UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

MVW-RIGS

ALEJANDRO ESTRADA SERNA

PEREIRA, noviembre 2016

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

MVW-RIGS

Trabajo presentado para optar el título de :
MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

ALEJANDRO ESTRADA SERNA

Director:
Dr. YURI ALEXANDER POVEDA QUIÑONES

PEREIRA, noviembre 2016

Nota de aceptación:

Firma del jurado

Firma del jurado

Firma del director

Pereira, noviembre 2016

Agradezco a mis padres por todo su apoyo durante mis estudios, a los docentes de la Maestría en Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira por sus enseñanzas y consejos que me inspiraron para formarme en esta rama de las ciencias y en especial a mi asesor Yuri Alexander Poveda Quiñones por brindarme su tiempo y conocimiento para adquirir las herramientas necesarias para desarrollar este trabajo.

Índice general

Introducción

A partir de la relación entre la categoría de las MV-algebras y la categoría de los l_u-grupos, encontrada por Chang en [5] para MV-cadenas y generalizada por Mundicci en [16] para cualquier MV-álgebra, es posible construir un $l-u$-anillo generado por el l_u-grupo, para ciertas clases de l_u-grupos que se encuentran inmersos en sendos anillos. El funtor Gamma entre l_u-grupos y MV-álgebras permite obtener, en estos casos, una nueva MV-álgebra dotada de un producto, a la que llamaremos a lo largo de este trabajo MVW-rig por sus propiedades especiales. La MV-álgebra $[0,1]$ es un ejemplo de MVW-rig, que se mantiene invariante en la equivalencia antes mencionada.

Se desea caracterizar la estructura algebraica los MVW-rigs, a través de la estrecha relación de esta teoría con la teoría de anillos y de rigs del álgebra conmutativa, transferir teoremas de la teoría de anillos conmutativos a la teoría de MVW-rigs. Para lograrlo se comienza por definir la estructura de MVW-rig y demostrar las propiedades inherentes a homomorfismos, ideales, congruencias y cocientes compatibles con el orden propio de las MV-álgebras. De esta manera obtenemos una axiomatización para la teoría de MVW-rigs.

En un capitulo siguiente se busca caracterizar el espectro primo de los MVW-rigs y ahondar en sus propiedades. En el año 2007 Manuela Busaniche y Daniele Mundici [2], describen de manera precisa el espectro primo de las MV-álgebras libres y sólo hasta ese entonces fue posible iniciar un estudio sistemático de la teoría del espectro primo en las MV-álgebras. En el año 2007 Yuri Poveda desarrolló bajo la dirección de Eduardo Dubuc, la tesis doctoral [19] y posteriormente escribieron [8] en el año 2010, para establecer una teoría general de representación para MV-álgebras. Toda MV-álgebra es isomorfa a la MV-álgebra de secciones globales de un haz de MV-cadenas sobre el espacio compacto obtenido del espectro primo con la topología co-Zariski. La línea guía para desarrollar esta teoría de representación es la teoría de topos clasificantes de extensiones coherentes de teorías del álgebra universal [13] y el teorema de representación de C. C. Chang para MV-álgebras [5] que demuestra que toda MV-álgebra es sub-álgebra de un sub-producto directo de MV-álgebras cadena. La representación [19] y [8] se realizó siguiendo la misma metodología usada para representar los anillos conmutativos con unidad, como anillos de secciones globales del haz de anillos locales [13]. En [19] y [8] se hizo notar que existen grandes similitudes entre la teoría del espectro primo de los anillos conmutativos y las MV-álgebras. A pesar de que la teoría de MV-álgebras no posee una operación producto, es posible traducir un buen número de teoremas del álgebra conmutativa a la teoría de MV-álgebras [12]. En [12] encontramos que existen interesantes relaciones entre teoremas básicos del espectro de las MV-álgebras y el espectro primo de los anillos conmutativos con unidad, por lo tanto, las relaciones deben incrementarse para los MVW-rigs ya que con ellos se pueden transferir teoremas de manera natural.

Por último, se encuentra un funtor entre ciertos MVW-rigs con una propiedad especial y los l_u-anillos. Esta propiedad hace que se trabajen con los ideales primos de la MV-algebra asociada al MVW-rig y por lo tanto es posible aplicar el teorema de representación de Chang y el funtor de Mundici generalizado para productos.

En el apéndice se puede encontrar una referencia de cómo obtener una definición apropiada para MV-álgebras con producto a partir de los l_u-anillos. Se usan los l_u-grupos obtenidos de las MV-álgebras libres ([9]) y luego se toma el l_u anillo generado. Se utiliza el funtor de Cignoli-Torrenz para tomar la MV-álgebra correspondiente al cortar el l_u-anillo por la unidad fuerte. La MV-álgebra así obtenida tiene la propiedad de estar cerrada para el producto natural en los números reales. A partir de ella se generaliza y se da una definición de MVW-rig. Es natural pensar una MV-álgebra dotada de un producto puesto que existen numerosos ejemplos donde el producto coexiste junto con la MV-álgebra; por ejemplo la MV-álgebra $[0,1]$ tiene el producto de los reales que es cerrado en $[0,1]$. Este caso se repite para las MV-álgebras libres, que por el teorema de completitud de Chang [4] y por el teorema de McNauthon [6], sus términos son funciones continuas de $[0,1]^n$ en $[0,1]$ y por las mismas razones expresadas para $[0,1]$ tienen un producto natural asociado aunque no son cerradas para este producto. Así podemos definir la clausura para estos productos en la MV-álgebra correspondiente.

En una última sección del apéndice se compara la estructura de los MVW-rigs con diferentes definiciones de MV-álgebras producto descritas en la literatura de las

MV-álgebras.

El objetivo de este trabajo es caracterizar las MV-álgebras con producto (MVW-rigs) a partir del funtor de Cignoli-Torrenz entre las MV-álgebras y los l-grupos, para estudiar las relaciones del álgebra conmutativa y los MVW-rigs.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se darán algunas definiciones y ejemplos de MV-álgebras, se espera que el lector esté familiarizado con literatura de MV-álgebras, para ello recomendamos revisar el capítulo 1 de [6] y el los artículos [4] y [5].

Definición 1.1. Una MV-álgebra es un conjunto $(A, \oplus, \neg, 0)$ con una operación binaria cerrada $\oplus$ y una operación unaria $\neg$ tal que para cada $x, y, z \in A$ se cumplen las siguientes ecuaciones:

MV1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

MV2) $x \oplus y = y \oplus x$

MV3) $x \oplus 0 = x$

MV4) $x \oplus \neg 0 = \neg 0$

MV5) $\neg\neg x = x$

MV6) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$

Además, definimos para cada MV-álgebra A la constante 1 y dos operaciones $\odot$ y $\ominus$ como sigue:

$$1 =_{def} \neg 0 \tag{1.1}$$
$$x \odot y =_{def} \neg(\neg x \oplus \neg y) \tag{1.2}$$
$$x \ominus y =_{def} \neg(\neg x \oplus y) \tag{1.3}$$

Las MV-algebras tienen un orden parcial natural, cuando este orden es total, llamaremos a la MV-álgebra MV-cadena.

Definición 1.2. En toda MV-algebra A está definida una operación binaria $x \leq y$ la cual establece un orden parcial en A si y solo si x y y satisfacen alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

i) $\neg x \oplus y = 1$

ii) $x \ominus y = 0$

iii) $y = x \oplus (y \ominus x)$

iv) Existe un elemento z en A tal que $x \oplus z = y$

Definición 1.3. Las MV-álgebras determinan una estructura reticular con el orden natural. Se define el supremo y el ínfimo de dos elementos x y x en A como:

$$x \vee y = (x \ominus y) \oplus y \tag{1.4}$$

$$x \wedge y = x \ominus (x \ominus y) \tag{1.5}$$

Adicionalmente en cualquier MV-álgebra se satisface la siguiente ecuación para todo $x, y, z \in A$:

$$x \leq y \oplus z \Leftrightarrow x \ominus z = \leq y \tag{1.6}$$

Ahora definiremos el concepto de homomorfismo, ideales e ideales primos en MV-álgebras.

Definición 1.4. Dadas dos MV-álgebras A y B, una función $f : A \to B$ es un homomorfismo de MV-álgebras si para todo x, y en A

i) $f(0) = 0$

ii) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$

iii) $f(\neg x) = \neg f(x)$

Definición 1.5. Dada A una MV-álgebra. Un subconjunto I de A se llama MV-ideal de A si satisface las siguientes propiedades:

i) $0 \in I$

ii) Si $a \leq b$ y $b \in I$, entonces $a \in I$

iii) Si $a, b \in I$, entonces $a \oplus b \in I$

Proposición 1.6. *Dado W un subconjunto de una MV-álgebra A. Si $W = \emptyset$, entonces $\langle W \rangle = \{0\}$. Si $W \neq \emptyset$, entonces*

$$\langle W \rangle = \{x \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k,\ \textit{para algunos } w_1, \ldots, x_k \in W\}$$

*es el **ideal generado por** W*

Definición 1.7 (MV-primo)**.** Un subconjunto P de una MV-álgebra A es un ideal MV-primo si es un ideal de la MV-álgebra, y dados $a, b \in A$, $a \wedge b \in P$ implica $a \in P$ o $b \in P$

Proposición 1.8. *Un ideal P de una MV-álgebra A es MV-primo si y solo si $a \ominus b \in P$ ó $b \ominus a \in P$ para todo $a, b \in P$*

Ahora, se darán algunos ejemplos importantes de MV-álgebras.

Ejemplo 1.9. Dado A el intervalo cerrado $[0, 1]$ de números reales con la operación $\oplus$ definida como:

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \leq 1 \\ 1 & \text{si } x + y > 1 \end{cases}$$

y la operación unaria $\neg$ como: $\neg x = 1 - x$. El conjunto A es una MV-álgebra.

Ejemplo 1.10 (Algebras of Łukasiewicz). $Ł_n$ son los conjuntos de números racionales en el intervalo $[0, 1]$ con las operaciones $\oplus$ y $\neg$ definidas en el ejemplo anterior dados por:

$$Ł_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

donde n es el número de elementos de cada conjunto. Si $n = 2$ se tiene la MV-álgebra de Łukasiewicz's de segundo orden:

$$Ł_2 = \{0, 1\}$$

Cada uno de los conjuntos $Ł_n$ son MV-álgebras.

Ejemplo 1.11. El conjunto $\mathbb{C}([0,1]^{[0,1]})$ de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ es una MV-álgebra con las operaciones:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x)$$

y

$$\neg f(x) = 1 - f(x)$$

Ejemplo 1.12 (MV-algebras libres). $Free_n$ es una familia de conjuntos definida como sigue:
$Free_n = \{f : [0,1]^n \to [0,1]$ continuas tal que f consiste en finitos polinomios lineales con coeficientes enteros $\}$ Cada conjunto $Free_n$ es una MV-Algebra y n es el número de generadores de la MV-álgebra libre. En particular, Free_1 es la MV-álgebra con un generador:
$\mathrm{Free}_1 = \{f \in \mathbb{C}([0,1]^{[0,1]}) | f$ consiste de finitos polinomios lineales con coeficientes enteros$\}$.

Para finalizar con esta breve introducción a las MV-álgebras se darán algunos teoremas importantes de las MV-álgebras. Para sus demostraciones consultar [6].

Definición 1.13. La función distancia $d : A \times A \to A$ es definida por

$$d(x,y) =_{def} (x \ominus y) \oplus (y \ominus x)$$

Proposición 1.14. *Dada A una MV-álgebra, entonces existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de ideales de A y el conjunto de congruencias en A.*

Proposición 1.15. *Dada A una MV-álgebra, J un ideal de A, y $a \notin J$, entonces existe un ideal primo P de A tal que $J \subset P$ y $a \notin P$.*

Teorema 1.16 (Teorema de representación de Chang)**.** *Cada MV-álgebra no trivial es un subproducto directo de MV-cadenas.*

Para realizar un estudio completo de la teoría de MV-álgebras ver [6].

Capítulo 2

MVW-rigs

Una MV-algebra dotada de un producto de manera natural está dada por la operación proveniente del l_u-anillo generado de su l_u-grupo correspondiente mediante el funtor de Mundici. Para tener una mayor claridad en este aspecto y ver las propiedades correspondientes, remitirse al apéndice A.

Debido a que esta clase de MV-álgebras tienen las propiedades heredadas de un l_u-anillo (proposición A.15), debemos constrastarlas con la literatura de anillos para ver a que estructura se asemeja. Veamos entonces algunas definiciones de estructuras algebráicas con dos operaciones, comenzando con la más usual, la de anillo:

Definición 2.1 (anillo)**.** Un **anillo** $(R, +, \cdot)$ es un conjunto R junto con dos operaciones $+$ y $\cdot$ definidas en R tales que se satisfacen los siguientes axiomas:

R_1 $(R, +)$ es un grupo abeliano.

R_2 $(R, \cdot)$ es asociativa.

R_3 Para todas $a, b, c \in R$ se cumple $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ y $(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$.

Ahora, un semianillo o rig es una estructura similar a un anillo donde no necesariamente cada elemento tiene inverso aditivo. El término rig proviene de la palabra ring (anillo en inglés) sin la letra n de "negative element".

Definición 2.2 (rig)**.** Un **rig** es una estructura $(R, +, \cdot)$ que satisface los siguientes axiomas:

Rig_1 $(R, +)$ es un monoide comnutativo.

Rig_2 $(R, \cdot)$ es un monoide conmutativo.

Rig_3 Para todo $a \in R$, $a \cdot 0 = 0$.

Rig_4 Para todo $a, b, c \in R$ se cumple $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Definamos entonces un W-rig, el cual es una estructura similar a la de rig pero más debil (en inglés Weak), ya que no se exige que la operación $\cdot$ sea conmutativa ni que tenga elemento neutro y la *ley distributiva* es debilitada a una desigualdad.

Definición 2.3 (W-rig)**.** Un **W-rig** es una estructura $(R, +, \cdot)$ que satisface los siguientes axiomas:

$WRig_1$ $(R, +)$ es un monoide comnutativo.

$WRig_2$ $(R, \cdot)$ es asociativa.

$WRig_3$ Para todo $a \in R$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

$WRig_4$ Para todo $a, b, c \in R$ se cumple $a \cdot (b + c) \leq (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Si exijimos que el monoide $(R, +)$ en un $W - rig$ sea una MV-álgebra y adicionamos una condición relacionada con los cocientes, llamaremos a esta estructura un *MVW-rig*, ya que cumple con las condiciones para ser un W-rig, MV-álgebra y tiene las propiedades del producto natural de una MV-algebra.

Definición 2.4 (MVW-rig)**.** Un **MVW-rig** $(A, \oplus, , \cdot, \neg, 0)$ es un conjunto A junto con tres operaciones $\neg$, $\oplus$ y $\cdot$ definidas en A (por abreviación $a \cdot b = ab$), tal que cumple los siguientes axiomas:

i) $(A, \oplus, \neg, 0)$ es una MV-álgebra.

ii) $(A, \cdot)$ es una operación asociativa definida en A.

iii) $a0 = 0a = 0$ para todo $a \in A$.

iv) $a(b \oplus c) \leq ab \oplus ac$ y $(b \oplus c)a \leq ba \oplus ca$ para todo $a, b, c \in A$.

v) $a(b \ominus c) \geq ab \ominus ac$ y $(b \ominus c)a \geq ba \ominus ca$ para todo $a, b, c \in A$.

Por propiedades de la MV-algebra, $0 \leq a$ para todo $a \in A$. Definimos $u =_{def} \neg 0$ para cualquier MVW-rig. Entonces $a \leq u$ para todo $a \in A$. La operación $\neg$ se llama **negación**, la operación $\oplus$ **suma** y la operación $\cdot$ **producto** o **multiplicación**.

Notación: $a \cdot a = a^2$. En general $a \cdot a \cdot (n\ veces) = a^n$.

Proposición 2.5. *Dado A un MVW-rig, $u = \neg 0$ y $a, b, c \in A$. Entonces*

i) *Si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$ y $ca \leq cb$*

ii) $u^2 \leq u$,

iii) $a(b \vee c) \geq ab \vee ac$ *y* $(b \vee c)a \geq ba \vee ca$,

iv) $a(b \wedge c) \leq ab \wedge ac$ *y* $(b \wedge c)a \leq ba \wedge ca$,

v) $(a \vee b)^n \geq a^n \vee b^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$.

vi) $(a \wedge b)^n \leq a^n \wedge b^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. $i)$ Dado $a \leq b$ entonces $a \ominus b = 0$, luego $0 = (a \ominus b)c \geq ac \ominus bc$ y $0 = c(a \ominus b) \geq ca \ominus cb$ lo cual implica que $ac \ominus bc = 0$ y $ca \ominus cb = 0$, y así $ac \leq bc$ y $ca \leq cb$. $ii)$ En una MV-álgebra u es el máximo $iii)$ Se sigue directamente de la definición de supremo, del hecho que $b \vee c \geq b, c$; y por propiedad (i) $a(b \vee c) \geq ab, ac$. De manera equivalente se hace para la multiplicación por derecha y para $iv)$. $v)$ $(a \vee b)^n = (a \vee b) \cdots (a \vee b) \geq a^n \vee \cdots \vee b^n \geq a^n \vee b^n$ usando propiedad (iii). De igual forma, obtenemos $vi)$ aplicando propiedad (iv). $\square$

Si en un MVW-rig A, hay un elemento s que tiene la propiedad de que para todo x en A $sx = xs = x$ se dice que s es un **elemento unitario** del MVW-rig y A se llamará **MVW-rig unitario**, además es único, puesto que si existe un elemento $w \in A$ unitario entonces $s = sw = ws = w$. Un elemento unitario en un MVW-rig se denotará como 1. Un MVW-rig es **conmutativo** si para todo $x, y \in A$ se tiene que $xy = yx$.

Notación: La sumatoria en los MVW-rigs se escribirá como $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$.

2.1. Ejemplos de MVW-rigs

Ejemplo 2.6. El intervalo $[0,1]$ de números reales con la suma usual de la MV-algebra $[0,1]$ y multiplicación usual en $\mathbb{R}$ es un MVW-rig conmutativo con elemento unitario donde $u = 1$ y $\neg x = 1 - x$.

Ejemplo 2.7. EL intervalo $[0,u]$ en $\mathbb{R}$ donde $0 \leq u < 1$ es un MVW-rig conmutativo no unitario. Si $u = 0$ la estructura se llama **MVW-rig trivial**.

Ejemplo 2.8. EL intervalo $[0,u]$ en $\mathbb{R}$ donde $u > 1$ no es un MVW-rig puesto que no es asociativo.

Ejemplo 2.9. El conjunto $[0,u] \cap \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ con $0 \leq u < 1$ es un MVW-rig conmutativo.

Ejemplo 2.10. El conjunto $Ł_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, conocido como MV-algebra de Łukasiewicz no es un MVW-rig porque no es cerrado para el producto. Si lo cerramos para productos entonces obtenemos el MVW-rig $\dot{Ł}_n = \{\frac{m}{n^k} \in \mathbb{Q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo entero m entre 0 y $n\}$.

Ejemplo 2.11. Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $Z_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ es un MVW-rig con $u = n$ como unidad fuerte y operaciones definidas como sigue: $x \oplus y = \min\{u, x + y\}$, $\neg x = n - x$ y $xy = \min\{n, x \cdot y\}$ donde las operaciones suma $+$ y producto $\cdot$ son las usuales en los números naturales y la relación de orden de la MV-álgebra es la usual en los naturales. Esta MV-álgebra es isomorfa a la MV-algebra $Ł_{n+1}$ mediante la aplicación $\phi_n : Ł_{n+1} \to Z_n$, $\phi_n(x) = nx$, pero $Ł_{n+1}$ no es un MVW-rig.

Este MVW-rig tiene algunas propiedades interesantes: Tiene elemento unitario y es diferente de u si $n > 1$; no tiene propiedad cancelativa, el producto entre dos elementos es mayor o igual que el ínfimo entre ellos. Este MVW-rig es una buena fuente de contraejemplos de propiedades que pueden ser ciertas para otros MVW-rigs.

Ejemplo 2.12. Dada la MV-algebra $Free_1$, a través del funtor de Mundici obtenemos el l_u-grupo $Free_1^*$ que es isomorfo al conjunto de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ que tienen la propiedad que cada una de ellas está constituida por finitos polinomios lineales con coeficientes enteros y que está contenida en el l_u-anillo $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$. Así podemos tomar el l_u-anillo generado por $Free_1^*$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ que llamaremos $\dot{F}[x]$. Este l_u-anillo es isomorfo al l_u-anillo de funciones en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ que está constituido por finitos polinomios de $\mathbb{Z}[x]$. $\dot{F}[x]$ es un l_u-anillo conmutativo. Dada u unidad fuerte de $\dot{F}[x]$ tal que $u^2 \leq u$ tomamos $\Gamma(\dot{F}[x], u) = \{f \in \dot{F}[x] \mid 0 \leq f \leq u\}$. Esta

MV-álgebra con el producto usual de funciones es un MVW-rig conmutativo que denotaremos por $F_u[x]$. El MVW-rig $F_u[x]$ tiene más elementos que la MV-algebra $Free_1$ ya que en $F_u[x]$ hay funciones que a trozos son polinomios de grado mayor a 1 y cuyos intervalos de definición tienen por extremos números algebráicos. Sin embargo $Free_1 \subset F_u[x]$.

A diferencia del ejemplo anterior, este MVW-rig cumple que $fg \leq f \wedge g$ para todo $f, g \in F_u[x]$.

Proposición 2.13. *En una MV-algebra A tenemos que* $(x_1 \oplus x_2) \ominus (y_1 \oplus y_2) \leq (x_1 \ominus y_1) \oplus (x_2 \ominus y_2)$.

Demostración. De las definiciones de MV-algebra, supremo y orden tenemos: $1 = \neg(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \oplus x_2) \leq \neg(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \wedge y_1) \oplus (x_2 \wedge y_2) = \neg(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \ominus y_1) \oplus y_1 \oplus (x_2 \ominus y_2) \oplus y_2 = \neg((x_1 \oplus x_2) \ominus (y_1 \oplus y_2)) \oplus (x_1 \ominus y_1) \oplus (x_2 \ominus y_2)$ luego $(x_1 \oplus x_2) \ominus (y_1 \oplus y_2) \leq (x_1 \ominus y_1) \oplus (x_2 \ominus y_2)$ por la definición de orden.

□

Si generalizamos esta propiedad obtenemos que $\bigoplus_{i=1}^n x_i \ominus \bigoplus_{i_1}^n y_i \leq \bigoplus_{i=1}^n x_i \ominus y_i$.

Ejemplo 2.14. *MVW-rig de matrices:* Sea M_n el conjunto de matrices cuadradas nxn con entradas en $[0, 1/n]$. Definimos la suma de dos matrices $A, B \in M_n$ con la operación punto a punto en la MV-álgebra $[0, 1/n]$, es decir $A \oplus B = C$ con $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. La negación se define punto a punto en la MV-álgebra $[0, 1/n]$, es decir $\neg A = C$, donde $c_{ij} = \neg a_{ij}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.. El conjunto M_n es una MV-álgebra con las operaciones descritas y la matriz cero. El orden natural en M_n está dado por: $A \leq B \Leftrightarrow_{Def} (A)_{ij} \leq (B)_{ij}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Esto define un orden parcial en M_n. Ahora definimos el producto en M_n como $AB_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ donde cada producto y suma es la definida en el MVW-rig $[0, 1/n]$. Nótese que la unidad fuerte en este MVW-rig es la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 1/n & \ldots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}$$

Probemos cada axioma de MVW-rig: *i*) Sabemos que M_n es una MV-álgebra. *ii*) Dadas tres matrices $A, B, C \in M_n$ tenemos $(A(BC))_{ij} = (A[\bigoplus_{k=1}^n b_{ik} c_{kj}])_{ij} =$

$\bigoplus_{r=1}^{n} a_{ir}(\bigoplus_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}) = \bigoplus_{r=1}^{n}\bigoplus_{k=1}^{n} a_{ir}b_{ik}c_{kj} = \bigoplus_{k=1}^{n}\bigoplus_{r=1}^{n} a_{ir}b_{ik}c_{kj} = \bigoplus_{r=1}^{n}(\bigoplus_{k=1}^{n} a_{ir}b_{ik})c_{kj} = \bigoplus_{r=1}^{n}(AB)_{ik}c_{kj} = ((AB)C)_{ij}$ donde la igualdad en la ley distributiva es cierta cuando la la suma no supera a u y en este caso se cumple. $iii)$ Trivial. $iv)$ $(A(B \oplus C))_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} \oplus c_{kj}) \leq \bigoplus_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} \oplus a_{ik}c_{kj}) = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} \oplus (AC)_{ij}$. $v)$. Dado $v)$ $(A(B \ominus C))_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} \ominus c_{kj}) \geq \bigoplus_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} \ominus a_{ik}c_{kj})$ y por proposición anterior $\bigoplus_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} \ominus a_{ik}c_{kj}) \geq \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \ominus \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} \ominus (AC)_{ij}$.

Ejemplo 2.15. Del ejemplo anterior, tomese

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

en el conjunto de matrices del ejemplo anterior; este no es un MVW-rig, ya que no es asociativo con el producto.

Ejemplo 2.16. Del ejemplo 2.14 tomense, para cada matriz, las entradas en el MVW-rig Z_m, entonces $M_{nxn}(Z_m)$ es un MVW-rig.

2.2. Homomorfismos e ideales de un MVW-rig

Definición 2.17. Un subMVW-rig de un MVW-rig A es un subconjunto de S de A que contiene al elemento cero de A, es cerrado bajo las operaciones del MVW-rig y sus elementos cumplen con las restricciones de estas operaciones.

Definición 2.18. Sean A y B MVW-rigs. Una función $f : A \to B$ es un homomorfismo de MVW-rigs si se cumplen las siguientes propiedades:

i) f es un homomorfismo de MV-álgebras.

ii) $f(ab) = f(a)f(b)$.

Ejemplo 2.19. Dado el MVW-rig $F_u[x]$ y una función $\hat{a}$ tal que evalua cada función de $F_u[x]$ en un punto $a \in [0,1]$. Es decir, $\hat{a} : F_u[x] \mapsto [0,1]$, $\hat{a}(f) = f(a)$. La función $\hat{a}$ es un homomorfismo. Veamos: $\hat{a}(0) = 0(a) = 0$, donde 0 es la función cero de $F_u[x]$. También tenemos que $\hat{a}(\neg f) = (\neg f)(a) = \neg f(a) = \neg\hat{a}(f)$ para todo $f \in F_u[x]$. Tomemos $f, g \in F_u[x]$, luego $\hat{a}(f \oplus g) = (f \oplus g)(a) = f(a) \oplus g(a) = \hat{a}(f) \oplus \hat{a}(g)$ y esto prueba *i*). Dado $f, g \in F_u[x]$ tenemos que $\hat{a}(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \hat{a}(f)\hat{a}(g)$ y esto prueba *ii*). Este homomorfismo es de gran importancia para relacionar los conjuntos $F_u[x]$ con $A = [0, u]$.

El núcleo de un homomorfismo de MVW-rigs como el definido antes es un subconjunto de A definido por $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ con las siguientes propiedades:

i) $0 \in \mathrm{Ker}(f)$

ii) Si $a, b \in \mathrm{Ker}(f)$ entonces $a \oplus b \in \mathrm{Ker}(f)$.

iii) Si $a \leq b \in \mathrm{Ker}(f)$ entonces $a \in \mathrm{Ker}(f)$.

iv) Si $a \in \mathrm{Ker}(f)$ y $b \in A$ entonces $ab \in \mathrm{Ker}(f)$ y $ba \in \mathrm{Ker}(f)$.

De esta manera podemos definir un ideal en un MVW-rig A como el subconjunto de A que tiene las propiedades del núcleo de homomorfismos.

Definición 2.20. Un ideal de un MVW-rig A es un subconjunto I de A que cumple las siguientes propiedades:

i) I es ideal de A como MV-álgebra.

ii) Si $a \in I$ y $b \in A$ entonces $ab \in I$ y $ba \in I$. *(propiedad de absorción)*

Ejemplo 2.21. Los MVW-rigs $[0, u] \subset \mathbb{R}$ o $\dot{Ł}_n$ sólo tienen el ideal trivial

Ejemplo 2.22. El producto cartesiano de MVW-rigs $\dot{Ł}_2 \times \dot{Ł}_3 = \{(a, b) \mid a \in \dot{Ł}_2, b \in \dot{Ł}_3\}$ es un MVW-rig con orden parcial $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow_{def} x_i \leq y_i$ para $i = 1, 2$. Este conjunto tiene dos ideales propios no triviales: $\langle(1/2, 0)\rangle$ y $\langle(0, 1/3)\rangle$.

Ejemplo 2.23. El MVW-rig de matrices M_n no tiene ideales propios no triviales, ya que ningún subconjunto cumple la absorción a izquierda y a derecha simultáneamente.

Ejemplo 2.24. En $F_u[x]$ podemos tomar ideales análogos a los MV-ideales de la MV-algebra $Free_1$ los cuales son ideales en el MVW-rig $F_u[x]$

- $I_z = \{f \in F_u[x] \mid f(z) = 0$ para algún $z \in [0, 1]\}$
- $I_{z^+} = \{f \in F_u[x] \mid f([z, z + \epsilon_f]) = 0$ donde $\epsilon_f > 0$ es un número real muy pequeño que depende de cada $f\}$.

- $I_{z^-} = \{f \in F_u[x] \mid f([z-\epsilon_f, z]) = 0$ donde $\epsilon_f > 0$ es un número real muy pequeño que depende de cada $f\}$.

- $I_S = \{f \in F_u[x] \mid f(S) = 0,\ S \subset [0,1]\}$.

Una diferencia importante entre los MV-ideales de $Free_1$ y los ideales de $F_1[x]$ definidos antes es que cuando $z \in [0,1]$ es irracional, los MV-ideales I_z, I_{z^+} e I_{z^-} en la MV-algebra $Free_1$ resultan ser el mismo MV-ideal, mientras que en el MVW-rig $F_1[x]$ estos ideales son diferentes cuando $z \in [0,1]$ es algebraico.

Si S es un subconjunto de un MVW-rig conmutativo A, definimos el conjunto

$$\langle S\rangle = \{x \in A \mid x \leq \bigoplus_{i=1}^{n} a_i s_i, s_i \in S, a_i \in A \text{ o } a_i \in \mathbb{N} \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}$$

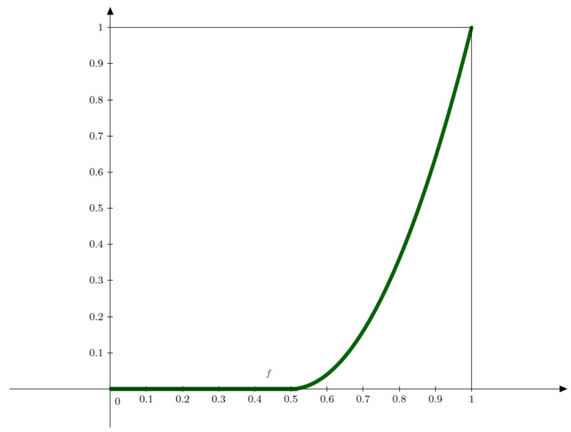
Nota: Si $a_i = n \in \mathbb{N}$ se entenderá $ns = s \oplus \cdots \oplus s$ (n veces).

Proposición 2.25. *$\langle S\rangle$ es el ideal generado por S en A, es decir, es el ideal mas pequeño que contiene a S.*

Demostración. $\langle S\rangle$ es ideal ya que $0 \in \langle S\rangle$. Dado $x, y \in \langle S\rangle$ entonces $x \leq \bigoplus_{i=1}^{n} a_i s_i$ y $y \leq \bigoplus_{j=1}^{m} a_j s_j$, luego $x \oplus y \leq \bigoplus_{i=1}^{n} a_i s_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} a_j s_j$ y así $x \oplus y \in \langle S\rangle$. Dado $x \leq y \in \langle S\rangle$ entonces $x \leq y \leq \bigoplus_{i=1}^{n} a_i s_i$ y por tanto $x \in \langle S\rangle$. Por último, dado $x \in \langle S\rangle$ y $z \in A$ entonces $zx \leq \bigoplus_{i=1}^{n} z a_i s_i = \bigoplus_{j=1}^{n} a_j s_j$ y esto implica que $zx \in \langle S\rangle$ y lo mismo para el caso $xz \in \langle S\rangle$.
Para ver que $\langle S\rangle$ es el menor ideal de A que contiene a S, tomemos un ideal I de A que contiene a S y veamos que $\langle S\rangle \subset I$. Dado $x \in \langle S\rangle$ entonces $x \leq \bigoplus_{i=1}^{n} a_i s_i$. Como I contiene a S entonces cada s_i está en I y por tanto $a_i s_i$ está en I. Luego la suma $\bigoplus_{i=1}^{n} a_i s_i$ pertenece a I y esto implica que $x \in I$. $\square$

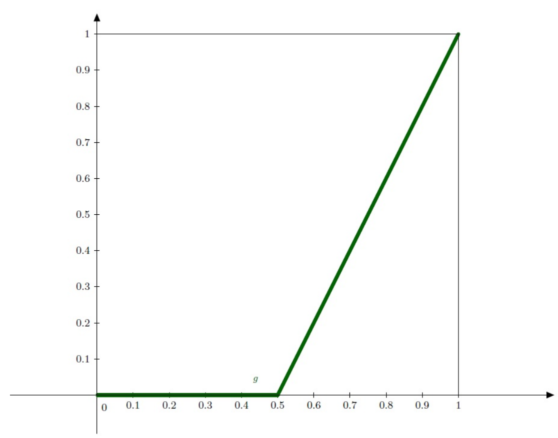
Ejemplo 2.26. En $F_1[x]$ podemos definir ideales generados por funciones en $F_1[x]$ que no necesariamente deben ser de la forma descrita en el ejemplo anterior (como ocurría en $Free_1$) ya que si tomamos la función

$$f = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x-1)^2 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$



Entonces $\langle f \rangle$ no es el ideal $I_{[0,1/2]}$ (el cual sería el candidato en $Free_1$) ya que la función

$$g = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$



pertenece a $I_{[0,1/2]}$ pero no pertenece a $\langle f \rangle$. De hecho $\langle f \rangle \subset I_{[0,1/2]}$ y se tiene que $\langle f \rangle = \{g \in I_{[0,1/2]} \mid g'(1/2) = 0\}$.

Ejemplo 2.27. En $F_1[x]$ podemos construir una relacion entre los ideales generados por funciones en $F_1[x]$ que se anulan en 0.

$$I_0 \supset \langle x^2 \rangle \supset \langle x^3 \rangle \supset \cdots \supset I_{0^+}$$

donde la contenencia es estricta .

Proposición 2.28. *Dado ϕ un homomorfismo de un MVW-rig A en un MVW-rig B, se tienen las siguientes propiedades:*

i) Si S es un subMVW-rig de A entonces $\phi(S)$ es un subMVW-rig de B.

ii) $\phi(x) \leq \phi(y)$ si y solo si $x \ominus y \in Ker(\phi)$.

iii) Si J es ideal de B entonces $\phi^{-1}(J)$ es ideal de A.

iv) Si A es unitario y $\phi(1) \neq 0$ entonces $\phi(1)$ es elemento unitario de $\phi(A)$.

v) ϕ es inyectivo si y solo si Ker$(\phi) = \{0\}$.

Demostración. $i)$ Como ϕ es homomorfismo entonces ϕ es cerrado para la suma, la negación y el producto, además $\phi(0) = 0$. $ii)$ $\phi(x) \leq \phi(y) \iff \phi(x) \ominus \phi(y) = \phi(x \ominus y) = 0 \iff x \ominus y \in \text{Ker}(\phi)$. $iii)$ Por Lema 1.2.3 (i) de [6] se cumple la propiedad i) de ideales. Sea $a \in \phi^{-1}(J)$ y $b \in A$, entonces $\phi(a) \in J$ y $\phi(b) \in B$; como J es ideal $\phi(a)\phi(b), \phi(b)\phi(a) \in J$ lo cual implica que $\phi(ab), \phi(ba) \in J$, luego $ab, ba \in \phi^{-1}(J)$. $iv)$ Dado 1 elemento unitario en A entonces para todo $a \in A$, $\phi(a) = \phi(a1) = \phi(1a) = \phi(1)\phi(a) = \phi(a)\phi(1)$. De modo que $\phi(1)$ es la identidad multiplicativa de $\phi(A)$. $v)$ Si ϕ es inyectivo, entonces $\phi(a) = 0 = \phi(0)$ implica $a = 0$. Por otro lado, si $\phi(a) = \phi(b)$, entonces $\phi(a \ominus b) = 0$ y $\phi(b \ominus a) = 0$, lo cual implica que $a \ominus b = 0$ y $b \ominus a = 0$ porque Ker$(\phi) = \{0\}$, luego $a = b$ y así ϕ es inyectivo. $\square$

Dado I un ideal de una MV-algebra A, la relacion binaria $\equiv_I$ en A ($x \equiv_I y =_{def} (x \ominus y) \oplus (y \ominus x) \in I$) es una relacion de equivalencia. La relacion $x \equiv_I y$ tambien se denota como $x \equiv y \; mod(I)$.

Proposición 2.29. *Cada ideal I de un MVW-rig A determina una relación de congruencia entre los elementos de A a través de la relación de equivalencia definida antes, esto hace que el MVW-rig A quede dividido en clases de equivalencia módulo I, estas clases de equivalencia respetan las operaciones del MVW-rig A.*
Por otro lado, si $\equiv$ es una congruencia en A entonces $\{x \in A \mid x \equiv 0\}$ es un ideal de A. De esta manera, hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de ideales de A y el conjunto de congruencias en A.

Demostración. Suma: Si $a \equiv b \; mod(I)$ y $c \equiv d \; mod(I)$ entonces $a \ominus b \in I$ y $c \ominus d \in I$. Por otro lado tenemos que $a \oplus c \leq (a \vee b) \oplus (c \vee d) = (a \ominus b) \oplus b \oplus (c \ominus d) \oplus d = (a \ominus b) \oplus (c \ominus d) \oplus (b \oplus d)$ obteniendo que $(a \oplus c) \ominus (b \oplus d) \leq (a \ominus b) \oplus (c \ominus d)$, como I es ideal $(a \oplus c) \ominus (b \oplus d) \in I$. Similarmente se puede demostrar que $(b \oplus d) \ominus (a \oplus b) \in I$, por lo tanto $a \oplus c \equiv b \oplus d \; mod(I)$.
Negacion: Si $a \equiv b \; mod(I)$ entonces $(a \ominus b) \oplus (b \ominus a) \in I$. Por propiedad de la resta, $(\neg b \ominus \neg a) \oplus (\neg a \ominus \neg b) \in I$ y asi $\neg a \equiv \neg b \; mod(I)$.
Producto: Si $a \equiv b \; mod(I)$ y $c \equiv d \; mod(I)$ entonces $a \ominus b \in I$ y $c \ominus d \in I$. Tenemos

que $ac \leq (a \vee b)(c \vee d) = ((a \ominus b) \oplus b)((c \ominus d) \oplus d)$ por definición de supremo (ecuación 1.4), usando ley distributiva (definición 2.4(iv)) tenemos $((a \ominus b) \oplus b)((c \ominus d) \oplus d) \leq (a \ominus b)((c \ominus d) \oplus d) \oplus b((c \ominus d) \oplus d) \leq (a \ominus b)(c \ominus d) \oplus (a \ominus b)d \oplus b(c \ominus d) \oplus bd$ y usando la ecuación (1.6) obtenemos que $ac \ominus bd \leq (a \ominus b)(c \ominus d) \oplus (a \ominus b)d \oplus b(c \ominus d) \in I$ por propiedad absorvente de I respecto al producto. Similarmente $bd \ominus ac \in I$, luego $(ac \ominus bd) \oplus (bd \ominus ac) \in I$ lo cual implica que $ac \equiv bd \ mod(I)$.
Por otro lado, si $\equiv$ es una congruencia en A entonces el conjunto $I = \{x \in A \mid x \equiv 0\}$ es un ideal ya que $0 \equiv 0$ por propiedad reflexiva. Si $x \equiv 0$ y $y \equiv 0$ entonces $x \oplus y \equiv 0 \oplus 0 = 0$ porque $\equiv$ preserva la suma. Si $x \equiv 0$ y $y \leq x$ entonces como $\equiv$ preserva la negación y la suma, tenemos que $\neg x \equiv 1 \Rightarrow \neg x \oplus y \equiv 1 \oplus y = 1 \Rightarrow \neg(\neg x \oplus y) \equiv \neg 1 = 0 \Rightarrow x \ominus y \equiv 0$ y por otro lado como $y \leq x$ entonces $0 = y \ominus x \equiv 0$, luego $(x \ominus y) \oplus (y \ominus x) \equiv 0 \Rightarrow x \equiv y \Rightarrow y \equiv 0$. Si $x \equiv 0$ y $z \in A$ entonces como $\equiv$ preserva el producto tenemos que $xz \equiv 0z = 0$.
Sea $f : \mathcal{I}(\mathcal{A}) \to Cong(A)$ una función entre ideales de A y congruencias en A, donde $f(I) = \equiv_I$. Mostremos que es biyectiva:
Sobreyectiva: Dada $\equiv$ una congruencia en A, tómese el conjunto $I = \{x \in A \mid x \equiv 0\}$ y por lo anterior se tiene que $f(I) = \equiv$.
Inyectiva: Dado $f(I) = f(J)$ con I, J ideales de A, entonces $\equiv_I = \equiv_J$, luego para todo $x, y \in A$ $x \equiv_I y \iff x \equiv_J y$, y tomando $y = 0$ tenemos que $x \in I \iff x \in J$, es decir, $I = J$. $\square$

Definimos el cociente A/I como el conjunto de las clases de equivalencia de x para cada $x \in A$ las cuales se denotan por $[x]_I$. En el conjunto A/I se tienen las operaciones

$$\neg[x]_I =_{def} [\neg x]_I \tag{2.1}$$

$$[x]_I \oplus [y]_I =_{def} [x \oplus y]_I \tag{2.2}$$

$$[x]_I[y]_I =_{def} [xy]_I \tag{2.3}$$

Proposición 2.30. *Dados x, y en un MVW-rig A y dado un ideal I de A se tienen las siguientes propiedades:*

i) $[x]_I \ominus [y]_I = [x \ominus y]_I$.

ii) *Si $x \leq y$ en A, entonces $[x]_I \leq [y]_I$ en A/I.*

Demostración. $i)$ Se tiene directamente de la definición de $\ominus$ y las ecuaciones (2.1) y (2.2). $ii)$ Si $x \leq y$ entonces $x \ominus y = 0$ y esto implica que $[x]_I \ominus [y]_I = [x \ominus y]_I = [0]_I$ y por tanto $[x]_I \leq [y]_I$. □

Proposición 2.31. *Dado A un MVW-rig e I un ideal de A entonces el cociente A/I es un MVW-rig.*

Demostración. $i)$ A/I es una MV-algebra debido a que A es una MV-algebra e I es un ideal de MV-algebra. $ii)$ y $iii)$ Son inmediatos de la asociatividad de A y de que $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$. $iv)$ Como $a(b \oplus c) \leq ab \oplus ac$ entonces $[a]_I([b]_I \oplus [c]_I) = [a(b \oplus c)]_I \leq [ab \oplus ac]_I = [a]_I[b]_I \oplus [a]_I[c]_I$. De manera equivalente se hace para la distribución a derecha y para $v)$. □

La correspondencia $x \mapsto [x]_I$ define un homomorfismo sobreyectivo ν del MVW-rig A al MVW-rig cociente A/I llamado el homomorfismo natural de A sobre A/I donde $\mathrm{Ker}(\nu) = I$.

Teorema 2.32. *Dado ϕ un homomorfismo de un MVW-rig A en un MVW-rig B con Kernel K, entonces existe un isomorfismo canónico entre $\phi(A)$ y A/K.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \phi(A) \subset B \\
& A/K \arrow[ur, hook, "\cong", "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. De la proposición (2.28, $i)$ $\phi(A)$ es un MVW-rig. Definimos $\varphi : A/K \to \phi(A)$ por $\varphi([a]_K) = \phi(a)$. El Teorema 1.2.8 de [6] muestra que φ está bien definido, es uno a uno y es sobre en $\phi(A)$ con $\varphi([a]_K \oplus [b]_K) = \varphi([a]_K) \oplus \varphi([b]_K)$. Ahora bien, $\varphi([a]_K[b]_K) = \varphi([ab]_K) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \varphi([a]_K)\varphi([b]_K)$. Así, φ es un isomorfismo de MVW-rigs. □

Teorema 2.33. *Dados A un MVW-rig, I un ideal de A, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los ideales de A que contienen a I y los ideales del MVW-rig cociente A/I el cual conserva la relacion de inclusion y además los ideales se conservan por imagen directa o inversa.*

Demostración. Sea f el homomorfismo natural de A sobre A/I. Dado J ideal de A que contiene a I entonces $\mathrm{Ker}(f) = I \subset J$, queremos ver que $f(J)$ es ideal en A/I:

$0 \in f(J)$ porque $\mathrm{Ker}(f) \subset J$, dados $x, y \in f(J)$ y $z \in A/I$, entonces $x = f(a)$, $y = f(b)$, $z = f(k)$ con $a, b \in J$, $k \in A$; de aquí resulta $x \oplus y = f(a \oplus b)$, $zx = f(ka)$, $xz = f(ak)$, con lo cual $x \oplus y$, xz, $kx \in f(J)$, además si $z \leq x$ y $x \in f(J)$ entonces $k \ominus a \in Ker(f)$ por propiedad (ii) de la proposición (2.28), luego $k \ominus a \in J$ y como $a \in J$ entonces $(k \ominus a) \oplus a = k \vee a \in J$ y esto implica que $k \in J$, esto es, $f(k) = z \in f(J)$. Por otro lado, si $\tilde{J}$ es ideal de A/I, de nuevo por proposición (2.28) $f^{-1}(\tilde{J})$ es ideal de A y contiene a I porque para $a \in I$, $[a]_I = [0]_I \in \tilde{J}$.
Dada $\mathcal{I}$ la colección de todos los ideales de A que contienen a I e $\mathcal{I}_0$ la colección de todos los ideales de A/I.
La correspondencia $\widetilde{f} : \mathcal{I} \to \mathcal{I}_0$, $\widetilde{f}(J) := f(J) = \{[a]_I \mid a \in J\}$ es una biyección.
$\widetilde{f}$ es inyectivo ya que dados $K, J \in \mathcal{I}$ con $\widetilde{f}(J) = \widetilde{f}(K)$, entonces $a \in J \Leftrightarrow [a]_I \in \widetilde{f}(J) \Leftrightarrow [a]_I \in \widetilde{f}(K) \Leftrightarrow a \in K$. (La implicación $[a]_I \in \widetilde{f}(K) \Rightarrow a \in K$ se debe a que si tenemos $b \in K$ tal que $[a]_I = [b]_I$ entonces $a \ominus b \in K$, luego $(a \ominus b) \oplus b \in K$ y por tanto $a \vee b \in K$ y así $a \in K$).
$\widetilde{f}$ es sobreyectivo pues dado $\tilde{J} \in \mathcal{I}_0$ sabemos que $f^{-1}(\tilde{J})$ es ideal de A que contiene a I; además como f es sobreyectivo $f(f^{-1}(\tilde{J})) = \tilde{J}$, es decir, $\widetilde{f}(f^{-1}(\tilde{J})) = \tilde{J}$.
$\widetilde{f}$ preserva la inclusion ya que dados $J \supseteq K$ en $\mathcal{I}$, si $[a]_I \in \widetilde{f}(K)$ entonces $a \in K$ y $a \in J$, luego $[a]_I \in J$ lo cual implica que $\widetilde{f}(J) \supseteq \widetilde{f}(K)$. $\square$

Capítulo 3

Ideales primos y maximales

3.1. Ideales primos

Definición 3.1. Un ideal I de A es primo si $ab \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$.

Se dice que un MVW-rig A no tiene divisores de cero si para todo $a, b \in A$ tal que $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$. De lo contrario se dice que A tiene divisores de cero y los elementos a y b se llaman **divisores de cero**.

Ejemplo 3.2. En $F_u[x]$ el ideal I_{0^+} es un ideal primo debido a que dados $fg \in I_{0^+}$ tenemos que $(fg)([0, \epsilon_{fg}]) = 0$. Si $f \notin I_{0^+}$ entonces tenemos dos casos:
Caso 1: $f(0) = 0$ y $0 \notin f((0, \epsilon])$ para algún $\epsilon > 0$. Si $g(0) \neq 0$, como g es continua tendriamos que existe $\epsilon_g > 0$ tal que $0 \notin g([0, \epsilon_g])$, así $0 \notin (fg)((0, \epsilon])$ para algún $\epsilon > 0$ puesto que $0 \notin fg((0, \epsilon] \cap (0, \epsilon_g])$y por tanto $fg \notin I_{0^+}$, luego $g(0) = 0$, pero si $0 \notin g((0, \epsilon])$ para algún $\epsilon > 0$ entonces $0 \notin (fg)((0, \epsilon])$ ya que $[0, u]$ no tiene divisores de cero y así $fg \notin I_{0^+}$, de esta manera $g(0) = 0$ y existe un ϵ_g tal que $g([0, \epsilon_g]) = 0$, es decir, $g \in I_{0^+}$.
Caso 2: Si $f(0) \neq 0$ entonces $0 \notin f([0, \epsilon_f])$ para algún $\epsilon_f > 0$, luego $g(0) = 0$ y por tanto $g([0, \epsilon_{fg}]) = 0$ si $[0, u]$ no tiene divisores de cero, esto es $g \in I_{0^+}$.

Proposición 3.3. *Dado A un MVW-rig. P es un ideal primo de A si y solo si A/P no tiene divisores de cero.*

Demostración. $\Rightarrow$) Dado $[a]_P[b]_P = [0]_P$ entonces $[ab]_P = [0]_P$, luego $ab \in P$, como P es primo $a \in P$ o $b \in P$, luego $[a]_P = [0]_P$ o $[b]_P = [0]_P$. $\Leftarrow$) Dado $ab \in P$, entonces $[ab]_P = [0]_P$, como A/P no tiene divisores de cero entonces $[a]_P = [0]_P$ o $[b]_P = [0]_P$, luego $a \in P$ o $b \in P$. □

Proposición 3.4. *Sean A, B MVW-rigs. Si $f : A \to B$ es un homomorfismo de MVW-rigs y P es un ideal primo de B, entonces $f^{-1}(P) = \{a \in A \mid f(a) \in P\}$ es un ideal primo de A.*

Demostración. Sabemos que $f^{-1}(P)$ es un ideal de A. Probemos que es primo. Dados $x, y \in A$ tales que $xy \in f^{-1}(P)$, entonces $f(xy) = f(x)f(y) \in P$, como P es primo, $f(x) \in P$ o $f(y) \in P$, luego $x \in f^{-1}(P)$ o $y \in f^{-1}(P)$. $\square$

En las MV-álgebras se definen los ideales primos con las propiedades de MV-ideal en la MV-algebra que es la misma condición $i)$ de ideales para MVW-rigs pero como no existe el producto, la condición $ii)$ es omitida y además tiene una condición de primalidad para ínfimos.

En general, que un ideal sea MV-primo para A no implica que sea ideal primo para el MVW-rig A, lo contrario tampoco es cierto. La implicación se obtiene solo cuando podemos establecer una relación de orden entre el producto y el ínfimo, como en la siguiente proposición:

Proposición 3.5. *Dado un MVW-rig A donde $ab \leq a \wedge b$ para todo $a, b \in A$. Si P es un ideal primo de A entonces es un ideal MV-primo.*

Demostración. Dado $a, b \in A$ tal que $a \wedge b \in P$, entonces $ab \in P$ por la relación $ab \leq a \wedge b$. Como P es ideal primo del MVW-rig A entonces $a \in P$ o $b \in P$, y así P es un ideal MV-primo. $\square$

Ejemplo 3.6. Para los MVW-rigs $F_u[x]$ se tiene que $fg \leq f \wedge g$ para todo $f, g \in F_u[x]$. Así, todo ideal primo en $F_u[x]$ es un ideal MV-primo.

3.2. Ideales maximales

Definición 3.7. Dado M un ideal propio de un MVW-rig A. M es un **ideal maximal** si para todo $a \in A$ con $a \notin M$, $\langle M, a \rangle = A$.

Proposición 3.8. *En un MVW-rig A conmutativo unitario, todo ideal maximal es ideal primo.*

Demostración. Sea M un ideal maximal y a, b elementos de A tales que $ab \in M$. Supongamos que $a \notin M$, entonces existen elementos $m \in M$ y $x \in \langle a \rangle$ tales que $1 = m \oplus x$. Luego, $b = b1 = b(m \oplus x) \leq bm \oplus bx$, pero $bm \in M$ y $bx \in \langle ab \rangle \subset M$ y así $b \in M$. $\square$

Ejemplo 3.9. En $F_u[x]$, el ideal $I_0 = \{f \in F_u[x] \mid f(0) = 0\}$ es un ideal maximal, ya que dado $g \in F_u[x]$ tal que $g \notin I_0$, entonces $g(0) \neq 0$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ng(0) = u$ y por tanto $\langle I_0, g\rangle = F_u[x]$.

Un elemento x de un MVW-rig A se llama **nilpotente** si $x^n = 0$ para algún $n > 0$. El conjunto N de todos los elementos nilpotentes de A se llama el **nilradical de** A

Proposición 3.10. *El nilradical N de un MVW-rig conmutativo A es un ideal de A y A/N no tiene elementos nilpotentes diferentes de cero.*

Demostración. N es un ideal ya que $0 \in N$. Si $x, y \in N$ entonces $x^n = 0$ y $y^m = 0$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$, luego $(x \oplus y)^{m+n-1}$ es una suma de productos $x^r y^s$ donde $r + s = m + n - 1$ y $r > n$ ó $s > m$ (ya que A es conmutativo), luego cada producto es cero y por lo tanto $(x \oplus y)^{m+n-1} = 0$, así $x \oplus y \in N$. Si $x \leq y \in N$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y^n = 0$, como $x \leq y$ entonces $x^n \leq y^n = 0$ y así $x^n = 0$ por tanto $x \in N$. Dado $x \in N$ y $y \in A$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, como A es conmutativo tenemos que $x^n y^n = (xy)^n = 0$ y por tanto $xy \in N$. Esto muestra que N es un ideal.
Para ver que A/N no tiene elementos nilpotentes, tomemos un elemento nipotente $[x]_N$ en A/N, luego existe un entero $m > 0$ tal que $[x]_N^m = [0]_N$ en A/N, entonces $[x^m]_N = [0]_N$ por ecuación (2.3), esto implica que $x^m \in N$ y por tanto existe un entero $k > 0$ tal que $(x^m)^k = 0$, luego $x \in N$ y así $[x]_N = [0]_N$. □

Proposición 3.11. *El nilradical N de un MVW-rig A está contenido en cada ideal primo de A.*

Demostración. Dado $x \in N$, existe un entero $n > 0$ tal que $x^n = 0$, como $0 \in P$ para todo ideal primo P de A entonces $x^n \in P$ y como P es primo, $x \in P$. □

Proposición 3.12. *Todo MVW-rig $A \neq 0$ tiene un ideal maximal.*

Demostración. Sea Σ el conjunto de todos los ideales propios de A. Σ es diferente de vacío ya que el ideal $0 \in \Sigma$, además Σ está ordenado por inclusión. Sea (J_α) una cadena de ideales $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \cdots$ en Σ. Tenemos que $J = \cup_\alpha J_\alpha$ es un ideal que pertenece a Σ ya que $u \notin J$ porque $u \notin J_\alpha$ para toda α. Por tanto, J es una cota superior de la cadena y por lema de Zorn, Σ tiene elementos maximales. □

Corolario 3.13. *Si I es un ideal propio de A entonces existe un ideal maximal de A que contiene a I.*

Demostración. Se sigue directamente de la proposición anterior aplicada a A/I y de la biyección dada en (2.33). □

3.3. Operaciones con ideales

Si I, J son ideales de un MVW-rig A, definimos las siguientes operaciones entre ideales, los cuales serán de nuevo ideales en A como se mostrará.

Suma: La suma $I \oplus J$ es el ideal formado los elementos de A que son menores a las sumas $x \oplus y$ donde $x \in I$ y $y \in J$, es decir, $I \oplus J = \{a \in A \mid a \leq x \oplus y$ para algún $x \in I$ y $y \in J\}$.

Prueba: *i*) $0 = 0 \oplus 0 \in I \oplus J$. Dado $a, b \in I \oplus J$ entonces $a \leq x_1 \oplus y_1$ y $b \leq x_2 \oplus y_2$ donde $x_i \in I$ y $y_i \in J$ para $i = 1, 2$. Luego $a \oplus b \leq x_1 \oplus x_2 \oplus y_1 \oplus y_2 \in I \oplus J$. Dado $a \leq b \in I \oplus J$ entonces $a \leq b \leq x \oplus y$ para algún $x \in I$ y $y \in J$ y por tanto $a \in I \oplus J$. *ii*) Dado $a \in I \oplus J$ y $b \in A$ entonces $a \leq x \oplus y$ para algún $x \in I$ y $y \in J$, luego $ab \leq (x \oplus y)b \leq xb \oplus yb \in I \oplus J$ y así $ab \in I \oplus J$. De manera similar $ba \in I \oplus J$.

Intersección: La intersección se define como $I \cap J = \{a \in A \mid a \in I$ y $a \in J\}$.

Prueba: *i*) Se tiene desde que $I \cap J$ es ideal de la MV-álgebra. *ii*) Dado $a \in I \cap J$ y $b \in A$ entonces $a \in I$ y $a \in J$ luego $ab, ba \in I$ y $ab, ba \in J$ y así $ab \in I \cap J$ y $ba \in I \cap J$.

Producto: El producto de dos ideales se define como el ideal generado por todos los xy en A tales que $x \in I$ y $y \in J$. Es decir, $IJ = \{a \in A \mid a \leq \bigoplus_{i=1}^n x_i y_i, x_i \in I, y_i \in J\}$.

Prueba: *i*) Se sigue directamente que $0 \in IJ$. Dados $a, b \in IJ$ entonces $a \leq \bigoplus_{i=1}^n x_i y_i$ y $b \leq \bigoplus_{j=1}^m x_j y_j$, luego $a \oplus b \leq \bigoplus_{i=1}^n x_i y_i \oplus \bigoplus_{j=1}^m x_j y_j$ y así $a \oplus b \in IJ$. Dado $a \leq b \in IJ$ entonces $b \leq \bigoplus_{i=1}^m x_i y_i$, luego $a \leq \bigoplus_{i=1}^m x_i y_i$ lo que implica que $a \in IJ$. *ii*) Dado $a \in IJ$ y $b \in A$ entonces $a \leq \bigoplus_{i=1}^m x_i y_i$, luego $ab \leq (\bigoplus_{i=1}^m x_i y_i)b \leq \bigoplus_{i=1}^m x_i y_i b$ y como $y_i b \in J$ para cada i entonces $ab \in IJ$. De manera similar $ba \in IJ$.

Cociente entre ideales: Si A es un MVW-rig conmutativo entonces el ideal cociente entre dos ideales I y J de A es

$$(I : J) = \{x \in A \mid xJ \subset I\}$$

Prueba: $i)$ Se sigue directamente que $0 \in (I : J)$. Dados $x, y \in (I : J)$ tenemos que para cada $a \in J$, $(x \oplus y)a \leq xa \oplus ya$ y como $xa \in I$ y $ya \in I$ entonces $xa \oplus ya \in I$, luego $(x \oplus y)a \in I$ lo cual implica que $(x \oplus y)J \subset I$ y así $x \oplus y \in (I : J)$. Dado $x \leq y \in (I : J)$ tenemos que para cada $a \in J$, $xa \leq ya \in I$ entonces $xa \in I$ lo que implica que $xJ \subset I$ y así $x \in (I : J)$. $ii)$ Dado $x \in A$ y $y \in (I : J)$, entonces $(xy)J = x(yJ)$ y como $yJ \subset I$ entonces $x(yJ) \subset I$ y así $xy \in (I : J)$.

Dos ideales I, J de un MVW-rig A son **comaximales** si $I \oplus J = A$, es decir, existe $x \in I$ y $y \in J$ tales que $x \oplus y = u$.

Proposición 3.14. *Dados I, J y K ideales de un MVW-rig A, se tienen las siguientes relaciones entre operaciones de ideales:*

i) $I(J \oplus K) \subset IJ \oplus IK$

ii) $(I \cap J) \oplus (I \cap K) \subset I \cap (J \oplus K)$

iii) $(I \cap J)I \subset JI$

iv) $(I \cap J)(I \oplus J) \subset IJ$ *si A es conmutativo.*

v) $IJ \subset I \cap J$

vi) $IJ = I \cap J$ *si I, J son comaximales.*

Demostración. $i)$ Dado $a \in I(J \oplus K)$ entonces $a \leq \bigoplus_{i=1}^{n} x_i(y_i \oplus z_i)$ con $x_i \in I$, $y_i \in J$ y $z_i \in K$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Luego $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i(y_i \oplus z_i) \leq \bigoplus_{i=1}^{n} x_i y_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} x_i z_i \in IJ \oplus IK$, y así $a \in IJ \oplus IK$. $ii)$ Dado $a \in (I \cap J) \oplus (I \cap K)$ entonces $a \leq x \oplus y$ con $x \in I \cap J$ y $y \in I \cap K$. Luego $x, y \in I$, $x \in J$ y $y \in K$, así que $x \oplus y \in I$ lo que implica que $a \in I$ y por otro lado $x \oplus y \in J \oplus K$ lo cual implica que $a \in J \oplus K$, luego $a \in I \cap (J \oplus K)$. $iii)$ Dado $a \in (I \cap J)I$ entonces $a \leq \bigoplus_{i=1}^{n} x_i y_i$ con $x_i \in I \cap J$ y $y_i \in I$ para cada i. Como $x_i \in J$ entonces $a \leq \bigoplus_{i=1}^{n} x_i y_i \in JI$, luego $a \in JI$. $iv)$ Por propiedad $i)$ y $iii)$ tenemos que $(I \cap J)(I \oplus J) \subset (I \cap J)I \oplus (I \cap J)J \subset JI \oplus IJ = IJ \oplus IJ = IJ$ por ser A conmutativo. $v)$ Dado $a \in IJ$ entonces $a \leq \bigoplus_{i=1}^{n} x_i y_i$ con $x_i \in I$ y $y_i \in J$ para cada i. Luego $x_i y_i \in I$ y $x_i y_i \in J$ para todo i, y así $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i y_i \in I$ y $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i y_i \in J$ lo cual implica que $a \in I \cap J$. $vi)$ De $v)$ sólo queda probar la otra contenencia teniendo en cuenta que I, J son comaximales: $I \cap J = (I \cap J)A = (I \cap J)(I \oplus J) = IJ$ por $iv)$. $\square$

Definición 3.15. Dado I un ideal de un MVW-rig conmutativo A, llamaremos **radical** de I al conjunto

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid x^n \in I \text{ para algún } n > 0\}$$

El radical de un ideal es un ideal, veamos: $0 \in \sqrt{I}$. Dado $a, b \in \sqrt{I}$ entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n, b^m \in I$, luego $(a \oplus b)^{m+n-1}$ es una suma de múltiplos enteros de productos $a^r b^s$ donde $r + s = m + n - 1$, y $r < n$ ó $s < m$, por ser A conmutativo, luego cada producto pertenece a I y por tanto $a \oplus b \in \sqrt{I}$. Dado $a \leq b \in \sqrt{I}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n \in I$, como $a \leq b$ entonces $a^n \leq b^n$ y asi $a^n \in I$, por tanto $a \in \sqrt{I}$. Dado $a \in \sqrt{I}$ y $b \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I$, como A es conmutativo $a^n b^n = (ab)^n \in I$ luego $ab \in \sqrt{I}$.

Ejemplo 3.16. El ideal I generado por $\langle x^2 \rangle$ en $F_1[x]$ tiene como ideal radical a $\sqrt{I} = \langle x \rangle = I_0 = \{f \in F_1[x] \mid f(0) = 0\}$.

Proposición 3.17. *El radical de un ideal I de un MVW-rig conmutativo A tiene las siguientes propiedades:*

i) $I \subset \sqrt{I}$.

ii) *Si* $I \subset J$ *entonces* $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ *con* J *ideal de* A.

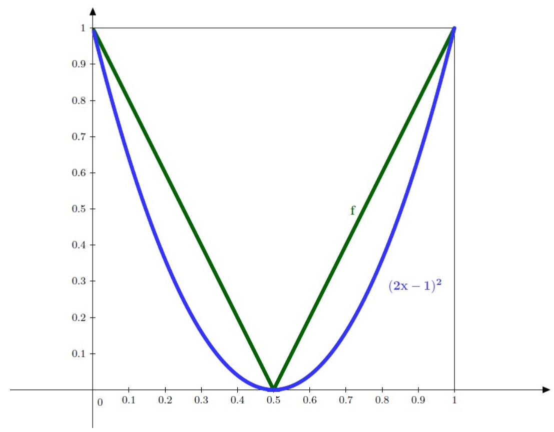
iii) *Si* I *es ideal primo entonces* $I = \sqrt{I}$.

iv) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$

Demostración. *i)* Tome $n = 1$. *ii)* Dado $x \in \sqrt{I}$ entonces existe $n > 0$ tal que $x^n \in I$, luego $x^n \in J$ y así $x \in \sqrt{J}$. *iii)* De *i)* solo tenemos que probar la otra contenencia: Dado $x \in \sqrt{I}$ existe $n > 0$ tal que $x^n \in I$, como I es primo $x^{n-1} \in I$ o $x \in I$. Si $x \in I$ acaba la prueba, si no entonces $x^{n-2} \in I$ y esto implica que $x^{n-3} \in I$ y así sucesivamente hasta llegar a que $x \in I$. *iv)* Dado $x \in \sqrt{I \cap J}$ entonces existe $n > 0$ tal que $x^n \in I \cap J$ lo cual implica que $x^n \in I$ y $x^n \in J$, luego $x^{2n} = x^n x^n \in IJ$ y así $x \in \sqrt{IJ}$. Por otro lado, como $IJ \subset I \cap J$ entonces por *ii)* obtenemos que $\sqrt{IJ} \subset \sqrt{I \cap J}$. □

Ejemplo 3.18. Dado $I = \langle (2x-1)^2 \rangle$ un ideal en $F_1[x]$. Nótese que los elementos de I tienen pendiente cero en $x = 1/2$. Resulta que $\sqrt{I} = \langle f \rangle$ donde

$$f = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$



Se tiene que $\langle f \rangle = I_{1/2}$. Veamos: La contenencia $\langle f \rangle \subset I_{1/2}$ es evidente. Por otro lado, dado $g \in I_{1/2}$ entonces $g(1/2) = 0$, y así $g(x) = h(x)(x-1/2) = (h(x)/2)(2x-1)$ además 2 divide a $h(x)$ por ser g función de $F_1[x]$, por tanto $g \in \langle f \rangle$.
Ahora mostremos que $\sqrt{I} = I_{1/2}$. Se sabe que $I_{1/2} = \sqrt{I_{1/2}}$ y tenemos que $I = \{g \in F_1[x] \mid g \leq \bigoplus_{i1}^{n} k_i(2x-1)^2\}$, luego, dado $g \in I$ se tiene que $g \in I_{1/2}$ y por tanto $I \subset I_{1/2}$. Por proposición anterior $\sqrt{I} \subset \sqrt{I_{1/2}} = I_{1/2}$. Por otro lado $f^2 \in I$, luego $f \in \sqrt{I}$ y por tanto $\langle f \rangle \subset \sqrt{I}$ y como $\langle f \rangle = I_{1/2}$ entonces $I_{1/2} \subset \sqrt{I}$.

Proposición 3.19. *El radical de un ideal I de un MVW-rig es la intersección de los ideales primos que contienen a I.*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \supset I} P$$

Demostración. Dado $x \in \sqrt{I}$ existe $n \in N$ tal que $x^n \in I$, luego $x^n \in P$ para todo $P \supset I$, lo cual implica que $x \in P$ para todo $P \supset I$ por ser P ideal primo y por tanto $x \in \bigcap_{P \supset I} P$. Por otro lado, dado $x \notin \sqrt{I}$. Sea Σ el conjunto de ideales propios J que contienen a I con la propiedad

$$n > 0 \Rightarrow x^n \notin J$$

Σ no es vacío porque $I \in \Sigma$. Σ tiene un orden parcial usando contenencia. Veamos que toda cadena en Σ tiene supremo.Para $J_0 \subset J_1 \subset J_2 ...$ el supremo es $K = U_{i=0}^{\infty} J_i$. K es ideal de A porque $0 \in K$; si $b, c \in K$ entonces $b \in J_{i_1}, c \in J_{i_2}$, supongamos que $J_{i_1} \subset J_{i_2}$, entonces $b \in J_{i_2}$, luego $b \oplus c \in J_{i_2}$ y $b \oplus c \in K$ (lo mismo para $J_{i_2} \supset J_{i_1}$); si $b \in K$ y $a \leq b$ entonces $b \in J_i$ para algún i, luego $a \in J_i$ y $a \in K$; dado $b \in K$ y $a \in A$ tenemos que $b \in J_i$ para algún i, luego $ba \in J_i$ y así $ba \in K$. Ahora bien, por el lema de Zorn Σ tiene maximales. Sea P tal maximal de Σ y mostremos que es primo. Dado $z, y \notin P$ entonces $P\oplus < z >$, $P\oplus < y >$ contienen estrictamente a P y por tanto no estan en Σ. Luego existen $n, m > 0$ tal que

$$x^n \in P\oplus < z >, x^m \in P\oplus < y >$$

Luego $x^n \leq p_1 \oplus z_1$ y $x^m \leq p_2 \oplus y_1$ donde $p_1, p_2 \in P$, $z_1 \in < z >$ y $y_1 \in < y >$. Tenemos que $x^{n+m} = x^n x^m \leq (p_1 \oplus z_1)(p_2 \oplus y_1) \leq (p_1 \oplus z_1)p_2 \oplus (p_1 \oplus z_1)y_1 \leq (p_1 \oplus z_1)p_2 \oplus p_1 y_1 \oplus z_1 y_1 = p_3 \oplus z_1 y_1$ donde $p_3 \in P$ así tenemos que $x^{n+m} \in P\oplus < zy >$. Entonces $P\oplus < zy > \notin \Sigma$ y por tanto $zy \notin P$. Luego P es primo. Así tenemos un ideal primo P que contiene a I tal que $x \notin P$, entonces $x \notin \bigcap\limits_{P \supset I} P$ Esto concluye la prueba. $\square$

Corolario 3.20. *El nilradical N de un MVW-rig A es la intersección de todos los primos de A.*

Demostración. Por proposición (3.11) todos los ideales primos de A contienen al nilradical, entonces aplicando la proposición anterior se llega al resultado. $\square$

Capítulo 4

El espectro primo de un MVW-rig

En este capítulo caractarizaremos el espectro primo de un MVW-rig pasando teoremas del espectro primo de anillo conmutativos unitarios a dichas estructuras. En adelante, cuando hablemos de MVW-rig se entenderá como un MVW-rig conmunativo unitario.

4.1. Topología Co-Zariski

Proposición 4.1. *Dado A un MVW-rig y X el conjunto de todos los ideales primos de A. Para cada subconjunto E de A, $V(E)$ denota el conjunto de todos los ideales primos de A que contienen a E. Entonces:*

i) Si I es el ideal generado por E, entonces $V(E) = V(I) = V(\sqrt{I})$.

ii) $V(0) = X$, $V(u) = \emptyset$

iii) Si $\{E_k\}_{k \in K}$ es una familia de subconjuntos de A entonces

$$V(\bigcup_k E_k) = \bigcap_k V(E_k)$$

iv) $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ para ideal I, J de A.

Demostración. $i)$ $P \in V(E) \iff E \subset P \iff I \subset P \iff P \in V(I)$. Para probar la segunda igualdad, dado $P \in V(I)$ entonces $I \subset P$, por propiedad $ii)$ y $iii)$ del radical de un ideal tenemos que $\sqrt{I} \subset \sqrt{P} = P$ luego $P \in V(\sqrt{I})$. Por otro lado, dado $P \in V(\sqrt{I})$ entonces $\sqrt{I} \subset P$, pero $I \subset \sqrt{I}$, entonces $P \in V(I)$ y esto prueba que $V(I) = V(\sqrt{I})$. *ii)* $V(0) = X$ porque $0 \in P$ para cada P en X y $V(u) = \emptyset$ porque $u \notin P$ para todo P en X. *iii)* $P \in V(\bigcup_k E_k) \iff \bigcup_k E_k \subset P \iff \forall k(E_k \subset P) \iff \forall k(P \in V(E_k)) \iff P \in \bigcap_k V(E_k)$. *iv)* De la parte *i)* y de propiedades de los radicales obtenemos que $V(I \cap J) = V(\sqrt{I \cap J}) = V(\sqrt{IJ}) = V(IJ)$ para todo ideal I, J de A. Ahora probemos que $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$. Dado $P \in V(IJ)$ entonces $IJ \subset P$. Si J no está contenido en P entonces existe $b \in J \setminus P$ y como $ab \in P$ para todo $a \in I$ entonces $a \in P$ porque P es primo, luego $I \subset P$. Así, si $P \in V(IJ)$ hemos mostrado que $I \subset P$ o $J \subset P$, luego $P \in V(I) \cup V(J)$. Por otro lado, dado $P \in V(I) \cup V(J)$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$, luego $IJ \subset P$ lo cual implica que $P \in V(IJ)$. □

Proposición 4.2. *Dados I, J ideales de un MVW-rig A. Si $I \subset J$ entonces $V(J) \subset V(I)$.*

Demostración. Dado $P \in V(J)$ entonces $J \subset P$, por hipótesis $I \subset J$, luego $I \subset P$ y así $P \in V(I)$. □

Observación 4.3. En la proposición anterior, lo contrario no es cierto en general. Sólo se cumple en el caso de que J sea ideal primo, ya que dado $x \in I$ entonces $x \in P$ para todo ideal primo P que contiene a I, pero como $V(J) \subset V(I)$ entonces $x \in Q$ para todo ideal primo Q que contiene a J y en particular $x \in J$.

Proposición 4.4. *Dados a, b elementos de un MVW-rig A, entonces $V(a) \subset V(b)$ si y solo si $\sqrt{< b >} \subset \sqrt{< a >}$.*

Demostración. Dado $x \in \sqrt{< b >}$ entonces $x \in \bigcap\limits_{P \supset < b >} P$ con P ideal primo, luego $x \in P$ para todo $P \supset < b >$, en particular $x \in P$ para todo $P \supset < a >$ porque $V(a) \subset V(b)$, luego $x \in \bigcap\limits_{P \supset < a >} P$ y por tanto $x \in \sqrt{< a >}$. Por otro lado, dado $\sqrt{< b >} \subset \sqrt{< a >}$, por proposición anterior $V(\sqrt{< a >}) \subset V(\sqrt{< b >})$ entonces $V(a) = V(< a >) = V(\sqrt{< a >}) \subset V(\sqrt{< b >}) = V(< b >) = V(b)$. □

Definición 4.5. Dado un MVW-rig A, llamamos **espectro primo de** A o $Spec(A)$ al conjunto de los ideales primos de A y para cada $a \in A$ definimos:

$$V(a) = \{P \in Spec(A) : a \in P\}$$

Proposición 4.6. *La colección* $\{V(a)\}_{a\in A}$ *tiene las siguientes propiedades que caracterizan una base de un espacio topologico:*

i) $V(a) \cap V(b) = V(a \oplus b)$ *para todo* $a, b \in A$

ii) $V(0) = Spec(A)$

iii) $V(u) = \emptyset$

Demostración. *i)* $P \in V(a) \cap V(b) \Leftrightarrow a \in P$ y $b \in P \Leftrightarrow a \oplus b \in P \Leftrightarrow P \in V(a \oplus b)$. *ii)* $0 \in P$ para todo $P \in Spec(A)$. *iii)* $u \notin P$ para todo $P \in Spec(A)$. □

De lo anterior, tenemos que la colección $\{V(a)\}_{a\in A}$ forman una base para una topología, llamada la **topología de Co-Zariski**:

Definición 4.7. Dado un MVW-rig A, definimos el espacio topologico $Spec(A)$ cuyos puntos son los ideales primos de A y cuyos abiertos son las uniones arbitrarias e itersecciones finitas de los conjuntos $V(a)$ para cada $a \in A$.

Proposición 4.8. *Dado* A *un MVW-rig y* a, b *elementos de* A*, entonces:*

i) $V(a) \cup V(b) = V(ab)$

ii) $V(ab) \subset V(a \wedge b)$

iii) $V(a) \cap V(b) = V(a \vee b)$

iv) $V(a) = Spec(A)$ *si y solo si* a *es nilpotente.*

Demostración. *i)* $P \in V(a) \cup V(b) \Leftrightarrow a \in P$ o $b \in P \Leftrightarrow ab \in P$ con P ideal primo $\Leftrightarrow P \in V(ab)$. *ii)* Dado $P \in V(ab)$ entonces $a \in P$ o $b \in P$, como $a \wedge b \leq a, b$ entonces $a \wedge b \in P$, luego $P \in V(a \wedge b)$. *iii)* $P \in V(a) \cap V(b) \iff a \in P$ y $b \in P \iff a \vee b \in P \iff P \in V(a \vee b)$. *iv)* Si a es nilpontente entonces $V(a) = V(< a >) = V(< 0 >) = Spec(A)$. Por otro lado, si $V(a) = Spec(A)$ entonces $a \in P$ para todo $P \in Spec(A)$, luego a pertenece al nilradical de A. □

Proposición 4.9. *Dado* A *un MVW-rig,* $Spec(A)$ *es un espacio topológico* T_0

Demostración. Dados $P, Q \in Spec(A)$ con $P \neq Q$, entonces existe $a \in A, a \notin N$ (N el nilradical de A), tal que $a \in P$ y $a \notin Q$ o $a \notin P$ y $a \in Q$ (ya que $\bigcap_{P\in Spec(A)} P = N$, corolario 3.20), luego $P \in V(a)$ y $Q \notin V(a)$ o $P \notin V(a)$ y $Q \in V(a)$. □

Recordemos que dado X un conjunto de un espacio topológico, la clausura de X denotada por $\overline{X}$ se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a X, luego un punto x pertenece a $\overline{X}$ si y solo si para todo abierto básico B que contiene a x, $B \cap X \neq \emptyset$.

Proposición 4.10. *Dados $Q, P \in Spec(A)$ para un MVW-rig A, entonces $Q \in \overline{\{P\}}$ si y solo si $Q \subset P$.*

Demostración. Si $Q \in \overline{\{P\}}$ entonces para todo $b \in Q$ tenemos que $V(b) \cap \{P\} \neq \emptyset$, entonces $P \in V(b)$ para todo $b \in Q$ y esto implica que $b \in P$ para todo $b \in Q$, luego $Q \subset P$. Por otro lado, si $Q \subset P$, entonces para todo $b \in Q$, $P \in V(b)$, lo cual implica que $V(b) \cap \{P\} \neq \emptyset$ para todo $b \in Q$ y por tanto $Q \in \overline{\{P\}}$. □

Proposición 4.11. *Dado $Q \in Spec(A)$ para un MVW-rig A, y U un subconjunto de $Spec(A)$. Si $Q \subset P$ para algún $P \in U$ entonces $Q \in \overline{U}$*

Demostración. Si $Q \subset P$ para algún P en U, entonces para todo $b \in Q$, $P \in V(b)$, lo cual implica que $V(b) \cap U \neq \emptyset$ para todo $b \in Q$ y por lo tanto $Q \in \overline{U}$. □

Observación 4.12. Lo contrario de la proposición anterior es cierto si el conjunto U tiene un único elemento maximal.

Demostración. Si $Q \in \overline{U}$ entonces para todo $b \in Q$, $V(b) \cap U \neq \emptyset$. Dado M el elemento maximal de U, entonces $M \in V(b)$ para todo $b \in Q$ por ser M único, luego $Q \subset M$. □

Ejemplo 4.13. En $F_1[x]$, los ideales $< x^n >$ no son ideales primos para $n > 1$, ya que dados $f, g \in F_1[x]$ con $f(x) = x^s$ y $g(x) = x^{n-s}$ con $s < n$ entonces $fg \in < x^n >$ pero $f \notin < x^n >$ y $g \notin < x^n >$.

Ejemplo 4.14. En $F_1[x]$ los ideales maximales son de la forma I_z, luego $\{I_z\}$ es un abierto de $Spec(F_1[x])$ ya que el ideal I_z es generado por una función lineal f que solo se anula en z, esto es $V(f) = \{I_z\}$. Además $V(I_z) = \{I_z\}$. Como $I_{z^+} \subset I_z$ y $I_{z^-} \subset I_z$ entonces $V(I_{z^+}) = \{I_{z^+}, I_z\}$ y $V(I_{z^-}) = \{I_{z^-}, I_z\}$, pero el conjunto $\{I_{z^+}, I_z\}$ no es un abierto en $Spec(F_1[x])$, ya que el ideal I_{z^+} no es finitamente generado y por lo tanto, no es posible construir el conjunto mediante intersecciones finitas de abiertos $V(g)$ con $g \in I_{z^+}$ (tampoco mediante uniones arbitrarias ya que $\{I_{z^+}\}$ solo tiene un punto).

Los ideales primos I_z, I_{z^+}, I_{z^-} pertenecen a la clausura del conjunto abierto $\{I_z\}$, ya que por definición de clausura, un elemento $Q \in Spec(F_1[x])$ pertenece a la clausura de I_z si para todo $b \in Q$, $V(b) \cap I_z = 0$, es decir, $b \in I_z$ para todo $b \in Q$.

La clausura del conjunto $\{I_{z^+}\}$ o $\{I_{z^-}\}$ es $\overline{\{I_{z^+}\}} = \{I_{z^+}\}$ y $\overline{\{I_{z^-}\}} = \{I_{z^-}\}$ a la luz de la proposición (4.10)

Un espacio topológico X es irreducible si $X \neq \emptyset$ y la intersección de dos abiertos no vacíos es no vacía. Si Y es un subespacio irreducible de X entonces la clausura $\overline{Y}$ de Y en X es irreducible, además, cada subespacio irreducible de X está contenido en un subespacio irreducible maximal, los cuales son cerrados y cubren X. Estos últimos tambien son llamados componentes irreducibles de X.

Proposición 4.15. *Para un MVW-rig A, $Spec(A)$ es irreducible si y solo si A tiene un único ideal maximal.*

Demostración. Supongamos que A tiene al menos dos ideales maximales M_1 y M_2, entonces dado $a \in M_1, a \notin M_2$ existe $b \in M_2$ tal que $x \oplus b = 1$ con $x \in \langle a \rangle$, además $b \notin M_1$ ya que M_1 es ideal propio. Resulta que $V(x)$ y $V(b)$ son abiertos no vacíos ya que $M_1 \in V(x)$ y $M_2 \in V(b)$, luego $\emptyset = V(\langle 1 \rangle) = V(\langle x \oplus b \rangle) = V(x \oplus b) = V(x) \cap V(b)$, es decir, $V(x) \cap V(b) = \emptyset$ lo cual implica que $Spec(A)$ no es irreducible. Por otro lado, si A tiene exactamente un ideal maximal, tomemos $V(a) \neq \emptyset$ y $V(b) \neq \emptyset$, esto implica que $a \in M$ y $b \in M$, luego $M \in V(a) \cap V(b)$ y por lo tanto A es irreducible. □

Observación 4.16. Un MVW-rig A se llama **local** si tiene exactamente un ideal maximal. Recordemos que si un espacio topológico es irreducible entonces es conexo y localmente conexo. De la proposición anterior se desprende que un MVW-rig local es conexo y localmente conexo.

Proposición 4.17. *Dado A un MVW-rig, los conjuntos cerrados $\overline{\{M\}}$ donde M es un ideal maximal de A, son componentes irreducibles de $Spec(A)$*

Demostración. Dado M un ideal maximal, tomemos $a \in A$. Primero, $V(a) \cap \overline{\{M\}} \neq \emptyset$ si y solo si $a \in M$, veamos: si $V(a) \cap \overline{\{M\}} \neq \emptyset$ entonces existe $Q \in \overline{\{M\}}$ tal que $Q \in V(a)$, es decir, $Q \subset M$ con $a \in Q$ por la proposición (4.10), y esto implica que $a \in M$. Por otro lado, si $a \in M$ entonces $M \in V(a)$ y luego $V(a) \cap \overline{\{M\}} \neq \emptyset$.
Ahora, dados $V(a) \cap \overline{\{M\}}$ y $V(b) \cap \overline{\{M\}}$ no vacíos, tenemos que $a, b \in M$, luego $(V(a) \cap \overline{\{M\}}) \cap (V(b) \cap \overline{\{M\}}) = V(a \oplus b) \cap \overline{\{M\}} \neq \emptyset$ ya que $a \oplus b \in M$, así $\overline{\{M\}}$ es

irreducible.

□

Observación 4.18. Queremos saber si un conjunto cerrado es una componente irreducible de $Spec(A)$. Supongamos que hay un irreducible de la forma $\overline{U}$ para algún subconjunto U de $Spec(A)$. Se tienen varios casos:
Caso 1: Si U tiene un único ideal maximal M, entonces $\overline{U} = \overline{\{M\}}$ ya que por la proposición (4.11) y la observación (4.12) $Q \in \overline{U}$ si y solo si $Q \subset M$, y por proposición (4.10) $Q \subset M$ si y solo si $P \in \overline{\{M\}}$.
Caso 2: Si U no tiene ideales maximales pero todos sus elementos están contenidos en un único ideal maximal M entonces $\overline{U} \subset \overline{\{M\}}$ ya que dado $Q \in \overline{U}$ entonces para todo $b \in Q$, $V(b) \cap U \neq \emptyset$, luego $V(b) \cap \{M\} \neq 0$ y por tanto $Q \in \overline{\{M\}}$.
Caso 3: Si U contiene al menos dos ideales maximales M_1 y M_2, sea $a \in M_1$, $a \notin M_2$ entonces existe $b \in M_2$ tal que $x \oplus b = 1$ con $x \in \langle a \rangle$, así, $M_1 \in \overline{U} \cap V(x) \neq \emptyset$ y $M_2 \in \overline{U} \cap V(b) \neq \emptyset$, pero $(\overline{U} \cap V(x)) \cap (\overline{U} \cap V(b)) = \overline{U} \cap (V(x) \cap V(b)) = \overline{U} \cap V(\langle x \oplus b \rangle) = \overline{U} \cap V(\langle 1 \rangle) = \emptyset$, luego $\overline{U}$ no es irreducible.
En estos tres casos, $\overline{U}$ no es una componente irreducible de $Spec(A)$.

Proposición 4.19. *Dado : $\phi : A \to B$ un homomorfismo de MVW-rigs, definimos $\phi^* : Spec(B) \to Spec(A)$ tal que dado J ideal de B, $\phi^*(J) = \Big\{x \in A \mid \phi(x) \in J\Big\} = \phi^{-1}(J)$. Entonces:*

i) ϕ^* es una función continua entre espacios topológicos.

ii) Si I es un ideal de A entonces $(\phi^*)^{-1}(V(I)) = V(\phi(I))$

iii) Si ϕ es inyectivo, $\phi^*(V(b)) = V(\phi^{-1}(b))$

iv) Si ϕ es biyectivo, entonces ϕ^* es un homeomorfismo de $Spec(B)$ sobre el subconjunto $V(Ker(\phi))$ de $Spec(A)$

v) Si ϕ es inyectivo, entonces $\phi^*(Spect(B)) = Spec(A)$.

Demostración. i) Primero veamos que para $J \in Spec(B), \phi^*(J) \in Spec(A)$. $0 \in \phi^*(J)$ ya que $\phi(0) = 0 \in J$. Dado $x, y \in \phi^*(J)$ entonces $\phi(x), \phi(y) \in J$, luego $\phi(x) \oplus \phi(y) = \phi(x \oplus y) \in J$ y así $x \oplus y \in \phi^*(J)$. Dado $x \in \phi^*(J)$ y $y \leq x$, entonces $\phi(y) \leq \phi(x)$ y como $\phi(x) \in J$ entonces $\phi(y) \in J$, así $y \in \phi^*(J)$. Dado $x \in \phi^*(J)$ y $a \in A$, entonces $\phi(x) \in J$, como J es ideal entonces

$\phi(a)\phi(x) = \phi(ax) \in J$, luego $ax \in \phi^*(J)$. Para probar que es primo tomemos $xy \in \phi^*(J)$ entonces $\phi(xy) \in J$ y como J es primo entonces $\phi(x) \in J$ o $\phi(y) \in J$ luego $x \in \phi^*(J)$ o $y \in \phi^*(J)$.
Ahora probemos que ϕ^* es continua. Dado $V(a) \in Spec(A)$ demostremos que $(\phi^*)^{-1}(V(a))$ es un abierto en $Spec(B)$. $(\phi^*)^{-1}(V(a)) = \{P \in Spec(B) \mid \phi^*(P) \in V(a)\} = \{P \in Spec(B) \mid a \in \phi^*(P)\} = \{P \in Spec(B) \mid \phi(a) \in P\} = V(\phi(a)) \in Spec(B)$.

ii) Dado $P \in Spec(A)$, $P \in (\phi^*)^{-1}(V(I)) \Leftrightarrow \phi^*(P) \in V(I) \Leftrightarrow I \subset \phi^*(P) \Leftrightarrow \phi(I) \subset P \Leftrightarrow P \in V(\phi(I))$.

iii) $\phi^*(V(b)) = \{Q \in Spec(A) | Q = \phi^{-1}(P), P \in V(b)\} = \{Q \in Spec(A) | Q = \phi^{-1}(P), b \in P\} = \{Q \in Spec(A) | b \in \phi(Q)\} = \{Q \in Spec(A) | \phi^{-1}(b) \in Q\} = V(\phi^{-1}(b))$

iv) Si $Q \in Spec(B)$ entonces $Ker(\phi)$ está contenido en $\phi^*(Q)$. Si $P \in V(Ker(\phi))$ entonces $P/Ker(\phi)$ es isomorfo con un ideal Q de $Spec(B)$ bajo el isomorfismo $\bar{\phi} : A/Ker(\phi) \mapsto B$ debido a que ϕ es sobreyectivo. Así, $P = \phi^*(Q)$ y ϕ^* es sobreyectivo sobre $V(Ker(\phi))$. Ahora, si $\phi^*(P) = \phi^*(Q)$ entonces $\phi^{-1}(P) = \phi^{-1}(Q)$ y como ϕ es sobreyectiva entonces $P = Q$, lo cual muestra que ϕ^* es inyectiva. Ya habíamos mostrado la continuidad de ϕ^* en (i), solo resta mostrar que ϕ^{-1} es continua, es decir, que ϕ^* es una función abierta, pero esto se obtiene de (iii) por ser ϕ inyectiva.

v) Nótese que si ϕ es inyectiva, por (iii) tenemos $\phi^*(Spec(B)) = \phi^*(V(0)) = V(\phi^{-1}(0)) = V(Ker(\phi)) = V(0) = Spec(A)$.

□

4.2. Compacidad del espectro primo de un MVW-rig

En esta sección demostraremos que el espectro primo de un MVW-rig A es compacto, para ello se utilizarán los filtros. Definiremos el concepto de filtro de un MVW-rig y daremos algunas propiedades importantes con el fin de mostrar que cierta colección de filtros es compacta y homeomorfa al conjunto de ideales primos A. Así quedará demostrada la compacidad de $Spec(A)$.

A lo largo de esta sección, cuando hablemos de MVW-rig se entenderá que éste es conmutativo.

Primero, se presentarán algunas definiciones importantes como la de local y la de filtro de un MVW-rig (ver [21], definición 1.2.1).

Definición 4.20 (Local)**.** Un retículo completo L se llama **local** si para todo elemento $x \in L$ y cualquier familia $z_i \in L$:

$$x \wedge \bigvee_i z_i = \bigvee_i (x \wedge z_i) \tag{4.1}$$

Definición 4.21 (Filtro)**.** Dado A un MVW-rig, un subconjunto no vacío F de A es **filtro** de A si cumple las siguientes condiciones para todo $a, b \in A$:

i) Si $a \leq b$ y $a \in F$ entonces $b \in F$,

ii) Si $a, b \in F$ entonces $ab \in F$

Proposición 4.22. *Dado A un MVW-rig y $X \subset A$. Entonces el conjunto*

$$\langle X \rangle_F = \{a \in A \mid (\exists x_1, \ldots, x_n \in X), x_1 \cdots x_n \leq a\}$$

*es el **filtro generado por** X en A. $\langle X \rangle_F$ es filtro y es el filtro mas pequeño que contiene a X.*

Demostración. $\langle X \rangle_F$ es filtro por lema 1,2,4 de [21]. Para ver que $\langle X \rangle_F$ es el menor filtro que contiene a X, tomemos un filtro F de A que contenga a X y veamos que $\langle X \rangle_F \subset F$. Dado $a \in \langle X \rangle_F$ entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que $x_1 \cdots x_n \leq a$. Como F contiene a X entonces $x_1 \cdots x_n \in F$ y como F es filtro entonces $a \in F$. $\square$

A continuación definiremos una clase especial de filtros que tienen una propiedad que permitirá mostrar la compacidad del espectro primo.

Definición 4.23. Dado un MVW-rig A, definimos los **P-filtros** como los filtros F de A tales que cumplen la siguiente propiedad:
Dado $x \in A$ y $\bigoplus_i b_i x \in F$ una sumatoria finita con $b_i \in A$ para cada i, entonces $x \in F$.
El conjunto de todos los P-filtros de A se denotará por $\mathcal{F}(A)$.

Proposición 4.24. *En un P-filtro F de un MVW-rig A tenemos que $ab \in F$ implica $a \in F$ y $b \in F$.*

Demostración. Directamente de la definición de P-filtro y que A es conmutativo. $\square$

Proposición 4.25. *Para un elemento a de un MVW-rig A, tenemos que el conjunto*

$$F_a = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ y } b_1, \ldots, b_m \in A \text{ tales que } a^n \leq \bigoplus_i b_i x\} \tag{4.2}$$

es un P-filtro.

Demostración. *i)* Dado $x \leq y, x \in F_a$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $a^n \leq \bigoplus_i b_i x$, y como las operaciones conservan el orden, entonces $\bigoplus_i b_i x \leq \bigoplus_i b_i y$ y por tanto $y \in F_a$. *ii)* Dado $x, y \in F_a$, entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_{m_1}, c_1, \ldots, c_{m_2} \in A$ tales que $a^{n_1} \leq \bigoplus_i b_i x$ y $a^{n_2} \leq \bigoplus_j c_j y$ y por propiedades (2.4, *iv*) $a^{n_1+n_2} \leq (\bigoplus_i b_i x)(\bigoplus_j c_j y) \leq \bigoplus_k d_k xy$ donde d_k son productos $b_i c_j$, así que $xy \in F_a$. Ahora demostremos que F_a tiene la propiedad de P-filtro: Si $\bigoplus_j c_j x \in F_a$ para algunos $c_j \in A$ entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $a^n \leq \bigoplus_i b_i(\bigoplus_j c_j x)$, pero de nuevo por axioma (*iv*) de MVW-rigs $\bigoplus_i b_i(\bigoplus_j c_j x) \leq \bigoplus_{ij} b_i c_j x = \bigoplus_k d_k x$ donde d_k son productos $b_i c_j$ y por tanto $x \in F_a$. $\square$

Proposición 4.26. *Para un MVW-rig A y un conjunto $S \subseteq A$, definimos el P-filtro generado en $\mathcal{F}(A)$ por S como*

$$\langle S \rangle_P = \{x \in A \mid (\exists s_1, \ldots, s_n \in S), (\exists b_1, \ldots, b_m \in A) : s_1 \cdots s_n \leq \bigoplus_i b_i x\}$$

Entonces $\langle S \rangle_P$ es el P-filtro mas pequeño que contiene a S.

Demostración. Es fácil ver que $S \subset \langle S \rangle_P$ ya que $s^2 \leq s^2$ implica que $s \in \langle S \rangle_P$. Veamos que $\langle S \rangle_P$ es P-filtro: *i)* Dado $x \leq y, x \in \langle S \rangle_P$, entonces existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $s_1 \cdots s_n \leq \bigoplus_i b_i x$, y como las operaciones conservan el orden, entonces $\bigoplus_i b_i x \leq \bigoplus_i b_i y$ y por tanto $s_1 \cdots s_n \leq \bigoplus_i b_i y$, es decir, $y \in \langle S \rangle_P$. *ii)* Dado $x, y \in \langle S \rangle_P$, entonces existen $s_1, \ldots, s_{n_1}, t_1, \ldots, t_{n_2} \in S$ y $b_1, \ldots, b_{m_1}, c_1, \ldots, c_{m_2} \in A$ tales que $s_1 \cdots s_{n_1} \leq \bigoplus_i b_i x$ y $t_1 \cdots t_{n_2} \leq \bigoplus_j c_j y$, luego $s_1 \cdots s_{n_1} \cdot t_1 \cdots t_{n_2} \leq (\bigoplus_i b_i x)(\bigoplus_j c_j y) \leq \bigoplus_k d_k xy$ donde d_k son productos $b_i c_j$, así que $xy \in \langle S \rangle_P$. Ahora demostremos que $\langle S \rangle_P$ tiene la propiedad de P-filtro: Si

$\bigoplus_j c_j x \in \langle S\rangle_P$ para algunos $c_j \in A$ entonces existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $s_1 \cdots s_n \leq \bigoplus_i b_i(\bigoplus_j c_j x) \leq \bigoplus_{ij} b_i c_j x = \bigoplus_k d_k x$ y por tanto $x \in \langle S\rangle_P$. Para terminar veamos que es el menor P-filtro que contiene a S. Dado $H \in \mathcal{F}(A)$, $S \subset H$, queremos ver que $\langle S\rangle_P \subset H$. Dado $x \in \langle S\rangle_P$, existen $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $s_1 \cdots s_n \leq \bigoplus_i b_i x$ con $s_1, \ldots, s_n \in S \subset H$, luego $s_1 \cdots s_n \in H$ por ser H un filtro, entonces $\bigoplus_i b_i x \in H$ y como H tiene la propiedad de P-filtro, se tiene que $x \in H$. □

Proposición 4.27. *Todo P-filtro F de $\mathcal{F}(A)$ cumple:*

$$F = \bigcup_{a\in F} F_a$$

Demostración. Dado $x \in F$, entonces $x \in F_x \subseteq \bigcup_{a\in F} F_a$. Por otro lado, dado $y \in \bigcup_{a\in F} F_a$, entonces $y \in F_a$ para algún $a \in F$,así existen $n \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $a^n \leq \bigoplus_i b_i y$, como $a \in F$, entonces $a^n \in F$ y por tanto $\bigoplus_i b_i y \in F$, como F tiene la propiedad de P-filtro, $y \in F$. □

La unión de dos P-filtros no necesariamente es un P-filtro. La siguiente proposicion define el supremo y el ínfimo de P-filtros, los cuales son P-filtros.

Proposición 4.28. *Dado A un MVW-rig tenemos que:*

i) El P-filtro generado por la unión de dos P-filtros F_a y F_b es:

$$\langle F_a \cup F_b\rangle_P = \{x \in A \mid \text{ existen enteros } n_1, n_2 \geq 0 \text{ y } b_1, \ldots, b_m \in A : a^{n_1} b^{n_2} \leq \bigoplus_i b_i x\}$$

ii)

$$\bigvee_{a\in I} F_a = \langle \bigcup_{a\in I} F_a\rangle_P$$

iii) $F_a \cap F_b = F_{a\vee b}$,

iv) $F_a \cap F_b = F_a \wedge F_b$

v) $\langle F_a \cup F_b\rangle_P = F_a \vee F_b = F_{ab}$,

Demostración. $i)$ $\langle F_a \cup F_b\rangle_P$ es filtro: dados $x, y \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$ existen enteros $n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 0$ y elementos $b_i, c_j, \in A$ tales que $a^{n_1}b^{n_2} \leq \bigoplus_i b_i x$ y $a^{n_3}b^{n_4} \leq \bigoplus_j c_j y$, luego $a^{n_1}b^{n_2}a^{n_3}b^{n_4} = a^{n_1+n_3}b^{n_2+n_4} \leq (\bigoplus_i b_i x)(\bigoplus_j c_j y) \leq \bigoplus d_k xy$ y así $xy \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$. Dado $x \leq y$ con $x \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$ entonces existen enteros $n_1, n_2 \geq 0$ y elementos $b_i \in A$ tales que $a^{n_1}b^{n_2} \leq \bigoplus_i b_i x$, como $x \leq y$ y la suma y el producto en un MVW-rig conservan el orden tenemos que $\bigoplus_i b_i x \leq \bigoplus_i b_i y$ y por tanto $a^{n_1}b^{n_2} \leq \bigoplus_i b_i y$, es decir, $y \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$.
$\langle F_a \cup F_b\rangle_P$ es P-filtro: dado $\bigoplus_j c_j x \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$ entonces existen enteros $n_1, n_2 \geq 0$ y elementos $b_i \in A$ tales que $a^{n_1}b^{n_2} \leq \bigoplus_i b_i(\bigoplus_j c_j x) \leq \bigoplus_k d_k x$ y por tanto $x \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$.
Veamos que $F_a \cup F_b \subset \langle F_a \cup F_b\rangle_P$: dado $x \in F_a \cup F_b$ entonces $x \in F_a$ o $x \in F_b$, luego existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y $b_i, c_j \in A$ tales que $a^{n_1} \leq \bigoplus_i b_i x$ o $b^{n_2} \leq \bigoplus_j c_j x$, por tanto $a^{n_1}b^{n_2} \leq (\bigoplus_i b_i x)(\bigoplus_j c_j x) \leq \bigoplus_k d_k x$ y así $x \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$.
$\langle F_a \cup F_b\rangle_P$ es el menor P-filtro que contine a $F_a \cup F_b$: Sea H un P-filtro que contiene a $F_a \cup F_b$, dado $x \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$ existen enteros $n_1, n_2 \geq 0$ y elementos $b_i \in A$ tales que $a^{n_1}b^{n_2} \leq \bigoplus_i b_i x$, como $a^{n_1}, b^{n_2} \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$ entonces $a^{n_1}, b^{n_2} \in H$ y como H es filtro $\bigoplus_i b_i x \in H$ y así $x \in H$ por ser H un P-filtro.
$ii)$ Se obtiene al generalizar el inciso anterior.
$iii)$ Dado $x \in F_a \cap F_b$ entonces existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_{m_1}, c_1, \ldots, c_{m_2} \in A$ tal que $a^{n_1} \leq \bigoplus_i b_i x$ y $b^{n_2} \leq \bigoplus_j c_j x$, entonces $(a \vee b)^{n_1+n_2} \leq \bigoplus_k d_k x \oplus \bigoplus_l e_l x$ ya que al expandir $(a \vee b)^{n_1+n_2}$ obtenemos términos de la forma $a^s b^r$ donde $s > n_1$ o $r > n_2$, y por tanto, sin pérdida de generalidad, para $s > n_1$, $a^s b^r \leq \bigoplus_i b_i x b^r \leq \bigoplus_k d_k x$, y al expandir la expresión usamos el hecho de que $f \vee g \leq f \oplus g$, el cual es cierto para todo elemento f, g en un MVW-rig llegando a lo que queriamos probar. De esta manera $x \in F_{a\vee b}$. Por otro lado, dado $x \in F_{a\vee b}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tal que $(a \vee b)^n \leq \bigoplus_i b_i x$ y por propiedad (v) de la proposición (2.5) $a^n \vee b^n \leq \bigoplus_i b_i x$, luego $a^n \leq \bigoplus_i b_i x$ y $b^n \leq \bigoplus_i b_i x$ y así $x \in F_a \cap F_b$.
$iv)$ Claramente $F_a \cap F_b \subset F_a$ y $F_a \cap F_b \subset F_b$. Supongamos que existe un P-filtro H tal que $H \subset F_a$ y $H \subset F_b$ entonces para un $x \in H$, $x \in F_a$ y $x \in F_b$, luego $x \in F_a \cap F_b$ y esto es $H \subset F_a \cap F_b$. Además $F_a \cap F_b$ es un P-filtro por inciso anterior.
$v)$ Dado $x \in \langle F_a \cup F_b\rangle_P$ entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tal que $a^{n_1}b^{n_2} \leq \bigoplus_i b_i x$; si $n_1 \leq n_2$ entonces $a^{n_2}b^{n_2} \leq \bigoplus_i c_i x$ donde $c_i = a^{n_2-n_1}b_i$, luego $(ab)^{n_2} \leq \bigoplus_i c_i x$ y por tanto $x \in F_{ab}$. Por otro lado, dado $x \in F_{ab}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tal que $(ab)^n \leq \bigoplus_i b_i x$, esto es, $a^n b^n \leq \bigoplus_i b_i x$ y

así $x \in \langle F_a \cup F_b \rangle_P$.

$\square$

Teorema 4.29. *Dado un MVW-rig A y la colección $\mathcal{F}(A)$ de P-filtros de A, tenemos que $\mathcal{F}(A)$ es local*

Demostración. Queremos ver que $F \wedge \bigvee\limits_{a\in I} F_a = \bigvee\limits_{a\in I}(F \wedge F_a)$.
Primero, nótese que $F \cap \langle S \rangle_P = \langle F \cap S \rangle_P$ con F P-filtro y S cualquier conjunto, en efecto, dado $x \in F \cap \langle S \rangle_P$ entonces $x \in F$ y $x \in \langle S \rangle_P$, por tanto existen $f \in F, s_1, \ldots, s_n \in S, b_i, c_j \in A$ tal que $f \leq \bigoplus_i b_i x$ y $s_1 \cdots s_n \leq \bigoplus_j c_j x$, luego $f s_1 \cdots s_n \leq (\bigoplus_i b_i x)(\bigoplus_j c_j x) \leq \bigoplus_k d_k x$ y así $x \in \langle F \cap S \rangle_P$. Por otro lado, como $F \cap S \subset F, S$ entonces $\langle F \cap S \rangle_P \subset \langle F \rangle_P = F$ y $\langle F \cap S \rangle_P \subset \langle S \rangle_P$, luego $\langle F \cap S \rangle_P \subset F \wedge \langle S \rangle_P = F \cap \langle S \rangle_P$.
Ahora, si tomamos $S = \bigcup\limits_{a\in I} F_a$ y usamos el inciso (ii) de la proposición (4.28) tenemos:
$F \wedge \bigvee\limits_{a\in I} F_a = F \wedge \langle \bigcup\limits_{a\in I} F_a \rangle_P = F \cap \langle \bigcup\limits_{a\in I} F_a \rangle_P = \langle F \cap \bigcup\limits_{a\in I} F_a \rangle_P = \langle \bigcup\limits_{a\in I} (F \cap F_a) \rangle_P = \bigvee\limits_{a\in I} (F \wedge F_a)$. $\square$

Teorema 4.30. *Dado A un MVW-rig, entonces $\mathcal{F}(A)$ es compacto.*

Demostración. Dado $\bigvee\limits_{a\in I} F_a = A$ queremos ver que existe una subcolección finita de $\{F_a\}_{a\in J}$ tal que $\bigvee\limits_{a\in J} F_a = A$, J conjunto finito, $J \subset I$.
Resulta que $\bigvee\limits_{a\in I} F_a = \langle \bigcup\limits_{a\in I} F_a \rangle_P = \{x \in A \mid \exists n_j \in \mathbb{N}$, con $0 \leq j \leq k$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k} \leq \bigoplus_i b_i x\}$.
Como $0 \in A$, $0 \in \{x \in A \mid \exists n_j \in \mathbb{N}$, con $0 \leq j \leq k$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ tales que $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k} \leq \bigoplus_i b_i x\}$, entonces $0 \geq a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$,con $n_j \in \mathbb{N}$, luego $0 \in \langle \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_{a_j} \rangle_P = \bigvee\limits_{j=1}^{m} F_{a_j}$, entonces $\bigvee\limits_{j=1}^{m} F_{a_j} = A$. $\square$

Definición 4.31. Para un MVW-rig A, definimos la función de locales θ entre $\mathcal{O}(Spec(A))$ y $\mathcal{F}(A)$ como sigue:

$$\mathcal{O}(Spec(A)) \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}(A)$$
$$V(a) \longrightarrow F_a$$
$$\bigcup_{j\in J} V(a_j) \longrightarrow \bigvee_{j\in J} F_{a_j}$$

Teorema 4.32. *Para un MVW-rig A, entonces θ es un isomorfismo (θ de la definición anterior).*

Demostración. Primero, veamos que θ es homomorfismo:

- $\theta(V(a) \cup V(b)) = \theta(V(ab)) = F_{ab} = F_a \vee F_b = \theta(V(a)) \vee \theta(V(b))$.
- $\theta(V(a) \cap V(b)) = \theta(V(a \vee b)) = F_{a\vee b} = F_a \wedge F_b = \theta(V(a)) \wedge \theta(V(b))$.

θ es sobreyectivo: dado que $F \in \mathcal{F}(A)$, se tiene que $F = \langle \bigcup_{a\in F} F_a \rangle_P = \bigvee_{a\in F} F_a$ entonces $\theta(\bigcup_{a\in F} V(a)) = F$ por definición de θ.
Ahora, veamos que θ es inyectiva: dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(A)$, tales que $F_1 \neq F_2$ Sea $x \notin F_2$ y $x \in F_1$ entonces el ideal del MVW-rig A generado por x cumple que $\langle x \rangle \cap F_2 = \emptyset$, en efecto, $\langle x \rangle \cap F_2 \neq \emptyset$, implica que existe $z \in (x) \cap F_2$, y $z \leq \bigoplus_j b_i x$, como F_2 es P-filtro, $x \in F_2$, lo cuál es absurdo.

Consideremos el conjunto de ideales

$$\Sigma = \{I \mid x \in I; I \cap F_2 = \emptyset\}$$
$$(x) \in \Sigma \text{ luego } \Sigma \neq \emptyset$$

El conjunto Σ es inductivo superiormente: cualquier cadena de ideales $I_i \in \Sigma$ con el orden conjuntista dado por la contenencia, esta acotada superiormente por $\bigcup I_i \in \Sigma$. Entonces por el lema de Zorn, Σ contiene elementos maximales. Sea P un maximal de Σ,entonces $x \in P$ y $P \cap F_2 = \emptyset$. Queremos ver que P es ideal primo: sean $y, z \in A$, tales que $yz \in P$; se quiere ver que $y \in P$ ó $z \in P$. Supongamos que $y \notin P$ y $z \notin P$. Por la maximalidad de P en Σ, se sigue que:

$$\langle P \cup \{y\} \rangle \cap F_2 \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \langle P \cup \{z\} \rangle \cap F_2 \neq \emptyset$$

Consecuentemente existen $p, q \in P$, $w, w' \in F_2$ y $a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2} \in A$ tales que

$$w \leq p \oplus \bigoplus_i a_i y \qquad \text{y} \qquad w' \leq q \oplus \bigoplus_j b_j z$$

Como F_2 es filtro entonces

$$(p \oplus \bigoplus_i a_i y) \in F_2 \qquad \text{y} \qquad (q \oplus \bigoplus_j b_j z) \in F_2$$

De manera que, como el producto conserva el orden, tenemos:

$$ww' = (p \oplus \bigoplus_i a_i y)(q \oplus \bigoplus_j b_j z) \leq r \oplus \bigoplus c_i yz = r'$$

donde se usó el axioma (iii) y r es un elemento de P obtenido de las sumas y productos de los elementos $p, q \in P$ con otros elementos de A que, por propiedad absorvente de P están en P. Como $ww' \in F_2$ y F_2 es filtro $r' \in F_2$. Se sigue que $r' \in P \cap F_2$ que contradice la hipótesis $P \cap F_2 = \emptyset$; luego $y \in P$ ó $z \in P$. En consecuencia

$$\bigcup_{a \in F_1} V(a) \neq \bigcup_{b \in F_2} V(b).$$

porque $P \in \bigcup_{a \in F_1} V(a)$, debido a que $x \in F_1$, $P \in V(x)$, $P \notin \bigcup_{b \in F_2} V(b)$ debido a que $P \cap F_2 = \emptyset$ □

Corolario 4.33. *Dado A un MVW-rig, $Spec(A)$ es un espacio topológico compacto.*

Demostración. Se sigue directamente de que $\mathcal{F}(A)$ es compacto y de que $\mathcal{O}(Spec(A)) \approx_{iso} \mathcal{F}(A)$ □

Con esto se demuestra que el espectro primo dotado con la topología Co-Zariski es un espacio topológico compacto.

Capítulo 5

MVW-rigs y l_u-anillos

En este capítulo estudiaremos la relación entre cierta clase especial de MVW-rigs y l_u-anillos. Dado un MVW-rig podemos construir su l_u-anillo asociado R, tal que el funtor $\Gamma(R)$ (ver apéndice A) es un MVW-rig.

5.1. Representación subdirecta de MVW-rigs

Una propiedad importante que debe tener un l_u-anillo para que conserve la propiedad asociativa del producto al cortar por su unidad fuerte es que el producto quede bien definido entre los elementos resultantes, es decir que, dados x, y elementos positivos de un l_u-anillo menores que u entonces xy debe ser positivo y menor que u, esto es equivalente a que u cumpla la ecuación (A.1). Por esta razón, si se quiere obtener un l_u-anillo a partir de un MVW-rig, este debe tener esta propiedad, lo que lleva a definir las siguiente clase de MVW-rigs:

Definición 5.1. Un MVW-rig A se dice **especial** si para todo $a, b \in A$ se cumple que:

- $ab \leq a$ y $ab \leq b$

O equivalentemente, si:

- $ab \leq a \wedge b$

Proposición 5.2. *Dado A un MVW-rig especial y $a, b \in A$, tenemos que:*

i) $ab < u$ si $a \neq u$ ó $b \neq u$, *ii) Si* $ab = u$ *entonces* $a = u$ *y* $b = u$

Demostración. i) Como $a \neq u$ ó $b \neq u$ entonces $a < u$ ó $b < u$, luego $ab \leq a < u$ ó $ab \leq b < u$ y así, como $ab < u$. ii) Es la afirmación contrarecíproca del inciso anterior. □

Ejemplo 5.3. Los MVW-rigs dados en los ejemplos (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) y (2.12) son MVW-rigs especiales.

Por ([6], proposición 1.2.6) hay una correspondencia entre MV-ideales de una MV-álgebra A y las congruencias en A, donde un MV-ideal I determina una congruencia $\equiv_I$ dada por $x \equiv_I y$ si y solo si $(x \ominus y) \oplus (y \ominus x) \in I$. Si A es un MVW-rig, en particular, es una MV-álgebra y por tanto, se cumple las ecuaciones (1.11) y (1.12) de [6] por la proposición antes mencionada. De esta manera, podemos hacer un cociente entre un MVW-rig A y un MV-ideal I de A.

Proposición 5.4. *Dado* A *un MVW-rig especial e* I *un MV-ideal de* A*, entonces:*

a) Dados $x \in I$, $y \in A$ *entonces* $xy \in I$ *y* $yx \in I$,

b) Dado $x \equiv_I y$, $z \equiv_I w$ *entonces* $xz \equiv_I yw$,

c) A/I *es un MVW-rig especial,*

d) Si P *es un ideal MV-primo entonces* A/P *es un MVW-rig totalmente ordenado.*

Demostración. a) Como A es un MVW-rig especial, tenemos que $xy \leq x$ y $yx \leq x$ y por tanto $xy \in I$ y $yx \in I$ por ser I MV-ideal. b) Si $x \equiv_I y$ y $z \equiv_I w$ entonces $x \ominus y \in I$ y $z \ominus w \in I$. Tenemos que $xz \leq (x \vee y)(z \vee w) = ((x \ominus y) \oplus y)((z \ominus w) \oplus w)$ por definición de supremo (ecuación 1.4), usando ley distributiva (definición 2.4(iv)) tenemos $((x \ominus y) \oplus y)((z \ominus w) \oplus w) \leq (x \ominus y)((z \ominus w) \oplus w) \oplus y((z \ominus w) \oplus w) \leq (x \ominus y)(z \ominus w) \oplus (x \ominus y)w \oplus y(z \ominus w) \oplus yw$ y usando la ecuación (1.6) obtenemos que $xz \ominus yw \leq (x \ominus y)(z \ominus w) \oplus (x \ominus y)w \oplus y(x \ominus w) \in I$ por propiedad (i) de la presente proposición. Similarmente $yw \ominus xz \in I$, luego $(xz \ominus yw) \oplus (yw \ominus xz) \in I$ lo cual implica que $xz \equiv_I yw$. c) A/I es una MV-algebra debido a que A es una MV-algebra e I es un MV-ideal de MV-algebra. ii) y iii) se obtienen del inciso (ii) de la presente proposición junto con la asociatividad de A y de que $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$. iv) Como $x(y \oplus z) \leq xy \oplus xz$ entonces $[x(y \oplus z)]_I = [x]_I([y]_I \oplus [z]_I) \leq [x]_I[y]_I \oplus [x]_I[z]_I =$

$[xy \oplus xz]_I$. De manera equivalente se hace para la distribución a derecha y para v).
d) Por la proposición (1.8), para todo $x, y \in A$ se tiene que $x \ominus y \in P$ o $y \ominus x \in P$. Si $x \ominus y \in P$, entonces $[0]_P = [x \ominus y]_P = [x]_P \ominus [y]_P$. Por lo tanto $[x]_P \leq [y]_P$. Por otro lado, si $y \ominus x \in P$, entonces $[0]_P = [y \ominus x]_P = [y]_P \ominus [x]_P$. Por lo tanto $[y]_P \leq [x]_P$ y así A/P es un MVW-rig totalmente ordenado. □

Ahora podemos establecer una representación de cualquier MVW-rig especial como un subproducto de MVW-rigs totalmente ordenados:

Teorema 5.5. *Dado A un MVW-rig especial no trivial, entonces A es un subproducto directo de MVW-rigs especiales totalmente ordenados.*

Demostración. Del teorema (1.16) con los ideales MV-primos de A se obtiene el resultado. (Para la demostración del teorema (1.16) ver [6], teorema 1.3.3). □

5.2. l_u-anillos a partir de MVW-rigs

Del funtor de Chang dado en [5], lema 5 y generalizado en [9], podemos establecer un funtor de la categoría de MVW-rigs especiales $\mathcal{MW}$ a la categoría de l_u-anillos $\mathcal{LA}_u$, lo que resta de la sección lo dedicarems a ello.

Proposición 5.6. *Dado A un MVW-rig especial totalmente ordenado, entonces el conjunto*

$$A^* = \{(m, a) \mid m \in \mathbb{Z}, a \in A\}$$

con orden lexicográfico, junto con las siguientes definiciones:

$$(m+1, 0) = (m, u) \tag{5.1}$$

$$(m, a) + (n, b) = (m+n, a \oplus b) \qquad \textit{si } a \oplus b < u \tag{5.2}$$

$$(m, a) + (n, b) = (m+n+1, a \odot b) \qquad \textit{si } a \oplus b = u \tag{5.3}$$

$$-(m, a) = (-m-1, \neg a) \tag{5.4}$$

$$(m, a)(n, b) = mn(0, u^2) + m(0, bu) + n(0, au) + (0, ab) \tag{5.5}$$

es un l_u-anillo especial, donde $n(0, a)$ significa $(0, a) \oplus \cdots \oplus (0, a)$ (n veces)

Proposición 5.7. *Dado (R, u) un l_u-anillo especial, entonces el conjunto*

$$\Gamma(R, u) = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq u\}$$

es un MVW-rig especial, con las operaciones

$$x \oplus y = (x+y) \wedge u \tag{5.6}$$
$$\neg x = u - x \tag{5.7}$$
$$x \cdot y = xy \tag{5.8}$$

Demostración. $(\Gamma(R,u), \oplus)$ es una MV-álgebra ([5], lema 4). $(\Gamma(R,u), \cdot)$ es asociativa desde que $((R,u), \cdot)$ es asociativa y que el producto $xy \leq u$ para $x, y \in \Gamma(R,u)$. $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ es trivial de la ecuación (5.8) y de que se cumple en (R,u). $x \cdot (y \oplus z) = x(y \oplus z) = x((y+z) \wedge u) \leq x(y+z) \wedge xu \leq x(y+z) \wedge u = (xy + xz) \wedge u = xy \oplus xz = x \cdot y \oplus x \cdot z$. La distributiva por la izquierda es semejante. $x(y \ominus z) = x((y-z) \vee 0) \geq x(y-z) \vee x0 = x(y-z) \vee 0 = (xy - xz) \vee 0 = xy \ominus xz$. Es especial de nuevo por la ecuación (5.8) y que (R,u) es especial. □

Teorema 5.8. *Dado un MVW-rig especial totalmente ordenado A y un l_u-anillo especial totalemente ordenado (R,u), entonces $A \cong_{iso} \Gamma(A^*, u)$ y $R \cong_{iso} \Gamma(R,u)^*$.*

Demostración. Mostremos que $A \xrightarrow{i} \Gamma(A^*, u)$, $i(a) = (0,a)$, y $\Gamma(R,u)^* \xrightarrow{v} R$, $v(m,x) = mu + x$ son isomorfismos.
Por ([9], Teorema 2.1) i y v son isomorfimos como MV-álgebras y l_u-grupos respectivamente, solo basta mostrar que respetan la operación producto:

- $i(ab) = (0,ab) = (0,a)(0,b) = i(a)i(b)$.
- $v((m,x)(n,y)) = v(mn(0,u^2) + n(0,xu) + m(0,yu) + (0,xy)) = mn(v(0,u^2)) + n(v(0,xu)) + m(v(0,yu)) + v(0,xy) = mnu^2 + nxu + myu + xy = nu(mu + x) + y(mu + x) = (mu+x)(nu+y) = v(m,x)v(n,y)$.

□

Denotemos por $\mathcal{MW}_e$ y $\mathcal{LA}_u$ la categoría de MVW-rigs especiales totalmente ordenado y la categoría de l_u-anillos especiales con unidad fuerte u totalmente ordenados respecitvamente, entonces

Teorema 5.9. *Los funtores $(-)^*$ y Γ determinan una equivalencia de categorías*

$$\mathcal{MW}_e \xrightarrow{(-)^*} \mathcal{LA}_u \qquad \mathcal{LA} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{MW}_e$$

Demostración. De la prueba del teorema 2.2 de [9] se tiene una equivalencia entre la categoría de MV-algebras totalmente ordenadas y l_u-grupos con unidad fuerte donde el homomorfismo $A \xrightarrow{h} B$ en la categoría de MV-álgebras cadena define un l_u-homomorfismo $A^* \xrightarrow{h^*} B^*$, $h^*(n,a) = (n, h(a))$ en la categoría de l_u-grupos con unidad fuerte. Ahora probemos que h extendido a homomorfismo de MVW-rigs es un $l_u$homomormismo de l_u-anillos, para ello basta chequear que respeta el producto: $h^*((m,x)(n,y)) = h^*(mn(0,u^2) + m(0,yu) + n(0,xu) + (0,xy)) = h^*(mn(0,u^2)) + h^*(n(0,xu)) + h^*(m(0,yu)) + h^*(0,xy) = mnh^*(0,u^2) + nh^*(0,xu) + mh^*(0,yu) + h^*(0,xy) = mn(0,h(u^2)) + n(0,h(xu)) + m(0,h(yu)) + (0,h(xy)) = mn(0,h(u)^2) + n(0,h(x)h(u)) + m(0,h(y)h(u)) + (0,h(x)h(y)) = (m,h(x))(n,h(y)) = h^*(m,x)h^*(n,y)$ □

Con esto, concluimos que, dado un MVW-rig especial totalmente ordenado, podemos construir su l_u-anillo correspondiente y mediante el funtor Γ obtener de nuevo un MVW-rig isomorfo al primero. Queda abierta la tarea de realizar una construcción general para establecer una equivalencia de categorías entre los MVW-rigs especiales y los l_u-anillos especiales con unidad fuerte usando para ello la versión del teorema de representación de chang (5.5) y los teoremas precedentes junto con la extensión del funtor de Chang y Mundici para MV-álgebras en general.

Apéndice A

l_u-anillos a partir de MV-Algebras

A.1. Conjuntos ordenados

Sea L un conjunto parcialmente ordenado y sean x y y dos elementos de L. Un elemento z de L es el **ínfimo** de x y y si satisface las siguientes condiciones:
$i)$ $z \leq x$ y $z \leq y$.
$ii)$ Para algún $w \in L$ tal que $w \leq x$ y $w \leq y$ entonces $w \leq z$.
De la misma manera, un elemento z de L es el **supremo** de x y y si satisface las siguientes condiciones:
$i^*)$ $x \leq z$ y $x \leq z$.
$ii^*)$ Para algún $w \in L$ tal que $x \leq w$ y $y \leq w$ entonces $z \leq w$.
El conjunto L es llamado **retículo** si para para cada par de elementos, existe un ínfimo y un supremo, denotado por $x \wedge y$ y $x \vee y$ respectivamente.
Sean L y M retículos. Una función $h : L \mapsto M$ es un **l-homomorfismo** si para cada $x, y \in L$ se tiene que $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$ y $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$. Un **ideal** de un retículo L es un subconjunto $J \subset L$ no vacío que cumple con las siguientes propiedades: $i)$ Si $a \in J$, $x \in L$, $x \leq a$ entonces $x \in J$, $ii)$ Si $a \in J$, $b \in J$ entonces $a \vee b \in J$.

Un **l-grupo** G es un retículo cuyos elementos tienen estructura de grupo.
Para cada elemento x de un l-grupo G, se define la **parte positiva** y la **parte negativa** de x como $x^+ =_{def} 0 \vee x$, y $x^- =_{def} 0 \vee -x$ respectivamente. El valor **valor absoluto** de x se define como $|x| =_{def} x^+ + x^- = x \vee -x$. Un elemento u de G se llama **unidad fuerte** si $0 \leq u$ y para cada $x \in G$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq nu$. Un l_u-grupo es un l-grupo con unidad fuerte y se representa por G_u.

El funtor Γ genera una estructura a partir de un corte de G_u entre el elemento $0 \in G$ y u. Tenemos que $\Gamma(G, u) = \langle [0, u], \oplus, \neg, 0 \rangle$ donde $[0, u] =_{def} \{x \in G \mid 0 \leq x \leq u\}$, y para cada $x, y \in [0, u]$, $x \oplus y =_{def} (x + y) \wedge u$ y $\neg x =_{def} u - x$. $\Gamma(G, u)$ es una MV-álgebra, De manera que se puede construir una MV-álgebra asociada a un l_u-grupo G. Por otro lado, es posible construir un l_u-grupo asociado a una MV-álgebra A mediante el funtor $(-)^*$ [9].

Sean G y H l-grupos. Una función $h : G \mapsto H$ es un **homomorfismo de l_u-grupos** si para cada $x, y \in G$ se tiene que $h(x + y) = h(x) + h(y)$, $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$ y $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$, es decir, h es un homomorfismo de grupos y un l-homomorfismo. Un **l-ideal** de un l-grupo G es un subgrupo normal J de G tal que, si $x \in J$ y $|y| \leq |x|$ entonces $y \in J$. Un l-ideal J de un l-grupo G se llama **primo** si $J \neq G$ y el l-grupo cociente G/J es totalmente ordenado.

A.2. El l_u-grupo $Free_1^*$

En [9] podemos ver que cualquier MV-álgebra A se puede extender a un l-grupo A^* mediante el funtor $(-)^*$. De esta manera, la MV-álgebra libre con un generador $Free_1$ se puede ver como el l_u-grupo $Free_1^*$ donde $Free_1^*$ es isomorfo a F, donde $F = \{f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ continuas tales que para todo f existen $P_1, \ldots, P_k$ polinomios lineales $f(x) = P_i(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ y para algún $i = 1, \ldots, k.$ $\}$

F tiene la operación $+$ dada por

$$(g + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ para } x \in [0, 1] \text{ con } f, g \in F$$

Vamos ahora a dotar a F de un producto, entonces lo definimos como

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ para } x \in [0, 1]$$

Pero el producto $f \cdot g$ no pertence a F ya que el producto de dos funciones lineales no es lineal, entonces definimos la cerradura de F bajo la operación $\cdot$ como

$$\dot{F} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{s} f_k \right)_i \text{ tales que } f_k \in F \right\}$$

Las funciones en $\dot{F}$ son continuas ya que el producto y suma de funciones continuas es una función continua.

De ahora en adelante el producto $\cdot$ entre dos funciones f y g se escribirá como fg entendiendose que se trata de la operación $f \cdot g$.

Proposición A.1. *$\dot{F}$ es un anillo conmutativo con unidad*

Demostración. $(F, +)$ es un grupo abeliano porque es cerrado, asociativo, conmutativo, el elemento neutro es la función $\hat{0}$ y $-f$ es el inverso de f, $(f, \cdot)$ es cerrado y asociativo, y además, es distributivo a derecha e izquierda ya que $(f(g+h))(x) = f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x) = (fg)(x)+(fh)(x)$ por ser f, g y h funciones con valores reales, la distributiva a derecha es semejante. Es conmutativo porque $(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$ y tiene unidad igual a la función $\hat{1}$ definida como $\hat{1}(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ ya que $(\hat{1}f)(x) = \hat{1}(x)f(x) = f(x) = f(x)\hat{1}(x) = (f\hat{1})(x)$ para todo $x \in [0,1]$ y todo $f \in \dot{F}$. □

A.3. l_u-anillos

Definición A.2. Un l-anillo es un anillo R que cumple los siguientes axiomas:
i) $x \geq y$ implica $a + x \geq a + y$ para todo $a \in R$
ii) $x \geq 0$ y $y \geq 0$ implica $xy \geq 0$ en R
iii) R es un retículo bajo la relación $\geq$.

Consideremos $\dot{F}[x]$ el l_u anillo generado por $\dot{F}$ al cerrar a $\dot{F}$ bajo ínfimos y supremos, de esta manera obtenemos un l_u-anillo proveniente de $Free_1$.

Proposición A.3. *$\dot{F}[x]$ es un l_u-anillo.*

Demostración. Ver prueba en [20]. □

Resulta que $\dot{F}[x]$ tiene divisores de cero, ya que por ejemplo, las funciones f y g dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ P_1(x) & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} P_2(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

donde P_1 y P_2 son polinomios de McNaughton, son distintas de la función cero, pero $(fg)(x) = \hat{0}$. Esto sugiere que en $\dot{F}[x]$ no existen leyes de cancelación.

Definición A.4. Un L-ideal de un l-anillo R L es un subconjunto no vacío $J \subset R$ tal que: $i)$ Si $x \in J$, $y \in L$ entonces $x + y \in J$ y $x - y \in J$,
$ii)$ Si $x \in J$, $|t| \leq |x|$ entonces $t \in J$,
$iii)$ Si $x \in J$, $a \in R$ entonces $ax \in J$ y $xa \in J$.

Los dos primeros axiomas establecen que J es un l-ideal del l-grupo R y el último axioma establece la propiedad absorvente respecto al producto.
Con el fin de observar la diferencia en las definiciones de ideal como retículo, l-ideal de un l-grupo y L-ideal de un l-anillo y ver que no necesaramente existe una relación de contenencia entre las dos primeras se darán a continuación algunos ejemplos.

Si J es un l-ideal de un l-grupo G, no necesaramente es un ideal de G como retículo

Ejemplo A.5. Sea $G = \mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ el l-grupo de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ y $J = \{f \in G | f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b] \subset [0, 1]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Podemos ver facilmente que J es un l-ideal, pero J no es ideal en el retículo $(G, \leq)$ ya que podemos encontrar un $g \in G$ tal que $g \leq f \in J$ y $g \notin J$

Si J es un ideal de un retículo G, no necesaramente J es un l-ideal del l-grupo G.

Ejemplo A.6. Del ejemplo anterior, $(G, \leq)$ como retículo tiene a $J = \{f \in G | f(x) \leq c$ para todo $x \in [a, b] \subset [0, 1]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$ y para algún $c \in \mathbb{R}^+\}$ como ideal de retículo, pero no es l-ideal de $(G, \leq, +)$ ya que podemos encontrar un $f \in J$ tal que $nf(x) > c$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y entonces no es subgrupo.

El conjunto G definido en los ejemplos anteriores se puede extender a un l-anillo con la operación producto definida como el producto de funciones, la cual cumple con los axiomas de l-anillo. Un ejemplo de L-ideal de $(G, \leq, +, \cdot)$ se puede definir como el subconjunto J de G tal que:

$$J = \{f \in G | f(x) = 0 \text{ para todo } x \in [a, b] \subset [0, 1] \text{ con } 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Ahora volvamos al conjunto $\dot{F}[x]$.

Ejemplo A.7. El subconjunto J de $\dot{F}[x]$ definido como $J = \{f \in \dot{F}[x] | f(z) = 0$ para todo $z \in [a, b] \subset [0, 1]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1\}$ es un L-ideal de $\dot{F}[x]$. Veamos:

i) Si $f, g \in J$ entonces $f(z) = 0$ y $g(z) = 0$ con $z \in [a, b]$, luego $f(z) \pm g(z) = 0$, por lo tanto $f \pm g \in J$ *ii)* Si $f \in J$ y $|g| \leq |f|$ entonces para todo $z \in [a, b]$, $|g(z)| \leq |f(z)| = 0$, por lo tanto $g(z) = 0$ para todo $z \in [a, b]$ lo cual implica que $g \in J$. *iii)* Si $f \in J$ y $g \in \dot{F}[x]$ entonces $(gf)(z) = g(z)f(z) = g(z)0 = 0 = 0g(z) = f(z)g(z) = (fg)(z)$ para todo $z \in [a, b]$. Luego $gf \in J$ y $fg \in J$.

Ahora caracterizaremos los L-ideales del l-anillo $\dot{F}[x]$.
Primero, veamos lo siguiente:

1. Conviene hacernos la pregunta ¿Existe un $f \in \dot{F}[x]$ tal que $f(1/2) = 1/3$? Recordemos que para algún $x \in [0, 1]$ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, \ldots n$. Luego $f(1/2) = a_0 + a_1/2 + a_2/4 + \cdots + a_n/2^n$. La pregunta ahora se convierte en ¿Existen enteros $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tales que $a_0 + a_1/2 + a_2/4 + \cdots + a_n/2^n = 1/3$? La respuesta evidentemente es no, puesto que es necesario que la serie sea infinita.

2. Si α es un número irracional, no existe $f \in \dot{F}$ tal que $f(x) = \alpha$ con x racional. Puesto que no existen enteros $a_0, \ldots, a_n$ ni un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ sea irracional.

3. Para un $z \in [0, 1]$, el conjunto

$$I_{z^+} = \{f \in \dot{F}[x] \mid f([z, \epsilon_f]) = 0 \text{ para un } \epsilon_f > z \in [0, 1)\}$$

   es un L-ideal de $\dot{F}[x]$. Veamos:
   i) Si $f \in I_{z^+}$ y $g \in I_{z^+}$ entonces $f([z, \epsilon_f]) = 0$ y $g([z, \epsilon_f]) = 0$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_f, \epsilon_g\}$, luego $f([z, \epsilon]) = 0$ y $g([z, \epsilon]) = 0$, y así $(f \pm g)([z, \epsilon]) = 0$ entonces $f \pm g \in I_{z^+}$. *ii)* Si $f \in I_{z^+}$ y $|g| \leq |f|$ entonces $f([z, \epsilon_f]) = 0$ y $|g([z, \epsilon_f])| \leq 0$, luego $g([z, \epsilon_f]) = 0$ lo cual implica que $g \in I_{z^+}$. *iii)* Si $f \in I_{z^+}$ y $g \in \dot{F}[x]$ entonces $(fg)([z, \epsilon_f]) = f([z, \epsilon_f])g([z, \epsilon_f]) = 0 = g([z, \epsilon_f])f([z, \epsilon_f]) = (gf)([z, \epsilon_f])$, luego $fg \in I_{z^+}$ y $gf \in I_{z^+}$.

4. De manera equivalente, el conjunto $I_{z^-} = \{f \in \dot{F}[x] \mid f([\epsilon_f, z]) = 0 \text{ para un } \epsilon_f < z \in (0, 1]\}$ es un ideal de $\dot{F}[x]$.

Resulta que $\dot{F}[x]$ es un l_u-anillo con unidad fuerte. La unidad fuerte u de $\dot{F}[x]$ es la función $\hat{1}$ definida como $\hat{f}(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Ahora definamos el funtor

Γ como

$$\Gamma(\dot{F}[x], u) = \{f \in \dot{F}[x] \mid \hat{0} \leq f \leq u\}$$

Chang probó en [5] que $\Gamma(G, u)$ es una MV-Álgebra donde G es un l-grupo con unidad fuerte u. Nuestro objetivo será establecer una caracterización de la estructura algebraica del conjunto $\Gamma(\dot{F}[x], u)$.

Proposición A.8. *Si $a \wedge b \leq x \leq a \vee b$ entonces $|x| \leq |a| + |b|$*

Demostración. $|x| = x \vee -x \leq (a \vee b) \vee -(a \wedge b) = a \vee b \vee -b \vee -a = |a| \vee |b| \leq |a| + |b|$ □

Proposición A.9. *Si $f \in J$ donde J es un L-ideal de $\dot{F}[x]$ entonces $(f \vee \hat{0}) \wedge u \in J$*

Demostración. Se sabe que $f \in J$ y que $f^+ = f \vee \hat{0}$. Como $f \wedge \hat{0} \leq f^+ \leq f \vee \hat{0}$ entonces por proposición anterior $|f^+| \leq |f|$ y como J es ideal entonces $f^+ \in J$, es decir, $f \vee \hat{0} \in J$. Ahora bien, como $u \geq \hat{0}$ entonces $(f \vee \hat{0}) \wedge \hat{0} \leq (f \vee \hat{0}) \wedge u \leq f \vee \hat{0} = (f \vee \hat{0}) \vee \hat{0}$ y usando la proposición anterior tenemos que $\left|(f \vee \hat{0}) \wedge u\right| \leq \left|f \vee \hat{0}\right|$ y como $f \vee \hat{0} \in J$ y J es ideal entonces $(f \vee \hat{0}) \wedge u \in J$ □

Como $\dot{F}[x]$ es un l-anillo con unidad fuerte, en particular, es un l-grupo con unidad fuerte, entonces el conjunto $\Gamma(\dot{F}[x], u)$ es un MV-álgebra con la operación suma heredada de la suma en $\dot{F}[x]$. Sea J un subconjunto de $\dot{F}[x]$, entonces $\Gamma(J) = \{f \in J | \hat{0} \leq f \leq u\}$.

Proposición A.10. *Si J es un l-ideal de $\dot{F}[x]$ entonces $\Gamma(J)$ es un ideal de la MV-álgebra $\Gamma(\dot{F}[x])$*

Demostración. Verifiquemos que cumple los axiomas de ideal de una MV-álgebra. *i)* Como $\left|\hat{0}\right| \leq |f|$ para todo $f \in J$ entonces $\hat{0} \in J$. *ii)* Sea $f \in \Gamma(J)$ y $g \in \Gamma(\dot{F}[x])$ con $g \leq f$, luego $0 \leq f, g \leq u$ y por tanto $|f| = f$ y $|g| = g$, luego $|g| \leq |f|$ y como $f \in J$ entonces $g \in J$, por tanto $g \in \Gamma(J)$. *iii)* Si $f, g \in \Gamma(J)$ entonces $f, g \in J$ como J es l-ideal $f + g \in J$. Por proposición anterior $(f + g) \vee \hat{0} \wedge u \in J$ y como $f \oplus g = (f + g) \vee \hat{0} \wedge u$ entonces $f \oplus g \in \Gamma(J)$. □

Proposición A.11. *Si I es un ideal de $Free_1$, entonces I^* es un l-ideal de $Free_1^*$*

Proposición A.12. *Si $f, g \in \dot{F}[x]$ entonces $f \vee g$ y $f \wedge g$ son funciones continuas.*

Corolario A.13. *Si $f \in \dot{F}[x]$ entonces $(f \vee 0) \wedge u$ es continua.*

Proposición A.14. *Si $f, g \in \dot{F}[x]$ entonces $f \vee g \in J$ con J l-ideal de $\dot{F}[x]$.*

Demostración. Como $f \vee g \leq f + g$ y $f + g \in J$ por ser J un l-ideal entonces $f \vee g \in J$. $\square$

A.4. MV-álgebras con producto

Teniendo en cuenta las propiedades que tienen los l_u-anillos provenientes de la cerradura bajo operaciones de producto, ínfimos y supremos de los l_u-grupos asociados a las MV-algebras podemos establecer una definición de lo que se quiere llamar producto en una MV-álgebra. Este producto debe tener ciertas propiedades estructurales importantes que permitan establecer un funtor entre l_u-anillos y MV-álgebras con producto. En la sección precedente, se han dado algunas propiedades que hereda la MV-álgebra $Free_1$ para mostrar al lector con un ejemplo concreto lo que sucede con las propiedades. Consideramos que $free_1$ es un buen ejemplo para hacer un análisis rápido ya que ellas son la representación de las MV-algebras con un generador.

El producto en una MV-álgebra será el heredado del producto de $\dot{F}$ al obtener la MV-álgebra $\Gamma(\dot{F})$. De esta manera el producto de dos elementos a y b en una MV-álgebra $\dot{A}$ se define como:

$$a \cdot b = (ab) \wedge u$$

donde $a \cdot b$ es el producto en la MV-álgebra y ab es el producto en el l-anillo.

Para que el producto sea asociativo al aplicar el funtor Γ es necesario una propiedad importante, y es que los productos en el l_u-anillo no sobrepasen la unidad fuerte u, ya que se pierde información y la asociatividad falla. Por tanto tenemos que elegir una buena unidad fuerte para regresar a la MV-algebra, esta propiedad se mantiene cuando la unidad fuerte u cumple que

$$uu \leq u \tag{A.1}$$

Con esta condición podemos obtener otras propiedades importantes que ayudarán a caracterizar un producto en MV-álgebras.

Proposición A.15. *Algunas propiedades del producto en una MV-álgebra A son:*

i) $a \cdot u \leq u$ *para todo* $a \in \dot{A}$ *y* u *unidad fuerte de* $\dot{A}$.

ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *para todo* $a, b, c \in \dot{A}$.

iii) $a \cdot (b \oplus c) \leq a \cdot b \oplus a \cdot c$ *para todo* $a, b, c \in \dot{A}$.

iv) $a \cdot (b \ominus c) \geq a \cdot b \ominus a \cdot c$ *para todo* $a, b, c \in \dot{A}$.

v) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ *para todo* $a \in \dot{A}$.

vi) *Sean* $x, y \in \dot{A}$. *Si* $x \leq y$ *y* $z \in \dot{A}$ *entonces* $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Demostración. *i)* Se obtiene de la condición de que $uu \leq u$. *ii)* $(a \cdot b) \cdot c = (ab \wedge u)c \wedge u = abc = a(bc \wedge u) \wedge u$ ya que $uu \leq u$. *iii)* $a \cdot (b \oplus c) = a(b \oplus c) = a((b + c) \wedge u) \leq a(b+c) \wedge au \leq a(b+c) \wedge u = (ab+ac) \wedge u = ab \oplus ac = a \cdot b \oplus a \cdot c$. La distributiva por la izquierda es semejante. *iv)* $a(b \ominus c) = a((b-c) \vee 0) \geq a(b-c) \vee a0 = a(b-c) \vee 0 = (ab - ac) \vee 0 = ab \ominus ac$. *v)* $a \cdot 0 = u \wedge a0 = u \wedge 0 = 0 = u \wedge 0 = u \wedge 0a = 0 \cdot a$. *vi)* $x \cdot z = u \wedge xz \leq u \wedge yz = y \cdot z$. □

Estas propiedades sirven de soporte para dar una buena definición de producto para MV-álgebras.

Otros autores han definido MV-álgebras con producto desde una perpectiva un poco diferente a la nuestra, por ejemplo, Montagna [14] define PMV-álgebra como un álgebra $\langle A, \oplus, \neg, \cdot, 0, 1 \rangle$ tal que:

$\langle A, \oplus, \neg, 0, 1 \rangle$ es una MV-álgebra.

$\langle A, \cdot, 1 \rangle$ es un monoide conmutativo.

$x \cdot (y \ominus z) = (x \cdot y) \ominus (x \cdot z)$ para todo $x, y, z \in A$.

estableciendo una equivalencia de categorías entre las PMV-álgebras y los f-anillos conmutativos unitarios con unidad fuerte u tal que $u \cdot u \leq u$.

Di Nola [7] también definió una MV-álgebra con producto como el álgebra $\langle M, \oplus, \odot, *, \cdot, 0, 1 \rangle$ el cual es distributivo con la suma si esta está definida en M, es decir, si $a \oplus b \leq 0^*$, es asociativa con el producto, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ para todo $a \in M$ y el producto respeta el orden.

Sin embargo, a diferencia de otros trabajos en la literatura de MV-álgebras, en el presente trabajo se desarrollan resultados del álgebra conmutativa aplicados a las MV-álgebras con producto, aspecto que no se ha tratado en las diversas teorías que se tienen acerca del producto en MV-álgebras.

Bibliografía

[1] Atiyah, M.F., Macdonald, I.G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in mathematics, 1969.

[2] Busaniche, M., Mundici, D. *Geometry of Robinson consistency in Lukasiewicz logic*, Annals of pure and Applied Logic, 147, 2007.

[3] Castiglioni, J., Menni, M., y Zuluaga, W. *A representation theorem for integral rigs and its applications to residuated lattices*. Journal of Pure and Applied Algebra. Volume 220 issue 10, 2016, p. 3533-3566.

[4] Chang, C.C. *Algebraic analysis of many-valued logics*. Transactions of the American Mathematical Society. **88** 1958, p. 467–490.

[5] Chang, C.C. *A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms*. Transactions of the American Mathematical Society. **93** 1959, p. 74–90.

[6] Cignoli, R.L, D'ottaviano, I.M.L y Mundici, D. *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*. Klumer Academic Publishers, Dordrecht. 2000.

[7] Di Nola, A., Flondor, P. y Leustean, I. *MV-modules*. Journal of Algebra. Volume 267, Issue 1, 2003, p 21-40.

[8] Dubuc, E.J., Poveda, Y.A. *Representation Theory of MV-algebras*, Annals of pure and applied logic, 161, 2010.

[9] Dubuc, E.J., Poveda, Y.A. *On the equivalence between MV-Algebras and l-groups whit strong unit*, Studia logica/Springer, 2015.

[10] Fuchs, L. *Partially Ordered Algebraic Systems*. Pergamon, Oxford/ London/ New York/ Paris. 1963

[11] Fulton, W. *Algebraic curves*, W. A. Bejamin, New York, 1969.

[12] López, J.H. *Algunas propiedades del espectro primo en MV-álgebras*. Pereira. Colombia. 2012.

[13] Mac Lane, S., Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic. A Firts Introduction to Topos Theory*, Springer Verlag, New York 1992.

[14] Montagna, F. *Subreducts of MV -algebras with product and product residuation.* Algebra Universalis. April 2005, Volume 53, Issue 1, pp 109–137.

[15] Mundici, D. *Interpretation of AF C^*-algebras in Lukasiewicz setential calculus*, Journal of Functional Analysis 65:15-63, 1986

[16] Mundici, D. *Mapping abelian l-groups with strong unit one-one into MV-algebras*, Journal of Algebra, Vol 98, 76-81, 1986.

[17] Mundici, D. *Tensor Products and the Loomis-Sikorski Theorem for MV-Algebras*. Advances in Applied Mathematics. Volume 22, Issue 2, 1999, p 227-248.

[18] Osorio, F.C. *Una introducción a las MV-álgebras*, tesis de pregrado, Universidad Tecnológica de Pereria, 2011.

[19] Poveda, Y.A. *Una Teoría General de Representación Para MV-álgebras*. Tesis de doctorado, Universidad de Buenos Aires, Argentina. 2007.

[20] Zuluaga, S. *Los MVW-rigs provenientes de las MV-álgebras libres*. Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira. Por publicar.

[21] Zuluaga, W.J. *Representación por Haces de riRigs*. Tesis de doctorado, Universidad Nacional de la Plata. Argentina, 2016.