

**ALGORITMO BI-OBJETIVO PARA EL PROBLEMA DE ENRUTAMIENTO ÓPTIMO
DE VEHÍCULOS, CONSIDERANDO FLOTA HETEROGÉNEA Y EFECTOS
AMBIENTALES**

LUZ ÁNGELA FLÓREZ CALDERÓN

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en
Investigación Operativa y Estadística**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Facultad de Ingeniería Industrial
Maestría en Investigación Operativa y Estadística
Grupo de investigación en aplicaciones de técnicas de optimización y procesos
estocásticos –GAOPE
Pereira
2016**

**ALGORITMO BI-OBJETIVO PARA EL PROBLEMA DE ENRUTAMIENTO ÓPTIMO
DE VEHÍCULOS, CONSIDERANDO FLOTA HETEROGÉNEA Y EFECTOS
AMBIENTALES**

LUZ ÁNGELA FLÓREZ CALDERÓN

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en
Investigación Operativa y Estadística**

**Director(a) de proyecto de grado:
Ph.D. Mauricio Granada**

**Codirector(a) de proyecto de grado:
Ph.D. Eliana Mirledy Toro Ocampo**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Facultad de Ingeniería Industrial
Maestría en Investigación Operativa y Estadística
Grupo de investigación en aplicaciones de técnicas de optimización y procesos
estocásticos –GAOPE.
Pereira
2016**

NOTA DE APROBACIÓN

Mauricio Granada Echeverri
Director

Eliana Mirledy Toro Ocampo
Codirector

Evaluador

Evaluador

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos sinceros a las personas que de una u otra forma aportan en mi vida para la realización de este trabajo:

A Dios por la vida, las bendiciones recibidas y las oportunidades futuras.

A mi director del trabajo Mauricio Granada por su apoyo, exigencias y aportes en el desarrollo del trabajo.

A mi codirectora Eliana Mirledy Toro por su enseñanza, apoyo y motivación y por permitirme participar del grupo de investigación GAOPE y aprender de los procesos de investigación.

A mi familia por su compañía y comprensión en todos los procesos de la vida.

A mi futuro esposo por su apoyo incondicional y por su motivación permanente.

Al programa de maestría en investigación operativa y estadística por todo el conocimiento impartido.

A la universidad Tecnológica de Pereira por su formación académica.

Contenido

| | |
|--|-----------|
| Resumen | 10 |
| Abstract | 10 |
| Introducción | 11 |
| Justificación | 13 |
| 1. Objetivos | 14 |
| 1.1. Objetivo General | 14 |
| 1.2. Objetivos específicos | 14 |
| 2. Diseño metodológico | 15 |
| 3. Revisión del estado del arte | 16 |
| 3.1. Definición del problema general de ruteamiento de vehículos | 16 |
| 3.2. Clasificación del problema de ruteamiento de vehículos | 16 |
| 3.3. Descripción detallada del HFVRP | 22 |
| 3.3.1. Modelos matemáticos para el VRP y HFVRP | 23 |
| 3.3.2. Casos de prueba de la literatura para el HFVRP | 25 |
| 3.3.3. Técnicas de solución del VRP | 25 |
| 3.3.4. Técnicas de solución del HFVRP | 29 |
| 3.4. Algoritmos evolutivos Multiobjetivos..... | 30 |
| 3.5. Revisión de modelos matemáticos en las variantes VRP considerando efectos ambientales | 31 |
| 3.5.1. Técnicas de solución del problema VRP con efectos ambientales | 43 |
| 4. Metodología implementada | 45 |
| 4.1. Generalidades..... | 45 |
| 4.2. Descripción detallada del algoritmo | 47 |
| 4.2.1. Ajuste de parámetros de inicio..... | 50 |
| 4.2.2. Generación de la población inicial..... | 52 |
| 4.2.3. Descripción de la formulación Set Partitioning..... | 59 |
| 4.2.4. Costos y medición del efecto ambiental por consumo de combustible..... | 61 |
| 4.2.5. Interfaz Matlab - GAMS..... | 66 |
| 4.2.6. Técnicas de Selección | 68 |
| 4.2.7. Mecanismos de perturbación de las rutas | 68 |
| 4.2.8. Modificación de la población | 74 |
| 4.2.9. Frente de Pareto..... | 74 |

| | |
|--|-----------|
| 5. Resultados | 77 |
| 5.1. Descripción | 77 |
| 5.2. Resultados de las instancias de Taillard (1999) y sus modificaciones..... | 78 |
| 5.3. Análisis de resultados | 87 |
| Conclusiones | 88 |
| Recomendaciones | 89 |
| Trabajos futuros | 90 |
| Referencias bibliográficas | 91 |
| Anexos | 95 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| Tabla 1. Técnicas de solución para el HFVRP..... | 30 |
| Tabla 2. Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales..... | 39 |
| Tabla 3. Técnicas de solución para el VRP considerando efectos ambientales..... | 43 |
| Tabla 4. Numero de iteraciones de acuerdo al tamaño del problema..... | 51 |
| Tabla 5. Datos para un problema de 3 clientes y 1 depósito..... | 64 |
| Tabla 6. Resultados obtenidos para un problema de 3 clientes y 1 depósito..... | 64 |
| Tabla 7. Resultados para las instancias FSM-F con costos fijos..... | 78 |
| Tabla 8. Resultados para las instancias FSM-F con costos fijos para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo..... | 79 |
| Tabla 9. Resultados para las instancias FSM-FV con costos fijos y variables..... | 80 |
| Tabla 10. Resultados para las instancias FSM-FV con costos fijos y variables para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo..... | 80 |
| Tabla 11. Resultados para las instancias HVRP-FV con costos fijos y variables y flota limitada..... | 83 |
| Tabla 12. Resultados para las instancias HVRP-FV con costos fijos y variables para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo..... | 83 |
| Tabla 13. Resultados para las instancias HVRP-V con costos variables y flota limitada..... | 85 |
| Tabla 14. Resultados para las instancias HVRP-V con costos variables para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo..... | 85 |

Índice de Figuras

| | |
|---|----|
| <i>Figura 1. Representación de una solución con 4 rutas al problema de VRP</i> | 16 |
| <i>Figura 2. Clasificación del problema de ruteamiento de vehículos</i> | 17 |
| Figura 3. Representación del problema de ruteamiento de vehículos con flota heterogénea | 22 |
| <i>Figura 4. Heurística de barrido</i> | 27 |
| <i>Figura 5. Diagrama de Flujo. Algoritmo bi-objetivo propuesto para HFVRP considerando efectos ambientales</i> | 48 |
| <i>Figura 6. Diagrama de flujo de la técnica del vecino más cercano</i> | 53 |
| Figura 7. Representación de una población inicial de 5 individuos con 10 clientes | 54 |
| Figura 8. Representación de un conjunto de rutas perteneciente a un individuo de la población inicial | 54 |
| <i>Figura 9. Diagrama de flujo generación de rutas factibles</i> | 56 |
| <i>Figura 10. Heurística de barrido</i> | 57 |
| <i>Figura 11. Diagrama de flujo para la técnica de barrido</i> | 58 |
| <i>Figura 12. Comparación de resultados con dos funciones objetivo: distancia y carga del vehículo</i> | 65 |
| Figura 13. Frente de Pareto para un ejemplo de 3 clientes y 1 depósito | 66 |
| Figura 14. Interfaz entre Matlab y Gams en el algoritmo. | 67 |
| Figura 15. Ejemplo de swap 1-1..... | 69 |
| Figura 16. Ejemplo de Shift 1-0 | 69 |
| Figura 17. Ejemplo de Shift de cliente y vehículo..... | 70 |
| Figura 18. Ejemplo de Shift 2-0 | 70 |
| Figura 19. Ejemplo k shift | 71 |
| Figura 20. Ejemplo Cross | 71 |
| Figura 21. Ejemplo Or-opt1 | 71 |
| Figura 22. Ejemplo Or-opt2 | 72 |
| Figura 23. Ejemplo 2-opt..... | 72 |

| | |
|--|----|
| Figura 24. Ejemplo Exchange | 72 |
| Figura 25. Diagrama de flujo general de los mecanismos de perturbación | 73 |
| Figura 26. Diagrama de generación de soluciones para conformación del frente de Pareto..... | 75 |
| Figura 27. Representación gráfica de la mejor solución para la instancia 3-20 en la función objetivo de distancia y carga..... | 81 |
| Figura 28. Representación gráfica de la evolución de los frentes en el compromiso de distancia y carga del vehículo, con 30 generaciones del algoritmo..... | 81 |
| Figura 29. Representación gráfica del primer frente en el compromiso de distancia y carga del vehículo en la instancia 3-20..... | 82 |
| Figura 30. Representación gráfica de la mejor solución para la instancia 13-50 en la función objetivo de distancia y carga, con flota fija y costos fijos y variables..... | 84 |
| Figura 31. Representación gráfica de la evolución del algoritmo y del primer frente en el compromiso de distancia y carga del vehículo en la instancia 13-50, con flota fija y costos fijos y variables..... | 84 |
| Figura 32. Representación gráfica de la mejor solución para la instancia 13-50 en la función objetivo de distancia y carga, con flota fija y costos variables..... | 86 |
| Figura 33. Representación gráfica de la evolución del algoritmo y del primer frente en el compromiso de distancia y carga del vehículo en la instancia 13-50 con flota fija y costos variables..... | 86 |

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de ruteo de vehículos con flota heterogénea, más conocido por su sigla *HFVRP* (del inglés *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*), considerando la minimización de efectos contaminantes.

En este problema, una flota de vehículos de diversas capacidades y costos, parten de un depósito central para atender diferentes demandas, considerando la minimización de la distancia recorrida y del consumo de combustible, como objetivos principales, a través de las variables de distancia y peso del vehículo cargado.

Un algoritmo bi-objetivo es propuesto para la solución del problema, el cual, se basa en un híbrido entre técnicas exactas y metaheurísticas para evaluar las alternativas de solución. Finalmente, se han usado datos de prueba que fueron tomados de instancias de la literatura, obteniendo resultados de buena calidad para validar el algoritmo y proponiendo soluciones para la minimización de emisiones contaminantes.

Abstract

This paper has studied the Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem, best known for his initials HFVRP, considering the minimization of pollutant effects.

In this problem, a fleet of vehicles of various capacities and costs, starting from a central repository to serve different demands, considering minimizing the distance traveled and fuel consumption, as main objectives, through variables like distance and weight of the loaded vehicle.

A bi-objective algorithm is proposed for solving the problem, which is based on a hybrid between metaheuristics and exact techniques and it evaluate alternative solutions. Finally, has used test data were taken from instances of literature, obtaining good quality results to validate the algorithm and proposing solutions to minimize emissions.

Introducción

El problema de ruteo de vehículos, en inglés, *Vehicle Routing Problem* (VRP), se genera en la necesidad diaria de miles de organizaciones, de la gestión óptima de la distribución o recolección de bienes o el transporte de personas (Cordeau et al, 2007).

Los problemas de ruteo de vehículos se fundamentan en una generalización del problema del agente viajero, en inglés, *Traveling Salesman Problem* (TSP), en el cual, existen múltiples agentes viajeros denominados vehículos, con capacidad determinada, y una demanda asociada a cada cliente que es visitado por los vehículos. El objetivo puede ser minimizar la suma de la distancia recorrida por todas las rutas, el número de vehículos, o una combinación de ambos criterios.

Estos problemas han sido investigados por más de 50 años, siendo de gran interés por la complejidad de los mismos, dada la explosión combinatorial de posibles soluciones, considerado Np-hard de difícil solución. Sin embargo, recientes investigaciones han combinado las variantes del VRP, centrándose en nuevos objetivos, tales como, la minimización de emisiones contaminantes, a través de la reducción del consumo de combustible.

En este trabajo, se pretende abordar el problema de ruteo de vehículos con flota heterogénea, conocido en inglés como *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem* (HFVRP), el cual, supone una flota de vehículos de diversas capacidades y costos, que parten de un depósito central para atender diferentes demandas determinísticas, considerando la minimización de la distancia recorrida y del consumo de combustible, como objetivos principales, a través de las variables de distancia y peso del vehículo cargado.

En la metodología de solución del problema, un algoritmo bi-objetivo es propuesto, el cual, utiliza un híbrido entre técnicas exactas y metaheurísticas para evaluar las alternativas de solución de 2 funciones objetivo. El algoritmo es probado mediante instancias de la literatura, permitiendo proponer soluciones en la reducción de emisiones contaminantes, considerando flota heterogénea.

El trabajo es desarrollado de la siguiente manera: En la primera parte se ha hecho una exploración y descripción del problema de VRP y sus variantes. En la segunda parte, se ha desarrollado una revisión de la literatura acerca de los modelos desarrollados y las técnicas de solución implementadas en la solución de problemas que han considerado efectos ambientales, así como, en la variante de flota heterogénea y técnicas multiobjetivo. En la tercera parte, se ha presentado una descripción del método de solución, presentando el modelo matemático, y una descripción detallada

del algoritmo propuesto para la solución del mismo. En la cuarta parte, se presentan los resultados para instancias de la literatura en la variante de flota heterogénea, y se proponen resultados en la minimización de emisiones contaminantes, en las variables de distancia y carga del vehículo. Finalmente se presentan las principales conclusiones y recomendaciones asociadas al trabajo.

Justificación

La tasa de crecimiento de la actividad comercial de vehículos de transporte ha generado grandes preocupaciones en torno a la disminución de su impacto negativo sobre el medio ambiente. A nivel mundial, los vehículos de transporte contribuyen con cerca del 23% de la energía total relacionada con emisiones de dióxido de carbono (CO₂), de los cuales el 8 % es asociado al transporte urbano de mercancías a través de vehículos heterogéneos (McKinnon, 2008). Actualmente existen grandes presiones sociales, ambientales y políticas para limitar los efectos asociados con el consumo de combustibles fósiles, reducción de las Emisiones de Gases de Efecto Invernadero (EGEI) y en general, con la minimización de los impactos negativos sobre el medio ambiente.

Adicionalmente, los costos asociados al transporte tienen un impacto sobre el valor final de los productos, que los consumidores finales deben pagar, haciendo de gran importancia la gestión eficiente de las cadenas de suministro.

Diversos casos de estudio, modelos y técnicas de solución se encuentran en la literatura, para cada una de las variantes del VRP, sin embargo, recientes investigaciones han incorporado la reducción de emisiones como objetivo principal en problemas de VRP, mediante el diseño de rutas óptimas, reducción de distancias, consumo de combustible, e incorporación de flotas de vehículos eléctricos.

En el contexto regional se requiere sin duda solucionar diversos problemas de transporte, entre los que se incluye la solución a problemas de tipo operativo en las organizaciones que deben tomar decisiones a diario sobre el diseño de rutas óptimas, sus costos operativos y su responsabilidad con el medio ambiente.

Esta investigación pretende suministrar un algoritmo que permita adaptarse a la solución de problemas de enrutamiento óptimo, con flotas de diversas capacidades, encontrando un equilibrio entre los costos de operación y la minimización de impactos negativos al medio ambiente. Dicho algoritmo fusiona técnicas exactas, heurísticas y metaheurísticas, así como, técnicas multiobjetivo.

En los casos presentados en la literatura se ha dado solución al problema de enrutamiento óptimo de vehículos con flota heterogénea, y se ha considerado la minimización de consumo de combustible, no obstante, se propondrá un algoritmo bi-objetivo en la solución, así como, involucrar las variables distancia y carga del vehículo.

1. Objetivos

1.1. Objetivo General

Diseñar e implementar una metodología para solucionar el problema de ruteamiento óptimo de vehículos considerando una flota de vehículos heterogénea y la minimización del consumo de combustible.

1.2. Objetivos específicos

Realizar una revisión del estado del arte, que permita estudiar diferentes modelos matemáticos que describan el problema HFVRP considerando la reducción de emisiones.

Caracterizar las variables de decisión, restricciones y el tipo de modelo cuantitativo que describa el problema HFVRP y se adapte a los requerimientos sobre reducción de emisiones.

Definir un modelo ajustado a la realidad para el problema de HFVRP, que pueda ser resuelto por técnicas exactas y metaheurísticas y determinar una técnica multiobjetivo de solución para aplicar al problema.

Proponer una metodología y su adaptación para solucionar el problema HFVRP considerando la reducción de emisiones y aplicarla a casos de prueba de la literatura, con el fin de verificar su validez.

2. Diseño metodológico

Para el objeto de estudio de este trabajo, se deben seguir varias fases, en las cuales, la *primera etapa de investigación es de tipo exploratoria* y se orienta a la identificación y caracterización de las variables de decisión, restricciones y el tipo de modelo cuantitativo que se ajusta al problema de VRP considerando flota heterogénea y minimización de emisiones contaminantes.

Para ello se realizará una revisión bibliográfica de los tipos de modelos cuantitativos que han abordado diferentes autores, para resolver los problemas que de VRP y para considerar la minimización de efectos ambientales negativos reduciendo el consumo de combustible.

En esta etapa de la investigación se debe identificar los aportes que han realizado otros autores a la solución de problemas similares de VRP, así como, los aportes y enfoques que han utilizado para abordar el problema de minimización de emisiones contaminantes, lo cual permitirá compararlos e identificar las variables y restricciones a tener en cuenta en la solución del problema propuesto.

La *segunda etapa de investigación es de tipo experimental*, en la cual, se propone resolver un modelo matemático mediante la utilización de técnicas exactas y metaheurísticas, a través de un algoritmo bi-objetivo. Esto supone el diseño e implementación de una metodología de solución, a través, de un nuevo algoritmo. El algoritmo se aplicará a casos de prueba del problema HFVRP (*del inglés Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*) de la literatura para verificar su validez.

3. Revisión del estado del arte

3.1. Definición del problema general de ruteamiento de vehículos

El problema de enrutamiento óptimo de vehículos ha sido ampliamente estudiado, generándose una gran diversidad de variantes. El modelo VRP básico considera un conjunto de clientes $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ubicados en n lugares diferentes, los cuales presentan una demanda de bienes que debe ser atendida por una flota de vehículos de capacidad ilimitada, que parte de un depósito central denotado por 0 (Cordeau, Laporte, Savelsbergh, & Vigo, 2007). La figura 1 representa el aspecto de una solución al problema.

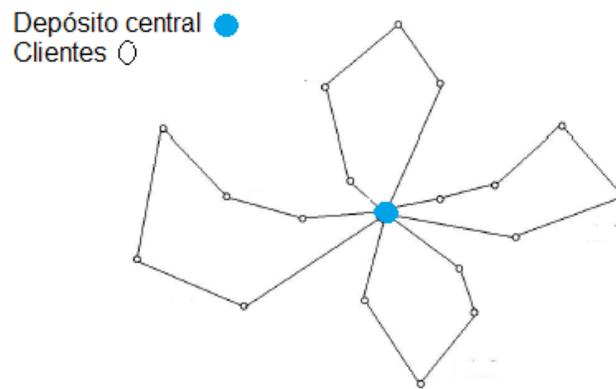


Figura 1. Representación de una solución con 4 rutas al problema de VRP
Fuente: elaboración propia

Cada pareja de ubicaciones (i, j) donde $i, j \in N$ y $i < j$, está asociada a una distancia $d_{ij} = d_{ji}$, o bien, a un costo de viaje $C_{ij} = C_{ji}$. Los vehículos deben partir y regresar al depósito para reunir la carga necesaria para cada cliente. La variable de decisión denotada por X_{ij}^k es de tipo binario, donde $X_{ij}^k = 1$ representa que el cliente j es atendido después del cliente i por el vehículo k . El problema puede ser representado por un grafo $G = \{N, A\}$ donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es un conjunto de vértices. Cada vértice $i \in N \setminus \{0\}$ representa un cliente o un lugar y el vértice 0 corresponde al depósito. A representa el conjunto de arcos $A = \{(i, j) : i, j \in N, i < j\}$ asociados a la distancia o al costo de viaje.

3.2. Clasificación del problema de ruteamiento de vehículos

Dentro de las variantes del problema de ruteamiento óptimo de vehículos, se encuentra diversidad de consideraciones. La figura 2 presenta una clasificación de todas las variantes.

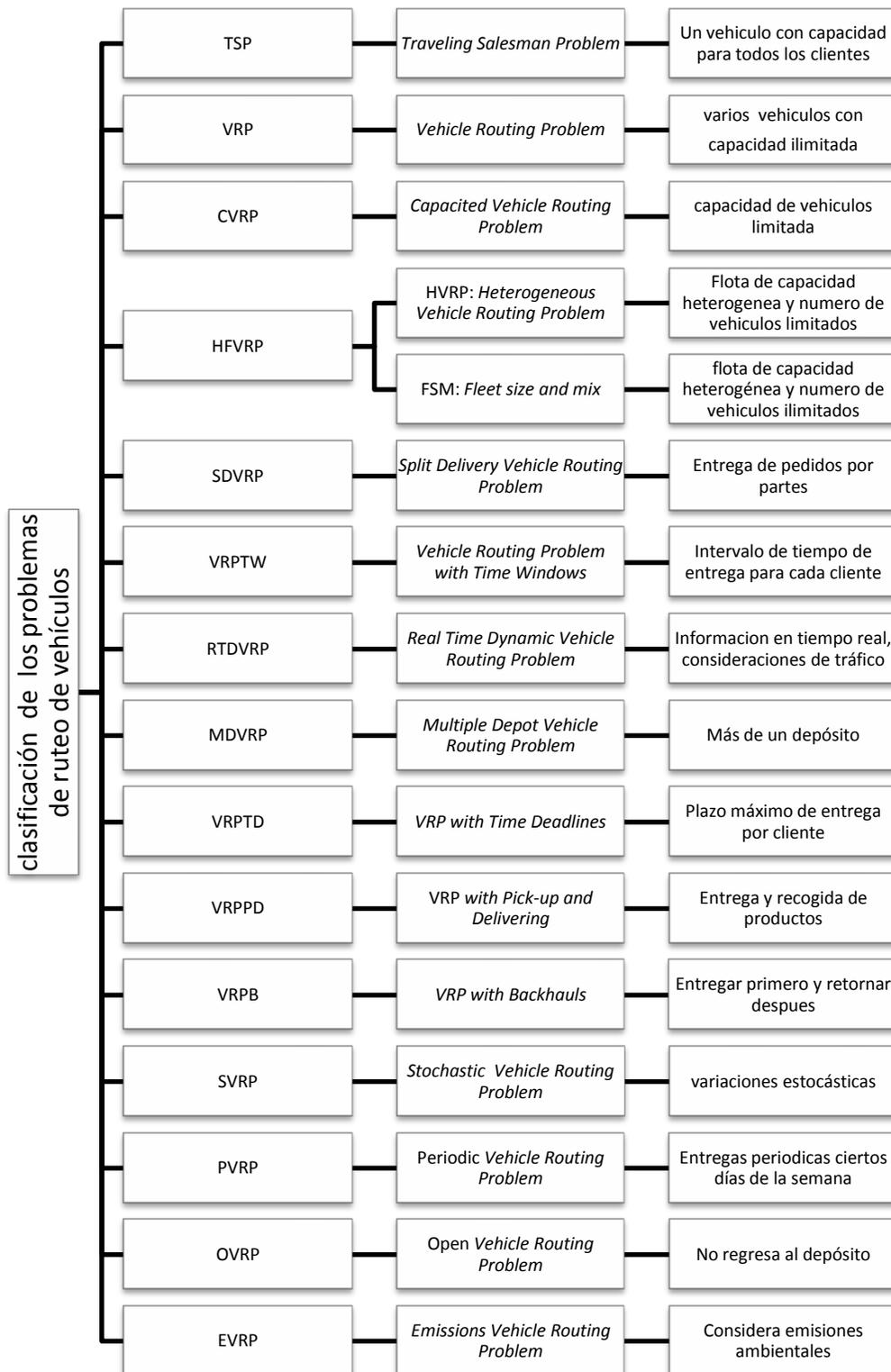


Figura 2. Clasificación del problema de ruteamiento de vehículos

Fuente: Elaboración propia

A continuación se presenta una breve descripción de cada una de las variantes

TSP: Cuando solo se tiene un vehículo y la capacidad de éste es suficiente para cubrir la demanda de todos los clientes, el problema se reduce al bien conocido problema del agente viajero (TSP del inglés *Traveling Salesman Problem*), en el cual una única ruta de mínima distancia o costo es encontrada y un conjunto de restricciones elimina la creación de sub-rutas.

VRP: Si se tiene más de un vehículo con capacidad ilimitada, el problema se define como VRP (del inglés *Vehicle Routing Problem*), en el cual, el problema consiste en determinar un conjunto de rutas para los vehículos de mínima distancia o costo, partiendo de un depósito, donde: (1) las rutas comienzan y finalizan en el depósito, y (2) cada cliente es visitado solo una vez por un solo vehículo.

CVRP: Adicionalmente, la capacidad de los vehículos puede ser considerada, dando lugar al CVRP (del inglés *Capacited Vehicle Routing Problem*), en el cual, una flota fija de vehículos de capacidad uniforme Q realiza las entregas a los clientes (Cordeau et al., 2007).

En consecuencia, considera además de las restricciones de VRP las siguientes: (3) la demanda total de una ruta no debe exceder la capacidad máxima del vehículo asignado a la ruta y (4) la longitud de cada ruta no excede un límite pre-establecido L . Las velocidades se asumen constantes, de manera que las distancias, tiempos de viaje y costos de viaje son considerados como sinónimos.

Un problema CVRP puede ser considerado como simétrico o asimétrico. El problema asimétrico considera que $C_{ij} \neq C_{ji}$, lo cual difiere del problema simétrico. Este problema puede ser representado por un Grafo dirigido $G = \{N, A\}$ donde $A = \{(i, j): i, j \in N, i \neq j\}$ es el conjunto de arcos. En este caso un circuito con ciclo dirigido que inicia y finaliza en el depósito representa una ruta de un vehículo.

HFVRP: Los problemas con flota heterogénea (*HFVRP del inglés Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*) son otra variante del clásico VRP. En este caso, la flota de vehículos puede tener distintas capacidades, así como costos fijos y variables. Aquí se conservan las restricciones del CVRP teniendo en cuenta que la demanda total de la ruta no exceda la capacidad del *tipo de vehículo* asignado. El número de vehículos disponibles de cada tipo puede ser considerado como ilimitado, y el objetivo es determinar cuáles vehículos deben ser utilizados para minimizar la suma de costos fijos y variables.

La formulación del problema se ve modificada en la definición de cada tipo de vehículo, generando un conjunto $T = \{1, 2, \dots, m\}$ asociado a los tipos de vehículos, donde el tipo de vehículo $k \in T$ presenta una capacidad máxima, un costo fijo y un costo variable por unidad de distancia recorrida. El costo de que un tipo de vehículo k viaje en el arco (i, j) es obtenido de la multiplicación del costo variable por la distancia recorrida. Y el costo de una ruta r realizada por un vehículo de tipo k , es obtenido por el costo fijo más

la suma de todos los costos de los arcos seleccionados a lo largo de la ruta r , denotado por C_r^k .

Adicionalmente, un conjunto de rutas factibles R debe ser construido, donde R_k representa el conjunto de rutas factibles para el tipo de vehículo k . La factibilidad es definida por las restricciones (1), (2) y (3) ya mencionadas. El objetivo es minimizar la sumatoria de los costos C_r^k asociados a las rutas seleccionadas y a los tipos de vehículos seleccionados, a través de una formulación que usa una variable de decisión binaria x_r^k que indica si el par (r, k) es seleccionado o no. También, usa otra variable de decisión binaria que permite decidir si un cliente es visitado por la ruta r y el tipo de vehículo k o si no, y una variable de decisión entera que indica el número de vehículos de tipo k empleados.

SDVRP: También ha sido considerado entregar los pedidos por partes (Dror, Laporte, & Trudeau, 1994). En este caso la restricción (2) es removida y cada cliente puede ser visitado por más de un vehículo para que su demanda sea satisfecha, dando lugar a una variante más del problema conocido como SDVRP (del inglés *Split Delivery Vehicle Routing Problem*). Aquí no necesariamente la demanda del cliente es menor a la capacidad del vehículo.

VRPTW: Otro tipo de problema es el VRP que considera ventanas de tiempo denominado VRPTW (del inglés *Vehicle Routing Problem with Time Windows*). En este problema la atención a cada cliente i debe ser proporcionada en un intervalo de tiempo $[a_i, b_i]$ definido por el cliente. Generalmente el problema considera una flota de vehículos con capacidades homogéneas y el objetivo se trata de minimizar el costo total de la ruta, lo cual implica minimizar el número de vehículos utilizados o de rutas utilizadas y la distancia recorrida por los mismos (Cordeau et al., 2007).

La solución del problema debe satisfacer además de las restricciones (1), (2) y (3) mencionadas, las siguientes condiciones: Cada cliente debe ser visitado dentro de su respectiva ventana de tiempo y el número de vehículos no es especificado inicialmente, es una variable de decisión. Sin embargo, el problema puede tener algunas variantes, como: puede ser permitido que un vehículo llegue antes del tiempo inicial a_i y espere mientras puede realizar el servicio, pero no es permitido que llegue después del tiempo final b_i , o en otros casos, si el cliente es visitado después del tiempo especificado se recibe una penalización.

La formulación del problema cambia al definir las ventanas de tiempo $[a_i, b_i]$ para cada cliente, así como, el tiempo de servicios s_i y el tiempo de viaje t_{ij} entre cada par de clientes (i, j) . La formulación presentada por Cordeau et al., (2007) para el VRPTW representa al depósito por dos vértices 0 y $n+1$, donde una ruta factible inicia en el vértice 0 y finaliza en el vértice $n+1$. Si no existen restricciones impuestas a la disponibilidad de los vehículos la ventana de tiempo de servicio del depósito $[a_0, b_0]$ y $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ puede ser configurada como $a_0 = \min_{i \in N} [a_i - t_{0i}]$ y $b_0 = \max_{i \in N} [b_i - t_{0i}]$ para el vértice 0 y como $a_{n+1} = \min_{i \in N} [a_i + s_i + t_{i,n+1}]$ y $b_{n+1} = \max_{i \in N} [b_i + s_i + t_{i,n+1}]$ para el vértice $n+1$.

El modelo involucra 2 tipos de variables: X_{ij}^k de tipo binario, donde $X_{ij}^k = 1$ representa que el cliente j es atendido después del cliente i por el vehículo k , similar al problema VRP. La otra variable es de tipo continua w_i^k la cual indica el tiempo en el cual el vehículo k empieza el servicio en el vértice i (cliente i). Adicional a las restricciones (1) (2) y (3) se considera que la conservación de flujo se satisface en cada vértice y una restricción de consistencia de la variable w_i^k que indica, que el tiempo en el cual inicia el servicio al cliente i , más el tiempo de servicio del mismo, más el tiempo de viaje entre el cliente i y el cliente j , menos el tiempo en que empieza el servicio al cliente j debe ser menor a cero, si el cliente j es visitado después del cliente i por el vehículo k o igual a cero si no es así. Esta restricción hace que la formulación sea de programación no lineal, sin embargo puede ser linealizada. Finalmente una restricción involucra la ventana de tiempo del cliente i con la variable de decisión w_i^k .

RTDVRP: Un problema similar es el denominado RTDVRP (del inglés *Real Time Dynamic Vehicle Routing Problem*). En este tipo de problema se utiliza información en tiempo real para controlar la distribución, lo cual hace que los tiempos de recorrido puedan presentar variaciones dinámicamente, esto debido, principalmente a las condiciones de tráfico presentadas (Liao & Hu, 2011). El problema considera una flota de vehículos de capacidad fija así como, un único depósito y demanda conocida y fija de los clientes. Los clientes deben ser asignados a los vehículos y los vehículos deben ser enrutados de tal modo que el tiempo total empleado es minimizado.

MDVRP: (del inglés *Multiple Depot Vehicle Routing Problem*), el cual, considera la existencia de un número de depósitos o centros de abastecimiento mayor a uno (Ho, Ho, Ji, & Lau, 2008). En este problema el tomador de decisiones debe determinar cuál cliente es atendido por cuál depósito. La formulación es similar al problema CVRP con la consideración adicional de que cada depósito tiene capacidad suficiente para vender todos los productos ordenados por los clientes. La solución del problema sigue 3 etapas: primero se debe agrupar un conjunto de clientes que pueden ser atendidos por el mismo depósito, luego se debe asignar dichos clientes a varias rutas que satisfacen la restricción de capacidad de los vehículos, y por último se debe decidir la secuencia de entrega que seguirá cada ruta. El objetivo es minimizar la distancia total de entrega, el tiempo transcurrido en el servicio a todos los clientes o el número de vehículos necesarios.

VRPTD: (*VRP with Time Deadlines*) es un problema que considera un plazo máximo de entrega por cliente (Karlaftis, Kepaptsoglou, & Sambracos, 2009). Este caso suele presentarse con productos perecederos. La formulación considera de manera similar al problema VRP con ventanas de tiempo, el tiempo de servicio al cliente y el tiempo de viaje entre los clientes, y considera el máximo tiempo de viaje de la ruta para el vehículo asignado, como una restricción.

VRPPD: (*VRP with Pick-up and Delivering*) es un problema en el cual se consideran al tiempo las entregas de pedidos y la recogida de productos retornados por los clientes (Tasan & Gen, 2012).

En este problema la carga del vehículo cuando sale del depósito y cuando deja a cada cliente es una variable de decisión, mientras la demanda y la cantidad retornada por los clientes es un parámetro. La carga inicial del vehículo es la demanda acumulada de todos los clientes asignados a él y la carga después de visitar cada cliente es balanceada de acuerdo a la carga inicial menos la demanda de los clientes más la cantidad que es retornada, siempre limitada por la capacidad del vehículo.

VRPB: Este problema puede presentar una variación si todas las entregas deben ser realizadas antes de empezar a recoger los retornos de los clientes. En este caso el problema es denominado VRPB (*VRP with Backhauls*). En este problema un conjunto de nodos requiere entrega de productos y otro conjunto de nodos requiere retornar productos (Anbuudayasankar, Ganesh, LennyKoh, &Ducq, 2012). La formulación es muy similar a un problema CVRP, con restricciones adicionales, tales como: la demanda de un cliente nunca puede exceder la capacidad del vehículo asignado, no es permitido entregar los pedidos por partes, cada vehículo realiza exactamente un viaje, existe prioridades que obligan a visitar cierto conjunto de clientes para el retorno de la mercancía, así como, la cantidad demandada por los clientes debe ser cargada en el depósito, y la cantidad retornada por los clientes debe ser descargada en el depósito.

SVRP: Por su parte, algunas investigaciones han considerado variaciones estocásticas en los problemas de ruteamiento de vehículos. Estos han sido denominados SVRP (del inglés *Stochastic VRP*) y se caracterizan por modelar una o algunas variables del problema a través de una distribución de probabilidad. Estas pueden ser la demanda de los clientes (Peng & Zhu, 2008), el tiempo de viaje del vehículo (Zhang, Chaovalitwongse, & Zhang, 2012), el tiempo de servicio al cliente (Li, Tian, &Leung, 2010) entre otros.

VRP considerando efectos ambientales: Algunas investigaciones se han centrado en la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero (EGEI) como objetivo principal de problemas de enrutamiento óptimo de vehículos (VRP) en los cuales la minimización del consumo de combustible es el objetivo principal.

El dióxido de carbono (CO_2) es el gas de efecto invernadero que presenta mayor contribución en las emisiones de los vehículos (Zsigraiova, Semiao, &Beijoco, 2013), por lo cual ha sido de mayor interés para los investigadores. Las tasas de emisión de CO_2 son emitidas en proporción directa al consumo de combustible, con una variación por tipo de combustible (Figliozzi, 2010). Sin embargo el consumo de combustible es afectado por diversos factores, tales como, las velocidades de viaje, los tiempos de partida, la carga del vehículo, la pendiente de la carretera, el tipo y condición del vehículo y/o la congestión vehicular (tráfico).

3.3. Descripción detallada del HFVRP

En el caso de problemas con flota heterogénea, la flota de vehículos puede tener distintas capacidades, costos fijos y variables y estar limitada o no en el número de vehículos disponibles. El problema consiste en determinar un conjunto de rutas para los vehículos, de mínima distancia o costo, donde las rutas comienzan y finalizan en el depósito, y cada cliente es visitado solo una vez por un solo vehículo.

Adicionalmente, la capacidad de los vehículos es considerada, de manera que, la demanda total de los clientes visitados por la ruta no debe exceder la capacidad del *tipo de vehículo* asignado a la ruta. Se debe tener en cuenta que las capacidades de los vehículos pueden ser diferentes. El objetivo es determinar cuáles vehículos deben ser utilizados para minimizar la suma de costos fijos y variables, así como, la secuencia de visita de los clientes que minimiza la distancia recorrida. En este problema, los costos asociados a los trayectos se consideran simétricos $C_{ij} = C_{ji}$. En la figura 3 se representa el problema de ruteo de vehículos con flota heterogénea.

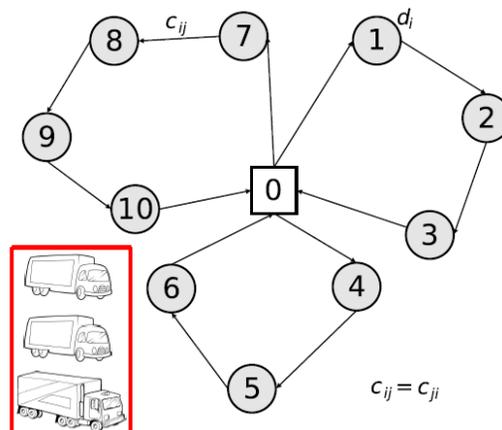


Figura 3. Representación del problema de ruteamiento de vehículos con flota heterogénea

Fuente: Toro, Eliana Mirledy (2012)

Esta situación puede ser encontrada en la práctica. De acuerdo con Subramanian (2012), en la industria una flota de vehículos pocas veces es homogénea. Generalmente, se incorporan a la flota, con el tiempo, nuevos vehículos con diferentes capacidades y de diferentes tipos. De acuerdo con esto, los costos de mantenimiento y operación toman distintos valores de acuerdo al nivel de depreciación o tiempo de uso de cada vehículo y al tipo de vehículo. Adicionalmente, desde el punto de vista táctico y operacional una flota de vehículos mixta, incrementa la flexibilidad en términos de la planeación de rutas y la distribución de los vehículos.

3.3.1. Modelos matemáticos para el VRP y HFVRP

Existen 3 diferentes modelos básicos para la solución del VRP y sus variantes. Según Toth & Vigo (2002) se clasifican de la siguiente manera:

- Flow formulations: Este tipo de modelos usan variables enteras, asociadas con cada arco o nodo en el grafo, el cual contiene el número de veces que el arco o nodo es atravesado por un vehículo.
- Commodity flow formulations: En este tipo de modelos las variables enteras son asociadas con los arcos o nodos y representan el flujo de materias primas a lo largo de los caminos recorridos por los vehículos.
- Set-Partitioning Problem (SPP): Los modelos del último tipo, tienen un número exponencial de variables binarias, cada una asociada con una ruta o circuito factible. Estos modelos permiten elegir entre un conjunto de rutas factibles, las rutas de mínimo costo, visitando cada cliente una vez, y permite adicionar más restricciones.

La primera formulación es presentada a continuación:

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

s.a

$$\sum_{(i,j) \in \delta(\{i\})} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(\{0\})} x_{ij} = 2k, \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(S)} x_{ij} \geq 2r(S) \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset, \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \notin \delta(\{0\}), \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2\}, \quad \forall (i, j) \in \delta(\{0\}) \quad (6)$$

En este caso, x_{ij} es una variable entera que representa el número de veces que el arco (i,j) es visitado en la solución. Las restricciones tipo (2) indican que cada cliente debe ser visitado una única vez. Las restricciones tipo (3) indican la creación de las rutas. Las restricciones tipo (4) indican conectividad de los tours con respecto a la capacidad de los vehículos. Las restricciones tipo (5) y (6) implican que cada arco conecta dos consumidores al menos una vez.

Por su parte, en los modelos Set Partitioning, un conjunto de rutas factibles R debe ser construido, donde R_u representa el conjunto de rutas factibles para el tipo de vehículo u . La factibilidad es definida por el conjunto de restricciones. El objetivo es minimizar la

sumatoria de los costos asociados a las rutas seleccionadas y a los tipos de vehículos seleccionados, a través de una formulación que usa una variable de decisión binaria que indica si el par (R, u) es seleccionado o no.

La formulación presentada por Subramanian (2012) es descrita como sigue: Sea V el conjunto de todos los clientes, M el conjunto de vehículos disponibles, R el conjunto de todas las posibles rutas de todos los tipos de vehículos, y $R_i \subseteq R$ el subconjunto de rutas que contienen al cliente $i \in V$, se define y_j como una variable binaria, que toma el valor de 1 cuando se elige y cero en caso contrario, asociada a una ruta $j \in R$, y c_j como su costo asociado.

Sea v el número total de vehículos disponibles, $R_u \subseteq R$ el conjunto de rutas asociadas con el tipo de vehículo $u \in M$ y m_u la cantidad de vehículos disponibles de cada tipo de vehículo. El modelo matemático corresponde a un modelo de programación Lineal y se presenta como sigue:

Esta formulación matemática (SP del inglés Set Partitioning) originalmente propuesto por Balinski & Quandt (1964) ha sido implementada en la solución al HFVRP. La formulación matemática se presenta a continuación:

$$\text{Min } \sum_{j \in R} c_j y_j \quad (7)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in R_i} y_j = 1 \quad \forall i \in V \quad (8)$$

$$\sum_{j \in R_u} y_j \leq m_u \quad \forall u \in M \quad (9)$$

$$\sum_{j \in R} y_j \leq v \quad (10)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in R \quad (11)$$

La función objetivo (7) minimiza la suma de los costos, asociados a la selección de la mejor combinación de rutas. La restricción (8) permite que cada cliente sea visitado solo por una ruta del conjunto de todas las rutas que lo contienen. La restricción (9)

permite que la cantidad de rutas seleccionadas para cada tipo de vehículo no sobrepase la cantidad de vehículos disponibles de cada tipo. Por su parte, la restricción (10) verifica que la cantidad total de rutas seleccionadas corresponda al número de vehículos disponibles o a un número inferior de ellos y la restricción (11) define la variable asociada a cada ruta como una variable de tipo binario.

3.3.2. Casos de prueba de la literatura para el HFVRP

Existen diferentes casos de prueba para flota heterogénea en la literatura. Estos se dividen en dos subgrupos propuestos por Golden et al (1984) y modificados por otros autores:

- HVRP (del inglés *Heterogeneous Vehicle Routing Problem*): Estas instancias consideran un límite para el número de vehículos de cada tipo, y se dividen en dos categorías: HVRP-FV y HVRP-V, las cuales consideran costos fijos y variables o solo costos variables. En este caso se debe decidir cómo hacer el mejor uso de la flota fija de vehículos heterogéneos.
- FSM (del inglés *Fleet size and mix*): Estas instancias consideran un número de vehículos ilimitado para cada tipo de vehículo, y se dividen en 3 categorías: FSM-FV, FSM-F y FSM-V, las cuales consideran costos fijos y variables, solo costos fijos y solo costos variables respectivamente. Esta es la versión de Múltiples viajes del HVRP, donde se permite que cada vehículo pueda hacer varios viajes desde el depósito central.

3.3.3. Técnicas de solución del VRP

De acuerdo con la revisión presentada los autores han implementado diversos métodos de solución en problemas de ruteamiento óptimo de vehículos. Entre ellos encontramos técnicas exactas, heurísticas y metaheurísticas, así como, híbridos entre ellas.

Técnicas exactas

Las técnicas exactas producen una solución óptima, sin embargo por la complejidad del problema VRP, considerado NP-Hard, dichas técnicas pueden fracasar en problemas muy grandes con una cantidad de clientes considerable. La búsqueda exhaustiva no resulta siempre ser muy eficiente computacionalmente, sin embargo han sido ampliamente estudiadas y han encontrado exitosos resultados. Entre las técnicas exactas y algunos de sus autores encontramos:

- Ramificación y acotamiento o Branch and Bound: Christofides et al (1981), Fisher (1994)

- Ramificación y corte o Branch and Cut, Laporte et al. (1985), Augerat et al (1998)
- Branch-and-cut-and-price, Fukasawa et al. (2006)
- Set Partitioning y generación de columnas, Agarwal et al. (1989), Taillard (1999), Choi y Tcha (2007)
- Programación dinámica (Balinski y Quandt, 1964)
- Programación lineal entera (Balinski y Quandt, 1964)

Técnicas heurísticas

Las técnicas heurísticas son técnicas por lo general sencillas, que permiten encontrar soluciones de buena calidad, sin embargo realizan exploraciones de búsqueda en espacios pequeños, de acuerdo con el tiempo computacional. Las técnicas heurísticas están divididas en varios tipos, entre los cuales encontramos:

Heurísticas de construcción

Parten de un problema y una solución “vacía” para que a partir de ella se pueda construir una solución factible pero que casi nunca resulta óptima. Entre ellas encontramos:

- Método del ahorro: (Clarke y Wright (1964)) con base en el ahorro generado por insertar nuevos clientes en cada vehículo hasta completar una solución final
- Métodos de inserción

Heurísticas de dos fases

Este tipo de heurísticas generalmente, buscan complementar la solución inicial, mediante alguna estrategia, entre ellas encontramos:

- Métodos de rutear primero y asignar después: (*Route first, cluster second*) estos inician resolviendo el TSP definido por todos los clientes y luego parten la ruta generada para asignar un tramo a cada vehículo (Daza et al (2009))
- Métodos de asignar primero y rutear después: (*cluster first, route second*) agrupan los clientes en varios subconjuntos, asignan cada subconjunto a un vehículo y luego resuelven cada TSP correspondiente (Daza et al (2009)). Un ejemplo de esto es la técnica de barrido de Gillet y Miller (1974). Explicada a continuación:

Heurística de barrido: Esta heurística se explica en detalle, debido a que es implementada en el desarrollo de este trabajo. Consiste en generar rutas por

sectores de la población de clientes, a través de una ordenación por coordenadas polares.

Según Orrego: “los clusters se forman girando una semirrecta con origen en el depósito e incorporando los clientes barridos por dicha semirrecta hasta que se viole la restricción de capacidad. Cada clúster es luego ruteado resolviendo un TSP de forma exacta o aproximada” (Orrego,2013, p27). Cada cliente está dado por sus coordenadas polares (p_i, θ_i) . En la figura 4 se presenta la técnica de barrido.

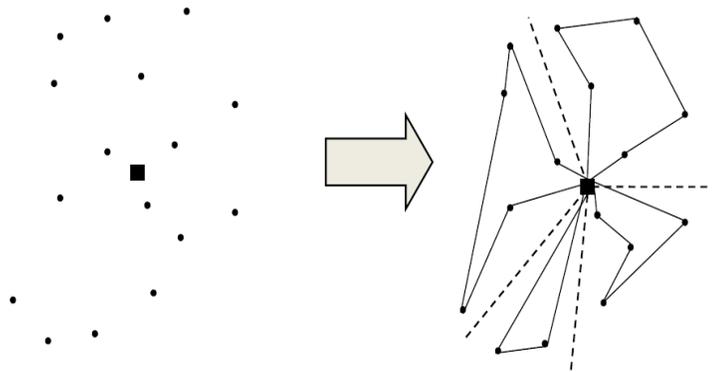


Figura 4. Heurística de barrido.

Fuente: Orrego, Juan pablo. Solución al problema de ruteo de vehículos con capacidad limitada “cvrp” a través de la heurística de barrido y la implementación del algoritmo genético de chu-beasley. 2013.

Heurísticas de mejora iterativa

Estas heurísticas buscan el mejoramiento de las rutas individuales, y utilizan conceptos como

- λ -intercambio (Osman (1993))
- El operador Or-opt (Or (1976))
- Operadores String Exchange y String Relocation (Van Breedam (1994))
- GENI y GENIUS (Gendreau, Hertz y Laporte (1992))
- Transferencias cíclicas (Thompson y Psaraftis (1993))
- Intercambios r-opt (Lin (1965))
- Mecanismos unstringing y stringing (US) (Gendreau et al. (1992))

Algunos de los mecanismos de mejoramiento de las rutas utilizados recientemente, se presentan en detalle a continuación y se encuentran especificados en Subramanian (2012):

Mecanismos de búsqueda inter-ruta:

Swap 1-1: Permutación entre un cliente de una ruta r_1 y un cliente de una ruta r_2 . Para prohibir movimientos infactibles se debe verificar si el intercambio en la demanda no excede la capacidad de los vehículos de cada ruta.

Shift 1-0: Un cliente es transferido de una ruta r_1 a una ruta r_2 . Si al transferir el cliente la capacidad del vehículo es sobrepasada esto generaría una solución infactible, por lo tanto el cambio no es permitido y la ruta r_1 y r_2 continúan igual. Esto debe ser sometido a verificación. Si por el contrario, al transferir el cliente, la capacidad del vehículo no es sobrepasada, el cambio es permitido. Cuando el cambio es permitido la ruta r_1 y r_2 deben actualizar sus valores de demanda y costos.

Shift: Un cliente es transferido de una ruta r_1 a una ruta r_2 . Si al transferir el cliente la capacidad del vehículo es sobrepasada, se intenta cambiar el vehículo por otro de mayor capacidad, por lo tanto el cambio es permitido. Esto debe ser sometido a verificación. Si por el contrario, al transferir el cliente, la capacidad del vehículo es sobrepasada, y no existe un vehículo de mayor capacidad, el cambio no es permitido. Cuando el cambio es permitido la ruta r_1 y r_2 deben actualizar sus valores de demanda y costos.

Shift2-0: Dos clientes son transferidos de una ruta r_1 a una ruta r_2 . Si al transferir los clientes la capacidad del vehículo es sobrepasada esto generaría una solución infactible, por lo tanto el cambio no es permitido y la ruta r_1 y r_2 continúan igual. Esto debe ser sometido a verificación. Si por el contrario, al transferir los clientes, la capacidad del vehículo no es sobrepasada, el cambio es permitido. Cuando el cambio es permitido la ruta r_1 y r_2 deben actualizar sus valores de demanda y costos.

k-shift: Un segmento aleatorio de clientes de una ruta r_1 es intercambiado con un segmento de clientes de una ruta r_2 . Para prohibir movimientos infactibles se debe verificar si el intercambio en la demanda no excede la capacidad de los vehículos de cada ruta.

Mecanismos de búsqueda intra-ruta:

Reinserción: cambia un cliente de posición en una ruta, para esto evalúa todas las posibilidades de cambios y elige el mejor cambio y la mejor posición.

Or-opt2: cambia dos clientes consecutivos de posición en una ruta, evaluando todas las posibilidades y eligiendo la mejor posición.

2-opt: 2 clientes no consecutivos son cambiados de posición en la ruta.

Exchange: Permutación entre dos clientes de la misma ruta.

Técnicas Metaheurísticas:

Las técnicas metaheurísticas han sido aplicadas a problemas de ruteamiento óptimo de vehículos debido a la fortaleza que presentan para no quedarse en óptimos locales. Entre ellas encontramos:

Métodos de búsqueda local o por vecindario

- Búsqueda local simple
- Búsqueda local múltiple
- Recocido simulado
- Variable Neighborhood Search (VNS)
- Variable Neighborhood Descent (VND)
- Métodos de búsqueda con tabús (simples y probabilísticos)

Métodos de exploración poblacional

- Algoritmos genéticos
- Algoritmos meméticos
- Optimización mediante cúmulo de partículas (Swarm)
- Optimización por colonia de hormigas
- Algoritmos de estimación de distribución
- Algoritmos de búsqueda dispersa (Scatter Search y Path Relinking)

Dentro de las técnicas Metaheurísticas, se han encontrado recientes investigaciones en problemas de ruteo de vehículos que usan búsqueda Tabú, tales como, Gendreau et al (1999), Wassan y Osman (2002), Daza et al (2009) y algoritmos genéticos, Ochi et al (1998), Liu, Huang y Ma (2008).

3.3.4. Técnicas de solución del HFVRP

Dentro de las técnicas de solución encontradas en la revisión para el problema de HFVRP se pueden identificar las siguientes:

Tabla 1. Técnicas de solución para el HFVRP

| Año | Autores | Técnica de solución | | |
|------|------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | | Exacta | Heurísticas | Metaheurísticas |
| 1984 | Golden et al. | | Algoritmos Heurísticos | |
| 1998 | Ochi et al. | | | Algoritmo genético |
| 1999 | Taillard | Generación de columnas | | |
| 1999 | Gendreau et al. | | | Tabú search |
| 2002 | Prins | | Algoritmos Heurísticos | |
| 2002 | Wassan&Osman | | | Tabú search |
| 2003 | Tarantilis et al. | | | |
| 2004 | Lima et al | | | Evolutionary algorithm |
| 2007 | Choi &Tcha | Generación de columnas | | |
| 2008 | Brandao | | | Tabú search |
| 2008 | Liu, Huang & Ma | | | Algoritmo genético |
| 2009 | Imran et al | | | VNS |
| 2011 | Penna, Subramanian & Ochi | | Local search | |

Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la tabla 1 para el problema de HFVRP recientemente se han usado todo tipo de técnicas, siendo las más utilizadas las técnicas metaheurísticas.

3.4. Algoritmos evolutivos Multiobjetivos

Existen diversos Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos, encontrando entre ellos el NSGA, NSGA2, SPEA, SPEA2 y cNSGA2. Para determinar el método más apropiado se ha revisado en qué consisten.

Los Algoritmos evolutivos han sido implementados en tareas de búsqueda y de optimización en los últimos años, encontrando un conjunto de soluciones que permiten conformar un frente de Pareto. Entre las técnicas multiobjetivo se encuentran:

- **NSGA** (Non dominated Sort Genetic Algorithm)
Este algoritmo fue propuesto por Srinivas (1994). Se basa en la clasificación de individuos en varias capas o frentes. La clasificación consiste en agrupar a todos los individuos no dominados en un frente, con un valor de fitness (o adaptabilidad) igual para todos los individuos. Este valor es proporcional al tamaño de la población, para así proporcionar un potencial reproductivo igual para todos los individuos de este frente. Entonces el grupo de individuos clasificados es ignorado y otro frente de individuos no dominados es considerado. El proceso continúa hasta que se clasifican a todos los individuos en la población. Puesto que los individuos en el primer frente

tienen el valor de fitness mayor, consiguen siempre más copias que el resto de la población.

- **NSGA2** (Non dominated Sort Genetic Algorithm 2)
Deb et al. (2000) propusieron una versión revisada del NSGA, llamada NSGA2, que es computacionalmente más eficiente. Además, es elitista y no necesita especificar ningún parámetro adicional. El NSGA2 no utiliza una memoria externa como los algoritmos (SPEA y SPEA2). El mecanismo elitista consiste en elegir los mejores individuos de la unión de las poblaciones padre e hijo.
- **cNSGA2** (Controlled Non dominated Sort Genetic Algorithm 2)
Deb y Goel (2001) propusieron una variación del NSGA 2, llamado cNSGA2. En contraposición al NSGA 2, que elige los N primeros elementos de P_{t+1} , el cNSGA 2, utiliza una proporción geométrica para elegir n_i individuos de cada frente i , siendo $n_i = r \cdot n_{i-1}$, donde r es la razón geométrica.
- **SPEA** (Strength Pareto Evolutionary Algorithm)
Este algoritmo fue introducido por el Zitzler y Thiele (1999). El SPEA utiliza un archivo que contiene las soluciones no dominadas encontradas (población externa de no dominados P_{nd}). En cada generación, se copian los individuos no dominados de P a P_{nd} y se borra de este las soluciones dominadas. Para cada individuo en el sistema externo, se computa un valor de fuerza (strength) es proporcional al número de las soluciones a las cuales cada individuo domina. En SPEA, el fitness de cada miembro de la población actual se computa según las fuerzas de todas las soluciones no dominadas externas que la dominen.
- **SPEA2** (Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2)
Propuesto por Zitzler et al (2002) tiene las siguientes diferencias principales con respecto a su precursor: (1) incorpora una estrategia fina de asignación del fitness que considera, para cada individuo, el número de los individuos que lo dominan y el número de los individuos por los cuales es dominado; (2) utiliza la técnica del “vecino más cercano” para la valoración de la densidad, dirigiendo la búsqueda en forma más eficiente.

3.5. Revisión de modelos matemáticos en las variantes VRP considerando efectos ambientales

Aunque los factores que afectan el consumo de combustible están relacionados, el análisis se ha efectuado de manera separada y distinta por diversos autores. A continuación se relacionan las principales publicaciones.

EVRP: Figliozzi (2010) ha comparado diferentes niveles de congestión vehicular y de velocidades de los vehículos, para formular y resolver el problema que ha denominado EVRP (del inglés *Emissions Vehicle Routing Problem*). El problema es una extensión del VRPTW, donde han sido involucrados las velocidades de viaje y los tiempos de partida como variables de decisión, esto debido, a que frecuentes cambios en la velocidad como “parar y seguir” en condiciones de tráfico vehicular incrementa las tasas de emisión, por lo cual, el consumo de combustible es una función no solo de la velocidad sino también de las tasas de aceleración. El investigador asume un valor en el mercado para 1 ton de CO₂ emitida.

Para vehículos pesados un laboratorio de investigación de transporte ha desarrollado una función que relaciona las emisiones y las velocidades de viaje, donde S_{ij}^l denota la velocidad del vehículo en el trayecto del cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l y d_{ij}^l la distancia entre el cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l .

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 s_{ij}^l + \alpha_2 (s_{ij}^l)^3 + \alpha_3 \frac{1}{(s_{ij}^l)^2} \right) d_{ij}^l$$

Los coeficientes α son parámetros constantes para cada tipo de vehículo, donde $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{1,576; -17.6; 0.00117; 36,067\}$. Para otros tipos de vehículos existen otros términos polinomiales o su inversa. La velocidad de viaje óptima que minimiza las emisiones está calculada en un promedio de 44 mph o 71 km/h.

Esta expresión da como resultado las emisiones producidas de CO₂ en kilogramos por kilómetro cuando la velocidad es expresada en km/h.

Cuando la congestión incrementa, la cantidad y el costo de las emisiones aumenta dramáticamente. El volumen de emisiones generadas por viaje del cliente i al cliente j y partiendo en el tiempo b_i es denotado por:

$$V_{ij}(b_i) = \sum_{l=0}^{l=p} \left(\alpha_0 + \alpha_1 s_{ij}^l + \alpha_2 (s_{ij}^l)^3 + \alpha_3 \frac{1}{(s_{ij}^l)^2} \right) d_{ij}^l$$

Los costos totales de emisión para un tiempo de partida b_i están dados por el producto entre el costo por unidad de emisión (asumido por el investigador) y el volumen de emisiones generadas. De esta manera la función puede ser adaptada a las características de viaje o de camino entre los dos clientes.

En la formulación se presenta un problema multi-objetivo que incluye la minimización de los costos de los vehículos, la distancia viajada, la duración de la ruta y las emisiones de CO₂, sujeto a todas las restricciones de un problema VRPTW. Luego un análisis jerárquico permite dar solución al problema.

La estrategia implementada es primero minimizar el número de vehículos usando TWVRP y luego minimizar las emisiones de acuerdo a una restricción de tamaño de flota máximo. El algoritmo construye rutas factibles adicionando clientes a la ruta,

mediante una heurística golosa (greddy heuristic) para aproximar el costo de adicionar clientes a la ruta. Construyendo así un conjunto de rutas mejoradas.

FCVRP: El problema también ha sido denominado como FCVRP (del inglés *Fuel Consumption vehicle routing problem*), como una extensión del CVRP, en el cual, los autores Xiao, Zhao, Kaku, & Xu (2012) han considerado una tasa de consumo de combustible que está fuertemente relacionada con el peso neto del vehículo, obtenido como la sumatoria entre el peso del vehículo vacío y el peso de la carga del vehículo. Al revisar si el peso del vehículo presenta una relación con las unidades de combustible consumidas por unidad de distancia, los autores encontraron que dichas variables están fuertemente relacionadas, hallando una ecuación lineal que representa el modelo, y que al generalizarla se podría presentar como:

$$p(Q_l) = \alpha(Q_0 + Q_l) + b$$

Donde Q es la capacidad máxima del vehículo y p_0 el peso del vehículo cuando está vacío y p^* el peso del vehículo cargado:

$$p_0 = \alpha Q_0 + b, \quad p^* = \alpha(Q_0 + Q) + b$$

$$y\alpha = \frac{p^* - p_0}{Q}$$

Entonces la ecuación es re-escrita como:

$$p(Q_l) = p_0 + \frac{p^* - p_0}{Q} Q_l$$

El costo del consumo de combustible es representado como la multiplicación del costo unitario de combustible C_0 por el consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} por la distancia recorrida de i a j d_{ij} .

$$C_{fuel}^{ij} = C_0 p_{ij} d_{ij}$$

El costo del combustible consumido por un vehículo, considera la sumatoria de todos los arcos visitados en una ruta, así denotando r como el conjunto de clientes que conforma una ruta se tiene:

$$C_{fuel} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r C_0 p_{ij} d_{ij} x_{ij}$$

Donde x_{ij} es una variable de decisión binaria que equivale a 1 si el arco $\{i, j\}$ existe. El consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} varía de acuerdo a la carga del vehículo entre cada nodo, así el peso de la carga que toma el vehículo es considerado una variable de decisión y_{ij} que es introducida en la ecuación anterior, así:

$$p_{ij} = p_o + \frac{p^* - p_o}{Q} y_{ij} = p_o + \alpha y_{ij}$$

La función objetivo es formulada como:

$$\text{Min}H = \sum_{j=1}^n Fx_{oj} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_0 d_{ij} (p_0 x_{ij} + \alpha y_{ij})$$

Donde la primera parte de la ecuación corresponde a la suma de los costos fijos de utilizar todos los vehículos, y la segunda parte es la suma de los costos de combustible de todos los vehículos.

Las restricciones consideradas en la formulación de FCVRP son: Cada cliente debe ser visitado solo por un vehículo, si un vehículo llega a un cliente debe salir también (restricción de flujo), reducir la carga del vehículo cuando este visita a un cliente en la cantidad que demanda el cliente (restricción que prohíbe también la generación de sub-tours), y una restricción de capacidad máxima del vehículo, que a su vez permite que la variable $y_{ij} = 0$ cuando $x_{ij} = 0$.

El consumo de combustible puede ser minimizado al diseñar una secuencia óptima de descarga de peso de los vehículos. Los autores demuestran con un pequeño ejemplo, que minimizar la distancia recorrida no es necesariamente suficiente para reducir el consumo de combustible. Atender a los clientes de mayor demanda primero, podría ocasionar que la distancia aumente, pero que el consumo de combustible disminuya. El problema es resuelto con el algoritmo de simulated annealing, probado en 27 instancias, considerando entre 50 y 483 clientes, y codificado en C++ 6.0.

PRP: Adicionalmente la carga y la velocidad del vehículo han sido consideradas en un único problema. Este problema ha sido denominado por los autores Bektaş & Laporte (2011) como PRP (del inglés Pollution Routing Problem), presentado como una extensión del clásico VRP. Los autores consideraron factores como la velocidad, la carga del vehículo y los costos del viaje. La carga y la velocidad de viaje son factores que se pueden controlar. Se han presentado 4 formulaciones matemáticas para el PRP con y sin ventanas de tiempo: primero consideraron una función objetivo para minimizar la distancia recorrida con velocidad constante, luego consideraron una función objetivo para minimizar la carga ponderada del vehículo con velocidad constante, adicionalmente una función objetivo que minimiza la energía y asume la velocidad como una decisión y por último una función objetivo que minimiza un costo, considerando el costo de conductores, combustible y emisiones.

La tasa de emisiones del motor en gramos por segundo (g/s), denotada como E está relacionada con la tasa de consumo de combustible F (g/s) a través de la relación:

$$E = \delta_1 F + \delta_2$$

Donde δ_1 y δ_2 son parámetros indicados para emisiones de gases de efecto invernadero.

El cálculo de F (tasa de consumo de combustible) depende de otros factores y se expresa como sigue:

$$F \approx \left(KNV + \left(\frac{P_t}{\varepsilon} + P_a \right) / n \right) U$$

Donde K representa el factor de fricción del motor, N es la velocidad del motor, V es el desplazamiento, P_t es la fuerza total de tracción demandada en watts, ε es la eficiencia de transmisión del vehículo, P_a es la fuerza del motor asociada con pérdidas de funcionamiento y otros accesorios del vehículo, $n \approx 0.45$ es una medida de eficiencia para motores diesel y U es un valor que depende de la velocidad N .

Por su parte el parámetro P_t es calculado como:

$$P_t = Mav + Mgv\sin\theta + 0.5C_dApv^3 + MgC_r\cos\theta v$$

Donde, M es la masa en kilogramos del vehículo, v es la velocidad (m/s), a es la aceleración (m/s²), g es la constante gravitacional (9.81 m/s²), θ es el ángulo de la carretera, A es el área de la superficie frontal del vehículo (m²), p es la densidad de aire (kg/m³) y C_r y C_d son los coeficientes de resistencia de rodamiento y arrastre.

Los autores asumieron constantes todos los parámetros en el viaje de un vehículo en un arco dado, a excepción de la velocidad y la carga del vehículo. Es decir, asumieron que el vehículo viaja a una velocidad constante v_{ij} en un arco $\{i, j\}$ con distancia d_{ij} y ángulo de carretera $\theta = \theta_{ij}$ llevando un total de carga $M = w + f_{ij}$ donde w es el peso del vehículo vacío y f_{ij} es la carga llevada por el vehículo en el arco $\{i, j\}$.

Así la cantidad de energía consumida en un arco P_{ij} es aproximada como:

$$P_{ij} \approx P_t(d_{ij}/v_{ij})$$

$$P_{ij} \approx \alpha_{ij}(w + f_{ij})d_{ij} + \beta v_{ij}^2 d_{ij}$$

Donde, $\alpha_{ij} = a + g\sin\theta_{ij} + gC_r\cos\theta_{ij}$ es constante en un arco específico y $\beta = 0.5C_dAp$ es constante en un vehículo específico. Así la primera parte de la ecuación representa el requerimiento de energía inducido por la carga y la segunda parte el requerimiento de energía inducido por la velocidad.

El resultado de la ecuación inicial asumiendo algunos factores como constantes, permite obtener una curva en U, en la cual para ciertos valores cuando la velocidad está por debajo y por encima de 40 km/h aumenta la tasa de consumo de combustible notablemente.

Los costos asociados a la ruta, son calculados a través de los costos incurridos en cada arco $\{i, j\}$ expresados como el costo unitario de combustible multiplicado por el consumo de combustible en cada arco, el cual es estimado usando P_{ij} . También pueden ser incorporados costos adicionales de rodamiento como reparación y mantenimiento de vehículos. Este modelo refleja el cambio en la carga del vehículo a medida que viaja y que es aplicable a la estimación de las emisiones de vehículos livianos y pesados.

A través de ejemplos pequeños los autores han comparado los efectos de un objetivo que minimice la distancia recorrida y un objetivo que minimice la carga que lleva el vehículo a medida que viaja entre clientes, obteniendo mejores resultados al minimizar la distancia recorrida, dado que este objetivo considera la carga y la velocidad es introducida como otro factor determinante. Para este caso la velocidad fue tomada con un límite inferior de 40 km/h y un límite superior de 70 km/h y se asumieron como constantes todos los demás parámetros.

También consideraron el impacto de la velocidad al involucrar restricciones de ventanas de tiempo en el problema. En este caso la velocidad es involucrada como una variable de decisión y la función objetivo es minimizar la energía consumida en la ruta. Los resultados obtenidos fueron mejores que en los casos anteriores considerando ventanas de tiempo. El problema ha sido formulado inicialmente como un problema de Programación Lineal Entera.

VRPB: Por su parte, Pradenas, Oportus, & Parada (2013) formularon un modelo con emisiones de gases de efecto invernadero para el problema VRPB (*VRP with Backhauls*), basados en la formulación de Bektaş & Laporte. La función objetivo estaría como sigue:

$$\text{Min} \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=1}^v [\alpha_{ij} d_{ij} (w x_{ijk} + f_{ijk}) + \beta v_{ij}^2 d_{ijk}]$$

La función objetivo minimiza la cantidad de energía requerida por la ruta, considerando la distancia d_{ij} , la carga transportada por el vehículo f_{ijk} y la velocidad v_{ij} en cada arco $\{i, j\}$. las restricciones del modelo son:

1) Cada entrega y retorno de mercancía de un cliente debe ser realizada por un solo vehículo. 2) el vehículo no puede exceder su capacidad. 3) restricciones de conservación de flujo. 4) restricciones de prioridad asignada a los clientes para el recorrido de cada vehículo. 5) restricciones de ventanas de tiempo. 6) Restricciones de flujo de la carga del vehículo de acuerdo a la demanda. La técnica de solución empleada es Scatter search.

G-VRP: Otros autores han revisado el problema desde las llamadas cadenas de suministro verdes, denominando el problema como *Green vehicle routing problem (G-VRP)* (Jemai, Zekri & Mellouli, 2012). Allí los autores consideraron un factor de conversión de combustible para calcular las emisiones de CO₂. El problema ha sido formulado como un problema bi-objetivo donde se minimiza la distancia recorrida y las emisiones de CO₂ y el algoritmo NSGA-II ha sido implementado en la solución.

Otros por su parte, han considerado el mismo problema involucrando en la ruta las estaciones de combustible y el consumo de combustible, considerando tasas de consumo constantes de acuerdo a la distancia recorrida (Erdoğan & Miller-Hooks, 2012). En este caso, los autores lo abordaron como un problema de programación lineal entera mixta, en el cual el objetivo es minimizar la distancia recorrida.

Reducción del consumo de combustible y emisiones contaminantes: Autores como Suzuki (2011), han considerado que otros factores afectan el consumo de combustible, como la pendiente de la carretera, en un problema de ruteo que considera ventanas de tiempo. En este trabajo se busca minimizar la distancia recorrida por un vehículo de reparto que debe viajar con una carga pesada, y en el trayecto descarga primero los elementos más pesados mientras que los elementos más ligeros se descargan al final, considerando la cantidad de combustible gastada durante el tiempo que un camión está detenido en las instalaciones del cliente. Para calcular el consumo de combustible utiliza una velocidad promedio para terrenos planos y para terrenos con inclinaciones positivas y negativas, formulando un modelo no lineal. Para instancias mayores a 15 nodos usaron técnicas meta-heurísticas en la solución del problema.

Otros autores, han considerado el factor de emisiones para diferentes tipos de flota manejando 3 escenarios: vehículos híbridos, camiones grandes y camiones pequeños, bajo el mismo tipo de combustible, pero con velocidades específicas y constantes de acuerdo con las zonas donde se transita (Wygonik & Goodchild, 2011).

HVRP considerando emisiones de carbono: Este trabajo de los autores Kwon, Choi & Lee (2013) considera el problema de ruteo con flota heterogénea, involucrando en la función objetivo el costo de operación del vehículo y el costo adicional que debe pagarse si se sobrepasa del límite de las emisiones de carbono permitidas para cada tipo de vehículo. Para ello determina el costo comercial de las emisiones de carbono y el límite máximo que puede ser emitido. De acuerdo a esto la diferencia entre las emisiones de carbono presentadas en la ruta y el límite máximo permitido, representan un costo que debe ser minimizado. El modelo es un modelo de programación entera mixta, que es solucionado con un algoritmo de búsqueda tabú.

PRP: Kramer, Subramanian, Vidal & Cabral (2015). Estos autores han retomado el problema de Bektaş & Laporte, presentado en el año 2011, denominado *the Pollution-Routing Problem*, el cual consideraba diversos factores en el consumo de combustible, pero han propuesto un nuevo método de solución con una metaheurística basada en búsqueda local que mejora la velocidad del algoritmo de optimización.

La tabla 2 muestra una comparación entre los modelos matemáticos presentados por los autores, que describen el problema de Enrutamiento óptimo de vehículos, considerando la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero, en diversas variantes del problema básico de Enrutamiento de vehículos (VRP). A partir de la información recopilada y el estudio de los modelos presentados por los autores, se ha evidenciado que la reducción de gases de efecto invernadero en problemas de Enrutamiento óptimo de vehículos, está fuertemente relacionada con la minimización del consumo de combustible. A su vez, el consumo de combustible puede depender de los siguientes factores:

- La distancia recorrida por lo vehículos
- La carga transportada por los vehículos
- La velocidad de viaje de los vehículos
- Las condiciones de tráfico vehicular
- El tipo de combustible
- Las condiciones mecánicas de funcionamiento del motor de los vehículos
- La pendiente de la carretera y/o las condiciones de la malla vial

Tabla 2. Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales

| Año | Autor | Tipo de problema | Consumo de combustible o volumen de emisiones contaminantes | Descripción | Restricciones |
|------|-----------|------------------|--|---|--|
| 2010 | Figliozzi | EVRPTW | $V_{ij}(b_i) = \sum_{l=0}^{l=p} \left(\alpha_0 + \alpha_1 s_{ij}^l + \alpha_2 (s_{ij}^l)^3 + \alpha_3 \frac{1}{(s_{ij}^l)^2} \right) d_{ij}^l$ <p>Función objetivo: MINLP</p> $\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k \in K} \sum_{j \in C} C_k x_{oj}^k + C_d \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in V} d_{ij} x_{ij}^k + \\ & C_t \sum_{k \in K} \sum_{j \in C} (Y_{n+1}^k - Y_0^k) x_{oj}^k + \\ & \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in V} x_{ij}^k C_e V_{ij}(y_i^k + g_i) \end{aligned}$ <p>Costo del tipo de vehículo + costo de la distancia recorrida + el costo de duración de la ruta + el costo de emisiones de la ruta.</p> | <p>Volumen de emisiones generadas por viaje del cliente i al cliente j y partiendo en el tiempo b_i. Donde S_{ij}^l denota la velocidad del vehículo en el trayecto del cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l y d_{ij}^l la distancia entre el cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l, con parámetros α conocidos.</p> <p>x_{ij}^k es una variable de decisión binaria que indica si el vehículo k viaja entre los clientes i y j.</p> <p>y_i^k es una variable de decisión continua que indica el tiempo en que inicia el servicio, si el cliente i es atendido por el vehículo k.</p> <p>La hora de salida está dada por el tiempo de inicio de servicio al cliente y_i^k más el tiempo de carga o de servicio al cliente g_i</p> | <p>1) La capacidad del vehículo no puede ser excedida. 2) Todos los clientes deben ser servidos. 3) Si un vehículo llega a un cliente, este debe también partir del cliente. 4) Las rutas empiezan y terminan en el depósito. 5) Cada vehículo sale y retorna al depósito una única vez. 6) Los tiempos de servicio deben satisfacer los tiempos de inicio y finalización de la ventana de tiempo. 7) El tiempo de inicio del servicio debe permitir el tiempo de viaje entre los clientes</p> |

| | | | | | |
|------|------------------------|---------------------------|---|--|---|
| 2012 | Xiao, Zhao, Kaku, & Xu | FCVRP con flota homogénea | $C_{fuel} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r C_0 p_{ij} d_{ij} x_{ij}$ <p>Donde:</p> $p_{ij} = p_o + \frac{p^* - p_o}{Q} y_{ij} = p_o + \alpha y_{ij}$ <p>Función objetivo: MILP</p> $MinH = \sum_{j=1}^n Fx_{0j} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_0 d_{ij} (p_o x_{ij} + \alpha y_{ij})$ <p>Costo fijo de los vehículos + Costo de combustible de los vehículos</p> | <p>El costo del consumo de combustible en una ruta es representado como la multiplicación del costo unitario de combustible C_0 por el consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} por la distancia recorrida de i a j d_{ij}. x_{ij} es una variable de decisión binaria que equivale a 1 si el arco $\{i, j\}$ existe. El consumo de combustible p_{ij} depende del peso del vehículo vacío p_o + la carga del vehículo como variable de decisión y_{ij}. Q Representa la capacidad del vehículo y p^* el peso del vehículo cargado.</p> | <p>1) Cada cliente debe ser visitado solo por un vehículo, 2) si un vehículo llega a un cliente debe salir también (restricción de flujo), 3) reducir la carga del vehículo cuando este visita a un cliente en la cantidad que demanda el cliente (restricción que prohíbe también la generación de sub-tours), 4) y una restricción de capacidad máxima del vehículo, que a su vez permite que la variable $y_{ij} = 0$ cuando $x_{ij} = 0$.</p> |
| 2011 | Bektaş & Laporte | PRP | $F_{ij} \approx \left(KNV + \left(P_{ij}/\varepsilon + P_a \right) / n \right) U \quad (1)$ <p>Donde:</p> $P_{ij} \approx \alpha_{ij} (w + f_{ij}) d_{ij} + \beta v_{ij}^2 d_{ij} \quad (2)$ $\alpha_{ij} = a + g \sin \theta_{ij} + g C_r \cos \theta_{ij} \quad (3)$ <p>Función objetivo: ILP</p> $Min \sum_{(i,j) \in A} (C_f + e) \alpha_{ij} d_{ij} w x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} (C_f + e) \alpha_{ij} f_{ij} d_{ij} +$ | <p>(1) Tasa de consumo de combustible del motor. (2) La primera parte de la ecuación representa el requerimiento de energía inducido por la carga del vehículo y la segunda parte el requerimiento de energía inducido por la velocidad.</p> <p>El vehículo viaja a una velocidad constante v_{ij} en un arco $\{i, j\}$ con distancia d_{ij} y ángulo de carretera $\theta = \theta_{ij}$ llevando un total de carga $M = w + f_{ij}$. w es el peso del vehículo vacío y f_{ij} es la carga llevada</p> | <p>1) Una cantidad m de vehículos parten del depósito. 2) cada cliente es visitado exactamente una vez. 3) balance de flujo. 4) El total de carga de un vehículo no puede exceder su capacidad. 5) Restricciones de ventanas de tiempo. 6) El total de tiempo viajado por cada vehículo depende del último nodo visitado.</p> |

| | | | | | |
|------|--------|-------|--|---|---|
| | | | $\sum_{(i,j) \in A} (C_f + e) d_{ij} \beta \left(\sum_{r \in A} (\bar{V}^r)^2 z_{ij}^r \right) + \sum_{j \in N_0} p s_j$ <p>Costo de la carga transportada en el vehículo + costo incurrido por variaciones en la velocidad + cantidad pagada a los conductores.</p> <p>z_{ij}^r es una variable binaria igual a 1 si un vehículo viaja a una velocidad promedio r en el arco $\{i, j\}$.</p> | <p>por el vehículo en el arco $\{i, j\}$. Los demás parámetros son: K factor de fricción del motor, N velocidad del motor, V desplazamiento, P_{ij} es la fuerza total de tracción demandada en watts, ϵ es la eficiencia de transmisión del vehículo, P_a es la fuerza del motor asociada con pérdidas de funcionamiento y otros accesorios del vehículo, $\eta \approx 0.45$ es una medida de eficiencia para motores diesel y U es un valor que depende de la velocidad N.</p> | |
| 2011 | Suzuki | TSPTW | <p>Efecto de la velocidad de acuerdo a la pendiente de la carretera:</p> $C_{ij} = (\alpha_0 + \alpha_1 V_{ij}) \gamma_{ij}$ <p>Efecto de la carga del vehículo:</p> $mpg = \beta_0 + \beta_1 L$ $\pi_{ij} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \sum_{i \in y_{ij}} l_i}{\beta_0 + \beta_1 \mu}$ <p>Función objetivo:</p> $\text{Min} \sum_{i \in N \setminus \{n+1\}} \sum_{j \in N \setminus \{0; i\}} \frac{d_{ij}}{C_{ij} \pi_{ij}} x_{ij} + \sum_{i \in M \setminus \{0; n+1\}} (B_i - A_i) \frac{\rho}{60}$ | <p>Tasa de consumo del vehículo en el arco $\{i, j\}$. Donde: V_{ij} velocidad; $\gamma_{ij} = 1$ para terreno plano, $\gamma_{ij} < 1$ para un gradiente positivo, $\gamma_{ij} > 1$ para un gradiente negativo</p> <p>l_j denota el peso de la carga a ser liberada por el cliente i, $y_{ij} \subseteq N$ es el conjunto de clientes a ser visitados aún, cuando el vehículo está viajando en el arco $\{i, j\}$. μ es el promedio de carga del vehículo en la ruta.</p> <p>$\pi_{ij} = 1$ cuando la carga es μ, $\pi_{ij} > 1$ cuando es menor a μ, y $\pi_{ij} < 1$ cuando es mayor a μ</p> <p>$\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \rho, \mu, \gamma_{ij}$ son</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1) Un vehículo ingresa y parte de cada nodo solo una vez. 2) Restricciones de ventanas de tiempo de los clientes 3) Características de los nodos de depósito. |

| | | | | | |
|------|-----------------------------|--------|---|--|---|
| | | | <p>Donde: d_{ij} Distancia entre el cliente i y j. x_{ij} es una variable de decisión binaria que equivale a 1 si el arco $\{i, j\}$ existe. w es la cantidad promedio de combustible consumido por hora mientras un vehículo espera en los sitios de los clientes. B_i tiempo en que inicia la descarga del pedido al cliente i, A_i tiempo en que llega el vehículo al cliente i.</p> | <p>parámetros en el modelo.</p> | |
| 2013 | Pradenas, Oportus, & Parada | VRPBTW | $P_{ij} \approx \alpha_{ij}(w + f_{ij})d_{ij} + \beta v_{ij}^2 d_{ij}$ $\alpha_{ij} = a + g \sin \theta_{ij} + g C_r \cos \theta_{ij}$ <p>Función objetivo:</p> $\text{Min} \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=1}^v [\alpha_{ij} d_{ij} (w x_{ijk} + f_{ijk}) + \beta v_{ij}^2 d_{ijk}]$ | <p>Consumo de combustible Basado en Bektaş & Laporte.</p> <p>La función objetivo minimiza la cantidad de energía requerida por la ruta, considerando la distancia d_{ij}, la carga transportada por el vehículo f_{ijk} y la velocidad v_{ij} en cada arco $\{i, j\}$.</p> | <p>1) Cada entrega y retorno de mercancía de un cliente debe ser realizada por un solo vehículo. 2) el vehículo no puede exceder su capacidad. 3) restricciones de conservación de flujo. 4) restricciones de prioridad asignada a los clientes para el recorrido de cada vehículo. 5) restricciones de ventanas de tiempo. 6) Restricciones de flujo de la carga del vehículo de acuerdo a la demanda.</p> |

Fuente: Elaboración propia a partir de revisión de la literatura.

3.5.1. Técnicas de solución del problema VRP con efectos ambientales

El problema VRP recientemente ha empezado a estudiarse considerando efectos ambientales. Se han estudiado diferentes variantes del problema y se han utilizado diferentes técnicas de solución.

La tabla 3 presenta un resumen de las técnicas de solución presentadas, de acuerdo a la revisión de la literatura realizada.

Tabla 3. Técnicas de solución para el VRP considerando efectos ambientales

| Año | Autor | Tipo de problema | Técnica de solución | | |
|------|-------------------------------------|------------------|---------------------|------------------|----------------------|
| | | | Exacta | Heurísticas | Metaheurísticas |
| 2010 | Figliozzi | EVRPTW | | Greddy heuristic | |
| 2012 | Xiao, Zhao, Kaku, & Xu | FCVRP | | | Simulated Annealing. |
| 2011 | Bektaş & Laporte | PRP | Branch and cut. | | |
| 2011 | Suzuki | TSPTW | | | Compressed-annealing |
| 2012 | Jemai, Zekri & Mellouli | G-VRP | | | algoritmo NSGA-II |
| 2013 | Pradenas, Oportus, & Parada | VRPBTW | | | Scatter search. |
| 2013 | Kwon, Choi & Lee | HVRP | | | Búsqueda tabú. |
| 2015 | Kramer, Subramanian, Vidal & Cabral | PRP | | Búsqueda local | |

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la revisión del estado del arte, se pudo evidenciar que las técnicas exactas, en la solución de problemas de ruteo de vehículos, han sido poco implementadas, a diferencia de las técnicas heurísticas y metaheurísticas que han sido más frecuentemente usadas en la solución. Esto es debido a la complejidad del problema, dado que los problemas reales son de gran tamaño y las técnicas exactas pueden fracasar.

En cuanto a las técnicas multiobjetivo, se puede observar que existen diferentes técnicas, tales como el algoritmo NSGA, NSGAII, SPEA y SPEAII, entre otros. Sin embargo, en problemas que involucran ruteamiento de vehículos con flota

heterogénea o con impacto ambiental, pocos autores (Jemai, Zekri & Mellouli, 2012) han formulado problemas multiobjetivo, dado que han involucrado el impacto ambiental y la distancia de recorrido en una misma función objetivo.

Por su parte, los problemas que involucran flota heterogénea, han sido solucionados con técnicas exactas, heurísticas y metaheurísticas, y recientemente con técnicas híbridas entre técnicas exactas y heurísticas o metaheurísticas. Adicionalmente, algunos autores han encontrado soluciones al problema de VRP con flota heterogénea considerando flota ilimitada (FSM) y otros autores considerando flota limitada (HVRP), pocos autores han solucionado ambos casos.

Finalmente, se ha evidenciado que el problema VRP con flota heterogénea e impacto ambiental, ha sido poco explorado aún, encontrando pocas publicaciones al respecto (**Kwon, Choi & Lee, 2013**)

4. Metodología implementada

4.1. Generalidades

En este capítulo se realiza una descripción de la metodología implementada, para encontrar soluciones al problema HFVRP, considerando variables que inciden en el consumo de combustible, y este a su vez, en emisiones contaminantes. Para ello, se explicarán algunos aspectos importantes que motivaron la creación del método:

Primero: el método es poblacional: A partir de la revisión del estado del arte, surge la motivación de desarrollar un método poblacional, en el cual, se ha implementado un algoritmo genético como base. Esto debido a que, una cantidad inicial diversa de posibles soluciones, puede permitir explorar un espacio de soluciones más amplio, al que permite una única solución de inicio.

Cabe anotar que inicialmente en la lógica del algoritmo genético, se crea una población inicial, la cual está formada por individuos tomados aleatoriamente y otros encontrados con métodos de solución heurísticos y metaheurísticos, los cuales se describirán en la sección 4.2.1.

En los problemas de ruteo de vehículos con flota heterogénea, se considera un conjunto de clientes ubicados en lugares diferentes, los cuales presentan una demanda de bienes que debe ser atendida por una flota de vehículos de capacidades de carga diferentes y número limitado. Dichos vehículos parten de un depósito central hacia los clientes. En este sentido, la población inicial de individuos, que se considera en el algoritmo genético, está constituida por opciones de rutas o caminos para el viaje de cada vehículo, disponible en la flota.

Segundo: la población contiene solo rutas factibles: Cada ruta es un camino factible, en el cual un vehículo y unos clientes son seleccionados. La factibilidad se define cuando la ruta cumple con la restricción de no sobrepasar la capacidad de carga del vehículo, que le ha sido asignado, de acuerdo a las demandas de los clientes elegidos para visitar en la ruta. Mediante el algoritmo genético, se busca mejorar la población inicial iterativamente.

Tercero: el método contiene una estrategia bi-objetivo: A partir de la revisión del estado del arte, se eligieron dos variables a evaluar, las cuales inciden en las emisiones contaminantes por consumo de combustible.

De las variables que han sido estudiadas, se han elegido dos: distancia de recorrido y carga o peso transportado por el vehículo. Estas variables han sido elegidas porque son las variables en las cuales las industrias pueden decidir operativamente desde que se crea la ruta. Otras variables que se han incorporado al análisis, tales como, la velocidad de viaje, las condiciones de tráfico, la inclinación de las vías, el tipo de

combustible y las condiciones mecánicas del vehículo, son relevantes en el análisis del consumo de combustible, sin embargo, serán omitidas en este trabajo, dado que pueden ser variables menos controlables y depender de otros factores externos a la industria.

A partir de esto, se construye una estrategia bi-objetivo, en la cual, todas las rutas son evaluadas. Ambas funciones objetivo, evaluarán el consumo de combustible, dado que son variables que inciden en el incremento de emisiones medioambientales negativas. Según Xiao et al, (2012) tanto la distancia recorrida como el peso del vehículo, inciden en el consumo de combustible. Sin embargo, en la sección 4.2.3. se explica en detalle, como ambas funciones objetivo están en oposición. No siempre la menor distancia de recorrido, coincide con la ruta que transporta menor carga en el trayecto.

El objetivo será minimizar ambas funciones objetivo, encontrando el mejor compromiso entre, disminuir la distancia en el trayecto de recorrido y disminuir el peso del vehículo atendiendo primero los clientes de mayor demanda.

Cuarto: Utiliza el método set Partitioning y la ordenación por frentes:

Adicionalmente, es importante destacar, que el algoritmo desarrollado en este trabajo se desarrolla en dos fases, esto debido a que el algoritmo busca encontrar el mejor compromiso entre dos variables, en un conjunto de posibles soluciones que permita construir un frente de Pareto y no una única solución. Las dos fases consisten en lo siguiente:

- **Fase 1:** Generar una población de posibles rutas factibles y encontrar una solución para cada función objetivo mediante la formulación set Partitioning:

La población de rutas con toda su información de costos por distancia y costos por carga del vehículo, constituye los datos de entrada para el modelo set Partitioning. Este modelo se explica en detalle en la sección 4.2.2. La elección de esta formulación de tipo binario, desarrollada por Balinski & Quandt (1964) se debe a que permite evaluar un espacio de soluciones pequeño construido previamente, mientras otras formulaciones con técnicas de solución exactas pueden fracasar, por la complejidad de los problemas reales, donde es imposible evaluar todas las soluciones posibles en un tiempo razonable.

Dicho modelo, encontrará mediante técnicas exactas, a partir de la población de rutas creadas, una solución para cada función objetivo, verificando el cumplimiento de las restricciones del modelo, en el cual, cada cliente debe ser visitado por un vehículo, y el número de vehículos asignados, debe corresponder al número de vehículos disponibles.

Cada solución obtenida por el modelo representa una solución completa de rutas, que visitan a todos los clientes. Para el caso de la función objetivo 1, la solución minimiza la distancia de recorrido, y para la función objetivo 2, minimiza el peso cargado por el vehículo a través de la ruta.

- **Fase 2:** Mejorar iterativamente las soluciones encontradas y construir un frente de Pareto:

Las soluciones obtenidas para cada función objetivo, son almacenadas. Cada solución es una población y es sometida a mecanismos de selección, como se realiza en el algoritmo genético, en los cuales, dos rutas son seleccionadas. Las rutas seleccionadas son perfeccionadas a través de heurísticas de mejora iterativa por varias iteraciones. Esto se explica en detalle en las secciones 4.2.5 y 4.2.6. Solo si las rutas seleccionadas son mejoradas y no existen en la población, ingresan incrementando el número de rutas.

Una vez el número de iteraciones es completado, nuevamente las poblaciones de rutas, de forma separada, serán los datos de entrada para el modelo set partitioning, el cual encontrará mediante técnicas exactas, a partir de la población de rutas creadas, una solución para cada función objetivo, mejorando iterativamente la solución de cada función objetivo.

Cada solución obtenida por el modelo set partitioning es almacenada por un número controlado de generaciones. Finalmente, estas soluciones conformarán un frente de Pareto, y mediante la ordenación de frentes, el mejor frente será seleccionado, encontrando el mejor compromiso entre las dos funciones objetivo. Esto se podrá ver en detalle en la sección 4.2.7 y 4.2.8.

La solución es implementada y obtenida mediante la interface entre el software Matlab 7.9.0.(R2009b) y el software GAMS 23.9 (*general algebraic modeling system*).

4.2. Descripción detallada del algoritmo

En la figura 5 se presenta un diagrama de flujo con una descripción completa del algoritmo desarrollado. Cada paso del algoritmo en orden lógico es explicado a continuación.

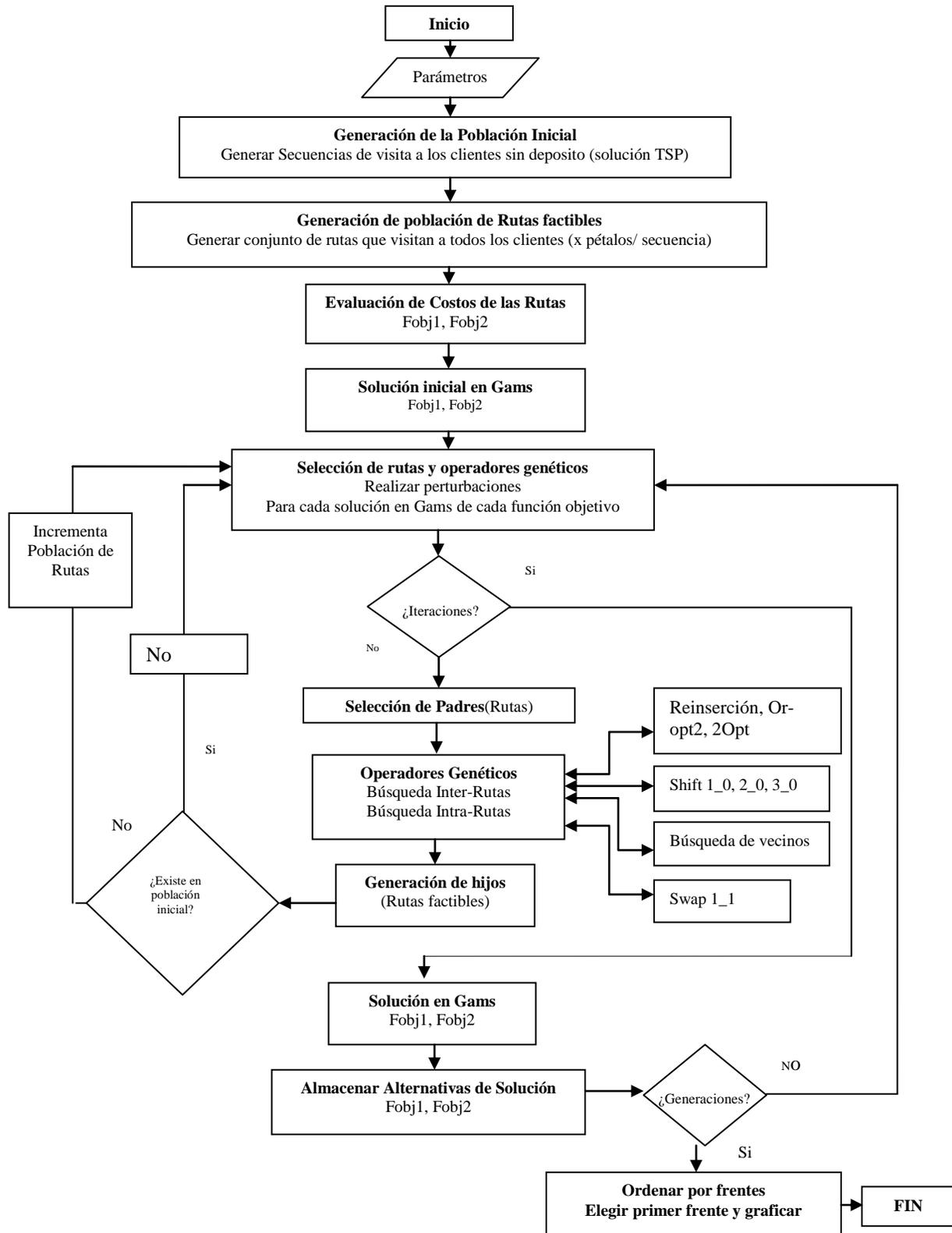


Figura 5. Diagrama de Flujo. Algoritmo bi-objetivo propuesto para HFVRP considerando efectos ambientales.

De acuerdo con la figura 5 el desarrollo paso a paso del algoritmo es el siguiente:

Paso 1. Ajuste de parámetros de inicio. Se debe elegir el número de generaciones del algoritmo, el número de iteraciones para los mecanismos de búsqueda, el tamaño de la población, el número de rutas por cada individuo de la población, el número de individuos para selección y las tasas de cruzamiento. Esto se explica en detalle en la sección 4.2.1.

Paso 2. Generación de la Población Inicial. Primero se generan varias secuencias de visita a los clientes sin considerar el depósito, estas son soluciones al problema TSP. Cada solución incluye a todos los clientes. Luego a partir de dichas soluciones se crea una cantidad de rutas que parten del depósito y regresan al depósito, asignando un vehículo de la flota disponible a cada ruta y visitando una cantidad de clientes que no sobrepasen con sus demandas la capacidad del vehículo. Estas rutas constituyen la población inicial de rutas. Para esto se utilizan dos estrategias que utilizan técnicas heurísticas de dos fases. Estas se explican en la sección 4.2.2.

Paso 3. Evaluación de costos de las rutas. Cada ruta de la población es evaluada en la función objetivo 1 distancia de recorrido y la función objetivo 2: carga del vehículo. Como se calcula cada función objetivo es explicado en el sección 4.2.4.

Paso 4. Solución inicial. La población de rutas iniciales constituye los datos de entrada para el modelo set Partitioning. Mediante técnicas exactas, el modelo de tipo binario, elige un conjunto de rutas que minimiza la función objetivo 1, y otro conjunto de rutas que minimiza la función objetivo 2, visitando a todos los clientes, sin sobrepasar la flota de vehículos disponible. Este modelo es explicado en detalle en la sección 4.2.3. y 4.2.5.

Paso 5. Selección de rutas (padres). Del conjunto de rutas de cada solución inicial, dos rutas son seleccionadas. Esto se realiza para cada función objetivo. Se recomienda ver la sección 4.2.6.

Paso 6. Mecanismos de búsqueda. Mediante operadores genéticos de búsqueda Inter-ruta e Intra-ruta, las rutas seleccionadas son mejoradas. Estos mecanismos se explican en la sección 4.2.7.

Paso 7. Generación de nuevas rutas (hijos). De los mecanismos de búsqueda surgen nuevas rutas.

Paso 8. Ingreso a la población (solución inicial). Solo las rutas que mejoren las rutas iniciales y no existan en la solución inicial de cada función objetivo, son seleccionadas para ingresar a la población. Estas rutas incrementan el tamaño de la población de cada función objetivo. Ver explicación en la sección 4.2.8.

Paso 9. Verificación del número de iteraciones. Un número controlado de veces son realizados los pasos 5, 6, 7 y 8. Cuando se cumple el número de iteraciones, continúa al paso 10, de lo contrario regresa al paso 5.

Paso 10. Nueva solución. Una nueva solución es encontrada a partir de la población de rutas de la solución inicial de cada función objetivo y las nuevas rutas que ingresaron. Estas constituyen de nuevo, los datos de entrada para el modelo set Partitioning. Mediante técnicas exactas, el modelo de tipo binario, elige un conjunto de rutas que minimiza la función objetivo 1, y otro conjunto de rutas que minimiza la función objetivo 2, visitando a todos los clientes, sin sobrepasar la flota de vehículos disponible. Ver sección 4.2.5.

Paso 11. Almacenar solución. La nueva solución de cada función objetivo es almacenada en una matriz que contiene las soluciones encontradas. Adicionalmente, en cada solución se calculan los costos de las dos funciones objetivo. Estas nuevas soluciones son ahora la solución inicial. Esto se explica en detalle en la sección 4.2.9.

Paso 12. Verificar número de generaciones. Un número controlado de veces se repiten los pasos 5 a 11. Cuando se cumple el número de generaciones continúa al paso 13, de lo contrario regresa al paso 5, con la nueva solución de cada función objetivo.

Paso 13. Ordenar por frentes y elegir el mejor frente. Los costos de función objetivo 1 y 2 de las soluciones almacenadas, son ordenados en un frente de Pareto. En este frente se grafican las soluciones encontradas en un plano cartesiano de dos dimensiones, donde los ejes representan las funciones objetivo. Cada solución representa un punto en el plano, con los valores de cada función objetivo. Mediante la ordenación de frentes del algoritmo NSGA, se encuentra el mejor frente, evaluando el mejor compromiso entre distancia recorrida y carga del vehículo. Esto se explica en detalle en la sección 4.2.9.

Estos constituyen los pasos del algoritmo desarrollado. Cada uno de los pasos es explicado en mayor detalle en cada sección de este capítulo.

4.2.1. Ajuste de parámetros de inicio

Los parámetros del algoritmo se describen a continuación:

- *Tamaño de la población inicial:* 10 individuos
- *Número de rutas por individuo:* Máximo el número de clientes
- *Numero de generaciones:* entre 30 y 100
- *Numero de perturbaciones:* entre 100 y 1000
- *Número de rutas para selección:* 3
- *Tasa de cruzamiento:* 0.25
- *Tasa de cruzamiento2 :* 0.75

Tamaño de la Población: La población generada de secuencias iniciales sin considerar el depósito, es constante, con un total de 10 individuos, de los cuales 7 son generados a través de algoritmos heurísticos constructivos y 3 son generados de forma aleatoria controlada.

Número de rutas por individuo: El número de rutas por individuo puede variar de acuerdo con la complejidad del problema. Sin embargo, como máximo será igual al número de clientes, y como mínimo al número de vehículos disponibles.

Número de generaciones: Dado que el algoritmo presenta variabilidad en el mejor número de iteraciones a realizar, se define una escala de generaciones, dependiendo del tamaño de las instancias o el número de clientes, como se presenta en la tabla 4.

Tabla 4. Numero de iteraciones de acuerdo al tamaño del problema

| Tamaño del problema (número de clientes) | Numero de generaciones | Numero de perturbaciones en cada generación |
|---|---------------------------|--|
| 20 | 30 | 100 |
| 50 | 50 | 100 |
| 75 | 100 | 500 |
| 100 | 200 | 1000 |

Número de perturbaciones: El número de perturbaciones también debe incrementarse en la medida en que el número de clientes aumenta, de acuerdo a la tabla 4. Estos valores fueron definidos a través de 10 corridas de cada número de clientes, con diferentes valores. Los valores que mejores respuestas obtuvieron son los señalados en la tabla 4.

Número de rutas para selección: Se ha determinado que se seleccionen 3 rutas candidatas, para elegir luego la de mayor costo para ser mejorada.

Tasa de cruzamiento: Para los mecanismos de perturbación se usaron dos tasas de cruzamiento, las cuales permitieron controlar el orden a realizar de los mismos, mediante la generación de un número aleatorio.

- Caso 1: Si el número aleatorio es inferior a 0,25: la tasa de cruzamiento de 0,25 permite garantizar que el 25% de los mecanismos de perturbación serán de búsqueda Inter-rutas,

- Caso 2: Si el número aleatorio se encuentra entre 0,25 y 0,75. La tasa de cruzamiento² de 0,75 permite garantizar que el 50% de los mecanismos de perturbación serán de búsqueda Intra-rutas.
- Caso 3: Si el número aleatorio es superior a 0,75. La tasa de cruzamiento² de 0,75 permite garantizar que el 25% restante de los mecanismos de perturbación serán de inserción de clientes y cambio de vehículos en las rutas.

4.2.2. Generación de la población inicial

Existen dos estrategias para generar la población inicial de rutas como se describe a continuación:

4.2.2.1 Método de Rutear primero y asignar después (Route first, cluster second)

Se han seleccionado heurísticas de dos fases para la generación de la población inicial. Esta técnica de rutear primero y asignar después explicada por Daza et al (2009) inicia resolviendo el problema del agente viajero, denominado TSP (del inglés *Traveling Salesman Problem*), definido por todos los clientes, sin considerar el depósito. Luego parte la ruta generada, para asignar un tramo a cada vehículo. Se considera importante esta técnica, debido a que en la ruta inicial que considera todos los clientes, se pueden utilizar técnicas heurísticas constructivas, que encuentren soluciones iniciales de buena calidad.

Fase 1: Rutear primero

En este caso, inicialmente se utilizan técnicas heurísticas, sin considerar el depósito, tales como, el vecino más cercano, iniciando en ciudades diferentes cada tour. Esto genera diferentes posibilidades para luego asignar tramos a los vehículos. El diagrama de flujo de la Figura 6 presenta la técnica del vecino más cercano.

Como se observa en la figura 6, la técnica del vecino más cercano inicia por seleccionar un cliente de forma aleatoria. Luego busca el cliente más próximo, de acuerdo a los datos suministrados por una matriz de distancias entre clientes. El cliente más próximo es adicionado a la ruta, conformando un sub-tour. De la misma forma, ahora busca el cliente más cercano a los clientes del sub-tour, que aún no ha sido visitado, hasta visitar a todos los clientes.

Mediante la heurística del vecino más cercano, se obtiene un gran tour o una gran ruta, y termina la primera fase de rutear primero. Algunos individuos de la población inicial son generados mediante esta técnica, iniciando el tour en clientes diferentes. Otros individuos son generados de forma aleatoria, con una permutación de números que visita a todos los clientes.

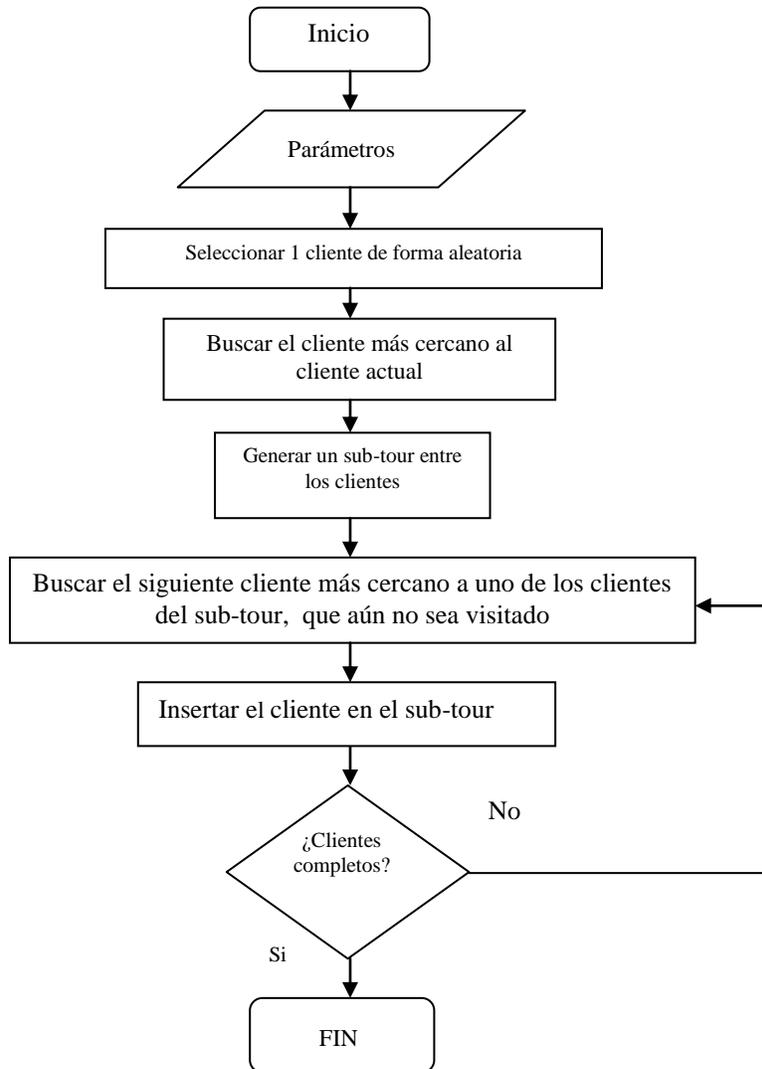


Figura 6. Diagrama de flujo de la técnica del vecino más cercano.

Fuente: elaboración propia

Codificación del problema

En la primera fase, la población inicial, está conformada por diferentes secuencias o permutaciones de números de tamaño igual al número de clientes, que representa la secuencia en la cual son visitados en una única ruta o gran tour. En dicha secuencia cada cliente es visitado una sola vez. En la siguiente figura se presenta un ejemplo de la población inicial con 5 individuos para un problema de 10 clientes.

| | | | | | | | | | |
|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|
| 3 | 2 | 7 | 8 | 9 | 4 | 1 | 5 | 10 | 6 |
| 6 | 3 | 7 | 8 | 5 | 1 | 2 | 4 | 9 | 10 |
| 8 | 9 | 2 | 10 | 3 | 7 | 4 | 1 | 5 | 6 |
| 5 | 2 | 1 | 7 | 6 | 8 | 9 | 10 | 3 | 4 |
| 2 | 10 | 4 | 5 | 3 | 8 | 7 | 1 | 6 | 9 |

Figura 7. Representación de una población inicial de 5 individuos con 10 clientes

Como se observa en la figura 7, cada individuo de la población tiene una secuencia diferente de visita a los clientes, sin considerar el depósito. Este constituye la primera fase del segundo paso del algoritmo.

Fase 2. Asignar después

Una vez obtenida la población inicial, aleatoriamente o por la heurística del vecino más cercano, en la segunda fase, se genera una cantidad de rutas o caminos, para cada individuo de la población inicial. La codificación de las rutas en la segunda fase se explica en la figura 8, mediante un pequeño ejemplo.

3 2 7 8 9 4 1 5 10 6

Secuencia de clientes del primer individuo de la población

| | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Cliente | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Demanda | 9 | 4 | 5 | 8 | 2 | 7 | 6 | 3 | 2 | 3 |

Demanda de bienes de cada cliente

| Tipo de vehículo | Capacidad de carga en unidades | Número de vehículos disponibles |
|------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 20 | 2 |
| 2 | 12 | 2 |

Tipo de vehículos y capacidad de carga

Ruta 1 0 3 2 7 8 9 0 Carga 20. Tipo de vehículo 1

Ruta 2 0 4 1 5 0 Carga 19. Tipo de vehículo 1

Ruta 3 0 10 6 0 Carga 10. tipo de vehículo 2

Clientes en las rutas que parten desde el depósito 0 y regresan a él.

Figura 8. Representación de un conjunto de rutas perteneciente a un individuo de la población inicial

Como se observa en la figura 8, en cada ruta el depósito es representado por el vértice 0, iniciando y terminando el recorrido en el depósito. Cada ruta es completada cuando la capacidad del vehículo seleccionado no pueda adicionar ni un solo cliente más a la ruta, de acuerdo con las cantidades demandadas por los clientes. Esto garantiza que las rutas sean factibles.

El conjunto de rutas creado constituye la población inicial de rutas. La secuencia de visita de cada ruta es almacenada, al igual que su demanda total de recorrido y el tipo de vehículo seleccionado. La figura 8 presenta la información de cada ruta.

El número de rutas a generar por cada individuo, dependerá de si el problema considera un número limitado o ilimitado de vehículos.

Si el número de vehículos es limitado, se generará un número de rutas menor o igual al número de vehículos disponibles. Por su parte, si la flota de vehículos no es limitada, se generará un número de rutas igual al número de clientes, esto para generar mayor diversidad en las posibles soluciones, sin embargo, después el algoritmo elegirá minimizar el número de vehículos asignados. Este segundo caso, se puede aplicar a industrias donde la flota de vehículos aun está en proceso de compra.

Para ilustrar como se implementó el algoritmo, en la figura 9 se explica el paso a paso de la generación de la población inicial después de obtener la secuencia de clientes del TSP. Este grafico complementa la explicación del paso 2 del algoritmo.

Al observar la figura 9, se evidencia como una vez obtenida la secuencia de visita de los clientes del TSP, se selecciona el cliente inicial de la secuencia para la primera ruta. Una vez seleccionado, se selecciona también 1 vehículo disponible. Para la selección del vehículo, se ha definido recorrer los vehículos iniciando por los de mayor capacidad hasta llegar a los vehículos de menor capacidad.

Con el vehículo seleccionado, se empiezan a adicionar clientes a la ruta, en el mismo orden que aparecen en la secuencia, siempre verificando si el cliente puede adicionarse, de acuerdo a la demanda total de la ruta y la capacidad del vehículo.

Una vez es completada la ruta, se inicia una nueva ruta, indicando la posición del cliente final de la ruta anterior, en la secuencia, para seleccionar como cliente inicial el ubicado en la siguiente posición.

El criterio de parada del algoritmo es cuando la posición final es igual al número de clientes, dado que esto indica que se han visitado a todos los clientes. Sin embargo, cuando la flota es ilimitada, el algoritmo continúa iniciando en clientes aleatorios hasta crear un número de rutas controlado (máximo el número de rutas igual al número de clientes)

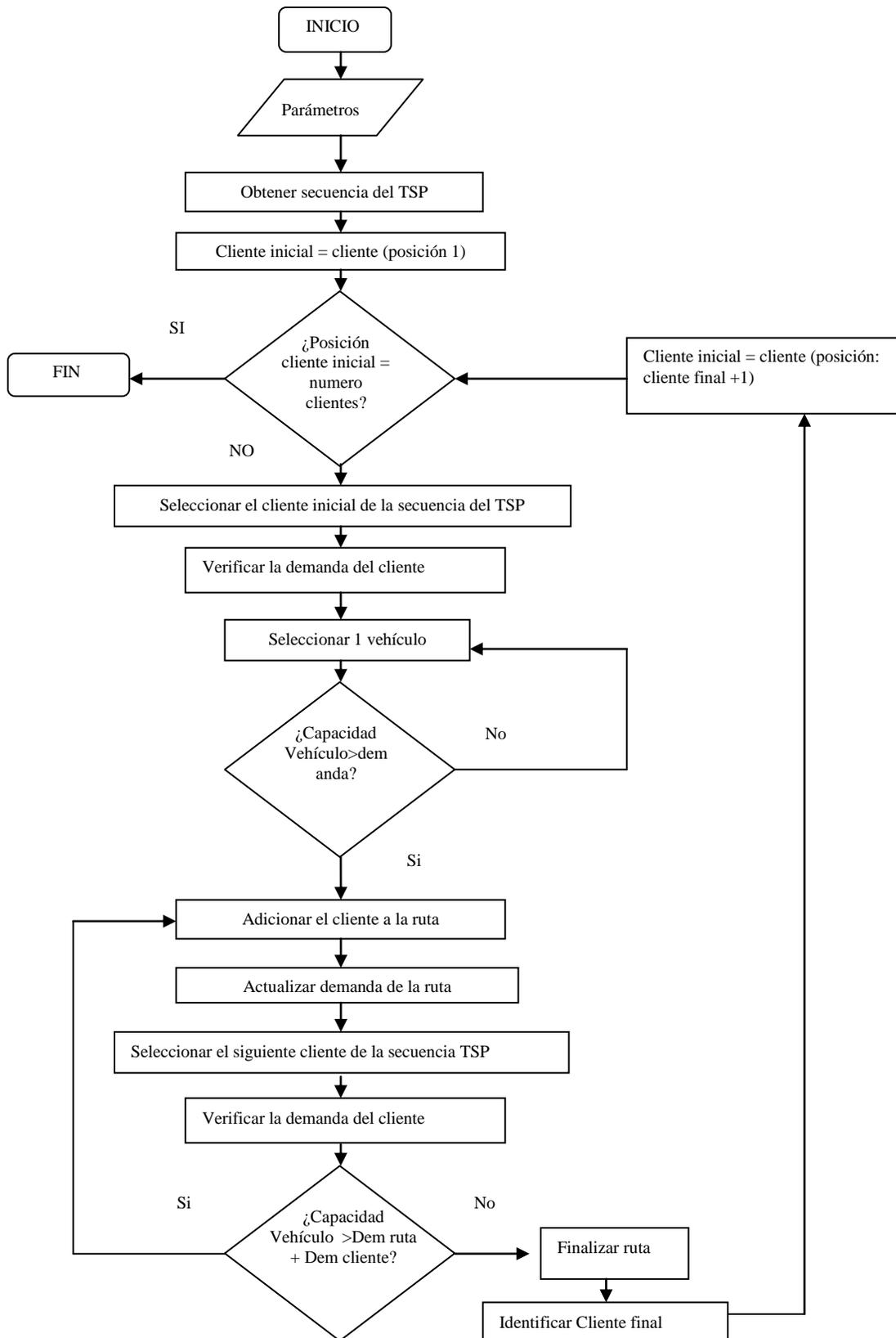


Figura 9. Diagrama de flujo generación de rutas factibles.
Fuente: Elaboración propia.

4.2.2.2 Métodos de asignar primero y rutear después (cluster first, route second)

Como una segunda estrategia se generaron rutas adicionales para la población inicial, utilizando la heurística de asignar primero y rutear después. Dentro de esta técnica se encuentra la técnica de barrido para seleccionar clusters.

Se utiliza la técnica de barrido, con el objetivo de generar algunas rutas por otro método, el cual, consiste en generar rutas por sectores de la población de clientes, a través de una ordenación por coordenadas polares.

Según Orrego: *“los clusters se forman girando una semirrecta con origen en el depósito e incorporando los clientes barridos por dicha semirrecta hasta que se viole la restricción de capacidad. Cada clúster es luego ruteado resolviendo un TSP de forma exacta o aproximada”* (Orrego,2013, p27).

Cada cliente está dado por sus coordenadas polares (p_i, θ_i) . En la figura 10 se presenta la técnica de barrido.

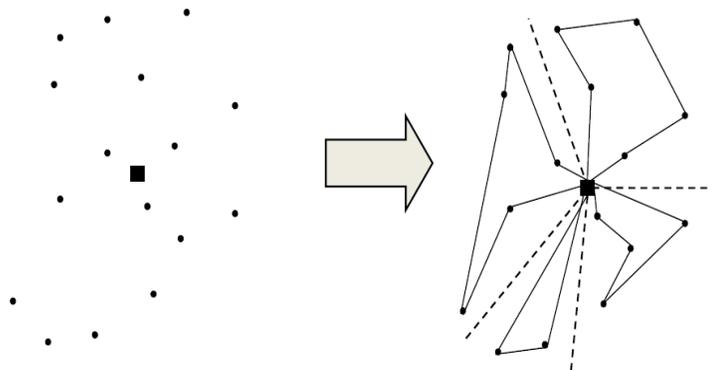


Figura 10. Heurística de barrido.

Fuente: Orrego, Juan pablo. Solución al problema de ruteo de vehículos con capacidad limitada “cvrp” a través de la heurística de barrido y la implementación del algoritmo genético de chu-beasley. 2013.

Fase 1: asignar primero

De acuerdo con la figura 10, y el diagrama de flujo de la figura 11, los clientes deben ser ordenados por sus coordenadas polares, de menor a mayor, de acuerdo al radio y el ángulo formado entre los clientes y el depósito. Una vez ordenados, se van formando las rutas con la misma codificación de las rutas creadas por la primera estrategia, partiendo desde el depósito y regresando a él. Estas rutas son adicionadas a la población de rutas.

La figura 11 presenta cómo se generan las secuencias por técnica de barrido en el algoritmo.

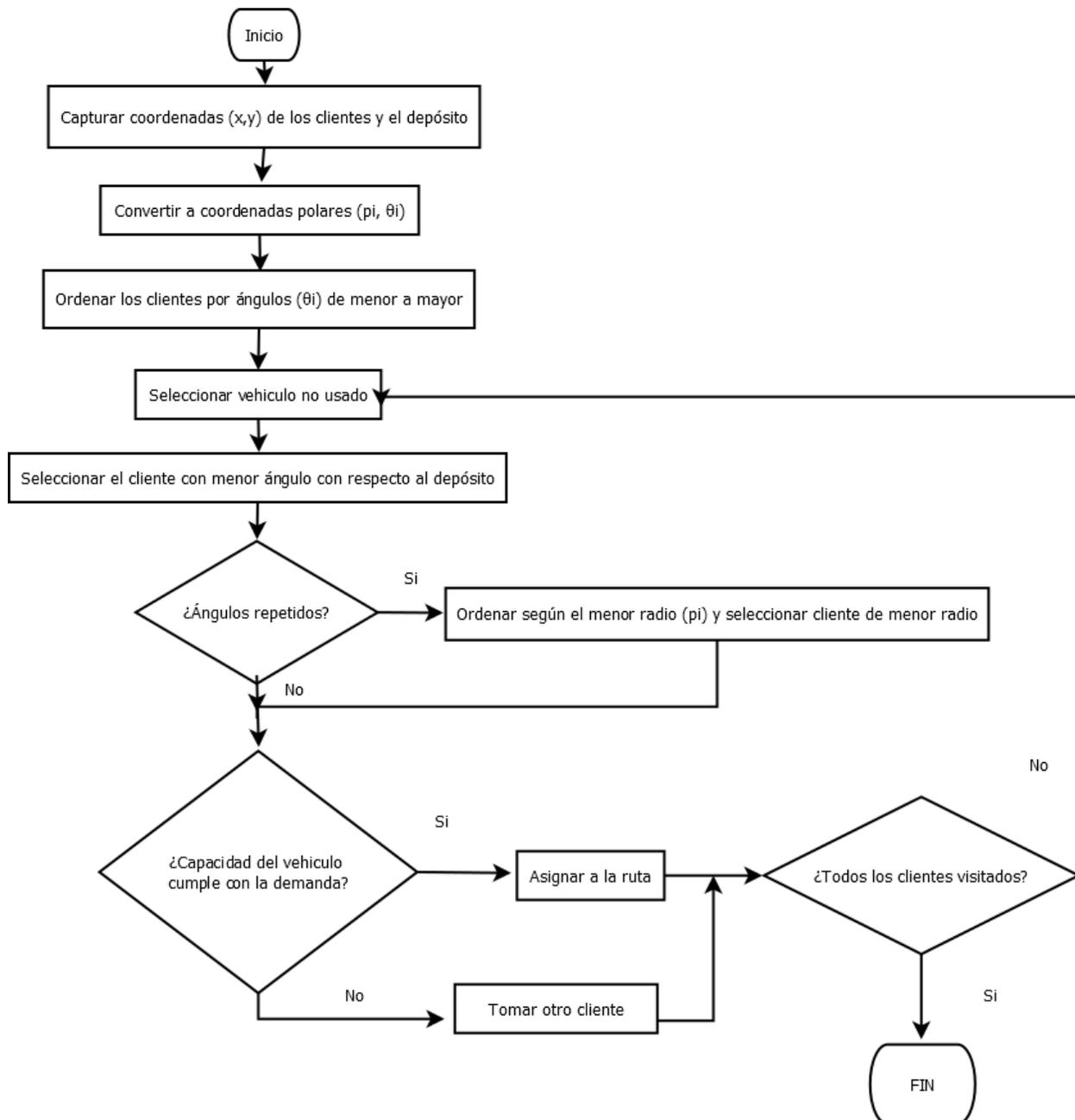


Figura 11. Diagrama de flujo para la técnica de barrido.

Fuente: Orrego, Juan pablo. Solución al problema de ruteo de vehículos con capacidad limitada "cvrp" a través de la heurística de barrido y la implementación del algoritmo genético de chu-beasley. 2013.

En la figura 11 se observa, como se define la selección de los clientes. Los clientes son seleccionados por el menor ángulo, formado entre los clientes y el depósito. Cuando se generan empates por ángulos repetidos, los clientes restantes se ordenan por menor

radio. Mientras los clientes seleccionados no sobrepasen la capacidad del vehículo, pueden ser adicionados a la ruta. Finalmente, cuando todos los clientes son visitados, se termina la generación de rutas.

Fase 2: Rutear después

La segunda fase del método, en este trabajo se realiza más adelante, cuando las rutas mediante mecanismos de búsqueda Intra-ruta e Inter-ruta, son mejoradas iterativamente. Esto se explica en detalle en la sección 4.2.7.

Una vez generada la población inicial de rutas por las dos estrategias explicadas en la sección 4.2.2.1 y 4.2.2.2, otras rutas son creadas, como rutas de un solo cliente, para garantizar que todos los clientes siempre estén incluidos en la solución. Esto en especial es necesario cuando el problema considera el tamaño de la flota ilimitado, dado que se puede infactibilizar la solución, si al generar las rutas todos los clientes no son visitados.

4.2.3. Descripción de la formulación Set Partitioning

Basados en una formulación matemática conocida como separación de conjuntos (SP del inglés *Set Partitioning*) originalmente propuesto por Balinski & Quandt (1964) y presentado en otras investigaciones como la propuesta por Subramanian (2012) para el problema de ruteamiento de vehículos, se presenta el modelo matemático, implementado para la solución del problema de HFVRP considerando efectos ambientales.

La formulación Set partitioning (*SP*) usa un número exponencial de variables binarias, cada una asociada con una ruta factible diferente (Toth & Vigo, 2002). La elección de esta formulación de tipo binario, desarrollada por Balinski & Quandt (1964) se debe a que permite evaluar un espacio de soluciones construido previamente, mientras otras formulaciones con técnicas de solución exactas pueden fracasar, por la complejidad de los problemas reales, donde es imposible evaluar todas las soluciones posibles en un tiempo razonable.

Una secuencia de modelos *SP*, con un conjunto de rutas encontradas previamente mediante técnicas heurísticas, son resueltos, no necesariamente para encontrar la solución óptima, pero sí para encontrar una solución de buena calidad entre las rutas generadas (Toth & Vigo, 2002). La formulación *SP*, es resuelta mediante un solver de programación entera mixta, que puede interactuar con las rutas que van siendo creadas. Cada vez que una búsqueda local genera nuevas rutas, éstas pueden ser adicionadas a la población de rutas, y nuevamente la formulación *SP* es resuelta.

Específicamente se define la formulación *SP* de la siguiente manera, basados en los aportes de Toth & Vigo (2002) y Subramanian (2012) y adaptados al problema HFVRP:

Se define R como el conjunto de todos los circuitos creados inicialmente, donde cada circuito corresponde a una ruta factible R_j , con un vehículo seleccionado y demanda total atendida en el recorrido igual o inferior a la capacidad del vehículo.

Cada ruta R_j , tiene asociado un costo c_j . Adicionalmente, se define y_j como una variable binaria, que toma el valor de 1, si y solo si, la ruta R_j es seleccionada en la solución y cero en caso contrario.

En cada ruta los clientes visitados se denotan por i . Existe entonces un coeficiente binario a_{ij} que toma el valor de 1 si el cliente i es visitado por la ruta j y el valor 0 si no es así.

Se define V como el conjunto de todos los clientes, M como el conjunto de vehículos disponibles, y m como el número total de vehículos disponibles.

Finalmente se define $R_u \subseteq R$ como el subconjunto de rutas asociadas con el tipo de vehículo $u \in M$ y m_u la cantidad de vehículos disponibles de cada tipo de vehículo.

De acuerdo con esto el modelo es:

$$\text{Min } \sum_{j \in R} c_j y_j \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in R} a_{ij} y_j = 1 \quad \forall i \in V \tag{2}$$

$$\sum_{j \in R_u} y_j \leq m_u \quad \forall u \in M \tag{3}$$

$$\sum_{j \in R} y_j \leq m \tag{4}$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in R \tag{5}$$

La función objetivo (1) minimiza la suma de los costos, asociados a la selección de la mejor combinación de rutas. La restricción (2) permite que cada cliente sea visitado solo por una ruta del conjunto de todas las rutas que lo contienen. La restricción (3) permite que la cantidad de rutas seleccionadas para cada tipo de vehículo no sobrepase la cantidad de vehículos disponibles de cada tipo. Por su parte, la restricción (4) verifica que la cantidad total de rutas seleccionadas corresponda al número de vehículos disponibles o a un número inferior de ellos y la restricción (5) define la variable asociada a cada ruta como una variable de tipo binario.

Los Costos c_j , asociados a cada ruta, son calculados a partir de los costos variables y fijos. Los costos variables están asociados a la distancia recorrida en cada ruta, o al factor de carga del vehículo, multiplicado por un costo unitario de viaje, y los costos fijos son costos en los que se puede incurrir al utilizar los vehículos. No obstante, como este trabajo se enfoca en un problema bi-objetivo, en la siguiente sección se explica en detalle como son calculados los costos para cada función objetivo.

La solución del problema consiste en las rutas seleccionadas por la variable y_j y el valor del costo total.

4.2.4. Costos y medición del efecto ambiental por consumo de combustible

Los costos de cada ruta son calculados mediante dos funciones diferentes. A partir de la revisión del estado del arte, se eligieron dos variables a evaluar, las cuales inciden en las emisiones contaminantes por consumo de combustible.

De las variables que han sido estudiadas, se han elegido dos: distancia de recorrido y carga o peso transportado por el vehículo. Estas variables han sido elegidas porque son las variables en las cuales las industrias pueden decidir operativamente desde que se crea la ruta. Otras variables que se han incorporado al análisis, tales como, la velocidad de viaje, las condiciones de tráfico, la inclinación de las vías, el tipo de combustible y las condiciones mecánicas del vehículo, son relevantes en el análisis del consumo de combustible, sin embargo, serán omitidas en este trabajo, dado que pueden ser variables menos controlables y depender de otros factores externos a la industria.

A partir de esto, se construye una estrategia bi-objetivo, en la cual, todas las rutas son evaluadas. Ambas funciones objetivo, evaluarán el consumo de combustible, dado que son variables que inciden en el incremento de emisiones medioambientales negativas.

Según Xiao et al (2012) tanto la distancia recorrida como el peso del vehículo, inciden en el consumo de combustible, sin embargo, no siempre la menor distancia de recorrido, coincide con la ruta que transporta menor carga en el trayecto. Este conflicto fue referenciado por Xiao et al (2012) y en este capítulo se explicará en detalle.

El objetivo será minimizar ambas funciones objetivo, encontrando el mejor compromiso entre, disminuir la distancia en el trayecto de recorrido y disminuir el peso del vehículo atendiendo primero los clientes de mayor demanda.

Cada función objetivo se describe de la siguiente manera:

- **Función objetivo 1: Minimizar costo operativo por distancia de recorrido:**

Los Costos c_j , asociados a cada ruta, son calculados a partir de los costos variables y fijos. Los costos variables están asociados a la distancia recorrida en cada ruta, multiplicado por un costo unitario de viaje, y los costos fijos son costos en los que se puede incurrir al utilizar los vehículos.

Para calcular la distancia recorrida se deben estimar las distancias entre clientes, y entre clientes y depósito. Una vez se han calculado las distancias, se debe multiplicar por el costo unitario variable de transporte, más el costo fijo de utilización del vehículo, tal como lo describe la ecuación 6.

$$Min C_{j_dist} = Cf_u + Cv_u * (d_{0ii} + d_{kfo}) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (Cv_u * d_{ik}) \quad (6)$$

Donde:

n : numero de clientes

u : tipo de vehiculo en la ruta

Cv_u : Costo variable del vehiculo tipo u

Cf_u = costo fijo del vehiculo tipo u

d_{ik} : distancia entre el cliente i y el cliente k

d_{0ii} = distancia entre el depósito y el cliente inicial de la ruta

d_{kfo} = distancia entre el cliente final de la ruta y el depósito

- **Función objetivo 2: Minimizar costo por consumo de combustible asociado a la carga del vehículo:**

Este será calculado para cada ruta, a partir de la secuencia o el orden en que los clientes son visitados. El objetivo principal será determinar el mínimo consumo de combustible, teniendo en cuenta la distancia recorrida y la carga o peso del vehículo para cada ruta, en cada tramo, tal como lo propone Xiao et al. (2012).

En la formulación propuesta por Xiao et al. (2012) el consumo de combustible a lo largo de la ruta R_j varía de acuerdo a la carga del vehículo entre cada par de clientes, así el peso de la carga que toma el vehículo es considerado una variable de decisión, en la

medida en que podría ser conveniente visitar a los clientes de mayor demanda primero, de modo que el vehículo pueda viajar cada vez más ligero de peso y consumir menor combustible en el recorrido. Esto último implica que se debe reducir la carga del vehículo, cuando este visita a un cliente, en la cantidad que demanda dicho cliente.

Esta función objetivo calcula el costo de las rutas c_j , no solo de acuerdo a la distancia de recorrido, sino que involucra el consumo de combustible en que incurre el vehículo, cuando viaja sin peso o mercancía y cuando viaja con determinada cantidad de peso.

La función objetivo presentada por Xiao et al, (2012) y ajustada de manera adecuada para el HFVRP es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min } C_{j_comb} = & C_{f_u} + C_{v_u} d_{0ii}(P_{o_u} + \alpha_u y_{0i}) + C_{v_u} d_{kf0}(P_{o_u} + \alpha_u y_{k0}) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{v_u} d_{ik}(P_{o_u} + \alpha_u y_{ik}) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde:

n : numero de clientes

u : tipo de vehículo

C_{v_u} : Costo variable del vehiculo tipo u

C_{f_u} = costo fijo del vehiculo tipo u

d_{ik} : distancia entre el cliente i y el cliente k

P_{o_u} = Peso del vehiculo tipo u vacío

α_u = factor de carga del vehículo tipo u

y_{ik} = Carga llevada por el vehiculo entre el cliente i y el cliente k

d_{0ii} = distancia entre el depósito y el cliente inicial de la ruta

d_{kf0} = distancia entre el cliente final de la ruta y el depósito

y_{0i} = carga llevada por el vehiculo entre el depósito y el cliente inicial de la ruta

y_{k0} = carga llevada por el vehiculo el cliente final de la ruta y el depósito

La primera parte de la ecuación (7) corresponde al costo fijo de utilizar el tipo de vehículo u , de acuerdo a la ruta seleccionada, y la segunda parte es la suma del costo de combustible del vehículo, entre depósito y clientes y luego entre clientes, donde α representa un factor de carga calculado para cada tipo de vehículo (8), de acuerdo a su peso lleno p^* , su peso vacío p_o y su capacidad Q :

$$\alpha = \frac{p^* - p_o}{Q} \quad (8)$$

La ecuación (8) proporciona el peso por unidad de carga. El consumo de combustible puede ser minimizado al diseñar una secuencia óptima de descarga de peso de los vehículos.

Al implementar esta función en el modelo propuesto, los costos de las rutas son calculados de una manera dinámica, disminuyendo la carga del vehículo en cada visita a un cliente, dando mayor prioridad a los clientes de mayor demanda y calculando el costo asociado, sin dejar de considerar la distancia recorrida.

Ambas funciones para evaluar el costo: la función que solo considera la distancia y la función que considera la carga que transporta el vehículo, a lo largo del recorrido, pueden estar en conflicto.

En la publicación de Xiao et al (2012) se genera una muestra de datos y se construye un modelo de regresión lineal, en el cual, se puede demostrar que existe una fuerte correlación positiva entre el consumo de combustible y el peso del vehículo. Esto permite demostrar que a mayor peso del vehículo, mayor consumo de combustible. Adicionalmente, se evidencia una ilustración pequeña del conflicto entre ambas funciones, por distancia de recorrido y por consumo de combustible por factor de carga del vehículo. La tabla 5 presenta los datos para un ejemplo con 3 clientes y 1 depósito.

Tabla 5. Datos para un problema de 3 clientes y 1 depósito

| Datos | Codificación | Coordenadas | Demanda |
|------------------|--------------|-------------|---------|
| Depósito | 0 | (1,1) | 0 |
| Cliente 1 | 1 | (2,3) | 8 |
| Cliente 2 | 2 | (4,2) | 10 |
| Cliente 3 | 3 | (5,5) | 2 |

Fuente: Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem. Xiao et al (2012)

Derivado de este ejemplo, en la tabla 6 se presentan los resultados frente a la distancia recorrida entre clientes d_{ik} y el costo C_Q de acuerdo a la carga entre clientes Q_{ik}

Tabla 6. Resultados obtenidos para un problema de 3 clientes y 1 depósito

| Rutas en la figura 12 (a) | | | | Rutas en la figura 12 (b) | | | | Rutas en la figura 12 (c) | | | |
|---------------------------|----------|----------|--------|---------------------------|----------|----------|--------|---------------------------|----------|----------|--------|
| (i, k) | d_{ik} | Q_{ik} | C_Q | (i, k) | d_{ik} | Q_{ik} | C_Q | (i, k) | d_{ik} | Q_{ik} | C_Q |
| 0,1 | 2.236 | 20 | 4.472 | 0,2 | 3.162 | 20 | 6.325 | 0,1 | 2.236 | 20 | 4.472 |
| 1,3 | 3.606 | 12 | 5.769 | 2,3 | 3.162 | 10 | 4.743 | 1,2 | 2.236 | 12 | 3.578 |
| 3,2 | 3.162 | 10 | 4.743 | 3,1 | 3.606 | 8 | 5.048 | 2,3 | 3.162 | 2 | 3.479 |
| 2,0 | 3.162 | 0 | 3.162 | 1,0 | 2.236 | 0 | 2.236 | 3,0 | 5.657 | 0 | 5.657 |
| Total | 12.166 | | 18.147 | Total | 12.166 | | 18.352 | Total | 13.291 | | 17.185 |

Fuente: Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem. Xiao et al (2012)

Al revisar la tabla 6, se puede observar que la mejor solución por distancia mínima (d_{ik}), no necesariamente corresponde a la mejor solución por carga mínima del vehículo (C_Q)

La figura 12 presenta el recorrido de los vehículos entre el depósito 0 y los clientes 1, 2 y 3 en una única ruta, de tres formas distintas.

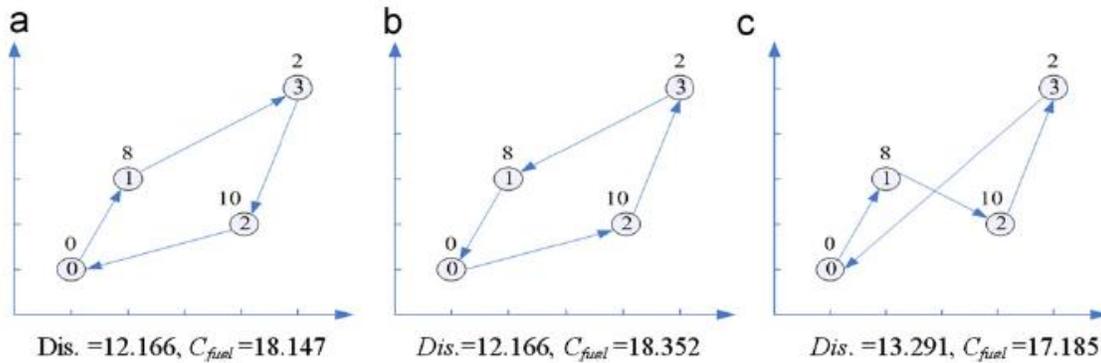


Figura 12. Comparación de resultados con dos funciones objetivo: distancia y carga del vehículo.

Fuente: Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem. Xiao et al (2012)

Entre las gráficas a y b de la figura 12, se observa que se puede recorrer la misma distancia, sin embargo, la dirección de la ruta implica una descarga de peso del vehículo diferente, al visitar en un orden contrario a los clientes, encontrando más conveniente la solución a.

Entre la grafica c, de la figura 12, se observa como un orden de visita a los clientes diferente, puede generar menor consumo de combustible por carga del vehículo. Sin embargo, la distancia recorrida aumenta. En esencia podría encontrarse un mejor compromiso en la solución a.

Al graficar un frente de Pareto con las soluciones de las figuras 12 a), 12 b) y 12 c) se obtiene lo siguiente:

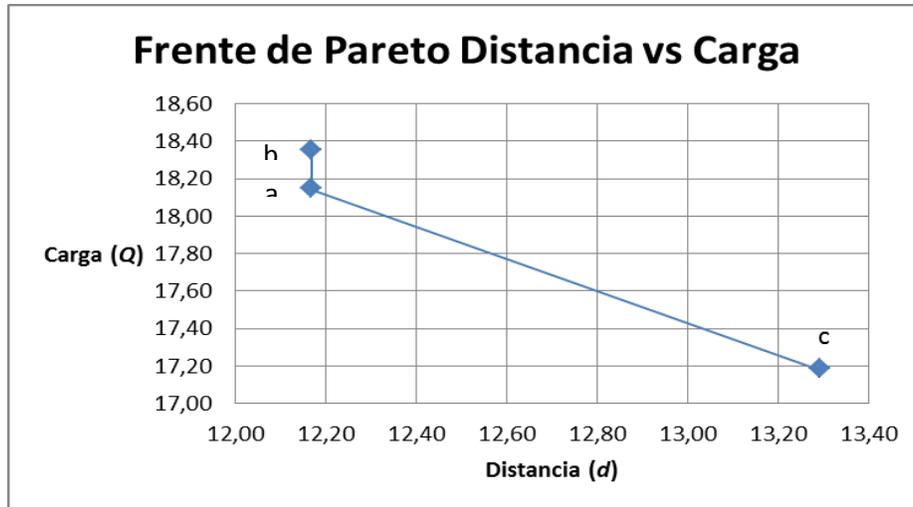


Figura 13. Frente de Pareto para un ejemplo de 3 clientes y 1 depósito

Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la figura 13, el mejor compromiso entre distancia y carga de las soluciones obtenidas en el ejemplo de la figura 12, está representado en la solución a.

En conclusión, si se evalúa el consumo de combustible de acuerdo al peso del vehículo, deben visitarse los clientes de mayor demanda al inicio de la ruta, lo cual podría estar en conflicto con la ruta de distancia mínima. Esto sugiere, que el modelo debe ser evaluado como un modelo bi-objetivo, en el cual 2 objetivos son evaluados:

- 1) Minimizar la distancia recorrida
- 2) Minimizar el consumo de combustible, considerando la carga y descarga de peso del vehículo, priorizando a los clientes de mayor demanda.

Encontrar el mejor compromiso entre el consumo de combustible por carga y distancia, para el problema HFVRP, será el objetivo de este trabajo.

4.2.5. Interfaz Matlab - GAMS

En los pasos 4 y 10, explicados en la figura 5, es necesario encontrar una solución para la formulación Set partitioning (*SP*), explicada en la sección 4.2.3. La formulación *SP* es un modelo de Programación Lineal Binario, que requiere técnicas exactas en la solución, para seleccionar de un conjunto de rutas, las rutas que mejor satisfacen unas condiciones. Para ejecutar el modelo *SP* se usa el solver CPLEX, y por tanto un software como GAMS es útil.

El solver CPLEX resuelve problemas de programación lineal usando una gran cantidad de alternativas de algoritmos. Para problemas de variables enteras o binarias, CPLEX usa el algoritmo de Branch and cut (Gams. The Solver Manuals, 2012). Este algoritmo utiliza una técnica híbrida entre el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound) y el algoritmo de cortes de Gómory, los cuales, fusionados en un solo algoritmo encuentran soluciones enteras en un tiempo muy eficiente.

La población de rutas que alimenta los datos de entrada de la formulación *SP*, es creada en el software de optimización Matlab R2009b. Este ha sido seleccionado por considerar que es un entorno con múltiples facilidades en el manejo de datos. Adicionalmente, se tiene conocimiento previo de programación en Matlab.

Mediante una interfaz entre Matlab R2009b y el software de optimización Gams 23.9, los conjuntos de rutas y sus costos, son evaluados por el modelo de programación lineal binario, mediante el solver CPLEX, devolviendo una solución, la cual consiste en elegir las mejores rutas dentro de las existentes en la población, para solucionar el problema.

Este método se aplica para cada función objetivo. La figura 14 presenta una idea general del intercambio de información entre Matlab y Gams.

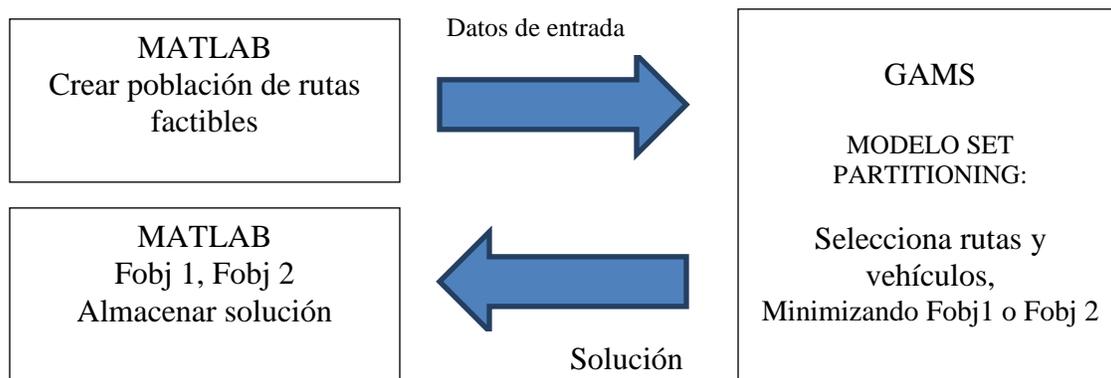


Figura 14. Interfaz entre Matlab y Gams en el algoritmo.

Fuente: Elaboración propia

La cantidad de vehículos disponibles inicialmente puede ser relajada para evitar infactibilizar el problema. Sin embargo, existen problemas con flota ilimitada y con flota limitada.

Una vez es obtenida una solución factible de rutas para cada función objetivo, las rutas que componen cada solución son almacenadas. Luego, estas rutas son seleccionadas

de forma aleatoria para ser sometidas a diferentes mecanismos de perturbación y generar nuevas rutas factibles como se explica en las secciones 4.2.6 y 4.2.7.

Una cantidad de generaciones, son ejecutadas, y en cada generación la población de rutas es aumentada, de acuerdo a un número de perturbaciones. Finalmente, en cada generación se realiza la interfaz entre el software Matlab y Gams, y nuevas rutas son evaluados por el modelo de programación lineal, mediante el solver CPLEX, encontrando nuevas soluciones factibles, las cuales, serán almacenadas.

4.2.6. Técnicas de Selección

En el paso 5 del algoritmo, como técnica de selección se utiliza la técnica de torneo. Esta técnica fue presentada en Dréo y Taillard (2003) y consiste en seleccionar aleatoriamente k individuos candidatos de una población de tamaño n de rutas ($k < n$) y a partir de ellos, elegir el individuo con mejor función de adaptación, en este caso mejor función objetivo.

De acuerdo con Granada (2009) el operador de selección tiene como objetivo identificar y replicar buenas soluciones y eliminar malas soluciones, reemplazando las malas soluciones con soluciones mejoradas.

Sin embargo, para este trabajo, no siempre es mejor elegir las rutas de menor costo, puesto que se hace necesario, no solo replicar las mejores rutas, sino también explorar y mejorar las rutas de mayor costo en una solución. En este caso el valor de k es pequeño, $k=2$ o $k=3$, con el objetivo de que el proceso de selección sea un poco más aleatorio.

Dentro de las rutas de cada función objetivo, selecciona 2 o 3 rutas aleatorias. De estas, el 50% de las veces selecciona la ruta de menor costo en la función objetivo y el 50% de las veces la ruta de mayor costo, es seleccionada.

El algoritmo se ejecuta cierto número de generaciones, las cuales varían con el número de clientes del problema. En cada generación evalúa la función objetivo 1 y la función objetivo 2, de forma separada.

4.2.7. Mecanismos de perturbación de las rutas

Se utilizan mecanismos de perturbación, entre el conjunto de rutas seleccionadas en cada solución. Estos mecanismos, involucran cambios o perturbaciones a las rutas, que permiten explorar otros espacios factibles de la solución del problema. Dichas perturbaciones son realizadas a un conjunto de rutas que constituyen una solución completa (es decir incluye todos los clientes) en cada generación del algoritmo, y entran a ser parte de la población de rutas a evaluar, siempre y cuando sean diferentes a las existentes. Este mecanismo se realiza para ambas funciones objetivo por separado, en cada generación del algoritmo.

Dentro de los mecanismos de perturbación utilizados se encuentran dos tipos, búsqueda Inter-ruta y búsqueda Intra-ruta. Estos son descritos en Subramanian (2012) y se presentan a continuación:

4.2.7.1 Búsqueda Inter-ruta: estos cambios se realizan entre dos rutas. Los operadores utilizados fueron los siguientes:

- **Swap 1-1:** Permutación entre un cliente de una ruta R_1 y un cliente de una ruta R_2 . Para prohibir movimientos infactibles se debe verificar si el intercambio en la demanda no excede la capacidad de los vehículos de cada ruta. En la figura 15 se presenta una permutación entre el cliente 6 de la ruta R_1 y el cliente 2 de la ruta R_2 .

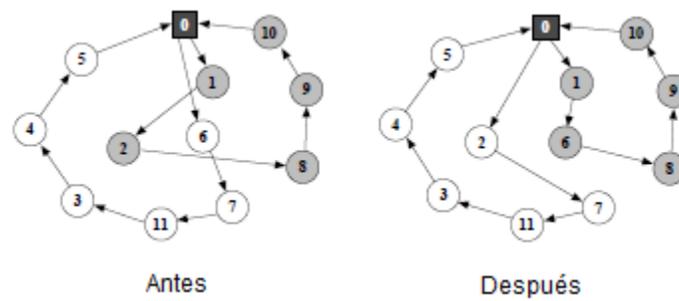


Figura 15. Ejemplo de swap 1-1.

- **Shift 1-0:** Un cliente es transferido de una ruta R_1 a una ruta R_2 . Si al transferir el cliente la capacidad del vehículo es sobrepasada esto generaría una solución infactible, por lo tanto el cambio no es permitido y la ruta R_1 y R_2 continúan igual. Esto debe ser sometido a verificación. Si por el contrario, al transferir el cliente, la capacidad del vehículo no es sobrepasada, el cambio es permitido. Cuando el cambio es permitido la ruta R_1 y R_2 deben actualizar sus valores de demanda y costos.

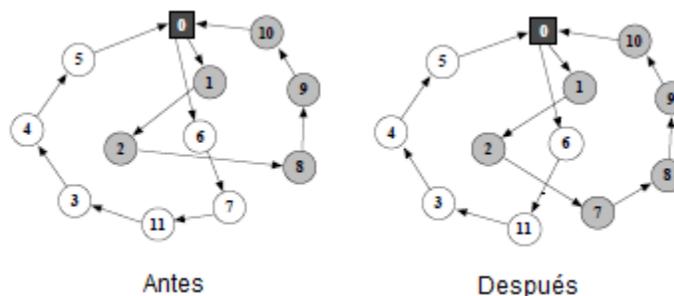


Figura 16. Ejemplo de Shift 1-0

- **Shift de cliente y vehículo:** Este operador fue adaptado para este problema de HFVRP en este trabajo. Un cliente es transferido de una ruta R_1 a una ruta R_2 . Si

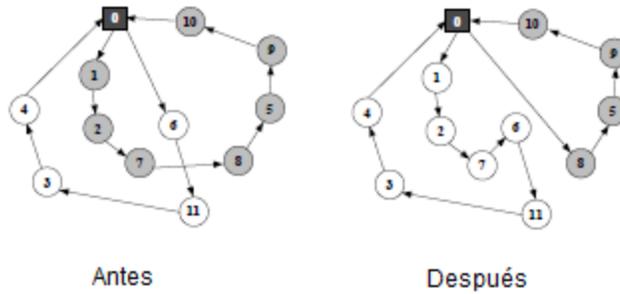


Figura 19. Ejemplo k shift

- Cross:** Se identifica el cliente inicial y final de dos rutas. Luego se desconectan de las rutas y se intentan intercambiar, el cliente inicial y el final de cada ruta, o los dos clientes iniciales o los dos clientes finales. El mejor intercambio posible es ejecutado, para esto se debe cumplir que la demanda resultante no exceda la capacidad de los vehículos de ambas rutas.

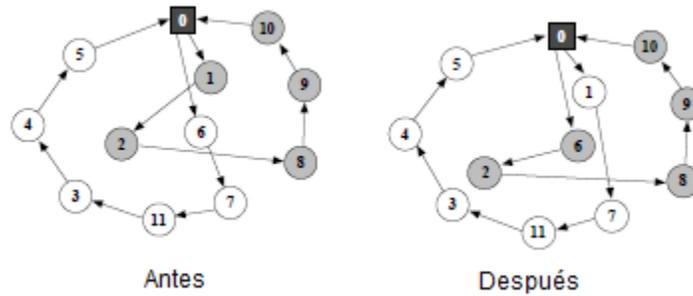


Figura 20. Ejemplo Cross

4.2.7.2 Búsqueda Intra-ruta: estos cambios se realizan al interior de una ruta. Los operadores utilizados fueron los siguientes:

- Reinserción o Or-opt1:** cambia un cliente de posición en una ruta, para esto evalúa todas las posibilidades de cambios y elige el mejor cambio y la mejor posición.

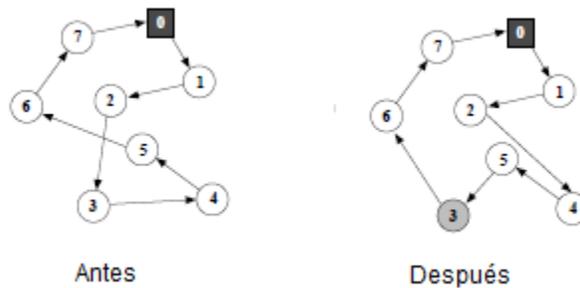


Figura 21. Ejemplo Or-opt1

- **Or-opt2:** cambia dos clientes consecutivos de posición en una ruta, evaluando todas las posibilidades y eligiendo la mejor posición.

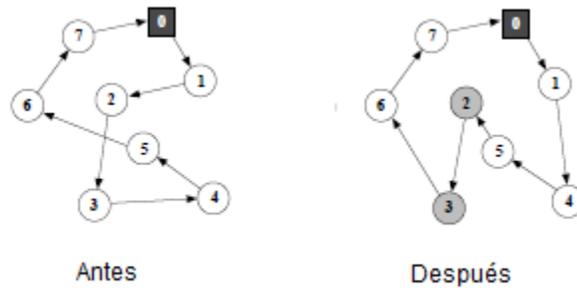


Figura 22. Ejemplo Or-opt2

- **2-opt:** 2 clientes no consecutivos son cambiados de posición en la ruta.

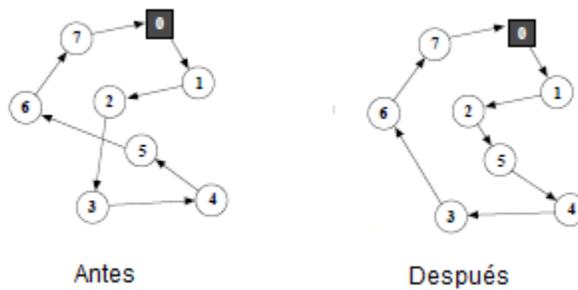


Figura 23. Ejemplo 2-opt

- **Exchange:** Permutación entre dos clientes de la misma ruta.

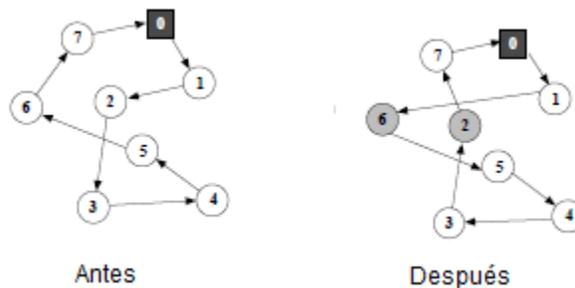


Figura 24. Ejemplo Exchange

La figura 25 presenta en un diagrama de flujo sobre cómo selecciona el algoritmo los mecanismos de perturbación a utilizar.

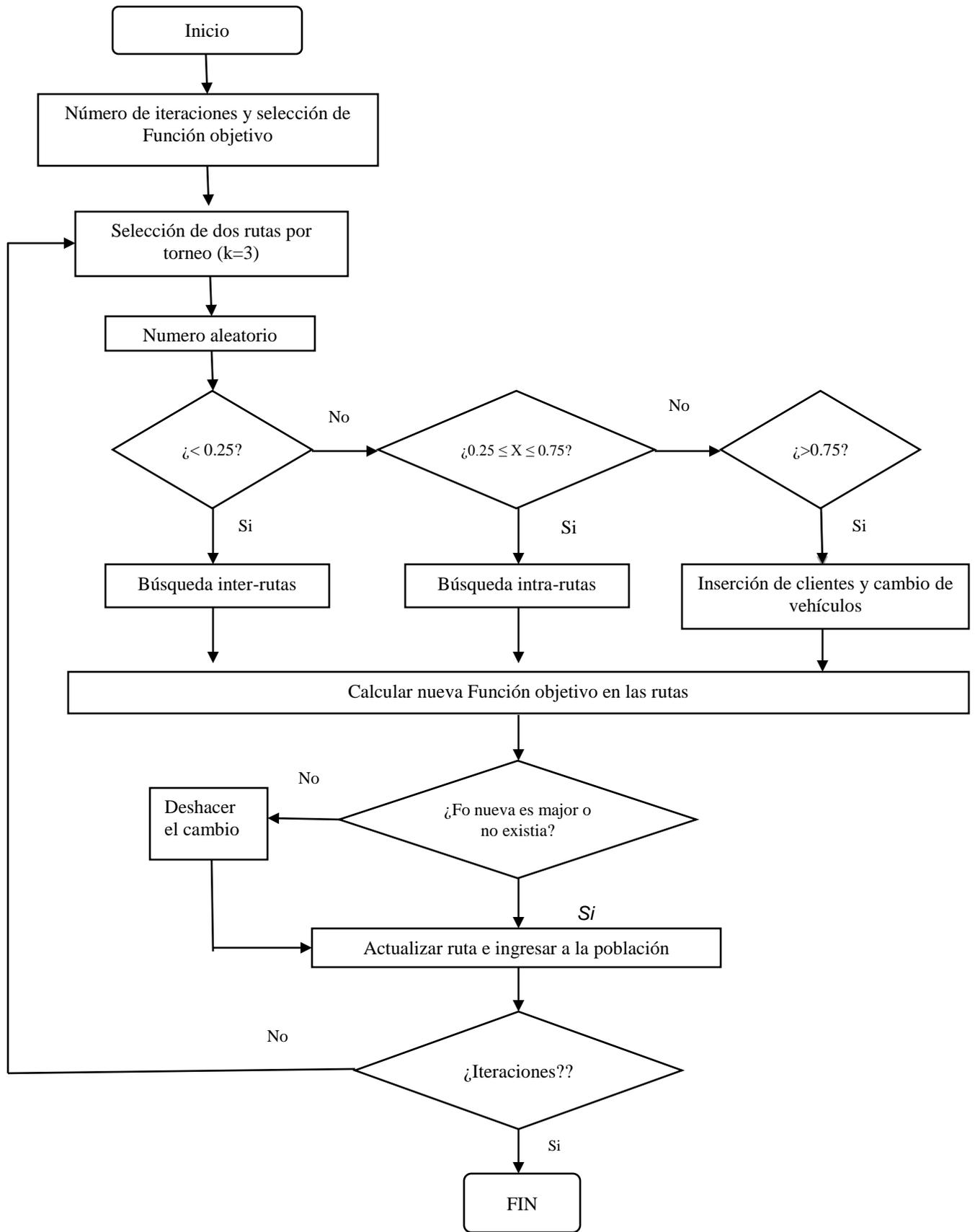


Figura 25. Diagrama de flujo general de los mecanismos de perturbación

Al observar la figura 25, se puede observar como los operadores funcionan. Inicialmente se selecciona una función objetivo, en este caso el 50% de las veces se selecciona la función objetivo consumo de combustible por distancia y 50% de las veces se selecciona la función objetivo consumo de combustible por carga del vehículo.

Se seleccionan dos rutas mediante la técnica de torneo explicada en la sección 4.2.6. Luego un número aleatorio entre cero y uno es generado, este corresponde a la tasa de cruzamiento. Si el número es menor a 0.25, se realiza búsqueda Inter-rutas, y todos los operadores se aplican a ambas rutas. Si el número se encuentra entre 0.25 y 0.75, se realiza búsqueda Intra-ruta y los operadores se aplican a cada ruta por separado. Si el número es mayor a 0.75, se realiza inserción de clientes y cambio de vehículos (ver operador Shift de cliente y vehículo).

Los cambios realizados en las rutas son verificados. Esto sugiere calcular la función objetivo, después de las modificaciones. Cuando la función objetivo mejora o la ruta no existía en la población, la ruta ingresa a la población de rutas de la solución actual, incrementando su tamaño, de lo contrario, si la ruta ya existía no ingresa.

El proceso se repite por un número de iteraciones controlado, de acuerdo al tamaño del problema (número de clientes).

4.2.8. Modificación de la población

La población se inicializa en cada generación del algoritmo, con la solución obtenida en Gams, mediante técnicas exactas. Por cada generación, se realizan un número de perturbaciones a las rutas de la última solución obtenida en Gams. De estas perturbaciones, realizadas por los operadores genéticos, surgen nuevas rutas, de las cuales, solo las que no existan en la última solución ingresan a la población.

4.2.9. Frente de Pareto

Una solución para la población de rutas existentes en cada generación del algoritmo, es encontrada para cada función objetivo. Estas soluciones son encontradas mediante la interface con Gams, y la formulación set partitioning. Dichas soluciones constituyen las soluciones incumbentes (mejor solución encontrada para cada función objetivo) y el conjunto de rutas seleccionado en ambas soluciones es almacenado, para después conformar un frente de Pareto.

Se utilizan nuevamente técnicas de selección, y mecanismos de perturbación, entre las rutas encontradas en la solución obtenida con Gams. En cada iteración del algoritmo la cantidad de rutas a evaluar por el modelo matemático se incrementa, y una nueva solución es encontrada para cada función objetivo y almacenada.

El algoritmo es implementado una cantidad de generaciones pequeña (30 a 200 generaciones), pero en cada iteración una gran cantidad de rutas mejoradas es añadida para encontrar una nueva alternativa de solución.

Las alternativas de solución encontradas forman una población de soluciones que son evaluadas por ambas funciones objetivo, luego son ordenadas por dominancia, como es realizado en el algoritmo NSGA, y el mejor frente es seleccionado. La ordenación de los frentes es realizada solo al final del algoritmo.

En la figura 26 se presenta una explicación de la generación de las soluciones para los frentes de Pareto.

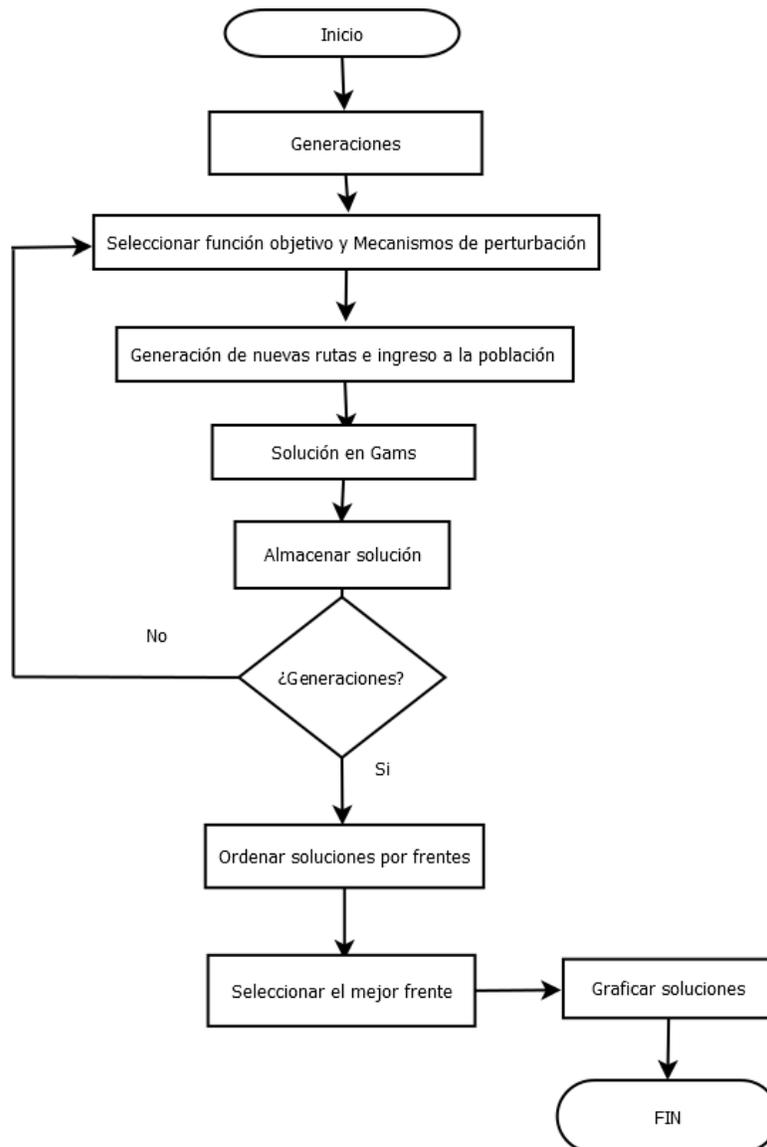


Figura 26. Diagrama de generación de soluciones para conformación del frente de Pareto

De acuerdo con la figura 26, los frentes pueden ser ordenados después de generar una cantidad de soluciones, mediante la interface Matlab-Gams. Cada solución realizada en cada generación del algoritmo, para ambas funciones objetivo, es almacenada y luego dichas soluciones son ordenadas por frentes.

Finalmente el algoritmo elige el mejor frente, para explicar el mejor compromiso entre las variables de distancia y carga, encontrado en el espacio de soluciones explorado.

5. Resultados

5.1. Descripción

Para validar el modelo y el algoritmo presentado, se utilizaron 12 instancias de la literatura propuestas por Golden et al (1984), y modificadas por Taillard (1999), para el problema de ruteamiento de vehículos con flota Heterogénea (HVRP)

Las instancias originales de Golden et al (1984) solo consideraban una flota con diferentes costos fijos, y no consideraban costos variables. Estos costos fueron adicionados por Taillard (1999) en las instancias 13 a 20, así como un límite para el número de vehículos de cada tipo. Después Choi y Tcha (2007) en las instancias 3 a 6 adicionaron los costos variables.

Según Subramanian et al (2012), las diferentes instancias para flota heterogénea se dividen en dos subgrupos:

- HVRP (del inglés *Heterogeneous Vehicle Routing Problem*): Estas instancias consideran un límite para el número de vehículos de cada tipo, y se dividen en dos categorías: HVRP-FV y HVRP-V, las cuales consideran costos fijos y variables o solo costos variables.
- FSM (del inglés *Fleet size and mix*): Estas instancias consideran un número de vehículos ilimitado para cada tipo de vehículo, y se dividen en 3 categorías: FSM-FV, FSM-F y FSM-V, las cuales consideran costos fijos y variables, solo costos fijos y solo costos variables respectivamente.

Las instancias FSM-F contienen todos los costos variables como 1. Las instancias FSM-V contienen todos los costos fijos como 0. Y las instancias FSM-FV usan las dos clases de costos.

En total, hay 12 problemas con flota ilimitada y 8 problemas con flota limitada. Los problemas que se presentan varían en el número de clientes, entre 20 y 100 clientes. Se seleccionaron para la validación del algoritmo los problemas: 3-20 y 4-20 con 20 clientes, 13-50 y 14-50 con 50 clientes, 17-75 y 18-75 con 75 clientes, 19-100 y 20-100 con 100 clientes.

Se compararon los resultados obtenidos por el algoritmo presentado con los resultados obtenidos por programación matemática basado en heurísticas o metaheurísticas de Taillard (1999), Choi y Tcha (2007); Gendreau et al. (1999), Wassan and Osman (2002) Brandao (2008), Prins (2009), Subramanian (2012), entre otros.

En el anexo 1, se presentan los datos de las instancias evaluadas con costos fijos, variables y flota limitada. Los mejores resultados obtenidos se muestran a continuación en tablas y gráficos.

En las tablas de resultados se presentan: la mejor solución obtenida para cada uno de los tipos de instancias, en la literatura, la mejor solución encontrada en 10 corridas del algoritmo propuesto para cada instancia, el valor promedio de las corridas, el porcentaje de error, relativo a la diferencia entre la mejor solución de la literatura con el promedio de las 10 corridas calculadas a través de la metodología propuesta (Desviación Promedio), y uno respecto al mejor valor encontrado en las corridas (Desviación Mínima) y el tiempo promedio en segundos necesario en la corrida.

5.2. Resultados de las instancias de Taillard (1999) y sus modificaciones

La tabla 7 relaciona los mejores resultados obtenidos para las instancias FSM-F que consideran costos fijos, con flota ilimitada, y los costos variables toman el valor de 1. Estos resultados se relacionan para la función objetivo 1 del algoritmo la cual calcula los costos variables de acuerdo a la distancia de recorrido. La tabla relaciona la mejor solución encontrada en 10 corridas, el porcentaje de desviación con respecto a la mejor solución de la literatura, así como, el promedio de las 10 corridas y su desviación con respecto a la mejor solución de la literatura.

Tabla 7. Resultados para las instancias FSM-F con costos fijos

| Instancia | n | Mejor solución por distancia | Encontrada por | Algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|------------------------------|-------------------------|------------------------------------|-------------------|----------|---------------------|
| | | | | Mejor solución Fobjetivo distancia | Desviación mínima | Promedio | Desviación Promedio |
| 3 | 20 | 961.03 | Taillard (1999) | 996.8 | 0.03 ^a | 1025.6 | 0.04 |
| 4 | 20 | 6437.33 | Taillard (1999) | 6499.5 | 0.01 | 6966.92 | 0.08 |
| 13 | 50 | 2406.36 | Choi and Tcha (2007) | 2470.9 | 0.03 | 2519.47 | 0.05 |
| 14 | 50 | 9119.03 | Gendreau et al (1999) | 9273.8 | 0.02 | 9614.12 | 0.05 |
| 17 | 75 | 1734.53 | Brandao (2008) | 1937.4 | 0.12 | 1980.35 | 0.14 |
| 18 | 75 | 2369.65 | Brandao (2008) | 2549.4 | 0.08 | 2607.1 | 0.1 |
| 19 | 100 | 8659.74 | Wassan and Osman (2002) | 9494 | 0.10 | 10027.75 | 0.16 |
| 20 | 100 | 4037.9 | Penna et al | 4540.9 | 0.12 | 4589.5 | 0.14 |

Fuente: elaboración propia a partir de revisión de la literatura y resultados del algoritmo propuesto.

^a La desviación debe multiplicarse por el 100%.

Como se observa en los resultados de la tabla 7 en las instancias de 20 y 50 clientes los resultados son muy proximos a los resultados de la literatura, con porcentajes de error entre el 1% y el 3%. En cuanto a las instancias de 75 a 100 clientes los

porcentajes de desviación mínima se encuentran entre el 8% y el 12%. Esto permite generar valores aproximados con soluciones de buena calidad para la segunda función objetivo del algoritmo, la cual relaciona el consumo de combustible por carga del vehículo, con el objetivo de minimizar el consumo de combustible. La tabla 8 presenta los mejores resultados obtenidos para ambas funciones objetivo.

Tabla 8. Resultados para las instancias FSM-F con costos fijos para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo

| Instancia | n | Mejor solución distancia en la literatura | Resultados algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|---|---|--------|---------------------------------------|--------|
| | | | Mejor solución función objetivo distancia | | Mejor solución función objetivo carga | |
| | | | Distancia | Carga | Distancia | Carga |
| 3 | 20 | 961.03 | 996.8 | 1246.4 | 1007.4 | 1155.2 |
| 4 | 20 | 6437.33 | 6895.4 | 7076.4 | 6910.8 | 7071.4 |
| 13 | 50 | 2406.36 | 2470.9 | 2795.5 | 2489.7 | 2788.4 |
| 14 | 50 | 9119.03 | 9273.8 | 9607.6 | 9277.6 | 9605.3 |
| 17 | 75 | 1734.53 | 1937.4 | 2326.1 | 1937.4 | 2326.1 |
| 18 | 75 | 2369.65 | 2549.4 | 3057.8 | 2552 | 3056.1 |
| 19 | 100 | 8659.74 | 9494 | 10122 | 9522 | 10108 |
| 20 | 100 | 4037.9 | 4540.9 | 5037.1 | 4540.9 | 5037.1 |

Fuente: elaboración propia a partir de resultados del algoritmo propuesto.

Para los resultados obtenidos en estas instancias, se observa que los resultados obtenidos para la función objetivo de distancia difieren de los resultados obtenidos cuando se evalúa el compromiso de consumo de combustible por carga.

Se puede notar que el mejor resultado para la función objetivo de distancia, difiere en la distancia que recorrería la ruta si se evaluara el compromiso por carga del vehículo. Sin embargo, algunas instancias coinciden en presentar en una solución, la mejor solución por distancia y carga.

Por su parte, para las instancias FSM-FV, con costos fijos y variables y flota ilimitada, la tabla 9 relaciona los mejores resultados obtenidos para la función objetivo de distancia, su desviación con respecto a la mejor solución de la literatura, el promedio de 10 corridas y la desviación promedio.

Luego en la tabla 10 se presentan en detalle los resultados para ambas funciones objetivo en estas instancias que consideran costos fijos y variables.

Tabla 9. Resultados para las instancias FSM-FV con costos fijos y variables

| Instancia | n | Mejor solución | Algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|----------------|------------------------------------|--------------------|----------|---------------------|
| | | | Mejor solución Fobjetivo distancia | Desviación mínima | Promedio | Desviación Promedio |
| 3 | 20 | 1144.22 | 1147.5 | 0.003 ^a | 1170.4 | 0.02 |
| 4 | 20 | 6437.33 | 6458.7 | 0.003 | 6803.26 | 0.06 |
| 13 | 50 | 2964.65 | 2997.3 | 0.01 | 3032.48 | 0.02 |
| 14 | 50 | 9126.9 | 9265.3 | 0.02 | 9641.48 | 0.06 |
| 17 | 75 | 2004.48 | 2254.1 | 0.12 | 2355.8 | 0.18 |
| 18 | 75 | 3147.99 | 3341.6 | 0.06 | 3516.86 | 0.12 |
| 19 | 100 | 8661.81 | 10004.1 | 0.15 | 10446.11 | 0.21 |
| 20 | 100 | 4153.02 | 4971.2 | 0.20 | 5124.83 | 0.23 |

Fuente: elaboración propia a partir de revisión de la literatura y resultados del algoritmo propuesto.

^a La desviación debe multiplicarse por el 100%.

Como se observa en los resultados, la instancia 3 y 4 de 20 clientes, presentan una buena aproximación a la mejor solución de la literatura, con una desviación promedio de 0.3%, así como, la instancias de 50 clientes con desviaciones mínimas de 1% y 2%. Otras instancias de 75 y 100 clientes presentan desviaciones de 6% a 20%, permitiendo validar los resultados para ambas funciones objetivo, presentados a continuación:

Tabla 10. Resultados para las instancias FSM-FV con costos fijos y variables para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo

| Instancia | n | Mejor solución distancia en la literatura | Resultados algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|---|---|--------|---|--------|
| | | | Mejor solución función objetivo distancia | | Mejor solución función objetivo distancia y carga | |
| | | | Distancia | Carga | Distancia | Carga |
| 3 | 20 | 1144.22 | 1147.5 | 1266.1 | 1318.8 | 1149.8 |
| 4 | 20 | 6437.33 | 6458.7 | 6665 | 6468.3 | 6626.5 |
| 13 | 50 | 2964.65 | 2997.3 | 3384 | 3600.4 | 2808.3 |
| 14 | 50 | 9126.9 | 9265.3 | 9575.7 | 9265.3 | 9575.7 |
| 17 | 75 | 2004.48 | 2254.1 | 2340 | 2385.2 | 2268.9 |
| 18 | 75 | 3147.99 | 3341.6 | 3337.9 | 3848.7 | 3014.1 |
| 19 | 100 | 8661.81 | 10004.1 | 10369 | 10004.1 | 10369 |
| 20 | 100 | 4153.02 | 4971.2 | 5285.5 | 5103.1 | 5043.1 |

Fuente: elaboración propia a partir de resultados del algoritmo propuesto.

Una representación gráfica para la instancia 3-20 considerando costos fijos y variables, es presentada a continuación, con el objetivo de evidenciar el comportamiento del algoritmo para la función objetivo de distancia y para la función objetivo de carga.

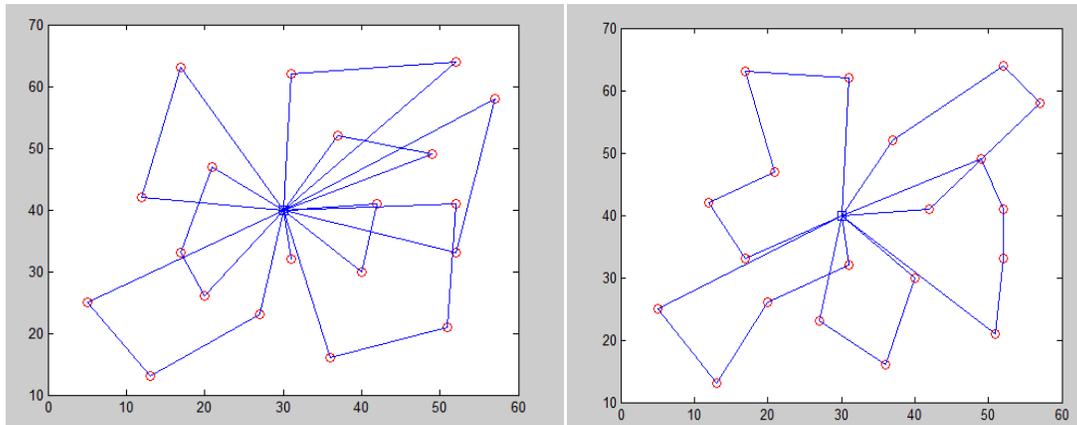


Figura 27. Representación gráfica de la mejor solución para la instancia 3-20 en la función objetivo de distancia y carga.

Fuente: Gráficas obtenidas en matlab 7.9.0 a partir de resultados del algoritmo propuesto.

En la Figura 27, se observa en la imagen izquierda, la mejor solución por distancia con 9 rutas en la solución, con un costo de recorrido por distancia de 1147.5 y un costo por compromiso de carga de 1266.1. En la imagen derecha, se observa la mejor solución por carga, con 5 rutas, un costo por distancia mayor de 1318.8 y un costo por carga del vehículo menor de 1149.8.

La Figura 28 por su parte, presenta cómo ocurre la evolución del algoritmo en un total de 30 generaciones, con 100 perturbaciones en cada generación. El gráfico demuestra un comportamiento bi-objetivo, y la evolución hacia un mejor compromiso entre carga y distancia.

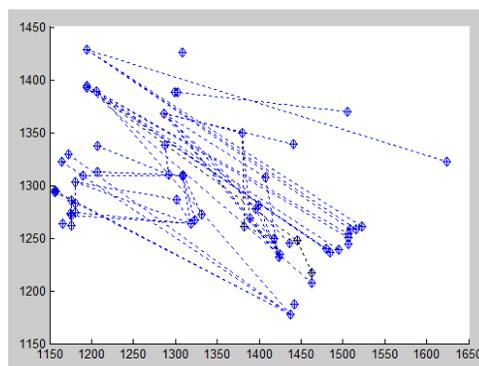


Figura 28. Representación gráfica de la evolución de los frentes en el compromiso de distancia y carga del vehículo, con 30 generaciones del algoritmo.

Fuente: Gráfica obtenida en matlab 7.9.0 a partir de resultados del algoritmo propuesto.

La evolución del algoritmo propuesto, demuestra que los operadores de perturbación del algoritmo, así como la generación de cada frente, permite mejorar la solución iterativamente. De esta manera, se presenta la gráfica del primer frente, en la Figura 29, para la instancia 3-20.

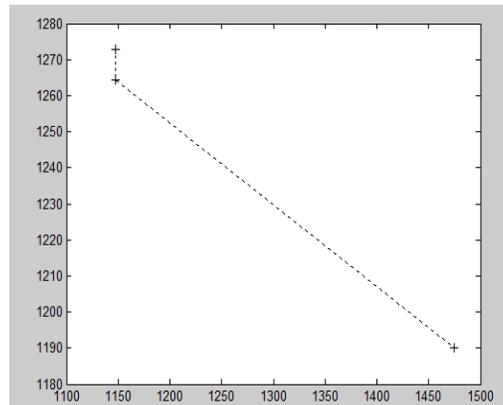


Figura 29. Representación gráfica del primer frente en el compromiso de distancia y carga del vehículo en la instancia 3-20.

Fuente: Gráfica obtenida en matlab 7.9.0 a partir de resultados del algoritmo propuesto.

En esta gráfica se observa, los resultados, en el eje x para la función objetivo que relacionaría consumo de combustible por distancia y en el eje y para la función objetivo que relacionaría consumo de combustible por carga del vehículo. Se observa, como la mejor solución por distancia difiere de la mejor solución por carga. Sin embargo, una solución intermedia refleja un mejor compromiso en el consumo de combustible.

Para el grupo de instancias propuestas por Taillard (1999) con flota limitada, se obtuvieron los resultados presentados a continuación en las tablas 11 a 14. En estas instancias para flota limitada, solo se consideran problemas de 50 a 100 clientes. En los resultados para 50 clientes se puede observar una buena aproximación en las mejores soluciones encontradas, con un error mínimo de 1%.

Sin embargo, en las instancias para 75 a 100 clientes el porcentaje de error es alto, con desviaciones mínimas entre 9 y 18%

Tabla 11. Resultados para las instancias HVRP-FV con costos fijos y variables y flota limitada

| Instancia | n | Mejor solución | Algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|-----------------|------------------------------------|-------------------|----------|---------------------|
| | | | Mejor solución Fobjetivo distancia | Desviación mínima | Promedio | Desviación promedio |
| 13 | 50 | 3185.09 | 3230.7 | 0.01 ^a | 3281.2 | 0.03 |
| 14 | 50 | 10107.53 | 10200 | 0.01 | 10950.5 | 0.08 |
| 17 | 75 | 2076.96 | 2456.7 | 0.18 | 2514.2 | 0.21 |
| 18 | 75 | 3743.58 | 4373.6 | 0.17 | 4486.9 | 0.2 |
| 19 | 100 | 10420.34 | 11356 | 0.09 | 11489.5 | 0.1 |
| 20 | 100 | 4761.26 | 5448.6 | 0.14 | 5525.5 | 0.16 |

Fuente: elaboración propia a partir de revisión de la literatura y resultados del algoritmo propuesto.

^a La desviación debe multiplicarse por el 100%.

Los resultados para ambas funciones objetivo se presentan a continuación.

Tabla 12. Resultados para las instancias HVRP-FV con costos fijos y variables para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo

| Instancia | n | Mejor solución distancia en la literatura | Resultados algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|---|---|--------|---|--------|
| | | | Mejor solución función objetivo distancia | | Mejor solución función objetivo distancia y carga | |
| | | | Distancia | Carga | Distancia | Carga |
| 13 | 50 | 3185.09 | 3230.7 | 2961.3 | 3341.9 | 2905.8 |
| 14 | 50 | 10107.53 | 10200 | 10419 | 10200 | 10419 |
| 17 | 75 | 2076.96 | 2456.7 | 2529.3 | 2456.7 | 2529.3 |
| 18 | 75 | 3743.58 | 4373.6 | 3664.1 | 4381.9 | 3464.6 |
| 19 | 100 | 10420.34 | 11356 | 11507 | 11475 | 11468 |
| 20 | 100 | 4761.26 | 5448.6 | 5324.1 | 5630.1 | 5287.7 |

Fuente: elaboración propia a partir de resultados del algoritmo propuesto.

De los resultados obtenidos en la instancia 14-50 se puede observar que la mejor solución obtenida por distancia coincide con la mejor solución obtenida por carga del vehículo. Esto permite evidenciar que existen problemas en los cuales ambas funciones objetivo no estarían en conflicto.

Gráficamente, se observa los resultados obtenidos para la instancia 13-50, en sus mejores resultados por distancia y carga del vehículo.

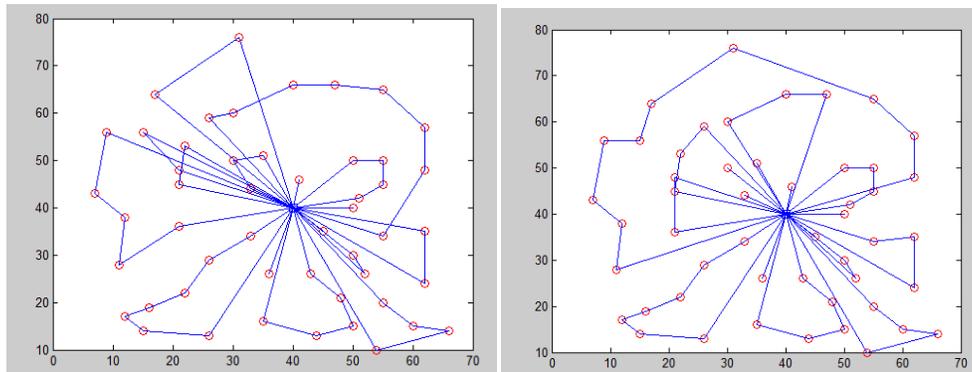


Figura 30. Representación gráfica de la mejor solución para la instancia 13-50 en la función objetivo de distancia y carga, con flota fija y costos fijos y variables.

Fuente: Gráfica obtenida en matlab 7.9.0 a partir de resultados del algoritmo propuesto

En la Figura 30, se observa en la imagen izquierda, la mejor solución por distancia con 16 rutas en la solución, teniendo en cuenta flota de vehiculos limitada, con un costo de recorrido por distancia de 3230.7 y un costo por compromiso de carga de 2961.3. En la imagen derecha, se observa la mejor solución por carga, con 14 rutas, un costo por distancia mayor de 3341.9 y un costo por carga del vehiculo menor de 2905.8.

La Figura 31 por su parte, presenta como es la evolución del algoritmo en un total de 30 generaciones, con 100 perturbaciones en cada generación, así como el primer frente en la mejor solución por distancia. El gráfico demuestra un comportamiento bi-objetivo, y la evolución hacia un mejor compromiso entre carga y distancia.

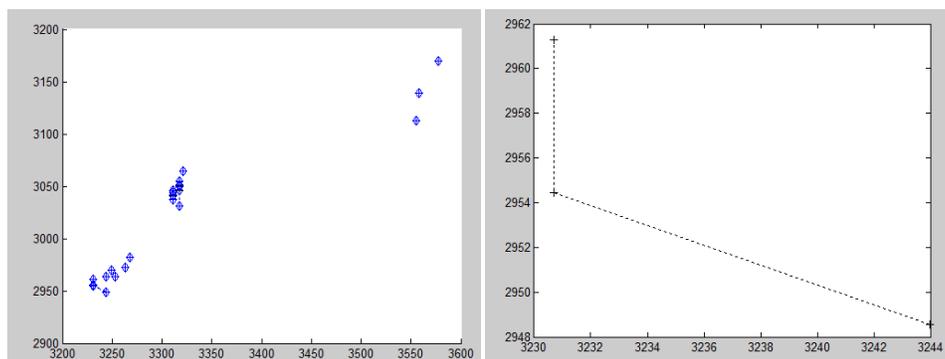


Figura 31. Representación gráfica de la evolución del algoritmo y del primer frente en el compromiso de distancia y carga del vehículo en la instancia 13-50, con flota fija y costos fijos y variables.

Fuente: Gráfica obtenida en matlab 7.9.0 a partir de resultados del algoritmo propuesto

Para las instancias con flota limitada, considerando solo costos fijos, los resultados obtenidos no fueron los mejores. Estos se presentan a continuación:

Tabla 13. Resultados para las instancias HVRP-V con costos variables y flota limitada

| Instancia | n | Mejor solución | Algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|----------------|------------------------------------|-------------------|----------|---------------------|
| | | | Mejor solución Fobjetivo distancia | Desviación mínima | Promedio | Desviación Promedio |
| 13 | 50 | 1517.84 | 1552.7 | 0.02 ^a | 1611.87 | 0.06 |
| 14 | 50 | 607.53 | 675.76 | 0.11 | 702.71 | 0.16 |
| 17 | 75 | 1061.96 | 1408.3 | 0.33 | 1470.46 | 0.38 |
| 18 | 75 | 1823.58 | 2101.8 | 0.15 | 2170.58 | 0.19 |
| 19 | 100 | 1117.51 | 1640.2 | 0.47 | 1674.75 | 0.5 |
| 20 | 100 | 1534.17 | 2336.9 | 0.52 | 2372.15 | 0.55 |

Fuente: elaboración propia a partir de revisión de la literatura y resultados del algoritmo propuesto.

^a La desviación debe multiplicarse por el 100%.

Como se observa en la tabla 13, los resultados obtenidos para las instancias de HVRP con costos variables y flota limitada tienen porcentajes de error entre el 2% y el 52%. Los resultados para ambas funciones objetivo se presentan a continuación.

Tabla 14. Resultados para las instancias HVRP-V con costos variables para 2 funciones objetivo: consumo de combustible por distancia y carga del vehículo

| Instancia | n | Mejor solución distancia en la literatura | Resultados algoritmo bi-objetivo | | | |
|-----------|-----|---|---|--------|---|--------|
| | | | Mejor solución función objetivo distancia | | Mejor solución función objetivo distancia y carga | |
| | | | Distancia | Carga | Distancia | Carga |
| 13 | 50 | 1517.84 | 1552.7 | 1324.3 | 1634.7 | 1216.1 |
| 14 | 50 | 607.53 | 675.76 | 845.5 | 675.76 | 845.5 |
| 17 | 75 | 1061.96 | 1408.3 | 1511.1 | 1416.7 | 1494.9 |
| 18 | 75 | 1823.58 | 2101.8 | 1470.8 | 2114.9 | 1318.2 |
| 19 | 100 | 1117.51 | 1640.2 | 1820.5 | 1709.3 | 1582.7 |
| 20 | 100 | 1534.17 | 2336.9 | 2221 | 2428.6 | 2105.1 |

Fuente: elaboración propia a partir de resultados del algoritmo propuesto.

En la Figura 32 se presentan los mejores resultados por distancia y carga en la instancia 13-50, con flota limitada y costos variables.

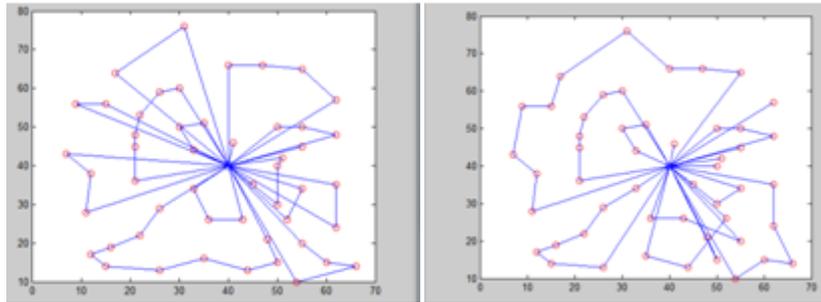


Figura 32. Representación gráfica de la mejor solución para la instancia 13-50 en la función objetivo de distancia y carga, con flota fija y costos variables.

Fuente: Gráfica obtenida en matlab 7.9.0 a partir de resultados del algoritmo propuesto.

La Figura 32 representa en la imagen izquierda la mejor solución para distancia con un costo de distancia de 1552.7 y de carga de 1324.3. En la imagen derecha la mejor solución para carga con un costo de distancia mayor, de 1634.7 y un costo de carga menor de 1216.1. Ambas soluciones difieren en costos.

La Figura 33 presenta la evolución del algoritmo con 30 generaciones y 100 perturbaciones en cada generación. El primer frente de la solución por distancia también es presentado.

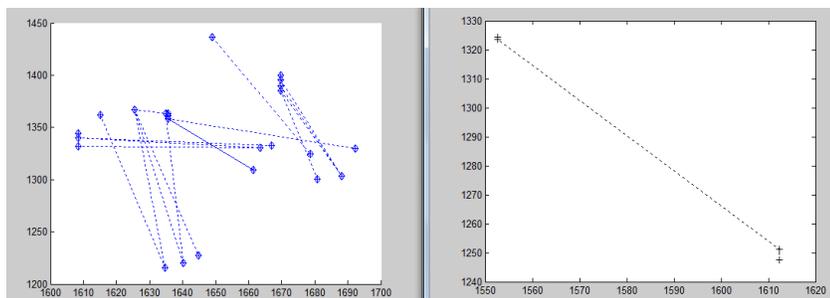


Figura 33. Representación gráfica de la evolución del algoritmo y del primer frente en el compromiso de distancia y carga del vehículo en la instancia 13-50 con flota fija y costos variables.

Fuente: Gráfica obtenida en matlab 7.9.0 a partir de resultados del algoritmo propuesto.

5.3. Análisis de resultados

Los resultados permiten demostrar un buen comportamiento del algoritmo bi-objetivo presentado, en instancias entre 20 y 75 clientes, al encontrar aproximaciones en las soluciones de las instancias evaluadas en la literatura. Para las instancias de 100 clientes el comportamiento no obtuvo los mejores resultados. Sin embargo, cabe anotar que al aumentar el tiempo de ejecución del algoritmo los resultados mejoran.

El comportamiento multiobjetivo, entre la distancia recorrida y la carga del vehículo en el viaje, como variables analizadas para el consumo del combustible, fue claramente evidenciado en el algoritmo. Esto sugiere que no solo la distancia es importante a la hora de valorar el consumo de combustible consumido, y un mejor compromiso puede ser encontrado en la solución para contribuir a mitigar los efectos ambientales.

El problema es considerado como uno de los problemas más complejos de resolver, por la explosión combinatorial de las variables, al generar billones de posibilidades y un enorme espacio de soluciones por explorar, no obstante las técnicas heurísticas y metaheurísticas y su hibridación con técnicas exactas, permiten alcanzar resultados de buena calidad.

Por su parte, los resultados obtenidos en la variante de flota heterogénea HFVRP, para las variables de distancia y carga del vehículo, permiten proponer resultados nuevos en las instancias creadas para la literatura, al considerar la variable carga y distancia recorrida, variables propuestas por Xiao et al (2012) para la variante de CVRP.

El número de generaciones necesarias para alcanzar resultados de la literatura, varía de acuerdo con el tamaño del problema. Esto sugiere, que los resultados obtenidos pueden ser mejorados en un número de generaciones mayor a 100. Herramientas computacionales de mayor capacidad son necesarias en la generación de resultados con hibridaciones entre técnicas exactas y heurísticas.

Conclusiones

El en desarrollo de este trabajo se ha logrado diseñar e implementar una metodología para solucionar el problema de ruteamiento óptimo de vehículos considerando una flota de vehículos heterogénea y la minimización del consumo de combustible, Dicha metodología corresponde a un algoritmo bi-objetivo que evalúa el mejor compromiso entre las variables distancia recorrida y carga de los vehículos en su recorrido, mediante técnicas exactas, heurísticas y metaheurísticas

La revisión del estado del arte, ha permitido estudiar diferentes modelos matemáticos que describen el HFVRP considerando la reducción de emisiones contaminantes y sus técnicas de solución, encontrando nuevas variantes al problema para investigaciones futuras, que permitan mitigar el impacto ambiental negativo, considerando nuevas variables, y nuevos contextos de aplicación, en las llamadas cadenas de suministro verdes.

A su vez, se ha podido definir un modelo para el HFVRP, al incorporar el modelo set Partitioning, el cual, fue ajustado a los requerimientos sobre reducción de emisiones, al considerar en el modelo las variables distancia y carga del vehículo.

En el trabajo se logró determinar las técnicas exactas, heurísticas y metaheurísticas a implementar en la solución, así como una estrategia multiobjetivo para aplicar al problema HFVRP con reducción de emisiones ambientales.

La metodología propuesta fue evaluada a través de instancias de la literatura de prueba, en la variante HFVRP, con soluciones aproximadas a las mejores soluciones encontradas en las instancias de 20 a 75 clientes. Las soluciones encontradas, permiten proponer nuevos resultados para las instancias de prueba de la literatura, en la variante de flota heterogénea HFVRP, para las variables de distancia y carga del vehículo, antes propuestas por Xiao et al (2012) para la variante de CVRP.

Recomendaciones

Se deben incorporar más variables que contribuyan a minimizar el consumo de combustible, tales como velocidad, condiciones de tráfico y condiciones de las vías, en el análisis de la variante de flota heterogénea para ruteamiento de vehículos.

Es recomendable extender los resultados a otras variantes del problema, que consideren además de la minimización de efectos ambientales, restricciones de tiempo de los clientes, múltiples depósitos u otras variantes.

Los mecanismos de perturbación del algoritmo, son exitosos en la medida en que tengan un espacio de búsqueda inicial de buena calidad. Cuando se trabaja con poblaciones iniciales, es recomendable depurar la población mediante alguna técnica exacta o heurística que permita obtener una buena solución incumbente, como inicio para realizar la búsqueda.

Debido a la complejidad del problema, el número de iteraciones necesarias para las perturbaciones crece con el número de clientes que se debe abordar. Debido a esto, se requiere un equipo de cómputo de alta capacidad en memoria que permita encontrar soluciones de mejor calidad.

Trabajos futuros

En la variante de flota heterogénea se visualiza la incorporación de nuevos tipos de vehículos, que funcionan a base de otras fuentes de energía diferentes al combustible, tales como, vehículos eléctricos. Esta incorporación de nuevas flotas generará nuevas variantes al problema de flota heterogénea y nuevas variables de mitigación del impacto ambiental a considerar.

Se visualizan trabajos futuros que permitan extender los resultados obtenidos a otras variantes del problema nuevas, no solo de ruteamiento de vehículos, sino también a problemas de cadenas de logística inversa, cadenas de suministro verdes, y otras redes de gestión de la distribución.

Referencias bibliográficas

- Agarwal, Y., Mathur, K., and Salkin, H.M. (1989), "A set-partitioning-based algorithm for the vehicle routing problem", *Networks* 19, 731-750.
- Anbuudayasankar, S. P., Ganesh, K., LennyKoh, S. C., & Ducq, Y. (2012). Modified savings heuristics and genetic algorithm for bi-objective vehicle routing problem with forced backhauls. *Expert Systems with Applications*, 39(3), 2296-2305. doi:10.1016/j.eswa.2011.08.009
- Balinski, M., and Quandt, R. (1964), "On an integer program for a delivery problem", *Operations Research* 12, 300-304.
- Bektaş, T., & Laporte, G. (2011). The Pollution-Routing Problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(8), 1232-1250. doi:10.1016/j.trb.2011.02.004
- Cordeau, J.-F., Laporte, G., Savelsbergh, M. W. P., & Vigo, D. (2007). Chapter 6 Vehicle Routing. En Cynthia Barnhart and Gilbert Laporte (Ed.), *Handbooks in Operations Research and Management Science* (Vol. Volume 14, pp. 367-428). Elsevier. Recuperado a partir de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927050706140062>
- Christofides, N., Mingozzi, A., and Toth, P. (1981), "Exact algorithms for the vehicle routing problem, based on spanning tree and shortest path relaxations", *Mathematical Programming* 20, 255-282
- Choi, E. and Tcha, D. (2007). A column generation approach to the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Computers & Operations Research* 34: 2080–2095.
- Clarke, G., and Wright, J.W. (1964), "Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points", *Operations Research* 12, 568-581
- Daza, J., Montoya, J., Narducci, F. (2009). Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases. *Rev.EIA. Esc. Ing. Antioquia* 12. ISSN 1794-1237
- Demir, E., Bektaş, T., & Laporte, G. (2013). The bi-objective Pollution-Routing Problem. *European Journal of Operational Research*, 232, 464–478. doi:10.1016/j.ejor.2013.08.002
- Dror, M., Laporte, G., & Trudeau, P. (1994). Vehicle routing with split deliveries. *Discrete Applied Mathematics*, 50(3), 239-254. doi:10.1016/0166-218X(92)00172-1
- Erdoğan, S., & Miller-Hooks, E. (2012). A Green Vehicle Routing Problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 48(1), 100-114. doi:10.1016/j.tre.2011.08.001

- Figliozzi, M. A. (2010). An iterative route construction and improvement algorithm for the vehicle routing problem with soft time windows. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 18(5), 668-679. doi:10.1016/j.trc.2009.08.005
- Figliozzi, M. A. (2010). Vehicle routing problem for emissions minimization. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, No. 2197, Transportation Research Board of the National Academies, Washington, D.C., 2010, pp. 1–7. DOI: 10.3141/2197-01
- Gillett, B., and Miller, L. (1974), "A heuristic algorithm for the vehicle dispatch problem", *Operations Research* 22, 340-349.
- Golden B, Assad A, Levy L and Gheysens FG (1984). The fleet size and mix vehicle routing problem. *Comput Opns Res* 11: 49–66.
- Granada, M. (2009). Algoritmos evolutivos y técnicas bioinspiradas. De la teoría a la práctica. Programa de Ingeniería eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. Copyright.
- Ho, W., Ho, G. T. S., Ji, P., & Lau, H. C. W. (2008). A hybrid genetic algorithm for the multi-depot vehicle routing problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(4), 548-557. doi:10.1016/j.engappai.2007.06.001
- Jemai, J., Zekri, M., & Mellouli, K. (2012). An NSGA-II Algorithm for the Green Vehicle Routing Problem. J.-K. Hao and M. Middendorf (Eds.): *EvoCOP 2012*, LNCS 7245, pp. 37–48, 2012. c_Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012.
- Karlaftis, M. G., Kepaptsoglou, K., & Sambracos, E. (2009). Containership routing with time deadlines and simultaneous deliveries and pick-ups. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 45(1), 210-221. doi:10.1016/j.tre.2008.05.001
- Koc, C., Bektas, T., Jabali, O., & Laporte, G. (2014). The fleet size and mix pollution-routing problem. *Transportation Research Part B*. 70, 239–254. doi:10.1016/j.trb.2014.09.008
- Kramer, R., Subramanian, A., Vidal, T., & Cabral, L. (2015). A matheuristic approach for the Pollution-Routing Problem. *European Journal of Operational Research*, 243, 523–539. doi:10.1016/j.ejor.2014.12.009
- Kwon, Y., Choi, Y., & Lee, D. (2013). Heterogeneous fixed fleet vehicle routing considering carbon emission. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*. 23, 81–89. doi:10.1016/j.tre.2013.04.001
- Laporte, G., Nobert, Y., and Desrochers, M. (1985), "Optimal routing under capacity and distance restrictions", *Operations Research* 33, 1050-1073.
- Li, X., Tian, P., & Leung, S. C. H. (2010). Vehicle routing problems with time windows and stochastic travel and service times: Models and algorithm. *International Journal of Production Economics*, 125(1), 137-145. doi:10.1016/j.ijpe.2010.01.013

- Liao, T.-Y., & Hu, T.-Y. (2011). An object-oriented evaluation framework for dynamic vehicle routing problems under real-time information. *Expert Systems with Applications*, 38(10), 12548-12558. doi:10.1016/j.eswa.2011.04.041
- Lima CMRR, Goldberg MC and Goldberg EFG (2004). A memetic algorithm for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Electronic Notes Discrete Math* 18: 171–176.
- Liu, S., Huang, W., Ma, H. (2009). An effective genetic algorithm for the fleet size and mix vehicle routing problems. *Transportation research part E* 45. 434-445.
- McKinnon, AC (2008). The potential of economic incentives to reduce CO₂. *Emissions from Goods Transport*. International Transport Forum, Paris.
- Orrego, J. (2013). Solución al problema de ruteo de vehículos con capacidad limitada “cvrp” a través de la heurística de barrido y la implementación del algoritmo genético de chu-beasley. Universidad tecnológica de Pereira.
- Penna, P., Subramanian, A., Ochi, L. (2013). An Iterated local Search heuristic for the heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem.
- PENG, Y., & ZHU, H. (2008). Research on Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand and PSO-DP Algorithm with Inver-over Operator. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 28(10), 76-81. doi:10.1016/S1874-8651(10)60003-8
- Pradenas, L., Oportus, B., & Parada, V. (2013). Mitigation of greenhouse gas emissions in vehicle routing problems with backhauling. *Expert Systems with Applications*, 40(8), 2985-2991. doi:10.1016/j.eswa.2012.12.014
- Prins C (2002). Efficient heuristics for the heterogeneous fleet multitrip VRP with application to a large-scale real case. *J Math Modell Algorithms* 1: 135–150.
- Subramanian, A. (2012). Heuristic, exact and Hybrid Approaches for Vehicle Routing Problems. Universidade Federal Fluminense. Niterói.
- Suzuki, Y. (2011). A new truck-routing approach for reducing fuel consumption and pollutants emission. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 16(1), 73-77. doi:10.1016/j.trd.2010.08.003
- Taillard, E. (1999). A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet VRP. *RAIRO-Opns Res* 33: 1–14.
- Tasan, A. S., & Gen, M. (2012). A genetic algorithm based approach to vehicle routing problem with simultaneous pick-up and deliveries. *Computers & Industrial Engineering*, 62(3), 755-761. doi:10.1016/j.cie.2011.11.025
- Toth, P. & Vigo, D (2002). The vehicle Routing Problem. Università degli Studi di Bologna. Bologna, Italy. Editorial Board. p 363.
- Wassan NA and Osman IH (2002). Tabu search variants for the mix fleet vehicle routing problem. *J Opl Res Soc* 53: 768–782.
- Wygonik, E., & Goodchild, A. (2011). Evaluating CO₂ emissions, cost, and service quality trade-offs in an urban delivery system case study. *IATSS Research*, 35(1), 7-15. doi:10.1016/j.iatssr.2011.05.001

- Xiao, Y., Zhao, Q., Kaku, I., & Xu, Y. (2012). Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 39(7), 1419-1431. doi:10.1016/j.cor.2011.08.013
- Zhang, T., Chaovalitwongse, W. A., & Zhang, Y. (2012). Scatter search for the stochastic travel-time vehicle routing problem with simultaneous pick-ups and deliveries. *Computers & Operations Research*, 39(10), 2277-2290. doi:10.1016/j.cor.2011.11.021
- Zsigraiova, Z., Semiao, V., & Beijoco, F. (2013). Operation costs and pollutant emissions reduction by definition of new collection scheduling and optimization of MSW collection routes using GIS. The case study of Barreiro, Portugal. *Waste Management*, 33(4), 793-806. doi:10.1016/j.wasman.2012.11.015

Anexos

Anexo1. Datos para las instancias de Taillard (1999) considerando costos variables y costo fijo y flota limitada

| Problema | n | Vehículo A | | | | Vehículo B | | | | Vehículo C | | | | Vehículo D | | | | Vehículo E | | | | Vehículo F | | | |
|----------|-----|------------|------|-----|----|------------|------|-----|----|------------|------|-----|----|------------|-----|-----|----|------------|-----|-----|----|------------|-----|-----|---|
| | | Q | CF | CV | m | Q | CF | CV | m | Q | CF | CV | m | Q | CF | CV | m | Q | CF | CV | m | Q | CF | CV | m |
| 3 | 20 | 20 | 20 | 1.0 | 20 | 30 | 35 | 1.1 | 20 | 40 | 50 | 1.2 | 20 | 70 | 120 | 1.7 | 20 | 120 | 225 | 2.5 | 20 | | | | |
| 4 | 20 | 60 | 1000 | 1.0 | 20 | 80 | 1500 | 1.1 | 20 | 150 | 3000 | 1.4 | 20 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 20 | 20 | 20 | 1.0 | 20 | 30 | 35 | 1.1 | 20 | 40 | 50 | 1.2 | 20 | 70 | 120 | 1.7 | 20 | 120 | 225 | 2.5 | 20 | | | | |
| 6 | 20 | 60 | 1000 | 1.0 | 20 | 80 | 1500 | 1.1 | 20 | 150 | 3000 | 1.4 | 20 | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 50 | 20 | 20 | 1.0 | 4 | 30 | 35 | 1.1 | 2 | 40 | 50 | 1.2 | 4 | 70 | 120 | 1.7 | 4 | 120 | 225 | 2.5 | 2 | 200 | 400 | 3.2 | 1 |
| 14 | 50 | 12 | 1000 | 1.0 | 4 | 160 | 1500 | 1.1 | 2 | 300 | 3500 | 1.4 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 50 | 50 | 100 | 1.0 | 4 | 100 | 250 | 1.6 | 3 | 160 | 450 | 2.0 | 2 | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 50 | 40 | 100 | 1.0 | 2 | 80 | 200 | 1.6 | 4 | 140 | 400 | 2.1 | 3 | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 75 | 50 | 25 | 1.0 | 4 | 120 | 80 | 1.2 | 4 | 200 | 150 | 1.5 | 2 | 350 | 320 | 1.8 | 1 | | | | | | | | |
| 18 | 75 | 20 | 10 | 1.0 | 4 | 50 | 35 | 1.3 | 4 | 100 | 100 | 1.9 | 2 | 150 | 180 | 2.4 | 2 | 250 | 400 | 2.9 | 1 | 400 | 800 | 3.2 | 1 |
| 19 | 100 | 10 | 500 | 1.0 | 4 | 200 | 1200 | 1.4 | 3 | 300 | 2100 | 1.7 | 3 | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 100 | 60 | 100 | 1.0 | 6 | 140 | 300 | 1.7 | 4 | 200 | 500 | 2.0 | 3 | | | | | | | | | | | | |

n: número de clientes

Q: Capacidad del vehículo

CF: costo fijo

CV : costo variable

m: número de vehículos