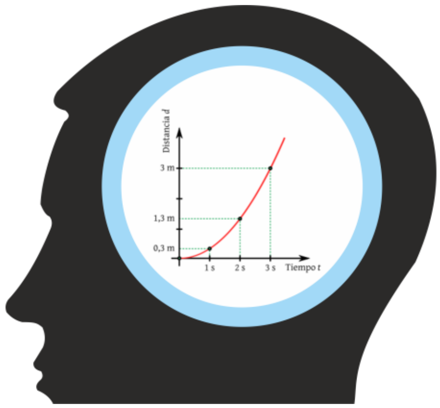
APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE UN PROCESO DE MODELACIÓN DE FENÓMENOS EN CONTEXTO, MEDIANTE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA



MILTON CÉSAR CAMPEÓN BECERRA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

PEREIRA

2016

APRENDIZAJE DEL **CONCEPTO DE FUNCIÓN** A PARTIR DE UN **PROCESO DE MODELACIÓN DE FENÓMENOS EN CONTEXTO,** MEDIANTE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA.

MILTON CÉSAR CAMPEÓN BECERRA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en Enseñanza de la Matemática.

Trabajo de grado.

Director
Phd ELIÉCER ALDANA BERMÚDEZ
.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
PEREIRA
2016

DEDICATORIA.

Dedico este trabajo en primer lugar a Dios, por haberme dado la capacidad de ver en las matemáticas una oportunidad para crecer y no un obstáculo insalvable.

A mis padres por su sacrificio para brindarme la educación básica y alentarme en los caminos de la educación superior.

A mi sobrina, por regalarme esa sonrisa sincera e inocente en los momentos cuando más la necesite.

A mis estudiantes pasados presentes y futuros, pues todo este esfuerzo es con el fin de ser cada día un mejor docente para ellos.

A ella.

AGRADECIMIENTOS.

A mi asesor de trabajo de grado el Doctor Eliécer Aldana Bermúdez por compartir su experiencia fruto del estudio acucioso y compromiso férreo con la academia, por las orientaciones precisas y oportunas y especialmente por exigir un trabajo de calidad digno de un magister.

A los profesores de la maestría en enseñanza de la matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, por quitarme la venda de los ojos y permitirme dimensionar ese universo tan basto que es la matemática, por todo lo que pude aprender de ellos, incluso lo que no se debe hacer.

Al doctor Jhony Alexander Villa Ochoa de la universidad de Antioquia por su invaluable asesoría en lo concerniente a la modelación de situaciones.

A la gobernación de Risaralda por financiar mis estudios.

Universidad Tecnológica de Pereira

El *Dr. Eliécer Aldana Bermúdez*, profesor de Didáctica de la Matemática de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad Tecnológica de Pereira.

CERTIFICA

Que la presente memoria titulada *"Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica",* ha sido realizada bajo su dirección por *Don. Milton César Campeón Becerra* y constituye su trabajo de grado para optar el título de Magister en Enseñanza de la Matemática.

Y para que tenga los efectos oportunos ante la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, en el mes de noviembre de dos mil diez y seis (2016).

Fdo. Eliécer Aldana Bermúdez
Director trabajo de grado

RESUMEN.

El presente trabajo de investigación trata de dar cuenta acerca de cómo aprenden el concepto de función a partir de la modelación de situaciones relacionadas con el contexto con un grupo de 35 estudiantes de grado octavo de un colegio público del municipio de Quinchía Risaralda.

Esta investigación de carácter cualitativo se encuentra enmarcada en la teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau en la década de los 80 como contribución al campo de la didáctica de la matemática francesa. Por tal razón, la metodología de investigación empleada fue la ingeniería didáctica a través de sus cuatro fases, las cuales se resumen a continuación.

Fase 1 Análisis preliminares:

En esta fase primera fase comprende el análisis histórico epistemológico, el cognitivo y el didáctico del concepto de función.

Inicialmente se realiza un recorrido histórico y epistemológico del concepto de función desde que el hombre comenzó a tomar conciencia de la noción de cantidad y se vio obligado a llevar registro de sus posesiones, ya fuera con un guijarro, en una bolsa o una marca en una tabla de arcilla, hasta las definiciones elaboradas del grupo Bourbaki, Dirichlet, Lacasta y otros en el siglo XX.

Con el análisis cognitivo se determina como han aprendido los estudiantes el concepto de función, para lo cual se planteó una tarea de modelación de una situación del contexto a un grupo de 10 estudiantes de grado undécimo que ya estudiaron todo lo relacionado con el término.

El análisis didáctico da cuenta acerca de cómo han enseñado los docentes el concepto de función, los objetos matemático que privilegian, la metodología empleada y cómo influyen los libros de texto en el proceso de transposición didáctica para la enseñanza de este concepto.

Fase 2 Análisis a priori.

En esta fase se le propone a los 35 estudiantes de grado octavo que desarrollen una situación a didáctica relacionada con su contexto, la cual puede ser modelada por una función lineal, para conocer las principales dificultades asociadas al concepto de función previo a la enseñanza de éste.

Fase 3 Experimentación.

Aquí se desarrollan y analizan tres situaciones didácticas en las cuales a través de la modelación de situaciones relacionadas con el contexto de los estudiantes desarrollan el concepto de función.

Una vez desarrolladas las tres situaciones didácticas planteadas se aplica nuevamente la situación didáctica, con el fin de confrontar los resultados obtenidos con los de la fase 2.

Fase 4 Confrontación

En esta fase se confrontan los resultados obtenidos previo a la realización de las situaciones didácticas en la fase 2, con los resultados obtenidos posteriores al desarrollo de estas en la fase 3.

Finalmente se presentan las conclusiones a las que se llegó luego de haber realizado todo el proceso de investigación y desarrollado las 4 fases de la ingeniería didáctica, cabe mencionar que dichas conclusiones se encuentran claramente relacionadas con cada uno de los objetivos específicos propuestos.

En este documento se ofrece un recorrido a través de cinco capítulos, los cuales organizan la estructura conceptual, teórica y metodológica empleada en la planeación y ejecución y análisis de este proceso investigativo. Los capítulos a saber son los que a continuación se mencionan:

- Planteamiento del problema.
- Marco teórico.
- Marco metodológico.
- Resultados.
- Conclusiones.

Contenido

Lista de imágenes.

LISTA DE TABLAS

LISTA DE DIAGRAMAS

1. TÍTULO

Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica.

2. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se ofrece un análisis de las principales dificultades asociadas no solo al aprendizaje, sino también a la enseñanza del concepto de función. A pesar de que dichas dificultades son muchas y de diversa índole, este trabajo se ha enfocado en las siguientes:

- Dificultades asociadas a los diferentes sistemas de representación del concepto de función.
- En el abordaje del concepto de función se prioriza la realización mecánica de procedimientos y algoritmos sobre el desarrollo conceptual.
- Subvaloración de la importancia del concepto de función, desconociendo su trascendencia para el desarrollo de estructuras matemáticas más complejas.
- La modelación matemática de situaciones aún se encuentra en sus ciernes a pesar de estar incluida en los lineamientos curriculares desde 1998.
- Bajos desempeños en matemáticas de los estudiantes colombianos en las pruebas PISA y SABER
- La forma como se aborda el concepto de función en los textos de bachillerato.

Cuando se le pregunta a una persona sobre lo que considera que es ser competente en matemáticas, muchos lo asocian con la habilidad de estimar cálculos y realizar operaciones con facilidad, lo cual reduce el quehacer matemático a una práctica algorítmica, dejando de lado los conceptos asociados a los objetos matemáticos.

Thompson (1992) citado por Villanova, y otros, (s.f) señalan que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos, los términos geométricos y los teoremas; por lo tanto saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido.

Esta visión se ve reflejada en los resultados de pruebas como PISA, de la OCDE y SABER; en las cuales los estudiantes colombianos consistentemente obtienen bajos desempeños, gracias en gran medida a que en la escuela se prioriza la realización mecánica de procedimientos y algoritmos, por encima de la comprensión de los conceptos, es decir los estudiantes saben realizar operaciones, pero no comprenden muy bien cuando usarlas.

Uno de los conceptos matemáticos que más ha sufrido este fenómeno de logaritmación ejercitada por llamarlo de algún modo, ha sido el de función, término que debe ser tema de análisis obligado, ya que la adecuada comprensión de éste es fundamental para el estudio de estructuras matemáticas más complejas.

Frente a esta situación Dorado & Díaz (2014) proponen una reflexión en cuanto a la importancia que reviste el concepto de función en el currículo de matemáticas, debido a que es fundamental para adquirir otros conocimientos, incluso en otras disciplinas. Sin embargo, en muchas instituciones este concepto se limita a ser representado a través de una fórmula, una tabla o una gráfica, sin articulación entre los diferentes registros, y por lo tanto no representa aprendizajes significativos para el estudiante.

En relación con lo anterior González Martín & Camacho (2005), citado por Peña & Aldana (2013) señalan que *“algunas dificultades asociadas al concepto de función pueden deberse a la gran variedad de representaciones que éste tiene (gráfica, diagrama de flechas, fórmula, tabla, descripción verbal...) y las relaciones entre ellas”* (p.151).

2.1 Dificultades asociadas a los sistemas de representación.

La causa de estas dificultades puede estar asociada a que en el estudio del concepto de función es necesario integrar los diferentes tipos de representación que esta posee, como lo menciona Duval (1994) citado por Quiroga García (2004), haciendo alusión en cuanto a que al igual que con otros conceptos matemáticos, en la práctica docente el concepto de función implica la necesidad de emplear distintas representaciones para que el estudiante pueda captar y dominar en toda su complejidad el concepto. Sin embargo y tal como lo mencionan Peña & Aldana (2013) “*el hecho de visualizar e integrar diferentes representaciones de un concepto no es algo que el estudiante realice automáticamente, sino que debe ser enseñado explícitamente”* (p.151).

Por ejemplo, cuando se le propuso a un estudiante de grado undécimo a punto de finalizar su bachillerato, una tarea que consistía en identificar ¿cuáles de varios diagramas sagitales eran funciones y cuáles no?, a ello respondió lo siguiente:

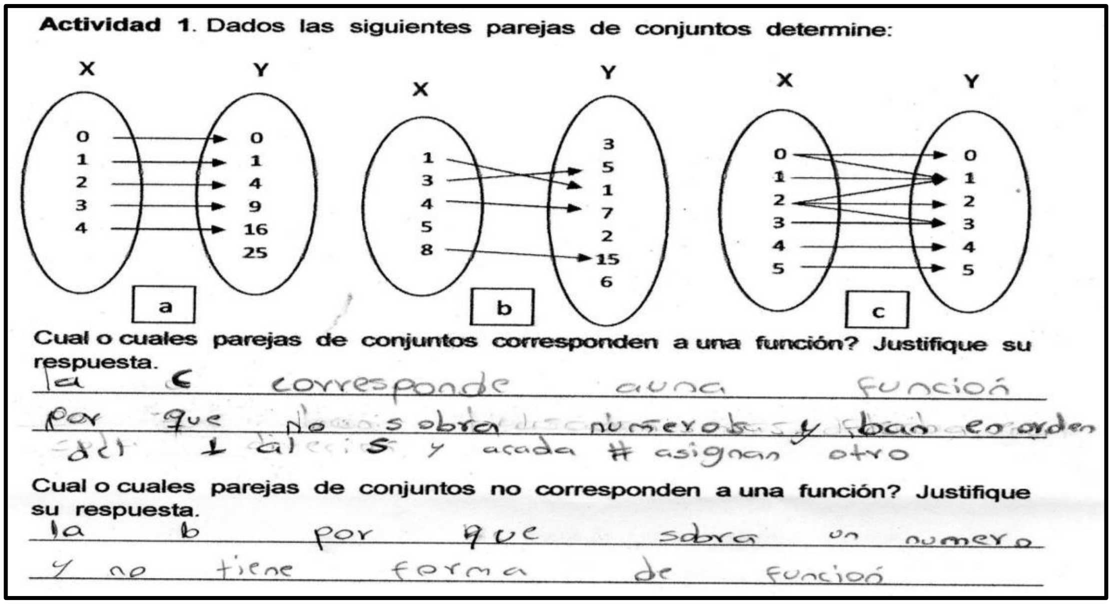


Imagen 1 Respuesta de estudiante

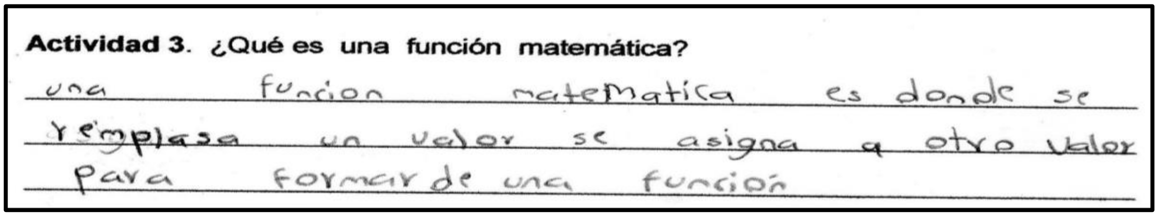
Fuente: adaptación por parte de la investigación de Peña & Aldana (2013)

Para el estudiante una función es una relación entre dos conjuntos donde lo más importante es que cada elemento del conjunto de salida, tenga una imagen en el conjunto de llegada, además debe cumplirse que los elementos estén en orden y que todos tengan pareja, sin importar cuantas. Es claro que no tiene en cuenta el criterio de unicidad, según el cual cada elemento del conjunto (x), solo puede tener una imagen en el conjunto (y).

También es evidente que el concepto de función está más asociado a un ordenamiento, es decir que exista un orden aparente entre los conjuntos; que a una relación entre dos cantidades, donde una depende directamente de la otra.

Otro estudio como el de Artigue (1995) citado en Peña & Aldana (2013), hace referencia a que se han detectado dificultades en los estudiantes para entender el verdadero significado de la función, ya que generalmente se le asocia solamente con su representación algebraica, lo cual dificulta la adecuada conceptualización de ésta.

Con respecto a esta situación se le preguntó al mismo estudiante ¿Qué es una función?, su respuesta fue la siguiente:



Actividad 3. **¿Qué es una función matemática?**

una funcion matematica es donde se remplasa un valor se asigna a otro valor para formar de una función

Imagen 2 Respuesta estudiante

Como se puede apreciar en la respuesta del estudiante cuando menciona la palabra “donde” está haciendo referencia a una expresión algebraica donde se reemplaza la variable independiente por un número cualquiera, dando como resultado otro número, lo que corresponde a un tratamiento netamente algebraico. Este análisis lleva a pensar que el estudiante aprendió a desarrollar una operación, mas no ha formado un concepto.

Analizar las deducciones que hacen los estudiantes con respecto al concepto de función ha ido cobrando especial interés dentro de la comunidad investigadora en educación matemática, ya que por una parte es un concepto que permite establecer relaciones con otras áreas del conocimiento y por otro lado, se constituye en la piedra angular para la construcción de conceptos mucho más elaborados, como el de límite, derivada e integral.

Este hecho hace necesario que se reflexione sobre la pertinencia de los procesos de enseñanza aprendizaje en los cuales se ha enmarcado el aprendizaje de este concepto, ya que en muchos casos éstos están direccionados hacia una definición estática y abstracta del mismo, donde predominan los errores conceptuales, alejados de una verdadera construcción del concepto.

Lo anterior justifica el porqué de los planes de estudio de la educación básica y media en Colombia, particularmente en el grado noveno de educación básica, décimo y once de educación media (aunque este concepto debe abordarse desde grado octavo, según los derechos básicos de aprendizaje (DBA) propuestos por el MEN dedican una considerable cantidad de tiempo al estudio de las funciones, iniciando con el registro de representación algebraico, pasando por el tabular, hasta llegar al registro gráfico, con el objetivo de finalizar con la modelación de fenómenos, sin embargo como se especificará más adelante este proceso de modelación rara vez se alcanza a desarrollar.

2.2 Dificultades asociadas con la modelación

Sobre la base de las consideraciones anteriores, los lineamientos curriculares emanados por el Ministerio de Educación Nacional (1998) establecen 5 procesos fundamentales en torno a los cuales debe desarrollarse la actividad matemática en las Instituciones Educativas públicas y privadas del país: Formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 1998, p. xx).

No obstante, según un estudio realizado por Villa, Bustamente, Berrio, & Osorio (2008) se encontró que en algunas instituciones de educación básica y media la enseñanza del concepto de función se limita a una práctica algorítmica, aplicada a un conjunto reducido de situaciones que poco o nada tienen que ver con la realidad. Esto resulta muy peligroso para el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que al abordar el concepto de función como un desarrollo algorítmico puede conllevar a que muchos estudiantes al finalizar del curso se queden con la concepción errónea de que las funciones solo sirven para elaborar gráficas, o en el peor de los casos a una complicación del álgebra y de la aritmética.

En ese mismo sentido Villa, Quintero, Arboleda, Castaño, & Bedoya, (2009) manifiestan que:

Contrario a los desarrollos a nivel internacional, la modelación matemática en la educación colombiana aún se encuentra en ciernes, ya que a pesar de su inclusión en el aula de matemáticas se propuso desde 1998 con la presentación, del Ministerio de Educación Nacional (MEN) del documento los lineamientos curriculares, son diversas las fuentes que documentan la poca apropiación de estos elementos por parte de muchos educadores. (p.160).

Para poner en contexto este planteamiento se le solicitó a dos estudiantes de grado undécimo de un colegio público, que ya han estudiado el concepto de función, desarrollar una serie de actividades en las cuales debían modelar una situación apoyados en el concepto de función.

La actividad propuesta consistió en una serie de tareas en las que debían evocar los conocimientos previos que poseían y algunos elementos básicos asociados al concepto de función. En la primer tarea se le pidió a los estudiantes analizar una situación y construir una tabla con los datos que allí se presentan.

La situación fue la siguiente:

Actividad 1: En la Panadería Galicia, el encargado de hacer el pan usa 10 kg de harina para preparar 100 panes del mismo tamaño y forma.

Construye una tabla que relacione la cantidad de harina y el número de panes.

kg- de arina	Cantidad de panes
100g	1
1 kg	10
10 kg	100

Imagen 3 Respuesta estudiante 1

a. Construye una tabla que relacione la cantidad de harina y el número de panes.

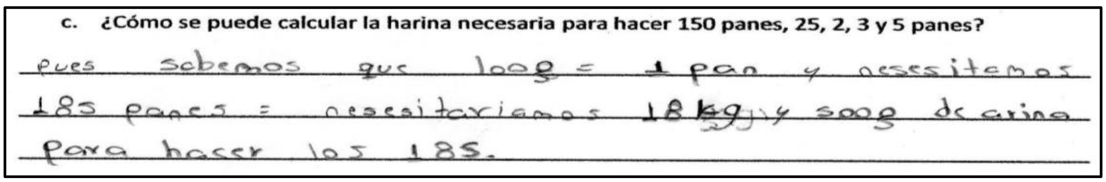
panes	Kg Arina
10	1 kg
100	10 kg

Imagen 4 Respuesta estudiante 2

Los estudiantes establecen una correcta relación entre el número de panes y la cantidad necesaria de harina para prepararlos, lo cual implica un nivel de generalización elemental y cierta facilidad para pasar del registro verbal al tabular.

La tarea 2 consistió en generalizar un procedimiento para calcular la cantidad de harina necesaria para cualquier cantidad de panes.

Actividad 2. ¿Cómo se puede calcular la harina necesaria para hacer 150 panes, 25, 2, 3 y 5 panes?

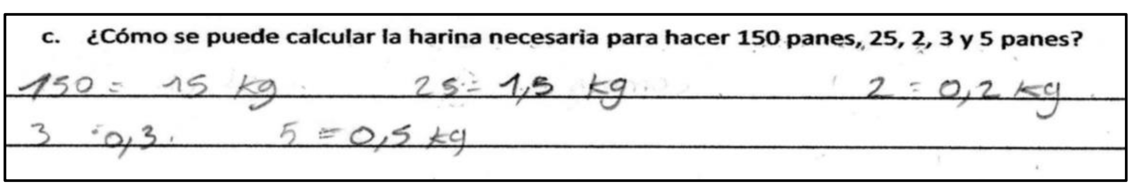

c. ¿Cómo se puede calcular la harina necesaria para hacer 150 panes, 25, 2, 3 y 5 panes?

pues sabemos que 100g = 1 pan y nesesitamos 185 panes = nesesitariamos 18 kg y 500g de arina para hacer los 185.

Imagen 5 Respuesta del estudiante 1

El estudiante simplificó la tarea averiguando la cantidad de harina necesaria para preparar un pan, y a partir de este valor pudo dar respuesta a la pregunta que interpretó le estaban formulando, multiplicando dicha cantidad de harina por el número de panes requeridos.

Como se puede apreciar resolvió la actividad basándose en un procedimiento algorítmico, mas no generalizó una expresión aritmética o algebraica para calcular la cantidad de harina necesaria para cualquier número de panes, a pesar de establecer un método válido, lo que evidencia falencias para pasar del registro verbal al algebraico.


c. ¿Cómo se puede calcular la harina necesaria para hacer 150 panes, 25, 2, 3 y 5 panes?

150 = 15 kg 25 = 1,5 kg 2 = 0,2 kg

3 = 0,3 5 = 0,5 kg

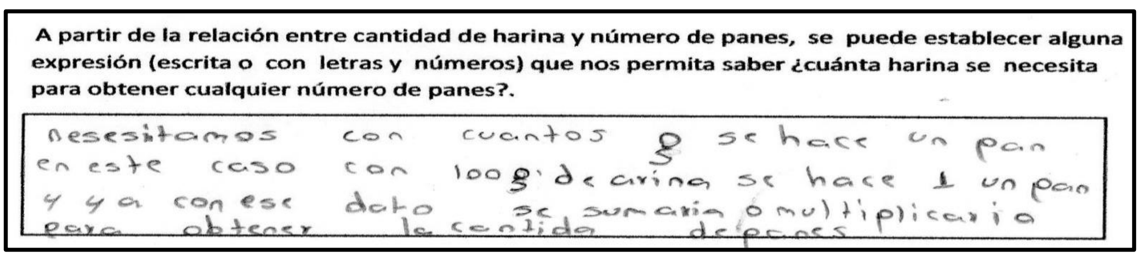
Imagen 6 Respuesta estudiante 2

Según lo anterior el estudiante realiza asociaciones correctamente, y aunque presenta algunos errores de procedimiento pudo calcular la harina necesaria para las cantidades de panes presentadas en la pregunta, no obstante no generalizó un método para calcular la cantidad de harina necesaria para cualquier número de panes.

El análisis de esta tarea y sus respectivas respuestas, permitió inferir que aunque los estudiantes encuentran métodos válidos para dar respuesta a preguntas específicas, se les dificulta generalizar un método que se aplique para todos los casos posibles.

La tarea 3 indagó específicamente por la capacidad de los estudiantes para generalizar una expresión algebraica que modele la situación propuesta.

Actividad 3. A partir de la relación entre cantidad de harina y número de panes, se puede establecer alguna expresión (escrita o con letras y números) que nos permite saber ¿cuánta harina se necesita para obtener cualquier número de panes?


A partir de la relación entre cantidad de harina y número de panes, se puede establecer alguna expresión (escrita o con letras y números) que nos permita saber ¿cuánta harina se necesita para obtener cualquier número de panes?.

nesesitamos con cuantos g se hace un pan en este caso con 100 g. de carina se hace 1 un pan y ya con ese dato se sumaría o multiplicaría para obtener la cantida de panes

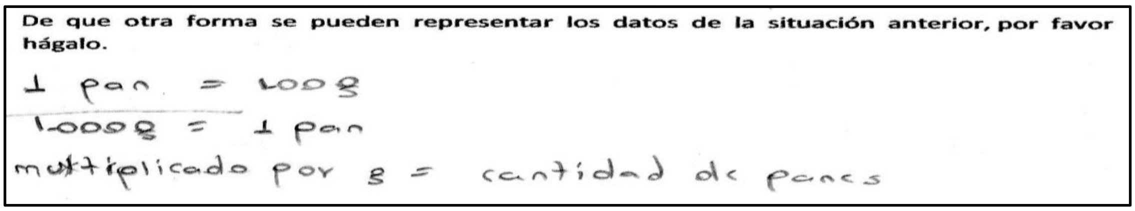
Imagen 7 Respuesta estudiante 1

El estudiante determinó una forma válida para calcular la cantidad de harina para cualquier número de panes, sin embargo se limitó al registro verbal y no trascendió al sistema de representación algebraico.

El estudiante 2 se declaró incapaz de realizar la tarea, lo cual deja claro que hay una marcada dificultad para pasar de otros tipos de registro, ya sea tabular, gráfico o verbal al algebraico, tal como lo establecen García, Vázquez, & Hinojosa (2004, 28), cuando mencionan que las tareas que implican la conversión del registro gráfico al algebraico son las que presentan mayor dificultad para los estudiantes.

La tarea 4 tiene la intencionalidad de analizar los registros semióticos de representación que emplean los estudiantes para representar una relación funcional

Actividad 4. ¿De qué otra manera se pueden representar los datos de la situación anterior?


De que otra forma se pueden representar los datos de la situación anterior, por favor hágalo.

1 pan = 100g

1.000g = 1 pan

multiplicado por g = cantidad de panes

Imagen 8 Respuesta estudiante 2

El estudiante asume que al plantear una regla de tres simple (aunque presenta errores en el planteamiento), está representando los datos del ejercicio, lo cual deja en evidencia que para él las gráficas de las funciones no son un registro que facilita la comprensión de la situación, sino una tarea que le sugiere el docente en un momento de la clase, por lo cual cuando se le da la libertad de escoger el sistema de registro, simplemente no la usa.

Es de anotar que la falta de claridad en el concepto lo llevó a plantear la incoherencia que propuso en la respuesta, tal como lo mencionan Brousseau, Werner, & Davis (1986) en Socas, (2007): “los alumnos tienen con frecuencia concepciones equivocadas sobre los objetos matemáticos, a veces, estas concepciones inadecuadas los llevan a usar procedimientos equivocados”(p.22).

El estudiante 2 se declaró incapaz de realizar la tarea.

Es muy común que en las instituciones de educación básica y media los estudiantes a pesar de haber realizado todo un proceso de exploración del concepto de función, reforzado a través de la ejercitación de procedimientos y algoritmos, cuando se les enfrenta a una situación o problema en la que deben aplicarlo, sus desempeños suelen estar por debajo de los esperados, ya que se les dificulta conjeturar, elaborar hipótesis, trasladarse libremente del registro algebraico al gráfico o viceversa y relacionarlo con otros conceptos, lo que irremediablemente conlleva a un fracaso en la realización de la tarea, ya que a pesar de manejar algunos procedimientos y reglas, al carecer de un concepto que los ordene y oriente, el estudiante simplemente no tiene forma de realizarla, debido a que el concepto no ha sido aprendido por él.

Un aspecto que es importante analizar frente a esta problemática se encuentra asociado a la influencia de los libros de texto en el aprendizaje de un concepto matemático, ya que de acuerdo con Font & Godino (2006, 68 - 69) los textos escolares se constituyen en una fuente inmediata donde se acumula la experiencia de los profesores, por lo tanto es fundamental analizar críticamente dichos textos, ya que su influencia sobre las prácticas de aula es innegable.

Sobre la base de las consideraciones anteriores es fundamental analizar la forma como es concebida en los textos escolares el concepto de función, los ejemplos que para comprenderla se presentan y las actividades que se sugieren a los estudiantes y los elementos matemáticos que lo configuran. Todos estos elementos dan una visión de la incidencia de dichos textos en la correcta o incorrecta construcción del concepto de función.

2.3 Bajos desempeños en pruebas externas

Toda esta problemática se ve reflejada en los bajos desempeños de los estudiantes en las pruebas estandarizadas como: las SABER aplicadas por el ICFES y las PISA desarrolladas por la OECD, donde más que aplicar procedimientos algorítmicos o algebraicos, deben analizar una situación y determinar una estrategia para solucionarla, para lo cual precisan un adecuado dominio de los conceptos.

Según cifras de la OECD, en las pruebas PISA aplicadas en el año 2012, Colombia ocupó el lugar 62 de 65 países, con una puntuación media de 376 en matemáticas, 118 puntos por debajo de la media de la OECD, pero lo más preocupante es que el 73,8 % de los estudiantes colombianos que presentaron la prueba, obtuvieron los peores resultados, ubicándose por debajo del nivel 2, lo cual significa que en el mejor de los casos solo pueden resolver las tareas más fáciles o más obvias (OECD, 2014).

En cuanto a las pruebas SABER aplicadas a los estudiantes de 3, 5, 9 y 11 de educación pública y privada en todos los Establecimientos Educativos del país, el panorama no es más alentador, ya que según la ministra de educación:

> *Nos va mejor en tercero que en quinto en Pruebas Saber. En matemáticas, el nivel insuficiente esta en 20% y el avanzado en 23%, mientras que en quinto el insuficiente llega al 37% y el avanzado disminuye a 13%. En noveno lo que sucede es que nos mediocrizamos, el insuficiente ya no está en 37%, sino en 20%, pero el mínimo, que es el nivel que sigue, crece y llegamos casi al 60%, lo que significa que tenemos casi al 70% de los estudiantes en inferior y mínimo.* (Elpais.com.co, 2014)

Cabe destacar que cuando se refiere al nivel mínimo, se está refiriendo a que los estudiantes apenas si superan las preguntas de menor complejidad de la prueba para los grados evaluados y el nivel inferior significa que no supera ni las preguntas de menor complejidad.

Por todo lo hasta aquí expuesto se puede establecer que el análisis del aprendizaje del concepto de función es un foco importante de investigación, particularmente en la básica secundaria, ya que es allí donde se da el primer acercamiento formal hacia la adquisición de este concepto, por tanto es fundamental conocer la comprensión que los estudiantes hacen de éste, con lo cual se justifica la realización de esta investigación.

2.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las dificultades asociadas a la incorrecta apropiación de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes y específicamente el concepto de función, consecuencia en cierta medida por la forma como éste es desarrollado en los libros de texto, donde se privilegia el desarrollo de procedimientos algorítmicos y algebraicos, por encima del significado analítico del concepto, junto con los aportes de diversos estudios relacionados han sido el punto de partida para formular el siguiente problema de investigación:

¿Cómo potenciar el aprendizaje del concepto de función en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Nuestra Señora de los Dolores del municipio de Quinchía?

3. OBJETIVO GENERAL

Potenciar el aprendizaje del concepto de función en los estudiantes del grado octavo a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica.

4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer los aspectos históricos - epistemológicos, didácticos y cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de función.
- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven tareas de modelación de situaciones problema de su cotidianidad, asociadas al concepto de función.

- Analizar la comprensión que alcanzan los estudiantes en la fase de experimentación de la ingeniería didáctica, mediante un proceso de modelación de situaciones en contexto.
- Validar el nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes del concepto de función, mediante la confrontación del análisis a priori y posteriori.

5. JUSTIFICACIÓN

Es innegable que el concepto de función está presente en toda la matemática, no solo aquella que comúnmente es llamada matemática teórica, sino también aquella propia de las ciencias que buscan describir fenómenos y acciones cotidianas, también llamada matemática aplicada. Dicha universalidad enriquece el concepto al tiempo que le otorga la importancia necesaria para su correcto entendimiento. Por tal razón el concepto de función no debe ser abordado como un algoritmo árido y mecánico, sino que debe partirse del hecho que fue el entendimiento de los fenómenos naturales y las situaciones cotidianas aquello que le dio vida.

Con la presente investigación se pretende desarrollar una propuesta didáctica que permita comprender las concepciones de los estudiantes posterior al estudio del concepto de función y así mismo ofrecer otra manera de cómo se puede acceder a este concepto, a partir del desarrollo del pensamiento variacional según lo plasmado en los Lineamientos Curriculares colombianos de matemática, tomando como base los derechos básicos de aprendizaje del 2015 (DBA). Puntualmente se propone una aproximación didáctica al concepto de función partiendo de la modelación de situaciones problema extraídas del contexto próximo de los estudiantes.

Lo anterior sintoniza con las políticas educativas vigentes para el área de matemáticas que encontramos en el documento de los DBA, en donde el estudio del concepto de función se inicia en grado séptimo con la manipulación de expresiones del tipo (ax + b, donde a y b son números dados) con su respectiva representación en tablas y gráficas, para modelar situaciones. Y finaliza en grado undécimo con el análisis de la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo.

En dicho documento se establecen 85 Derechos Básicos de Aprendizaje desde séptimo hasta undécimo para el área de matemáticas, de los cuales 26 abordan el concepto de función, y de éstos 4 incorporan procesos de modelación de fenómenos o problemas, lo que pone en relieve la trascendencia de este concepto, además de la necesidad de incorporar activamente otros procesos de la actividad matemática, que trascienden la ejercitación y apunten hacia el correcto desarrollo del concepto, como es el caso de la modelación.

Por ejemplo en el grado octavo aparece en el documento del MEN (2015) el siguiente derecho básico:

> *Comprende sin un lenguaje formal la noción de función como una regla f, que a cada valor x, le asigna un único valor f (x) y reconoce que su gráfica está conformada por todos los puntos (x, f (x)). También comprende que una función sirve para modelar relaciones de dependencia entre dos magnitudes.* (p. 24)

Como se puede apreciar el DBA hace referencia a la noción de función, mas no a los procedimientos algorítmicos y algebraicos asociados a éste, lo que confirma que el objetivo de la enseñanza de este objeto matemático está enfocado hacia su comprensión, asimismo presenta la modelación como un proceso válido para desarrollarlo, algo que dista mucho de las prácticas tradicionales de enseñanza aprendizaje asociadas a este concepto, tal como lo menciona Vasco (1999) cuando dice *“que generalmente en la escuela la función se concibe como una fórmula estática* *ya establecida, como un producto acabado que requiere ser memorizado". (p.18)*

Lo anterior haciendo alusión a la forma clásica de enseñar este concepto, como un proceso casi que automatizado donde al estudiante se le solicita que a partir de una fórmula, aplique un algoritmo, construya una tabla y finalmente elabore una gráfica, metodología que a pesar de establecer una circulación a través de varios registros, resulta en una actividad poco significativa para el estudiante.

Debido a lo mencionado hasta aquí, esta investigación presenta la modelación de problemas de la cotidianidad como proceso para desarrollar el concepto de función, lo cual cobra sentido a partir de la necesidad de dotar de significado las prácticas de enseñanza aprendizaje de la matemática, que tradicionalmente se vienen desarrollando.

En este punto es importante resaltar la importancia que jugará la resolución de problemas, ya que de acuerdo con Lesh & Zawojewski, (2007) citados por Trigo (s.f) la resolución de problemas es:

> *El proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas(p.3).*

En el mismo sentido los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN (1998), proponen la resolución de problemas como uno de los procesos alrededor de los cuales debe desarrollarse la actividad matemática, incluso al nivel de eje articulador del currículo de matemáticas, siempre y cuando las situaciones que se planteen a los estudiantes estén ligadas a experiencias cotidianas, ya que es en el contexto inmediato donde el saber matemático cobra sentido.

Según Villanova & otros (s.f.) la resolución de problemas es un proceso que debe penetrar todo el diseño curricular y proveer el contexto en el cual los conceptos y las actitudes pueden ser aprendidos. (párr 1) La habilidad de plantear y resolver problemas con una variedad de estrategias y recursos, aparece no sólo como contenido procedimental, sino también como una de las bases del enfoque general con que han de trabajarse los contenidos de matemática, situándose como un aspecto central en la enseñanza y el aprendizaje en esta área.

Teniendo como referente lo expuesto hasta este punto, este trabajo de investigación propone desarrollar el concepto de función a partir de la modelación de situaciones problema extraídas de la realidad, que puedan tener significado para el estudiante, con lo cual se espera que él no solo utilice un algoritmo, sino que como lo plantea el (MEN, 1998) despliegue una serie de estrategias para resolverlos, encuentre resultados, verifique e interprete lo razonable de ellos, modifique condiciones y origine otros problemas.

Con respecto a lo anterior Villa & Mesa, (2007) sugieren que:

> *La modelación como estrategia de aprendizaje de las matemáticas proporciona una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, al tiempo que permite constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase. De igual manera potencia el desarrollo de capacidades en el estudiante para posicionarse de manera crítica antes las diferentes demandas del contexto social junto con la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problemas. (p, 10)*

Retomando lo propuesto por Villa & Mesa (2007), en (MEN (1998), encontramos que *“Los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos” (p.51)*.

Sin embargo hoy en día es común que en las instituciones de educación básica, media e incluso superior, se siga haciendo énfasis en la enseñanza de procedimientos algorítmicos, enfocándose en solo uno de los cinco procesos propuestos, dejando de lado los otros, bajo el supuesto de que ser matemáticamente competente consiste en poder realizar una gran cantidad de ejercicios con un grado de complejidad creciente.

En relación con los cinco procesos de la actividad matemática planteados por el MEN Villa, Bustamente, Berrio, Osorio, & Osorio, (2008) reflexionan en cuanto a que:

> *A pesar de que estos elementos cumplen 10 años de estar en los documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional se ha encontrado que en algunas instituciones educativas no se han apropiado de estos planteamientos, y por el contrario sigue predominando una visión de las matemáticas como un área formal y abstracta constituida por definiciones, axiomas e ideas comprimidas y exactas, cuya aplicación se encuentra en un conjunto reducido de situaciones que, poco o nada tienen que ver con la realidad*. (p. 1)

Continuar el abordaje de las estructuras matemáticas con el solo objetivo de realizar ejercicios y aplicar algoritmos, desconociendo los demás procesos que el aprendizaje de ésta implica, es negarle la oportunidad a los estudiantes que exploren contextos de aprendizaje donde se les lleve a investigar y porque no cuestionar situaciones de la realidad, dentro de las propias matemáticas y otras ciencias, imposibilitando así que se genere la discusión y la reflexión, logrando con esto formar ciudadanos conocedores de una amplia variedad de procedimientos matemáticos, pero los cuales no sabrán usar.

Por tal razón esta investigación busca generar ese deseo de construir saber matemático a partir de la modelación de situaciones reales extraídas del contexto cercano del estudiante para el estudio de la función, ya que de esta forma se estará, dando solución a situaciones reales, con lo cual se espera que los estudiantes no solo se vean inmersos en la solución de problemáticas que en realidad le generen movilización de pensamiento, sino que además exploren formas de representarlos en términos matemáticos y puedan manipular dichas representaciones.

Asimismo se espera que los resultados obtenidos con el desarrollo de esta investigación, ayuden a mejorar los desempeños de los estudiantes en las pruebas PISA, ya que al desarrollar una ingeniería didáctica para desarrollar el concepto de función a partir de la modelación de situaciones en contexto, se está apuntando a lo propuesto en los marcos y pruebas de la evaluación PISA 2013 (OECD, 2013), documento que plantea que un estudiante resuelve problemas de forma activa en la prueba PISA cuando identifica oportunidades para aplicar y utilizar las matemáticas, ya que éstas pueden aplicarse para comprender o resolver determinados problemas o desafíos que se le presentan, incluye la capacidad para tomar una situación tal y como se presenta y transformarla en algo susceptible de ser tratado de forma matemática, proporcionando estructuras y representaciones matemáticas.

En ese mismo sentido, es intención de este trabajo contribuir al mejoramiento de los resultados de las pruebas SABER para los grados noveno y undécimo, ofreciendo a la comunidad investigativa en educación matemática un análisis de la forma como los estudiantes adquieren el concepto de función, y a partir de éste enriquecer la literatura existente al respecto, con el fin de replantear los métodos de enseñanza que tradicionalmente han orientado el aprendizaje de este concepto tan importante, pero que como se ha expuesto ampliamente, no siempre es abordado de la mejor manera.

6. ESTADO DEL ARTE

En este apartado del marco teórico se realizó un recorrido a través de diferentes investigaciones sobre la enseñanza del concepto de función, la ingeniería didáctica como metodología de investigación, la modelación como proceso para la enseñanza de objetos matemáticos y la resolución de problemas, con el fin de ofrecer un panorama general del estado del arte y al mismo tiempo servir de referente bibliográfico a lo largo de este trabajo.

Como se enfatizó en el planteamiento del problema, el estudio del aprendizaje del concepto de función en los estudiantes, ha sido un foco de investigación ampliamente abordado por la comunidad investigativa en educación matemática, trabajos como el de García, Cedeña, & Rivera (2004) titulado *"Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería"*, en el cual se analizó el pasaje entre los registros gráficos y algebraicos, detectando que la principal dificultad se da precisamente en ese paso del registro gráfico al algebraico, les permitió concluir que para superar estas dificultades de aprendizaje es necesario implementar más intensamente el registro gráfico e incluir actividades de transferencia entre registros semióticos de representación.

El aprendizaje del concepto de función también ha movilizado procesos de investigación en estudiantes con discapacidades físicas, como el trabajo de Peña & Aldana (2013) titulado *Análisis del concepto de función con estudiantes sordos de grado décimo,* donde se estudió cuál es el nivel de comprensión alcanzado por estudiantes sordos que ya han estudiado la noción de función, estudio fundamentado en el marco teórico de los registros de representación semiótica y la metodología de la ingeniería didáctica, apoyados en el diseño, desarrollo e implementación de un software.

Estos autores llegan a la conclusión que los estudiantes sordos *"ubican puntos en el plano, identifican y diferencian parejas ordenadas y establecen relaciones entre conjuntos" (2013, p. 153).* Asimismo el diseño de secuencias didácticas adecuadas puede favorecer la comprensión/construcción del concepto de función, siempre y cuando éstas se apoyen en el sistema de representación gráfico, debido a que la visualización juega un papel fundamental en el estudio de este concepto en la población no oyente.

Otro estudio como el desarrollado por Cedeño, Preciado, & Castro (2007) titulado *Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora,* aborda el estudio de los obstáculos epistemológicos ligados al aprendizaje del concepto de función, estableciendo que gran parte del fracaso escolar en los primeros cursos de matemáticas en la carrera de ingeniería, está asociado con una pobre asimilación conceptual. Para lo cual proponen la mediación de la calculadora graficadora como herramienta para potenciar la adquisición de este concepto.

En este trabajo se determina que si bien es cierto que los obstáculos son persistentes, los estudiantes mejoran su nivel de formación matemática, comprobando así que la calculadora graficadora es una herramienta válida para mediar en el aprendizaje del concepto de función.

Así como el concepto de función ha generado procesos de investigación importantes, los cuales es necesario conocer para tener un punto de referencia de donde se encuentra el estado del arte en este campo, es necesario referenciar algunas investigaciones sobre el proceso de modelación de fenómenos extraídos del contexto, ya que es una de las categorías principales del presente trabajo.

Según Ochoa, Quintero, Arboleda, Castaño, & Bedoya, (2009):

> *Una de las áreas de mayor desarrollo ha tenido en las dos últimas décadas es el área de la modelación matemática, tanto desde el punto de las matemáticas aplicadas a las demás ciencias, como desde el punto de vista educativo, la modelación tiene fuertes vínculos con el estudio de situaciones y solución de los problemas del mundo real (p,16)*

Otro buen ejemplo es el trabajo realizado por Villa & Vahos (2009) sobre modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos, en el cual se analizan algunos conceptos que caracterizan la modelación matemática como un proceso en el aula y como área de investigación en educación matemática. Además resalta como el proceso de modelación se ha consolidado en las matemáticas escolares a partir de los lineamientos curriculares (1998) y los estándares básicos de competencias (2006). De igual forma se estudian los elementos que diferencian y/o asemejan al proceso de modelación con la resolución de problemas. Finalizando con la conclusión que existe una enorme brecha entre las disposiciones educativas colombianas y las prácticas de aula en matemáticas.

Otra experiencia bastante interesante y la cual es apropiado reseñar dada su afinidad con este trabajo es la investigación realizada por Villa (2015) titulado *Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas* en el cual se presentan los resultados de un estudio de caso, en el cual se indagó por la manera en que un conjunto de profesores de educación secundaria emplean la modelación en la enseñanza de las matemáticas, logrando identificar que los profesores favorecen los problemas de enunciados verbales como principal manera de hacer modelación matemática.

Se sugiere entonces que es necesario generar estrategias que propicien que los docentes realmente se apropien de la modelación como un proceso válido para la enseñanza de las matemáticas, trascendiendo los enunciados verbales estereotipados hacia situaciones más realistas.

Debido a que la literatura existente respecto a el proceso de modelación en el aula es muy extensa, sería demasiado ambicioso e inútil tratar de referenciarlas todas en este trabajo, sin embargo sería un error no hacer referencia al aporte de Vera & Moreno (2014) titulado *Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología*, en el cual se menciona que la práctica de la modelación permite tender puentes entre lo que se hace en la escuela y comunidades extraescolares, asimismo mencionan que el modelo no existe independiente de la actividad humana, es decir se manifiesta como modelo siempre y cuando se use para intervenir en otra entidad, que a partir de ese momento es el modelado.

La investigación realizada lleva a concluir que existe una amplia gama de modelos como instrumentos para las modelaciones, asimismo las interacciones de la modelación en el aula van más allá de la aplicación de las matemáticas, asumiendo inicialmente como herramienta didáctica para construir conocimiento matemático, hasta la validación de su ejercicio en sí misma.

Por lo tanto no debe existir una separación tajante entre las matemáticas escolares y el mundo real, ya que la relación entre el modelo y lo modelado no es solo representacionista sino articuladora.

Continuando con la revisión bibliográfica de las categorías mencionadas en el título de esta investigación, la resolución de problemas juega un papel importante, ya que será la excusa por así decirlo para que los estudiantes inicien el estudio del concepto de función.

En un trabajo realizado por Pérez & Ramírez (2011) titulado *Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos.* Fundamentos teóricos y metodológicos, se realiza un estudio descriptivo de los fundamentos teóricos de la resolución de problemas matemáticos y las estrategias para su enseñanza.

En esta investigación se analiza el hecho que en las últimas décadas se ha acentuado la preocupación de que la resolución de problemas matemáticos sea aplicada como una actividad de pensamiento, debido a que es frecuente que los maestros trabajen en sus aulas problemas rutinarios que distan mucho de estimular el esfuerzo cognitivo de los educandos.

Como resultado concluyen que la resolución de problemas constituye el centro de la matemática, ya que el docente puede valerse de ella para enseñar esta disciplina, sin embargo con frecuencia los docentes trabajan con sus estudiantes ejercicios rutinarios, mecánicos que distan mucho de estimular los procesos cognoscitivos necesarios entre los estudiantes.

Frente a esta situación Pérez & Ramírez (2011) plantean que:

> *Es importante que los docentes conozcan lo que representa realmente un problema, las taxonomías que existen al respecto, sus características, etapas de resolución, así como también sobre las estrategias para su enseñanza, de manera que puedan crear enunciados creativos, originales y variados que constituyan un reto para los estudiantes e impliquen un esfuerzo cognoscitivo al resolverlos (p,191).*

Otro trabajo que bien vale la pena mencionar es el realizado por Ballestero (2008) titulado *Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas*, en el cual se analiza que una de las principales causas de la deserción escolar se encuentra ligada a los bajos desempeños académicos, los cuales están asociados en gran medida con el área de matemáticas y dentro de ésta la resolución de problemas tiene un capítulo muy especial.

En este trabajo la autora parte del hecho que muchos de los estudiantes saben realizar una gran variedad de operaciones matemáticas, pero al momento de aplicarlas en la solución de un problema, generalmente se quedan cortos ya que la educación que se les ha ofrecido los entrena para actuar de manera mecánica y repetitiva, sin dar importancia a los procesos de análisis que deben desarrollarse, a la par del aprendizaje de las operaciones para que el individuo pueda realmente aplicar lo que sabe hacer en la resolución de un problema.

La investigación concluye con que no es suficiente presentar problemas matemáticos para que los educandos los resuelvan. Es necesario darles un tratamiento adecuado, analizando las estrategias y técnicas de resolución utilizadas, se debe dar oportunidad a cada estudiante de expresarse para conocer su modo de pensar ante las diversas situaciones que se le presentan.

Las investigaciones referenciadas en este trabajo sobre el aprendizaje del concepto de función, a pesar de lo diverso de las poblaciones con las que se trabajaron, dejan claro que existe una preocupación generalizada en la comunidad investigativa en educación matemática, en cuanto al adecuado aprendizaje de este objeto matemático, ya que varias de las dificultades asociadas al aprendizaje de esta asignatura, se derivan de una inadecuada adquisición de este concepto.

Así mismo las investigaciones sobre modelación matemática, ponen de manifiesto que ésta como proceso para potenciar la enseñanza aprendizaje de las matemáticas aún se encuentran en una etapa inicial, a pesar de haber sido incorporada desde hace más de 15 años en los lineamientos curriculares de la educación matemática en Colombia.

Como se puede apreciar en los diferentes trabajos, el concepto de función ha movilizado procesos de investigación desde diferentes ámbitos, especialmente lo referido a las dificultades asociadas a su aprendizaje y la forma como los estudiantes construyen el concepto, para lo cual la metodología de la ingeniería didáctica ha sido un vehículo dinamizador de estos procesos.

Sin embargo, aún se ha investigado poco acerca de la influencia del proceso de modelación en la construcción del concepto de función y particularmente la modelación de situaciones reales que puedan ser abordadas en el aula. Por lo tanto el aporte de este trabajo de investigación será analizar como influye la modelación de situaciones reales en la construcción del concepto de función.

6.1 Resumen de trabajos citados en este apartado

Tabla 1 Relación de investigaciones citadas en el estado del arte.

Autor	Título de la investigación	Fecha
Laura Quiroga García; Rosa Alicia Vásquez	Dificultades en el aprendizaje del concepto	Julio – septiembre de 2004

Cedeño; Moisés Hinojosa Rivera	de función en estudiantes de ingeniería	
Raúl Peña Peña ; Eliécer Aldana Bermúdez.	Análisis del concepto de función con estudiantes sordos de grado décimo	Agosto de 2013
Myriam Trujillo Cedeño; Juan de Jesús Guerrero Preciado; Nivia Marina Castro.	Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora	Julio - Diciembre 2007
Jhony Alexander Villa Ochoa; Héctor Mauricio Ruiz Vahos	Modelación en educación matemática: Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos	Enero de 2009
Jhony Alexander Villa Ochoa	Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas	Octubre de 2015
Yeny Pérez. Raquel Ramírez.	Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos	Mayo – Agosto de 2011
Jaime Arrieta Vera Leonora Moreno Díaz	Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología.	Septiembre – Octubre de 2014

María Mayela Calvo Ballestero	Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas.	Noviembre 2007 Abril 2008

Fuente: producción propia.

7. MARCO TEÓRICO

El problema definido para esta investigación aborda el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de grado octavo, a partir de un proceso de modelación de fenómenos extraídos del contexto, analizado desde la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (2007) aplicando una ingeniería didáctica. Por lo tanto a continuación se hará una revisión bibliográfica de las cinco grandes categorías conceptuales en las cuales se enmarca esta investigación, las cuales son:

Concepto de función, Ingeniería Didáctica, Resolución de problemas, Modelación matemática de fenómenos y Aprendizaje.

7.1 Concepto de Función

Antes de determinar los elementos que constituyen el concepto de función, es importante identificar las dificultades asociadas a este y los conocimientos previos que debe poseer un estudiante para iniciar su estudio.

7.1.1 Dificultades asociadas al concepto de función

Según investigaciones realizadas por Azcárate & Piquet (1996) e Higueras (1998) citadas por Cortez & Camacho (2014) relacionadas con las dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de función son debidas entre otros a los siguientes aspectos:

- *La construcción deficiente que realizan los estudiantes del concepto.*
- *La falta de situaciones significativas durante su aprendizaje, lo cual está directamente relacionado con el modelo pedagógico tradicional utilizado por el profesor.*
- *La clase de actividades desarrolladas con los diferentes registros de representación, que no propician la comprensión de los elementos inmersos en el concepto.*
- *La ejercitación de lo simbólico, lo cual favorece el dominio de procesos algorítmicos en las situaciones problema donde se utiliza el concepto de función, pero al enfrentarse a situaciones contextualizadas los estudiantes se encuentran con dificultades para solucionarlas por la poca comprensión de elementos como la identificación del tipo de función, de las variables y su relación de dependencia. (p. 11 -12)*

7.1.2 Conceptos previos necesarios para el correcto aprendizaje del concepto de función

Según Castro y Díaz (2014):

Es importante reconocer que los estudiantes han abordado aspectos relacionados con el concepto de función desde grado sexto hasta once, como parte del proceso propuesto desde los Estándares básicos de competencias de matemáticas formulados por el Ministerio de Educación Nacional, los cuales tienen en cuenta el manejo del plano cartesiano, el uso de representaciones verbal, gráfico, algebraico y tabular en situaciones de variación, donde se reconoce la dependencia entre variables, las características y propiedades de las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas y logarítmicas (p,15).

A pesar de que el concepto de función ha sido abordado a lo largo de la enseñanza básica y media, las investigaciones realizadas han encontrado falencias en su construcción. Por tal razón es importante tener en cuenta los conocimientos previos requeridos para iniciar el estudio del concepto de función, los cuales según Castro y Díaz (2014) son: “*par ordenado, escala, letra evaluada y letra como variable, ya que a partir del adecuado dominio de estos elementos y de las relaciones que se establecen entre ellos, se construye el concepto de función” (p.16).*

7.1.2.1 Par ordenado

Un par ordenado es una pareja de la forma (*x,y*) en el que se establece un criterio de ordenación en donde el primer elemento *x* se denomina abscisa y el segundo elemento *y* ordenada. Por ejemplo en la pareja (-2,4) el primer elemento -2 pertenece a las abscisas o eje x, y el segundo elemento 4, pertenece a las ordenadas o eje y.

Los pares ordenados se pueden representar de forma simbólica, tabular y gráfica como se muestra a continuación.

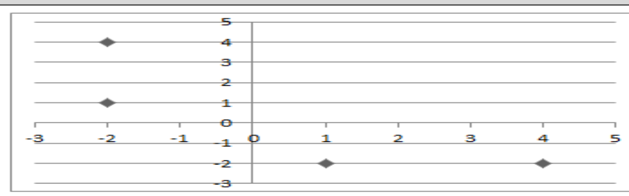
Simbolica	Tabular		Grafica
A(-2,4) B(4,-2) C(1,-2) D(-2,1)	x -2 4 1 -2	y 4 -2 -2 1	

Imagen 9 Registros semióticos de representación de un par ordenado

7.1.2.2 Escalas

La escala se utiliza para representar diferentes unidades de medida como: metros, minutos, grados, entre otras. Esta se maneja dividiendo en partes iguales una línea recta. Cada una de estas partes, de acuerdo con la escala específica equivale a un valor determinado. Cada eje del plano cartesiano es una recta que puede manejar diferentes escalas.

Según Castro y Díaz (2014) uno de los elementos de la representación gráfica que no tienen en cuenta los estudiantes es el manejo de la escala. Lo cual se evidencia cuando por ejemplo se grafica una función de tipo exponencial y no se utiliza una escala adecuada, lo que conlleva a que las gráficas realizadas, presentan una tendencia lineal más que exponencial.

7.1.2.3 Interpretación de la letra

Según Kuchemann (1978) citado por Castro y Díaz (2014) existen seis formas de interpretar los símbolos literales: *"letra evaluada, letra no utilizada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado y la letra como variable" (p. 19)*. Para el estudio de las funciones es necesario que el estudiante comprenda la letra desde dos de las interpretaciones anteriores.

La letra evaluada, es decir que reconozca que a la letra se le puede asignar un valor numérico y que dependiendo de éste la función toma un valor específico.

La letra como variable lo cual considera un rango de valores no especificado con una relación entre dos conjuntos de valores.

Al respecto los mismos autores plantean: *"Cuando los estudiantes reconocen la letra evaluada, pueden generar representaciones gráficas y tabulares y determinar si una relación es función. Si el estudiante identifica la letra como variable puede hallar dominio y rango de la función"* (2014. p, 19).

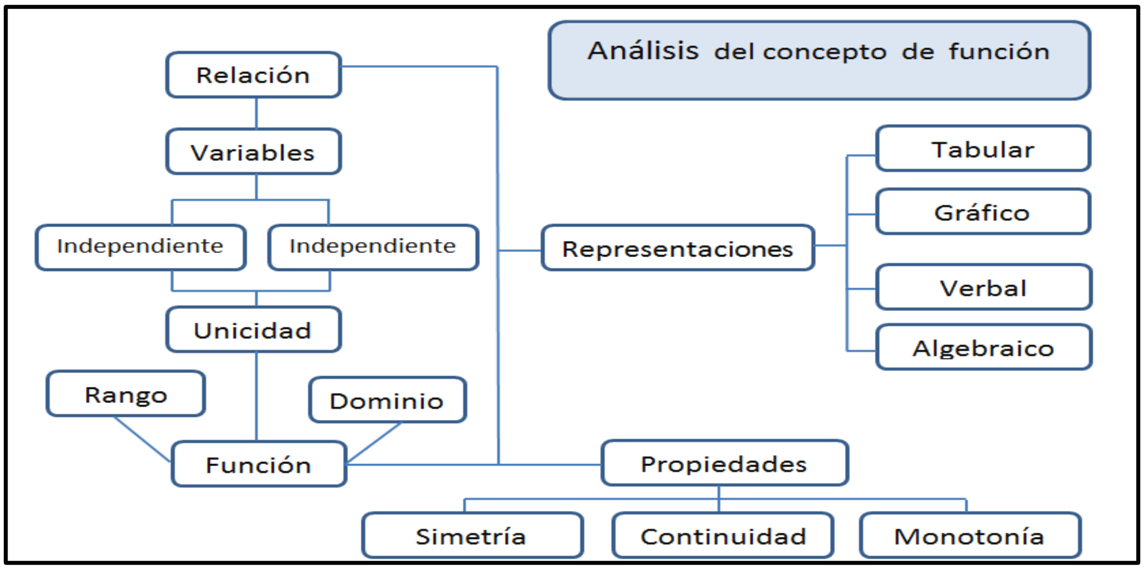
7.1.3 Construcción del concepto de función.

Luego de verificar que los estudiantes manejan los conceptos previos requeridos, se puede iniciar la construcción del concepto de función. Debido a que las funciones son una categoría inclusiva de las relaciones, es necesario introducir el concepto de función partiendo del análisis de situaciones que permitan el estudio y análisis de las relaciones.

Dicho proceso debe permitir establecer diferencias entre las relaciones que no son funciones de las que sí lo son, y a partir de las últimas identificar características y propiedades teniendo en cuenta las diferentes representaciones.

El siguiente esquema propuesto por Castro y Díaz (2014) presenta las conexiones entre los elementos que configuran el concepto de función.

Imagen 10 Conexiones entre los elementos que configuran el concepto de función



7.1.4 Relaciones

Una relación R definida entre dos conjuntos A y B es todo subconjunto no vacío del producto cartesiano A x B que se define como una correspondencia entre elementos de dos conjuntos llamados dominio y rango. La notación (a,b) ϵ R indica que un elemento a está relacionado con un elemento b por la relación R.

Cabe notar que la definición no exige que todos los elementos del conjunto A estén relacionados con todos los elementos del conjunto B, por ello se define un conjunto de partida y un conjunto de llegada.

Las relaciones se pueden representar así:

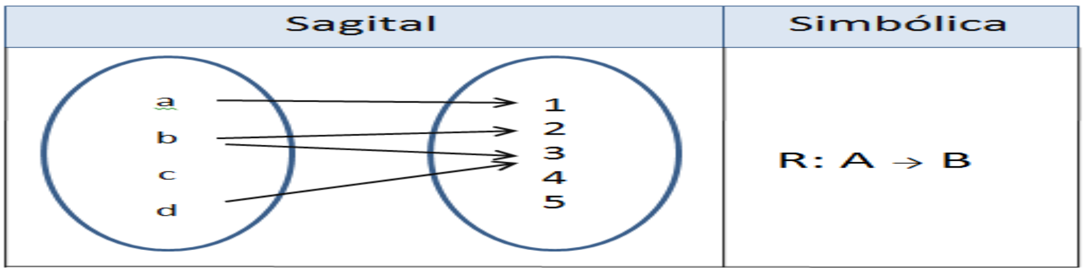


Imagen 11 Registros semióticos de representación de una relación

Cuando las relaciones se establecen en situaciones contextualizadas es natural hablar de las variables y su dependencia, predecir los cambios de una, al conocer el valor de la otra, la primera se denomina variable independiente y la segunda, variable dependiente.

Entre las múltiples relaciones que se pueden plantear, se encuentra un grupo que se caracteriza por la unicidad, lo que significa que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde uno y solo uno del conjunto de llegada; a este grupo especial de relaciones se les denomina función, donde los conjuntos de partida y de llegada son llamados dominio y rango de la función.

7.1.5 Adquisición del concepto de función.

El estudio de la formación de conceptos es un campo aún en desarrollo de la investigación en matemática educativa, no obstante los trabajos de David Tall y Shlomo Vinner (1991); Tall & Vinner (1981) acerca de la “definición del concepto” e “imagen del concepto”, ofrecen un una perspectiva bastante aclaradora, sobre lo que se puede entender como la adquisición de un concepto matemático.

Según estos autores adquirir un concepto matemático, significa adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir diferentes ejemplos del concepto tal y como está concebido por la comunidad matemática.

Asimismo sugieren que para abordar el estudio de un concepto se debe iniciar con varios ejemplos y contraejemplos, procurando identificar los atributos relevantes del objeto en consideración, así como los atributos irrelevantes que se presenten con mayor frecuencia.

En ese mismo sentido es importante seleccionar los ejemplos de modo que los atributos irrelevantes de más frecuente aparición sean variados, de igual forma seleccionar una gran variedad de contraejemplos en los que se infrinjan los diversos atributos relevantes.

Otra actividad significativa en el proceso de adquirir un concepto consiste en solicitar que los estudiantes construyan una definición de éste, siempre y cuando no sea uno muy complicado.

Con base en lo propuesto por Tall y Vinner (1981) para esta investigación se asumió por aprendido el concepto de función si el estudiante:

- Define con sus palabras la función como una relación entre dos conjuntos (salida y llegada) según la cual toda variación que sufre un elemento “x” del conjunto de salida mediante la aplicación de una regla, determinará un único elemento “y” en el conjunto de llegada .
- Modele situaciones mediante expresiones algebraicas, aritméticas o con lenguaje natural que representen dicha situación a partir de un enunciado verbal, tabla de valores o sistema de representación gráfico.
- Se apoye del registro gráfico de representación para identificar variaciones de la situación o problema como crecimiento, decrecimiento, incremento y reconoce que cada punto de la función ubicado en el plano cartesiano representa la relación de dependencia entre cada uno de los elementos del conjunto de salida y de llegada

- Generalicen procesos para simplificar la construcción de las gráficas de las funciones como reconocer los puntos de corte en el eje y, o identificar en una función cuadrática aquellos elementos del dominio para los cuales el rango se repite.
- Utiliza métodos válidos para diferenciar una relación de una función como el criterio de unicidad, en el sistema de representación tabular, o el criterio de la línea vertical en el sistema de representación gráfico.
- Comprende que dada una función, existe y define un conjunto de valores que puede tomar la variable independiente llamado dominio, y a partir de este se define otro conjunto de valores que puede tomar la variable independiente llamado rango. Asimismo infiere que si dicha función se desprende de una situación problema, existen dominios o rangos que a pesar de poseer un valor numérico no tienen sentido para la situación que se está analizando.

7.1.6 Definición matemática de función

El concepto de Función en matemáticas es muy importante porque permite modelar algunos fenómenos, como los costos, compras, transferencias, cálculos de perímetros, pero sobre todo su aplicación en la vida cotidiana es en el sector empresarial, en el aspecto económico, en el uso de la oferta y la demanda, los cuales no solo se encuentran en contextos matemáticos sino también en contextos de las ciencias; las funciones que tienen la forma f (x)= ax y f(x)=ax+b son los modelos lineales más simples y representan para muchos estudiantes el primer contacto con el concepto de función.

Para efectos de esta investigación se asumirá el siguiente concepto de función propuesto por Azcárate & Piquet, (1996) citado por Luque (2010):

> *Si una variable "x" está relacionada con otra variable "y" de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a "x", mediante una regla según la cual queda determinado un único valor de "y", entonces se dice que "y" es una función de la variable independiente "x".*
> *(pág., 26)*

Se entiende como función la relación de cambio que se da entre dos variables, de tal forma que la variación que se produce en una de ellas, depende del cambio generado en la otra.

Para decir que f es una función del conjunto X en el conjunto Y, se utiliza la notación

$$f: X \to Y$$

Donde X recibe el nombre del conjunto de salida o partida, mientras que Y recibe el nombre del conjunto de llegada.

Una expresión f(x) = y se puede interpretar de la siguiente forma:

El elemento x ϵ X está relacionado con el elemento y ϵ Y, por medio de la función f.

Asimismo la pareja (x, y) ϵ f, de donde la imagen del elemento x en la función f es el elemento y.

7.1.6 Elementos de una función.

Cumpliendo con lo anterior en una función se distinguen los siguientes elementos.

Dominio: corresponde al conjunto de partida o salida de la función y se denota *Dom* (f).

Codominio: corresponde al conjunto de llegada de la función y se denota *Cod* (f).

Rango: es el conjunto formado por los elementos del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio, y se denota *Ran* (f).

Grafo: corresponde al conjunto de todas las parejas ordenadas que pertenecen a la función.

7.1.7 Formas de representar una función

Toda función se puede representar a través de:

Expresión algebraica: que corresponde a la fórmula mediante la cual se indican en general las operaciones que se deben realizar con cada uno de los elementos del dominio para obtener su respectiva imagen.

Tabla de valores: corresponde a una tabla donde se establecen pares ordenados entre los elementos del dominio y el codominio.

Lenguaje Natural: donde se describe una regla con una descripción en palabras.

Gráfica: Corresponde a una representación en un sistema de coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta que en el eje horizontal se ubican los elementos del dominio y en el eje vertical los elementos del codominio.

7.1.8 Pensamiento Variacional

En el documento de los estándares básicos de competencia para el área de matemáticas propuesto por el MEN (1998) para las instituciones públicas y privadas de Colombia, el pensamiento variacional tiene que ver con *"El reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos"* (p. 66).

En el mismo documento se hace énfasis de la importancia de este pensamiento dada su estrecha relación con los otros tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico y estocástico), y en especial con el proceso de la modelación de situaciones que pueden detectarse en la vida cotidiana como por ejemplo la relación entre la edad y la altura de un niño. También se menciona que con el estudio de este pensamiento se atiende al estudio de procesos infinitos, *"pues son estos los que caracterizan el campo conceptual del análisis matemático, en el cual se sitúa el cálculo diferencial e integral" (MEN., 1998) (p. 68)*

Según Azcárate & Piquet (1996) la idea de función nace a partir del estudio de fenómenos de cambio, y se expresa a partir de diferentes lenguajes o sistemas de representación (verbal, tabulado, gráfico, algebraico) cada uno de los cuales permite analizar determinadas características de las funciones.

A partir de lo anterior queda claro que el tema de las funciones está directamente relacionado con el pensamiento variacional, por lo tanto es un error pensar que el saber de memoria la definición formal de función, es un avance hacia el desarrollo de este pensamiento, ya que las definiciones usuales del concepto de función suelen ser estáticas y difícilmente comprendidas por los estudiantes gracias en gran medida al rigor matemático que en ocasiones se le quiere imprimir.

De acuerdo con Hernández (2008) entender las fórmulas de áreas y volúmenes, así como las leyes de la matemática o la física, sólo como expresiones en las cuales se pueden reemplazar valores obstaculizan el desarrollo del pensamiento variacional, el cual da prioridad a captar qué varía, con qué y cómo, antes de memorizar fórmulas. Por lo tanto saber representar las gráficas de las funciones como pinturas inertes que nada tienen para contar, se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos.

> *El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente*

sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Hernández, 2008. p.2).

7.2 Teoría de las situaciones didácticas TSD

La teoría de las situaciones didácticas surge bajo el seno de la escuela francesa de didáctica de la matemática, con Guy Brousseau (2007) a la cabeza, como herramienta para descubrir e interpretar los fenómenos y procesos ligados a la adquisición y a la transmisión del conocimiento matemático.

Es por lo tanto una teoría de que pretende estudiar las situaciones de apropiación del conocimiento matemático a partir de la adaptación del alumno a ambientes que se le presentan en un comienzo como problemáticos, apoyándose en enfoques constructivistas del aprendizaje.

Según Paniza (2003) las situaciones propuestas deben abarcar distintos tipos de respuestas de parte del estudiante al que se le proponen, las cuales pueden ser de tres clases: *”de acción, de formulación o de validación”*. (p. 10)

Situaciones de acción: funcionan sobre el ambiente y favorecen el nacimiento de teorías (implícitas) que funcionan como modelos cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas. *(Panizza, 2003. p. 10)*

En otras palabras son aquellas situaciones en las que el estudiante debe realizar una acción sobre un medio, ya sea material, simbólico o artificial, para lo cual requiere de la puesta en escena de conocimientos implícitos.

Situaciones de formulación: favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos, si tienen dimensión social explícita, se habla de situaciones de comunicación. (Panizza, 2003. p. 11)

Se trata por lo tanto de situaciones en las que el estudiante formula un mensaje a partir de la tarea en cuestión y el receptor de dicho mensaje debe comprenderlo y actuar sobre un medio material, simbólico o artificial con base en el contenido de dicho mensaje.

Situaciones de validación: aquellas donde a los estudiantes se les solicitan pruebas y, por lo tanto, explicaciones sobre las teorías utilizadas y también explicitación de los medios que subyacen en los procesos demostrativos. *(Panizza, 2003. p. 11)*

No obstante para que se produzca aprendizaje a partir de dichas situaciones, el docente debe trasladar al estudiante la responsabilidad sobre la situación que está trabajando, asimismo el estudiante debe aceptar dicha responsabilidad. Esta acción tiene lugar dentro de una negociación muy particular llamada "contrato didáctico" el cual es específico para el conocimiento en cuestión. Dicho contrato hace alusión a la negociación que se da entre estudiante - docente y comprende aquellos comportamientos que el uno espera del otro.

7.2.1 Contrato didáctico

El contrato didáctico se constituye entonces en un sistema de normas; algunas de éstas, en su mayoría genéricas, pueden ser perdurables; otras, en su mayoría específicas del conocimiento objeto de estudio, deben ser definidas en función de los progresos del saber.

Como su nombre lo menciona, la teoría de las situaciones didácticas otorga una especial importancia a las situaciones de aprendizaje, las cuales

Brousseau (1990) describe como *modelos de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado.* Algunas de estas situaciones requieren de la adquisición de conceptos previos específicos, mientras que otras ofrecen la posibilidad de que el sujeto construya el conocimiento por sí mismo en un proceso que al interior de esta teoría ha recibido el nombre de genético.

Con base en lo expuesto y de acuerdo con Panizza (2003), la teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores con los profesores.

7.2.2 Situación didáctica

Dentro de las situaciones que se pueden ofrecer al estudiante, esta teoría plantea las situaciones didácticas, las cuales son construidas intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado, Brousseau (1982) citado por Galvez, G (1994) y retomado por Panizza (s.f.) las define como:

> *Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p.4)*

7.2.3 Situación a-didáctica

Dentro de esta dinámica se identifica otra dimensión: la *situación a-didáctica*, la cual según Chavarría (2006) es entendida como el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeja situaciones de la vida real que podrá abordar por medio de sus conocimientos previos y que le permitirán generar hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro comunidad científica resolviendo situaciones, sin la intervención directa del docente, con el propósito de institucionalizar posteriormente el saber adquirido.

Para Brousseau (1986) citada por Panizza (*año*) el término de situación a-didáctica "*designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego". (p. 4)*

La situación a-didáctica es concebida entonces como un momento de aprendizaje (y no de enseñanza); los alumnos deben encontrar por sí mismos relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtienen.

Destaca en este tipo de situación la no intervención del maestro, la cual se caracteriza por lo que algunos especialistas han llamado "el silencio del docente". No obstante dicho silencio no debe ser visto como ausentismo o dar al maestro el rol de simple espectador, ya que el docente puede alentar al estudiante mencionándole por ejemplo que existen varias formas de resolver la tarea, y que más adelante podrán discutir sobre los resultados obtenidos.

Luego de haber sido aclarada la intencionalidad de la no intervención del docente en la fase a- didáctica, es importante hacer referencia a un nuevo concepto el cual busca que el estudiante se comprometa con la situación de aprendizaje y de esta forma acepte las consecuencias de la transferencia de conocimiento que se puedan generar, dicho concepto es la devolución.

7.2.4 La devolución.

La devolución es un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica, en este el maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica con el problema.

Según Brousseau (2007) una paradoja del docente asociada al concepto de devolución, radica en que, si bien el maestro desea que el alumno elabore la respuesta con sus propios medios, al mismo tiempo quiere que el alumno de la respuesta correcta, lo cual lo coloca ante la encrucijada de comunicar el saber sin revelarlo.

Los diferentes tipos de situaciones en las que se da la devolución tienen por objeto hacer que el alumno de un sentido a los conocimientos que manipula conjugando diferentes componentes del proceso de enseñanza aprendizaje.

Según Brousseau (2007) los docentes presentan resistencia por reducir el aprendizaje a procesos que trasciendan la escolástica tradicional donde el estudiante es un actor pasivo que recibe el conocimiento acabado por parte del docente. Y lo plante así: *"El docente debía comprobar los que los alumnos debían hacer (y rehacer) o no, lo que habían aprendido, o lo que tenían que aprender" (p. 98)*

Es importante destacar en este punto la importancia de tomar en cuenta el conocimiento por parte del estudiante y el aprendizaje del estudiante por parte del docente, ya que la articulación de éstos es una fase esencial de todo proceso didáctico, este doble reconocimiento es el objeto de la institucionalización. Por lo tanto se asume que el rol del maestro también es institucionalizar.

7.2.5 La institucionalización

La institucionalización se da cuando en una situación se reconoce el valor de un procedimiento se convierte en medio de referencia, cual si fuera una fórmula, ya que en las situaciones didácticas es necesario identificar cuáles de las propiedades que se encuentran y se deben conservar.

A modo de ejemplo, una forma de institucionalización se encuentra en las situaciones clásicas de enseñanza: el docente es el responsable de la creación de sentido, es quien dice aquello que quiere que el estudiante aprenda, se lo explica y luego verifica si lo aprendió.

Brousseau en un artículo publicado en 1994 titulado Los roles del maestro, define las situaciones de institucionalización de la ingeniería didáctica como un fenómeno social de trascendental importancia donde se reconocen las consideraciones que el estudiante establece del objeto matemático, con aquellas que el docente establece sobre su aprendizaje, este doble reconocimiento se constituye en el objetivo principal de la institucionalización.

Es importante destacar que la institucionalización busca establecer relaciones entre las producciones de los estudiantes con el saber científico inherente al objeto matemático en cuestión, por lo tanto no debe presentarse el saber científico sin relacionarse con el trabajo desarrollado en la clase.

Con base en lo anterior durante la institucionalización se sistematiza, ordena y vincula las producciones de los estudiantes con las diferentes situaciones trabajadas en la clase con el fin de relacionarlas con el saber cultural.

7.3 Ingeniería didáctica

La noción de ingeniería didáctica se introdujo en la didáctica de la matemática francesa a comienzos de la década de los 80 para describir una manera de abordar el trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero Artigue (1995). Esta comparación se basa en el supuesto de que para realizar un proyecto el ingeniero se apoya en los conocimientos científicos de su dominio, acepta someterse a un control científico, pero al mismo tiempo, está obligado a trabajar sobre objetos mucho más complejos que los de la ciencia, y por tanto puede abordar problemas que la ciencia no puede tomar a su cargo todavía.

De acuerdo con Artigue (2011) *"la ingeniería didáctica desde su origen está fundamentalmente ligada a las intervenciones didácticas (experimentaciones) en las clases, tomando la forma de secuencias de lecciones; estas realizaciones se entienden como la encarnación o puesta a prueba de un trabajo teórico" (p. 20).*

Se trata entonces del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas, teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación presenta entre sus principales características, que es una investigación basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Otra característica que vale la pena resaltar es que la validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (y no validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control).

Tal como lo menciona Artigue (1995) haciendo referencia a que la metodología de la ingeniería didáctica en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, se caracteriza por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. Haciendo alusión a que las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Mientras que la ingeniería didáctica que se ubica en el registro de los estudios de caso, los cuales valida de forma interna, es decir basándose en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Para el desarrollo de este tipo de investigación se deben tener en cuenta las cuatro fases que ésta presenta: a) Análisis preliminares; b) Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas; c) Experimentación; d) Análisis a posteriori y evaluación.

7.3.1 Análisis preliminares

Según Artigue (1995) el análisis preliminar considera tres dimensiones fundamentales dentro de la ingeniería didáctica.

> • *La dimensión epistemológica asociada a las características del saber matemático en juego.*
>
> • *La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.*
>
> • *La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. (p. 40)*

Para trabajar en una ingeniería didáctica son necesarios análisis preliminares respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema.

Los análisis preliminares más frecuentes según Artigue (1995) son:

> *- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza*
>
> *- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.*
>
> *- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.*
>
> *- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización de la ingeniería didáctica. (p. 40 - 41)*

Cada uno de estos análisis debe relacionarse teniendo en cuenta los objetivos específicos que se persiguen con la investigación.

7.3.2 Concepción y análisis a priori

Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva; se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha diseñado y se va a proponer a los alumnos.

Según Artigue (1995) durante esta fase de la ingeniería didáctica se describen las elecciones locales (relacionándolas con las globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.

También se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor. Además se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje.

Según Artigue (1995) el análisis a priori se debe concebir como un análisis del control del significado, es decir, de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la Teoría de las situaciones didácticas, que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería didáctica, ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría del control de las relaciones entre el sentido y las situaciones.

Es válido inferir entonces que el objetivo del análisis a priori es determinar que las selecciones hechas por el investigador al momento de elegir las variables de comando con relación al problema estudiado permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

7.3.3 Experimentación

Es la fase de la ingeniería didáctica donde el investigador tiene contacto directo con una cierta población de estudiantes objeto de la investigación.

Para el desarrollo de esta fase, el investigador debe explicitar de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación, asimismo establecer un contrato didáctico y finalmente aplicar los instrumentos de investigación diseñados de acuerdo con el problema de investigación.

7.3.4 Análisis a posteriori y validación

A la fase de experimentación sigue la de análisis a posteriori que se basa en el análisis del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, que incluyen las observaciones de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos mediante cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y como ya se ha indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori se fundamenta la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Según Artigue (1995) :

En la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones. Estas están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin comprometerse en realidad con un proceso de validación. (p,49)

7.3.5 Potencialidad de la teoría de las situaciones didácticas

Diversas y variadas son las investigaciones que se han realizado en el campo de la investigación en matemática educativa apoyados por la teoría de las situaciones didácticas, a continuación se referencian algunas de ellas sin ser muy exhaustivos, ya que la literatura disponible es muy extensa, con el fin de revalidar su pertinencia para este trabajo.

Tabla 2 Potencialidad de la ingeniería didáctica

Autor	Título	Fuente	Conclusiones
Yaneth Ríos García	Una ingeniería didáctica	Redalyc, Red de Revistas Científicas de	Los resultados de la aplicación de la Ingeniería Didáctica muestran la

	aplicada sobre fracciones	Latinoamérica y el Caribe	efectividad cuantitativa en aspectos como representaciones parte todo y reparto de unidades discretas y continuas, entre otras. Dicha efectividad se muestra a través del porcentaje de respuestas correctas, el cual superó el 70%.
Miryam Trujillo Cedeño. Juan de Jesús Guerrero. Nivia Marina Castro	Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora	Revista de investigación, Universidad de La Salle	Los obstáculos epistemológicos asociados al concepto de función, estos fueron superados por el 62,5%, lo que significa que al momento de plantear un problema los estudiantes tuvieron un buen desempeño en lo correspondiente al identificación de variables, gracias en gran medida a que las actividades planeadas por el docente en la fase de experimentación de la ingeniería didáctica le permitió controlar y anticipar los conocimientos obstáculo y realizar una evaluación permanente de los desempeños de los estudiantes.
Eliécer Aldana Bermúdez, Raúl Peña Giraldo	Análisis del concepto de función en estudiantes sordos de grado décimo	Educación científica y tecnológica. Revista científica.	Con el diseño de secuencias didácticas adecuadas se puede lograr la comprensión/construcción del concepto función, las cuales al ser preparadas por el docente le permiten partir de las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.
Lina María Gallego Berrio,	Análisis de la concepción	Educación científica y tecnológica.	Gracias a las actividades desarrolladas y del análisis a posteriori de la información

Eliécer Aldana Bermúdez	de la actividad de optimizar, desde una ingeniería didáctica	Revista Científica	recolectada en la fase de experimentación, se pudo concluir que la noción que tienen los estudiantes de la optimización no es coherente con la imagen que ellos tienen del concepto y la definición formal del concepto matemático.
Jackeline Cupitra Gómez, Eliécer Aldana Bermúdez	Aprendizaje del concepto de número entero en el marco de una ingeniería didáctica.	Educación científica y tecnológica. Revista Científica	A partir del trabajo desarrollado se evidenciaron fortalezas por parte de los estudiantes como el expresar sin temor sus ideas, trabajo en equipo, proponer soluciones adecuadas teniendo en cuenta los preconceptos y exponer con argumentos válidos la solución a un problema dado.
Eduardo Guichal, Graciela Guala, Ana Malet, Viviana Oscherov	La enseñanza del cálculo desde una ingeniería didáctica.	Memorias REPEM.	Las dificultades detectadas como los aportes de los alumnos llevaron a suponer que sería necesario un cambio programático en la propuesta curricular de la materia Análisis Matemático. En el marco de la Ingeniería Didáctica, la fase del Análisis Preliminar permitió construir los fundamentos teóricos y prácticos que orientaron la elaboración de la ingeniería a utilizar en el aula y su puesta en práctica.

Fuente: producción propia

7.4 Modelación matemática de fenómenos

Las relaciones entre las matemáticas y sus aplicaciones a la solución de problemas del mundo real han sido tema de gran interés en educación matemática en los últimos tiempos, debido a esto el proceso de modelación se ha venido consolidando como una herramienta que posibilita la reflexión y el diseño de situaciones que permiten materializar todas estas relaciones en el aula de clase.

En correspondencia con lo anterior Villa & Vahos (2009) plantean que:

> *La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles (p,12).*

Con la publicación de los lineamientos curriculares en 1998 por parte del Ministerio de Educación Nacional, se hizo un reconocimiento público a la necesidad de dotar de significado las prácticas tradicionales asociadas a la enseñanza de las matemáticas, posibilitando a los estudiantes utilizar sus conocimientos en contextos diferentes al ámbito escolar. Lo anterior se da debido a la necesidad de relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia del estudiante, para darle significado y motivar interés por las matemáticas.

Se entiende entonces por modelación matemática como la actividad que se realiza en el aula de clase cuya naturaleza se deriva de la actividad científica de la modelización matemática. La modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real.

Esta nueva forma de ver la actividad matemática, permite vislumbrar que su propósito va más allá de memorización y aplicación de fórmulas o algoritmos para avanzar hacia un desarrollo del pensamiento matemático, y es allí donde la modelación y resolución de problemas surgen como procesos fundamentales para alcanzar este propósito, superando la tradicional visión transmisionista de contenidos, que hasta el momento era favorecida en gran medida por las prácticas de aula de matemáticas.

Según Villa & Vahos (2009) la modelación matemática es un proceso que se desarrolla a través de una serie de fases, que bien desarrolladas conllevan a la interpretación de un modelo, el cual facilita la adquisición de un concepto matemático, dichas fases se conocen como el ciclo de la modelación. (p. 5)

Diagrama 1 Ciclo de la modelación adaptación con base en el trabajo de (Villa & Vahos, 2009)

Como se puede apreciar este ciclo inicia estableciendo un fenómeno o problema de la vida real, el cual será observado y sometido a un proceso de experimentación con el objetivo de comprenderlo y obtener la mayor cantidad de información posible de él.

Una vez que se ha comprendido la situación o fenómeno se pasa a la siguiente fase que es donde se construye el modelo matemático que satisface la situación o fenómeno en mención, con respecto a esta fase Villa & Vahos (2009) establecen que en la construcción del modelo se generan todos los análisis posibles y se utilizan las herramientas matemáticas para construir una solución teórica de la cual se desprenden las conclusiones del modelo.

Lo cual ubica el proceso de modelación en su cuarta fase donde dichas conclusiones son interpretadas a la luz del fenómeno o problema propuesto. Una vez se ha establecido una adecuada coherencia entre las conclusiones del modelo con el fenómeno, se plantean estrategias de evaluación y validación. Sí desarrollada esta fase el modelo está acorde con el fenómeno problema, se da por finalizado el ciclo, en caso de encontrarse alguna inconsistencia se comienza de nuevo el ciclo, partiendo de la evaluación enriquecida con los análisis realizados. (Villa & Vahos, 2009. p. 5 - 7)

Para finalizar este apartado y de acuerdo con Villa & Mesa (2007), el proceso de la modelación es un sistema cíclico, donde a partir de algún sistema del "mundo real", se obtiene la información necesaria para construir un modelo. Luego se analiza dicho modelo y se extraen las conclusiones pertinentes, con las cuales se busca interpretar y elaborar las respectivas explicaciones, para finalmente examinar las conclusiones en el sistema del mundo real frente a nuevas observaciones y datos.

7.5 Resolución de problemas.

En los últimos años, la resolución de problemas ha sido identificada como una actividad muy importante en el aprendizaje de las matemáticas. En este proceso se pone especial interés en la interacción del estudiante con problemas no rutinarios y las importantes estrategias de resolución. Todo esto contribuye a que el alumno desarrolle una muy importante y buena disposición hacia el estudio de las matemáticas. Además, intencionalmente busca los significados de las ideas matemáticas y discute el sentido de las soluciones de los problemas planteados.

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente un método muy usado para poner en práctica el aprendizaje activo y significativo, debido a que la enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento y aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, que para nada pueden ser dejados de lado, como campo de operaciones para construir formas de pensamiento eficaces.

Según Segura (2006) hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el verdadero sentido a las ideas matemáticas. Se trata de considerar como lo más importante aspectos como los siguientes:

- *Que el estudiante manipule los objetos matemáticos.*
- *Que active su propia capacidad mental.*
- *Que ejercite su creatividad.*
- *Que reflexione acerca de su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente.*
- *Que haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.*
- *Que adquiera confianza y seguridad en sí mismo.*
- *Que se divierta con su propia actividad mental.*
- *Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y de su vida cotidiana. (Segura, 2006. p, 5 -6)*

7.6 Aprendizaje

“Los problemas de aprendizaje y enseñanza son psicológicos y antes de que podamos hacer un gran avance en la enseñanza de las matemáticas, debemos profundizar más acerca de sobre cómo se aprenden” (Skemp, 1999. p,18).

Es común asociar el término aprendizaje con el de enseñanza, pero la verdad es que esta sincronía no siempre se da, es decir, no todo proceso de enseñanza genera un proceso de aprendizaje, más aún en matemáticas, donde muchos de los objetos son abordados de forma abstracta, asumiendo que los estudiantes poseen la estructura mental requerida para generar el aprendizaje objetivo de la tarea de enseñanza y manejan con suficiencia los diferentes tipos de representación que un mismo objeto matemático puede poseer, como es el caso específico del concepto de función que posee un registro verbal, algebraico, tabular y gráfico.

Suele ocurrir que si bien es cierto, el profesor enseña pero el estudiante no siempre aprende, ya que aprender es un proceso que tiene lugar en el alumno, donde también tienen lugar una serie de procesos físicos, sociales y mentales que posibilitan o entorpecen el aprendizaje.

Según (Piaget, 1971) el aprendizaje se da cuando el sujeto construye esquemas mentales de asimilación para abordar la realidad.

> *Todo esquema de asimilación se construye y todo acercamiento a la realidad supone un esquema de asimilación. Cuando el organismo (l*a mente*) asimila, incorpora la realidad a sus esquemas de acción imponiéndose al medio. Cuando los esquemas de asimilación no consiguen asimilar determinada situación, el organismo (mente) desiste o se modifica. En el caso de la modificación, se produce la acomodación, o sea, una reestructuración de la estructura cognitiva (esquemas de asimilación existentes) que da como resultado nuevos esquemas de asimilación. No hay acomodación sin asimilación, pues la acomodación es una reestructuración de la asimilación.*

En esta perspectiva, sólo hay aprendizaje cuando el esquema de asimilación sufre acomodación (p,2).

Trasladando lo anterior al campo de las matemáticas, sólo hay aprendizaje cuando el sujeto asimila el nuevo conocimiento, es decir lo incorpora dentro de sus propias estructuras mentales, y es capaz de acomodarlo si es necesario de acuerdo con las tareas que se le presenten.

Según Ausubel (1963), aprendizaje significativo es el proceso a través del cual una nueva información (un nuevo conocimiento) se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva (no-literal) con la estructura cognitiva de la persona que aprende. En el curso del aprendizaje significativo, el significado lógico del material de aprendizaje se transforma en significado psicológico para el sujeto. Para Ausubel (1963) *"el aprendizaje significativo es el mecanismo humano, por excelencia, para adquirir y almacenar la inmensa cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento" (p,58).*

7.6.1 ¿Qué se entiende por aprendizaje en matemáticas?

Según Schoenfeld (1994.) citado en Trigo (s.f.):

Aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático –que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo, y usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras –desarrollo del sentido matemático (p,60).

Lo que propone Schoefeld (1994) es que aprender a pensar matemáticamente, o como lo plantean las políticas de gobierno actuales *"Ser matemáticamente competente"* involucra más que dominar correctamente una variada gama de conocimientos, implica poseer un pensamiento flexible y dominar los recursos disponibles dentro de la disciplina, además de usar eficientemente los conocimientos propios.

8. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

8.1 Tipo de Estudio

Dado que para el estudio que se va a realizar con esta investigación no se pretende evaluar modelos, ni validar hipótesis o teorías preconcebidas para analizarlas por métodos matemáticos, se trata entonces de una investigación de tipo cualitativo.

La población está constituida por 35 estudiantes de grado octavo de la Institución educativa Nuestra Señora de los Dolores del municipio de Quinchía Risaralda. Se seleccionó este grado ya que según los derechos básicos de aprendizaje emanados del MEN en el 2015, en grado octavo se inicia el estudio de la función lineal y cuadrática, orientado hacia su comprensión y aplicación en situaciones de variación.

Los estudiantes pertenecen a los niveles socioeconómicos denominados medio y bajo, del sector urbano en su gran mayoría, aunque algunos que pertenecen al sector rural.

El diseño curricular de la institución para el área de matemáticas en grado octavo está compuesto de 4 grandes ejes temáticos alrededor de los cuales se organizan y articulan los demás contenidos. El primer eje temático corresponde a los elementos conceptuales y procedimentales de los sistemas numéricos (N, Z, Q) con sus respectivas propiedades y operaciones. El segundo desarrolla los elementos correspondientes al álgebra, el tercero está asociado con el pensamiento variacional y los sistemas analíticos, que es precisamente donde se ubica el concepto de función dentro de la estructura curricular contemplada en el plan de área que la institución presenta en su PEI.

En vista de que el objetivo que se planteó para esta investigación es potenciar el aprendizaje del concepto de función en los estudiantes del grado octavo a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica desde la perspectiva de un estudio cualitativo, para la recolección y producción de datos se empleó como principal técnica la entrevista basada en tareas propuesta por Davis (1984) citado por Zambrano (2012).

8.2 Diseño metodológico.

Debido a que esta investigación tiene por objetivo potenciar el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de grado octavo, corresponde a una investigación de corte cualitativo, tal como lo plantean Sampieri, Collado, & Lucio (2006) al definir las características de la investigación cualitativa entre las que se menciona que ésta *"se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, principalmente los humanos y sus instituciones". (p. 358 – 359)*

El diseño metodológico de esta investigación se apoya en la Ingeniería Didáctica, que se sustenta en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997), la cual según Aldana & Peña (2013) es pertinente cuando se trata de estudios donde se indaga por la manera como los estudiantes adquieren un concepto, ya que posibilita de manera flexible que el profesor investigador elabore sus propias secuencias didácticas de enseñanza, para mediar de esta manera en la comprensión de los saberes matemáticos que pretende ayudar a construir en sus educandos.

A continuación se presenta un esquema de las actividades a desarrollar en cada una de las fases y como se relaciona con los objetivos de esta investigación.

Tabla 3 Fases del diseño metodológico según la metodología de la ingeniería didáctica

FASE	OBJETIVO	ACTIVIDAD
Fase 1. Análisis preliminares	Conocer los aspectos históricos - epistemológico, didácticos y cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de función.	Revisión bibliográfica de las principales dificultades y obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del concepto de función. Análisis de las concepciones de los estudiantes respecto al aprendizaje concepto de función. Análisis de las concepciones de los docentes respecto a la enseñanza del concepto de función.
Fase 2. Concepción y análisis a priori	Identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven tareas de modelación de situaciones de problemas de su cotidianidad, asociadas al concepto de función	Diseño, construcción y desarrollo de una situación a-didáctica con los estudiantes a partir de la modelación problemas de la cotidianidad asociados al concepto de función. Análisis de los resultados de los estudiantes desarrollada la situación a-didáctica, para detectar las principales dificultades en la modelación de problemas de la cotidianidad asociados al concepto de función.

Fase 3. Experimentación.	Analizar la comprensión que alcanzan los estudiantes en la fase de experimentación de la ingeniería didáctica, mediante un proceso de modelación de situaciones en contexto.	Diseño, elaboración y aplicación de situaciones didácticas con los estudiantes sobre modelación de problemas de la cotidianidad para desarrollar el concepto de función. Análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes al desarrollar las situaciones didácticas propuestas.
Fase 4. Análisis a posteriori y validación.	Validar el nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes del concepto de función, mediante la confrontación del análisis a priori y posteriori	análisis de los datos recogidos a lo largo de la experimentación, (observaciones de las secuencias de enseñanza, producciones de los estudiantes dentro y fuera de la clase). Confrontación del análisis a priori y posteriori de los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, con respecto al concepto de función.

Fuente: producción propia

8.2.1 Fase 1. Análisis Preliminares

Como se mencionó anteriormente la metodología de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases, de la cuales la primera corresponde al análisis preliminar, el cual según Artigue (1995) considera tres dimensiones fundamentales, la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica de los conocimientos adquiridos y relacionados con el tema.

8.2.1.1 Análisis histórico epistemológico del concepto de función

Conocer el desarrollo histórico de un concepto, los obstáculos que enfrentó, las sociedades que lo estudiaron, los hombres que lo pensaron y las motivaciones que lo impulsaron son herramientas válidas de las cuales puede echar mano el docente a la hora de aprenderlo y enseñarlo.

El concepto de función es sin lugar a dudas uno de los conceptos fundamentales en la matemática, sin embargo también es uno para el cual los estudiantes presentan mayor dificultad en su conceptualización, gracias en buena medida a su complejidad, generalidad y variedad de representaciones.

Desde el punto de vista curricular el estudio del concepto de función se inicia en los cursos de enseñanza secundaria, pasando por la media hasta el universitario, siendo comúnmente utilizado para modelar procesos químicos, físicos, sociodemográficos y de ingeniería.

Todo lo anterior ha generado numerosas investigaciones por parte de la comunidad investigadora en educación matemática, algunas de las cuales servirán para configurar el siguiente análisis histórico epistemológico del concepto de función.

Según Ugalde (2014) en el momento que el hombre comenzó a tomar conciencia del concepto de cantidad, se vio obligado a llevar registro de sus posesiones, un guijarro en una bolsa, una marca en una tabla de arcilla, una línea tallada en un hueso o un nudo en un lazo, fueron formas ingeniosas que el hombre diseñó para dicho registro, lo cual, claramente representa una correspondencia entre dos conjuntos, donde a cada elemento de un conjunto le corresponde un único elemento en el otro.

Lo anterior deja claro que el concepto de función va de la mano con el concepto de conjunto, ya que tienen sus raíces en el origen mismo de la matemática, por lo tanto es válido pensar que el concepto de función desde su origen está ligado al desarrollo del concepto de cantidad y de forma más general al concepto de número.

Pero como bien es sabido, la matemática misma surgió gracias a la necesidad del hombre de entender el mundo que le rodea, por lo tanto no es de extrañar que el desarrollo conceptual de la función a lo largo de la historia esté ligado a la necesidad de la de entender y describir ese mundo.

Desde incluso antes de la época de Babilonia y Egipto el concepto de función estaba asociado a la dependencia entre cantidades, lo cual está claramente representado en las tablas de arcilla de los babilonios y en papiros de los egipcios.

Los Babilonios conocían relaciones como la que se muestra a continuación, la cual permitía calcular el producto entre cualquiera de dos cantidades a y b:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \; y \; ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

Frente a lo anterior cabe anotar que se escribieron múltiples tablas de cálculo, dos de ellas datan de 2000 aC y dan los cuadrados de los números del 1 al 59, y los cubos de los números del 1 al 32. Dichas tablas se presentan en forma de columnas, como un anticipo a través de la historia, de las tablas que hoy en día se utilizan en los primeros niveles de enseñanza para representar funciones de variable discreta real y = f(x).

Aunque estas culturas no desarrollaron un concepto formal de función como el que se conoce hoy en día, posiblemente debido a limitación de no poseer una simbología adecuada, además de lo empírico e intuitivo de su matemática, estudiaron problemas como la variación de la luminosidad de la luna en intervalos iguales de tiempo, lo cual lleva implícito un sentido latente de funcionalidad.

Con los griegos, de 600 aC a 400 dC parece darse por primera vez en la historia de forma clara la noción de dependencia entre cantidades, particularmente con Arquímedes y las leyes de la mecánica, un ejemplo de esto se encuentra en la primera ley de la hidrostática, descubierta por Arquímedes establece que cualquier cuerpo sólido que se encuentre sumergido total o parcialmente en un fluido será empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por el cuerpo sólido. *(De ARQUÍMEDES, C. D. P. El principio de Arquímedes).*

También es de resaltar su descubrimiento sobre la cuadratura de la parábola, con lo cual Arquímedes prueba que:

El área comprendida entre una parábola y una línea recta es 4/3 multiplicado por el área de un triángulo que tiene por base el segmento de la recta y cuyo vértice superior está sobre la parábola, en el punto medio que forman las verticales a través de los puntos de intersección.

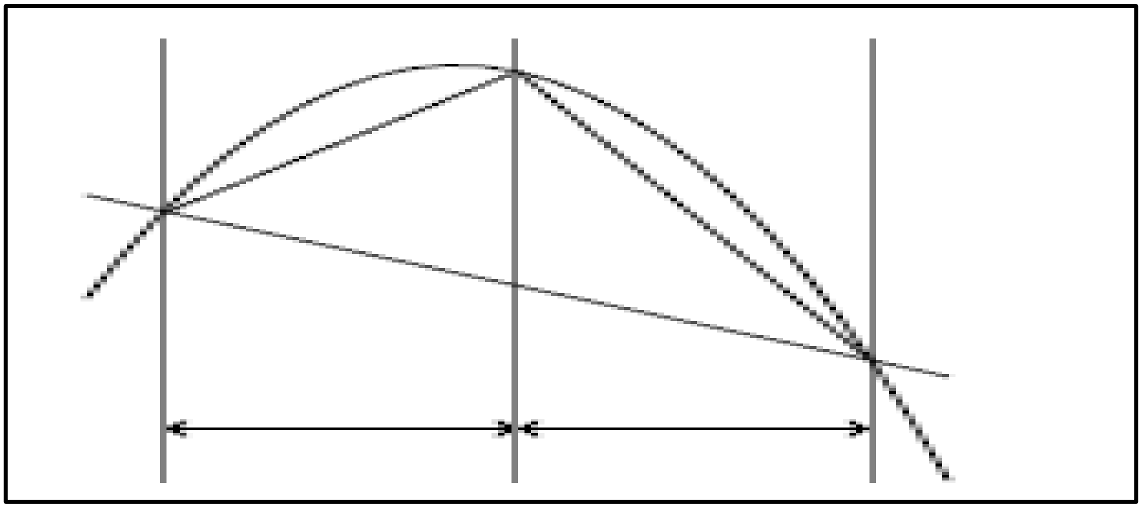


Imagen 12 Resultado de Arquímedes sobre el área de una parábola

Como se puede apreciar en los problemas que eran capaces de resolver los matemáticos de la antigüedad, son problemas que tenían presente características de variación y que como tales requerían en cierto grado de un “sentido variacional”, pues de lo contrario hubiera sido imposible efectuar operaciones y predicciones con las tablas en el primer caso, y generalizaciones, en el segundo.

Continuando con el estudio de las diferentes etapas de la historia involucradas en el desarrollo del concepto de función, continua la matemática árabe (entre los siglos VII y XIII), la cual brinda las primeras evidencias de lo que hoy se llaman razones trigonométricas.

Con respecto a lo anterior Ugalde (2014) escribió que:

> *Los árabes de esa época tenían ya tablas de senos y cosenos, y tablas para la secante, cosecante, tangente y cotangente. Además sentaron las bases del álgebra, la aritmética y la trigonometría –desarrollada a partir de la trigonometría hindú (a través de un texto de astronomía, el Surya Siddhanta). (p.8)*

El interés en la trigonometría por parte de los árabes se vio potenciado cuando entraron en contacto con las tablas de los hindúes. Un ejemplo de estos lo constituyen las tablas astronómicas de Al – Jwarizmi y las tablas de números amigos de Tabit in Qurra, lo cual evidencia claramente dos concepciones primitivas del concepto de función: la tabla de valores y la fórmula. (Ugalde, 2014)

La etapa ubicada en Europa desde el siglo V hasta el XIV, coincide con el oscurantismo de la edad media, en la cual al igual que las demás áreas del conocimiento la matemática y con ella el concepto de función no tuvo un avance significativo hacia la concepción actual, sin embargo cabe destacar que en el siglo XIV, en Oxford, Thomas Bradwardine (s.f.) citado por Ugalde (2014) utilizó un "álgebra de palabras" (p. 9) para expresar relaciones de tipo funcional. Su idea consistió en utilizar letras del alfabeto en lugar de números para sustituir cantidades variables, y representar con palabras, las operaciones suma y resta. Lo cual fue un aporte importante hacia la representación algebraica del concepto de función.

Por la misma época Nicholas Oresme, alrededor de 1361 citado por Ugalde (2014), diseñó una versión primitiva de representación gráfica para modelar la forma en que algunas cosas varían, en particular, fenómenos naturales. Utilizó segmentos verticales de diferentes longitudes, para representar diferentes variaciones de un mismo objeto siendo observado, apoyados sobre un segmento horizontal, con la idea de formar una figura geométrica. Su idea era que propiedades de la figura geométrica, representa propiedades de la cualidad o magnitud siendo observada.

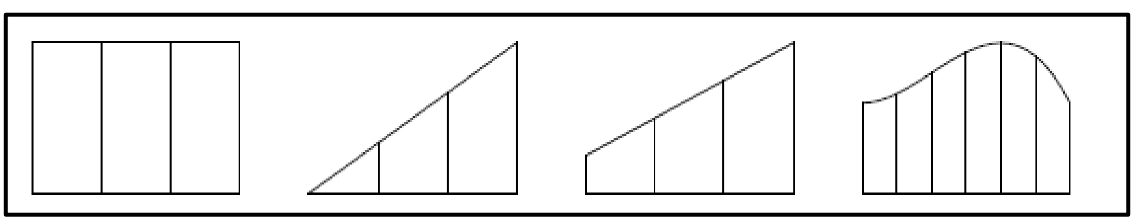


Imagen 13 Representaciones usadas por Oresme

Las figuras de la izquierda (imagen anterior) representan velocidades constantes con aceleraciones constantes, mientras que a la derecha se representan velocidades con aceleraciones variables, en las representaciones de Oresme el segmento de recta horizontal representa el tiempo y los segmentos verticales diferentes velocidades.

La principal diferencia de estas representaciones con las actuales, radica en el hecho de que sobre el segmento horizontal no existía ninguna referencia a escala o posiciones relativas, por lo tanto en dichas representaciones no existían asociaciones de tipo algebraico.

En este recorrido por del desarrollo histórico epistemológico del concepto de función, aparece otro periodo interesante el cual corresponde a los siglos XV y XVI, en el cual según Ruiz (1998) "*se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre "variable" de una función e "incógnita" de una ecuación",* lo cual marcará el sendero simbólico que llevará a la estructuración plena de la noción de función.

El inicio del renacimiento en Europa durante el siglo XVI, significó un avance importante en el desarrollo del concepto de función, avance representado en dos hechos fundamentales:

- El uso de símbolos para representar objetos matemáticos.
- Un nuevo enfoque al estudiar la naturaleza.

El uso de símbolos para representar objetos, fue sin duda un hecho que catapultó el desarrollo del concepto de función y la matemática en sí misma, lo cual es fácilmente justificado al estudiar los diferentes intentos a través de la historia para representar ideas matemáticas.

Por ejemplo al-Jwarizmi en 830 escribió **census et quinque radices equantur viginti quator**, para representar:

$$x + 5\sqrt{x} = 24$$

Cardano en 1545 escribió **cubus p6 rebus aequalis 20**, para representar:

$x^3 + 6x^2 = 20$

Como se puede apreciar en esta representación, las expresiones “cubus” y “rebus” se utilizaron para representar el cubo y el cuadrado de la misma incógnita, y la letra p para representar “suma”.

Viète 1570 (circa) escribió **C + 8Q + 16N aequ 40**, para representar:

$x^3 + 8x^2 \ + 16 \ = 40$

Aquí N representa la incógnita, y C y Q representan el cubo y el cuadrado, respectivamente, de dicha incógnita.

Más tarde, Descartes (1637) escribió la ecuación anterior en la forma:

xxx + 8xx + 16x = 40.

Lo cual claramente es una aproximación al lenguaje algebraico utilizado actualmente.

Según Mankiewics (2000); Moreno & Waldegg (1995) citados por Caicedo (2012), Descartes señala que la matemática no podía ser considerada como en los antiguos griegos, es decir, dividida en geometría y en aritmética, donde la primera, estaba relacionada con las magnitudes y, la segunda, con los números, sino que debía ser una *“ciencia universal en la que se incluya todo lo relacionado con el orden y la medida”* (*Ribnikov, 1998, p.157).*

Fue bajo esta concepción de la matemática y a través de un isomorfismo entre los números reales y el campo de los segmentos de recta, que Descartes establece la relación del álgebra con las curvas geométricas, y se da inicio a la geometría analítica, finalizando así con la disociación existente entre el número y la magnitud. Así pues, es en el siglo XVIII, con el desarrollo de la Geometría Analítica, *“donde se analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza eminentemente analítica que deja de ser la curva para llegar a ser la función” (Farfán & García, 2005, p.491).*

El segundo hecho representativo del periodo del renacimiento y que aportó significativamente al desarrollo del concepto de función, fue el nuevo enfoque dado al estudio de la naturaleza.

> *Antes del siglo XV el estudio de la naturaleza no logró romper su ligamen con la teología. En el siglo XVI primordialmente, los científicos se plantearon problemas desde el punto de vista experimental y físico. El estudio de variables requería entonces relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas adecuadamente. Todo esto implicaba nuevas relaciones que podían verificarse en forma experimental. Al estudiar fenómenos naturales desde una nueva perspectiva matemática, se descubrían nuevas relaciones y un notable progreso en esta ciencia. (Ugalde, 2014, p.11)*

Los siglos XVII y XVIII fueron decisivos hacia el desarrollo del concepto de función que hoy conocemos gracias al desarrollo del cálculo infinitesimal diferencial por parte de Newton y Leibniz, así como los aportes de Fermat y Descartes.

Cabe resaltar que aunque Descartes había arado el terreno para un desarrollo del concepto de función gracias a su sistema Cartesiano de Coordenadas, según Barahona (1992) el hecho de tener ecuaciones para representar determinadas curvas no implica haber definido el concepto de función, lo que sí había era una clara concepción de la dependencia entre las variables expresadas mediante fórmulas.

El primer gran aporte de esta época hacia la formalización del concepto de función surge con Newton y su teoría de **fluxiones**. En su teoría las magnitudes están descritas como movimientos continuos, de manera tal que la variable “dependiente” se va generando en forma continua a partir de la variable “independiente”.

Newton utilizó la palabra **genita**, que en latín significa generada o nacida, para referirse a expresiones de la forma Ax^n. Para varios autores, “genitum” surge como la primera expresión usada para referirse al concepto de función. No obstante la primer vez que apareció la palabra función fue en un escrito de Leibniz publicado en 1673 titulado *“Método de la inversa de las tangentes o de las funciones”.*

> *Tanto para Newton como para Leibniz, la función no era un objeto de estudio, sino un instrumento implícito de anticipación; los problemas abordados eran las relaciones entre función, la derivada y la integral. Así pues, ambos necesitan conceptos ligados a la función pero no dependiesen de un valor determinado, sino que permitieran seguir el “movimiento” de la función, que dado un punto pudiera saberse lo que va a pasar con el próximo. (Villa; Posada, 2006. p,54).*

Como se puede apreciar la comunidad matemática comenzaba a tomar conciencia de la importancia del concepto de función, gracias en gran medida a que las funciones reales de variable real son el objeto central de estudio del Cálculo Diferencial e Integral, sin embargo aún no se tenía una definición propiamente dicha, y el primero de muchos en aventurarse a dar una fue Johan Bernoulli en su artículo “Acta Eroditurum” publicado en 1699, donde define la función de una variable, como una cantidad compuesta, de una o varias maneras, de esta cantidad variable y constantes.

Euler por su parte en su obra "Instituciones Calculi Diferencials", publicada en 1675 se refiere a la idea de función como una expresión algebraica que puede ser anotada por una sola fórmula analítica tal como un polinomio, un seno, un coseno, un logaritmo o aún una integral de cualquiera de estas expresiones.

Otros matemáticos de la época que contribuyeron considerablemente al desarrollo del concepto de función, fueron Lagrange, D’alambert y Fourier.

En el siglo XIX los matemáticos de la época procuraron dar una definición más general y elaborada del concepto de función, Cauchy y Lovachevsky fueron algunos de ellos, sin embargo fue Gustav Dirichlet el primero en dar una definición satisfactoria en 1837 cuando definió la función por medio de las siguientes expresiones:

> Una cantidad variable “y” se llama función de la cantidad variable “ x” si a cada valor de “ x” le corresponde un solo y determinado valor de “y”.
>
> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

No obstante fue Riemman en 1858 quien declaró cimentada la definición de función cuando escribió:

> *Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y. (Ugalde, 2014. p, 9)*

Aunque como se puede apreciar la en la definición de Riemman se incluía muchos elementos de la definición actual de función, aún faltaba incluir las palabras *“perteneciendo a un conjunto*”, lo cual fue una tarea pendiente para matemáticos posteriores.

La percepción del concepto de función en el siglo XX se desliga ya del uso de variables numéricas, y alcanza los altos grados de generalidad con la que se le conoce hoy en día. Ya no es necesario que la variable independiente sea un número real o complejo, ni su valor debe de ser de tal naturaleza.

Buscando el rigor que de sustento al uso de este concepto dentro de las estructuras altamente formales y abstractas de las matemáticas del siglo XX, la definición del concepto de función se ve enmarcado dentro del dominio de la teoría de conjuntos, y en particular, se utiliza la noción de gráfico para darle sustento formal.

A partir de la definición propuesta con base en la definición de Dirichlet y la introducción de la teoría de conjuntos se constituye un nuevo nivel en el concepto de función que alcanza su máxima abstracción con el grupo Bourbaki, quienes con un lenguaje conjuntista proporcionaron la siguiente definición citada por Villa y Posada (2006).

> *Sean E y F dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional, si para todo $x \in E$, existe un único $y \in F$ que está relacionado con x en la relación dada.*
>
> *Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $x \in E$ el elemento $y \in F$ que está relacionado con x en la relación dada; llamamos a y valor de la función para el elemento x, y decimos que la función está determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan las mismas funciones (Lacasta ; Pascual, 1998. p,52).*

De igual manera se dio la definición mediante un subconjunto del producto cartesiano $E \times F$.

Se llama función a la terna $F = (G, X, Y)$ donde G, X, Y, son subconjuntos que verifican las siguientes condiciones:

i) $X \times Y \subset G$

ii) para todo $x \in X$ existe un solo $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función f.

El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ se llama valor de la función f en x y se utiliza para designarlo $y = f(x)$.

Es evidente entonces que la gráfica de G es el conjunto de pares de la forma $(x, f(x))$ donde $x \in X$ lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.

A X se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada (Lacasta; Pascual, 1998. p, 52-53).

Como se puede observar, la definición actual de función aleja a este concepto de todas las características que estuvieron presentes en su génesis y evolución. Tal como lo sugirió Freudenthal (1983) *“aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático” (p,497)*

Dicha definición convierte a la función en un objeto matemático estático, aislado de los fenómenos de variación que estuvieron presente desde la antigüedad como simples descripciones co-relacionales descritas en representaciones retóricas y tabulares, pasando desde la comprensión de fenómenos cuantificables representadas geométricamente por Oresme hasta las definiciones proporcionadas por Bernouilli y Euler (1755), representadas en forma retórica, gráfica y analítica (simbólica).

Tradicionalmente la mayoría de los textos universitarios y muchos de Educación Básica presentan a los estudiantes la definición de función como terna de conjuntos, omitiendo, en la mayoría de los casos, un tratamiento vía la variación y el cambio.

Como se puede apreciar en este recorrido histórico, el análisis epistemológico del concepto de función sugiere tener presente las nociones de variación y cambio en el diseño de situaciones para la construcción del concepto mencionado. Los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), al igual que los Derechos Básicos de aprendizaje (2015) recogen algunas sugerencias para estructurar ideas que permitan dar sentido al pensamiento variacional, como alternativa para desarrollar este concepto.

8.2.1.2 Análisis cognitivo.

Descripción de la tarea

Con el propósito de realizar el análisis cognitivo del concepto de función, se propuso a un grupo de estudiantes de grado undécimo, que ya han estudiado este concepto, una tarea para verificar si empleaban dicho concepto, ya fuera de forma consciente o inconsciente, en la solución de una situación problema.

La actividad es adaptación de una situación propuesta por Villa y Mesa (2007) la cual fue seleccionada por su lenguaje natural que permite a los estudiantes identificar las cantidades que intervienen (variables y constantes) y a partir de la relaciones existentes construir un modelo matemático que mediante su análisis permita tomar decisiones con respecto a la situación.

Para facilitar su análisis, la tarea consta de dos momentos, en el primero se plantean preguntas que promueven el reconocimiento de regularidades y relaciones a través de la realización de cálculos de los valores de una magnitud en relación con las otras; además, requiere que el estudiante se aproxime a describir esta relación funcional utilizando el lenguaje natural.

En el segundo se pretende que los estudiantes identifiquen algunas características de la forma como cambian las variables ya que la situación exige al estudiante tener cierto control sobre el cambio que surge en cada una de las variables (magnitudes) a medida que crecen o decrecen; de tal forma, mediante su análisis pueda identificar un procedimiento que le permita reconstruir una tabla. De esta manera por medio de la manipulación de la tabla el estudiante puede anticipar conclusiones favorables o desfavorables para los viajeros y para la empresa de viajes, con base en las condiciones generales del problema.

El análisis de la información que se analiza a continuación permitió observar que los estudiantes utilizan algunos elementos matemáticos relativos al concepto de función, asimismo reconocen fácilmente cuando dos variables están relacionadas y una depende directamente de la otra, sin embargo en ninguno se pudo apreciar que expresaran dicha relación a través de una expresión algebraica o una gráfica coherente.

La situación propuesta fue la siguiente:

Momento 1. Reconocimiento y representación de las relaciones funcionales.

EMPRESA DE VIAJES TRANSPORTES BATERO.

En la empresa de viajes TRANSPORTES BATERO están pensando en promover un plan turístico a cualquier destino del eje cafetero. Con el ánimo de captar la atención de los viajeros se propuso que el valor del paquete turístico por persona fuera de $350.000. Sin embargo, si esta persona organiza un grupo, se le concedería un descuento de $2.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo. Es decir, si viaja una pareja se hace un descuento de $4.000 a cada uno de ellos. De igual manera, si es un grupo de 5 personas se haría un descuento de $10.000 (5 veces $2.000) a cada uno de los viajeros.

Una de las preguntas para este primer momento fue:

- Si el costo total del viaje para un grupo fuera de $9'800.000, ¿cuántas personas harían parte del grupo?

Nueve de los 10 estudiantes a los que se les propuso la tarea respondió correctamente que 35 personas serían las que harían parte de ese grupo, sin embargo cuando se indago sobre los procedimientos realizados para llegar a esa respuesta, todos coincidieron que lo hicieron a través de un proceso de ensayo y error, dando valores aproximados y analizando los resultados hasta llegar al valor buscado. Quedó claro entonces que los estudiantes no generalizaron una fórmula para determinar cualquier número de personas, sabiendo únicamente el valor del viaje para el grupo.

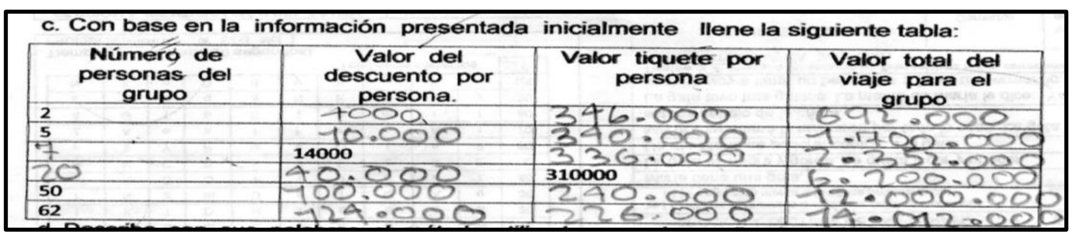
Lo anterior dialoga con lo propuesto por García, Vázquez, & Hinojosa (2004) cuando mencionan que las tareas que más dificultad presentan los estudiantes son aquellas que implican pasar de los registros verbal, tabular o gráfico al algebraico.

- Con base en la información presentada inicialmente se diligenció la siguiente tabla:

Tabla 4 Traslado del registro verbal al tabular

Número de personas del grupo	Valor del descuento por persona.	Valor tiquete por persona	Valor total del viaje para el grupo
2			
5			
	14000		
		310000	
50			
62			

Fuente: producción propia.



c. Con base en la información presentada inicialmente llene la siguiente tabla:

Número de personas del grupo	Valor del descuento por persona.	Valor tiquete por persona	Valor total del viaje para el grupo
2	4000	346.000	692.000
5	10.000	340.000	1.700.000
7	14000	336.000	2.352.000
20	40.000	310000	6.200.000
50	100.000	240.000	12.000.000
62	124.000	226.000	14.012.000

Imagen 14 Respuesta estudiante 2

Al igual que el estudiante 2, los demás estudiantes a quienes se les propuso la tarea completaron correctamente la tabla, con lo cual se deja claro que calculan correctamente los valores de una magnitud a partir de su relación con otras; sin embargo se les dificulta describir relaciones funcionales utilizando el lenguaje natural. Al igual que en el ejercicio anterior ninguno planteó una expresión algebraica que le permitiera calcular el valor del viaje para cualquier número de personas.

En la relación que está a continuación se muestra la tabla 5 creada por la empresa utilizando Excel. Esta tabla pretende simular la situación de tal manera que se pueda llevar el registro de sus posibles ofertas y restricciones a los clientes.

Tabla 5 Consolidado de costos de acuerdo al número de viajeros.

EMPRESA DE VIAJES
TRANSPORTES BATERO

Número de personas del grupo	Valor del descuento por persona.	Valor tiquete por persona	Valor total del viaje para el grupo
3	6000	344000	1032000
23	46000	304000	6992000
26	52000	298000	7748000
29	58000	292000	8468000
32	64000	286000	9152000
35	70000	280000	9800000
38	76000	274000	10412000
41	82000	268000	10988000
44	88000	262000	11528000
47	94000	256000	12032000
50	100000	250000	12500000
53	106000	244000	12932000
56	112000	238000	13328000
59	118000	232000	13688000
62	124000	226000	14012000

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Fuente: producción propia.

Se propuso posteriormente el siguiente ejercicio: Observe la tabla y con base en ella responda:

- ¿En qué valor se incrementa el costo del viaje para el grupo cuando el número de viajeros aumenta?

de 12 a 15

de 15 a 18

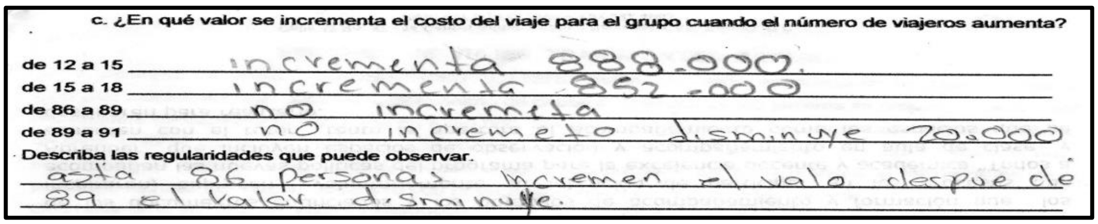
de 86 a 89

de 89 a 91

Describa las regularidades que puede observar.

____

Esta actividad solo fue desarrollada por uno de los diez estudiantes a quienes se les propuso, dejando en evidencia que el concepto de incremento no fue correctamente interpretado, lo cual puede constituir un obstáculo importante cuando se estudian estructuras más complejas como límites o derivadas de una función.


c. ¿En qué valor se incrementa el costo del viaje para el grupo cuando el número de viajeros aumenta?

de 12 a 15 incrementa 888.000.

de 15 a 18 incrementa 852.000

de 86 a 89 no incremeta

de 89 a 91 no incremeto disminuye 20.000

Describa las regularidades que puede observar.

asta 86 personas incremen el valo despue de 89 el valor disminuye.

Imagen 15 Respuesta estudiante 1

Como se puede apreciar el estudiante identificó que para la situación planteada existe un valor máximo dado el número de pasajeros y que a partir de dicha cifra el costo del viaje comenzará a disminuir y lo expresó correctamente usando un lenguaje natural.

Es claro entonces que el estudiante reconoce la relación existente entre la variable número de pasajeros y la variable costo del viaje, además dicha relación no presenta un incremento lineal, y por el contrario después de 86 personas el valor del viaje disminuye a medida que incrementa el número de pasajeros.

A partir del análisis anterior se esperaría que aunque el estudiante no propuso una expresión algebraica de segundo grado que representara la situación, si era de esperar que al momento de graficar la relación existente entre estas dos variables, su modelo tuviera un incremento variable hasta el valor máximo hallado y de allí en adelante un decrecimiento variable del valor del viaje a medida que se incrementa el número de pasajeros.

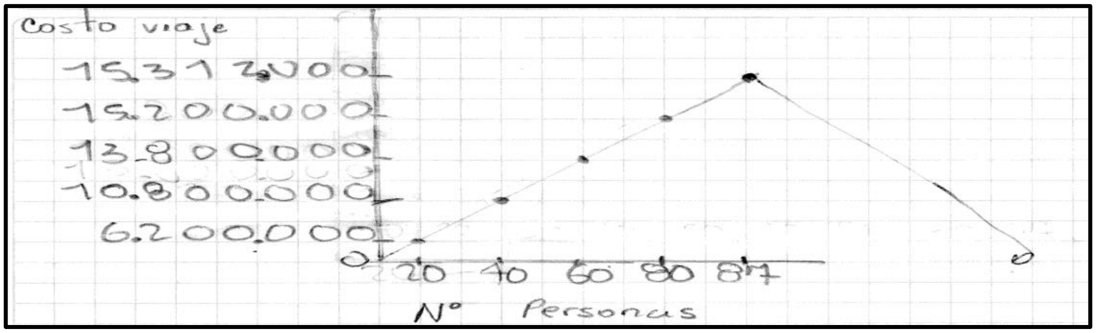


Imagen 16 Respuesta estudiante 1

Como se puede apreciar en la imagen 16 propuesta por el estudiante 1, interpretó que el incremento en el costo del viaje se daba de forma lineal hasta su valor máximo, y así mismo decrece en forma lineal.

Este análisis permite apreciar que no tiene claras las características de la gráfica de una función lineal, y cuando una situación problema puede ser modelada a través de este tipo particular de funciones.

Es de anotar que solo dos de los diez estudiantes que realizaron la tarea propusieron una gráfica que representara el incremento en el costo del viaje, y ambos lo hicieron a través de una representación lineal.

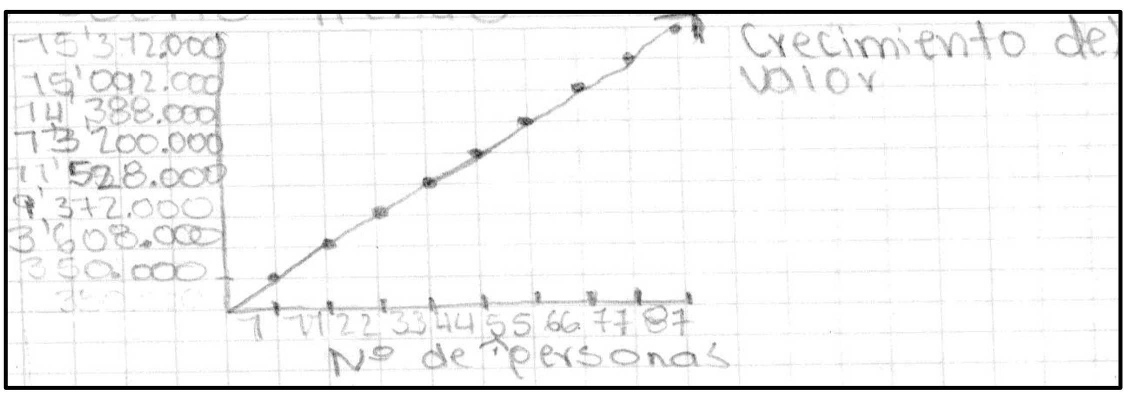


Imagen 17 Respuesta estudiante 3

Conclusiones del análisis cognitivo.

Los datos recogidos a partir del desarrollo de la tarea permitió extraer algunas conclusiones acerca de la forma como los estudiantes asumen el concepto de función, las dificultades que presentan y como lo utilizan para modelar situaciones en la solución de problemas.

En cuanto a la modelación se pudo apreciar que los estudiantes a pesar de comprender la situación, no la tradujeron en una expresión algebraica que facilitara la elaboración de cálculos y en aquellos ejercicios donde se solicitaba hallar un valor de la variable dependiente, utilizaron el método de aproximación por ensayo y error.

Con respecto a la representación gráfica es claro que los estudiantes no han encapsulado el hecho de que las gráficas de las funciones permiten representar la relación de dependencia entre las variables y que dicha gráfica por si misma puede aportar respuestas aproximadas, como por ejemplo el valor máximo o mínimo de una función, para este caso particular.

Debido a las múltiples representaciones que posee el concepto de función, y que analizar las percepciones de un grupo de estudiantes puede ser una tarea muy compleja si no se define claramente qué es aquello que se desea analizar, especialmente con un concepto que ofrece múltiples representaciones, a continuación se definirán algunas categorías con respecto a los contenidos y habilidades necesarios para el aprendizaje del concepto de función. Estas categorías servirán como ruta de navegación para el análisis que se llevará a cabo en las fases 2, 3 y 4 del concepto de función.

Dichas categorías se describen a continuación en la tabla 6:

Tabla 6 Categorías para el análisis del concepto de función	
CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN
Categoría 1: Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables	Reconoce en una relacion cual es la variable dependiente e independiente, así mismo describe la relación de dependencia con sus palabras.
Categoría 2: Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas.	Determina una norma o fórmula ya sea verbal, algebraica o aritmética. que generalice la relación entre los elementos del conjunto de salida y llegada, tal que sea posible determinar un valor en el rango a para cualquier valor del dominio.
Categoría 3: Conversión de un sistema semiótico de representación en otro.	Realiza conversiones para trasladarse desde cualquier sistema de representación (Lenguaje natural – Algebraico – Tabular– Gráfico) en otro según lo demande la situación.
Categoría 4: Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano.	Reconoce que cada punto de la función ubicado en el plano cartesiano representa la relación de dependencia entre cada uno de los elementos que conforman el conjunto de la variable independiente, con su par en el conjunto de la variable dependiente, así mismo justifica cuando una gráfica representa una función o una relación
Categoría 5: Dominio y rango de la función	Identifica que existe un conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, los cuales pueden tener o no sentido a la luz de la situación, a partir del cual se define otro conjunto de valores el cual depende directamente del primero llamado rango.

Fuente propia

8.2.3 Análisis didáctico

La fase del análisis didáctico en el marco de la teoría las situaciones didácticas mediante la ingeniería didáctica, tiene como propósito conocer la forma en que el profesor organiza la enseñanza y cómo ha venido enseñando el concepto objeto de la investigación; es decir, el conocimiento didáctico del contenido a enseñar a partir de la experiencia; además del estudio detallado del objeto matemático presentado en los libros de texto. Para el desarrollo en esta fase se propuso a tres docentes que desarrollaran la misma tarea que se le propuso a un grupo de estudiantes de grado undécimo en el momento de la ingeniería correspondiente al análisis cognitivo y luego se realizó una entrevista con cada uno de ellos .

Según Kagan (1992) citado por Correa y otros (2015) las creencias de los profesores han sido caracterizadas como tácitas, estables, ocasionalmente inconscientes y asociadas con su estilo de enseñanza, es decir que no poseen un lenguaje claro para describirlas y son reacios a exponerlas públicamente, por esta razón se sugiere aproximarse a ellas mediante diferentes técnicas de recolección de información.

Para este análisis se seleccionaron docentes con diferente formación académica: ingeniero, formación empírica y licenciado en matemáticas, asimismo con experiencias diferentes, el primero está empezando su etapa en la docencia, el segundo está recién jubilado con una experiencia de más de treinta años enseñando matemáticas y el tercero con 15 años de experiencia.

8.2.3.1 Análisis docente 1.

El docente 1 al cual llamaremos Mario, pertenece al estatuto docente 1278, con cuatro años de experiencia en la docencia en un colegio rural y con formación académica de ingeniero, manifiesta que el estudio de la función se debe desarrollar en grado noveno debido a que así está contemplado en los planes de área y debe respetarse la planeación que allí aparece. Según lo expresado por Mario la función es un tema más, ya que en ningún momento menciona la importancia de éste para el estudio de estructuras matemáticas más complejas como el cálculo, esta postura constituye un significado personal, no obstante debe ser atendida más desde lo institucional, referencial o pretendido desde una visión curricular.

Las actividades desarrolladas en la realización de la tarea por Mario demuestran un adecuado manejo de las estructuras algebraicas y algoritmos asociados al concepto de función, los cuales desde la visión de Mario son el objetivo del estudio de la función.

Durante la entrevista mencionó que las actividades planteadas en la tarea estaban un poco elevadas para el nivel que manejan los estudiantes especialmente en grado octavo, ya que apenas están iniciando el estudio de las nociones algebraicas, por lo cual es difícil que en este grado puedan dar solución a situaciones problema con este nivel de complejidad.

EMPRESA DE VIAJES TRANSPORTES BATERO.

En la empresa de viajes TRANSPORTES BATERO están pensando en promover un plan turístico a cualquier destino del eje cafetero. Con el ánimo de captar la atención de los viajeros se propuso que el valor del paquete turístico por persona sea de $350.000. Sin embargo, si esta persona organiza un grupo se hace un descuento de $2.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo. Es decir, si viaja una pareja se hace un descuento de $4.000 a cada uno de ellos. De igual manera, si es un grupo de 5 personas se hace un descuento de $10.000 (5 veces $2.000) a cada uno de los viajeros.

Con base en la información anterior responda:

a. ¿Cuál sería el costo del viaje para un grupo de 10 personas? $ 3'300.000

¿Y para un grupo de 23 personas? $ 6'992.000

b. Si el costo total del viaje para un grupo fuera de $9'800.000, ¿cuántas personas harían parte del grupo?

35 o 140 personas.

Imagen 18 Respuesta docente 1

Para la realización de esta tarea Mario planteó la expresión algebraica $f(x) = 350000x - 2000x^2$, con la cual pudo calcular el costo del viaje para cualquier número de pasajeros y así mismo para el punto b, el número de pasajeros para cualquier costo del viaje.

Mario pone de manifiesto que los estudiantes deben tener unos conocimientos previos para la construcción del nuevo concepto, y en su caso particular prevalecen los siguientes.

Las operaciones básicas entre conjuntos, notación de conjuntos, operaciones con números enteros, conjunto de salida y de llegada, ubicación de puntos en el plano cartesiano, manejo de ecuaciones.

Cabe notar que entre los saberes previos mencionados por Mario no aparece el concepto de relación, lo cual permite pensar que la función no es asumida desde la relación que existe entre dos cantidades, en donde una depende completamente de la variación que se da en la otra, sino que obedece más bien a una relación algorítmica donde una variable dependiente es el resultado de manipular la variable independiente.

Las apreciaciones de Mario apuntan a lo planteado por Villa & Vahos (2009) al sugerir que existe una marcada tendencia por parte de los docentes para concebir la enseñanza del concepto de función desde una visión que privilegia el componente algorítmico, donde el principal interés radica en que el estudiante escoja un valor, lo sustituya en una expresión algebraica, realice las operaciones indicadas y obtenga otro valor que luego de tabular, traslade a un registro de representación gráfica.

En una de las tareas propuestas a Mario, se le solicitó la elaboración de una gráfica que representara la variación en el costo del pasaje a partir del numero de personas, a continuación se muestra la tarea realizada por Mario.

d. A medida que el número de personas aumenta de 0 a 87, ¿cómo es el crecimiento en el valor del viaje para el grupo?

El valor del viaje irá en aumento pero cada vez con un incremento menor. hasta llegar a cero el incremento y empiera a disminuir.

¿Cómo se podría representar esta forma de crecimiento en una gráfica? (hacer gráfica)

e. A medida que el número personas aumenta de 88 en adelante, ¿cómo es el decrecimiento en el valor del viaje para el grupo?

¿Cómo se puede representar esta forma de decrecimiento en una gráfica? (hacer gráfica)

f. ¿Para qué número de viajeros la empresa obtendría su máximo ingreso?

87,5 osea 87 personas

¿Cómo se puede observar este valor en una gráfica ? (hacer gráfica)

Imagen 19 Respuesta docente 1

Cuando se le preguntó el porqué no realizó la grafica, argumentó que al ser una función cuadrática era más que obvio que se obtendría una parábola, con un valor máximo para un número de 87 camisetas.

Es evidente que el docente conoce las características de las gráficas de las funciones y dicho conocimiento le permite hacerse una representación mental de la misma y justificarlo correctamente, no obstante, dicha facilidad por así decirlo, puede llevarle a pensar que los estudiantes a quienes enseña también dan por obvias algunas de sus conclusiones, lo cual como demostraron los estudiantes de grado undécimo a quienes se les propuso la misma tarea no fue cierto, por el contrario la representación de funciones donde no se da explícita la expresión algebraica que la modela les genera una gran dificultad.

Con respecto al registro semiótico de representación gráfica, Mario manifestó que es solo una forma más de representar una relación de correspondencia entre dos conjuntos, (algo que el estudiante debe saber hacer), pero no da mucha importancia a las características de estos registros de representación semiótica.

Por otra parte para Duval (1999) las representaciones semióticas son el medio de que dispone el ser humano para hacer visibles sus representaciones mentales; de esta manera, las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación o expresión, lo cual significa que no es adecuado otorgar mayor preponderancia a un registro de representación sobre otros, ya que una adecuada amalgama de estos posibilitan un correcto aprendizaje del concepto objeto de estudio, en este caso la función.

Acerca de las situaciones donde se aplicó el concepto de función, Mario dijo que no alcanzó a desarrollar ninguna, ya que las actividades que el texto sugería eran difíciles de desarrollar dado el nivel de manejo algebraico y algorítmico de los estudiantes.

A partir de lo mencionado por Mario se pudo apreciar que el aprendizaje del concepto de función, enfatiza el manejo algorítmico, representación tabular y finaliza con un registro gráfico de la misma, pero sin ninguna aplicación en situaciones del contexto.

En cuanto a los textos que seleccionó para trabajar el concepto de función, enfatizó las guías de escuela nueva, ya que al ser un colegio rural, son las sugeridas para el programa, sin embargo recalca que en dichos textos no existe coherencia entre las actividades propuestas para desarrollar el concepto y las actividades planteadas para reforzarlo, ya que según él son muy complicadas para el nivel de los estudiantes.

Queda claro que Mario privilegia el nivel de dificultad sobre la comprensión, es decir al parecer lo importante no radica en formar un concepto y poder aplicarlo en situaciones, sino en realizar ejercicios de complejidad creciente, que correspondan a lo propuesto en el currículo y los textos escolares.

8.2.3.2 Análisis docente 2

El docente 2 al cual llamaremos Nicolás ha enseñado matemática por más de 30 años en todos los grados de básica y media principalmente en un colegio urbano, manifiesta que a pesar de ser licenciado en educación básica su formación ha sido empírica, ya que nunca estudió matemáticas en una institución de educación superior, pero debido a la escasez de docentes licenciados de la época y su facilidad para realizar procedimientos aritméticos se le encargó enseñar matemáticas en un colegio.

Acerca del aprendizaje del concepto de función, Nicolás manifestó que este estudio se inicia en grado octavo con la enseñanza de la línea recta, para lo cual es fundamental partir de la ecuación de la recta y los respectivos despejes, para introducir el concepto de función.

A partir de la tarea propuesta a Nicolás (ver anexo 2), comentó que este tipo de ejercicios nunca los trabajo en clase de matemáticas y mucho menos con estudiantes de grado octavo, ya que su manejo del álgebra es incipiente, no obstante en alguna ocasión desarrolló actividades similares a estudiantes de grado undécimo, pero no con el objetivo de afianzar el concepto de función sino para conocer el manejo de la hoja de cálculo Excel.

a. ¿Cuál sería el costo del viaje para un grupo de 10 personas? $ 3 300 000=
¿Y para un grupo de 23 personas? $ 6992000=

b. Si el costo total del viaje para un grupo fuera de $9'800.000, ¿cuántas personas harían parte del grupo?
35 ;

c. Con base en la información presentada inicialmente llene la siguiente tabla:

Número de personas del grupo	Valor del descuento por persona.	Valor tiquete por persona	Valor total del viaje para el grupo
2	4000	346000=	692000=
5	10000	340000=	1700000=
7	14000	336000=	2352000=
20	40000=	310000	6200000=
50	100000=	250000	12500000=
62	124000=	226000	14012000=

d. Describa con sus palabras el método utilizado para desarrollar la actividad anterior:
Utilizo hoja de cálculo excel y aplico la fórmula para el descuento programado por la empresa, igualmente para costo del tiquete y valor por grupo

Imagen 20 Respuesta docente 2

Nicolás sugirió que este tipo de actividades sería beneficioso valerse de herramientas como la hoja de cálculo, teniendo en cuenta que es fundamental que los estudiantes conozcan de antemano las fórmulas básicas y que sepan realizar gráficas. Apoyado en dicho recurso creó la tabla que se muestra a continuación en la cual calculó el costo del viaje para un rango entre 3 y 124 pasajeros.

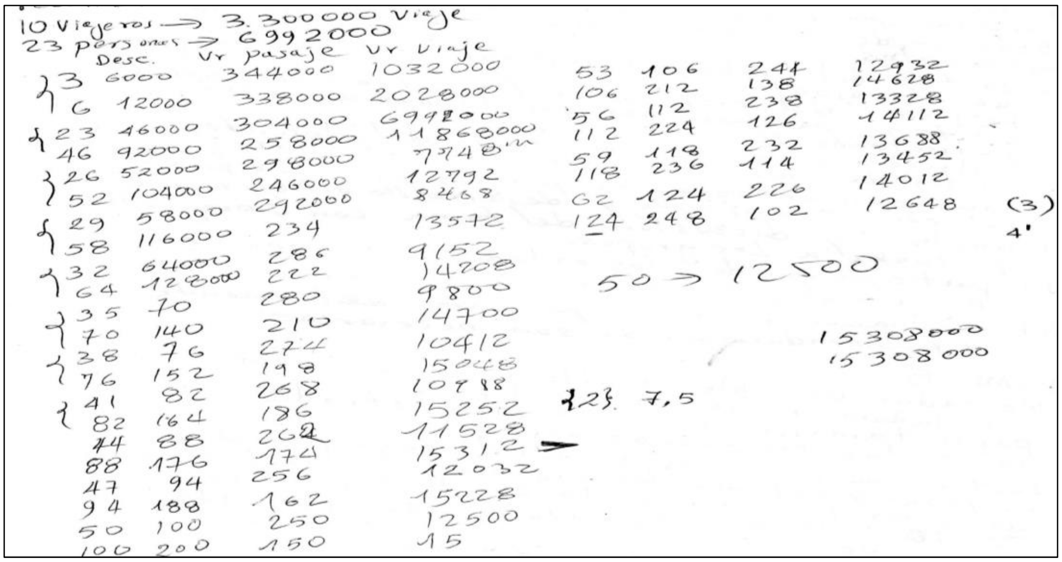


Imagen 21 Respuesta docente 2

Durante la entrevista enfatizó que es muy importante el manejo apropiado de ecuaciones y como él mismo lo menciona los respectivos despejes, lo cual deja entrever que en su método existe una marcada inclinación hacia el desarrollo de habilidades matemáticas para aplicar algoritmos, en este caso particular el despeje y solución de ecuaciones.

En cuanto a la forma de iniciar el estudio del concepto de función, Nicolás propone partir del estudio de las relaciones a partir de una situación en la que haya relación de dependencia entre dos variables, como por ejemplo un recibo del servicio público de agua, donde el valor de la factura tiene una relación de dependencia con la cantidad de metros cúbicos gastados por el usuario.

Plantea que es fundamental que el estudiante reconozca cuando una relación corresponde a una función y cuando no, para lo cual se vale de situaciones como la siguiente:

En cada una de las situaciones, determinar cuál corresponde a una función y por qué:

Dados los conjuntos:

A: {Juan, Pedro, Alberto} B: {María, Teresa, Julieta, Diana}

Relación: Ser novio de, sabiendo que solo se puede tener una novia

Dados los conjuntos:

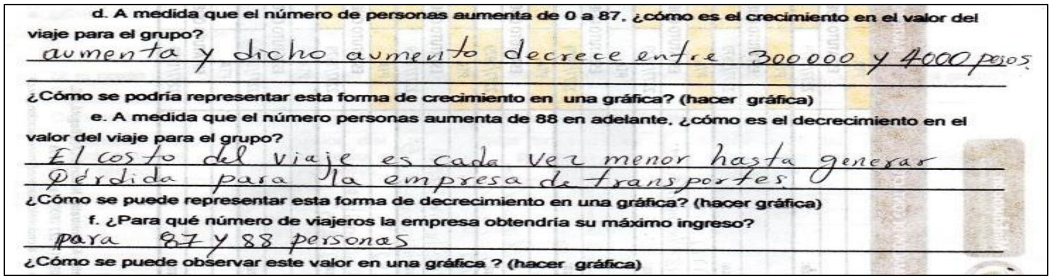
A: {Juan, Pedro, Alberto, Carlos} B: {María, Teresa, Julieta, Diana}

Relación: Ser primo de, sabiendo que cada hombre puede tener varias primas.

Según palabras del Nicolás este tipo de ejercicios permiten determinar si el estudiante ha encapsulado el concepto, ya que puede diferenciar entre una relación y una función.

Es claro que para Nicolás es fundamental que el estudiante aprenda el concepto de función a partir del criterio de unicidad, privilegiándolo sobre la variación, lo cual está muy acorde con las definiciones propuestas en la mayoría de libros de texto, donde se define la función resaltando la importancia de que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango, dejando en segundo plano la relación de dependencia entre variables, donde una depende de la variación que sufra la otra.

En lo que se refiere al registro semiótico de representación gráfico, resaltó su importancia en el análisis de este tipo de actividades, ya que a partir de la gráfica se pueden extraer conclusiones que no son fáciles de comprender a partir de una tabla, o una representación algebraica, como por ejemplo el valor máximo o mínimo de una función.



d. A medida que el número de personas aumenta de 0 a 87, ¿cómo es el crecimiento en el valor del viaje para el grupo?

aumenta y dicho aumento decrece entre 300000 y 4000 pesos

¿Cómo se podría representar esta forma de crecimiento en una gráfica? (hacer gráfica)

e. A medida que el número personas aumenta de 88 en adelante, ¿cómo es el decrecimiento en el valor del viaje para el grupo?

El costo del viaje es cada vez menor hasta generar pérdida para la empresa de transportes

¿Cómo se puede representar esta forma de decrecimiento en una gráfica? (hacer gráfica)

f. ¿Para qué número de viajeros la empresa obtendría su máximo ingreso?

para 87 y 88 personas

¿Cómo se puede observar este valor en una gráfica ? (hacer gráfica)

Imagen 22 Respuesta docente 2

A continuación se muestra la gráfica que elaboró Nicolás con la ayuda de Excel.

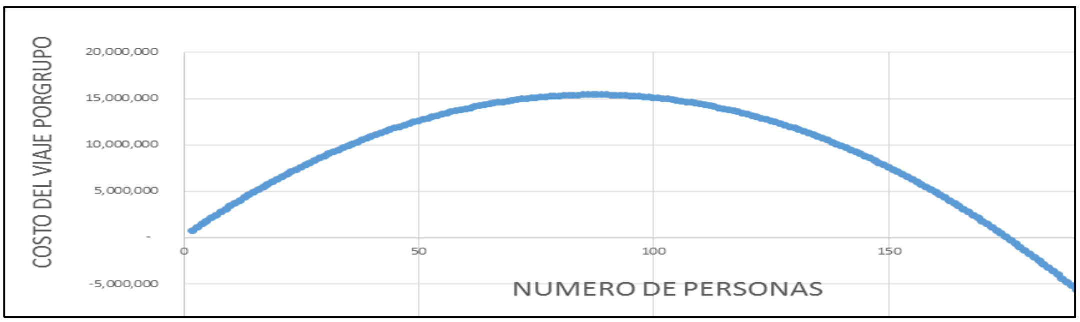


Imagen 23 Respuesta docente 2

Como se puede apreciar en Nicolás otorga gran importancia a una adecuada representación gráfica de la situación, ya que a partir de ésta se pueden analizar fenómenos que pueden causar cierta confusión en los estudiantes como por ejemplo ¿Por qué un número mayor de camisetas cuesta menos dinero que un número menor de camisetas?.

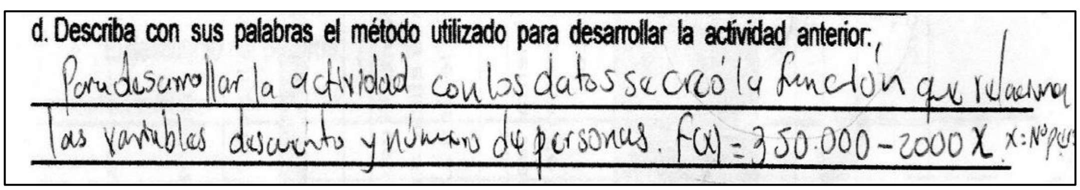
Con respecto a la aplicación del concepto, manifestó que nunca llegó a la modelación de situaciones, ya que se da por aprendido el concepto cuando el estudiante realiza correctamente los reemplazos, desarrolla procedimientos, tabula y posteriormente gráfica teniendo en cuenta las características de cada función (lineal, parábola y curva).

8.2.3.3 Análisis docente 3

El docente 3 al cual asignaremos el seudónimo de Jorge, pertenece al estatuto docente 1278 y tiene una experiencia de 15 años orientando matemáticas en todos los grados de educación básica secundaria y media.

Para Jorge el aprendizaje de la función debe iniciarse en grado noveno, con el estudio de la función lineal y cuadrática. Jorge asume que para este grado los estudiantes no alcanzan a desarrollar el concepto de función, ya que esto se logra en grado undécimo con el estudio del cálculo, no obstante es importante que los estudiantes identifiquen las características fundamentales de las gráficas a partir de su sistema de representación algebraico.

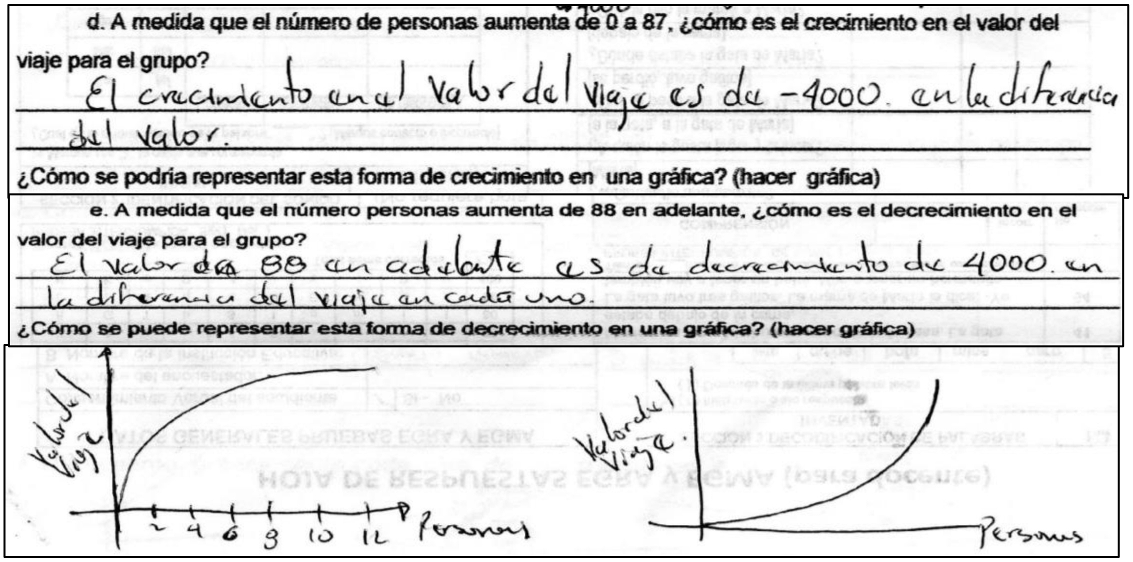
En el análisis realizado a la tarea desarrollada por Jorge, se puede apreciar claramente que encontró una expresión algebraica lineal que le permite calcular el valor del descuento para cualquier número de pasajeros $f(x) = 350000 - 2000\,x$, pero no llegó hasta una expresión que le permitiera generalizar el costo del viaje, a pesar de tener claro que se trataba de una función cuadrática.


d. Describa con sus palabras el método utilizado para desarrollar la actividad anterior:

Para desarrollar la actividad con los datos se creó la función que relaciona las variables descuento y número de personas. $f(x) = 350.000 - 2000\,X$ X: Nº

Imagen 24 Respuesta docente 3

Con respecto al registro semiótico de representación gráfica Jorge manifiesta que los estudiantes, previo al estudio del concepto de función deben saber ubicar parejas ordenadas en el plano cartesiano y por consiguiente graficar funciones, no obstante cuando se le solicitó en una de las tareas graficar la relación entre el número de pasajeros y el valor del descuento, su representación presentó algunas inconsistencias, ya que como


d. A medida que el número de personas aumenta de 0 a 87, ¿cómo es el crecimiento en el valor del viaje para el grupo?

El crecimiento en el valor del viaje es de -4000. en la diferencia del valor.

¿Cómo se podría representar esta forma de crecimiento en una gráfica? (hacer gráfica)

e. A medida que el número personas aumenta de 88 en adelante, ¿cómo es el decrecimiento en el valor del viaje para el grupo?

El valor de 88 en adelante es de decrecimiento de 4000. en la diferencia del viaje en cada uno.

¿Cómo se puede representar esta forma de decrecimiento en una gráfica? (hacer gráfica)

Imagen 25 Respuesta docente 3

el mismo lo menciono no tiene sentido que a partir de un número determinado de camisetas el valor de estas en lugar de aumentar disminuye

Como se puede apreciar Jorge no tuvo en cuenta que al tratarse de una función cuadrática, esta tiene un valor máximo, lo cual pudo ser ocasionado por no haber determinado un expresión algebraica que le permitiera calcular el costo del viaje para cualquier número de pasajeros. Razón que le llevó a intentar representar los dos intervalos 0 a 87, y 88 en adelante a través de dos gráficas independientes sin tener en cuenta que si ambas corresponden a la misma situación y pueden ser modeladas por una única función, el registro gráfico debe permitir observar el incremento y decrecimiento en el mismo registro semiótico de representación.

Cuando se habló acerca de las aplicaciones que se le dan al concepto de función, Jorge mencionó que las únicas situaciones en las cuales se aplica son aquellas relacionadas con el estudio de utilidades en grado noveno, donde se propone a los estudiantes que modelen una expresión algebraica que represente la utilidad de una fábrica o negocio a partir de la diferencia entre los ingresos y gastos. No obstante dicha expresión no se usa para analizar otras situaciones relacionadas con el problema planteado.

Las aplicaciones propuestas por Jorge refuerzan lo propuesto por Villa y otros, (2008) cuando plantean que la modelación como proceso para el aprendizaje de la matemática y específicamente la función, aún se encuentra en sus ciernes, ya que pedir a un estudiante que plantee una expresión algebraica a partir de un enunciado verbal y pretender que ese sea el objetivo de aprendizaje, es sólo otra forma de desarrollar un algoritmo.

Como se puede apreciar en las apreciaciones de los docentes, a pesar de pertenecer a épocas diferentes, al igual que sus formaciones académicas, coinciden en que el concepto de función parte de un adecuado manejo aritmético algebraico, el cual se apoya en un registro tabular, para finalizar en un sistema de representación gráfico, pero restan importancia a la modelación de situaciones como herramienta para acercar al estudiante al concepto de forma más significativa, mediante el análisis de situaciones de variación.

Tabla 7 Resumen análisis didáctico

	MARIO	NICOLAS	JORGE
Formación Académica	Ingeniero Mecatrónico	Licenciado en básica primaria	Licenciado en matemáticas
Años de experiencia enseñando matemáticas	4	31	15
Elementos matemáticos que privilegia en el aprendizaje de la función	Manejo algebraico de expresiones.	Despeje de incógnitas para solucionar ecuaciones.	El registro algebraico de una función a partir un enunciado verbal.
Saberes previos requeridos para el estudio del concepto de función	Operaciones con números enteros, ubicación de puntos en el plano cartesiano,	Despeje y solución de ecuaciones de primer grado.	Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

	manejo de ecuaciones.		
Situaciones en las que aplica el concepto de función.	No aplica	No aplica	Función utilidad, Ingreso menos costo.
Registro semiótico de representación que privilegia.	Registro algebraico	Registro gráfico.	Registro algebraico

Fuente: producción propia

8.2.3.4 El concepto de Función en los libros de texto del bachillerato

La forma de planear y desarrollar las clases por parte de los maestros reflejan sus ideas y concepciones acerca de cómo aprender y enseñar matemáticas, ideas que se construyen a partir de su formación y propias experiencias.

Según Luque (2010):

> *Los textos escolares son más que los recursos que utiliza el docente de matemáticas para organizar el trabajo del aula, también son el reflejo de la transposición didáctica de los objetos y conceptos matemáticos y encargados de transmitir los conocimientos socialmente aceptados. (pág. 21)*

Con el objetivo de enriquecer esta investigación, se realizó una revisión de los libros de texto de bachillerato de grado noveno que mayor difusión tienen en Colombia, ya que es en este grado donde normalmente se inicia el abordaje del concepto de función. En los textos seleccionados se identificaron los elementos matemáticos que configuran el concepto de función.

En cada texto se analizó cómo está organizada la unidad correspondiente al tema de esta investigación, qué temas le anteceden y le preceden, las definiciones que se presentan, y las actividades que se plantean para el estudiante.

En el texto nuevas Matemáticas 9 Álgebra, “Geometría, Estadística” de la editorial Santillana, el concepto de función aparece en la cuarta unidad, luego del estudio de los números reales, las operaciones entre expresiones algebraicas, las propiedades de la potenciación, la radicación y los números complejos.

Cabe notar que la cuarta unidad de este texto titulada *Sistemas de ecuaciones lineales*, inicia con la definición del concepto de función, como requerimiento para iniciar el estudio de la función lineal, pero sin dar ninguna explicación previa de la importancia de este concepto para el estudio de los sistemas de ecuaciones, especialmente al momento de abordar el método de solución gráfica.

Lo anterior permite intuir que en el primer acercamiento que los estudiantes tienen al concepto de función, esta es vista como un proceso necesario para realizar gráficas de líneas rectas, lo cual a su vez permite solucionar sistemas de ecuaciones de 2 x 2, o 3 x 3, pero dejando de lado que la relación entre dos variables, donde una varía dependiendo de la otra se puede aplicar a una gran variedad de fenómenos de la vida cotidiana.

En la unidad 5 se retoma el tema de la función, pero esta vez con el estudio de la función cuadrática donde se define como una expresión algebraica de grado dos cuya gráfica corresponde a una parábola.

A continuación en la tabla 8 se muestra el tratamiento que se le da al concepto de función iniciando en la página 75 hasta la 97.

Tabla 8 Análisis texto 1

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Santillana S.A	Nuevas Matemáticas 9 Álgebra, Geometría, Estadística	Miriam del Carmen Morales. Wilson Enrique Torres S. Anneris del Rocio Joya V. Diana Constanza Salgado R. Juan de Jesús Romero Roa	Bogotá	
Contenidos.				
Función.		Definición de Función $f: A \rightarrow B$		

Elementos de una función.	Definición de dominio, codominio, rango, grafo
Representación de funciones	Definición de expresión algebraica, definición de tabla de valores, definición de gráfica.
Variables dependientes e independientes.	Ejemplo de una situación de dependencia entre dos cantidades, donde una depende directamente de la otra. ƒ(x) = y
Función lineal y función afín.	función lineal como expresión de la ƒ(x) = mx donde m es una constante diferente de cero.
Pendiente de una recta.	Pendiente de la recta definida como el cociente de la diferencia de la variables dependientes de dos puntos de la recta y la diferencia de la variables independientes de dichos puntos. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Ecuación de la recta.	Como expresión algebraica de la forma ƒ(x) = mx ± b , con b como el intercepto de la recta en el eje y.
Métodos para hallar la ecuación de la recta.	Cuando se conoce la pendiente y el intercepto. Cuando se conoce un punto y la pendiente. Cuando se conocen dos puntos.
Ecuación general de la recta	Como expresión de la forma Ax + Bx + C = 0, con A ≠ 0, o B≠0
Posición relativa de dos rectas en el plano	Rectas paralelas cuando dadas dos rectas $y = m_1x \pm b_1$ y $y = m_2x \pm b_2$ se cumple que $m_1 = m_2$ Rectas perpendiculares cuando dadas dos rectas $y = m_1x \pm b_1$ y $y = m_2x \pm b_2$ se cumple que $m_1 . m_2 = -1$
Modelación	Graficar funciones, hallar fórmulas a partir de gráficas, construir tablas.
Aplicaciones.	Cálculo de una variable a partir de la otra según la información presentada en tablas o gráficas.
Ejercicios.	Completar tablas de valores. Escribir fórmulas. Graficar. Paso del registro verbal al algebraico.

Fuente: adaptación Aldana (2011)

Como puede observarse en el texto anterior la función se define como un tipo especial de relación, en el cual a cada elemento de un conjunto A le corresponde un único elemento de un conjunto B. El concepto de función se introduce de manera descontextualizada, sin mostrarse la relación que puede presentar con situaciones problema del contexto, así mismo los ejemplos que se ofrecen sólo apuntan a recrear la definición presentada. Al finalizar cada subtema se proponen algunos ejercicios planteados a modo de situación problema, pero solo con el objetivo de reforzar la definición, más no para que el estudiante sea quien construya el concepto a partir de ellas.

En el texto la modelación es entendida como un proceso mediante el cual el estudiante construye tablas y gráficas a partir de fórmulas y viceversa.

El siguiente texto también de la editorial SANTILLANA llamado HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 9, corresponde a la edición siguiente del texto anteriormente analizado. No obstante y al igual que en su versión anterior el concepto de función es presentado en la cuarta unidad luego de los mismos temas y también como introducción al sistema de ecuaciones lineales.

Sin embargo presenta algunas variaciones, como por ejemplo al definir la función esta es asumida no como una relación sino como una regla, así mismo en las formas de representación se incluye la expresión verbal, la cual no era contemplada en la versión anterior.

Tabla 9 Análisis texto 2

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Santillana S.A	Hipertexto Matemáticas 9	Hugo Hernán Chávez López. Neila Yamile Castañeda M. Moeria Gómez Bello. Anneris del Rocio Joya V. Johann Alexander Chizner R. Mercedes Gomez Bello.	Bogotá	2010

Contenidos.	
Función.	Definición de Función ƒ: A → B
Elementos de una función.	Definición de dominio, codominio, rango, grafo
Representación de funciones	Definición de expresión algebraica, definición de tabla de valores, definición de gráfica, definición de forma verbal.
Funciones de variable real	
Método gráfico para identificar funciones.	Método de la recta vertical.
Función lineal y función afín.	función lineal como expresión de la ƒ(x) = mx donde m es una constante diferente de cero.
Pendiente de una recta.	Pendiente de la recta definida como el cociente de la diferencia de la variables dependientes de dos puntos de la

	recta y la diferencia de la variables independientes de dichos puntos. $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
Ecuación de la recta.	Como expresión algebraica de la forma ƒ(x) = mx ± b , con b como el intercepto de la recta en el eje y.
Métodos para hallar la ecuación de la recta.	Cuando se conoce la pendiente y el intercepto. Cuando se conoce un punto y la pendiente. Cuando se conocen dos puntos.
Ecuación general de la recta	Como expresión de la forma Ax + Bx + C = 0, con A ≠ 0, o B≠0
Posición relativa de dos rectas en el plano	Rectas paralelas cuando dadas dos rectas $y = m_1 x \pm b_1$ y $y = m_2 x \pm b_2$ se cumple que $m_1 = m_2$ Rectas perpendiculares cuando dadas dos rectas $y = m_1 x \pm b_1$ y $y = m_2 x \pm b_2$ se cumple que $m_1 . m_2 = -1$ Rectas secantes.
Modelación	Graficar funciones, hallar fórmulas a partir de gráficas, construir tablas.
Aplicaciones.	Cálculo de una variable a partir de la otra según la información presentada en tablas o gráficas.
Ejercicios.	Completar tablas de valores. Escribir fórmulas. Graficar. Paso del registro verbal al algebraico.

Fuente: adaptación Aldana (2011)

A pesar de ser la versión mejorada, presenta los mismos características en cuanto al abordaje del concepto de función ya que se enfatiza en la definición, más nos en un proceso que lleve al estudiante a construir el concepto, además la modelación es entendida en el mismo sentido que la versión anterior.

En el texto *"Logros matemáticos 9"* de la editorial McGrawHill, el estudio de la función se inicia en el capítulo 6 con el objetivo de plantear y solucionar situaciones relacionadas con funciones cúbicas, exponenciales y logarítmicas, así mismo resolver ecuaciones cúbicas, exponenciales y logarítmicas.

El capítulo 6 en este texto está precedido del estudio de los números complejos, los sistemas de medición y algunas nociones de geometría, para en el capítulo 7 iniciar el estudio de las sucesiones y series.

Debido a que en esta edición de la serie Logros Matemáticos, no se define el concepto de función, se puede asumir que para esta editorial el estudio de la función se inicia en el grado octavo, con el estudio de la función lineal y cuadrática.

Tabla 10 Análisis texto 3

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
McGrawHill	Logros Matemáticos 9	Héctor E Contreras Gilma Esperanza Lizcano Giovany de Jesús García Enrique Cano Castillo Humberto Flechas Rodríguez	Bogotá	1996

Contenidos.

Función volumen	Función de la forma $f(x) = x^3$ la cual si es definida en los reales permite calcular el volumen de cubo de lado x.
Funciones cubicas de la forma $f(x) = x^3 \pm d$	Función $f(x) = x^3 \pm d$ como la suma de una función cúbica $f(x) = x^3$ sumada o restada con una función constante y=d
Función cúbica general	Función de la forma $ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d$ representada como la suma de una función volumen, función área, función lineal y función constante.
Solución de ecuaciones cúbicas	Solución de ecuaciones cúbicas por ensayo de división del término independiente. Solución de ecuaciones cúbicas por división de polinomios Solución de ecuaciones cúbicas por división de un factor $(x \pm n)$
Función exponencial	Función de la forma $f(x)=b^x$ con $(b>1)$ la cual transforma a cualquier número real dado x en el resultado de elevar la base b a la potencia x.
Relaciones funcionales y sus inversas	Relación inversa según la cual si una función está totalmente definida y es inyectiva, su inversa también es una función.
Función logarítmica	Función de la forma $y=\log_n x$ como inversa de la función exponencial.

Fuente: adaptación Aldana (2011)

Como se puede apreciar en este texto, el concepto de función se aborda desde una mirada geométrica, como una expresión que permite calcular el volumen de un cubo para el caso de la función cúbica, para las funciones exponenciales y logaritmos que se limita al manejo algebraico de estas expresiones y su representación gráfica.

Es importante destacar que en este texto las actividades apuntan a la utilización de la función como herramienta para averiguar algo, o simplemente como una relación, la cual permite realizar una gráfica si se manipula correctamente, pero no se retoma el concepto de función como una relación entre dos variables, según la cual una varía dependiendo de cómo varía la otra, con la condición que a cada elemento del dominio solo le puede corresponder un elemento del rango.

8.3 Fase 2 Concepción y análisis a priori

En esta fase de la ingeniería didáctica se presenta a los estudiantes la situación a didáctica que se ha diseñado, con el fin de establecer sus concepciones con respecto al concepto de función, previo a la implementación de las situaciones didácticas que ayudarán a su interiorización.

Con el desarrollo de la fase 2 de la Ingeniería Didáctica “Concepción y análisis a priori”, se analizaron las concepciones de un grupo de 35 estudiantes de grado octavo, previas al desarrollo de las situaciones de intervención. Para este fin se propuso una situación a-didáctica en la cual a partir del análisis una situación problemática relacionada con el contexto próximo de los estudiantes, se buscó determinar las elecciones locales que ejecutan al momento de realizar tareas que involucran el concepto de función.

Este análisis servirá para predecir posibles errores o dificultades en el desempeño de los estudiantes, con lo que se espera posibilitar un mejor aprendizaje del concepto, lo cual será validado en la fase 4 “Análisis a posteriori”.

Para este análisis a priori se diseñó un instrumento el cual es adaptación de algunas actividades propuestas por Castro y Díaz , (2014), que serán analizadas de acuerdo con las categorías establecidas en el análisis cognitivo de este trabajo.

La primer tarea está asociada con la categoría de análisis 1 "Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables", con lo cual se analizó en qué medida los estudiantes reconocen una relación de dependencia entre dos variables.

La situación propuesta fue la siguiente:

CELULARES

Dos empresas de telefonía ofrecen los siguientes planes.

Empresa A: ofrece una cuota fija de $ 15000 al mes, más $ 50 por minuto.

Empresa B: ofrece pagar sólo el consumo a $ 150 por minuto.

a. ¿ Cuál es el plan más favorable si se hablan menos de 120 minutos en el mes?

____

¿Por qué?

____

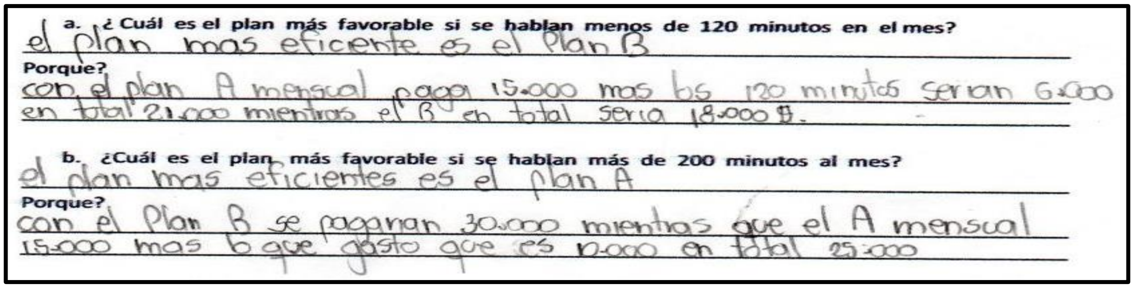
b. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan más de 200 minutos al mes?

____

¿Por qué?

____

En la realización de esta primera actividad solamente el 11% de los 35 estudiantes que la desarrollaron, establecieron correctamente la relación de dependencia entre la variable independiente (número de minutos gastados) y la variable dependiente (valor de la factura), determinando cual de los planes es más favorable.



a. ¿ Cuál es el plan más favorable si se hablan menos de 120 minutos en el mes?

el plan mas eficiente es el Plan B

Porque?

con el plan A mensual paga 15.000 mas los 120 minutos serian 6.000 en total 21.000 mientras el B en total seria 18.000 $.

b. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan más de 200 minutos al mes?

el plan mas eficientes es el plan A

Porque?

con el Plan B se paganan 30.000 mientras que el A mensual 15.000 mas lo que gasto que es 10.000 en total 25.000

Imagen 26 Respuesta estudiante A_{11}

Como se puede apreciar en la justificación dada por el estudiante A_{11} ha comprendido plenamente que existe una relación de dependencia entre la cantidad de minutos y el valor de la factura, y que esta relación varía según la cantidad de minutos gastados.

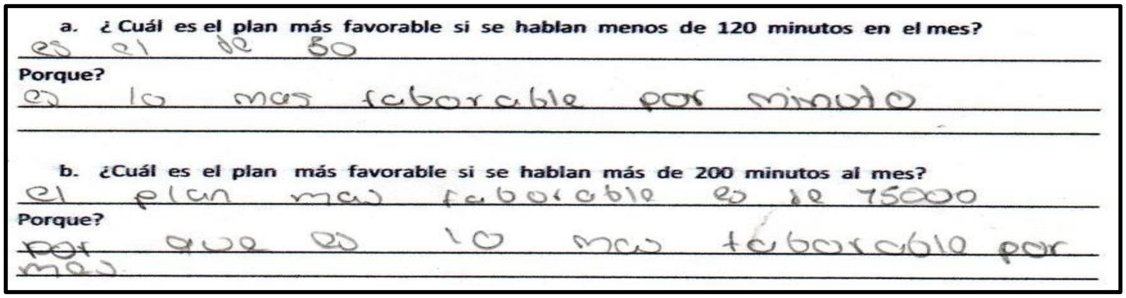
Durante la entrevista respondió lo siguiente:

P: ¿Qué información debiste tener en cuenta para responder las preguntas?
A_{11}: La información de cada plan de minutos
P: ¿Específicamente qué información?
A_{11}: El costo del minuto y en el caso del plan A la cuota fija.
P: ¿Como supiste que plan era mas conveniente para cada número de minutos gastados?
A_{11}: Pues había que tener en cuenta cuánto costaba el minuto y hacer las cuentas para averiguar el valor de la factura.

En las respuestas del estudiante A_{11} se puede evidenciar que este comprende plenamente que existe una relación directa entre el costo del minuto y la cantidad de minutos consumidos y dicha relación de dependencia se ve reflejada en el costo de la factura.

El 89% de los estudiantes no reconoció la relación de dependencia que asocia las variables, razón por la cual no pudieron establecer el costo de la factura para ambos casos y por ende cual plan es más favorable.

Las respuestas de los estudiantes permitieron concluir que en su mayoría no tienen interiorizada la noción de relación de dependencia entre variables, así mismo presentan una marcada dificultad para comprender que cuando en una relacion existe un valor constante este aumenta o disminuye en igual proporción cada elemento en el conjunto de llegada, mas no constituye por sí mismo dicho conjunto.


a. ¿ Cuál es el plan más favorable si se hablan menos de 120 minutos en el mes?
es el de 50
Porque?
es lo mas faborable por minuto

b. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan más de 200 minutos al mes?
el plan mas faborable es de 15000
Porque?
~~por~~ que es lo mas faborable por mes

Imagen 27 Respuesta estudiante A_{24}

Al entrevistar al estudiante A_{24} sobre las respuestas dadas este argumento lo siguiente:

> ***P:*** *¿Por qué dices que el plan de minutos más favorable es el A si se hablan menos de 120 minutos?*
> ***A_{24}:*** *(Piensa un momento, lee las ofertas de las empresas nuevamente) porque en este el minuto es a $ 50, mientras que en la otra es a 150.*
> ***P:*** *¿Por qué dices que el plan de minutos más favorable es el B si se hablan menos de 200 minutos?*
> ***A_{24}:*** *Porque solo tiene que pagar $ 15000 por todo lo que hable.*
> ***P:*** *¿Entonces cuál de los dos planes de minutos es mejor?*
> ***A_{24}:*** *Es mejor el que tiene los minutos a $50.*

El desempeño del estudiante en esta tarea evidencia que no reconoce la relación de dependencia entre las variables números de minutos y valor de la factura, y que dicha relación varía a favor o en contra del usuario según la cantidad de minutos consumidos, por lo que acude a impresiones personales desligadas de la situación estudiada para resolver la tarea.

Al analizar los resultados obtenidos por los estudiantes en esta primera tarea a la luz del desarrollo histórico epistemológico del concepto de función, es válido pensar que sus experiencias de aprendizaje han favorecido el aspecto procedimental y algorítmico dejando de lado la reflexión acerca de la validez y aplicación de estos en situaciones cercanas a su cotidianidad donde pueda encontrarle sentido tanto al proceso como al resultado.

Para analizar la categoría 2 “Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas”, se propuso a los estudiantes la siguiente tarea:

Describa con sus palabras las operaciones matemáticas que debe realizar el programa encargado de determinar el costo de la factura de un cliente del plan A y uno del plan B.

PLAN A.

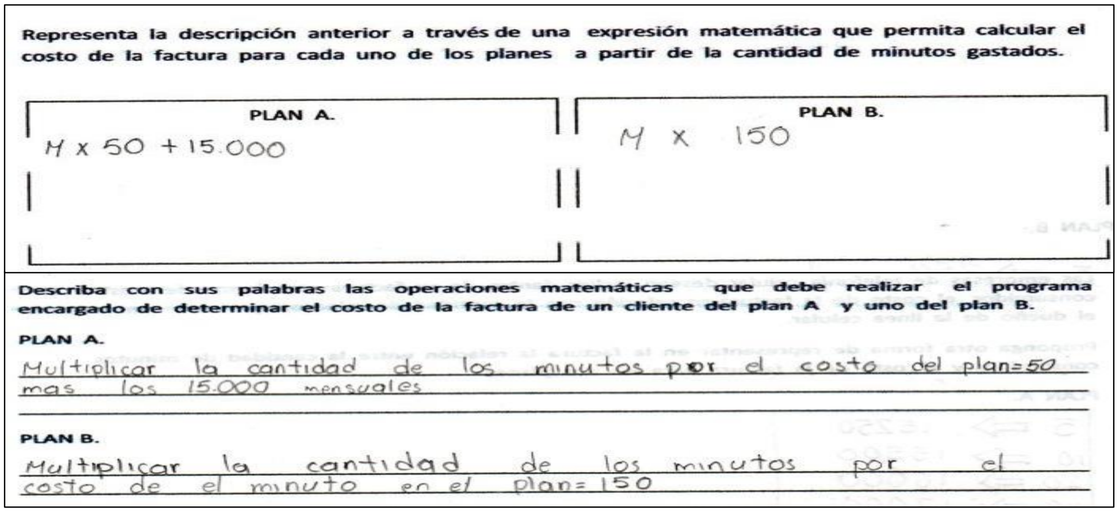
PLAN B.

Representa la descripción anterior a través de una expresión matemática que permita calcular el costo de la factura para cada uno de los planes a partir de la cantidad de minutos gastados.

PLAN A.	PLAN B.

Treinta de los 35 estudiantes no modelaron una expresión verbal o algebraica que permitiera calcular el valor de la factura a partir del número de minutos consumidos en cada plan, cabe anotar que 24 de los 30 estudiantes que no resolvieron la tarea correctamente optaron por dejar el espacio en blanco, lo cual da validez al planteamiento de García, Vázquez, & Hinojosa (2004) al mencionar que las tareas de este tipo son las de mayor dificultad para los estudiantes.

De los 5 estudiantes que modelaron una expresión verbal correcta para calcular el valor de la factura para cada uno de los planes a partir de la cantidad de minutos consumidos, hubo un estudiante que trascendió al sistema de representación algebraico, a pesar de no tener ninguna experiencia formal en el estudio del registro algebraico de la función.


Representa la descripción anterior a través de una expresión matemática que permita calcular el costo de la factura para cada uno de los planes a partir de la cantidad de minutos gastados.

PLAN A.	PLAN B.
M x 50 + 15.000	M x 150

Describa con sus palabras las operaciones matemáticas que debe realizar el programa encargado de determinar el costo de la factura de un cliente del plan A y uno del plan B.

PLAN A.

Multiplicar la cantidad de los minutos por el costo del plan=50 mas los 15.000 mensuales

PLAN B.

Multiplicar la cantidad de los minutos por el costo de el minuto en el plan= 150

Imagen 28 Respuesta estudiante A_{33}

Como se puede apreciar el estudiante E_{33} tiene claros los procedimientos necesarios para calcular el valor de la factura para cualquier cantidad de minutos en ambos planes; durante la entrevista realizada al estudiante E_{33} acerca de la expresión algebraica que propuso respondió lo siguiente:

> ***P:*** *¿Qué significa la M que colocaste?*
> ***A_{33}:*** *La M significa que la persona puede hablar diferentes cantidades de minutos.*
> ***P:*** *¿Diferentes cantidades de minutos?*
> ***A_{33}:*** *Si, puede hablar poquito 30, 40, 50 o mucho 100, 200, 500 o más.*
> ***P:*** *¿Por qué colocaste una letra para representar diferentes cantidades de minutos?*
> ***A_{33}:*** *Porque en clase de álgebra nos dijeron que las letras se podían usar cuando algo podía tener muchos valores a la vez, como los minutos.*

Tal como se puede apreciar en las respuestas del estudiante A_{33}, pudo determinar una expresión algebraica para calcular el valor de la factura para cualquier cantidad de minutos gracias a un proceso de generalización del álgebra, el cual le ha permitido comprender que existen situaciones en las cuales una variable puede tomar infinita cantidad de valores y esto se puede generalizar asignando letras a las variables.

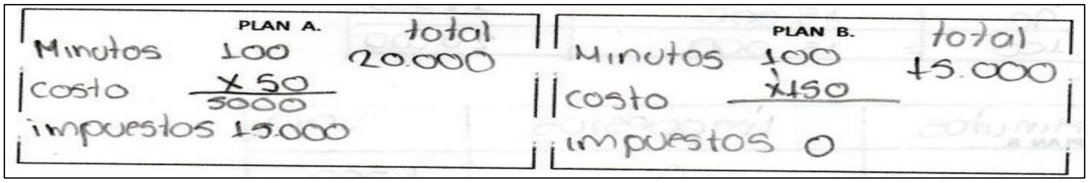


Imagen 29 Respuesta estudiante A18

El estudiante A_{18} fue uno de los pocos que planteó una expresión aritmética válida que modela la relación de dependencia entre los minutos consumidos por un usuario y el costo de la factura de acuerdo al plan, no obstante y a pesar de conocer los procedimientos aritméticos necesarios, manifiesta no tener interiorizado que dicha relación se puede generalizar a través de una expresión algebraica.

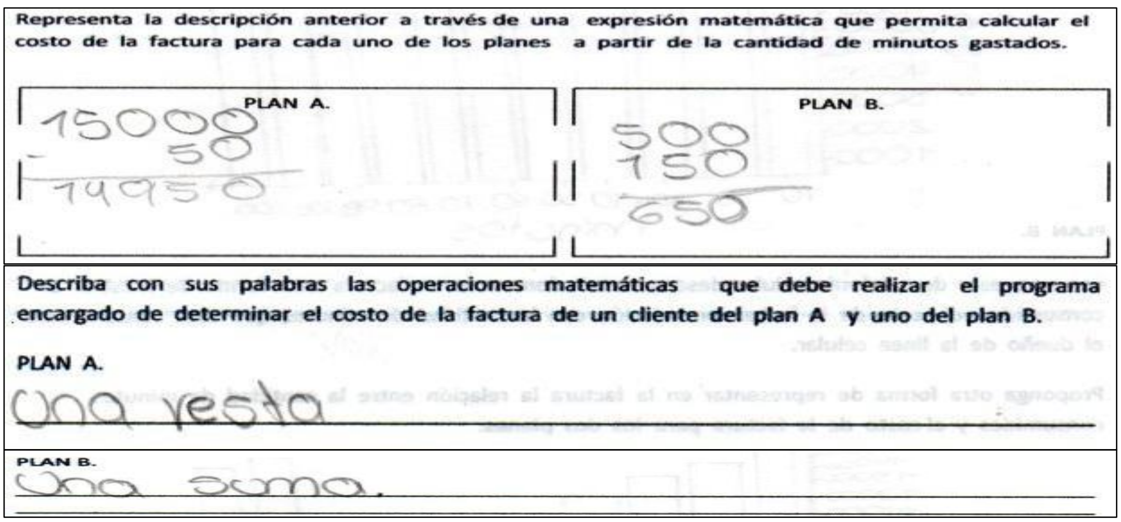
Al analizar los resultados de esta tarea, llama la atención poderosamente el hecho de que una gran cantidad de estudiantes no hayan estado en capacidad, siquiera de esbozar una aproximación de la expresión aritmética o algebraica que generalice la relación de dependencia entre las variables.

Este hecho da validez a lo planteado por Villa, Bustamente, Berrio, Osorio, & Osorio (2008) cuando mencionaron que a pesar de que los lineamientos curriculares de matemáticas incorporó la modelación como proceso de gran importancia en la enseñanza aprendizaje de la matemática hace más de 15 años, aún hoy se sigue privilegiando el desarrollo algorítmico y procedimental, bajo el supuesto de que ser matemáticamente competente consiste principalmente en poder realizar una variada gama de procedimientos, sin detenerse a pensar en las situaciones donde estos cobran validez.

En el mismo sentido García, Vázquez, & Hinojosa (2004), citados en el planteamiento del problema, argumentan que las tareas que mayor dificultad presentan para los estudiantes, son aquellas que implican la conversión desde los diferentes registros al algebraico, esto se hizo evidente cuando se le propuso a los estudiantes modelar una expresión ya sea verbal o algebraica que generalice la relación entre los elementos de la variable independiente con la variable dependiente.

La categoría 3 de análisis propuesta para esta investigación está relacionada con la forma en que los estudiantes se movilizan entre los diferentes registros semióticos de representación realizando conversiones para trasladarse de uno a otro.

Para analizar esta categoría se tuvieron en cuenta dos tareas de las propuestas a partir de la situación "CELULARES", la primera consistió en el traslado del registro verbal al algebraico pasando por una descripción de los procesos aritméticos requeridos para determinar el conjunto de llegada a partir del conjunto de salida.


Representa la descripción anterior a través de una expresión matemática que permita calcular el costo de la factura para cada uno de los planes a partir de la cantidad de minutos gastados.

PLAN A.

15000
- 50
14950

PLAN B.

500
150
650

Describa con sus palabras las operaciones matemáticas que debe realizar el programa encargado de determinar el costo de la factura de un cliente del plan A y uno del plan B.

PLAN A.

Una resta

PLAN B.

Una suma.

Imagen 30 Respuesta del estudiante A_{28}

Como se puede apreciar el estudiante carece de elementos verbales y aritméticos para describir el procedimiento realizado para calcular el costo de la factura a partir de la cantidad de minutos consumidos en ambos planes, por tal razón cuando se le solicita una expresión matemática ya sea aritmética o algebraica este se propone adiciones para ambos casos, las cuales no tienen nada que ver con la situación planteada.

La siguiente tarea consistió en solicitar a los estudiantes que propusiera otra forma de representar la relación entre la cantidad de minutos consumidos y el costo de la factura diferente a las que ya se han planteado a través de las diferentes tareas.

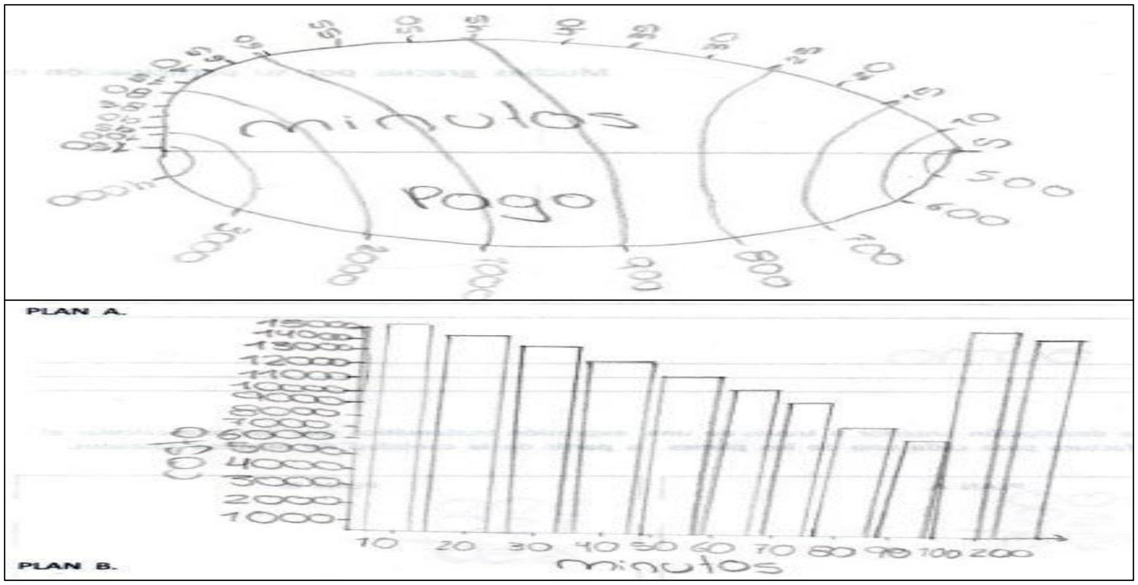


Imagen 31 Representación de la función propuesta por A_{28}

En vista que a través de las diferentes actividades realizadas a partir de la situación “CELULARES” ya se abordó el registro gráfico y en la anterior tarea se trabajó el registro algebraico, se esperaba que al solicitarle otra forma de representar la relación de dependencia entre la cantidad de minutos y el costo de la factura, los estudiantes acudieran al registro tabular, no obstante como se puede apreciar en los sistemas de representación propuesto por A_{28} este no lo tuvo en cuenta y optó por otra representación de carácter estadístico para el caso del plan A y otra con cierta semejanza a un diagrama sagital para el caso del plan B.

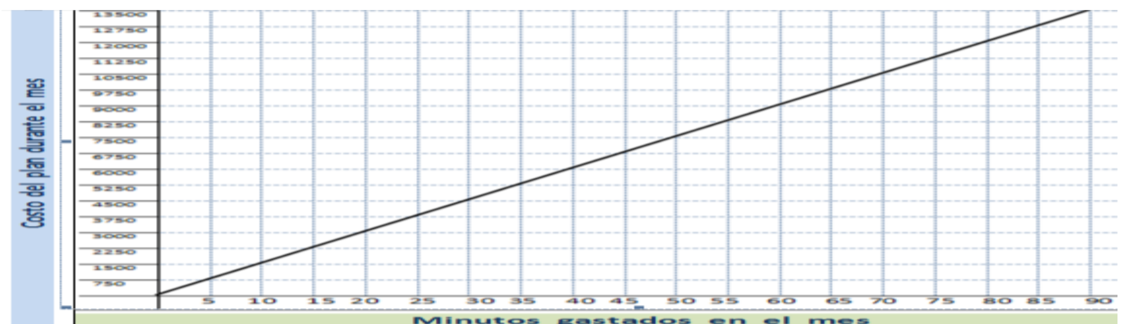
Es de anotar que el 88,5% de los estudiantes que realizaron la tarea presentaron alguna dificultad con el traslado a través de los diferentes registros semióticos de representación de la función.

Para analizar la cuarta categoría “Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano” y determinar en qué medida los estudiantes reconocen la relación entre dos variables a partir de un sistema de representación gráfico, se propuso la siguiente tarea:

En la factura que maneja la empresa se incluye una gráfica que relaciona la cantidad de minutos gastados con el valor del plan.

Al imprimir las facturas se presentó un error, lo que ocasionó que dos facturas no incluyeran el tipo de plan del usuario.

A continuación se presentan las gráficas que aparecen en las dos facturas.



Esta factura corresponde a un usuario del plan A o B? A_____ B_____

Justifique su respuesta.

En cuanto a la relación de las variables en el plano cartesiano el 23% de los estudiantes reconoce que cada punto de la función ubicado en el plano cartesiano representa la relación de dependencia entre la variable dependiente e independiente. Asimismo comprenden que dicha relación es constante, lo cual permite predecir el comportamiento de la función y para este caso se hace visible a través de una línea recta.

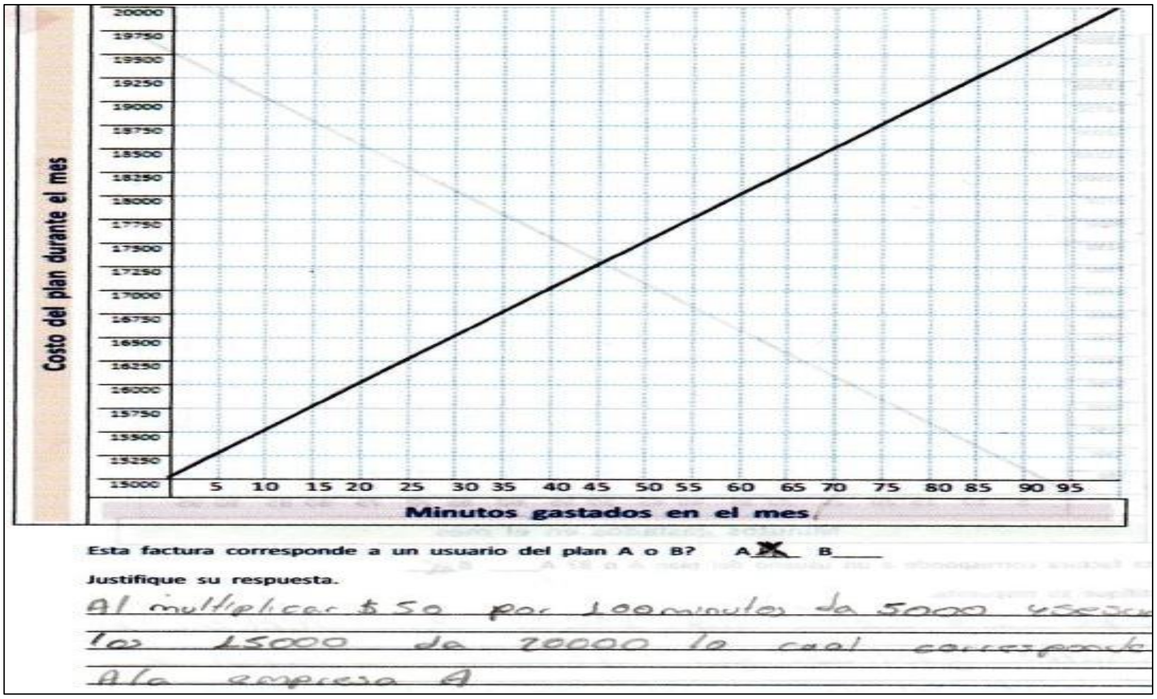


Imagen 32 Respuesta estudiante A_4

Como se puede apreciar en la justificación dada por el estudiante A_4 estableció correctamente la relación entre las variables número de minutos y valor de la factura, teniendo en cuenta el cargo fijo y reconoció dicha relación en la gráfica, relacionando cada cantidad de minutos con su costo.

El 77% de los estudiantes no están familiarizados con el sistema de representación gráfico de una función, o si lo conocen, no identifican la relación entre variable dependiente e independiente que allí se presenta. Para ellos los puntos de intersección en el plano no representan una relación de dependencia, la cual permite predecir valores en la gráfica.

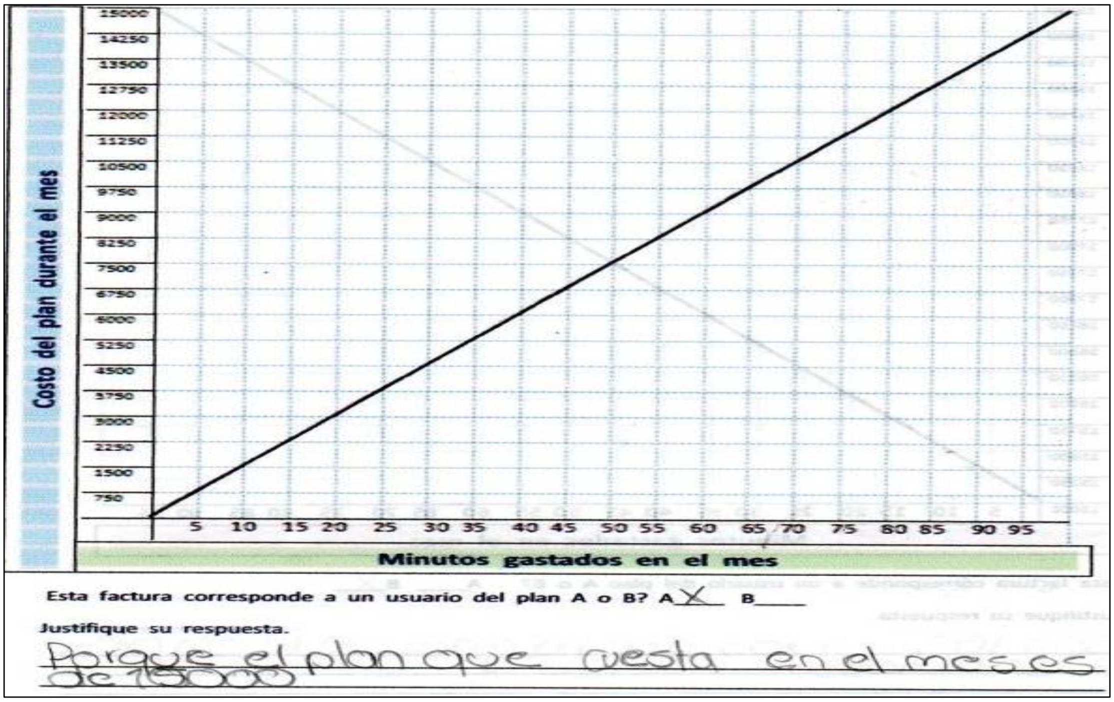


Imagen 33 Respuesta estudiante A_{28}

Como se puede apreciar el estudiante A_{28} no establece una correcta relación entre las variables, dadas las condiciones de la promoción propuestas en la tarea, y cuando se le entrevista se observa que realizo la tarea a partir de un análisis superficial de la situación sin trascender a las condiciones implícitas no evidentes planteadas en la situación:

P: *¿Por qué asociaste esta gráfica con la promoción A?*

A_{28}: *Porque la gráfica va hasta 15.000 y la promoción A dice que paga $ 15.000?*

P: *¿ Los $15.000 que dices que se pagan en la promoción A, se cobran para que cantidad de minutos?*

A_{28}: *Para cualquier cantidad de minutos.*

P: *Entonces si un usuario contrata el plan A y solo gasta 2 minutos en el mes ¿cuánto pagaría?*

A_{28}: *No porque una persona en el mes gasta muchos minutos.*

P: *Pero supongamos que pasó algo ese mes y solo gasto 2 minutos ¿ cuánto pagaría?*

A_{28}: *(mira el enunciado de la promoción) Pagaría $ 100*

P: *¿Porque?*

A_{28}: *Porque el minuto es a $ 50*

P: *¿Y qué pasa con los $15.000?*

A_{28}: *Eso lo cobran cuando habla muchos minutos.*

En la entrevista realizada al estudiante A_{28} se puede apreciar claramente que si no se establece una relación de dependencia entre las variables, los registros gráficos solo sirven al estudiante para tratar de ubicar valores presentes en la situación a modelar, pero sin establecer ninguna relación con la misma.

El desempeño de los estudiantes permite pensar que si no establecen una correcta relación entre las variables a partir de su enunciado verbal, no será posible trasladarse exitosamente al sistema de representación gráfico, puesto que allí es donde se hace visible dicha relación.

Según Duval (1994), una de las principales dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de función, radica en la multiplicidad de registros que esta presenta. Con respecto a esta hipótesis Garcia, Cedeña, & Rivera (2004) mencionan que "*El registro gráfico es utilizado en general con carácter ilustrativo o de soporte".* Lo anterior explica en cierta medida porque la mayoría de los estudiantes no pudo resolver satisfactoriamente tareas en las que se les solicita establecer la relación de dependencia entre dos variables a partir de un sistema de representación gráfico.

Para analizar la categoría 5 "Dominio y rango de la función" se propuso una tarea en la cual a los estudiantes se les proporciona el valor de la variable dependiente para que determinaran la variable independiente y así verificar si establecen la relación existente entre las variables de forma inversa.

La tarea propuesta fue la siguiente:

a. ¿Cuántos minutos se habla en cada plan si la factura llega de $ 45000?

____

¿Por qué?

____

El 14% de los estudiantes pudo determinar la cantidad de minutos que se cancelaron en cada plan. Cabe notar que el método usado por todos los estudiantes que resolvieron la tarea fue el de aproximación por ensayo y error, es decir ninguno planteó una ecuación o igualdad que le permitiera determinar el valor de la variable independiente.

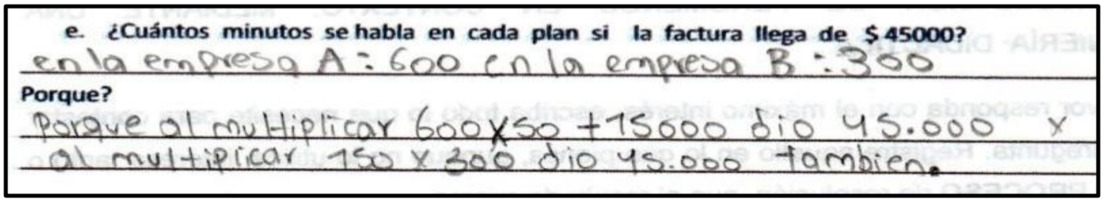

e. ¿Cuántos minutos se habla en cada plan si la factura llega de $ 45000?
en la empresa A: 600 en la empresa B: 300
Porque?
Porque al multiplicar 600x50 +15000 dio 45.000 x
al multiplicar 150 x 300 dio 45.000 tambien.

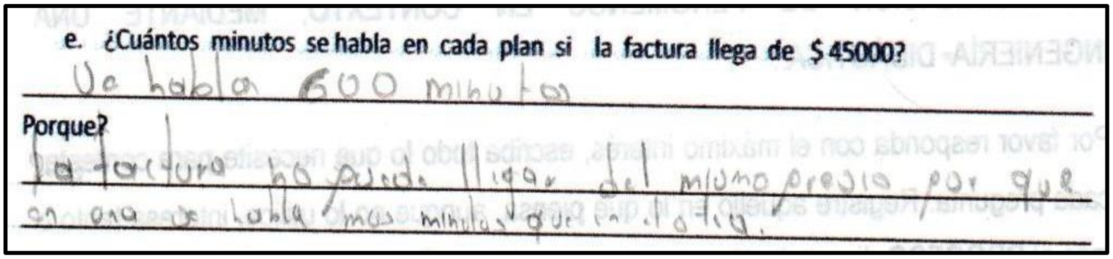
Imagen 34 Respuesta estudiante A_{18}

En la entrevista realizada al estudiante E_{18} acerca del procedimiento llevado a cabo para realizar la tarea respondió lo siguiente:

> *P: ¿Cómo supiste que debías multiplicar 600 por el valor del minuto para el plan A y sumarle $ 15.000?*
> *A_{18}: Pues primero multiplique 100 x 50 que me dio 5000 y al sumarle 15000 me dio $ 20.000, como faltaba para $ 45.000, luego multiplique por 200 y me dio $ 25.000 y así hasta que con 600 me dio $45.000.*
> *P: ¿Cómo supiste que en el plan B se gastaban 300 min.?*
> *A_{18}: Casi lo mismo solo que no había que sumarle $15.000 y así fue más fácil.*
> *P: ¿Cómo lo hiciste?*
> *A_{18}: Primero multipliqué por 150 x 100, luego 150 x 200 y cuando multiplique por 150 x 300 me dio $ 45.000*

Como se puede apreciar el estudiante ha establecido una acertada relación entre las variables teniendo en cuenta las condiciones y restricciones de la situación, por medio de un proceso de ensayo y error encuentra las respuestas correctas para la tarea propuesta.

El 86% de los estudiantes no reconoció que la relación que asocia el número de minutos con el costo de la factura, presenta valores en los que el costo de la factura es igual para ambos planes, a pesar de hablar diferentes cantidades de minutos, razón por la cual no pudieron hacer uso de ningún procedimiento aritmético, algebraico o de otro tipo para determinar el valor de la variable independiente.


e. ¿Cuántos minutos se habla en cada plan si la factura llega de $ 45000?

Se habla 600 minutos

Porque?

La factura no puede llegar del mismo precio por que en una se habla mas minutos que en otra.

Imagen 35 Respuesta estudiante A_{16}

Como se puede apreciar en la respuesta del estudiante A_{16} se observa que su razonamiento se basan en el supuesto de que al ser planes diferentes no pueden existir cantidades de minutos para los cuales la factura tenga igual valor, lo cual deja en evidencia que no tiene la noción que dos funciones aunque no sean iguales pueden tener igual rango a pesar de que sus dominios sean diferentes como sucede en el caso de las funciones cuadráticas.

Durante la entrevista el estudiante argumentó lo siguiente:

P: ¿Por qué dices que dos facturas no pueden llegar con el mismo precio?
A_{16}: Si pueden llegar pero si hablan los mismos minutos.
P: ¿Aunque sean dos planes de telefonía celular diferentes?
A_{16}: Sí porque a las empresas no les conviene
P: ¿Qué no le conviene a las empresas?
A_{16}: Pues que una persona que hable muchos minutos y otra que hable poquitos minutos paguen lo mismo.
P: Pero hay que tener en cuenta que la empresa A maneja un cargo fijo de $15000
A_{16}: Igual no le conviene.

Las respuestas del estudiante permiten observar que si bien es cierto el contexto cercano, posibilita estudiar situaciones relacionadas con los objetos de estudio en matemáticas, en este caso la función, también puede suceder como en el caso del estudiante A_{16}, que sus experiencias en el mundo real no le permitan develar aquellas cuestiones que no son explícitas en la situaciones a estudiar y en lugar de facilitar el análisis genere algún tipo de obstáculo.

El alto porcentaje de estudiantes que no realizó la tarea correctamente, deja claro que al no establecerse una relación de dependencia entre las variables dominio y rango, no es posible que a partir de una se determine el valor de la otra. Lo cual se ha venido reforzando con el enfoque algorítmico procedimental que se le ha dado a la enseñanza del concepto de función, en el que se le resta importancia al análisis de las relaciones entre las variables bajo el supuesto de que lo importante en su estudio es un adecuado desarrollo algebraico.

8.4 Fase 3 Experimentación

En esta fase de la ingeniería didáctica se pone en marcha el diseño pedagógico de las situaciones de acción, formulación y validación que fueron elaboradas a partir del análisis de los desempeños de los estudiantes en el análisis a priori, para alcanzar la comprensión del concepto de función.

De igual forma conocer el aporte de la modelación matemática de situaciones del contexto como proceso para la enseñanza - aprendizaje del concepto de función.

Es importante mencionar que en esta fase el docente investigador orienta a los estudiantes acerca de los objetivos, condiciones y alcances de la investigación con el fin de darle sentido y establecer el contrato didáctico que a la postre serán las reglas del juego que deberán seguir. De igual forma se socializan los instrumentos que serán utilizados en el estudio (cuestionarios, entrevistas semiestructuradas) y la forma como será registrada la información obtenida en cada una de las 3 sesiones de trabajo.

A pesar de que en la mayoría de documentos e investigaciones disponibles que han empleado como marco teórico la teoría de las situaciones didácticas, generalmente primero se presentan las situaciones de acción, luego las de formulación, y finalmente las de validación, este ordenamiento no se trata de una regla general, aunque resulte apropiado para muchos casos.

En esta investigación las situaciones que se plantean a los estudiantes se presentarán según las categorías de análisis, teniendo en cuenta que aunque una situación de validación supone la formulación de una afirmación, y de igual forma la formulación de una afirmación supone que el estudiante haya interiorizado una acción, esto no implica que necesariamente se tenga que pasar por situaciones de acción y formulación antes de incluir una situación de validación.

En el análisis de cada una de las situaciones didácticas propuestas se seleccionaron los trabajos de aquellos estudiantes que representan de forma más significativa el grupo, y a partir de ellos se generalizaron conclusiones para todo el colectivo, asimismo se tomaron algunos casos particulares que llamaron la atención por ofrecer una visión completamente diferente a lo que se esperaba.

Cada una de las situaciones didácticas propuestas para la fase de experimentación de esta ingeniería didáctica será analizada a través de las siguientes categorías:

Categoría 1:

Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables.

Categoría 2:

Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas.

Categoría 3:

Conversión de un sistema semiótico de representación en otro.

Categoría 4:

Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano.

Categoría 5:

Dominio y rango de la función.

8.4.1 Sesión 1: “Pago de servicios públicos”

Esta situación didáctica está planteada para que los estudiantes analicen una factura real del servicio público de agua, porque en esta se encuentra información real que permite modelar una relación consumo costo, lo cual permitirá proponer situaciones de acción, formulación y validación en donde los estudiantes podrán identificar variables, establecer relaciones de dependencia y trasladarse a través de los diferentes registros semióticos de representación.

A continuación se presenta la factura que los estudiantes analizaron y a partir de la cual se desarrollaron todas las tareas propuestas para esta situación didáctica.


LOCALIDAD Quinchia
MES Febrero
EMPRESAS PUBLICAS MUNICIPALES DE QUINCHIA E·S·P

FACTURA No.	01043898614000	SIN RECARGO	21 de marzo 2016	FECHA DE SUSPENSIÓN	22 de marzo 2016
CODIGO No.	301-03263-182	MES DEUDA	0	PERIODO DE COBRO	ENE.12-FEB.12/2016

SUSCRIPTOR: OLIVIA BECERRA H
DIRECCIÓN: CR 13 # 6 135
DIR. ENTREGA:
ESTRATO: Bajo - Bajo (1)

MEDIDOR: 13T185999ELSTER
TIPO: NR
CLASE SERV: Residencial
CED CATASTRAL:

CONSUMO ACTUAL: 17
PROMEDIO: 16
LECTURA ACTUAL: 189
LECTURA ANTERIOR: 172
ANOMALIA:

ACUEDUCTO

CARGO FIJO ACUEDUCTO 5.726.15

CONSUMO	M3	VALOR UNIT.M3	TOTAL MES
CON. BÁSICO 0 - 20	17.00	356.85	6.066.45
CON. COMPLETO 21 - 40	0.00	792.98	0.00
CON. SUNT. MAS DE 40	0.00	792.98	0.00
TASA DE USO ACUEDUCTO	0.00		
(-) SUBSIDIO (+) CONTRIBUCIÓN			
		Total	12.342.60

ALCANTARILLADO

CARGO FIJO ALCANTARILLADO 0.00

VERTIMIENTO	M3	VALOR UNIT.M3	TOTAL MES
VER. BÁSICO 0 - 20	17.00	0.00	0.00
VER. COMPLETO 21 - 40	0.00	0.00	0.00
VER. SUNT. MAS DE 40	0.00	0.00	0.00
TASA RETRIBUTIVA	0.00		
(-) SUBSIDIO (+) CONTRIBUCIÓN	0.00		Total 0.00

ACUEDUCTO CONSUMO ÚLTIMOS 6 MESES
ASEO CONSUMO ÚLTIMOS 6 MESES

SERVICIO DE ASEO

PERIODO DE FACTURACIÓN: FEBRERO/2016
ESTRATO: Bajo - Bajo (1)
No USUARIO: 1
CLASE DE SERVICIO: RESIDENCIA DESOCUPADO
MES DEUDA: 0
FRECUENCIA: 8 AL MES
KILOS:
CATEGORÍA: PG
CARGO FIJO MES: 2.263.91
RECARGO MORA: 0.00
DEUDA MES ANTERIOR: 0.00
SALDOS A FAVOR: 0.00
(-) SUBSIDIO (+) CONTRIBUCIÓN

DEUDA ASEO

OTROS COBROS

Ajuste A La Decena 0.49

Medidores

TOTAL FACTURA

TOTAL EMPOCALDAS	12,343
TOTAL DEUDA EMPO:	
TOTAL DEUDA ASEO	0
TOTAL ASEO:	2,264
TOTAL OTROS COBROS:	0
TOTAL FACTURA:	

SUSCRIPTOR

SUSCRIPTOR: OLIVIA BECERRA H
DIRECCIÓN: CR 13 # 6 135
ESTRATO: Bajo - Bajo (1)
FACTURA No: 01043898614000
CÓDIGO: 301-03263-182

FIRMA GERENTE EMPOCALDAS
FIRMA GERENTE ASEO

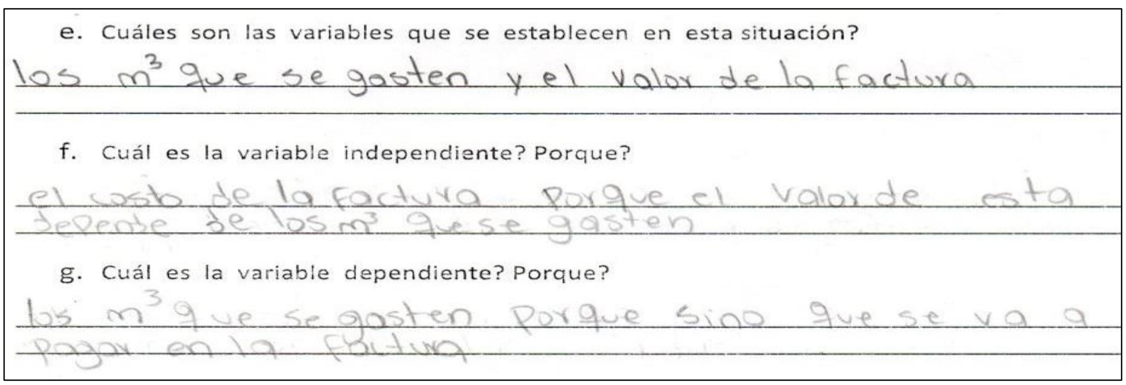
DESPRENDIBLES DE PAGO

Imagen 36 Factura de servicio publico

Antes de iniciar el estudio de las diferentes categorías cabe mencionar que a pesar de tratarse de una situación que regularmente se presenta en los hogares, a la gran mayoría se le dificultó interpretar la factura, debido a que según testimonios de los mismos estudiantes, en los hogares poco se analizan los parámetros tenidos en cuenta para realizar el cobro y solo se enfocan en el valor a pagar sin detenerse a analizar la relación consumo - costo.

Lo primero que se quiso analizar con el desarrollo de esta situación didáctica, fue si los estudiantes reconocen y describen las variables presentes y la relación de dependencia entre ellas, lo cual está contemplado en la categoría 1 de este estudio.

Para tal fin se propuso una situación de validación la cual se analiza a continuación.


e. Cuáles son las variables que se establecen en esta situación?
los m^3 que se gasten y el valor de la factura

f. Cuál es la variable independiente? Porque?
el costo de la factura porque el valor de esta depende de los m^3 que se gasten

g. Cuál es la variable dependiente? Porque?
los m^3 que se gasten porque sino que se va a pagar en la factura

Imagen 37 Respuesta estudiante A1 en una situación didáctica de validación.

Como se puede observar el estudiante reconoce correctamente las variables que intervienen en la situación (m^3 y valor de la factura) no obstante cuando se le pide que diferencie la dependiente de la independiente, éste las confunde, lo que significa que no ha encapsulado el concepto de dependencia e independencia entre variables.

Durante la entrevista A_1 argumenta su desempeño de la siguiente manera:

P: ¿Cuáles fueron las razones que te llevaron a decir que las variables presentes en la situación son la cantidad de m^3 consumidos y el costo de la factura?

A_1: porque los metros cúbicos cambian según el consumo y el costo de la factura cambia según los metros cúbicos.
P: ¿Para ti que significa la expresión variable independiente?
A1: es algo que no depende de otra cosa por eso se llama independiente
P: ¿Para ti que significa la expresión variable dependiente?
A: Que sí depende
P: ¿Por qué para la situación, la cantidad de m_3 consumidos es una variable dependiente? ¿De qué depende?
A_1: Es dependiente porque depende del valor de la factura, o sea que si la factura llega cara es porque gasto mucha agua
P: ¿Por qué consideras el valor de la factura una variable independiente?
A_1: Porque no depende de nada.

A partir de la tarea realizada por A1 y las respuestas dadas durante la entrevista, se puede determinar que algunos estudiantes reconocen fácilmente las variables presentes en una situación, no obstante se les dificulta comprender la relación de dependencia entre ellas, por lo cual no pueden diferenciar correctamente la variable dependiente de la independiente.

Por otro lado si bien es cierto que utilizar una situación de la vida real permite que el estudiante sea más reflexivo y trascienda los procesos algorítmicos y la ejercitación, también puede pasar como en el caso del estudiante ***A_1*** que sus experiencias solo le permitan vislumbrar un limitado rango de valores en los cuales la situación tiene sentido, convirtiéndose así en un impedimento para abordar la generalidad del objeto matemático en cuestión.

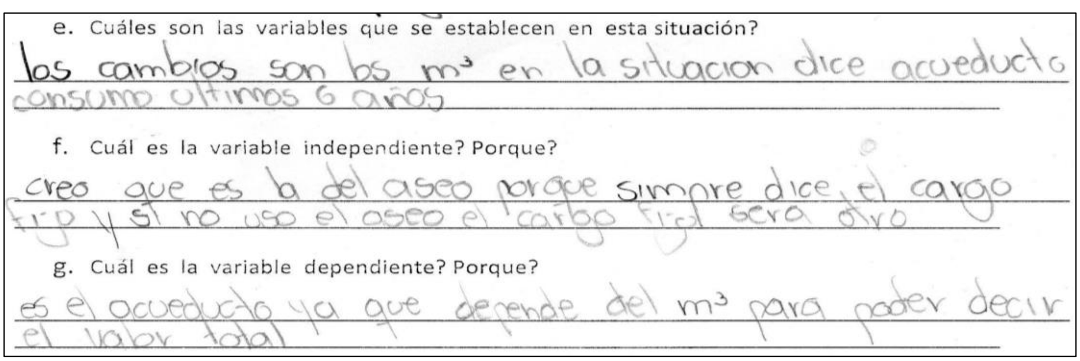

e. Cuáles son las variables que se establecen en esta situación?
los cambios son los m³ en la situacion dice acueducto consumo ultimos 6 años
f. Cuál es la variable independiente? Porque?
creo que es la del aseo porque simpre dice el cargo fijo y si no uso el aseo el cargo fijo sera otro
g. Cuál es la variable dependiente? Porque?
es el acueducto ya que depende del m³ para poder decir el valor total

Imagen 38 Respuesta estudiante A5 en una situación didáctica de validación.

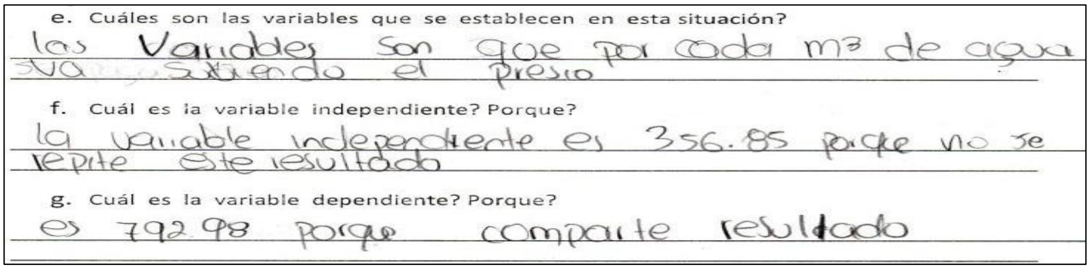
En la tarea realizada por A_5 se observa que no comprende que para que exista una relación de dependencia, como en este caso consumo - costo, deben tenerse en cuenta dos variables en donde la variación en una determina la variación en la otra, debido a esto cuando se le solicitó reconocer las variables presentes en el ejercicio solo identificó una.

De igual forma y a pesar de haber reconocido una de las variables, cuando se le solicitó diferenciar la independiente de la dependiente asoció ambas con valores constantes dentro de la factura, como lo son el costo de aseo y acueducto.

Durante la entrevista respondió que:

P: ¿Para ti que significa la palabra variable?
A5: Variable es algo que cambia.
P: En el caso de la factura del servicio de agua, ¿Qué es lo que varía o cambia?
A5: Lo que cambia es el aseo y el acueducto.
P: ¿Cómo cambia el valor de aseo en la factura?
A5: Pues si lo usa cuesta más que si no lo usa.
P: En tu casa pagan servicio de aseo?
A5: No creo.
P: ¿Porque?
A5: Porque es una vereda.
P: ¿Qué es una variable dependiente?
A5: Es algo que depende
P: ¿Qué es una variable independiente?
A5: Algo que puede tomar un valor u otro

Con la entrevista realizada al estudiante A_5 y la tarea desarrollada, es válido pensar que para algunos estudiantes no es del todo transparente el concepto de variable, y relaciona este con valores constantes dentro de la situación sin analizar que debe existir una relación de dependencia entre dichos valores. Este hecho en el caso del estudiante A_5 está fuertemente relacionado con su contexto inmediato, ya que no emplea este como referente para apropiarse de la situación en cuestión, sino que parte de su realidad e intenta trasladarla a la tarea que se le plantea, desconociendo las condiciones que implica la situación didáctica.



e. Cuáles son las variables que se establecen en esta situación?
las Variables son que por cada m3 de agua va subiendo el presio
f. Cuál es la variable independiente? Porque?
la variable independiente es 356.85 porque no se repite este resultado
g. Cuál es la variable dependiente? Porque?
es 792.98 porque comparte resultado

Imagen 39 Respuesta estudiante A_8 en una situación didáctica de validación.

En la tarea que realizó A_8 es claro que, si bien es cierto no pudo identificar las variables presentes en la situación si identificó correctamente la relación de dependencia, cuando menciona que a mayor cantidad de m^3 consumidos, mayor será el valor de la factura. No obstante al momento de diferenciar las variables las relaciono con un valor fijo como lo es el costo del metro cúbico.

Durante la entrevista respondió que:

P: ¿Por qué consideras el valor 356,85 una variable independiente?
A_8: Porque los metros cúbicos se multiplican por 356,85
P: ¿Por qué consideras el valor 792,98 una variable dependiente?
A_8: Porque en la factura aparece
P: ¿De qué depende?
A_8: Depende de los m^3 consumidos.

El estudiante A_8 no tiene interiorizado el concepto de variable y por tal razón cuando se le solicita que identifique las variables dependiente e independiente, lo que hace es tomar valores que observa en la factura. Este hecho puede estar relacionado en gran medida con metodologías tradicionales para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas según las cuales los estudiantes aprenden mecánicamente a realizar operaciones con expresiones algebraicas, bajo el supuesto que así aprenderán el concepto de función.

Pero cuando se le solicita como en este caso que analicen el rol que juega cada una de las variables implicadas en una relación, simplemente lo asocian con valores constantes dentro de la situación.

Continuando con el análisis de la sesión 1 se planteó a los estudiantes una situación de formulación la cual tiene como objetivo implementar una tarea en la cual los estudiantes deben describir las fases o pasos que debió tener en cuenta para calcular el costo de 16m^3 de agua y luego plantear una expresión algebraica que generalice dicho procedimiento para cualquier cantidad de metros cúbicos gastados en el dominio $0 \leq x \leq 20$ como se establece en la factura.

Esta tarea será analizada bajo el crisol de la categoría 2 propuesta para esta investigación "Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas". Con respecto a esta categoría cabe mencionar que varias investigaciones han encontrado que una de las mayores dificultades en el aprendizaje del concepto de función se encuentra en el traslado desde cualquier registro al algebraico.

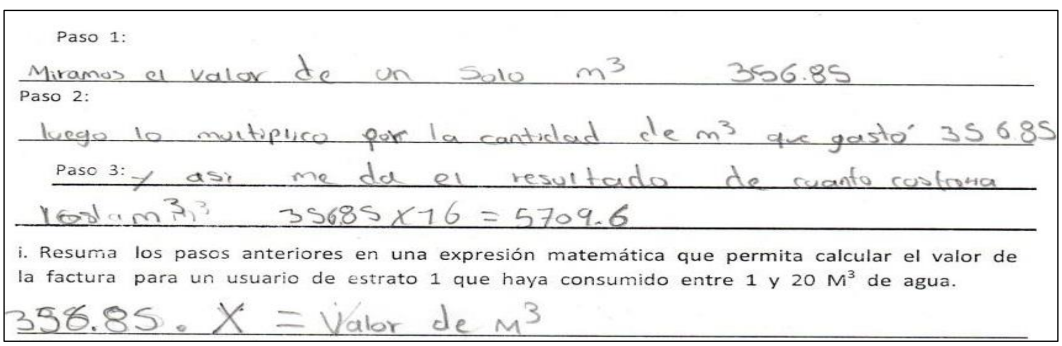

Paso 1:
Miramos el valor de un solo m3 356.85
Paso 2:
luego lo multiplico por la cantidad de m3 que gastó 356.85
Paso 3: y así me da el resultado de cuanto costaría
16 m3 35685 x 16 = 5709.6
i. Resuma los pasos anteriores en una expresión matemática que permita calcular el valor de la factura para un usuario de estrato 1 que haya consumido entre 1 y 20 M^3 de agua.
358.85 . X = Valor de M3

Imagen 40 Respuesta estudiante A_{21} en una situación didáctica de formulación

Como se puede apreciar en la tarea desarrollada por el estudiante A_{21} este generalizó una expresión algebraica válida para determinar el valor del consumo de agua, sin embargo no tuvo en cuenta los cargos fijos de aseo y acueducto que aparecen en la factura.

Al respecto de este hecho se le realizó una entrevista para tratar de comprender el porqué de esta situación y respondió lo siguiente:

P: ¿Qué representa la x en la expresión algebraica que planteaste?
A_{21} : La x son los m^3
P: ¿Qué elementos se cobran en la expresión algebraica que propusiste?
A_{21} : Los m^3
P: ¿Consideras que la expresión que propusiste tiene en cuenta todos los elementos que se cobran en la factura?
A_{21} : Si
P: ¿En tu casa pagan el servicio de agua?
A_{21} : no
P: ¿Porque?
A_{21} : Vivo en una finca

En la entrevista realizada se puede apreciar que no tiene conciencia que junto con el servicio de agua las empresas realizan el cobro de aseo y acueducto mediante cargos fijos a través de las facturas.

En un principio puede pensarse que se debe a una lectura deficiente de la factura, la cual no tuvo en cuenta todos los elementos que ésta contiene, sin embargo cuando se profundiza con el estudiante se descubre que su contexto inmediato no le permite familiarizarse con la situación de pago de servicios públicos, ya que en el área rural del municipio de Quinchía los hogares y las fincas toman el agua de nacimientos propios o de acueductos comunales, por los cuales se paga una cuota fija anual y por lo tanto no llegan recibos a los hogares como sucede en la zona urbana, además en la zona rural la empresa de aseo no realiza recolección de basuras.

Como se puede apreciar el estudiante A_{21} no está familiarizado con una factura de servicio público y por lo tanto, sus experiencias previas no le aportaron elementos a partir de los cuales pudiera modelar la situación, por lo que el problema planteado le era totalmente abstracto.

:

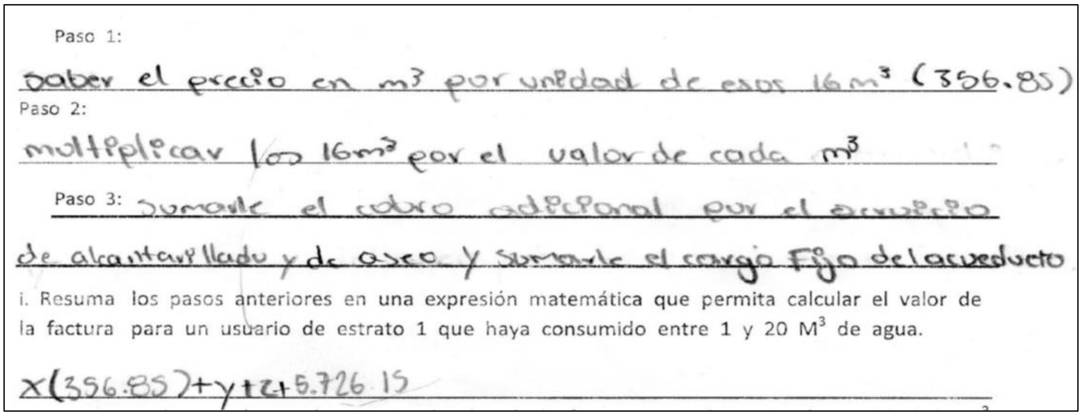

Paso 1:
saber el precio en m^3 por unidad de esos 16 m^3 (356.85)
Paso 2:
multiplicar los 16 m^3 por el valor de cada m^3
Paso 3: sumarle el cobro adicional por el acueducto
de alcantarillado y de aseo y sumarle el cargo fijo del acueducto
i. Resuma los pasos anteriores en una expresión matemática que permita calcular el valor de la factura para un usuario de estrato 1 que haya consumido entre 1 y 20 M^3 de agua.
$x(356.85)+y+z+5.726.15$

Imagen 41 Respuesta estudiante A_{18} en una situación didáctica de formulación.

En la tarea realizada por el estudiante A_{18} se puede determinar que éste ha definido un procedimiento válido para determinar el costo de la factura para cualquier cantidad de m^3 entre 1 y 20, no obstante al momento de generalizar dicho procedimiento en una expresión algebraica, se observa que opera correctamente con la variable independiente multiplicándola por el valor del m^3, sin embargo la variable dependiente aparece como un elemento del polinomio, así mismo se observa una variable z que al parecer no tiene ninguna relación con la tarea.

Durante la entrevista el estudiante A_{18} respondió:

P: ¿Qué representa la letra y en la expresión que modelaste?
A_{18}: El servicio de alcantarillado
P: ¿ A qué corresponde la letra z en la expresión que modelaste?
A_{18}: El servicio de aseo.
P: ¿Por qué colocó letras en lugar de los valores correspondientes?
A_{18}: Porque ahí decía que lo hiciera en una expresión matemática.
P: ¿Por qué crees que en una expresión algebraica se colocan letras?
A_{18}: Porque se puede representar un número
P: Un único número o cualquier número
A_{18}: Cualquier número.
P: En la expresión que modelaste las letras y,z representan un único número o cualquier número.
A_{18}: Cualquier número.
P: Por ejemplo el cargo fijo de aseo representado por la letra z corresponde a cualquier número?.
A_{18}: No, ese si es fijo.
P: ¿Porque lo colocaste como una variable en la expresión algebraica que modelaste?.

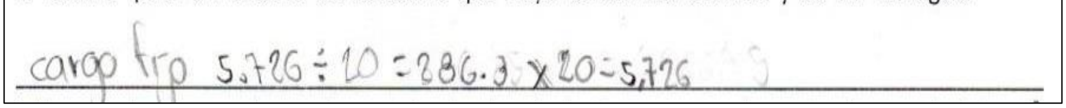
A_{18}: Porque ahí decía que propusiera una expresión matemática.

La entrevista realizada al estudiante A_{18} permite determinar que este comprende que las variables dentro de una relación funcional se representan con letras debido a que de esta forma se les pueden asignar diversos valores de acuerdo con la situación planteada y de esta forma generalizarla, no obstante cuando se le solicitó modelar la situación a través de una expresión algebraica éste asoció variables con valores constantes, bajo el supuesto de que si es una expresión de tipo algebraico lo fundamental es que aparezcan letras aunque estas no representen variables dentro de la situación.

Junto con el análisis anterior se puede apreciar que A_{18} no tiene interiorizado que en la relación funcional propuesta se establecen dos variables y que la variación que sufre una llamada independiente determina la variación que sufre la otra llamada dependiente.

Siguiendo con el análisis de la sesión 1 se tendrán en cuenta situaciones de formulación, acción y validación, con el fin de analizar las categorías 3 y 4 de esta investigación "Conversión de un sistema semiótico de representación en otro" y "Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano", a través de las cuales se pretende analizar como los estudiantes se trasladan entre los diferentes registros semióticos de representación y especialmente el traslado hacia el registro gráfico, ya que como lo menciona Duval (1994) una de las mayores dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de función radica en el manejo de los múltiples sistemas de representación que ésta posee.

Para analizar estas categorías se solicitó a los estudiantes que completaran una tabla a partir de la expresión algebraica propuesta y luego elaborarán una gráfica que represente la relación existente entre la cantidad de metros cúbicos consumidos por un usuario y el costo de la factura.


i. Resuma los pasos anteriores en una expresión matemática que permita calcular el valor de la factura para un usuario de estrato 1 que haya consumido entre 1 y 20 M^3 de agua.

cargo fijo 5.726 ÷ 10 = 286.3 x 20 = 5,726

Imagen 42 Respuesta estudiante A_{17} en una situación didáctica de formulación.

Como se puede observar para el estudiante A_{17} una expresión algebraica es un polinomio aritmético en el cual no tiene en cuenta variables. Cuando se le entrevistó acerca de la tarea realizada respondió lo siguiente:

P: ¿Cómo puedes calcular el valor de cualquier por ejemplo el costo de 11 m^3 consumidos con la expresión que propusiste?
A_{17}: Dividiendo 5726 entre 11.
P: ¿ y eso le da como resultado el valor de la factura para 11m^3?
A_{17}: sí.
P: ¿Qué significa el número 5726?
A_{17}: Porque 5726 era el valor total del mes
P: ¿Porque lo dividiste entre 20?
A_{17}: Porque esa era la cantidad de m^3 que preguntaban
P: ¿Que significa el numero 286,3?
A_{17}: Lo que debe pagar por lo que gasto.
P: ¿A tu casa llega el servicio público de agua?
A_{17}: Si
P: ¿Llega factura por ese servicio?
A_{17}: Si

En la entrevista realizada a el estudiante A_{17} se puede determinar que este asume el cargo fijo de acueducto registrado en la factura como el valor total a pagar y a partir de este obtiene el valor del consumo dividiendo dicho valor entre la cantidad de m^3 consumidos por el usuario. Es claro entonces que el estudiante no relaciono la situación con su experiencia previa, por lo que es válido pensar que aunque se extraigan situaciones del contexto cercano de los estudiantes, este hecho por sí solo no garantiza una mejor comprensión de las tareas.

j. Un usuario desea saber cuánto seria el valor de la factura para determinada cantidad de m^3, para lo cual creo la siguiente tabla:

Completa la tabla utilizando la expresión matemática que propusiste en el punto i.

m^3	0	2	4	6	8	10	12	15	20
Valor de la factura.	5,726	5,726	5,726	5,726	5,726	5,726	5,726	5,726	5,726

Imagen 43 Respuesta estudiante A_{17} en una situación didáctica de acción.

En la tarea realizada por el estudiante A_{17} éste asocia el mismo valor a diferentes cantidades de m^3 consumidos por el usuario, lo cual indica que considera que sin importar el consumo siempre pagará el mismo valor en la factura, lo cual demuestra claramente que no ha interpretado la situación de variación propuesta.

P: ¿ Porque en todas las casillas del valor de la factura aparece 5726?
A_{17}: porque siempre paga lo mismo
P: ¿ En tu casa el valor de la factura siempre es igual?
A_{17}: No, a veces pagamos más y otras veces menos
P: ¿ De qué depende que paguen más, o paguen menos?
A_{17}: Del agua que se gasta

Es claro que el estudiante A_{17} comprende claramente que el costo de la factura está directamente relacionado con la cantidad de m3 consumidos por cada usuario, no obstante en las diferentes tareas realizadas siempre asignó el mismo valor al costo de la factura, lo que implica que no pudo relacionar su experiencia previa con la situación propuesta como se esperaba. Esto lleva a pensar que el utilizar situaciones del contexto no garantiza que la totalidad de los estudiantes comprendan las tareas y las realicen de forma acertada.

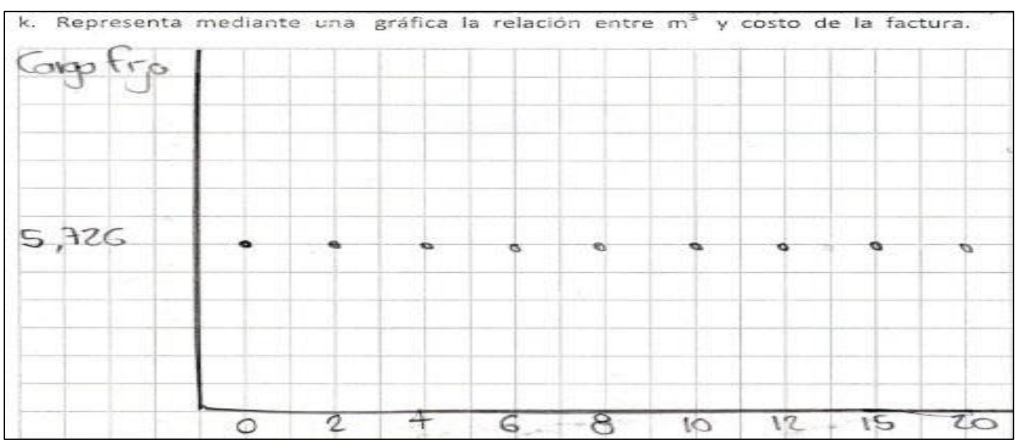
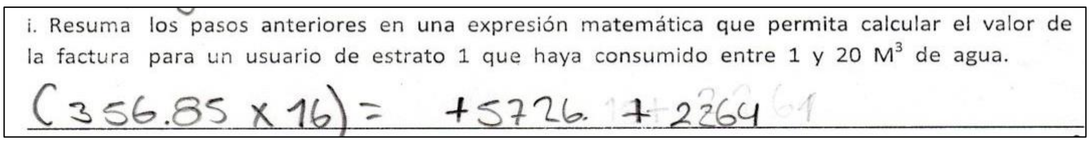


Imagen 44 Respuesta estudiante A_{17} en una situación didáctica de validación.

Como se puede apreciar el estudiante A_{17} tiene un adecuado manejo del plano cartesiano y ubica bien las parejas ordenadas, lo que implica que se traslada correctamente del registro tabular al gráfico, no obstante el poder realizar de forma acertada la conversión entre estos dos registros no implica una adecuada comprensión de la situación. Algo que se ha criticado bastante de los métodos tradicionales de enseñanza del concepto de función, ya que en estos generalmente se le solicita a los estudiantes que realicen conversiones entre los diferentes registros semióticos de representación de la función pero sin analizar ni comprender el porqué de dichos procedimientos.


i. Resuma los pasos anteriores en una expresión matemática que permita calcular el valor de la factura para un usuario de estrato 1 que haya consumido entre 1 y 20 M^3 de agua.

(356.85 x 16) = +5726. + 2264

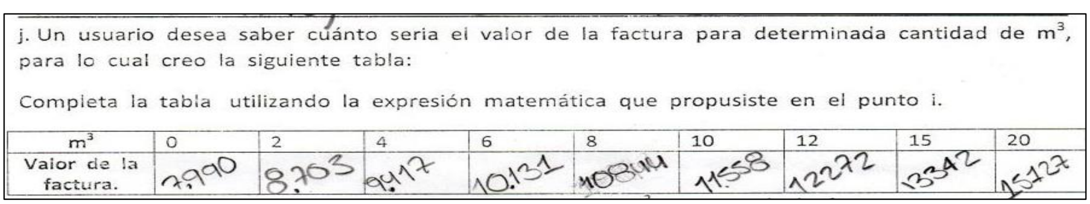
Imagen 45 Respuesta estudiante A_3 en una situación didáctica de formulación.

El estudiante A_3 ha definido un procedimiento válido para determinar el costo de cualquier cantidad de m^3 consumidos por un usuario teniendo en cuenta el valor del m^3 y los cargos fijos presentes en la factura, no obstante cuando se le solicita definir una expresión algebraica que generalice dicho procedimiento éste no emplea letras como variables que pueden tomar cualquier valor dentro del dominio definido para la situación en este caso $0 \leq x \leq 20$.

P: ¿La expresión que propones se aplica para cualquier cantidad de m3 consumidos por un usuario ?
A_3: Creo yo que si
P: ¿cómo?
A_3: se multiplica 356,86 por la cantidad de m3 y luego se le suman los cargos fijos de aseo y acueducto
P: ¿Cómo sería el procedimiento para calcular el costo de la factura para una cantidad de 11 m3 consumidos?
A_3: Lo mismo solo cambiaría el 16 por el 11
P: ¿Qué cambios realizarías en la expresión que propusiste para que esta se aplique a cualquier cantidad de m3 consumidos?
A_3: Pondría la x, ya que x es una valor cualquiera
P: ¿Por qué no lo hizo en la expresión que propusiste?
A_3: Porque el ejercicio pedía proponer una expresión para calcular el costo entre 1 y 20 m3, entonces yo escogí el 16

En la entrevista realizada a el estudiante A_3 se puede determinar que este tiene interiorizado el concepto de expresión algebraica, su aplicabilidad a una situación y por qué las variables son representadas por letras, ya que éstas pueden tomar cualquier valor. Sin embargo cuando se le solicitó plantear una expresión que generaliza el proceso para una situación con un dominio $0 \leq \square \leq 20$ como en este caso, el estudiante no tuvo en cuenta que la variable puede tomar cualquier valor entre 0 y 20 y optó por asignarle a la variable el valor de 16, lo cual claramente evidencia que en algunos estudiantes se genera un conflicto cuando se restringe el dominio de la función a un intervalo determinado.

Con base en lo observado en el desarrollo de la tarea y la entrevista realizada al estudiante A_3 es válido pensar que un aspecto a tener en cuenta cuando se analiza el traslado de los estudiantes entre los diferentes registros semióticos de representación del concepto de función está relacionado con la noción que los estudiantes desarrollen del dominio y rango de la función, ya que como se pudo apreciar una inadecuada comprensión de estos aspectos puede generar conflictos al trasladarse entre los diferentes registros, especialmente el algebraico.


j. Un usuario desea saber cuánto seria el valor de la factura para determinada cantidad de m^3, para lo cual creo la siguiente tabla:

Completa la tabla utilizando la expresión matemática que propusiste en el punto i.

m^3	0	2	4	6	8	10	12	15	20
Valor de la factura.	7.990	8.703	9.417	10.131	10844	11.558	12272	13342	15127

Imagen 46 Respuesta estudiante A_3 en una situación didáctica de acción.

P: ¿Describe el procedimiento que utilizaste para diligenciar la tabla?
A_3: Multiplicaba 356,86 por 0 y a eso le sumaba el aseo y el cargo fijo.
P: ¿Y para los otros valores?
A_3: Hacía lo mismo
P: ¿usaste la expresión algebraica que propusiste?
A_3: Sí, pero cambiando el 16 por el 1, 2,4,6,8,10,12,15,20
P: ¿Podrías haber diligenciado sin necesidad de conocer la expresión algebraica?

A_3: Pues si
P: ¿Cómo?
A_3: Normal, hacia lo mismo

Como se puede observar el estudiante A_3 diligenció correctamente la tabla, aunque como el mismo lo expresó el registro algebraico no fue una condición necesaria para realizar esta tarea, lo cual cuestiona los métodos tradicionales empleados para la enseñanza del concepto de función según los cuales al estudiante generalmente se le ofrece una expresión algebraica sin ninguna relación con el contexto y a partir de la cual debe trasladarse hasta el registro tabular y de allí al gráfico.

Sin embargo como lo demuestra A_3 cuando se ofrece una situación relacionada con el contexto cercano, en lugar de una expresión algebraica carente de significado, el estudiante plantea un procedimiento que el mismo puede validar para trasladarse a través de los diferentes registros semióticos de representación y de igual forma analizar la validez de los resultados obtenidos a partir del mismo.

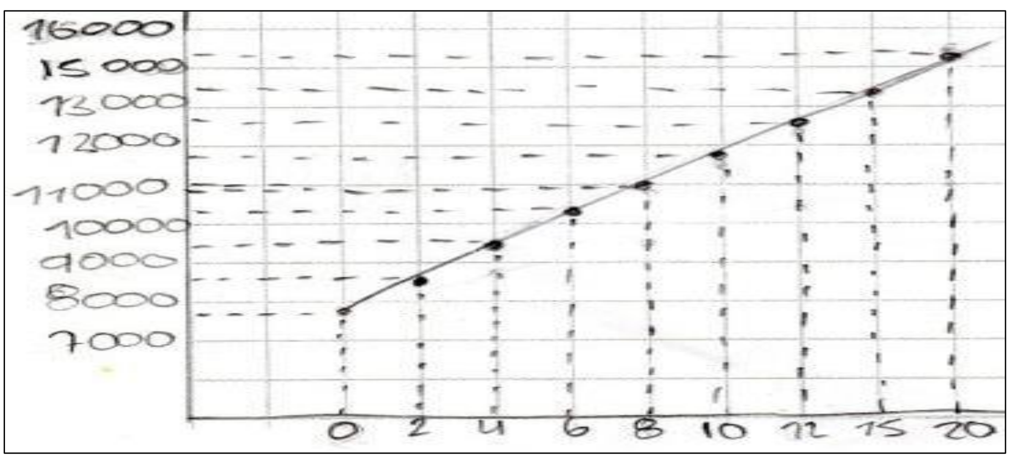


Imagen 47 Respuesta estudiante A_3 en una situación didáctica de validación.

P: ¿Qué interpretación le das a la gráfica que obtuviste?
A_3: Pues que si gasta más m3 paga más.
P: ¿Qué representa los valores que aparecen en el eje horizontal?
A_3: Los m3
P: ¿ ¿Qué representa los valores que aparecen en el eje horizontal?
A_3: El valor de la factura

P: ¿Por qué coloco los m3 en el eje horizontal y no en el vertical?
A_3: Porque son los independientes
P: ¿Entonces los valores independientes siempre se ubican en el eje horizontal?
A_3: Pues si
P: ¿Por qué?
A_3: Porque no dependen de nada.
P: Si colocáramos los valores independientes en el eje vertical ¿Qué pasaría con la gráfica?
A_3: Quedaría hacia abajo
P: ¿Por qué?
A_3: Llevaría un orden.
P: ¿Cómo sería ese orden?
A_3: Por ejemplo aquí (señala el eje vertical) iría el 0, el 2 y así iría subiendo

Como se puede observar en la tarea realizada por el estudiante A_3 a pesar de que presenta dificultades en el manejo de la escala, esto no es impedimento para que pueda reconocer la relación funcional representada en la gráfica.

En la entrevista realizada al estudiante A_3 se puede apreciar una adecuada comprensión de la situación permite a los estudiantes interpretar los diferentes registros del concepto de función, como en este caso el gráfico, ya que claramente se puede apreciar que el estudiante más que una gráfica sin sentido reconoce una relación de dependencia entre las variables consumo - costo la cual está representada en el producto cartesiano.

8.4.2 Sesión 2 : "Promoción de cuadernos"

La empresa encargada de diseñar y comerciar los cuadernos oficiales de la selección Colombia de la temporada 2015 las vende a $ 3.000 c/u, debido a la gran cantidad de cuadernos que no se vendieron, ha decidido llevar a cabo una promoción con el fin de potenciar las ventas

La promoción es la siguiente:

Por cada cuaderno comprado se hará un descuento de $ 150 valido para cada cuaderno.

Por ejemplo si un cliente lleva 1 cuaderno se le descontará $150, pero si lleva 2 cuadernos se descontará $300 en cada cuaderno y así sucesivamente.

Esta situación se trabajó durante 4 sesiones de una hora, al finalizar las cuales se esperaba que los estudiantes modelaran la situación a través de una expresión algebraica, aritmética o en lenguaje natural correspondiente a una función cuadrática, asimismo que representaran gráficamente dicha relación y que determinaran si la situación correspondía a una función o una relación, empleando para ello el criterio de unicidad o de la línea vertical.

A continuación se analiza el desempeño de los estudiantes a la luz de cada una de las categorías planteadas para esta investigación.

Para el análisis de las categorías 1 y 2 “Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables” y “Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas” se solicitó a los estudiantes que analizaran la situación dada en lenguaje natural y a partir de dicho análisis diligenciaran una tabla para lo cual debían reconocer plenamente la relación de dependencia entre las variables número de cuadernos y costo, para luego modelarla a través de una expresión aritmética.

La mayoría de los estudiantes reconoció la relación de dependencia determinando que a mayor número de cuadernos mayor es el descuento, lo cual evidenciaron a través de un procedimiento aritmético válido para conocer el costo de diferentes cantidades de cuadernos aplicando el respectivo descuento.

Número de cuadernos vendidos	Valor del descuento por cuaderno.	Valor del cuaderno con descuento	Valor total de los cuadernos
1	150	2850	2.850
2	300	2.700	5.400
4	600	2.400	9.600
6	900	2100	12.600
7	1.050	1950	13.650
10	1.500	1500	15000
11	1.650	1350	14.850
12	1.800	1.200	14.400
0	0	0	0

Imagen 48 Respuesta estudiante A_{14} en una situación didáctica de acción.

Como se puede apreciar el estudiante A_{14} diligenció correctamente la tabla de acuerdo con los parámetros propuesto en la situación “Promoción de cuadernos” por lo que se puede pensar que reconoció las variables involucradas (número de cuadernos y costo) de forma implícita. No obstante en la última fila se observa que no interpreto correctamente la situación en la que el valor del cuaderno con descuento = 0.

El estudiante asoció la situación descuento = 0 con el hecho de no comprar ningún cuaderno, cuando se esperaba que analizara que existe un número de cuadernos para el cual el descuento es igual al costo inicial, por lo que el valor final sería $ 0.

Este hecho deja en evidencia que el contexto no familiariza a los estudiantes con situaciones que puedan ser modeladas por una función cuadrática en las cuales un producto puede alcanzar un valor máximo y a partir de allí este empieza a disminuir a pesar que la cantidad aumente.

Durante la entrevista el estudiante E_{14} argumento lo siguiente:

P: *¿Cuál fue el proceso llevado a cabo para diligenciar la tabla?*
A_{14}: *Multiplicaba el valor del descuento, por ejemplo si son dos multiplicaba 150 por 2, entonces así sucesivamente, si multiplicaba por 12 daba 1800 que es el valor del descuento, entonces ya eso se lo resto a los $ 3000 que vale el cuaderno.*
P: *¿Cómo obtiene los valores del costo total?*
A_{14}*: sencillo, (solicita una calculadora) 1200 por 12 me da 14400*
P: *¿Al final de la tabla dice que 0 cuadernos tienen un costo de $ 0 al hacerles el descuento?*
A_{14}: *Porque aquí dice (señala la tabla) que el valor del cuaderno con el descuento es $ 0, entonces (se queda pensando).*
P: *Tenga en cuenta que ese es el valor del cuaderno con el descuento*
A_{14}: *Ah entonces hay un error, porque el descuento se excedió mucho y cubrió los $3000*

El estudiante reconoce de forma innata las variables que se encuentran presentes en la situación y las manipula de forma acertada de acuerdo con los requerimientos de la tarea a realizar. Al finalizar la entrevista, cuando cae en cuenta por sí mismo que tuvo un error de comprensión del ejercicio, evidencia que ha encapsulado que dos cantidades diferentes de cuadernos pueden tener el mismo costo, en este caso a 0 y 20 cuadernos. Lo cual significa que un elemento del rango está relacionado con dos elementos del dominio.

Número de cuadernos vendidos	Valor del descuento por cuaderno.	Valor del cuaderno con descuento	Valor total de los cuadernos
1	150	2850	2850
2	300	2700	5,400
4	600	2400	9,600
6	900	2100	12,600
7	1,050	1950	13,650
10	1.500	1.500	15000
11	1.650	1350	14,850
12	1,800	1200	14,400
20	3.000	0	0

Imagen 49 Respuesta estudiante A_{20} en una situación didáctica de acción.

La tarea realizada por el estudiante A_{20} permite apreciar que a pesar de lo mostrado por el estudiante A_{14}, y aunque es difícil encontrar en el contexto situaciones que puedan ser modeladas por una función cuadrática, es posible que realicen satisfactoriamente tareas de este tipo las cuales pueden ser consideradas de un nivel de dificultad significativo, siempre y cuando se contextualicen correctamente. Cuando se le entrevistó para conocer sus concepciones comento lo siguiente:

> ***P:*** *¿Cómo supiste que si el costo del cuaderno correspondía a $ 0 , se debía a que se había comprado 20 cuadernos?*
> ***A₂₀:*** *Porque se supone que doce cuadernos valen $1800 con el descuento, entonces comencé a subirle el número de cuadernos que compraba y se supone que por cada rebaja iba aumentando más lo que valía, pues lo que disminuía el precio mejor dicho, entonces ya cuando llegue a 20 me dio ya cuando hice la multiplicación por 150 me dio cero, que fue lo que hice con todas.*
> ***P:*** *¿Una multiplicación o una resta?*
> ***A₂₀:*** *Hice una multiplicación primero del 20 por el 150, me dio $ 3000 y eso obviamente si se lo resto a los $ 3000 que costaba el cuaderno, daba cero.*

Las respuestas del estudiante A_{20} permiten apreciar que cuando las tareas que implican reconocer la relación de dependencia entre variables y plasmarla en un registro tabular, se hacen mucho más significativas si se proponen a partir de una situación que los estudiantes puedan relacionar con su experiencia previa, ya que la comprensión de dicha situación permite al educando plantear un proceso que él mismo puede validar, dotando así de significado la tarea y trascender de la tradicional práctica de simplemente repetir un algoritmo.

Retomando lo planteado por García, Cedeña, & Rivera (2004) cuando plantean que las tareas que más dificultad presenta para el estudio del concepto de función son aquellas relacionadas con el traslado de cualquier sistema de representación a el algebraico, se propuso una tarea para complementar el análisis de la categoría 2 en la cual los estudiantes debían plantear una expresión aritmética o algebraica que permitiera determinar el valor de cualquier cantidad de cuadernos.

Debido a los antecedentes de este tipo tipo tareas, se realizó una subdivisión dentro de la misma con el fin de facilitar a los estudiantes su realización sin perder de vista el objetivo.

En el momento 1 se solicitó que describieran paso a paso los procedimientos aritméticos realizados para calcular el costo de diferentes cantidades de cuadernos.

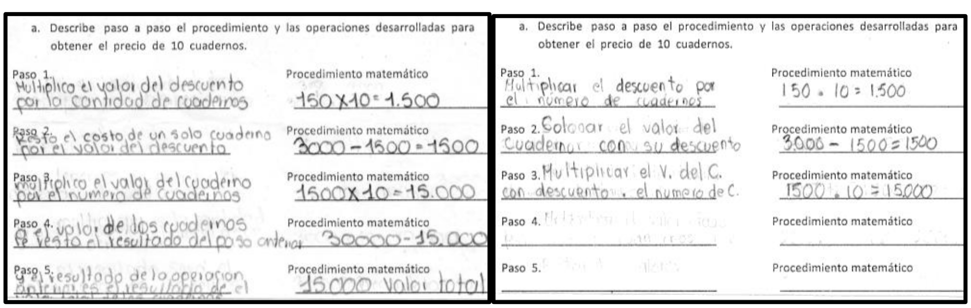


Imagen 50 Respuestas estudiante A_7 Respuesta estudiante A_{33}

En una situación didáctica de formulación.

En la tarea realizada por los estudiantes A_7 y A_{33} se puede apreciar claramente que han modelado un procedimiento aritmético valido para calcular el costo de 10 cuadernos, lo cual aplica para cualquier número de cuadernos.

Luego se les solicitó a los estudiantes A_7 y A_{33} que propusieran una expresión matemática que permita calcular el costo de 10 cuadernos, la cual contenga todos los pasos especificados en el proceso propuesto anteriormente

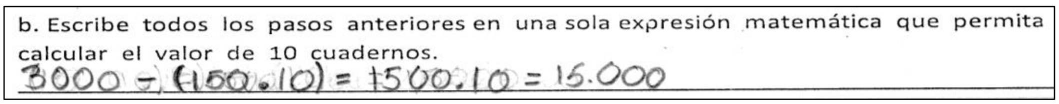

b. Escribe todos los pasos anteriores en una sola expresión matemática que permita calcular el valor de 10 cuadernos.
3000 - (150.10) = 1500.10 = 15.000

Imagen 51 Respuesta estudiante A_{33} en una situación didáctica de formulación

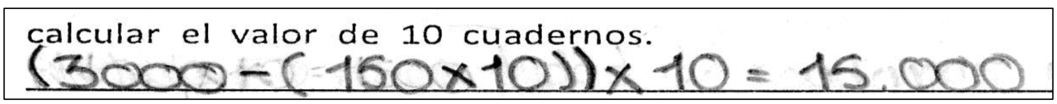

calcular el valor de 10 cuadernos.
(3000-(150x10))x10 = 15.000

Imagen 52 Respuesta estudiante A7 en una situación didáctica de formulación.

Los polinomios propuestos por los estudiantes A_7 y A_{33} contienen los procesos tenidos en cuenta en la tarea anterior y son válidos para calcular el costo de 10 cuadernos, es de notar que ambos incluyen el uso de signos de agrupación de forma acertada.

Este hecho permitiría pensar que no habría problema al solicitar a los mismos estudiantes que modelen una expresión de tipo algebraico que permita calcular el costo de cualquier cantidad de cuadernos.

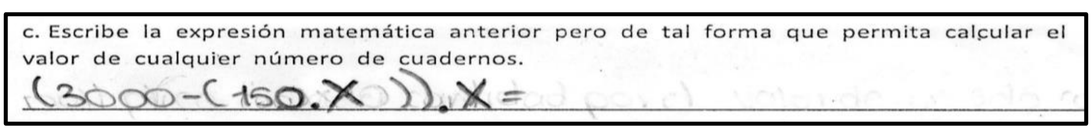

c. Escribe la expresión matemática anterior pero de tal forma que permita calcular el valor de cualquier número de cuadernos.
(3000-(150.X)).X =

Imagen 53 Respuesta estudiante A7 en una situación didáctica de formulación.

El estudiante A_7 en correspondencia con el paso 1 determinó una expresión para calcular el costo de cualquier cantidad de cuadernos, utilizando lenguaje algebraico y manipulando signos de agrupación, lo cual da a entender que a pesar de la dificultad que este tipo de tareas pueda presentar los estudiantes si están en capacidad de realizarlas.

En la entrevista que se le realizó respondió lo siguiente:

P: *¿ Qué significado tiene la letra x en la expresión que propusiste?*
A_7: *La x son los cuadernos.*
P: *¿Por qué usar una letra en lugar de un número?*
A_7: *Porque la letra se puede reemplazar por cualquier número.*
P: *Al reemplazar x por cualquier número ¿Qué resultado da esa operación?*
A_7: *Da el valor.*
P: *¿El valor de que?*
`A_7: *El valor de la cantidad de cuadernos.*

El estudiante A_7 ha identificado las variables presentes en la tarea y las ha asociado con las que tradicionalmente se les ha asignado (x para la variable independiente, y para la variable dependiente), dicho reconocimiento le permite comprender su rol dentro de la expresión algebraica propuesta.

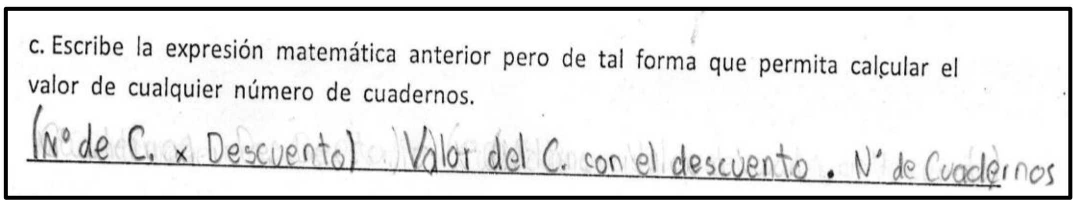

c. Escribe la expresión matemática anterior pero de tal forma que permita calcular el valor de cualquier número de cuadernos.
(Nº de C. x Descuento) Valor del C. con el descuento . N' de Cuadernos

Imagen 54 Respuesta estudiante A_{33} en una situación didáctica de formulación.

Por otra parte el estudiante A_{33} a pesar de haber descrito un procedimiento válido para calcular el costo de 10 cuadernos, no pudo plantear una expresión algebraica que generaliza dicho proceso para cualquier cantidad. Es de notar que no utiliza lenguaje algebraico y en lugar de este emplea lenguaje natural. Además omite algunos pasos como por ejemplo restar al valor inicial el valor del descuento.

Cuando se le realiza la entrevista responde lo siguiente:

P: *¿ Para qué puede servir la expresión algebraica que propusiste?*
A_{33}: *Para calcular el valor de los cuadernos.*
P: *Pudiste haber representado la expresión algebraica de otra forma?*
A_{33}: *No, solo se me vino esa.*

El desempeño de A_{33} demuestra que algunos estudiantes no tienen asimilado que el lenguaje sincopado que caracteriza el álgebra, permite simplificar la descripción de procedimientos matemáticos especialmente cuando es necesario trasladarlos al registro escrito.

Lo anterior se debe en gran medida a que los estudiantes prefieren particularizar las tareas, y no tienen reparo en repetir un mismo proceso una indeterminada cantidad de ocasiones, si la tarea lo requiere, por más extenso que éste sea. Es decir prefieren realizar un proceso largo muchas veces, que idear una expresión que lo resuma. En cuanto a la generalización de procesos a partir de expresiones algebraicas, es claro que si no se aborda el estudio del álgebra desde la generalidad como lo propone Sessa (2005), los estudiantes seguirán asumiendo el álgebra como un área más y no como una herramienta que les permite trascender de lo particular hacia lo general.

Es de anotar que más del 50% de los estudiantes que realizaron la tarea, al llegar a este punto en particular dejaron el espacio completamente en blanco, lo cual confirma lo planteado por García, Cedeña, & Rivera (2004) al mencionar que las tareas que implican trasladarse desde los diferentes registros semióticos de representación de la función hacia el algebraico son las que presentan una mayor dificultad para los estudiantes.

Para el análisis de las categorías 3 y 4 "Conversión de un sistema semiótico de representación en otro", y "Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano", se plantearon dos tareas.

La primera consistió en analizar como se trasladan los estudiantes desde una representación semiótica en lenguaje natural hacia una representación algebraica, lo cual como se analizó anteriormente es una tarea de notable dificultad para los estudiantes ya que la enseñanza tradicional de la matemática ha privilegiado lo particular sobre la generalidad.

Con la segunda tarea propuesta para el análisis de la categoría 3, se buscó analizar en qué medida los estudiantes que propusieron una expresión algebraica para calcular el valor de cualquier cantidad de cuadernos, la emplean correctamente. Asimismo como construir un sistema semiótico de representación gráfico a partir de los sistemas de registro algebraico y tabular.

Para este análisis fue necesario confrontar los tres sistemas de representación (algebraico, tabular y gráfico).

$$(3.000 - x \cdot 150) \cdot x$$

Imagen 55 Representación algebraica estudiante A_{18}, situación didáctica de formulación

No cuadernos	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Costo	0	5.400	9.600	12.600	14.400	15.000	14.400	12.600	9.600	5.400	0

Imagen 56 Representación tabular estudiante A_{18}, situación didáctica de acción.

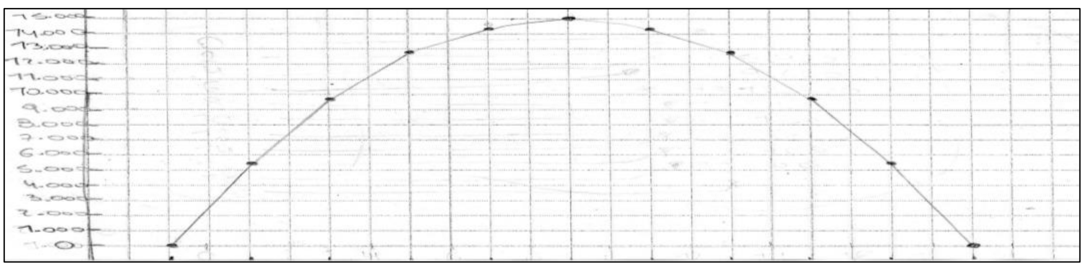


Imagen 57 Representación algebraica estudiante A_{18}, situación didáctica de validación

Como se puede apreciar el estudiante transita correctamente a través de los diferentes registros semióticos de representación de la función. Partiendo del algebraico pasando por el tabular hasta llegar al gráfico.

Durante la entrevista cuando se le pregunta acerca de que fue la más complicado de la tarea respondió que:

> ***P:*** *De las tareas desarrolladas cual fue la de mayor complejidad?*
> ***A*$_{18}$*:*** *Lo más difícil fue hacer la gráfica con los valores de la tabla.*
> ***P:*** *Porque?*
> ***A*$_{18}$*:*** *Pues porque hay que hacerla a escala y por ejemplo yo puse los valores de 1000 en 1000 y para ubicar el 9600 había que calcular.*
> ***P:*** *Como te pareció el ejercicio de completar la tabla usando la expresión algebraica*
> ***A*$_{18}$*:*** *Fue fácil porque solo había que reemplazar a x por el número de cuadernos y eso daba el costo total.*

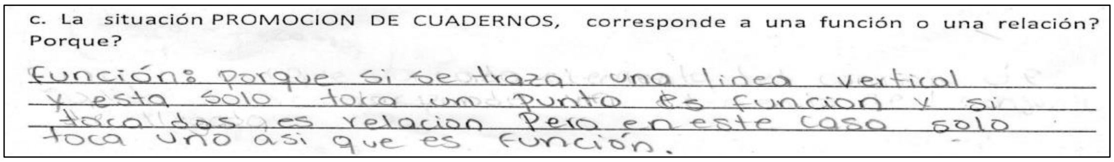
***P**: En cuanto a la actividad de hallar una expresión algebraica para determinar el costo de cualquier cantidad de cuadernos, ¿Cómo te pareció?*
***A_{18}:** También estuvo un poquito difícil porque era la primer vez que hacia una actividad de esas.*
***P:** ¿Qué fue lo más difícil?*
***A_{18}:** Lo más difícil fue ordenar los valores para que diera el resultado.*

En la entrevista realizada a el estudiante A_{18} se observa que si bien es cierto las tareas que implican pasar de los diferentes registros semióticos de representación al registro algebraico, representan una dificultad para los estudiantes, existen otras tareas como las del manejo de la escala adecuada al momento de trasladarse desde el registro tabular al gráfico. Algo que muchos docentes consideran obvio en el estudio de la función, sin embargo los estudiantes tienen la tendencia a representar las parejas ordenadas presentes en la tabla, construyendo así graficas que no poseen una adecuado manejo de la escala, tal como lo plantean Castro y Díaz (2014) cuando mencionan que *"uno de los elementos que no se tienen en cuenta por parte de los estudiantes es el manejo de la escala" (p.17)*

Con respecto al traslado desde los diferentes registros semióticos de representación de la función al registro algebraico, para el estudiante A_{18} la tarea que mayor complejidad reviste, consiste ordenar correctamente los procedimientos, ya que en ocasiones procesos que se realizan, después deben colocarse primero en la expresión algebraica para que ésta generalice correctamente la situación planteada, lo cual constituye otro aspecto que muchos docentes tratan como una obviedad, sin embargo los estudiantes tienden a trasladar los procedimientos aritméticos hacia el registro algebraico en el mismo orden que los realizan inicialmente.

Esta situación contrasta con lo que tradicionalmente se ha especulado acerca de este tipo de tareas, ya que se pensaba que la mayor dificultad radicaba en comprender que la letra a evaluar generaliza cualquier posible valor que puede asignarse a la variable independiente, sin embargo existen otras dificultades igual de importantes asociadas con el ordenamiento de los procesos, los cuales deben ser tenidos en cuenta por parte del docente.

Para el estudio de la categoría 5 de análisis “Criterios para diferenciar una función de una relación”, se les preguntó abiertamente a los estudiantes si la situación PROMOCIÓN DE CUADERNOS corresponde a una función o una relación, los resultados de esta tarea se analizan a continuación.


c. La situación PROMOCION DE CUADERNOS, corresponde a una función o una relación? Porque?

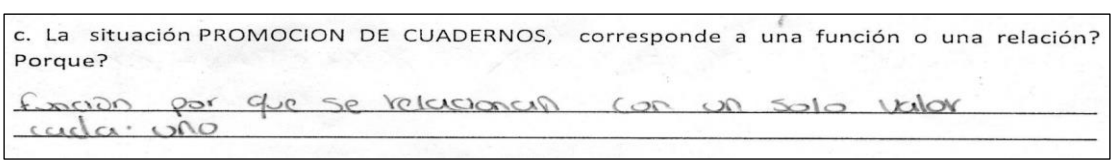
Funcións porque si se traza una linea vertical y esta solo toca un punto es funcion y si toca dos es relacion Pero en este caso solo toca uno asi que es función.

Imagen 58 Respuesta estudiante A_{18}, situación didáctica de validación.

Como se puede apreciar en la respuesta dada por el estudiante A_{18}, emplea el criterio de la línea vertical según el cual una relación es una función si al trazar líneas verticales en la gráfica obtenida, estas líneas solo la cortan en un punto, además especifica en qué casos corresponde a una función y cuando a una relación.

En la entrevista cuando se le preguntó acerca del porqué decidió emplear este criterio, respondió que:

> ***P:*** *¿Por qué sabes que cuando la línea toca un solo punto de la gráfica entonces es una función?*
> ***A_{18}:*** *Porque eso significa que a cada valor de y le corresponde un solo valor de x.*
> ***P:*** *¿Qué pasaría si a un valor de y le correspondieran dos valores de x?*
> ***A_{18}:*** *También es una función.*
> ***P:*** *¿Qué pasaría si a un valor de x le correspondieran dos valores de y?*
> ***A_{18}:*** *No sería función*
> ***P:*** *¿Porque?*
> ***A_{18}:*** *Porque la recta tocaría dos puntos de la gráfica y solo puede tocar uno*


c. La situación PROMOCION DE CUADERNOS, corresponde a una función o una relación? Porque?

funcion por que se relacionan con un solo valor cada uno

Imagen 59 Respuesta estudiante A_3, situación didáctica de validación.

El estudiante A_3 emplea acertadamente el criterio de unicidad para determinar que esta relación en particular corresponde a una función. Cuando se le pregunta acerca de la tarea respondió que:

> ***P:*** *¿Cuáles son los elementos que se deben relacionar con un solo valor para que sea una función?*
> ***A₃:*** *La cantidad de cuadernos y el precio.*

Es claro que el estudiante reconoce que en una función debe presentarse una relación uno a uno, entre los elementos del conjunto de salida con los de llegada, lo cual evidencia que aplica el criterio de unicidad para diferenciar relaciones de funciones.

El desempeño de A_3 lleva a pensar que el uso de situaciones del contexto para el estudio del concepto de función facilita el reconocer de forma intrínseca por parte de los estudiantes la relación de dependencia entre sin acudir a un lenguaje formal cargado de tecnicismos, y de esta forma aplicar de forma acertada criterios tan importantes como el de la unicidad para diferenciar una función de una relación.

En cuanto a la categoría 5 “Dominio y rango de la función” se propuso a los estudiantes dos tareas en la primera debían analizar la relación establecida entre número de cuadernos y costo total, con el fin de determinar cuales tenían sentido y cuáles no, asimismo que número de cuadernos vendidos favorecen o perjudican la empresa.

La segunda tarea consistió en determinar un elemento del conjunto de salida cuando se conoce su pareja ordenada en el conjunto de llegada.

Debido a que esta situación podría ser modelada a través de una función cuadrática, se esperaba que los estudiantes asocian la mayor ganancia posible con el mayor valor encontrado en el rango.

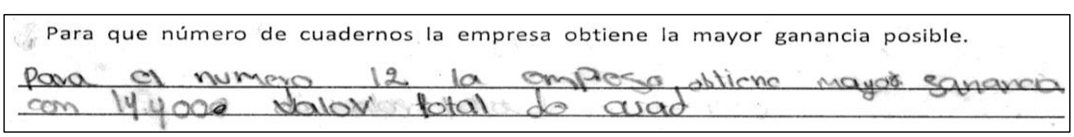
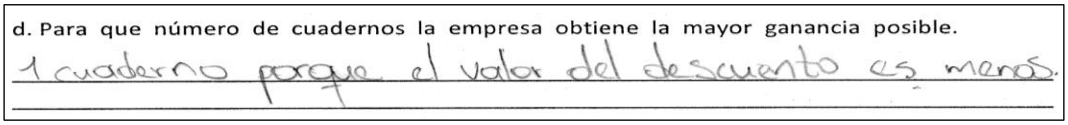

Para que número de cuadernos la empresa obtiene la mayor ganancia posible.
Para el numero 12 la empresa obtiene mayor ganancia con 14.000 valor total de cuad

Imagen 60 Respuesta estudiante A_5, situación didáctica de validación.


d. Para que número de cuadernos la empresa obtiene la mayor ganancia posible.

1 cuaderno porque el valor del descuento es menos.

Imagen 61 Respuesta estudiante A_1, situación didáctica de validación.

No obstante para los estudiantes A_1 y A_5 la mayor ganancia se encuentra asociada con valores diferentes al máximo valor del rango.

Varios estudiantes de los que realizaron la tarea coincidieron con A_1 al mencionar que la mayor ganancia la obtiene la empresa cuando vendía un cuaderno.

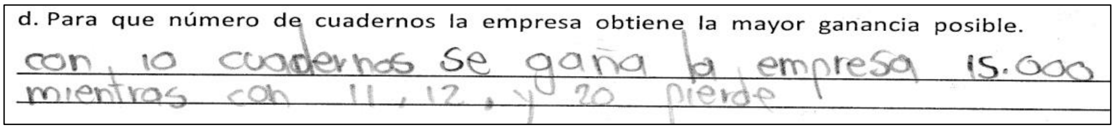
Durante la entrevista a A_1 manifestó que:

P: *¿Qué entiendes por mayor ganancia posible?*
A_1: *Cuando la empresa gana más plata.*
P: *¿Por qué dices que gana más cuando vende un cuaderno?*
A_1: *Porque el descuento es menor, en cambio si vende mas hace mas descuento y gana menos.*

Durante la entrevista a A_5 manifestó que:

P: *¿ es $ 14400 el mayor valor obtenido en una venta de cuadernos?*
A_5: *Sí*
P: *¿ seguro? - Mire la tabla-*
A_5: *Ah no*
P: *¿ Porque había puesto $ 14400?*
A_5: *Me equivoque.*
P: *¿ Cuál es entonces el mayor ingreso posible para la empresa?*
A_5: *$ 15000*

Al comparar las entrevistas realizadas a los estudiantes A_1 y A_5 se observa claramente que el primero asocia la mayor ganancia con la menor pérdida, mientras que el segundo la asocia con el mayor ingreso, aunque las dos posturas son válidas, para el caso de la función cuadrática el planteamiento de A_5 al asociarse con el valor máximo de la funcion cumple con lo propuesto en la categoría 5 de esta investigación.


d. Para que número de cuadernos la empresa obtiene la mayor ganancia posible.

con 10 cuadernos se gaña la empresa 15.000
mientras con 11, 12, y 20 pierde

Imagen 62 Respuesta estudiante A_{23}, situación didáctica de validación.

Llama la atención que solo unos pocos de los 35 estudiantes respondieron que la mayor ganancia se obtenía cuando la empresa vendía 10 cuadernos obteniendo un ingreso de $ 15000 como lo menciona A_{23}, a pesar de que la gran mayoría realizó los cálculos correctamente.

Durante la entrevista A_{23} evidencia tener claro que el mayor valor en el rango está asociado con la mayor ganancia para la empresa, así mismo reconoce cuáles valores tienen sentido o no para la situación.

> ***P:*** *¿Por qué dices que la mayor ganancia corresponde a una venta de 10 cuadernos?*
> ***A_{23}:*** *(mira la tabla) Porque si uno lo compara con los otros es el valor mayor.*
> ***P:*** *¿Por qué se obtiene pérdidas con la venta de 11, 12 y 20 cuadernos?*
> ***A_{23}:*** *(mira la tabla) Porque por 11 cuadernos pagan $14850, por 12 cuadernos 14400 y por 20 salen regalados, entonces eso es menor que los $15000 que pagan por 10*
> ***P:*** *Como interpretas el hecho de que por más cuadernos paguen menos dinero los clientes?*
> ***A_{23}:*** *(piensa un momento) Pues que la promoción es muy buena si se llevan muchos cuadernos, pero si se llevan poquitos ya no lo es tanto.*
> ***P:*** *¿Has pensado qué pasa si un cliente lleva más de 20 cuadernos?*
> ***A_{23}:*** *(Piensa un momento, solicita permiso para usar calculadora) por ejemplo con 21 cuadernos sale - 3150.*
> ***P:*** *¿Cómo interpretas el signo negativo del resultado?*
> ***A_{23}:*** *Pues yo creo que es como si la empresa le pagará al cliente.*
> ***P:*** *¿es esto posible en la vida real?*
> ***A_{23}:*** *Yo no creo.*
> ***P:*** *¿Qué cambio habría que hacerle a la promoción?*
> ***A_{23}:*** *(piensa un momento) que la promoción solo se pueda hasta 20 cuadernos*

El estudiante reconoce la relación de dependencia entre las variables y ha modelado una expresión aritmética que le permite calcular el valor de cualquier número de cuadernos, de igual forma analiza los resultados de forma lógica trascendiendo lo procedimental para acercarse a lo analitico, algo bastante escaso en un estudiante de tan corta edad.

Lo anterior permite pensar que la modelación de situaciones del contexto aporta a la construcción del concepto de función, yendo más allá de la logaritmación ejercitada y aplicación de principios del álgebra tan común en la enseñanza tradicional, para generar procesos válidos de reflexión en los que el estudiante analiza y da sentido a los diferentes registros semióticos de representación, utilizando un lenguaje natural propio, lo cual le es mucho más significativo.

8.4.3 Situación 3 "El salario de James"

Con el análisis de la situación "El salario de James" y el desarrollo de las tareas propuestas, se espera que los estudiantes identifiquen la variable dependiente e independiente en una relación funcional, asimismo puedan trasladarse desde el registro verbal y tabular al algebraico, para luego pasar al gráfico.

Esta situación en particular demandaba que los estudiantes analicen los ingresos de una persona que trabaja vendiendo periódicos, quien recibe un salario básico diario de $ 8000 más una bonificación de $ 150 por cada periódico vendido. Se desarrolló durante 2 sesiones de una hora en las cuales se abordaron las 5 categorías determinadas para el análisis del aprendizaje del concepto de función en la presente investigación.

Para el análisis de la categoría 1 Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables se solicitó a los estudiantes que analizaran el enunciado verbal de la situación para determinar cuáles son las variables presentes y la relación de dependencia entre ellas.

EL SALARIO DE JAMES.

James trabaja como vendedor de el periódico el Q'Hubo, sus ingresos dependen de un salario básico de $ 8000 diarios, más una comisión de $ 150 por cada periódico vendido.

1. Cuales consideras que son las variables presentes en la situación anterior.

los variable se representan en la comision de $ 150 por cada periodico vendido, gana mas esa son la variables

1. Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?

es el salario porque aunque no venda periodicos tiene su salario

2. Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?

la variable dependiente es la comision y el salario

3. Describe con tus palabras la relación de dependencia entre las variables mencionadas.

la relacion es 150 es la variable que se relaciona con lo demas que es 8.000.

Imagen 63 Respuesta estudiante A_{24}, situación didáctica de formulación.

En el desempeño del estudiante A_{24} se puede apreciar que ha identificado las variables presentes en la situación (comisión y número de periódicos) sin embargo no utiliza un lenguaje formal para describirlas ni las diferencia correctamente. También se observa que posee una marcada dificultad para reconocer en una relación de dependencia cual es la variable independiente.

> ***P:*** *¿Qué entendemos por variable independiente?*
> ***A_{24}:*** *por ejemplo es algo que no cambia, por ejemplo un número que no cambia.*
> ***P:*** *¿Entonces para ud que es una variable?*
> ***A_{24}:*** *Es algo que cambia.*
> ***P:*** *¿Como es que la variable independiente no cambia?*
> *No, no cambia (piensa un momento), no, la variable independiente si cambia ya con la variable dependiente, pero si no tiene variable dependiente no cambia.*
> ***P:*** *¿Qué entendemos por variable dependiente?*
> ***A_{24}:*** *Es un número que si cambia, por ejemplo con un salario lo podemos diferenciar, por ejemplo en el ejercicio, la variable dependiente es la comisión de James y por cada periódico vendido ya por los que venda tiene más comisión, va aumentando el número.*
> ***P:*** *Entonces de qué depende la comisión?*
> ***A_{24}:*** *La comisión depende del salario.*
> ***P:*** *¿Qué entendemos por relación de dependencia ?*
> ***A_{24}:*** *Consiste en lograr calcular el valor total.*

A_{24} inicialmente confunde el concepto de variable independiente con el de constante, sin embargo reconoce que una variable es algo que cambia, al igual que la variable dependiente. El caso de A_{24} deja claro que algunos estudiantes presentan concepciones erróneas con respecto a lo que es una variable y que en el estudio del concepto de función otorgan significados diferentes a las variables independiente y dependiente.

El análisis de la tarea y las respuestas del estudiante A_{24} hacen pensar en un primer momento que el no diferenciar correctamente las variables presentes en una situación y la relación de dependencia entre ellas, representan un obstáculo importante al momento de desarrollar tareas que implican la conversión de un sistema de representación en otro, tal como lo propone la categoría 2 de este estudio.

No obstante cuando se le planteó una tarea en la cual debia trasladarse desde un registro verbal hacia un registro tabular, el estudiante A_{24} la realizó satisfactoriamente y justificó los procedimientos llevados a cabo. Lo que lleva a concluir que si bien puede suceder que los estudiantes no identifican mediante un lenguaje formal las variables presentes en una relación de dependencia, ni la relación de dependencia misma, esto no implica necesariamente un obstáculo para que dicho estudiante pueda realizar conversiones entre los diferentes registros semióticos de representación de la función.

Periódicos vendidos	Comisión	Salario Total
0	0	8.000
1	150	8.150
5	750	8.750
10	1.500	9500
12	1800	9.800
20	3000	11.000
8	1200	9200

5. Describe con tus palabras el procedimiento realizado para completar la tabla cuando conoces únicamente el número de periódicos vendidos.

lo que hago es multiplicar el numero de periodicos vendidos por 150 y el resultado es la comision del vendedor que se suma con el salario total

Imagen 64 Respuesta estudiante A_{24}, situación didáctica de acción.

P: *¿Cómo supiste el procedimiento a seguir para diligenciar la tabla?*

A_{24}: *Yo sabía que la comisión de James era 150 y entonces por ejemplo 2 periódicos serían 300 y yo en vez de no sumar multiplique y entonces ya con el salario total de James que era $ 8000 le sumaba el valor total de la comisión.*

P: *¿Cómo supiste que primero debías multiplicar 150 por el número de periódicos?*

A_{24}: Porque primero sumaba, pero mejor multiplique que es otra forma más fácil.

P: *¿Cómo calculas el valor del salario total solamente sabiendo el valor de la comisión?*

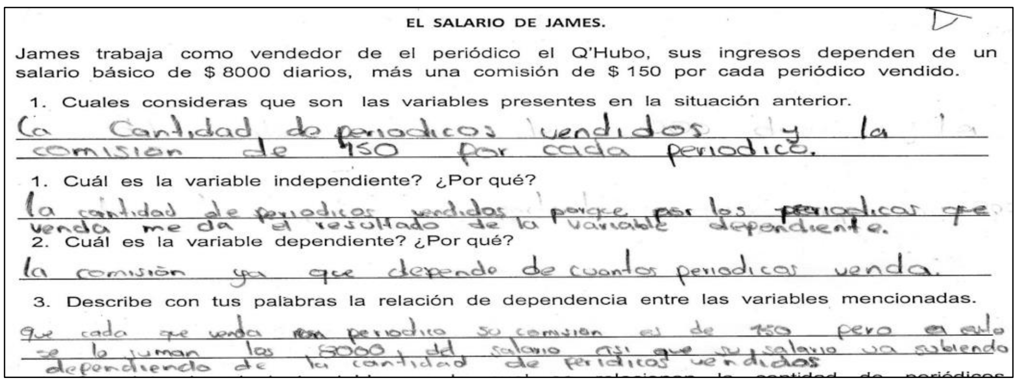
A_{24}: *Sumando 8000 a la comisión.*

P: *¿Cómo calcular el número de periódicos sabiendo el valor de la comisión?*

A_{24}: *Pues yo lo que hacía era multiplicar hasta que me diera 150.*

Las respuestas de A_{24} llevan a pensar que una de las tareas que mayor dificultad presentan por parte de los estudiantes es la de identificar las variables presentes en una relación de dependencia.

Dicha dificultad está asociada más con un problema de uso del lenguaje, ya que a pesar de no poder definir plenamente las variables y la relación de dependencia entre ellas, esto no impide que realice conversiones exitosas en los diferentes registros, como en este caso del registro verbal a el tabular.


EL SALARIO DE JAMES.

James trabaja como vendedor de el periódico el Q'Hubo, sus ingresos dependen de un salario básico de $ 8000 diarios, más una comisión de $ 150 por cada periódico vendido.

1. Cuales consideras que son las variables presentes en la situación anterior.

La Cantidad de periodicos vendidos y la comision de 150 por cada periodico.

1. Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?

la cantidad de periodicos vendidos porque por los periodicos que venda me da el resultado de la variable dependiente.

2. Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?

la comisión ya que depende de cuantos periodicos venda.

3. Describe con tus palabras la relación de dependencia entre las variables mencionadas.

que cada que venda ~~un~~ periodico su comision es de 150 pero en esto se le suman los 8000 del salario así que su salario va subiendo dependiendo de la cantidad de periodicos vendidos

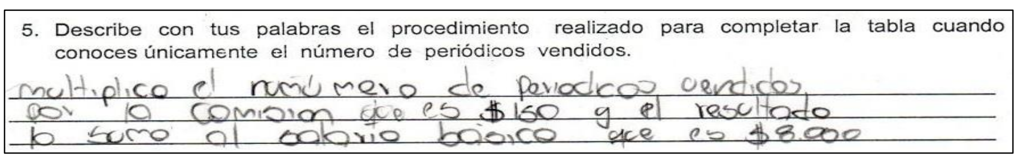
Imagen 65 Respuesta estudiante A_{28}, situación didáctica de formulación.

A diferencia de lo observado con el estudiante A_{24} , A_{28} identifico plenamente las variables presentes en la situación "El salario de James" y definió de forma acertada la relación de dependencia.

P: *¿Cómo diferencias en una relación la variable independiente de la dependiente?*
A_{28}: *Porque la cantidad de periódicos no depende de nada, y en cambio la comisión depende de la cantidad de periódicos que venda.*
P: *¿Qué pistas o ideas en el enunciado te permitieron reconocer la relación de dependencia?*
A_{28}: *Pues ahí decían que los ingresos dependían de un salario básico de $ 8000 diarios y le dan una comision de 150 por cada periódico vendido, osea que por uno le daban 150, por dos 300 y así sucesivamente iba aumentando el sueldo.*
P: *Para ud que es una relación de dependencia?*
A_{28}: *Son dos cosas que dependen de una sola cosa, como por ejemplo el salario básico de $ 8000 y la comisión de 150 ya que los dos dependen de los periódicos vendidos.*
P: *La comisión depende de los periódicos vendidos?*
A_{28}: *No, pero va aumentando.*

Si bien es cierto reconocer las variables independiente y dependiente no son condición excluyente para trasladarse correctamente entre los diferentes registros, es importante mencionar que dicho conocimiento garantiza un adecuado tránsito a través de estos, pues al igual que el estudiante A_{28} aquellos estudiantes que reconocieron las variables y la relación de dependencia entre ellas realizaron correctamente la mayoría de tareas que implican el traslado de un registro a otro, mientras que aquellos estudiantes que no las reconocieron presentaron errores en la mayoría de tareas que implican la conversión entre registros.

Para el análisis de la categoría 2 Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas se le solicitó inicialmente a los estudiantes que describieran a través de un enunciado verbal el proceso realizado para determinar el salario de James a partir de la cantidad de periódicos vendidos, y luego que determinaran una expresión algebraica que permitiera generalizar dicho proceso.


5. Describe con tus palabras el procedimiento realizado para completar la tabla cuando conoces únicamente el número de periódicos vendidos.

multiplico el numero de periodicos vendidos por la comision que es \$150 y el resultado lo sumo al salario basico que es \$8.000

Imagen 66 Procedimiento del estudiante A_{29}, situación didáctica de formulación.

Como se evidencia en la tarea desarrollada por el estudiante, este generalizó un proceso aritmético valido para calcular el costo del salario a partir de la cantidad de periódicos vendidos, no obstante cuando se le solicitó generalizar dicho procedimiento en una expresión algebraica, éste no pudo realizar la tarea.

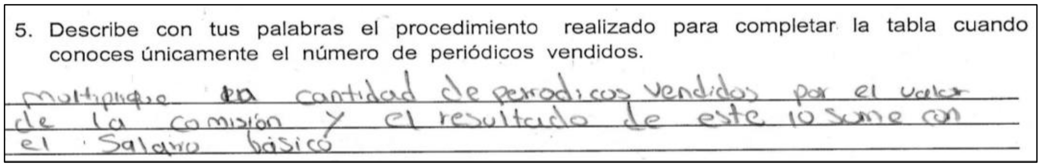
Lo anterior pone de manifiesto que cuando un estudiante no generaliza una relación de dependencia entre variables a través de una expresión algebraica, no implica que no comprenda la situación, o que no haya encontrado un proceso válido para determinar el valor de la variable dependiente a partir de la independiente.

En la entrevista cuando se le preguntó por qué no determinó la expresión algebraica solicitada aunque fuera con errores, respondió lo siguiente.

P: *Para ti ¿Qué es una expresión algebraica?*
A_{29}: *Es la operación pero resumida en números*
P: *¿Te parece difícil determinar una expresión algebraica que permita generalizar una situación?*
A_{29}: *Más o menos*
P: *¿Qué es lo que te parece más difícil?*
A_{29}: *Pues ya sacar cada cosa de lo que hice y ya pues armar la expresión.*
P: *Entonces una expresión algebraica es el resumen de un procedimiento?*
A_{29}: *Si, como un resumen para sacar el total o la respuesta más fácil*
P: *¿Por qué no realizaste la tarea de hallar una expresión algebraica que permitiera calcular el salario de James para diferentes cantidades de periódicos?*
A_{29}: *Porque no entendía bien y no fui capaz*
P: *Que no entendía?*
A_{29}: *Pues sacar como resumirlo.*
P: *Qué debe llevar una expresión algebraica*
A_{29}: *Signos, números, paréntesis, palabras*
P: *Para que se usan las palabras en una expresión algebraica.*
A_{29}: *No se, como para más orden o algo asi.*

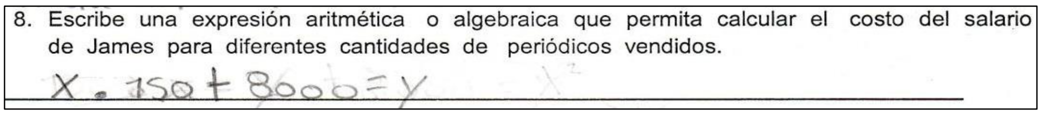
El estudiante A_{29} comprende plenamente que una expresión algebraica sintetiza de alguna forma el procedimiento llevado a cabo para calcular el valor de un elemento en el conjunto de llegada a partir de un elemento del conjunto de salida, no obstante en sus respuestas se puede apreciar que no incorpora el concepto de variable a pesar de haberlas descrito correctamente en la primer parte de la tarea.

Este hecho lleva a pensar que aunque los estudiantes reconozcan las variables presentes en una situación no garantiza que puedan definir una relación funcional a través de una expresión algebraica, ya que se les dificulta asimilar que existen unos elementos que pueden tomar varios valores, como las variables representadas a través de las letras.


5. Describe con tus palabras el procedimiento realizado para completar la tabla cuando conoces únicamente el número de periódicos vendidos.

multiplique la cantidad de periodicos vendidos por el valor de la comision y el resultado de este lo sume con el Salario básico

Imagen 67 Procedimiento del estudiante A_{22}, situación didáctica de formulación.


8. Escribe una expresión aritmética o algebraica que permita calcular el costo del salario de James para diferentes cantidades de periódicos vendidos.

X . 150 + 8000 = y

Imagen 68 Expresión algebraica del estudiante A_{22}, situación didáctica de formulación.

Por otro lado el estudiante A_{22} sustentó correctamente a través de un enunciado verbal el procedimiento necesario para determinar el salario de James para diferentes cantidades de periódicos vendidos, de igual forma determinó una expresión algebraica válida utilizando las letras x,y como variables.

P: ¿Qué significado tiene la letra x en la expresión algebraica que determinaste?
A_{22}: *La cantidad de periódicos*
P: *¿Tuviste alguna dificultad para describir el proceso llevado a cabo al diligenciar la tabla?*
A_{22}: *No, porque solo había que multiplicar y sumar*
P: *Que multiplicaba y que sumaba?*
A_{22}: *El número de periódicos por la comisión para saber cuánto le daban de comisión y ya le sumaba $ 8000 para saber cuánto le pagaban en total.*
P: *¿Tuviste alguna dificultad para determinar la expresión algebraica?*
A_{22}: *Si*
P: *Cuál?*
A_{22}: *El orden, porque el resultado me quedaba negativo*
P: *El resultado le quedaba negativo??*
A_{22}: *Sí porque la ordenaba mal*
P: *Como supo que la estaba ordenando mal?*
A_{22}: *Porque me daba negativo*
P: *Qué significaba ese signo negativo en el resultado?*
A_{22}: *Que era menos del salario, o sea que el debia*
P: *Como hizo para ordenarla*
A_{22}: *Buscaba que me diera positivo.*

En el desempeño de A_{22} cabe anotar que la tarea que mayor dificultad le representó está relacionada con el ordenamiento de los procesos de tal manera que al reemplazar la variable independiente el resultado fuera positivo, aspecto al que se le da poca importancia por parte de muchos docentes, ya que se asume que el hecho de determinar un procedimiento y reconocer las variables implica un tránsito sin complicaciones hacia el registro algebraico, no obstante como lo han mostrado varios estudiantes existe un aspecto muy importante a tener en cuenta el cual está relacionado con el orden en el que se desarrollan los procedimientos.

Una variable didáctica a tener en cuenta en el análisis del aprendizaje del concepto de función, está relacionada con la forma en que los estudiantes realizan conversiones para trasladarse a través de los diferentes sistemas de representación (Lenguaje natural – Algebraico – Tabular– Gráfico), lo cual se analiza en las categorías 3 y 4 de esta investigación "*Conversión de un sistema semiótico de representación en otro"* y *"Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano"*.

Para analizar estas dos categorías a partir de la situación "El salario de James" se propuso a los estudiantes varias tareas en las cuales debían trasladarse en un primer momento del registro verbal al tabular, luego de tabular al algebraico y para finalizar debían trasladarse al registro gráfico, desde cualquiera de los sistemas de representación anteriores.

Periódicos vendidos	Salario Total
0	8.000
1	8.000
5	8.750
10	9500
12	9.880
20	11.000
8	9200

Imagen 69 Registro tabular elaborado por A_{28} situacion didactica de accion.

$$X \cdot 150 + 8.000 =$$

Imagen 70 Registro algebraico elaborado por A_{28} situación didáctica de formulación.

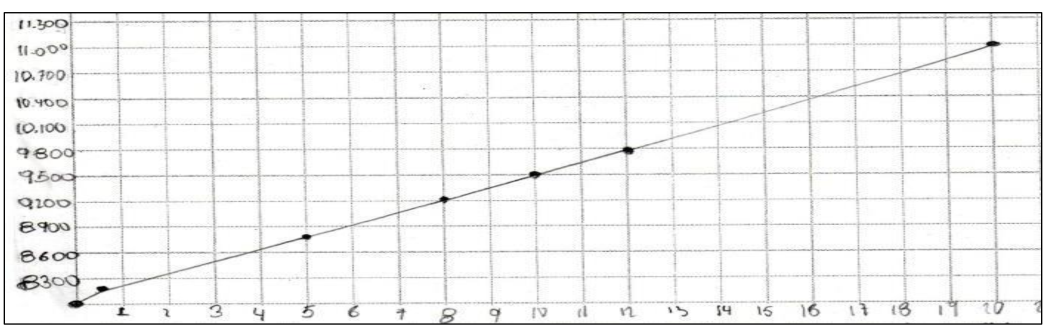


Imagen 71 Registro gráfico elaborado por A_{28} en una situación didáctica de validación.

La tarea realizada por A_{28} demuestra que no presenta inconvenientes para trasladarse desde el registro verbal al tabular a pesar de presentar un pequeño error al diligenciar el campo correspondiente a 1 periódico vendido, de igual forma su representación algebraica es correcta así como su representación gráfica en la que cabe destacar el adecuado uso de la escala, aspecto que había presentado especial dificultad para algunos estudiantes.

Durante la entrevista se le preguntó acerca de cuál fue el procedimiento llevado a cabo para transitar a través de los diferentes registros y especialmente cuál fue el que le sirvió de punto de partida para trasladarse hacia el registro gráfico.

> ***P:*** *¿Cuál de las tareas realizadas te parecio mas dificil: llenar la tabla, definir la expresión algebraica o elaborar la gráfica?*
> ***A_{28}:*** *llenar la tabla porque a veces no tenía los periódicos que se habían vendido y tampoco tenía la comisión y entonces era duro, ademas no sabia de ecuaciones.*
> ***P:*** *Cuáles ecuaciones.*
> ***A_{28}:*** *Perdon la expresion algebraica.*
> ***P:*** *Si hubiera conocido la expresión algebraica habría sido más fácil?*
> ***A_{28}:*** *Si*
> ***P:*** *¿Por qué?*
> ***A_{28}:*** *Porque con la expresión algebraica ya sabría que x puede ser cualquier periódico y que ya se multiplica por la comisión.*
> ***P:*** *¿Cómo describirías el procedimiento que realizaste para definir la expresión algebraica?*
> ***A_{28}:*** *Yo sabía que los periódicos eran x y que al multiplicar los periódicos por 150 ya tendría la comisión y ya a esa comisión le sumó el salario básico.*
> ***P:*** *¿Cómo obtuviste las parejas ordenadas que represente en la gráfica?*
> ***A_{28}:*** *Saque los valores que estaban en la tabla.*
> ***P:*** *¿En algún momento usó la expresión algebraica?*
> ***A_{28}:*** *No*

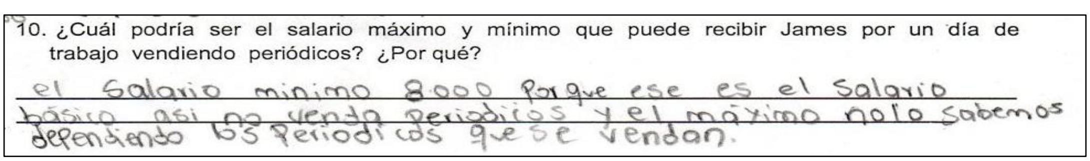
Según lo expuesto por el estudiante ***A_{28}***, es posible determinar que para este no es necesario el tránsito a través del registro algebraico para llegar al registro gráfico, lo cual dialoga con lo propuesto por Villa y otros (2008), cuando mencionan que la modelación de situaciones permite al estudiante comprender de forma significativa los conceptos matemáticos, como en este caso el concepto de función, trascendiendo los procedimientos netamente artísticos que poco permiten la reflexión y en su lugar facilita el análisis y la reflexión.

Otra variable didáctica importante a tener en cuenta en este estudio está relacionada con el significado que los estudiantes asignan al dominio y rango de una función, es decir si estos identifican que existe un conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, los cuales pueden tener o no sentido a la luz de la situación, y a partir de los que se define otro conjunto de valores.

Con la situación “El salario de James” se esperaba que los estudiantes comprendan que existen valores que pueden tener sentido y otros que no, trascendiendo el manejo aritmético algebraico que tradicionalmente ha estado ligado al estudio del concepto de función, en el cual los estudiantes no reflexionan acerca del significado de los valores asignados al dominio y rango.

Lo anterior es analizado a través de la categoría 5 definida para esta investigación “Dominio y rango de la función”, para lo cual se propuso a los estudiantes una tarea, en la cual debían definir cuál podría ser el salario mínimo y máximo que podría percibir James por un dia de trabajo como vendedor de periódicos, así como los significados que otorgan a estos valores.

Se esperaba entonces que los estudiantes al solucionar la tarea respondieran usando lenguaje natural que la función lineal que modela la situación posee un dominio definido entre cero y el infinito, y un un rango definido entre 8000 y el infinito.


10. ¿Cuál podría ser el salario máximo y mínimo que puede recibir James por un día de trabajo vendiendo periódicos? ¿Por qué?

el Salario minimo 8.000 Porque ese es el Salario básico asi no venda periodicos y el máximo nolo sabemos dependiendo los periodicos que se vendan.

Imagen 72 Respuesta estudiante A_{15} situación didáctica de validación.

Como se puede apreciar A_{15} comprendió a partir de la situación didáctica propuesta que el rango puede tomar valores entre 8000 y el infinito, los cuales están relacionados con valores en el dominio entre 0 y el infinito.

Durante la entrevista respondió lo siguiente:

P: *¿Cuál es el número máximo de periodicos que puede vender James?*
A_{15}: *No se puede saber.*
P: *¿Porque?*
A_{15}: *Porque le puede ir muy bien y vender muchos.*
P: *¿Cuál es el número mínimo de periódicos que puede vender James?*
A_{15}: *lo mínimo que puede vender es nada, o sea 0 periodicos.*
P: *¿Cómo supiste que el salario mínimo de James por un dia de trabajo es de $8000?*
A_{15}: *Porque ese era el salario básico, así no vendiera periódicos le pagaran 8000*
P: *Ese salario de $ 8000 con que cantidad de periódicos está asociado?*
A_{15}: *Con cero periódicos, osea que no vendió periódicos.*
P: *Porque no se puede saber el salario máximo?*
A_{15}: *Porque no se puede saber el numero de periodicos que puede vender.*

Por otro lado el estudiante A_{15} comprendió que la situación está definida para valores del dominio entre 0 y el infinito, asimismo el rango está definido para valores entre 8000 y el infinito.

A continuación se presenta una síntesis donde se contrastan las categorías de análisis.

8.5 Fase 4 Análisis a posteriori

La fase 4 de la ingeniería didáctica "análisis a posteriori" consiste en la confrontación de los datos obtenidos durante la fase 3 "experimentación", con la información obtenida en la fase 2 " concepción y análisis a priori".

En esta confrontación se tienen en cuenta las observaciones realizadas durante las secuencias de enseñanza, las tareas realizadas por los estudiantes, así como las impresiones y concepciones obtenidas durante las entrevistas.

A continuación se presentará el análisis de los datos obtenidos en la fase 3 mediante la aplicación de las 3 secuencias didácticas anteriormente descritas (Pago de servicios públicos, Promoción de cuadernos, El salario de James) confrontada con la información obtenida en la fase 2 a partir de la situación a didáctica llamada “ Celulares”. Este análisis se realizó teniendo como referencia las 5 categorías descritas para el análisis del concepto de función formuladas en la fase de análisis preliminares.

8.5.1 Análisis a posteriori de las situaciones didácticas desarrolladas en la fase

Tabla 12 Análisis a posteriori de las situaciones didácticas

	Análisis a priori	**Análisis a posteriori**
Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables	Falta de comprensión para identificar en una relación funcional cuales son las variables dependiente e independiente presentes en una situación relacionada con el contexto. Dificultad para reconocer y describir en el lenguaje propio la relación de dependencia entre las variables.	Planteamiento de expresiones aritméticas válidas que modelan la relación de dependencia entre las variables presentes en una situación didáctica relacionada con el contexto. Identificación correcta de las variables presentes en una situación didáctica susceptible de ser modelada por una función de lineal o cuadrática. Limitaciones en el uso del lenguaje al momento de argumentar la diferencia entre las variables independiente y dependiente.
Modelación de expresiones verbales,	Poca capacidad para expresar de forma	Asociación correcta de las letras con variables en una

aritméticas o algebraicas.	escrita y oral los procedimientos aritméticos llevados a cabo para determinar un elemento del conjunto de llegada a partir de un elemento del conjunto de salida en una situación contextualizada Problemas para determinar una expresión algebraica que modele la situación planteada y generalice el procedimiento aritmético llevado a cabo para determinar un elemento en el rango para cualquier elemento del dominio.	expresión algebraica. Adecuada comprensión de la letra como variable a la cual se le puede asignar un valor específico (letra evaluada) , en un rango de valores con lo cual se generaliza una relación de dependencia entre dos conjuntos. Planteamiento de expresiones aritméticas y algebraicas válidas que modelan la relación de dependencia entre los conjuntos de salida y de llegada. Dificultades en el uso del lenguaje sincopado para plantear expresiones algebraicas que generalicen un procedimiento aritmético que modela una situación relacionada con el contexto. Dificultades con el ordenamiento de los procesos aritméticos empleados para determinar un elemento del conjunto de llegada a partir de un

		elemento del conjunto de salida, en una expresión algebraica.
Conversión de un sistema semiótico de representación en otro.	No se tiene en cuenta el registro tabular como sistema de representación válido de una relación de dependencia funcional entre dos variables. Dificultades para plantear expresiones algebraicas que generalicen un procedimiento aritmético y modelen una situación a través de una relación de dependencia entre variables.	Traslado exitoso desde el registro tabular de la función al registro gráfico, reconociendo correctamente las parejas ordenadas y representándolas a través de un producto cartesiano. Traslado exitoso del registro verbal hacia el registro tabular, confrontando la validez o invalidez de los resultados a partir de la situación didáctica. Validación de procedimientos aritméticos que modelan la relación de dependencia entre variables y posibilitan el traslado entre los registros verbales y tabulares de la función, sin necesidad de pasar por el registro algebraico.
Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto	Desconocimiento del producto cartesiano como registro semiótico de representación	Reconocimiento de la relación de dependencia entre variables a partir del producto cartesiano

cartesiano.	gráfico de la función, es decir no reconocen que cada punto de la función ubicado en el plano cartesiano representa la relación de dependencia entre las variables dependiente e independiente. Asociación equivocada de las cantidades que ofrece la situación con los valores ubicados en el plano cartesiano sin atender a la relación de dependencia entre las variables.	representado a través del registro gráfico de la función. Utilización del producto cartesiano como registro semiótico de representación valido para representar la relación de dependencia entre variables presente en una situación modelada a través de una función lineal o cuadrática. Dificultades en el manejo de la escala al momento de representar relaciones de dependencia a través de un producto cartesiano
Dominio y rango de la función	Dificultad para comprender que en una relación funcional existen valores del dominio y especialmente del rango que pueden tener sentido y otros que no a de acuerdo con la situación de la cual fueron obtenidos los datos.	Uso del criterio de unicidad con algunas restricciones, especialmente en la función cuadrática al momento de diferenciar una relación de una función a partir del análisis del registro tabular. Uso del criterio de la línea vertical para diferenciar una función de una relación a partir del análisis del registro gráfico.

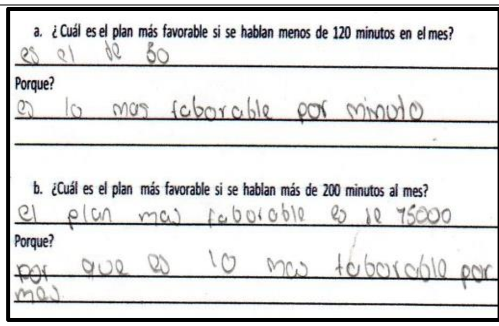
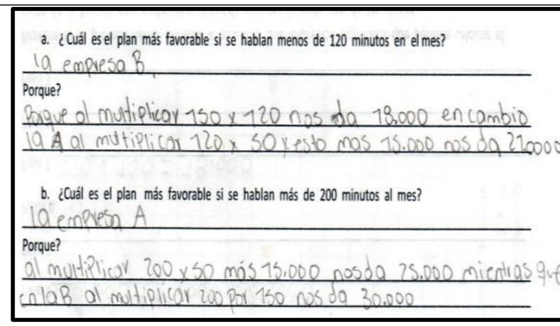
	Dado un elemento del conjunto de llegada en una relación funcional, se observó carencia de elementos matemáticos para determinar otro elemento en el conjunto de salida. Carencia de criterios válidos para diferenciar una relación de una función.	Dificultades para comprender que en una función cuadrática el punto máximo de la parábola representa el máximo valor del rango y en una situación del contexto este valor representa la máxima ganancia. Refinamiento de los procedimientos aritméticos para calcular un elemento del conjunto de llegada a partir de un elemento en el conjunto de salida y validación de cuando estos valores tienen sentido o no a partir de la situación propuesta.

Fuente: producción propia

En vista de que el eje central de la ingeniería didáctica como metodología de investigación en educación matemática radica en la comparación de los datos obtenidos a través del desarrollo de una situación a didáctica en la fase 2 Análisis a priori, con los resultados obtenidos luego de todo un proceso intencionado de aprendizaje mediante el desarrollo de situaciones didácticas en la fase 3 Experimentación.

A continuación se realizará un análisis de como evolucionó el concepto de función, comparando las concepciones de los estudiantes al momento de desarrollar las tareas de la situación a didáctica en la fase 2, con los aprendizajes alcanzados al desarrollar la misma situación a didáctica en la fase 3, posterior al desarrollo de las tres situaciones didácticas propuestas para este estudio.

8.5.2 Confrontación del análisis a priori con el a posteriori de la situación a didáctica.

Tabla 13 Confrontación categoría 1	
Categoría 1	
Reconocimiento y descripción de la dependencia entre variables	
Análisis a priori	Análisis a posteriori
 a. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan menos de 120 minutos en el mes? es el de 80 Porque? es lo mas faborable por minuto b. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan más de 200 minutos al mes? el plan mas faborable es el 75000 Porque? por que es lo mas faborable por mes **Imagen 73 Respuesta estudiante A_{24}**	 a. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan menos de 120 minutos en el mes? la empresa B Porque? Porque al multiplicar 150 x 120 nos da 18.000 en cambio la A al multiplicar 120 x 50 y esto mas 15.000 nos da 21000 b. ¿Cuál es el plan más favorable si se hablan más de 200 minutos al mes? la empresa A Porque? al multiplicar 200 x 50 más 15.000 nos da 25.000 mientras que en la B al multiplicar 200 por 150 nos da 30.000 **Imagen 74 Situación didáctica de acción.**

Fuente: producción propia

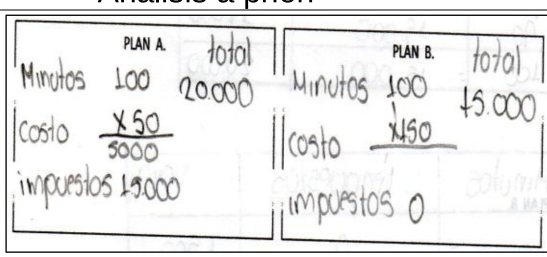
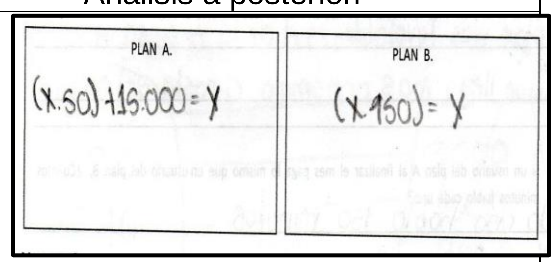
Confrontación

En la fase 2 (a priori) se encontró que un número significativo de la población de estudiantes, no tiene interiorizado el concepto de relación de dependencia entre variables, por lo que se les dificulta comprender que cuando en una situación existen dos variables relacionadas entre sí, toda variación que sufre una de las variables llamada independiente, determina la variación sufrida por otra variable llamada dependiente.

Este fenómeno se evidenció en la dificultad manifestada por un 89% de los estudiantes los cuales no pudieron determinar la relación de dependencia y dar solución a la tarea propuesta.

Al comparar los resultados obtenidos en la fase 2 (a priori) con los obtenidos finalizada la fase de experimentación en la que se modelaron diferentes situaciones relacionados con el contexto y al analizar el desempeño de los estudiantes al desarrollar una situación didáctica de acción, en la cual era necesario reconocer la relación de dependencia entre las variables número de minutos y costo de la factura, se pudo apreciar que efectivamente el estudiante reconoció la relación de dependencia e identifico cuál de las empresas resultaba más favorable, y que esta favorabilidad dependía directamente de la cantidad de minutos consumida.

Al igual que el estudiante A_{24} el 31,7% de los estudiantes reconocieron la relación de dependencia y resolvieron acertadamente la tarea, lo cual representa un avance del 20% si lo comparamos con el desempeño del mismo grupo en la fase 2

Tabla 14 Confrontación categoría 2	
Categoría 2	
Modelación de expresiones verbales, aritméticas o algebraicas	
Análisis a priori	Análisis a posteriori
 **Imagen 75 Respuesta estudiante A_{18}**	 **Imagen 76 Traslado del registro verbal al algebraico.**

Fuente: producción propia

Confrontación

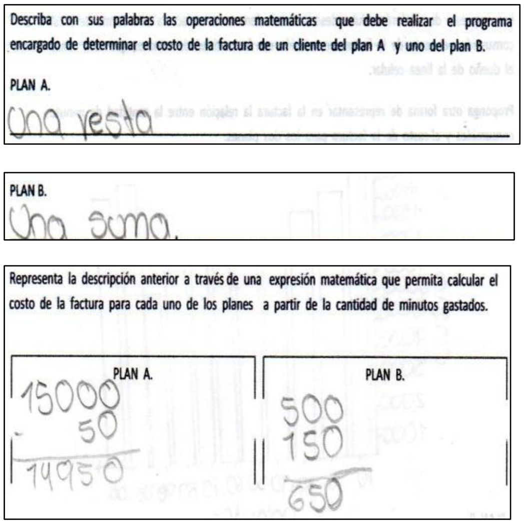
Como se puede apreciar, en el análisis a priori la mayoría de estudiantes al igual que A_{18} no pudo plantear un proceso aritmético valido que modele la relación de dependencia entre las variables.

Particularmente el estudiante A_{18} que fue uno de los pocos que se atrevió a proponer una expresión aritmética válida para determinar el costo de cada plan para cualquier cantidad de minutos, no logró trascender al registro algebraico y de esta forma generalizar la relación de dependencia en la situación propuesta.

El análisis a posteriori de la tarea desarrollada por el estudiante A_{18} en una situación didáctica de formulación, luego de finalizada la fase de experimentación, se puede apreciar como este plantea una expresión algebraica que generaliza correctamente la relación de dependencia entre los minutos consumidos por un usuario y el valor de la factura.

Al comparar el número de estudiantes que plantearon una expresión algebraica que generaliza el procedimiento y modela la situación se observó un incremento significativo en términos de porcentaje de un 2,8% de estudiantes en la fase 2 (1 de 35) a un 45,7% en la fase 3 (16 de 35).

<table>
<tr><td colspan="2">Tabla 15 Confrontación categoría 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Categoría 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conversión de un sistema semiótico de representación en otro.</td></tr>
<tr><td>Análisis a priori</td><td>Análisis a posteriori</td></tr>
<tr><td>



Describa con sus palabras las operaciones matemáticas que debe realizar el programa encargado de determinar el costo de la factura de un cliente del plan A y uno del plan B.

PLAN A.

Una resta

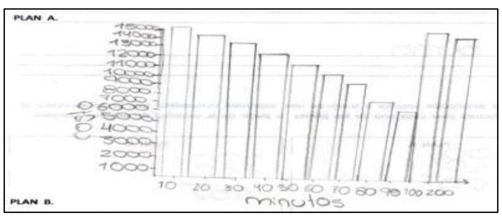
PLAN B.

Una suma.

Represente la descripción anterior a través de una expresión matemática que permita calcular el costo de la factura para cada uno de los planes a partir de la cantidad de minutos gastados.

PLAN A.	PLAN B.
15000 50 14950	500 150 650

Imagen 77 Respuesta del estudiante A_{28}



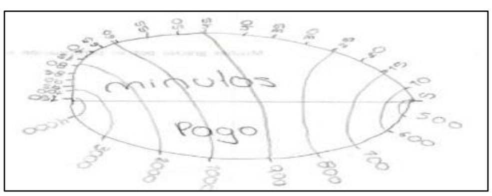
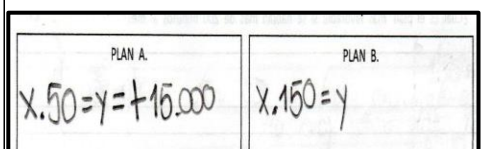


Imagen 78 Representación de la función propuesta por A_{28}

</td><td>

Para el análisis a posteriori de esta categoría se incluyó una tarea en la cual los estudiantes no solo debían reconocer la gráfica correspondiente a cada plan de telefonía celular, sino que esta vez debían construirla.

Imagen 79 Traslado del registro verbal al



PLAN A.	PLAN B.
X.50=y=+15.000	X.150=y

algebraico
Situación didáctica de acción.

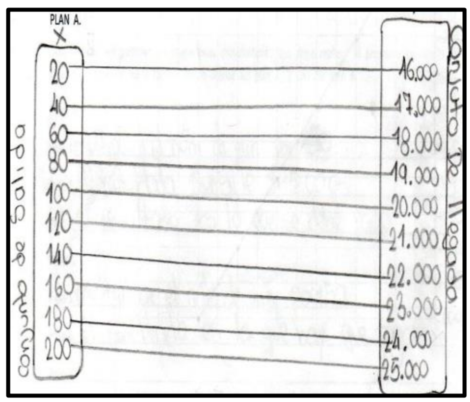


Imagen 80 Traslado del registro algebraico o verbal al tabular
Situación didáctica de acción.

</td></tr>
</table>

Fuente: producción propia

Confrontación.

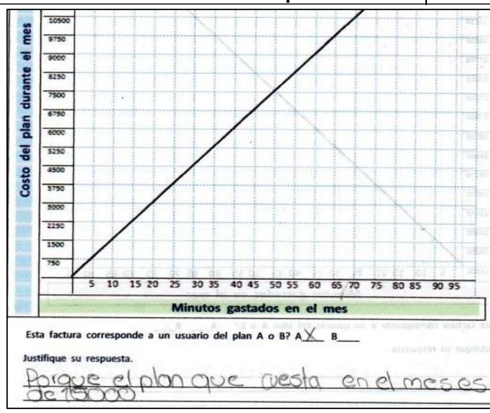
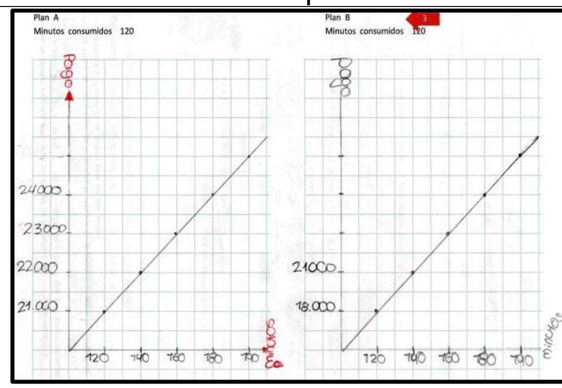
El análisis a priori arrojó que al momento de realizar conversiones de un sistema a otro predomina la carencia de herramientas verbales y aritméticas para describir el proceso que permite determinar un elemento en el conjunto de llegada a partir de otro elemento en el conjunto de salida.

Un número significativo de estudiantes no fueron capaces de plantear una expresión aritmética aún con errores que se acercara al procedimiento requerido y solo uno de los 35 logró modelar la situación en contexto mediante una expresión algebraica que generaliza un patrón de medida en el proceso para establecer la relación entre la cantidad de minutos y el costo de la factura.

Otro aspecto que llamó poderosamente la atención en la fase a didáctica está relacionado con que solo un estudiante empleó el registro tabular como forma válida de representación de la relación entre dos variables.

El análisis a posteriori entregó que luego de realizar las 3 situaciones didácticas propuestas en la fase de experimentación, 15 estudiantes implementaron el registro tabular cuando se les solicitó que propusieran otra forma de representar la relación de dependencia entre variables diferente al registro gráfico y algebraico.

Al confrontar el desempeño de los estudiantes en la fase 2 "Análisis a priori" con el desempeño de los mismos estudiantes en la fase 4 "Análisis a posteriori", se puede validar que hubo una notable mejoría en los desempeños de una significativa parte del grupo especialmente en lo referido al traslado a través de los diferentes registros semióticos de representación de la función, lo cual se resume básicamente en el refinamiento de las capacidades para plantear expresiones algebraicas que generalizan una relación de dependencia, uso del registro tabular como forma valida de representación de una relación de dependencia y una mejor comprensión de la relación entre las variables a través de un producto cartesiano.

Tabla 16 confrontación categoría 4	
Categoría 4	
Representación gráfica de una relación de dependencia a través de un producto cartesiano	
Análisis a priori	Análisis a posteriori
 **Imagen 81 Respuesta estudiante A_{28}**	 **Imagen 82 Registro grafico propuesto por A_{28} Situación didáctica de validación**

Fuente: producción propia

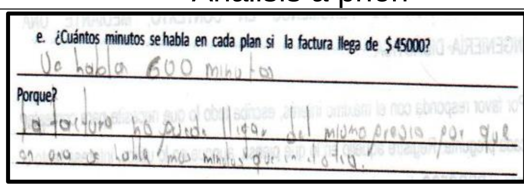
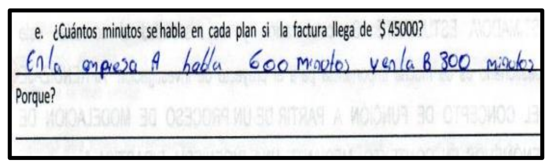
Confrontación.

El análisis a priori de la categoría 4 arrojó que El 77% de los estudiantes no están familiarizados con el sistema de representación gráfico, razón por la cual se les dificulta reconocer en una gráfica la relación de dependencia entre dos variables.

Este hecho hace que no les sea posible reconocer la gráfica que corresponde a determinada función, ya que enfocan su atención en los valores presentes en los ejes, mas no otorgan mayor importancia al producto cartesiano que representa la relación entre las variables.

En el análisis a posteriori se observa como el estudiante construye la gráfica que corresponde a una función representa correctamente la relación de dependencia entre las variables número de minutos y costo de la factura, a pesar de que esté presente algunos errores en el manejo de la escala.

Al igual que el estudiante A_{28} el grupo en general demostró avances significativos en el manejo del registro semiótico de representación gráfico, lo cual se observa en un incremento del 23% que reconocía una relación de dependencia a través de una gráfica en la fase 2, a un 51% que reconoce y representa dicha relación a través de un producto cartesiano finalizada la fase 3.

Tabla 17 Confrontación categoría 5	
Categoría 5	
Dominio y rango de la función	
Análisis a priori	Análisis a posteriori
 e. ¿Cuántos minutos se habla en cada plan si la factura llega de $ 45000? Uc habla 600 minutos Porque? Imagen 83 Respuesta estudiante A_{16}	 e. ¿Cuántos minutos se habla en cada plan si la factura llega de $ 45000? En la empresa A habla 600 minutos y en la B 300 minutos Porque? Imagen 84 Situación didáctica de validación

Fuente: producción propia

Confrontación.

El análisis a priori de la categoría 5 arrojo que solo el 14% de los estudiantes comprendieron que dada una relación de dependencia planteada a través de una relación funcional, obtenida a partir de la modelación de una situación relacionada con el contexto, existen algunos valores tanto del dominio como del rango que no tienen sentido.

Asi mismo el análisis entrego que existe una marcada dificultad para comprender que dos funciones pueden coincidir en valores del rango para dominios diferentes.

Un número significativo de estudiantes al igual que A_{16} ha comprendido correctamente que a pesar de tratarse de dos funciones lineales las que modelan la situación, existe un valor del rango que es común para ambas y que dicho rango está relacionado con dominios diferentes en cada una de las funciones, este hecho da por entendido que el estudiante interiorizó que existen valores los cuales pueden tener o no sentido cuando son extraídos de una situación del contexto modelada a través de una función.

La confrontación del análisis a priori con el posteriori correspondiente a la categoría 5 arrojo un incremento del 14% en la fase 2 a un 57% finalizada la fase 3, lo cual es realmente significativo.

8.4.3 Reflexiones de la confrontación entre el análisis a priori y el posteriori.

A partir de la confrontación entre el análisis a priori con el análisis a posteriori queda como reflexión que el aprendizaje de un objeto matemático como en este caso la función, se hace mucho más significativo cuando se planean secuencias didácticas relacionadas con el contexto del estudiante en las cuales pueda emplear su propia experiencia para dar solución a los problemas que dicha situación pueda plantear.

Retomando lo anterior, la modelación como proceso para la enseñanza de la matemática permite al estudiante trascender las practicas algorítmicas tradicionales asociadas al concepto de función, ya que es el estudiante quien plantea los procedimientos y expresiones algebraicas que le permiten generalizar la situación didáctica, así mismo se le otorga significado al uso de los registros semióticos de representación ya que estos se emplean debido a la necesidad de representar los conjuntos implicados en una relación de dependencia y no solo para satisfacer un requisito impuesto por el docente.

La resolución de problemas como estrategia para modelar situaciones que dan sentido y significado a los objetos matemáticos "proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y por ende, sean más significativas para los alumnos" (MEN., 1998) (pag, 52).

8.4.4 Institucionalización de saberes.

De acuerdo con Brousseau, (2007) la institucionalización de saberes se da cuando el maestro analiza en que medida su proceso de ensenanza contribuyo a que el proceso de aprendizaje por parte del estudiante se reflejara en la asimilacion del objeto matematico. Es decir, la institucionalización ocurre cuando el docente verifica que efectivamente el estudiante esta en capacidad de realizar aquello que debia hacer o no, en otras palabras se trata de analizar que tan cercano esta el saber alcanzado por el estudioante, por el saber institucionalizado por la comunidad científica al mismo respecto.

Cuando el docente planea la enseñanza de un objeto matemático, necesariamente debe fundamentarse en el saber reconocido por la comunidad académica en torno a dicho conocimiento, por tal razón cuando se institucionaliza un saber, en este caso el concepto de función, deben analizarse las actuaciones de los estudiantes que se aproximan en alto grado al conocimiento institucionalizado por la comunidad académica.

De acuerdo con Brousseau, (2007) los procesos de institucionalización de un saber se dan cuando por ejemplo en una situación de acción el estudiante reconoce el valor de un procedimiento y lo convierte en un referente para futuras situaciones, o cuando en una situación de formulación está en capacidad de seleccionar que expresiones o ideas están acordes a las necesidades de la tarea a desarrollar y elige el lenguaje adecuado, esto se evidencia mediante expresiones como " esto se dice así" o "estas vale la pena conservarlas".

Durante el desarrollo de las situaciones didácticas propuestas para esta esta investigación, se observaron desempeños de los estudiantes y tanto en el análisis de las tareas, como durante las entrevistas se evidencian procesos de institucionalización del concepto de función.

Al final de cada situación desarrollada durante la fase de experimentación se le preguntó a los estudiantes si la situación que acabaron de modelar correspondía a una función o a una relación, un número significativo de estudiantes respondió que correspondía a una función, debido a que "cada elemento del conjunto de salida estaba relacionado con solo un elemento en el conjunto de llegada", lo cual evidentemente es una aproximación a la definición tradicional de función, que generalmente se encuentra en los libros de texto, la cual está asociada con el criterio de unicidad.

En el caso de la situación dos "Promoción de cuadernos" la cual permitía ser modelada mediante una función cuadrática, hubo estudiantes que respondieron que se trataba de una relación debido a que habían elementos del rango que tenían dos parejas en el dominio y para ser función solo podían tener una pareja. Lo anterior a pesar de tratarse de un error conceptual, demuestra que reconocen el criterio de unicidad como referente para diferenciar entre una función y una relación.

Aunque fueron pocos algunos estudiantes cuando se les pidió que determinaran si las situaciones correspondían a relaciones o funciones, mencionaron que se trataba de una función, ya que si se trazaban líneas verticales en la gráfica obtenida, éstas solo la cortarían en un punto, lo cual claramente demuestra la interiorización del criterio de la línea vertical para diferenciar una relación de una función.

Otro caso de institucionalización de saberes se pudo evidenciar al momento de realizar las gráficas de las funciones ya que allí los estudiantes en su mayoría tenían en cuenta el uso de la escala al momento de realizar las distribuciones en los ejes, lo cual según Castro y Díaz , (2014) constituye un saber de gran importancia para el desarrollo del concepto de función.

Con respecto a la modelación de las situaciones a través de expresiones algebraicas, se observaron varios momentos de institucionalización de saberes, por una lado el uso de la variable como letra evaluada, por otro el reconocimiento de la variable como generalización de un conjunto de elementos ya fuera el conjunto de salida o el de llegada, es decir un buen número de estudiantes reconocían la variable independiente en una relación de dependencia y la representaban mediante una letra, generalmente la “x”. Durante las entrevistas argumentaron que la letra podía tomar cualquier valor del conjunto de salida y que al realizar los procedimientos correspondientes se obtenía otro valor el cual correspondía a un elemento del conjunto de llegada, el cual se puede representar mediante otra letra, generalmente “y”.

9. CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones a las cuales se llegó luego de haber llevado a cabo el proceso de investigación y desarrollar las 4 fases de la ingeniería didáctica. Para facilitar la comprensión de este capítulo, se aclara que las conclusiones que aquí se presentan están directamente relacionadas con cada uno de los objetivos específicos propuestos para esta investigación, los cuales a su vez están relacionados con cada una de las fases de la ingeniería didáctica.

Tal como se ha mencionado a lo largo de este trabajo, la enseñanza del concepto de función en Colombia ha sido llevada a cabo a partir de una visión centrada en la práctica algorítmica y algebraica de este Villa, & otros (2008), dejando de lado el análisis del cambio que se produce en una variable directamente relacionada con otra que también es sometida a un cambio, como lo sugieren los lineamientos curriculares de matemáticas cuando incorporaron el pensamiento variacional.

Es necesario entonces otorgarle la importancia que se merece el concepto de función dentro del currículo de matemáticas y dejar de considerarlo un objeto inerte para avanzar hacia una visión dinámica en la cual el contexto pueda servir como herramienta para acercar a los estudiantes a su conocimiento y adecuada comprensión.

Con base en lo anterior esta investigación se planteó estudiar la forma como los estudiantes de grado octavo aprenden el concepto de función a partir de la modelación de situaciones del contexto, a continuación se presentan las conclusiones a las que se llegó con este estudio.

En vista de que el primer objetivo propuesto fue el conocer los aspectos históricos - epistemológicos, didácticos y cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de función es necesario presentar separadamente las conclusiones a las que se llegó en cada una de las dimensiones aquí planteadas.

Con respecto a la dimensión Histórico – Epistemológica.

Es necesario que el docente conozca los elementos históricos y especialmente epistemológicos asociados al concepto de función antes de aventurarse en la enseñanza de éste, no solo como referente anecdótico, sino como sustento de la maduración de este a través de la historia, ya que el adecuado manejo de estos elementos permitirá darle significado al concepto y presentarlo como resultado de la necesidad de relacionar dos conjuntos que están directamente relacionados entre sí, en la observación de situaciones sujetas al cambio, tal como le sucedió a los primeros hombres cuando apenas comenzaban a tomar conciencia del concepto de cantidad y propiedad.

Asimismo es importante que el docente comprenda que el concepto de función a pesar de estar presente de forma intrínseca desde la época de los babilonios, egipcios y posteriormente los griegos quienes tuvieron una visión netamente aritmética de este, sufrió un lento proceso de transición al algebra la cual tuvo su aparición en el siglo XVI con Viete y Luego Descartes. Por lo tanto es importante garantizar que los estudiantes alcancen un adecuado dominio de la estructura aritmética antes de incorporar la estructura algebraica, para evitar que esta transición se convierta en un obstáculo.

Con respecto a la dimensión cognitiva

De acuerdo con Duval (1994) el concepto de función requiere de la adecuada comprensión e interpretación de los diferentes registros semióticos de representación que éste presenta para que los estudiantes puedan dominarlo e interiorizarlo en toda su dimensión y no se limiten a una visión algorítimica y algebraica del mismo.

Se debe por lo tanto generar ambientes significativos para el estudiante que permitan el transito a traves de los diferentes registros semióticos que ofrece el concepto, procurando que sea la necesidad de solucionar un problema a partir de una situación que el estudiante comprenda la que le oriente acerca de que registro semiótico debe emplear, es decir que el uso de cada registro atienda a una necesidad y no una imposición por 3parte del docente en una tarea sin contexto. Esto debido a que como se mostró en esta investigación, no siempre es necesario que el estudiante emplee todos los registros a saber del concepto (verbal, algebraico, tabular, gráfico) para solucionar un problema propuesto en una relacion funcional

Con respecto a la dimensión didáctica

De la mano con lo anterior, es necesario que el docente asuma el concepto de función desde una perspectiva variacional y trascienda el enfoque algorítmico que durante tantos años ha caracterizado la enseñanza de este objeto matemático.

También es importante que el docente incorpore situaciones que el estudiante pueda comprender y relacionar con su contexto próximo, ya que como menciona Luque (2010) los libros de texto que son el reflejo de la trasposición didáctica realizada por el docente, generalmente presentan situaciones descontextualizadas y orientadas a recrear la definición tradicional del concepto de función, dejando de lado el estudio de la variación y desconociendo la importancia de el pensamiento variacional como gérmen para la aparición de la función.

El segundo objetivo propuesto para esta investigación consistió en identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven tareas de modelación de situaciones de problemas de su cotidianidad, asociadas al concepto de función.

En relación con este objetivo el cual se enmarca en la fase dos de la ingeniería didáctica, se pudo concluir que las principales dificultades asociadas con el concepto de función al modelar situaciones problema de la cotidianidad son de diversa índole, partiendo desde los diferentes registros semióticos de representación hasta la definición de contexto, ya que lo que es significativo para algunos estudiantes, para otros no lo es, a pesar de pertenecer al mismo grupo escolar.

Con respecto a los registros semióticos de representación se encontró que las dificultades relacionadas con el registro algebraico radican en que los estudiantes no asumen el álgebra como un lenguaje que permite generalizar un procedimiento, razón por la cual encuentran inconvenientes al momento de proponer expresiones algebraicas que modelen una situación.

En cuanto al registro tabular la mayoría de estudiantes no lo asumen como una forma válida de representar la relación de dependencia entre dos variables, en el cual se puede apreciar claramente que cada elemento del dominio está relacionado con determinado elemento del rango, en lugar de ello, emplean representaciones pictográficas cuando se les solicita representar una relación de dependencia entre variables.

También se pudo concluir que un número significativo de estudiantes manifiestan dificultades para comprender que cuando una magnitud puede tomar diferentes valores entonces corresponde a una variable, asi mismo cuando una variable es afectada por la variacion que sufre otra, es debido a que existe una relacion de dependencia entre ellas.

Otro objetivo muy importante para esta investigación radica en analizar la comprensión que alcanzan los estudiantes en la fase de experimentación de la ingeniería didáctica, al modelar situaciones en contexto.

Con respecto a este objetivo se encontró que efectivamente cuando se utiliza el contexto como medio generador de situaciones para llevar al aula de clase y la modelación como proceso para facilitar el aprendizaje de un objeto matemático, como en este caso la función, se potencia la capacidad del estudiante para posicionarse de manera crítica ante las demandas de una situación problema, utilizando de forma consciente su experiencia y los recursos matemáticos de los cuales dispone para tratar de solucionarla.

El utilizar situaciones relacionadas con el contexto permitio que los estudiantes las comprendieran mejor y por lo tanto le dieran sentido, facilitando así el traslado a través de los diferentes registros semióticos de representación. Según Campeón & Aldana (2016) este hecho permite concluir que los estudiantes pueden asumir la variación como algo natural si se relaciona con el contexto, al igual que una compra en la cafetería o practicar algún deporte, no obstante cuando se utilizan situaciones artificiales y un excesivo formalismo que solo busca recrear la definición de un texto, este concepto se convierte en algo totalmente abstracto que la mayoría de estudiantes no alcanzan a comprender.

Con respecto a la metodología de la ingeniería didáctica empleada para este estudio, los resultados evidenciados, permiten concluir que esta metodología al tener en cuenta la complejidad de la clase y organizar el trabajo en 4 fases claramente definidas y las cuales se articulan entre sí, facilita el estudio de un tema tan amplio como lo es el aprendizaje de un objeto matemático, ya que permitió en un primer momento analizar el desarrollo histórico, epistemológico, cognitivo y didáctico de este concepto, para luego diagnosticar las dificultades que se pueden presentar al estudiar la función como objeto matemático. Todo este análisis preparó el terreno para la elaboración y desarrollo de situaciones didácticas, tendientes a superar los obstáculos detectados en las fases previas, para finalmente confrontar y validar los aprendizajes alcanzados.

El cuarto objetivo está enfocado hacia la validación del nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes del concepto de función. Luego de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, se pudo concluir que efectivamente es posible alcanzar un aprendizaje del concepto de función en el cual los estudiantes desarrollen el pensamiento variacional mediante el reconocimiento, percepción y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, para modelarlo, describirlo y representarlo utilizando diferentes registros semióticos, como lo plantean los lineamientos curriculares propuestos por el MEN.

Dicho aprendizaje se pudo evidenciar a través de:

Definicion de un concepto de funcion empleando lenguaje propio, como la relación entre dos conjuntos según la cual, cada elemento a de un conjunto A está relacionado con un elemento b de un conjunto B, debido a que cada variación o cambio que sufre A determina una variación o cambio en B.

Construcción de expresiones algebraicas o aritméticas que modelan una situación y ofrecen una forma de representar una relación de dependencia empleando lenguaje matemático, reconociendo en la generalidad del álgebra una herramienta poderosa para modelar situaciones o fenómenos en los que existe variación.

Uso del registro gráfico para representar la relación de dependencia entre dos variables y analizar la variación que se da en cada elemento del conjunto de llegada a partir de la variación que sufre cada elemento del conjunto de salida, lo cual se traduce en crecimiento, decrecimiento e incremento.

Utilización del criterio de unicidad para diferenciar una función de una relación a partir del análisis del registro tabular y el criterio de la línea vertical para el análisis del registro gráfico.

Comprensión del significado que tiene el dominio y el rango de una función a partir de una situación relacionada con el contexto, es decir comprende y justifica cuando los valores asignados al conjunto de salida tienen o no sentido dada la situación didáctica de aprendizaje, y asimismo analiza la coherencia de los elementos del conjunto de llegada y cuando estos parecen no tener sentido, como en el caso de los valores negativos puede explicar el significado que tienen dichos valores.

Cuestiones abiertas

Con el desarrollo de esta investigación y la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología de investigación en educación matemática, se espera haber contribuido de forma significativa al estudio del aprendizaje del concepto de función tomando la modelación como proceso para potenciar la ensenanza de éste. No obstante debido a lo complejo binomio ensenanza aprendizaje aun queda mucho por investigar al respecto, razón por la cual a continuación se presentan algunas preguntas las cuales se espera puedan servir como generadoras de nuevos procesos de investigacion.

- ¿Será posible abordar el estudio del concepto de función a partir de la relación inversa entre las variables?
- ¿Qué opciones didácticas y metodológicas puede ofrecer el software libre Goeogebra para el estudio del concepto de función a partir de la modelación de situaciones del contexto?
- ¿Cuál es el nivel de culpabilidad de los libros de texto en la metodología tradicional empleada por muchos docentes para la enseñanza del concepto de función cuando el maestro realiza la transposición didáctica?

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍCAS

Acosta, M. L., & Vega, A. J. (2013). Ingenieria didactica para la ensenanza de la funcion lineal: Análisis preeliminar. *Investigación y ciencia*, 115-127.

Aldana, E. A. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE". Salamanca, España. Tesis doctoral no publicada.

Amore, B. D. (s.f.). La complejidad de la noestica en matemáticas como causa de la falta de devolución. *Red Academica*, 6.

Aristizabal, Y. M. (2013). *Una propuesta metodológica para enseñar el concepto de función desde la experimentación.* Medellín.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didactica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gomez, *Ingeniería Didáctica en educación matemática* (págs. 33-60). Bogota: Iberoamericana.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en ingeniería didáctica en ed matemática.* México: Una empresa docente; Grupo editorial Iberoamericano.

Azcárate, C. G., & Piquet, J. D. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid: Síntesis.

Ballestero, M. M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista educación*, 123 - 138.

Barahona, M. (1992). *Historia y evolución del concepto de función.* San José: Ediciones Libreria Francesa.

Bell, E. T. (1985). *Historia de las matemáticas.* México: Fondo de cultura económica.

Berrio, L. M., & Bermúdez, E. A. (2013). Análisis de la concepción de la actividad de optimizar, desde una ingeniería didáctica. *Educación científica y tecnológica*, 216-219.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? *Revista Enseñanza de las Ciencias, 8*(3), 259-267.

Brousseau, G. (2007). *Iniciacion al estudio de la teoria de las situaciones didacticas.* Buenos Aires: El Zorzal.

Brousseau, G., Werner, T., & Davis, R. (1986). *Observing students at work.* Dordrecht: Kluwer.

Campeon, M. C., & Aldana, E. B. (23 de Octubre de 2016). Aprendizaje del concepto de función a partir de la modelación de fenómenos del contexto mediante una ingenieria didáctica. Pereira, Colombia.

Caicedo, S. J. (2012) Pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno de educación básica aplicado en el proceso de resolución de problemas que se pueden modelar con una función cuadrática. Tesis doctoral no publicada. Ibagué: Universidad del Tolima – RUDECOLOMBIA.

Cedeño, M. T., Preciado, J. d., & Castro, N. M. (Julio - Diciembre de 2007). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora gráfica. *Revista de investigación, Universidad de La Salle, 7*(2), 223-233.

Castro, C. C., & Diaz, L. M. (2014). *Enseñanza del concepto de función.* Bogotá: Fondo de publicaciones.

David Tall, S. V. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity.

Dorado, I., & Diaz, J. L. (2014). *Repositorio digital de documentos en educación matemática.* Recuperado el 9 de Noviembre de 2015, de http://funes.uniandes.edu.co/5810/

Dreyfus, T. y. (1982). Intuitive functional concept: a baseline study on intuitions. *Journal for Research on Mathematics education, vol.13*, 360-380.

Duval, R. (1994). *Les differents fonctionnements d' une figure dons une demarche geometrique, Reperes.* IREM.

Eisenberg, T. (s.f.). Functions and associated learning difficulties.

Elpais.com.co. (14 de Octubre de 2014). 70% de los estudiantes colombianos se rajan en matemáticas. *El Pais*.

Escamilla, Y. C. (s.f.). *funes.uniandes.* Recuperado el 13 de Enero de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/827/1/31comun.pdf

Farfán, R. M. & García, M. A. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. En J. Lezama, M. Juan. G. Molina. (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, pp. 489-494.

Font, V., & Godino, J. (2006). La nocion de configuracion epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educación matemática, 8*(1), 67-98.

Garcia, L. Q., Cedeña, R. A., & Rivera, M. H. (Julio de 2004). Dificultades en el parendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías, Revista de la facultad de ingenieria mecánica y eléctrica de la universidad Autónoma de Nuevo León, 7*(24), 27 - 33.

Peña , R. P., & Aldana, E. A. (Octubre de 2013). Análisis del concepto de funcion en estudiantes sordos de grado décimo. *Educación científica y Tecnología*, 151 - 153.

Hernandez, A. (2000). *Algunos aspectos sobre las habilidades matemáticas de los estudiantes graduados de.* México: Hitt y G. Hernández.

Higueras, L. R. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Jaen.

Higueras, L. R. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Servicio de Publicaciones.

Hitt, F. (2000). *Desarrollo de Habilidades matemáticas y construcción de conceptos versus pérdida de.* México: Hitt y Hernández.

Hurtado, A. M. (2013). *Caracterización de la comprensión del concepto de función de los estudiantes noveno y once en los colegios públicos de la Virginia.* Pereira.

Kuchemann, D. (Septiembre de 1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School, 4*(7), 22-36.

Lacasta, E. y Pascual, J (1998). Las funciones en los gráficos cartesianos. Madrid: Síntesis.

Laura, Q. G. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de funcion en estudiantes de ingenieria. *Ingenierias*, 28.

Leithold, L. (2002). *Calculo* (Vol. Séptima edición). México: Litográfica Ingramex.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. *National Council of Teachers of Mathematics*, 763-804.

MEN, M. d. (2015). *Derechos Basicos de aprendizaje.* Bogota.

MEN. (1998). *Estándares básicos de competencia en matemáticas.* Bogotá: Publicaciones MEN.

Moreira, M. A. (s.f.). Aprendizaje significativo: Un concepto subyacente. 2-20.

Nancy Lilian Herrera Villamizar, W. M. (2011). Revisión teórica sobre la ensenanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista virtual Uniiversidad Católica del Norte*, 264.

Nolasco, A. d. (2003). Errores e inconsistencias en la ensenanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización. *Mosaicos matemáticos No 11*, 121.

Villa, J. A. (30 de Octubre de 20015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matematicas. *magis, Revista internacional de investigacion en educacion., 8*(16), 133-148.

Villa, J. A., & Vahos, H. M. (Mayo - Agosto de 2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*, 1-21.

Villa, J. A., Quitero, C. A., Arboleda, M. d., Castaño, J. A., & Bedoya, D. A. (Julio de 2009). Sentido de Realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria, Revista de educación en ciencia y tecnología, 2*(2), 160-180.

OECD. (2013). *Marco y pruebas de la evaluación PISA 2012.* Madrid: Secretaría general técnica, Subdirección general de documentación y publicaciones.

OECD. (2014). *www.oecd.org.* Recuperado el 24 de Noviembre de 2015, de http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf

Perez, Y., & Ramírez, R. (Mayo de 2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigacion, 35*(73), 169-194.

Piaget, J. (1971). *El nacimiento de la inteligencia en la crianza.* Río de Janeiro: Zahar Editores.

Ribnikov, K. (1987). L'Hopital. (1998). Historia de las matemáticas. Moscú, Mir.

Ruiz, H.L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta ed.). (R. A. Bosque, Ed.) Mexico, Mexico: McGraw Hill.

Schoenfeld, A. (s.f.). *www.doingmathematics.com.* Recuperado el 21 de Noviembre de 2015, de http://www.doingmathematics.com/uploads/5/0/2/0/5020119/teaching_and_doing_mathematics.pdf

Segura, M. d. (Septiembre de 2006). Aprendizaje significativo a traves de la resolución de problemas. *Aladis.net, La revista de educacion*(10), 5-8.

Skemp, R. R. (1999). *Psicologia del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Ediciones Morata.

Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el perendizaje de las matemáticas, Análisis desde el enfoque lógico semiótico.* Laguna.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 2*(12), 151-169.

Trigo, M. S. (s.f.). *www.uv.es.* Recuperado el 21 de Noviembre de 2015, de http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: Desarrollo histórico del concepto y actividades de ensenanza aprendizaje. *Matemática, Educación e internet, 14*(1), 1-48.

Vasco, C. E. (1999). Didáctica de la matemática.

Vera, J. A., & Moreno, L. D. (2014). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Relime. Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19-48.

Vicente, M. D. (1996). *El concepto de función: dificultades en su aprendizaje.* Madrid.

Villa, J. A., & Mesa, Y. M. (Abril de 2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual universidad Católica del Norte*, 1-18.

Villa, J. A., Bustamente, C. A., Berrio, M., Osorio, A., & Osorio, D. A. (2008). *El proceso de modelacion matematica en las aulas escolares. A proposito de los 10 años de inclusion en los lineamientos curriculares colombianos.* Bogota: ASOCOLME.

Villa, J. A; Posada, F.A. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis de maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia. Medellín

Villanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., y otros. (s.f). La educacion Matematica, El papel de la resolucion de problemas en el aprendizaje. *OEI, Revista Iberoamericana de Educacion*, 1-11.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teachin and learning of mathematics.* Dordrecht.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced mathmatical thinking*, 65-81.