas ou impressos, portando ou fazendo uso de qualquer tipo de equipamento eletrônico de comunicação ou, ainda, for responsável por falsa identificação pessoal;
    d) se ausente da sala em que se realiza a Prova levando consigo o CADERNO DE PROVAS e/ou a FOLHA DE RESPOSTAS e/ou a FOLHA DE REDAÇÃO, antes do prazo estabelecido.
13. São de responsabilidade única do participante a leitura e conferência de todas as informações contidas no CADERNO DE PROVAS, na FOLHA DE RESPOSTAS e na FOLHA DE REDAÇÃO.

CONSÓRCIO CONNASEL - CONSULTEC / CETRO / FUNRIO

INEP Ministério da Educação BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

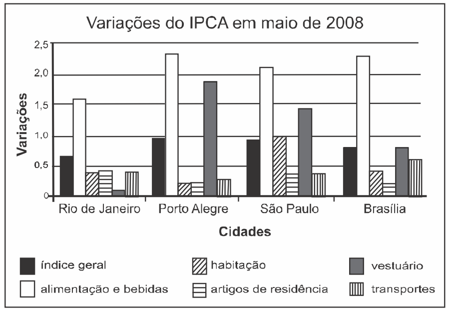
Matemática e suas Tecnologias
Questões de 46 a 90

Instrução: para responder a essas questões, identifique **APENAS UMA ÚNICA** alternativa correta e marque a letra correspondente na Folha de Respostas.

Rascunho

Questão 46

Para o cálculo da inflação, utiliza-se, entre outros, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que toma como base os gastos das famílias residentes nas áreas urbanas, com rendimentos mensais compreendidos entre um e quarenta salários mínimos. O gráfico a seguir mostra as variações do IPCA de quatro capitais brasileiras no mês de maio de 2008.



Disponível em:http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 05 jul. 2008 (adaptado).

Com base no gráfico, qual item foi determinante para a inflação de maio de 2008?

(A) Alimentação e bebidas.

(B) Artigos de residência.

(C) Habitação.

(D) Vestuário.

(E) Transportes.

Questão 47

No calendário utilizado atualmente, os anos são numerados em uma escala sem o zero, isto é, não existe o ano zero. A era cristã se inicia no ano 1 depois de Cristo (d.C.) e designa-se o ano anterior a esse como ano 1 antes de Cristo (a.C.). Por essa razão, o primeiro século ou intervalo de 100 anos da era cristã terminou no dia 31 de dezembro do ano 100 d.C., quando haviam decorrido os primeiros 100 anos após o início da era. O século II começou no dia 1 de janeiro do ano 101 d.C., e assim sucessivamente.

Como não existe o ano zero, o intervalo entre os anos 50 a.C. e 50 d.C., por exemplo, é de 100 anos. Outra forma de representar anos é utilizando-se números inteiros, como fazem os astrônomos. Para eles, o ano 1 a.C. corresponde ao ano 0, o ano 2 a.C. ao ano -1, e assim sucessivamente. Os anos depois de Cristo são representados pelos números inteiros positivos, fazendo corresponder o número 1 ao ano 1 d.C.

Considerando o intervalo de 3 a.C. a 2 d.C., o quadro que relaciona as duas contagens descritas no texto é

(A)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-1	0	1	2	3

(B)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-2	-1	0	1	2

(C)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-2	-1	1	2	3

(D)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-3	-2	-1	1	2

(E)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	-3	-2	-1	0	1

Questão 48

Na cidade de João e Maria, haverá shows em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.

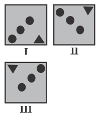
Pacote 1: taxa de 40 reais por show.
Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por show.
Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 shows, e 15 reais por cada show a mais.

João assistirá a 7 shows e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes

(A) 1 e 2.
(B) 2 e 2.
(C) 3 e 1.
(D) 2 e 1.
(E) 3 e 3.

Questão 49

Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmicas em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas indicadas por I e II.



Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por III?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

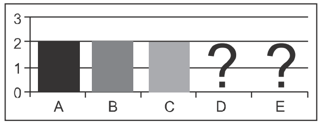
(E) 

Questão 50

Cinco equipes A, B, C, D e E disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos.

As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.

Pontuação da gincana



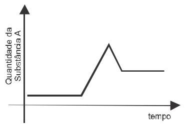
Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente,

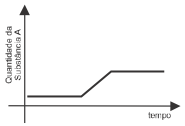
(A) 1,5 e 2,0.
(B) 2,0 e 1,5.
(C) 2,0 e 2,0.
(D) 2,0 e 3,0.
(E) 3,0 e 2,0.

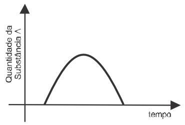
Questão 51

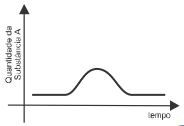
Muitas vezes o objetivo de um remédio é aumentar a quantidade de uma ou mais substâncias já existentes no corpo do indivíduo para melhorar as defesas do organismo. Depois de alcançar o objetivo, essa quantidade deve voltar ao normal.

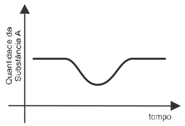
Se uma determinada pessoa ingere um medicamento para aumentar a concentração da substância A em seu organismo, a quantidade dessa substância no organismo da pessoa, em relação ao tempo, pode ser melhor representada pelo gráfico

(A)


(B)


(C)


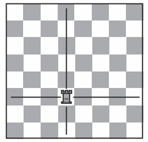
(D)


(E)


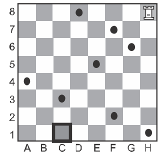
Rascunho

Questão 52

O xadrez é jogado por duas pessoas. Um jogador joga com as peças brancas, o outro, com as pretas. Neste jogo, vamos utilizar somente a Torre, uma das peças do xadrez. Ela pode mover-se para qualquer casa ao longo da coluna ou linha que ocupa, para frente ou para trás, conforme indicado na figura a seguir.



O jogo consiste em chegar a um determinado ponto sem passar por cima dos pontos pretos já indicados.



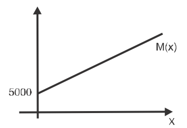
Respeitando-se o movimento da peça Torre e as suas regras de movimentação no jogo, qual é o menor número de movimentos possíveis e necessários para que a Torre chegue à casa **C1**?

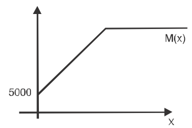
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 7

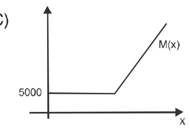
Questão 53

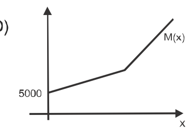
Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de meses.

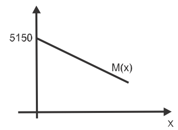
Nessas condições, a representação gráfica correta para M(x) é

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


Questão 54

Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O **calendário islâmico**, por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia com a fase da lua. O **calendário maia** segue o ciclo de Vênus, com cerca de 584 dias, e cada 5 ciclos de Vênus corresponde a 8 anos de 365 dias da Terra.

MATSUURA, Oscar. **Calendários e o fluxo do tempo.** Scientific American Brasil. Disponível em: http://www.uol.com.br. Acesso em: 14 out. 2008 (adaptado).

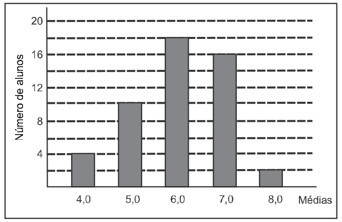
Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre de 48 anos?

(A) 30 ciclos.
(B) 40 ciclos.
(C) 73 ciclos.
(D) 240 ciclos.
(E) 384 ciclos.

Rascunho

Questão 55

Considere que as médias finais dos alunos de um curso foram representadas no gráfico a seguir.



Sabendo que a média para aprovação nesse curso era maior ou igual a 6,0, qual foi a porcentagem de alunos aprovados?

(A) 18%
(B) 21%
(C) 36%
(D) 50%
(E) 72%

Questão 56

As abelhas domesticadas da América do Norte e da Europa estão desaparecendo, sem qualquer motivo aparente. As abelhas desempenham papel fundamental na agricultura, pois são responsáveis pela polinização (a fecundação das plantas). Anualmente, apicultores americanos alugam 2 milhões de colmeias para polinização de lavouras. O sumiço das abelhas já inflacionou o preço de locação das colmeias. No ano passado, o aluguel de cada caixa (colmeia) com 50.000 abelhas estava na faixa de 75 dólares. Depois do ocorrido, aumentou para 150 dólares. A previsão é que faltem abelhas para polinização neste ano nos EUA. Somente as lavouras de amêndoa da Califórnia necessitam de 1,4 milhão de colmeias.

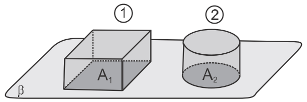
Disponível em: <http://veja.abril.com.br>. Acesso em: 23 fev. 2009 (adaptado).

De acordo com essas informações, o valor a ser gasto pelos agricultores das lavouras de amêndoa da Califórnia com o aluguel das colmeias será de

(A) 4,2 mil dólares.
(B) 105 milhões de dólares.
(C) 150 milhões de dólares.
(D) 210 milhões de dólares.
(E) 300 milhões de dólares.

Questão 57

Em uma padaria, há dois tipos de forma de bolo, formas 1 e 2, como mostra a figura abaixo.



Sejam L o lado da base da forma quadrada, r o raio da base da forma redonda, A_1 e A_2 as áreas das bases das formas 1 e 2, e V_1 e V_2 os seus volumes, respectivamente. Se as formas têm a mesma altura h, para que elas comportem a mesma quantidade de massa de bolo, qual é a relação entre r e L?

(A) L = r
(B) L = 2r
(C) L = r
(D) $L = r\sqrt{\pi}$
(E) $L = (\pi r^2)/2$

Questão 58

Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no *ranking* de mortalidade por acidente. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

Disponível em: http://www.ipea.gov.br. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio 2004/2005, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é

(A) $\frac{2}{17}$
(B) $\frac{5}{17}$
(C) $\frac{2}{5}$
(D) $\frac{3}{5}$
(E) $\frac{12}{17}$

Rascunho

Questão 59

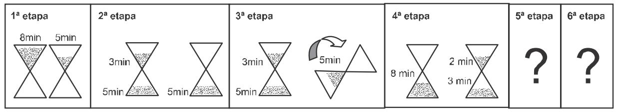
Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa.

Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

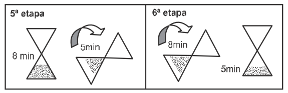
(A) $\frac{1}{25}$
(B) $\frac{1}{16}$
(C) $\frac{1}{9}$
(D) $\frac{1}{3}$
(E) $\frac{1}{2}$

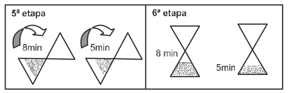
Questão 60

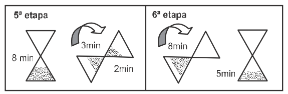
Um dos diversos instrumentos que o homem concebeu para medir o tempo foi a ampulheta, também conhecida como relógio de areia. Suponha que uma cozinheira tenha de marcar 11 minutos, que é o tempo exato para assar os biscoitos que ela colocou no forno. Dispondo de duas ampulhetas, uma de 8 minutos e outra de 5, ela elaborou 6 etapas, mas fez o esquema, representado a seguir, somente até a 4ª etapa, pois é só depois dessa etapa que ela começa a contar os 11 minutos.

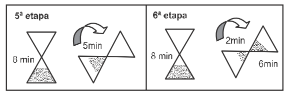


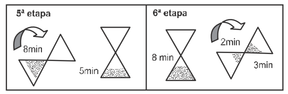
A opção que completa o esquema é

(A)


(B)


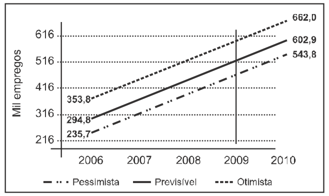
(C)


(D)


(E)


Rascunho

Questão 61



A importância do desenvolvimento da atividade turística no Brasil relaciona-se especialmente com os possíveis efeitos na redução da pobreza e das desigualdades por meio da geração de novos postos de trabalho e da contribuição para o desenvolvimento sustentável regional.

No gráfico são mostrados três cenários – pessimista, previsível, otimista – a respeito da geração de empregos pelo desenvolvimento de atividades turísticas.

De acordo com o gráfico, em 2009, o número de empregos gerados pelo turismo será superior a

(A) 602.900 no cenário previsível.
(B) 660.000 no cenário otimista.
(C) 316.000 e inferior a 416.000 no cenário previsível.
(D) 235.700 e inferior a 353.800 no cenário pessimista.
(E) 516.000 e inferior a 616.000 no cenário otimista.

Questão 62

Pneus usados geralmente são descartados de forma inadequada, favorecendo a proliferação de insetos e roedores e provocando sérios problemas de saúde pública. Estima-se que, no Brasil, a cada ano, sejam descartados 20 milhões de pneus usados. Como alternativa para dar uma destinação final a esses pneus, a Petrobras, em sua unidade de São Mateus do Sul, no Paraná, desenvolveu um processo de obtenção de combustível a partir da mistura dos pneus com xisto. Esse procedimento permite, a partir de uma tonelada de pneu, um rendimento de cerca de 530 kg de óleo.

Disponível em: http://www.ambientebrasil.com.br. Acesso em: 3 out. 2008 (adaptado).

Considerando que uma tonelada corresponde, em média, a cerca de 200 pneus, se todos os pneus descartados anualmente fossem utilizados no processo de obtenção de combustível pela mistura com xisto, seriam então produzidas

(A) 5,3 mil toneladas de óleo.
(B) 53 mil toneladas de óleo.
(C) 530 mil toneladas de óleo.
(D) 5,3 milhões de toneladas de óleo.
(E) 530 milhões de toneladas de óleo.

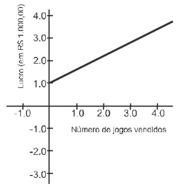
Questão 63

Uma empresa produz jogos pedagógicos para computadores, com custos fixos de R$ 1.000,00 e custos variáveis de R$ 100,00 por unidade de jogo produzida. Desse modo, o custo total para x jogos produzidos é dado por $C(x) = 1 + 0{,}1x$ (em R$ 1.000,00).

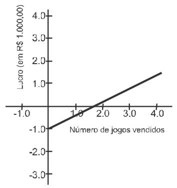
A gerência da empresa determina que o preço de venda do produto seja de R$ 700,00. Com isso a receita bruta para x jogos produzidos é dada por $R(x) = 0{,}7x$ (em R$ 1.000,00). O lucro líquido, obtido pela venda de x unidades de jogos, é calculado pela diferença entre a receita bruta e os custos totais.

O gráfico que modela corretamente o lucro líquido dessa empresa, quando são produzidos x jogos, é

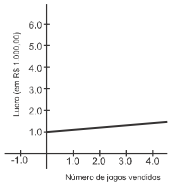
(A)



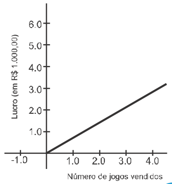
(B)



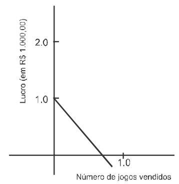
(C)



(D)



(E)



Rascunho

Questão 64

Três empresas de táxi W, K e L estão fazendo promoções: a empresa W cobra R$ 2,40 a cada quilômetro rodado e com um custo inicial de R$ 3,00; a empresa K cobra R$ 2,25 a cada quilômetro rodado e uma taxa inicial de R$ 3,80 e, por fim, a empresa L, que cobra R$ 2,50 a cada quilômetro rodado e com taxa inicial de R$ 2,80. Um executivo está saindo de casa e vai de táxi para uma reunião que é a 5 km do ponto de táxi, e sua esposa sairá do hotel e irá para o aeroporto, que fica a 15 km do ponto de táxi.

Assim, os táxis que o executivo e sua esposa deverão pegar, respectivamente, para terem a maior economia são das empresas

(A) W e L.
(B) W e K.
(C) K e L.
(D) K e W.
(E) K e K.

Questão 65

Uma pessoa decidiu depositar moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos em um cofre durante certo tempo. Todo dia da semana ela depositava uma única moeda, sempre nesta ordem: 1, 5, 10, 25, 50, e, novamente, 1, 5, 10, 25, 50, assim sucessivamente.

Se a primeira moeda foi depositada em uma segunda-feira, então essa pessoa conseguiu a quantia exata de R$ 95,05 após depositar a moeda de

(A) 1 centavo no 679º dia, que caiu numa segunda-feira.
(B) 5 centavos no 186º dia, que caiu numa quinta-feira.
(C) 10 centavos no 188º dia, que caiu numa quinta-feira.
(D) 25 centavos no 524º dia, que caiu num sábado.
(E) 50 centavos no 535º dia, que caiu numa quinta-feira.

Questão 66

Segundo a Associação Brasileira de Alumínio (ABAL), o Brasil foi o campeão mundial, pelo sétimo ano seguido, na reciclagem de latas de alumínio. Foi reciclado 96,5% do que foi utilizado no mercado interno em 2007, o equivalente a 11,9 bilhões de latinhas. Este número significa, em média, um movimento de 1,8 bilhão de reais anuais em função da reutilização de latas no Brasil, sendo 523 milhões referentes à etapa da coleta, gerando, assim, "emprego" e renda para cerca de 180 mil trabalhadores. Essa renda, em muitos casos, serve como complementação do orçamento familiar e, em outros casos, como única renda da família.

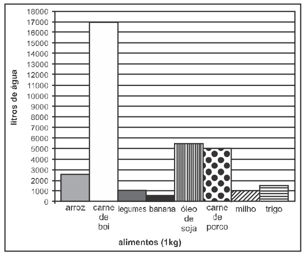
Revista Conhecimento Prático Geografia, nº 22. (adaptado)

Com base nas informações apresentadas, a renda média mensal dos trabalhadores envolvidos nesse tipo de coleta gira em torno de

(A) R$ 173,00.
(B) R$ 242,00.
(C) R$ 343,00.
(D) R$ 504,00.
(E) R$ 841,00.

Questão 67

Nos últimos anos, o aumento da população, aliado ao crescente consumo de água, tem gerado inúmeras preocupações, incluindo o uso desta na produção de alimentos. O gráfico mostra a quantidade de litros de água necessária para a produção de 1 kg de alguns alimentos.

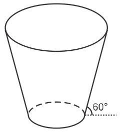


Com base no gráfico, para a produção de 100 kg de milho, 100 kg de trigo, 100 kg de arroz, 100 kg de carne de porco e 600 kg de carne de boi, a quantidade média necessária de água, por quilograma de alimento produzido, é aproximadamente igual a

(A) 415 litros por quilograma.
(B) 11.200 litros por quilograma.
(C) 27.000 litros por quilograma.
(D) 2.240.000 litros por quilograma.
(E) 2.700.000 litros por quilograma.

Rascunho

Questão 68



Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.

Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60^0 com o solo.

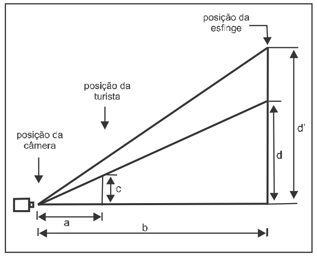
Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de

(A) 12 m^2.
(B) 108 m^2.
(C) $(12 + 2\sqrt{3})^2 \pi$ m^2.
(D) 300π m^2.
(E) $(24 + 2\sqrt{3})^2 \pi$ m^2.

Questão 69

A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura a seguir mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge.

Fotografia obtida da internet.



Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a 2/3 da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por *d* e *d'*, respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por *b*, e que a distância da turista à mesma lente, por *a*.

A razão entre *b* e *a* será dada por

(A) $\frac{b}{a} = \frac{d'}{c}$
(B) $\frac{b}{a} = \frac{2d}{3c}$
(C) $\frac{b}{a} = \frac{3d'}{2c}$
(D) $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$
(E) $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{c}$

Questão 70

Uma fotografia tirada em uma câmera digital é formada por um grande número de pontos, denominados *pixels*. Comercialmente, a resolução de uma câmera digital é especificada indicando os milhões de *pixels*, ou seja, os *megapixels* de que são constituídas as suas fotos.

Ao se imprimir uma foto digital em papel fotográfico, esses pontos devem ser pequenos para que não sejam distinguíveis a olho nu. A resolução de uma impressora é indicada pelo termo dpi (*dot per inch*), que é a quantidade de pontos que serão impressos em uma linha com uma polegada de comprimento. Uma foto impressa com 300 dpi, que corresponde a cerca de 120 pontos por centímetro, terá boa qualidade visual, já que os pontos serão tão pequenos, que o olho não será capaz de vê-los separados e passará a ver um padrão contínuo.

Para se imprimir uma foto retangular de 15 cm por 20 cm, com resolução de pelo menos 300 dpi, qual é o valor aproximado de *megapixels* que a foto terá?

(A) 1,00 *megapixel*.
(B) 2,52 *megapixels*.
(C) 2,70
(D) 3,15
(E) 4,32

Rascunho

Questão 71

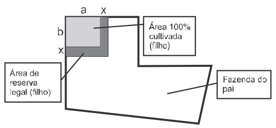
A taxa anual de desmatamento na Amazônia é calculada com dados de satélite, pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), de 1º de agosto de um ano a 31 de julho do ano seguinte. No mês de julho de 2008, foi registrado que o desmatamento acumulado nos últimos 12 meses havia sido 64% maior do que no ano anterior, quando o INPE registrou 4.974 km^2 de floresta desmatada. Nesses mesmos 12 meses acumulados, somente o estado de Mato Grosso foi responsável por, aproximadamente, 56% da área total desmatada na Amazônia.

Jornal O Estado de São Paulo. Disponível em: <http://www.estadao.com.br>. Acesso em: 30 ago. 2008 (adaptado).

De acordo com os dados, a área desmatada sob a responsabilidade do estado do Mato Grosso, em julho de 2008, foi

(A) inferior a 2.500 km^2.
(B) superior a 2.500 km^2 e inferior a 3.000 km^2.
(C) superior a 3.000 km^2 e inferior a 3.900 km^2.
(D) superior a 3.900 km^2 e inferior a 4.700 km^2.
(E) superior a 4.700 km^2.

Questão 72



Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na figura como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a figura.

De acordo com a figura acima, o novo terreno do filho cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura x metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura x da faixa é

(A) $10\%(a + b)^2$
(B) $10\%(a \cdot b)^2$
(C) $\sqrt{a + b} - (a + b)$
(D) $\sqrt{(a + b)^2 + ab} - (a + b)$
(E) $\sqrt{(a + b)^2 + ab} + (a + b)$

Questão 73

Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte.

Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?

(A) 10 viagens.
(B) 11 viagens.
(C) 12 viagens.
(D) 24 viagens.
(E) 27 viagens.

Rascunho

Questão 74

Diante de um sanduíche e de uma porção de batatas fritas, um garoto, muito interessado na quantidade de calorias que pode ingerir em cada refeição, analisa os dados de que dispõe. Ele sabe que a porção de batatas tem 200 g, o que equivale a 560 calorias, e que o sanduíche tem 250 g e 500 calorias. Como ele deseja comer um pouco do sanduíche e um pouco das batatas, ele se vê diante da questão: "Quantos gramas de sanduíche e quantos gramas de batata eu posso comer para ingerir apenas as 462 calorias permitidas para esta refeição?"

Considerando que x e y representam, respectivamente, em gramas, as quantidades do sanduíche e das batatas que o garoto pode ingerir, assinale a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente essas quantidades.

(A) $2x + 2{,}8y = 462$

(B) $2{,}8x + 2y = 462$

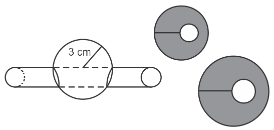
(C) $1{,}8x + 2{,}3y = 1.060$

(D) $\frac{1}{2}x + 0{,}4y = 462$

(E) $0{,}4x + \frac{1}{2}y = 462$

Questão 75

Um chefe de cozinha utiliza um instrumento cilíndrico afiado para retirar parte do miolo de uma laranja. Em seguida, ele fatia toda a laranja em secções perpendiculares ao corte feito pelo cilindro. Considere que o raio do cilindro e da laranja sejam iguais a 1 cm e a 3 cm, respectivamente.



A área da maior fatia possível é

(A) duas vezes a área da secção transversal do cilindro.
(B) três vezes a área da secção transversal do cilindro.
(C) quatro vezes a área da secção transversal do cilindro.
(D) seis vezes a área da secção transversal do cilindro.
(E) oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

Questão 76

Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

NÚMERO OBTIDO	FREQUÊNCIA
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente

(A) 3, 2 e 1
(B) 3, 3 e 1
(C) 3, 4 e 2
(D) 5, 4 e 2
(E) 6, 2 e 4

Questão 77

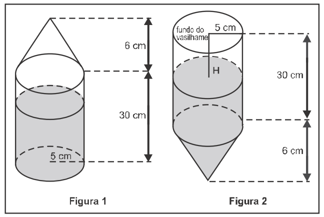


Figura 1 Figura 2

Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por 625π cm³ de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

Volume do cone: $V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância H?

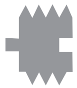
(A) 5 cm.
(B) 7 cm.
(C) 8 cm.
(D) 12 cm.
(E) 18 cm.

Rascunho

Questão 78

Uma das expressões artísticas mais famosas associada aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.

Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher, entre as figuras abaixo, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

Questão 79

Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$ 1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R$ 2,00 de desconto.

Qual é a probabilidade de um consumidor **não** ganhar qualquer desconto?

(A) $\frac{1}{24}$

(B) $\frac{3}{24}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{2}$

Questão 80

> No mundial de 2007, o americano Bernard Lagat, usando pela primeira vez uma sapatilha 34% mais leve do que a média, conquistou o ouro na corrida de 1.500 metros com um tempo de 3,58 minutos. No ano anterior, em 2006, ele havia ganhado medalha de ouro com um tempo de 3,65 minutos nos mesmos 1.500 metros.

Revista Veja, São Paulo, ago. 2008 (adaptado).

Sendo assim, a velocidade média do atleta aumentou em aproximadamente

(A) 1,05%.
(B) 2,00%.
(C) 4,11%.
(D) 4,19%.
(E) 7,00%.

Questão 81

No depósito de uma biblioteca há caixas contendo folhas de papel de 0,1 mm de espessura, e em cada uma delas estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura.

Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?

(A) 10^2
(B) 10^4
(C) 10^5
(D) 10^6
(E) 10^7

Rascunho

Questão 82

No quadro seguinte, são informados os turnos em que foram eleitos os prefeitos das capitais de todos os estados brasileiros em 2004.

	cidade	turno		cidade	turno		cidade	turno
1	Aracaju (SE)	1.º	10	Goiânia (GO)	2.º	19	Recife (PE)	1.º
2	Belém (PA)	2.º	11	João Pessoa (PB)	1.º	20	Rio Branco (AC)	1.º
3	Belo Horizonte (MG)	1.º	12	Macapá (AP)	1.º	21	Rio de Janeiro (RJ)	1.º
4	Boa Vista (RR)	1.º	13	Maceió (AL)	2.º	22	Salvador (BA)	2.º
5	Campo Grande (MS)	1.º	14	Manaus (AM)	2.º	23	São Luís (MA)	1.º
6	Cuiabá (MT)	2.º	15	Natal (RN)	2.º	24	São Paulo (SP)	2.º
7	Curitiba (PR)	2.º	16	Palmas (TO)	1.º	25	Teresinha (PI)	2.º
8	Florianópolis (SC)	2.º	17	Porto Alegre (RS)	2.º	26	Vitória (ES)	2.º
9	Fortaleza (CE)	2.º	18	Porto Velho (RO)	2.º			

Fonte: TSE

Almanaque ABRIL: Brasil 2005. São Paulo: Abril, 2005.

Na região Norte, a frequência relativa de eleição dos prefeitos no 2º turno foi, aproximadamente,

(A) 42,86%.
(B) 44,44%.
(C) 50,00%.
(D) 57,14%.
(E) 57,69%.

Questão 83

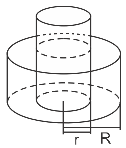
A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo.

A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é

(A) 10
(B) 30
(C) 58
(D) 116
(E) 232

Questão 84

Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1, e o outro de raio R e altura h_2. O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro.



Se $R = r\sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$ e, para encher o cilindro do meio, foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários

(A) 20 minutos.
(B) 30 minutos.
(C) 40 minutos.
(D) 50 minutos.
(E) 60 minutos.

Questão 85

Um comerciante contratou um novo funcionário para cuidar das vendas. Combinou pagar a essa pessoa R\$120,00 por semana, desde que as vendas se mantivessem em torno dos R\$ 600,00 semanais e, como um estímulo, também propôs que na semana na qual ele vendesse R\$1.200,00, ele receberia R\$ 200,00, em vez de R\$ 120,00.

Ao término da primeira semana, esse novo funcionário conseguiu aumentar as vendas para R\$ 990,00 e foi pedir ao seu patrão um aumento proporcional ao que conseguiu aumentar nas vendas. O patrão concordou e, após fazer algumas contas, pagou ao funcionário a quantia de

(A) R\$ 160,00.
(B) R\$ 165,00.
(C) R\$ 172,00.
(D) R\$ 180,00.
(E) R\$ 198,00.

Questão 86

Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelo homem do séc. XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro abaixo.

O QUE AS MULHERES PENSAM QUE OS HOMENS PREFEREM	
72% das mulheres têm certeza de que os homens odeiam ir ao shopping	**65%** pensam que os homens preferem mulheres que façam todas as tarefas da casa
No entanto, apenas **39%** dos homens disseram achar a atividade insuportável	No entanto, **84%** deles disseram acreditar que as tarefas devem ser divididas entre o casal

Correio Braziliense, 29 jun. 2008 (adaptado).

Se a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é

(A) inferior a 80.
(B) superior a 80 e inferior a 100.
(C) superior a 100 e inferior a 120.
(D) superior a 120 e inferior a 140.
(E) superior a 140.

Rascunho

Questão 87

Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base mede 24 cm e cuja altura mede 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera.

Volume da esfera: $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, conclui-se que o raio R da esfera assim construída é igual a

(A) 15
(B) 12
(C) 24
(D) $3\sqrt[3]{60}$
(E) $6\sqrt[3]{30}$

Questão 88

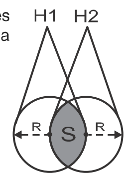
A empresa SWK produz um determinado produto x, cujo custo de fabricação é dado pela equação de uma reta crescente, com inclinação dois e de variável x. Se não tivermos nenhum produto produzido, a despesa fixa é de R\$ 7,00 e a função venda de cada unidade x é dada por $-2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84$.

Tendo em vista uma crise financeira, a empresa fez algumas demissões. Com isso, caiu em 12% o custo da produção de cada unidade produzida. Nessas condições, a função lucro da empresa pode ser expressa como

(A) $L(x) = -2x^2 + 228x - 448{,}00$
(B) $L(x) = -2x^2 + 227{,}76x - 448{,}84$
(C) $L(x) = -2x^2 + 228x - 441{,}84$
(D) $L(x) = -2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84$
(E) $L(x) = -2x^2 + 227{,}76x - 448{,}96$

Questão 89

Dois holofotes iguais, situados em H1 e H2, respectivamente, iluminam regiões circulares, ambas de raio R. Essas regiões se sobrepõem e determinam uma região S de maior intensidade luminosa, conforme figura.



Área do setor circular: $A_{SC} = \frac{\alpha R^2}{2}$, α em radianos.

A área da região S, em unidades de área, é igual a

(A) $\frac{2\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{2}$
(B) $\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$
(C) $\frac{\pi R^2}{12} - \frac{R^2}{8}$
(D) $\frac{\pi R^2}{2}$
(E) $\frac{\pi R^2}{3}$

Questão 90

Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens.

Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é

(A) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
(B) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
(C) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
(D) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
(E) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

Rascunho

CollegeBoard

The SAT®

Practice Booklet

Get ready for the SAT® and SAT Subject Tests™ with official practice questions, test-taking approaches and more!

A little practice goes a long way.
Visit www.collegeboard.com/practice

achieve more™
SAT®

Mathematics Level 1 and Level 2

One-hour subject tests

Recommended Preparation

- Students are not expected to have studied every topic on either test.

Mathematics Level 1

- Three years of college-preparatory mathematics, including two years of algebra and one year of geometry

Mathematics Level 2

- More than three years of college-preparatory mathematics, including two years of algebra, one year of geometry, and elementary functions (precalculus) and/or trigonometry.
- If you have had preparation in trigonometry and elementary functions and have attained grades of B or better in these courses, select Level 2. If you are sufficiently prepared to take Level 2 but take Level 1 in hopes of receiving a higher score, you may not do as well as you expect.

Score

- Because the content measured by the two tests differs considerably, you cannot use your score on one test to predict your score on the other or to compare scores.

Geometric Figures

Figures that accompany problems are intended to provide information useful in solving the problems. They are drawn as accurately as possible EXCEPT when it is stated in a particular problem that the figure is not drawn to scale. Even when figures are not drawn to scale, the relative positions of points and angles may be assumed to be in the order shown. Also, line segments that extend through points and appear to lie on the same line may be assumed to be on the same line. The text "Note: Figure not drawn to scale." is included on the figure when degree measures may not be accurately shown and specific lengths may not be drawn proportionally.

FORMAT	Approximate % of Test	
50 multiple-choice questions each		
Topics Covered*	Level 1	Level 2
Number and Operations Operations, ratio and proportion, complex numbers, counting, elementary number theory, matrices, sequences, *series, vectors*	**10–14**	**10–14**
Algebra and Functions Expressions, equations, inequalities, representation and modeling, properties of functions (linear, polynomial, rational, exponential, *logarithmic, trigonometric, inverse trigonometric, periodic, piecewise, recursive, parametric*)	**38–42**	**48–52**
Geometry and Measurement	**38–42**	**28–32**
Plane Euclidean/Measurement	**18–22**	-------
Coordinate Lines, parabolas, circles, *ellipses, hyperbolas,* symmetry, transformations, *polar coordinates*	8–12	10–14
Three-dimensional Solids, surface area and volume (cylinders, cones, pyramids, spheres, prisms), *coordinates in three dimensions*	4–6	4–6
Trigonometry Right triangles, identities, *radian measure, law of cosines, law of sines, equations, double angle formulas*	6–8	12–16
Data Analysis, Statistics, and Probability Mean, median, mode, range, interquartile range, *standard deviation,* graphs and plots, least-squares regression (linear, *quadratic, exponential*), probability	**8–12**	**8–12**

**Topics in italics are tested on the Level 2 Test only. The content of Level 1 overlaps somewhat with that on Level 2, but the emphasis on Level 2 is on more advanced content. Plane Euclidean geometry is not tested directly on Level 2.*

Calculators

Be sure to bring a calculator to use on these tests: if you take these tests without a calculator, you will be at a disadvantage. In fact, some questions cannot be solved without a scientific or a graphing calculator.

- Verify that your calculator is in good working condition before you take the test.
- If possible, bring batteries and a backup calculator to the test center. No substitute calculators or batteries will be available. Students may not share calculators.
- If your calculator malfunctions during the Level 1 or Level 2 tests and you do not have a backup calculator, you can cancel scores on just the mathematics tests. You must tell your test supervisor when the malfunction occurs in order to cancel scores on these tests only.

What Type of Calculator Should I Bring?

- Bring a calculator that you are used to using. It may be a scientific or a graphing calculator. If you're comfortable with both a scientific and a graphing calculator, bring a graphing calculator.
- **We recommend the use of a graphing calculator over a scientific calculator** because a graphing calculator may provide an advantage on some questions.

The following calculators are unacceptable:

- Models that have wireless, Bluetooth, cellular, audio/video recording and playing, camera, or any other cell phone type feature
- Models that can access the Internet
- Models that have QWERTY, pen-input, stylus,* or touch-screen capability; require electrical outlets; or use paper tape (e.g., TI-92 Plus, Voyage 200, Palm, PDAs, Casio ClassPad)
- Models that "talk" or make unusual noises

*The use of the stylus with the Sharp EL-9600 calculator is not permitted.

Using the Calculator

You do not need to use a calculator to solve every question, but it is important to know when and how to use one. First decide how you will solve a problem; then determine whether the calculator is needed.

- You'll need a calculator for 40 to 50 percent of the questions on Level 1 and 55 to 65 percent of the questions on Level 2.
- For the rest of the questions, there is no advantage, perhaps even a disadvantage, to using a calculator.
- **Do not round any intermediate calculations.** If you get a result from the calculator for the first step of a solution, keep the result in the calculator and use it for the second step. If you round the result from the first step, your answer may not be one of the choices.
- You may not use a calculator for other Subject Tests and must put it away when not taking a mathematics test.

Sample Questions

All questions in the Mathematics Level 1 and Mathematics Level 2 Subject Tests are multiple-choice questions in which you are asked to choose the best response from the five choices offered. The directions for the tests are below:

Directions

For each of the following problems, decide which is the **BEST** of the choices given. If the exact numerical value is not one of the choices, select the choice that best approximates this value. Then fill in the corresponding circle on the answer sheet.

Notes: (1) A scientific or graphing calculator will be necessary for answering some (but not all) of the questions in this test. For each question you will have to decide whether or not you should use a calculator.

(2) Level 1: The only angle measure used on this test is degree measure. Make sure your calculator is in the degree mode.

Level 2: For some questions in this test you may have to decide whether your calculator should be in the radian mode or the degree mode.

(3) Figures that accompany problems in this test are intended to provide information useful in solving the problems. They are drawn as accurately as possible EXCEPT when it is stated in a specific problem that its figure is not drawn to scale. All figures lie in a plane unless otherwise indicated.

(4) Unless otherwise specified, the domain of any function f is assumed to be the set of all real numbers x for which $f(x)$ is a real number. The range of f is assumed to be the set of all real numbers $f(x)$, where x is in the domain of f.

(5) Reference information that may be useful in answering the questions in this test can be found on the page preceding Question 1.

Reference Information. The following information is for your reference in answering some of the questions in this test.

Volume of a right circular cone with radius r and height h: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volume of a sphere with radius r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

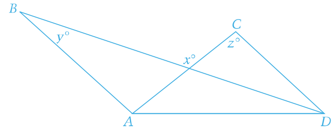
Volume of a pyramid with base area B and height h: $V = \frac{1}{3}Bh$

Surface Area of a sphere with radius r: $S = 4\pi r^2$

Mathematics Level 1

1. A band wants to distribute its music on compact discs (CDs). The equipment to produce the CDs costs \$250, and blank CDs cost \$5.90 for a package of 10. Which of the following represents the total cost, in dollars, to produce n CDs, where n is a multiple of 10?

   (A) $(250 + 0.59)n$ (B) $250 + 0.59n$
   (C) $(250 + 5.90)n$ (D) $250 + 5.90n$
   (E) $250n + 5.90$



2. In the figure above, $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ are parallel. What is x in terms of y and z?

   (A) $y + z$
   (B) $2y + z$
   (C) $2y - z$
   (D) $180 - y - z$
   (E) $180 + y - z$

3. A number n is increased by 8. If the cube root of that result equals −0.5, what is the value of n?

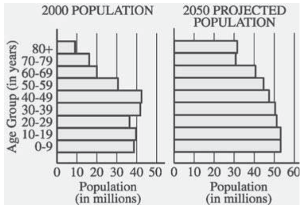
   (A) −15.625
   (B) −8.794
   (C) −8.125
   (D) −7.875
   (E) 421.875

4. If a and b are real numbers, $i^2 = -1$, and $(a + b) + 5i = 9 + ai$, what is the value of b?

   (A) 4 (B) 5 (C) 9
   (D) $4 + 5i$ (E) $5 + 4i$

5. What are all values of x for which $4 - x^2 \geq x - 2$?

   (A) $x \geq -3$ (B) $-5 \leq x \leq 0$
   (C) $-3 \leq x \leq 2$ (D) $x \leq -3$ or $x \geq 2$
   (E) $-2 \leq x \leq 3$



6. The graphs above show United States Census Bureau population figures for the year 2000 for various age groups, together with projections for the year 2050. Of the following age groups, for which is the projected percent increase in population from 2000 to 2050 greatest?

   (A) 30–39 (B) 40–49 (C) 50–59
   (D) 60–69 (E) 70–79

7. If $\log_c a = x$, which of the following must be true?

   (A) $a^c = x$ (B) $a^x = c$ (C) $c^a = x$
   (D) $c^x = a$ (E) $x^c = a$

8. If $f(x) = x + 3$ and $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, which of the following statements are true about the graphs of f and g in the xy-plane?

   I. The graphs are exactly the same.
   II. The graphs are the same except when $x = 3$.
   III. The graphs have an infinite number of points in common.

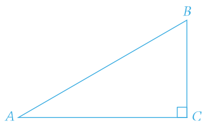
   (A) I only (B) II only (C) III only
   (D) I and III (E) II and III

9. If line ℓ is the perpendicular bisector of the line segment with endpoints $(2, 0)$ and $(0, -2)$, what is the slope of line ℓ?

(A) 2 (B) 1 (C) 0
(D) −1 (E) −2

10. Twenty students have each sampled one or more of three kinds of candy bars that a school store sells. If 3 students have sampled all three kinds, and 5 have sampled exactly two kinds, how many of these students have sampled only one kind?

(A) 8 (B) 12 (C) 15
(D) 17 (E) 18



<u>Note:</u> Figure not drawn to scale.

11. In the figure above, $\triangle ABC$ has a right angle at C. If the length of side $\overline{AC}$ is 10 and the measure of $\angle BAC$ is 22°, what is the length of side $\overline{BC}$?

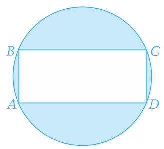
(A) 3.7 (B) 4.0 (C) 5.8
(D) 6.8 (E) 9.3

12. The function h given by $h(t) = -16t^2 + 46t + 5$ represents the height of a ball, in feet, t seconds after it is thrown. To the nearest foot, what is the maximum height the ball reaches?

(A) 5 (B) 23 (C) 35
(D) 38 (E) 46

13. The front, side, and bottom faces of a rectangular solid have areas of 24 square centimeters, 8 square centimeters, and 3 square centimeters, respectively. What is the volume of the solid, in cubic centimeters?

(A) 24 (B) 96 (C) 192
(D) 288 (E) 576



14. Rectangle $ABCD$ is inscribed in the circle shown above. If the length of side $\overline{AB}$ is 5 and the length of side $\overline{BC}$ is 12, what is the area of the shaded region?

(A) 40.8 (B) 53.1 (C) 72.7
(D) 78.5 (E) 81.7

15. If $f(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4$, for how many real numbers k does $f(k) = 2$?

(A) None (B) One (C) Two
(D) Three (E) Four

Time t (years)	0	1	2	5
Value $v(t)$ (dollars)	15,000	13,000	10,900	3,000

16. When purchased, an automobile is valued at \$15,000. Its value depreciates at the rate shown in the table above. Based on a least-squares linear regression, what is the value, to the nearest hundred dollars, of the automobile when $t = 4$?

(A) \$5,400 (B) \$5,500 (C) \$5,600
(D) \$6,400 (E) \$7,000

Mathematics Level 2

17. What is the distance in space between the points with coordinates $(-3, 6, 7)$ and $(2, -1, 4)$?

(A) 4.36 (B) 5.92 (C) 7.91
(D) 9.11 (E) 22.25

18. If $f(x) = \dfrac{3x+12}{2x-12}$, what value does $f(x)$ approach as x gets infinitely larger?

(A) −6 (B) $-\dfrac{3}{2}$ (C) −1
(D) $\dfrac{2}{3}$ (E) $\dfrac{3}{2}$

19. In January 1990 the world's population was 5.3 billion. Assuming a growth rate of 2 percent per year, the world's population, in billions, for t years after 1990 can be modeled by the equation $P = 5.3(1.02)^t$. According to the model, the population growth from January 1995 to January 1996 was

(A) 106,000,000
(B) 114,700,000
(C) 117,000,000
(D) 445,600,000
(E) 562,700,000

20. What is the measure of one of the larger angles of a parallelogram in the xy-plane that has vertices with coordinates $(2, 1)$, $(5, 1)$, $(3, 5)$, and $(6, 5)$?

(A) 93.4° (B) 96.8° (C) 104.0°
(D) 108.3° (E) 119.0°

21. For some real number t, the first three terms of an arithmetic sequence are $2t$, $5t - 1$, and $6t + 2$. What is the numerical value of the fourth term?

(A) 4 (B) 8 (C) 10
(D) 16 (E) 19

22. The diameter and height of a right circular cylinder are equal. If the volume of the cylinder is 2, what is the height of the cylinder?

(A) 1.37 (B) 1.08 (C) 0.86
(D) 0.80 (E) 0.68

23. If $\sin\theta = 0.57$, then $\sin(\pi - \theta) =$

(A) −0.57 (B) −0.43 (C) 0
(D) 0.43 (E) 0.57

24. In a group of 10 people, 60 percent have brown eyes. Two people are to be selected at random from the group. What is the probability that <u>neither</u> person selected will have brown eyes?

(A) 0.13 (B) 0.16 (C) 0.25
(D) 0.36 (E) 0.64

25. If $x - 2$ is a factor of $x^3 + kx^2 + 12x - 8$, then $k =$

(A) −6 (B) −3 (C) 2
(D) 3 (E) 6

26. If $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$, what is $f^{-1}(1.5)$?

(A) 3.4 (B) 2.4 (C) 1.6
(D) 1.5 (E) 1.3

x	−9.8	−0.9	5.2	8.8
y	0.12	2.43	18.46	68.4

27. Which of the following equations best models the data in the table above?

(A) $y = -3.3(1.4)^x$
(B) $y = -1.4(3.3)^x$
(C) $y = 1.4(3.3)^x$
(D) $y = 3.3(1.4)^x$
(E) $y = 1.4x^{3.3}$

$$C = -1.02F + 93.63$$

28. The linear regression model above is based on an analysis of nutritional data from 14 varieties of cereal bars to relate the percent of calories from fat (F) to the percent of calories from carbohydrates (C). Based on this model, which of the following statements must be true?

I. There is a positive correlation between C and F.

II. When 20 percent of calories are from fat, the predicted percent of calories from carbohydrates is approximately 73.

III. The slope indicates that as F increases by 1, C decreases by 1.02.

(A) II only (B) I and II only
(C) I and III only (D) II and III only
(E) I, II, and III

29. A line has parametric equations $x = 5 + t$ and $y = 7 + t$, where t is the parameter. The slope of the line is

(A) $\dfrac{5}{7}$ (B) 1 (C) $\dfrac{7+t}{5+t}$
(D) $\dfrac{7}{5}$ (E) 7

30. What is the range of the function defined by $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$?

(A) All real numbers
(B) All real numbers except $-\dfrac{1}{2}$
(C) All real numbers except 0
(D) All real numbers except 2
(E) All real numbers between 2 and 3

31. The number of hours of daylight, d, in Hartsville can be modeled by $d = \dfrac{35}{3} + \dfrac{7}{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{365}t\right)$, where t is the number of days after March 21. The day with the greatest number of hours of daylight has how many <u>more</u> daylight hours than May 1? (March and May have 31 days each. April and June have 30 days each.)

(A) 0.8 hr (B) 1.5 hr (C) 2.3 hr
(D) 3.0 hr (E) 4.7 hr

	Day 1	Day 2	Day 3
Model X	20	18	3
Model Y	16	5	8
Model Z	19	11	10

32. The table above shows the number of digital cameras that were sold during a three-day sale. The prices of models X, Y, and Z were \$99, \$199, and \$299, respectively. Which of the following matrix representations gives the total income, in dollars, received from the sale of the cameras for each of the three days?

(A) $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 99 & 199 & 299 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 99 \\ 199 \\ 299 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 99 & 199 & 299 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 99 \\ 199 \\ 299 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

(E) $99 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} + 199 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} + 299 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

ANSWERS

The estimated difficulty level, on a scale of 1 to 5, with 1 the easiest and 5 the most difficult, is in parentheses.

Mathematics Level 1

1. B (2)	5. C (3)	9. D (4)	13. A (4)
2. A (2)	6. D (4)	10. B (3)	14. C (4)
3. C (2)	7. D (3)	11. B (3)	15. E (3)
4. A (3)	8. E (3)	12. D (4)	16. C (5)

Mathematics Level 2

17. D (2)	21. E (4)	25. A (2)	29. B (3)
18. E (2)	22. A (3)	26. E (4)	30. D (3)
19. C (4)	23. E (3)	27. D (4)	31. A (4)
20. C (4)	24. A (4)	28. D (4)	32. C (3)

Question Booklet

Examination for Japanese University Admission
for International Students (Trial)

Mathematics (80min)

【Course 1 • Course 2】

(Select either of these courses and answer their questions only.)

I. Important Rules and Information

1. Do not open this question booklet until permission to start the examination has been given.
2. This question booklet has 24 pages.
3. You must mark your answers on the answer sheet with an HB pencil.
4. You may write notes in the margins of the question booklet.
5. You may not leave the room with this question booklet, even after the examination is over.
6. Write your name and examination registration number in space provided below, in the same way that they appear on your examination voucher.

II. Answering Method

1. Each letter $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, etc. in the questions represents a numeral (from 0 to 9) or the minus sign (−). Completely blacken your answer for each letter in the corresponding line of the answer sheet. Write square roots in their simplest form; for example, simplify $\sqrt{12}$ to $2\sqrt{3}$. When writing fractions, attach the minus sign to the numerator, and reduce the fraction to its lowest terms.

【Example】

If your answer to $\dfrac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{CD}}$ is $\dfrac{-\sqrt{3}}{14}$, you would mark your answer as shown below.

【Answer sheet】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

2. Be sure to carefully read the instructions on the answer sheets.

Examination registration number	
Name	

Marking of Your Course Selection

You must indicate your selection the course (Course 1 or Course 2) on the answer sheet. As shown in the example on the right, if you have selected Course 2, circle the label "Course 2" and completely blacken the oval under the label. If you do not properly blacken the appropriate oval, your answers may not be graded.

<Example>

Course	
Course 1	Course 2
○	●

I To fill the blanks $\boxed{A}$ ~ $\boxed{G}$ in the following statements (a)~(e), choose the most appropriate one from several choices listed below each of them.

(a) The fraction $\dfrac{1+\sqrt{5}}{-2+\sqrt{5}}$ is equal to $\boxed{A}$.

① $-7-3\sqrt{5}$ ② $-7+3\sqrt{5}$ ③ $7-3\sqrt{5}$ ④ $7+3\sqrt{5}$

(b) Let x and y be real numbers. Among the following statements concerning x and y, an incorrect statements is $\boxed{B}$.

① If both of $x+y$ and xy are positive numbers, both of x and y are also positive numbers.

② If $x+y$ is an irrational number, at least one of x and y is also an irrational number.

③ If x and y are integers, and x^2+y^2 is an odd number, either x or y is also an odd number.

④ The inequality $|x|<|y|$ is a necessary and sufficient condition for the inequality $x^2<y^2$.

⑤ The inequality $x^2<y^2$ is a sufficient condition for the inequality $x<y$.

(c) The graph of the fractional function $y=\dfrac{x}{x-2}$ is obtained from the graph of $y=\dfrac{2}{x}$ by parallel displacement. This parallel displacement is $\boxed{\mathsf{C}}$.

① by 2 in the positive direction of the x-axis

② by 2 in the negative direction of the x-axis

③ by 2 in the positive direction of the x-axis and by 1 in the positive direction of the y-axis

④ by 2 in the positive direction of the x-axis and by 1 in the negative direction of the y-axis

⑤ by 2 in the negative direction of the x-axis and by 1 in the positive direction of the y-axis

⑥ by 2 in the negative direction of the x-axis and by 1 in the negative direction of the y-axis

(d) For real numbers p and q, consider the matrix

$$M=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & -p \end{pmatrix}.$$

i. If $q=\boxed{\mathsf{D}}$ then M does not have an inverse matrix.

ii. If $q=\boxed{\mathsf{E}}$ then $M^2=I$. Here I denotes the unit matrix.

① $-p$ ② p^2 ③ $-p^2$ ④ p^2-1 ⑤ $1-p^2$

(e) A box contains 2 red balls and 3 white balls. A trial is to take one ball at random out of the box. Repeat this trial 4 times, without putting balls back to the box that have previously been taken out.

i. The probability for which 2 red balls are included in the set of 4 balls taken out is $\boxed{\mathsf{F}}$.

ii. Subject to the condition that the ball taken out in the first trial is a white ball, the "conditional probability" for which 2 red balls are included in the set of 4 balls taken out is $\boxed{\mathsf{G}}$.

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{3}{5}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{II}}$ The symbol $-$ (minus sign) or one of the digits: 0, 1, …, 9 corresponds to each of the letters **A**, **B**, …, **M** included in boxes of the following statements (a)～(d). Choose an appropriate sign or digit for each of those letters.

(a) If a cubic equation of x with real coefficients

$$x^3-ax^2+bx-4=0$$

has a complex root $1+i$, then $a=\boxed{\text{A}}$ and $b=\boxed{\text{B}}$.

(b) Let C be the circle given by the equation

$$x^2+y^2+4x-6y-12=0.$$

i. The coordinates of the center of C is $\left(\boxed{\text{CD}}, \boxed{\text{E}}\right)$ and the radius of C is $\boxed{\text{F}}$.

ii. Draw a tangential line of C which passes the point $\mathrm{P}(6, -1)$. The distance between the point P and the point of tangency is $\sqrt{\boxed{\text{GH}}}$.

(c) The solutions of the equation

$$(\log_2 64x)\left(\log_2 \frac{16}{x}\right)=24$$

are $x=\boxed{\mathsf{I}}$ and $x=\dfrac{1}{\boxed{\mathsf{J}}}$.

(d) For the function

$$y=4\sin x+2\cos 2x-2$$

the maximum value is $\boxed{\mathsf{K}}$ and the minimum value is $\boxed{\mathsf{LM}}$.

$\boxed{\text{III}}$ The symbol $-$ (minus sign) or one of the digits: 0, 1, ..., 9 corresponds to each of the letters **A**, **B**, ..., **N** included in boxes of the following statements (a)~(c). Choose an appropriate sign or digit for each of those letters.

(a) Consider a progression

$$1,\ \underbrace{2,\ 2,}_{\text{2 terms}}\ \underbrace{3,\ 3,\ 3,}_{\text{3 terms}}\ \cdots,\ \underbrace{n,\ \cdots,\ n,}_{\text{n terms}}\ \cdots.$$

i. If N is the 70-th term of this progression, then N$=\boxed{\text{AB}}$.

ii. There are $\boxed{\text{C}}$ terms that is equal to N among the first 70 terms.

iii. The sum of the first 70 terms is $\boxed{\text{DEF}}$.

(b) If the lengths of two vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ are 2, 3 respectively, and the angle formed by them is 60°, then the inner product of $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is $\boxed{\text{G}}$ and the length of the vector $\vec{a}+2\vec{b}$ is $\boxed{\text{H}}\sqrt{\boxed{\text{IJ}}}$.

(c) Consider the cubic function

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+4$$

with real numbers a, b as its coefficients. If the derivative $f'(x)$ satisfies

$$f'(x)=3x^2+2x\int_0^2 f(x)dx+4,$$

then

$$a=\boxed{\text{KLM}},\qquad b=\boxed{\text{N}}.$$

IV

The symbol $-$ (minus sign) or one of the digits: 0, 1, …, 9 corresponds to each of the letters A, B, …, K included in boxes of the following statements (a), (b). Choose an appropriate sign or digit for each of those letters.

(a) For the function

$$y=\frac{x^2+3}{x+1}$$

its derivative is

$$y'=\frac{x^2+\boxed{\text{A}}x-\boxed{\text{B}}}{(x+1)^2}.$$

Therefore the values x for which $y'=0$ holds are $x=\boxed{\text{CD}}$ and $x=\boxed{\text{E}}$.

Accordingly, the minimal value of y is $\boxed{\text{F}}$ and the maximal value of y is $\boxed{\text{GH}}$.

(b) For the function

$$y=x+2\sin x$$

its differential coefficient at $x=0$ is $\boxed{\text{I}}$. Within the range of $0 \leqq x \leqq \pi$, $y'=0$ is satisfied when $x=\dfrac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}\pi$.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

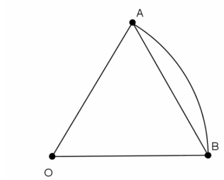
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\operatorname{sen}x)$ con $x\in[0,\ 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r=1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).



4. Sia $r = 2$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x)=\log x$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x)=\log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è δ = 45°? E per quale valore di a è δ = 135°?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y=1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x=-1$.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

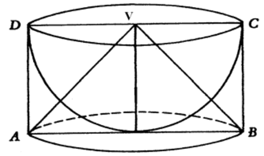
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen}x$ e il cui grafico passa per il punto (0, 2).
2. Sono dati gli insiemi $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B=\{a,\ b,\ c\}$. Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y=x^3+kx^2+3x-4$ ha una sola tangente orizzontale?
4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:
$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.
6. Si calcoli: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.
8. Si provi che l'equazione:
$$x^{2009}+2009x+1=0$$
ha una sola radice compresa fra –1 e 0.
9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. Si determini il periodo della funzione $f(x)=\cos 5x$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

CPE Lyon – EI Purpan – EPMI – ESA – ESCOM – ESEO – ISA – ISARA-Lyon – ISEN Brest – ISEN Lille – ISEN Toulon – ISEP – LASALLE Beauvais – LOUIS DE BROGLIE

SELECTION FESIC

ADMISSION en 1ère ANNEE du 1er CYCLE 2009

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Samedi 16 mai 2009 de 14h. à 16h.30

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

L'usage de la calculatrice est **interdit** ainsi que tout document ou formulaire.

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.

Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).

Toute réponse exacte rapporte un point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

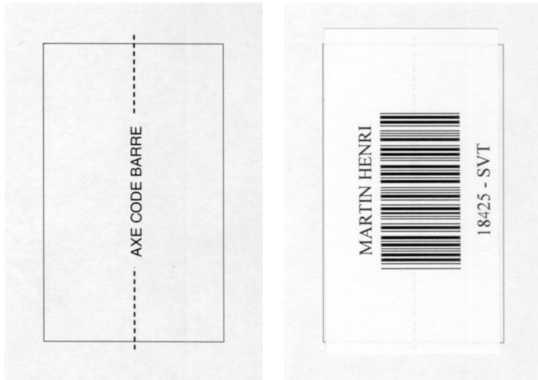
INSTRUCTIONS POUR REMPLIR LA FEUILLE DE REPONSES

Les épreuves de la Sélection FESIC sont des questionnaires à correction automatisée. Votre feuille sera corrigée automatiquement par une machine à lecture optique. Vous devez suivre scrupuleusement les instructions suivantes :

Pour remplir la feuille de réponses, vous devez utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire ou bleue. Ne jamais raturer, ni gommer, **ni utiliser un effaceur**. Ne pas plier ou froisser la feuille.

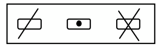
1. Collez l'étiquette code-barres qui vous sera fournie (le code doit être dans l'axe vertical indiqué). Cette étiquette, outre le code-barres, porte vos nom, prénom, numéro de table et matière. Vérifiez bien ces informations.

Exemple :



2. Noircissez les cases correspondant à vos réponses :

Faire



Ne pas faire

Pour modifier une réponse, il ne faut ni raturer, ni gommer, ni utiliser un effaceur. Annuler la réponse par un double marquage (cocher F et V) puis reporter la nouvelle réponse éventuelle dans la zone tramée (zone de droite). La réponse figurant dans la zone tramée n'est prise en compte que si la première réponse est annulée. Les réponses possibles sont :

V	F	V	F	
●	○	○	○	vrai
○	●	○	○	faux
●	●	○	○	abstention
○	○	○	○	abstention
●	●	●	○	vrai
●	●	○	●	faux
●	●	●	●	abstention

Attention : vous ne disposez que d'une seule feuille de réponses. En cas d'erreur, vous devez annuler votre réponse comme indiqué ci-dessus. Toutefois, en cas de force majeure, une seconde feuille pourra vous être fournie par le surveillant.

Exercice n°1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+2}{5x}\right)$. On appelle $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de f, $\mathscr{D}'$ l'ensemble de définition de sa dérivée f' et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a) *Pour tout* $x \in \mathscr{D}$, *on a* $f(x) = \ln(3x+2) - \ln x - \ln 5$.

b) *Pour tout* $x \in \mathscr{D}'$, *on a* $f'(x) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5x}{3x+2}$.

c) $\mathscr{D}' = \mathbb{R} - \left\{0; \dfrac{-2}{3}\right\}$.

d) *On a* $f(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 1$.

Exercice n°2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P un polynôme de degré n et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{P}(x) \times e^{2x-1}$.

a) *Il existe un polynôme* Q *de même degré que* P *(degré* n*) tel que quel que soit* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{Q}(x) \times e^{2x-1}$.

b) *Quels que soient le polynôme* P *et son degré,* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c) *L'inéquation* $e^{2x-1} \geq -3$ *n'a pas de solution.*

d) On suppose ici que P est le polynôme défini par $\mathrm{P}(x) = x^2 + 1$.
On suppose que a, b et c sont trois réels tels que la fonction F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par:* $\mathrm{F}(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x-1}$ *soit une primitive de f. Alors on a le système* $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 1 \end{cases}$.

Exercice n°3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2, \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^x(1 - x) + 1.$$

On admet que l'équation $g(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ et on appelle α cette solution.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a) *La droite d'équation* $y = x + 2$ *est asymptote à* $\mathscr{C}$.

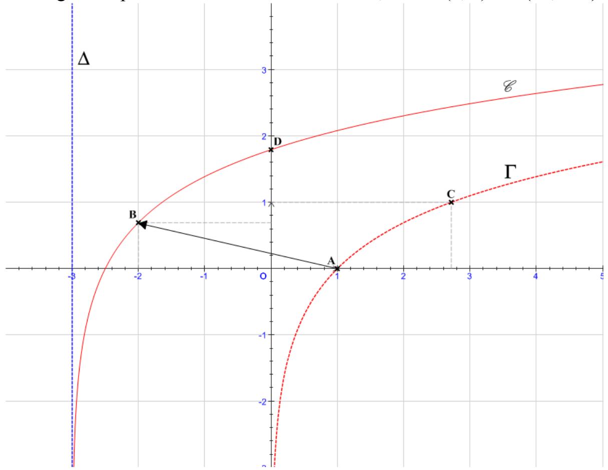
b) g *est décroissante sur* $\mathbb{R}^-$ *et croissante sur* $\mathbb{R}^+$.

c) *Quel que soit* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ *est du signe opposé à* $g(x)$.

d) *On a* $f(\alpha) = \alpha + 1$.

Exercice n°4

On considère le graphique ci-dessous réalisé dans un repère orthonormal.
$\mathscr{C}$ est la représentation d'une fonction f et Γ est celle de la fonction ln (logarithme népérien).
On sait que $\mathscr{C}$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, avec A(1, 0) et B(–2, ln 2).



a) f *est la fonction définie par* $f(x) = \ln(2x + 6)$.

b) *La distance entre deux points* M *et* N *appartenant respectivement à* Γ *et à* $\mathscr{C}$ *et situés à la même ordonnée est constante.*

c) *La tangente à* Γ *en* A *est parallèle à la tangente à* $\mathscr{C}$ *en* B.

d) *La droite* (CD) *est parallèle à la droite* (AB).

Exercice n°5

a) *Quel que soit* $x_0 \in]1, +\infty[$, *on a* $(\ln(\ln(x)))'(x_0) = \dfrac{2\ln x_0}{x_0}$.

b) *L'ensemble des solutions de l'inéquation* $e^{2x} - 3e^x - 4 \geq 0$ *est* $[\ln 4, +\infty[$

c) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
f *est continue en* 0.

d) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par: $g(t) = t \ln t$ pour $t > 0$ et $g(0) = 0$.
La courbe représentant g *dans un repère du plan possède une demi-tangente au point d'abscisse* 0.

Exercice n°6

a) On considère la suite u, définie par: $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

On veut montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$. On tient pour cela le raisonnement par récurrence suivant:
«Soit P(n) l'inéquation "$u_n > 1$".
Initialisation: cas $n = 0$.
$u_0 = 3 > 1$. Donc P(0) est vraie.
Hérédité: Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que P(p) soit vraie. Montrons que P(p + 1) est vraie.
On a $u_p > 1$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $4u_p - 2 > 4\times1 - 2$, soit $4u_p - 2 > 2$. De même $u_p + 1 > 1 + 1$, donc $u_p + 1 > 2$. On en déduit $\dfrac{4u_p - 2}{u_p + 1} > \dfrac{2}{2}$ et donc $u_{p+1} > 1$.
Donc P(p + 1) est vraie.
Conclusion: De ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, on déduit que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P(n) est vraie.»
Ce raisonnement est exact.

b) On considère les fonctions f et g définies respectivement par:

$$x \in \left]\frac{-3}{2}, +\infty\right[\text{ et } f(x) = \ln(2x+3), \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbb{R} \text{ et } g(x) = \frac{e^x - 3}{2}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement f et g dans un repère orthonormal du plan et on appelle Δ la droite d'équation $y = x$.
On veut montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ. On tient pour cela le raisonnement suivant:
«Soient $x \in \left]\frac{-3}{2}, +\infty\right[$, $y \in \mathbb{R}$, M le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées (x, y) et N le point de coordonnées (y, x). Par définition, Δ est médiatrice de [MN]. Or M$\in \mathscr{C}_f$, donc $y = f(x) = \ln(2x + 3)$. On en déduit $2x + 3 = e^y$ et donc $x = \dfrac{e^y - 3}{2}$. Il s'ensuit que le point N appartient à $\mathscr{C}_g$. Ceci étant vrai pour tout point M ainsi défini, c'est que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ.»
Ce raisonnement est exact.

c) On considère la suite u définie par: $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 8}{6}$.

On veut montrer que u est croissante. On tient pour cela le raisonnement suivant:
«Un raisonnement par récurrence prouve que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. Or la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{6}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. On en déduit que u est croissante.»
Ce raisonnement est exact.

d) On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$.
On veut montrer que P(x) est factorisable par $(x - 1)^2$. On tient pour cela le raisonnement suivant:
«On a P(1) = 0. Il existe donc un polynôme Q_1 tel que, pour tout x, $P(x) = (x - 1)Q_1(x)$.
Pour tout x, on a: $P'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$.
Mais aussi: $P'(x) = Q_1(x) + (x - 1)Q'_1(x)$.
Or $P'(1) = 0$. On a donc $Q_1(1) = 0$. Il existe donc un polynôme Q_2 tel que pour tout x, $Q_1(x) = (x - 1)Q_2(x)$, soit aussi $P(x) = (x - 1)^2Q_2(x)$.»
Ce raisonnement est exact.

Exercice n°7

Dans le plan complexe de centre O, on considère les points A, B et C d'affixes respectives:

$$a = \sqrt{3}(1+i), \qquad b = i\sqrt{3}, \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2}(-1+i).$$

a) OABC *est un trapèze.*
b) (OC) *et* (BC) *sont perpendiculaires.*
c) *Le barycentre* G *du système* {(A, 2), (B, –1), (C, 3)} *a pour affixe* $2a - b + 3c$.
d) OABC *possède deux côtés de même longueur.*

Exercice n°8

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation [E]: $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.
Un nombre complexe z étant donné, on note $\bar{z}$ le complexe conjugué de z.

a) [E] *possède au plus 4 solutions.*
b) *Si* z_0 *est une solution de* [E], *alors* $-z_0$, $\overline{z_0}$ *et* $-\overline{z_0}$ *sont d'autres solutions.*
c) *Les solutions de* [E] *ont toutes le même module.*
d) *Les solutions de* [E] *ont toutes le même argument (à* 2π *près).*

Exercice n°9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $a = 1 - i\sqrt{3}$, la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

a) *Le point* A *a les coordonnées polaires* $\left(2, \dfrac{-\pi}{3}\right)$.
b) *L'image de* O *par* r *est le point* B *de coordonnées cartésiennes* $(\sqrt{3}, 1)$.
c) *Le point image de* O *par* $r \circ t$ *est le point* A.
d) *Si* C *est le point d'affixe* c*, alors le point d'affixe* $\dfrac{1}{2}iac$ *est l'image de* C *par la rotation de centre* O *et d'angle* $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice n°10

On considère la fonction φ définie par: $\varphi(t) = \dfrac{e^t}{t}$.

Soient deux réels a et b et la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_a^b \frac{e^t}{t}\cdot dt$.

En particulier, on a $f(0) = \displaystyle\int_a^b \frac{e^t}{t}\cdot dt$. On appelle $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de f.

a) *Si $a = 1$, alors f est définie quel que soit b.*
b) *Si $b = 1$, alors f est définie quel que soit a.*
c) *Si $a = 2$ et $b = 1$, alors $f(0)$ représente l'aire (en unités d'aire) de la surface comprise entre les droites d'équation $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$ et la courbe représentant la fonction φ.*
d) Dans cette question, on suppose $0 < a < b$.
f est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

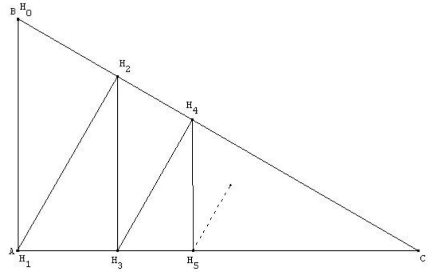
Exercice n°11

On considère les intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\cdot dt$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\cdot dt$.

a) *Quel que soit le réel t,* $\cos^2 t - \sin^2 t = \sin(2t)$.
b) $\mathrm{I} - \mathrm{J} = \dfrac{-1}{2}$.
c) $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \pi$.
d) *L'aire représentée par* I *est la même que celle représentée par* J.

Exercice n°12

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et BC = 8.
On définit la suite des points (H_n) ainsi: $\mathrm{H}_0 = \mathrm{B}$ et H_{n+1} est le projeté orthogonal de H_n sur (AC) si n est pair et sur (BC) si n est impair.
On définit les suites (l_n) et (L_n) par: $l_n = \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}$ et $L_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_n$.



a) $l_1 = \mathrm{H}_1\mathrm{H}_2 = 2$.
b) *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle $\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}$ est un demi-triangle équilatéral.*
c) *La suite (l_n) est géométrique.*
d) *Quand n tend vers $+\infty$, L_n tend vers un nombre fini inférieur à* 30.

Exercice n°13

Si f est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit les dérivées successives de f:
- $f^{(0)} = f$ (lire: la dérivée d'ordre 0 de f est égale à f);
- $f^{(1)} = f'$ (dérivée 1ère de f);
- $f^{(2)} = f''$ (dérivée seconde de f, c'est-à-dire la dérivée de f');
- pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$ (la dérivée $(n+1)$-ième de f est la dérivée de la dérivée n-ième).

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^x$.

On considère la suite (u_n) définie pour $x \in \mathbb{R}$ par: $u_n(x) = \varphi^{(n)}(x)$ (dérivée n-ième de φ calculée en x). Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant la fonction u_n dans un repère du plan.

a) *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n(x) = (x + n)e^x$.*
b) Dans cette question, x est un réel fixé.
La suite (u_n) est une suite arithmétique.
c) Dans cette question, n est un entier naturel fixé.
La fonction u_n est décroissante sur $]-\infty, -n]$ et croissante sur $[-n, +\infty[$.
d) Dans cette question, n est un entier naturel fixé.
La courbe $\mathscr{C}_n$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$.

Exercice n°14

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\times 3^{2k}$ *vaut 1 milliard.*

b) *Pour un département donné, on peut faire plus de plaques minéralogiques de véhicules composées de 4 chiffres et 2 lettres que de plaques composées de 3 chiffres et 3 lettres. (On supposera que tous les chiffres et toutes les lettres de l'alphabet sont utilisables).*

c) Un dé est pipé de sorte que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro de cette face.

La probabilité d'apparition du 3 *est* $\frac{1}{7}$.

d) *Un parking dispose de 10 places libres. Il y a* $\binom{10}{3}$ *possibilités de ranger 3 voitures dans ce parking.*

Exercice n°15

Un dé cubique équilibré possède 4 faces noires et 2 faces blanches. Un $2^{\text{ème}}$ dé équilibré ayant la forme d'un tétraèdre régulier possède 3 faces blanches et 1 face noire. On choisit un dé au hasard et on le lance.

a) *La probabilité que la face cachée soit noire est* 0,5.

b) *La probabilité que le dé choisi soit cubique sachant que la face cachée est blanche est* $\frac{4}{13}$.

Une variable aléatoire X (en minutes) suit une loi de répartition uniforme sur [10, 30].

c) *L'espérance associée à* X *est* 10mn.

d) *La probabilité d'avoir* $X \leq 25$ *sachant que l'on a* $X \geq 15$ *est* $\frac{1}{2}$.

Exercice n°16

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

a) *L'ensemble des points* $M(x, y, z)$ *pour lesquels il existe* $k \in [-1, 1]$ *vérifiant le système* $\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = -k+2 \\ z = 3k-1 \end{cases}$ *est le segment* [AB], *où on a* $A(1, 2, -1)$ *et* $B(5, 0, 5)$.

b) *Le plan d'équation* $2x - 3y + z + 1 = 0$ *possède le vecteur* $\vec{n}\,(-2, 3, -1)$ *pour vecteur normal.*

c) *La droite d'équation paramétrique* $\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = -k+2 \\ z = 3k-1 \end{cases}$, *avec* $k \in \mathbb{R}$, *est perpendiculaire au plan d'équation cartésienne* $2x - y + 3z - 1 = 0$.

d) *L'ensemble des points* $M(x, y, z)$ *vérifiant le système* $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ *est une droite.*

Ministério da Educação

GAVE GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase — 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n-\mu)^2 p_n}$

Se X é N(μ, σ), então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.

Não apresente cálculos nem justificações.

1. De um baralho com 40 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus), em que cada naipe contém um Ás, uma Dama, um Valete, um Rei e seis cartas (do Dois ao Sete), foram dadas sucessivamente, ao acaso, seis cartas a um jogador, que as coloca na mão, pela ordem que as recebe.

Qual é a probabilidade de o jogador obter a sequência $2 - 4 - 6 - 7 -$ Dama $-$ Rei, nas cartas recebidas?

(A) $\dfrac{4^6}{{}^{40}A_6}$ **(B)** $\dfrac{4^6}{{}^{40}C_6}$ **(C)** $\dfrac{1}{{}^{40}A_6}$ **(D)** $\dfrac{1}{{}^{40}C_6}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(A \cup B) = 0{,}5$

(P designa probabilidade.)

Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?

(A) $\dfrac{1}{6}$ **(B)** $\dfrac{1}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$

3. Considere uma variável aleatória X, cuja distribuição de probabilidades é dada pela tabela seguinte.

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\dfrac{k}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{k}{4}$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Seja x um número real positivo.

Qual das expressões seguintes é igual a $e^{4\ln x} - 10^{2\log x}$?

($\ln$ designa logaritmo de base e; $\log$ designa logaritmo de base 10.)

(A) $\ln x^4 - \log x^2$ **(B)** $x^4 + x^2$ **(C)** $x^4 - x^2$ **(D)** $\dfrac{\ln x^4}{\log x^2}$

5. Para um certo número real positivo k, é contínua a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(k + x) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

6. Na figura 1, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

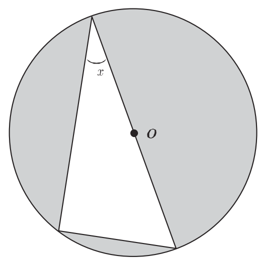


Fig. 1

Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada?

(A) $\pi - \operatorname{sen}(2x)$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(2x)$ **(C)** $\pi - 2\operatorname{sen}(2x)$ **(D)** $\pi - \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$

7. Seja z um número complexo, em que um dos argumentos é $\frac{\pi}{3}$.

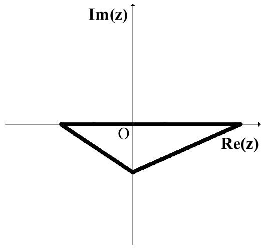
Qual dos valores seguintes é um argumento de $\frac{2i}{\bar{z}}$, sendo $\bar{z}$ o conjugado de z?

(A) $\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{2}{3}\pi$ **(C)** $\frac{5}{6}\pi$ **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

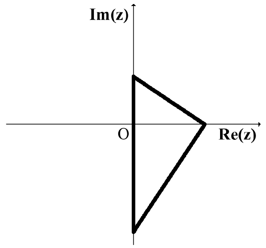
8. Seja b um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.

Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?

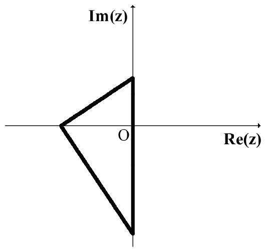
(A)



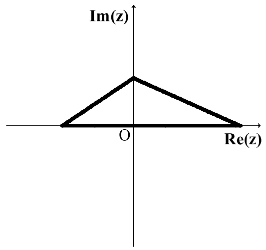
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = \text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$.

1.1. Determine z_1 na forma trigonométrica, **sem recorrer à calculadora.**

1.2. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-i\, z_2)^n = -1$.

2. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: 1551414).

Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

3. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde, e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

3.1. Determine a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Na mesma experiência aleatória, considere os acontecimentos:

A: «A 1.ª bola retirada é verde.»

B: «A 2.ª bola retirada é amarela.»

C: «O número da 2.ª bola retirada é par.»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P((B \cap C) \mid A)$?

A resposta correcta a esta questão é $P((B \cap C) \mid A) = \frac{5}{19}$.

Numa pequena composição, **sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada**, explique o valor dado, começando por interpretar o significado de $P((B \cap C) \mid A)$, no contexto da situação descrita e fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

4. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$;
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assimptotas oblíquas.

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$.

5.1. Mostre, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0{,}1;\ 0{,}3[$.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

5.2. O gráfico de g contém um único ponto A com abcissa pertencente ao intervalo $]0,\ 2]$ e cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa.

Traduza esta situação por meio de uma equação.

Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Indique as coordenadas do ponto A, com aproximação às décimas.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Assinale o ponto A em que se baseou para dar a sua resposta.

6. Sejam as funções f e h, de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respectivamente, definidas por $f(x) = \log_2(x-1)$ e por $h(x) = \log_2(2-x)$.

Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$.

Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

7. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em $\mathrm{mg/l}$, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por

$$C(t) = 2t\,e^{-0{,}3t} \qquad (t \geq 0)$$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

7.1. Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

7.2. Determine a que horas se verificou a concentração máxima.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)		**40 pontos**
GRUPO II			**160 pontos**
1.		30 pontos	
1.1.	15 pontos		
1.2.	15 pontos		
2.		15 pontos	
3.		30 pontos	
3.1.	15 pontos		
3.2.	15 pontos		
4.		15 pontos	
5.		30 pontos	
5.1.	15 pontos		
5.2.	15 pontos		
6.		15 pontos	
7.		25 pontos	
7.1.	10 pontos		
7.2.	15 pontos		
TOTAL			**200 pontos**