

# Modelo matemático exacto del problema de ruteo de vehículos eléctricos considerando entrega y recogida de mercancía

Luis Carlos Cubides Rivera

Trabajo de grado presentado como requisito  
parcial para optar al título de  
Ingeniero Electricista

Pereira, Septiembre de 2016  
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
Programa de Ingeniería Eléctrica.  
Grupo de investigación DINOP



Modelo matemático exacto del problema de ruteo de vehículos eléctricos considerando entrega y recogida de mercancía

©Luis Carlos Cubides Rivera

Director: Mauricio Granada Echeverri

Pereira, Septiembre de 2016

Programa de Ingeniería Eléctrica.

Universidad Tecnológica de Pereira

La Julita. Pereira(Colombia)

TEL: (+57)(6)3137122

*www.utp.edu.co*

Versión web disponible en: *<http://recursosbiblioteca.utp.edu.co/tesisd/index.html>*

# Agradecimientos

A mis padres y mi hermano por su amor, esfuerzo y dedicación.

A el Ingeniero Mauricio Granada, por su colaboración y paciencia.

A mis compañeros de estudio Cristian, Yuly, Fabio, Cesar, Nelly, Alejandra, Felipe, Miguel, Katherine y todos aquellos que de alguna manera aportaron en mi proceso de formación.

A mi novia Ángela, por su apoyo, consejos, amor y paciencia.

# Resumen

La distribución separada y servicios de recogida de mercancía en diferentes rutas es un tema de interés actual debido a que algunas compañías de transportes consideran difícil la reorganización de la carga al interior de los vehículos ya que son sólo una vez cargados en el depósito. En el problema de ruteo de vehículos con clientes de retorno (VRPB, "*vehicle routing problem with backhaul*") los clientes son divididos en 2 subconjuntos, los clientes de retorno (*linehaul*) y los clientes de entrega (*backhaul*). El VRPB es presentado en la literatura como una extensión del CVRP ("*capacitated vehicle routing problem*") y tiene clase de complejidad NP-hard. Además, muchas compañías logísticas de transporte tienen la responsabilidad de realizar sus operaciones en pro del medio ambiente y los vehículos eléctricos (VEs) pueden ser una solución eficiente. En esta tesis se presenta una nueva formulación de programación lineal entera mixta (MILP) para el simétrico y asimétrico VRPB considerando entrega y recogida de bienes a través de los vehículos eléctricos. Diferentes puntos de carga son considerados en orden de que la recarga de la batería para los VEs ocurra al final de la ruta de entrega o durante el recorrido de la ruta de retorno. Este problema está basado en una generalización del OVRP ("*open vehicle routing problem*") considerando un conjunto de nuevas restricciones centrado en mantener la condición de arborescencia para los clientes de entrada y retorno por separada, además un conjunto de restricciones que manejan los enlaces (*tie-arc*) que unen los 2 conjuntos. La eficiencia del modelo es probada en 40 instancias de la literatura adaptadas a las características del ruteo de vehículos eléctricos con clientes de retorno (EVRPB).

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.3.1. General . . . . .	3
1.3.2. Especificos . . . . .	4
1.4. Estado del arte . . . . .	4
1.5. Principales resultados . . . . .	5
1.6. Estructura del trabajo de grado . . . . .	6
<b>2. Marco teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Vehículos eléctricos . . . . .	7
2.2. Baterías eléctricas . . . . .	8
2.3. Ruteo de vehículos . . . . .	9
2.3.1. OVRP . . . . .	10
2.3.2. VRPB . . . . .	11
2.4. Aspectos básicos de optimización matemática. . . . .	12
2.4.1. Modelo matemático . . . . .	13
2.4.2. Algunas técnicas de solución de modelos matemáticos . . . . .	16
2.4.3. Lenguaje de programación matemática (AMPL) . . . . .	20
<b>3. Formulación del problema para el EVRPB</b>	<b>21</b>
3.1. Nomenclatura . . . . .	23
3.2. Condiciones del Problema . . . . .	24
3.3. Estructura matemática del modelo . . . . .	25
<b>4. Resultados computacionales</b>	<b>31</b>

*TABLA DE CONTENIDO*

v

**5. Conclusiones y trabajo futuro**

**36**

# Capítulo 1

## Introducción

Las empresas de distribución de bienes buscan ofrecer un servicio óptimo; éste consiste en ofrecer la mejor asistencia al usuario, incluyendo costos bajos de operación en el recorrido. Por lo tanto, se ve la necesidad de realizar la programación de las rutas de cada vehículo lo más equitativa posible en cuanto a la capacidad de mercancía del vehículo y combustible disponible, asimismo, se busca disminuir los trayectos en el que el vehículo viaja sin carga, debido a esto se empieza a estudiar el VRPB, el cual aborda una mejor aproximación al comportamiento real aprovechando que finalizó la ruta de los clientes de entrega y tiene capacidad disponible para realizar una nueva ruta recogiendo mercancía en el camino de regreso hacia el depósito.

Los Vehículos eléctricos (VEs) a menudo se han sugerido como una solución útil para reducir el consumo de petróleo y las emisiones de contaminantes atmosféricas. Debido a la eficiencia energética y las ventajas ambientales sobre los vehículos convencionales, el futuro de los vehículos eléctricos parece prometedor, sin embargo, la integración de los Evs en sistemas de energía eléctrica plantea nuevas técnicas económicas, políticas y desafíos regulatorios [15].

Debido a el reducido alcance de los VEs es necesario operar puntos de recarga o intercambio de baterías que afecten en lo mínimo el sistema de potencia actual y que los haga competitivos en el campo económico frente a los vehículos convencionales de combustión interna. Esto provoca que este caso de carga óptima de baterías combinado con el ruteo óptimo de los VEs con clientes de entrega y retorno establezcan un problema de gran importancia y actualidad para el sector de transporte de carga, dicho problema se nombra como EVRPB.

## 1.1. Planteamiento del problema

El problema de ruteo de vehículos (VRP) es uno de los más famosos y ampliamente estudiados en la optimización combinatoria y programación matemática, en el que se requiere diseñar las rutas de vehículos con capacidad limitada que salen y llegan a un depósito central para ofrecer un servicio óptimo al usuario, buscando minimizar costos que pueden estar asociados a la operación, distancia recorrida, número de vehículos, tiempo total de transporte, tiempo de espera, entre otros.

Actualmente, los problemas de ruteo suelen ser mucho más complicados dado que la mercancía no sólo debe ser entregada a un número de clientes, sino que también debe ser recogida a otro número de usuarios y traída de vuelta al depósito, este problema es conocido en la literatura como ruteo de vehículos con clientes de retorno (VRPB, por sus siglas en inglés “Vehicle routing problema with backhaul”). El VRPB puede ser definido como el problema de determinar un conjunto de rutas de vehículos que deben visitar a todos los clientes (vértices) que se dividen en 2 subconjuntos. El primer subconjunto contiene los clientes de entrega, donde cada cliente requiere una determinada cantidad de producto que debe ser entregada por el vehículo. El segundo subconjunto contiene los clientes de retorno, donde una cantidad de mercancía entrante debe ser recogida y llevada al depósito [1].

Los vehículos eléctricos (VEs) son considerados una alternativa a implementar en el sector de transporte, dado que no tienen ninguna emisión de gases de efecto invernadero local y pueden ser fuertemente competitivos, sin embargo, debido a su reducido alcance es necesario operar puntos de recarga o intercambio de baterías que afecten en lo mínimo el sistema de potencia actual, dado que estas cargas pesadas intermitentes pueden crear cuellos de botella y limitar la capacidad de suministro.

## 1.2. Justificación

- El sector automotriz ha venido realizando grandes esfuerzos para desarrollar alternativas de automóviles que reduzcan la utilización de combustibles fósiles en su operación, ya que la mayoría de vehículos en la actualidad funcionan por combustión interna generando un alto impacto sobre el medio ambiente a través de la emisión de gases con efecto invernadero. Los vehículos eléctricos son una de estas alternativas que ha venido ganando importancia y popularidad, además se ha observado en los últimos años la masificación de estos vehículos en programas relacionados con respuesta a la demanda y Smart Grids. La autonomía máxima de los VEs puede ser insuficiente para completar las rutas de entrega y de retorno, por lo tanto, es necesario que se considere en los



modelos una disminución de la carga de la batería en el recorrido de la ruta, además es preciso realizar una adecuada logística en el proceso de recarga de las baterías. Las empresas promotoras de los VEs han realizado grandes esfuerzos relacionados con la carga y descarga de baterías, tiempo de carga y su eficiencia, lo que provoca que este caso de carga óptima de baterías combinado con el ruteo óptimo de los VEs establezcan un problema de gran importancia y actualidad para el sector de transporte de carga.

- Este tipo de modelos pueden servir como referencia para estudios posteriores que involucren el impacto de estos vehículos en sistema de distribución y éste es de gran interés actual para las empresas del sector eléctrico.
- Toth y Vigo en [1], establecen que no se ha propuesto ningún modelo matemático exacto para el VRPB en la última década, en esta propuesta contribuimos a esto.
- El problema de VRPB puede ser formulado mediante un modelo de programación lineal entera mixta, en la mayoría de las propuestas se consideran técnicas Heurísticas para resolver el modelo, aquí se presentará un modelo de propósito general, quiere decir no es necesario algoritmos adaptados para llegar a una solución efectiva y puede ser resuelto por un solver de programación entera.
- En esta propuesta, se utilizarán vehículos eléctricos para diferentes instancias de prueba, además, se solucionará usando el lenguaje de programación matemática (AMPL) y un solver de alto rendimiento comercial conocido como Gurobi que incluye metodologías exactas de solución del sistema como el simplex, dual simplex, branch and bound, entre otros.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. General

Desarrollar un nuevo modelo matemático exacto para el problema de ruteo de vehículos eléctricos con clientes de retorno considerando vehículos homogéneos, capacitados, la ubicación de posibles estaciones de carga en el camino y restricciones en la capacidad eléctrica de la batería.

### 1.3.2. Especificos

- Recopilar información en base de datos disponibles acerca del ruteo de vehículos, su posible implementación con vehículos eléctricos, y modelos propuestos por otros autores necesarios para alcanzar el estado del arte.
- Estudiar modelos similares y optimización matemática.
- Plantear modelo matemático que incorpore ruteo de vehículos eléctricos con clientes de retorno, considerando vehículos homogéneos capacitados, capacidad limitada de la batería y diversos puntos de estaciones de recarga buscando disminuir los costos de operación.
- Implementar modelo matemático en AMPL.
- Construir diferentes casos de estudio para probar el modelo propuesto.
- Resolver el modelo mediante un software comercial de optimización y documentar los resultados obtenidos.

## 1.4. Estado del arte

El problema de ruteo de vehículos eléctricos fue propuesto por Dantzing y Ramser, en 1959 [18] de ruteo de tanques distribuidores de gasolina a sus estaciones de servicio. La primer revisión de la literatura que cubre los principales trabajos acerca del VRPB fue presentada por Toth y Vigo en [1], presentan el trabajo existente antes del 2002, ellos proponen el primer método exacto en [6], en el que un lagrangiano efectivo extiende los métodos previamente propuestos para el VRP capacitado (CVRP), el algoritmo resultante es apto para resolver problemas con hasta 70 clientes en total. Lu y Dessouky, en 2004 [7], plantean la posibilidad que durante el recorrido se pueda tanto entregar como recibir mercancía, pero este procedimiento requiere de tratamientos especiales en el manejo de la carga dentro de los vehículos, lo cual, disminuye la capacidad total de transporte. Ropke y Pisinger, en 2006 [2], proponen el problema VRPB (the vehicle routing problem with backhaul, en el idioma inglés), el cual considera que inicialmente el vehículo entrega toda la carga con la que salió del depósito. Los autores modelan un problema unificado de clientes de entrega (Linehaul) y de retorno (Backhaul), además lo resuelven mediante la Heurística de búsqueda local. Santa, Peñuela y Granada, en 2014 [4], presentan un algoritmo Metaheurístico denominado Búsqueda tabú para resolver el problema de ruteo, lo dividen en sub-rutas, una

para los clientes de entrega y otra para los clientes de retorno, con el fin de obtener una solución global para el mínimo costo. Oesterle y Bauhernhansi, en 2015 [8], proponen un método exacto de solución para el enrutamiento de vehículos eléctricos considerando clientes de retorno, flota heterogénea y ventanas de tiempo definidas, este algoritmo permitió el apoyo de una planificación de la producción y logística integral en una empresa de alimentos. En lo relacionado con la implementación de estaciones de carga, en referencia al ruteo de vehículos eléctricos para el caso de clientes de entrega y retorno, aún no hay modelos propuestos, pero Yang y Sun, en 2014 [13], presentan una estrategia para la ubicación de estaciones de intercambio de baterías y el enrutamiento de una flota de vehículos eléctricos, además resuelven el modelo matemático mediante una Heurística de 4 fases denominadas SIGALNS. Goeke y Schneider, en 2015 [9], proponen un enrutamiento de una flota de vehículos eléctricos con ventanas de tiempo considerando los tiempos de recarga en las estaciones, mediante un algoritmo adaptativo de barrido de búsqueda local. Keskin y Catay, en 2016 [27], proponen una estrategia de carga parcial para el problema de ruteo de vehículos eléctricos con ventanas de tiempo, lo resuelven utilizando un algoritmo de barrido de búsqueda.

## 1.5. Principales resultados

Los principales resultados y contribuciones de este trabajo de grado son los siguientes:

- El EVRPB es un nuevo problema, aquí es considerado la autonomía de la batería del VE, por lo tanto, es un modelo más aproximado a la realidad de las compañías de transporte.
- Se presenta un modelo de propósito general, quiere decir que no es necesario ningún algoritmo especial para llegar a una solución efectiva y puede ser resuelto por un solver de programación lineal entera.
- Aquí se aprovecha el problema desde otro punto de vista, considerando un conjunto de nuevas restricciones centrado en mantener la condición arborescencia de los clientes de retorno y entrega, basados en una generalización del OVRP.
- la formulación propuesta permite solucionar el VRPB simétrico y asimétrico, además el EVRPB también minimizar el número de vehículos usados.
- Se propone un dataset para futuras referencias.

## **1.6. Estructura del trabajo de grado**

El trabajo de grado esta organizado de la siguiente forma. En el Capitulo 2 se presenta términos importantes acerca de ruteo de vehículos eléctricos, optimizan matemática y modelamiento matemático. En el Capitulo 3 se presenta las condiciones del modelo propuesto y su estructura matemática, posteriormente en el Capitulo 4 se presentan los resultados computacionales para 40 instancias para un intervalo de 33 hasta 125 vértices. Finalmente, se presentan las conclusiones y trabajo futuro en el Capitulo 5.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Vehículos eléctricos

La primera referencia que se conoce del vehículo eléctrico data en el siglo XIX, época en donde las investigaciones relacionadas al electromagnetismo avanzaban con rapidez y una de sus primeras aplicaciones prácticas fue motorizar vehículos [19]. El primer EV aparece en 1838 gracias a Robert Davidson que logró desplazar una locomotora sin usar carbón ni vapor [20]. Entre los años de 1832 y 1839 Robert inventó un primer vehículo puro cuya batería no era recargable. En el año de 1889 el piloto Camille Jenatzy alcanzó un récord de velocidad alcanzando los 105 kilómetros por hora en el extrarradio de París en su auto descapotable eléctrico [21]. Aprovechando la fama del vehículo eléctrico en 1907, la Detroit Electric Car comenzó a producir VEs de batería propulsados por baterías de plomo-ácido recargables [22]. En 1911, Thomas Edison incorpora sus baterías de níquel-hierro a la flota de vehículos en producción. Y tanto él como Henry Ford hicieron inversiones en los VEs pronosticando un gran futuro [20].

El VE empezó a adquirir gran importancia por su simplicidad, su fiabilidad, su autonomía razonable para la época y su precio era aceptable para la burguesía [23], además los vehículos de combustión eran muy contaminantes, sucios, ruidosos y requerían gasolina para funcionar. Sin embargo, el desarrollo del motor de combustión, la aparición de la cadena de montaje con el ford modelo T [24] y la irrupción del petróleo barato dieron predominancia al vehículo de combustión [23] llevando al VE a desaparecerse hasta mediados de los años 60.

Actualmente existen tres tipos de VE, los cuales son mencionan a continuación: El primer tipo, un vehículo eléctrico híbrido que tiene la posibilidad de conmutar entre un motor eléctrico y uno de combustión interna según las condiciones de manejo; como no

tiene la posibilidad de recargar energía eléctrica desde una fuente externa utiliza la energía regenerativa de los frenos para recargar la batería eléctrica que posteriormente puede impulsar el vehículo. En este tipo de vehículos, la autonomía brindada por la batería eléctrica es reducida, limitando los periodos de conducción alimentados por esta a distancias cortas y con bajas velocidades. El segundo tipo de VE es un vehículo híbrido con posibilidad de recargar las baterías eléctricas desde una fuente externa, a los cuales se les conoce como vehículo eléctrico enchufable; así mismo, los rangos de conducción a partir de la energía eléctrica provista por sus baterías es también reducida, entre 17 a 43 km aproximadamente, como lo indica la lista de vehículos eléctricos disponibles actualmente en Canadá [25]. El tercer tipo, corresponde a los vehículos puramente eléctricos, donde la fuente de alimentación que impulsa el vehículo es únicamente eléctrica, donde se debe recargar la batería eléctrica a partir de una fuente externa (SDEE) y la autonomía que esta le brinda al VE es mucho mayor comparada con los dos tipos anteriores [25]; aproximadamente 320 km de autonomía.

El panorama que se presenta en la actualidad para los VE es bastante positivo, tanto que grandes inversiones se han realizado para mejorar y producir dispositivos de almacenamiento de energía eléctrica para ser usados en estos. Tal es el caso de la compañía de vehículos Tesla, que en asociación con Panasonic y otros aliados estratégicos ha asumido la misión de acelerar el proceso de transición hacia un mundo sostenible mediante la construcción de “Gigafactory 1”, la cual se espera inicien su producción de celdas de baterías para el año 2017, alcanzando su capacidad de producción total en 2020. El gran enemigo de los vehículos eléctricos ha sido siempre el alto costo de producir baterías funcionales y seguras que brinden una autonomía suficiente a los vehículos, así, el gran reto de Tesla y sus aliados con este proyecto será la producción en masa con costos bajos que hagan de los VEs una alternativa al transporte tradicional.

## 2.2. Baterías eléctricas

Las baterías eléctricas son dispositivos que convierten la energía química contenida directamente en sus elementos activos en energía eléctrica por medio de un proceso de óxido-reducción. Una batería está compuesta por un arreglo serie/paralelo de celdas, las cuales contienen los materiales activos que convierten la energía química en energía eléctrica (ánodo y cátodo). La tabla muestra los principales tipos de baterías para impulsar vehículos eléctricos, note que a menor energía específica más barata es la batería, pero esto provoca que este tipo de baterías sean inapropiadas para el VE. [26]

Las baterías eléctricas, que son los elementos encargados de brindar autonomía a los VEs, han sido las responsables de que los VEs no hayan dominado el mercado automotriz a lo

Tipo de batería	Acido de Plomo	Ni-Cd	Ni-MH	Li-ión
Costo	Bajo	Medio	Alto	Muy Alto
Voltaje por celda [V]	2	1.25	1.25	3.6
Corriente de carga	Baja	Muy baja	Moderada	Alta
Número de ciclos [Carga/descarga]	200-500	1000	1000	1200
Requerimiento de actividad [días]	180	30	90	Ninguno
Autodescarga por mes [% del total]	Bajo (5%)	Alto-Moderado (20%)	Alto (30%)	Bajo(10%)
Precaucion ambiental	Alto	Alto	bajo	Alto
Energia específica [Wh/kg]	30-50	50-80	40-100	160

Tabla 2.1: Tipos de baterías eléctricas, tomados de [26].

largo de la historia de la industria automotriz. La afirmación anterior surge debido a que estos elementos son y siempre han sido el aspecto complicante en el desarrollo de los VEs, debido a su poca durabilidad, capacidad de almacenamiento reducido y adicionalmente a su gran peso y volumen [26].

### 2.3. Ruteo de vehículos

Las empresas de provisión y distribución de bienes buscan ofrecer un servicio óptimo, este consiste en ofrecer el mejor servicio con los costos de operación más bajos posibles. Los costos de operación están asociados a la mano de obra, costos de utilización de vehículos, entre otros. Algunas empresas ven el tiempo como un factor monetario, cuando se debe cumplir con la entrega o colecta de un bien en una franja de tiempo determinado. Otros ven la necesidad de que la programación de las rutas de cada vehículo sea lo más equitativa posible en cuanto a la capacidad de carga del vehículo. Por tal motivo algunas empresas invierten en softwares o investigaciones que conlleven a planificar las mejores estrategias de operación de su sistema. Un gran número de aplicaciones del mundo real, tanto en Norte América como en Europa, han demostrado ampliamente que el uso de procedimientos informáticos para la planificación del proceso de distribución produce un ahorro sustancial (estimado entre el 5 % y el 20 %) en los costos globales de transporte [1]. Una disminución de los costos de operación en los problemas reales, se traduce en un aumento del beneficio de la empresa o en una disminución de los costos finales del producto. La investigación de operaciones busca optimizar el beneficio de las empresas distribuidoras, valiéndose de modelos matemáticos que describen el proceso que se desea mejorar, basados en un objetivo previamente definido. Estos modelos posteriormente

son resueltos mediante técnicas exactas, metaheurísticas y técnicas híbridas conocidas como matheurísticas.

El problema de ruteo de vehículos VRP, es una formulación del tipo lineal entero mixto. El uso de técnicas exactas en este tipo de problemas está restringido a la complejidad del modelo matemático que lo describe, como por ejemplo, el número de variables discretas o el número de restricciones. Estos problemas generan una explosión combinatorial que se refleja en los altos tiempos de cómputo para obtener la solución óptima global, adicionalmente dichos tiempos crecen exponencialmente con el tamaño del problema, razón por la cual, en términos de la complejidad computacional se clasifica dentro de la categoría NP-complejo.

Las variables involucradas en el problema del VRP pueden ser: tiempo, número de vehículos, naturaleza de los vehículos quiere decir homogéneos o heterogéneos, tiempo, número de depósitos, localización geográfica, demanda de los clientes, costo de transporte. Aquí interesan el estudio de 2 problemas en particular, el principal es el VRPB pero el modelo se realiza basado en los estudios hechos para el OVRP.

### 2.3.1. OVRP

El OVRP (*open vehicle routing problem*), fue propuesto inicialmente a principios de 1980s [11,12], es aquel caso en donde la compañía de entrega de bienes no tenía su propia flota de vehículos o su flota privada era inadecuada para satisfacer la demanda de los clientes. Por lo tanto, contratistas que no eran empleados de la empresa de distribución usaban sus propios vehículos para realizar la entrega, en este caso, los vehículos no requieren volver al depósito después de sus rutas de entrega porque la compañía fue sólo contratada para atender hasta el último cliente de la ruta. En consecuencia, el objetivo del OVRP es diseñar un conjunto de caminos Hamiltonianos que satisfagan la demanda de los clientes. En la práctica, el OVRP representa situaciones como las enuncia [13]: entrega a domicilio de paquetes y periódicos, ruta del bus de una escuela, rutas de minas de carbón, transporte de residuos peligrosos.



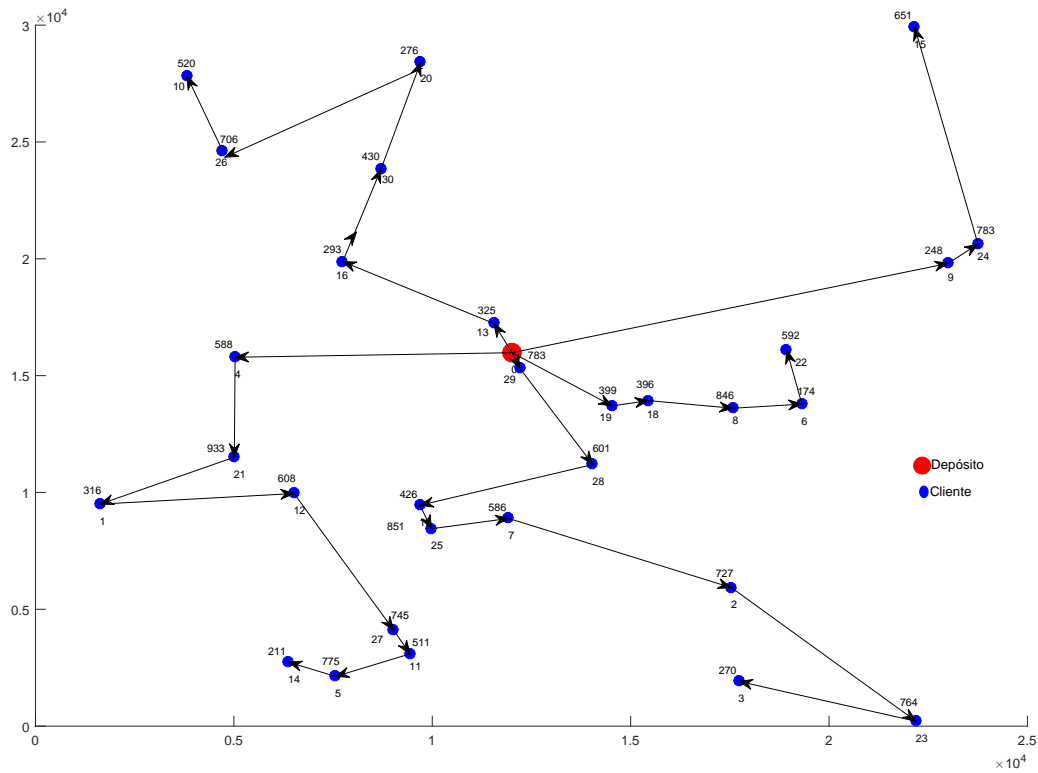


Figura 2.1: Ejemplo de OVRP, solución óptima para 30 clientes.

### 2.3.2. VRPB

El VRPB (*Vehicle routing problem with backhauls*) ha sido extensivamente definido en la literatura [1,2,3] y puede ser establecido como el problema de determinar un grupo de rutas de vehículos que visite todos los clientes que están divididos en 2 subconjuntos. El primer subconjunto contiene los vértices de los clientes de entrega, donde hay una cantidad de producto solicitada por cada cliente. El segundo subconjunto contiene los clientes de retorno, donde una cantidad de producto debe ser recogida en cada vértice y llevada al depósito. El objetivo es tener en cuenta las rutas a realizar desde el depósito al cliente por una flota de vehículos homogéneos con el fin de satisfacer la demanda de los clientes (productos para ser recogidos o productos a ser entregados). En tal caso, los vehículos han de seguir en primer lugar los clientes con requisitos de entrega antes de los clientes con requisitos de retorno,

dichos subconjuntos de clientes deben estar unidos mediante un camino, el cual se conoce con el nombre de enlace.

Para algunas empresas de transporte es fundamental evitar la reorganización de los productos dentro de los vehículos en cada punto de entrega. Los retiros y entregas de mercancías de manera mezclada o simultáneamente provoca dificultades, debido a los reordenamientos de los bienes a bordo, cuando se refiere a reordenamiento es recoger y entregar mercancía al mismo tiempo.

En el VRPB la restricción de precedencia, que estipula que en cada circuito los vértices de entrega preceden a los vértices de retorno, conduce a el enfoque de un modelo exacto de la literatura tradicional visto como el CVRP, esto una tarea compleja.

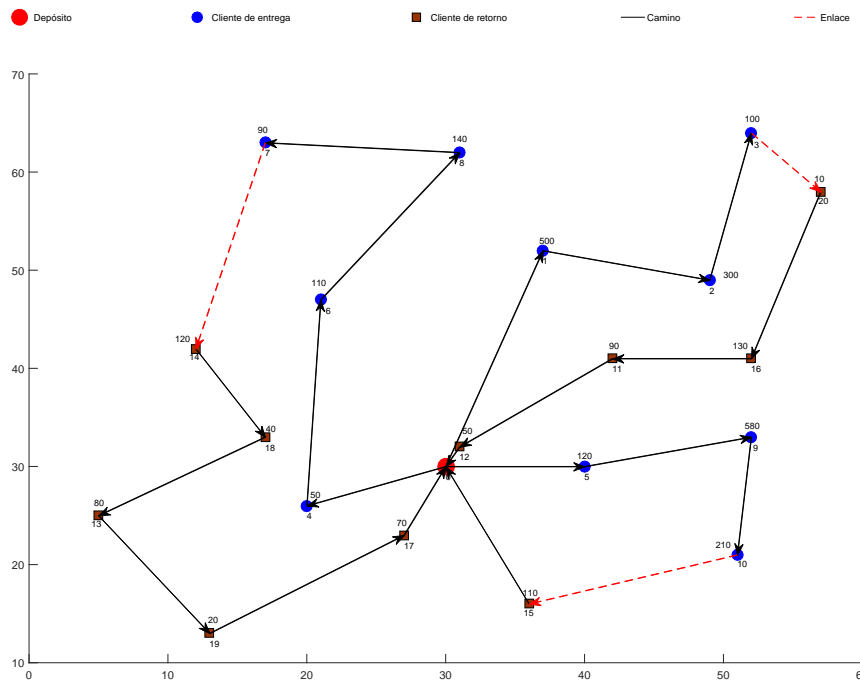


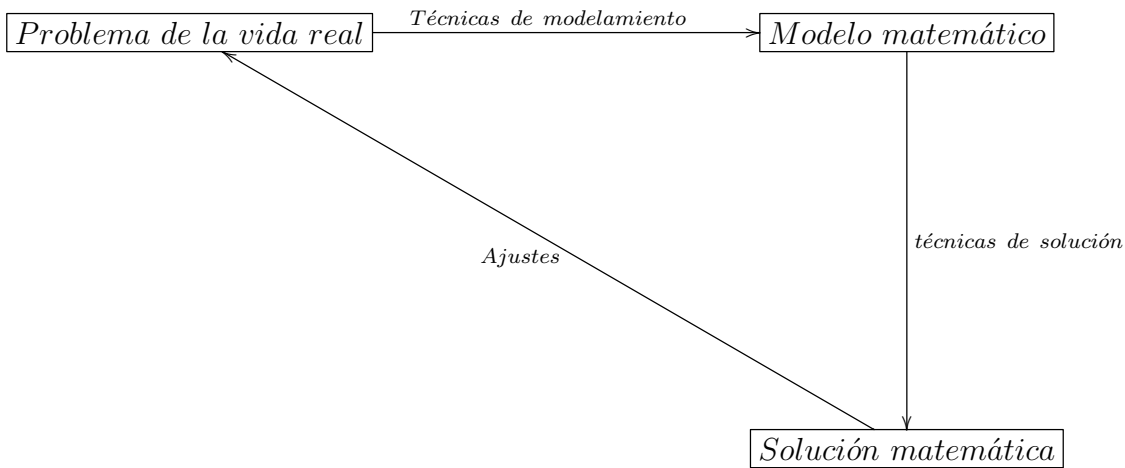
Figura 2.2: Ejemplo de VRPB, Solución óptima para 40 clientes.

## 2.4. Aspectos básicos de optimización matemática.

La optimización matemática es un proceso espontaneo que se encuentra presente en todas partes y que hace integral del día a día de nuestras vidas al momento de seleccionar la mejor

alternativa entre un conjunto de opciones validas. En las ciencias aplicadas es la búsqueda de los valores de un conjunto de variables limitadas que maximizan o minimizan un objetivo, dicho proceso debe tener los siguientes requisitos:

- Técnicas de modelamiento matemático que permitan representar y simular adecuadamente el sistema que se optimiza.
- Sistemas de cómputo que realicen los cálculos de manera eficiente.
- Técnicas de solución de los modelos resultantes (métodos de optimización).



### 2.4.1. Modelo matemático

Un modelo matemático representa el desempeño y comportamiento de un sistema dado en términos de ecuaciones matemáticas, ofreciendo resultado cuantitativos. Las ecuaciones que gobiernan el sistema pueden ser algebraicas, ecuaciones diferenciales ordinarias y/o parciales, ecuaciones integrales o combinación de varias de ellas [18].

Una estructura general de un modelo matemático puede ser representado como el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \min_x f(x) \\
 & \text{s.a} \\
 & \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots m. \\
 & \quad h_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots l. \\
 & \quad x \in X
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y  $X$  son los valores factibles de las variables.

las características generales de un modelo matemático son descritas a continuación [18].

- Tiene una cantidad de recursos limitados ( normalmente representado al lado derecho de una ecuación de restricción) se conoce como un parámetro.
- Los recursos se utilizan para alguna actividad ( generalmente representada por una variable de decisión ), destinados para producir algo o proporcionar un servicio.
- Tiene una serie de maneras alternativas en las que se pueden utilizar los recursos.
- Cada actividad en la que se utilizan los recursos tiene un retorno en términos de la meta establecida, quiere decir, contribuye a la función objetivo.
- La asignación de recursos se restringe generalmente por varias limitaciones (conocidas como restricciones).

Los supuestos generales para la formulación de un modelo matemático pueden ser las siguientes [18]:

- La rentabilidad asignadas a los recursos se pueden medir mediante una unidad común.
- Los recursos son utilizados de la mejor manera.
- Para los problemas deterministas todos los parámetros son conocidos.
- Las variables de decisión son reales, enteras, o una mezcla de ambas.

Los modelos matemáticos al ser formulados, pueden clasificarse según la naturaleza de sus variables en los siguientes tipos:

### Modelo de Programación Lineal

Son aquellos problemas en el que las variables son asumidas como valores reales (cualquier número mayor o igual a cero), y la función objetivo y todas sus restricciones son funciones algebraicas lineales [18].

Los supuestos básicos de la programación lineal son:

- Certeza: los valores de los parámetros (datos) son conocidos y constantes.
- Proporcional: Cualquier función (objetivo o restricción) es proporcional a el nivel de la actividad (con unidad coherente de medida).
- Aditividad: La actividad total es la suma de todas las actividades individuales.
- Divisibilidad: las Variables de decisión podrían ser reales o enteras.
- Nonegatividad: Sólo se permiten valores positivos de las variables.

### Modelo de Programación Entera

Un problema de programación entera (PE) es una extensión del problema general de programación lineal. Desafortunadamente, los valores continuos no son prácticos ni muy significativos en ciertos tipos de problemas. Por ejemplo, 2.5 líneas de transmisión para el problema de planeamiento de la transmisión no pueden ser cuantificados en la realidad.

hay tres tipos de modelos de programación entera [18]:

- Entera: Donde todas las variables de decisión son enteras.
- Entera binaria: Donde todas las variables de decisión son binarias (cero o uno) solamente. Hay algunas situaciones donde las variables pueden asumir solo 2 valores, Por ejemplo, sí o no, activo o desactivado.
- Entera mixta: las variables pueden ser, enteras, continuas, binarias.

En [18], pueden ser encontrados otros tipos de modelo como pueden ser los multiobjetivos o los modelos de programación no lineal, en los que como su nombre lo dice las variables están descritas mediante una función algebraica no lineal.

El modelo propuesto en esta tesis, es un modelo de programación lineal entera mixta, quiere decir todas las funciones son algebraicas lineales y sus variables son de naturaleza entera, continua y binaria.

### 2.4.2. Algunas técnicas de solución de modelos matemáticos

Los enfoques de solución para resolver problemas de optimización pueden ser divididos en 2 grupos: (1) técnicas de optimización clásicas (2) Las técnicas heurísticas y metaheurísticas modernas. Hay 2 diferencias claras entre estos 2 grupos, se enfrenta el problema de encontrar la mejor solución y el tiempo computacional. Mientras que el grupo 1 de soluciones, permite llegar a la mejor solución ya que se basan en técnicas matemáticas puras, llegar a ésta puede ser un procedimiento tedioso y de días, meses o años dependiendo de la naturaleza del modelo. El grupo de técnicas 2, se basa en técnicas bio-inspiradas, permite llegar a una solución buena, tal vez no la mejor en un tiempo computacional pequeño. A continuación se hará especial énfasis en aquellas técnicas exactas para resolver problemas de programación lineal y entera mixta. Las técnicas se presentan en sus características básicas, debido a que no hacen parte del alcance del trabajo plantear nuevas técnicas o modificar las existentes, el enfoque principal es el modelado. Para profundizar más acerca de las siguientes técnicas puede dirigirse a libros clásicos como [29].

Técnicas exactas de solución de problemas de programación lineal

Técnica	Descripción	
Método Gráfico	Es usado para resolver problemas de optimización que involucran 2 variables y pocas restricciones, el método ayuda a tener información acerca del espacio de solución, el óptimo e interacción entre diferentes parámetros del modelo.	
Método Simplex	Es un método analítico de solución de problemas capaz de resolver modelos más complejos que los resueltos mediante el método gráfico sin restricciones en el número de variables. Consiste en caminar del vértice de un poliedro a un vértice vecino de manera que aumente o disminuya según la función objetivo (sea maximizar o minimizar). Es un método eficaz para problemas que no son extremadamente grandes.	
Método del punto interior	Es un algoritmo polinomial en el tiempo, que cruza el interior del espacio de solución hasta alcanzar una solución óptima. La idea es moverse en una dirección (gradiente) que mejore el valor de la función objetivo a la mayor tasa posible. Este problema es eficaz para problemas extremadamente grandes.	

### Técnicas exactas de solución de problemas de programación entera

Los problemas de programación entera y enteros mixtos son difíciles de resolver, esto es debido a que el número de alternativas de solución incrementa rápido (exponencial) de acuerdo al tamaño del problema. Esto hace que los problemas grandes de programación entera sea extremadamente difíciles de resolver usando algoritmos existentes.

Un ejemplo de la complejidad de los problemas, es el problema del TSP (agente viajero), donde un mensajero tiene que visitar  $n$  clientes, el tiempo computacional incrementa de acuerdo a el tamaño del problema.

n	$(n-1)!$
3	2
5	24
9	40320
13	479001600
17	20922789000
20	121645100408832000

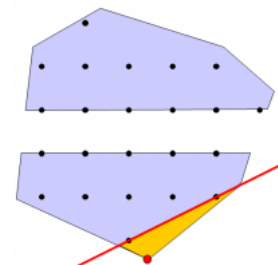
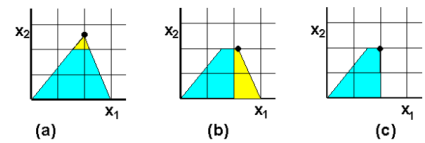
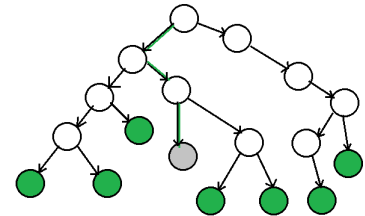
Tabla 2.2: Incremento computacional del problema TSP.

Las soluciones comunes para resolver problemas enteros (PE) son: redondear la solución no entera, branch-and-bound, cutting plane y branch-and-cut.

Redondear la aproximación consiste en emplear el método simplex y relajando las condiciones enteras. Sin embargo, redondear es un proceso que puede no garantizar optimalidad y entregar soluciones infactibles [18].



Técnica	Descripción
Branch & Bound	<p>Se suele interpretar como una árbol de soluciones, donde cada rama nos lleva a una solución posterior a la actual. La característica de esta técnica es que el algoritmo se encarga de detectar en que ramificación las soluciones dadas ya no están siendo optimas, luego corta la rama del árbol y no continua malgastando recursos y procesos en caso de alejarse de la solución optima.</p>
Cutting Plane	<p>La idea fundamental es añadir restricciones a un programa lineal hasta que la solución factible básica óptima tome valores enteros. Así que hay que tener cuidado con las limitaciones que se añaden dado que no se quiere cambiar el problema al adicionar las restricciones. La restricción adicional es llamada corte y cumple que la solución entera es factible y la restricción fraccional actual no es viable para el corte.</p>
Branch & Cut	<p>Branch and cut involucra el algoritmo de Branch &amp; Bound combinado con cutting plane. Inicialmente, se resuelve el problema lineal mediante uno de los algoritmos descritos anteriormente, posteriormente se aplica un corte usando el método de cutting plane y finalmente se aplica ramificación utilizando el método de Branch &amp; Bound.</p>



### 2.4.3. Lenguaje de programación matemática (AMPL)

Es un lenguaje de modelamiento matemático que describe y resuelve apoyado en un SOLVER problemas de alto grado de complejidad matemática, relacionado con la no linealidad de las expresiones o la cantidad de restricciones.

La principal ventaja de AMPL es la facilidad de realizar la sintaxis del modelo matemático, ya que coincide con la formulación realizada. Algunos solvers comúnmente utilizados en AMPL dependiendo del tipo de problema son:

Tabla 2.3: Tipos de SOLVER para cada problema de optimización [28].

SOLVER	LP	NLP	DNLP	MILP	MINLP
<b>CPLEX</b>	x			x	
<b>GUROBI</b>	x			x	
<b>XPRESS</b>	x			x	
<b>CONOPT</b>	x	x	x		
<b>KNITRO</b>	x	x		x	x
<b>LOQO</b>	x	x		x	
<b>MINOS</b>	x	x	x		
<b>SNOPT</b>	x	x	x		
<b>BARON</b>	x	x	x	x	x
<b>LGO</b>	x	x	x		

LP:Modelo de programación lineal.

DNLP:Optimización local con derivadas discontinuas.

NLP:Optimización de programación no lineal

MILP: Programacion lineal entera mixta.

MINLP: Programacion no lineal entera mixta.

El solver que se utiliza para resolver el problema propuesto, es GUROBI 6.5, dicho programa computacional tiene las siguientes características de solución:

- Los tipos de problema que soporta son clasificados como, lineales y optimización cuadratica convexa en variables continuas y enteras.
- Para problemas continuos, el solver usa métodos como el simplex (primal y dual), punto interior.
- para problemas enteros, se utiliza un branch and bound avanzado con soluciones previas, heurísticas y generadores de cortes.
- Entre sus herramientas especiales se destaca, procesamiento paralelo de memoria, optimización simultanea, tiene instalaciones especiales para diagnosticar infactibilidad.

# Capítulo 3

## Formulación del problema para el EVRPB

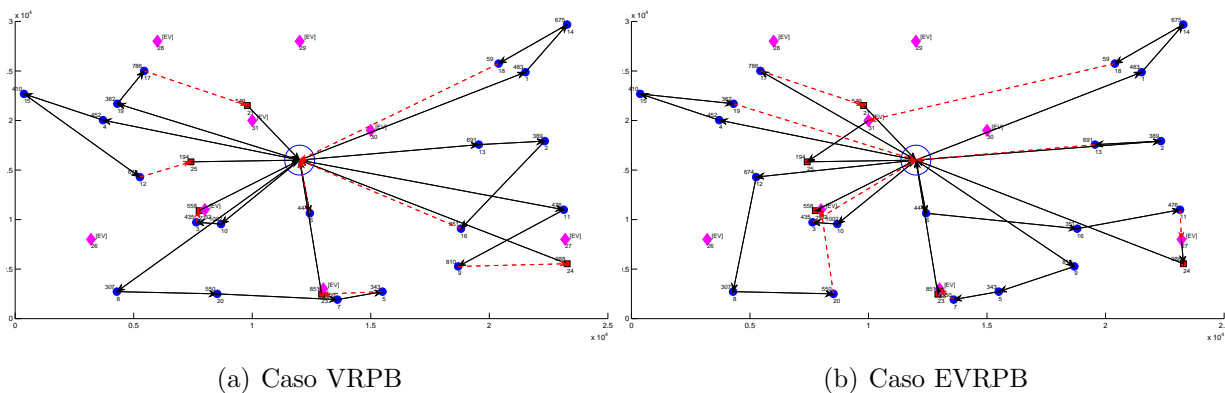
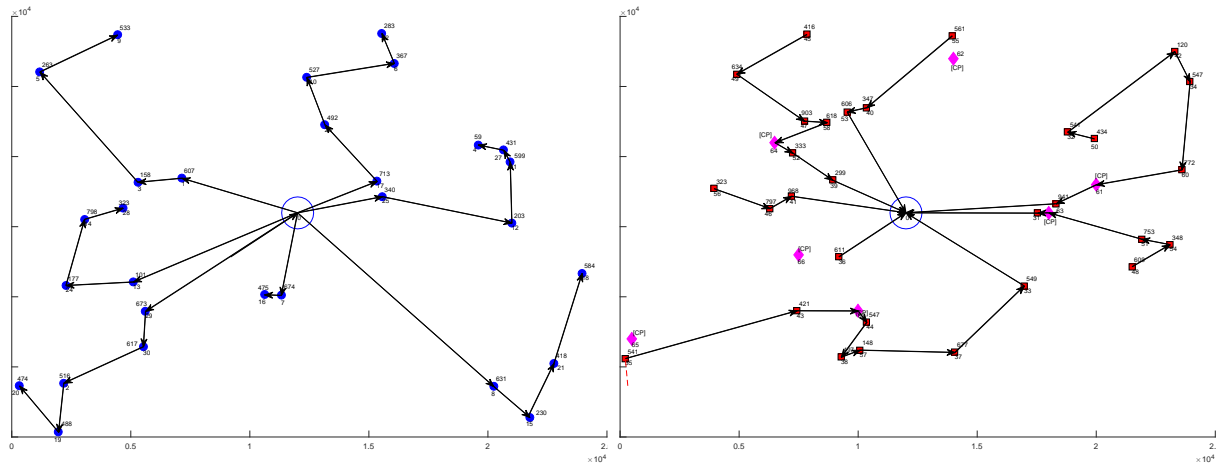


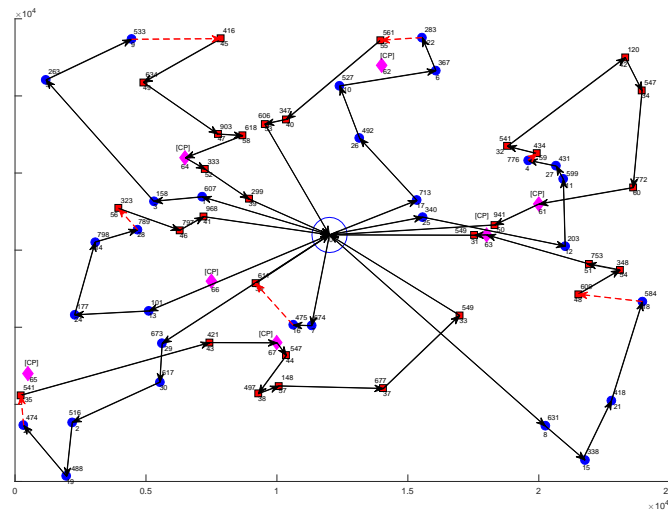
Figura 3.1: VRPB y EVRPB para la instancia A1.

La figura (3.1), muestra las diferencias en las rutas al estudiar el VRPB (figura 3.1\_a) y el EVRPB (figura 3.1\_b), el superíndice en cada nodo es la demanda en bienes para los clientes de entrega (círculos) y clientes de retorno (recuadros), igualmente, las estaciones de recarga se describen mediante rombos.



(a) Estructura de arborescencia LOVRP.

(b) Estructura de antiarborescencia BOEVRP.



(c) Estructura resultante para el EVRPB.

Figura 3.2: Formulación del EVRPB basado en estructura de arborescencia y antiarborescencia

La formulación del problema se hace en base al OVRP como se nota en la figura 3. las rutas de entrega y rutas de retorno (sin incluir los enlaces) constituyen un subproblema de configuración radial, en este caso todos los vértices están conectados mediante una ruta

hamiltoniana debido a que todos éstos son de grado 2, quiere decir a cada vértices entra y sale un arco, además el número de arcos es equivalente a (Vertices-1). La primer configuración la componen los clientes de entrega empezando desde el depósito hasta el ultimo cliente de entrega, aquí se nombra como LOVRP (*Lineahaul open vehicle routing problem*), ésta estructura es considerada de arborescencia. Igualmente, para los clientes de retorno, se considera una estructura de antiarborescencia radial que incluye los clientes de retorno y las estaciones de carga, denominada como BOEVRP (*backhaul open electric vehicle routing problem*).

### 3.1. Nomenclatura

La nomenclatura para los conjuntos, variables y parámetros del modelo propuesto para el EVRPB se describe a continuación.

#### Conjuntos

- $L$  Conjunto de clientes de entrega  $L = \{1, \dots, n\}$ .
- $B$  Conjunto de clientes de retorno  $B = \{n + 1, \dots, n + m\}$ .
- $K$  Conjunto de estaciones de carga  $K = \{n + m + 1, \dots, n + m + k\}$ .
- $L_o$  Conjunto de clientes de entrega incluyendo el depósito  $L_o = \{0\} \cup L$ .
- $B_o$  Conjunto de clientes de retorno incluyendo el depósito y estaciones de carga  $B_o = \{0\} \cup B \cup K$ .
- $C_u$  Conjunto de clientes de entrega, de retorno y estaciones de carga  $C_u = L \cup B \cup K$ .
- $V$  Conjunto de nodos  $V = C_u \cup \{0\}$ .

#### Parámetros

- $D_{ij}$  Distancia entre los nodos  $i$  y  $j$ .
- $C_{ij}$  Costo asociado a la trayectoria entre los nodos  $i$  y  $j$ .
- $D_j$  Cantidad de producto entregada o recogida a los clientes  $j \in C_u$ .
- $K_L$  Mínimo número de vehículos necesarios para servir los clientes de entrega.
- $K_B$  Mínimo número de vehículos necesarios para servir los clientes de retorno.
- $Q$  Capacidad en mercancía de los vehículos (vehículos idénticos).
- $E^{max}$  Máxima capacidad eléctrica de la batería en unidades de longitud.

**VARIABLES**

- $s_{ij}$  Variable binaria que indica si el camino entre los nodos  $i, j \in V$  está activo.  
 $\xi_{ij}$  Variable binaria que indica si el arco (tie-arc) entre los nodos  $i \in L, j \in B_o$  está activo.  
 $l_{ij}$  Cantidad de mercancía transportada entre los nodos  $i$  y  $j$ .  
 $p_{ij}$  Estado de carga del vehículo en unidades de distancia, cuando se dirige del nodo  $i$  hacia el nodo  $j$ .

**3.2. Condiciones del Problema**

El objetivo del EVRPB es minimizar el costo total de las rutas descritas para visitar a un cliente o a una estación de carga, El modelo satisface las siguientes condiciones.

- El problema puede ser visto que el VE terminó la ruta de entrega, entonces éste debe esperar mientras el vehículo es recargado hasta el próximo día u horas después para poder continuar con la ruta de retorno.
- Cada vértice que corresponda a un cliente debe ser visitado exactamente por un arco, quiere decir que cada vértice es de grado 2.
- Cada vértice que corresponda a una estación de carga, puede ser visitado por uno, más arcos o nunca ser visitado.
- Se consideran estaciones de recarga eléctrica rápida (BSS), quiere decir, el tiempo asociado a la recarga de los VEs es despreciable.
- Cada ruta comienza y termina en el depósito.
- Cada cliente es totalmente atendido cuando es visitado.
- Todos los clientes son servidos por un único depósito.
- La capacidad eléctrica de la batería y en mercancía, nunca debe ser excedida en el transcurso de el recorrido por los clientes de entrega y retorno.
- El número de VEs está limitado para cada ruta, quiere decir, la empresa tiene algunos VEs que realizan entrega y recogida, pero otros que sólo realizan entrega, por lo tanto, estos son aquellos VEs que deben volver al depósito.
- En cada circuito los clientes de entrega precede los clientes de retorno, quiere decir:

- Un circuito de clientes de retorno sólo no es permitido.
  - El ultimo clientes de entrega es conectado con el primer cliente de retorno, siempre y que el VE tenga la suficiente batería para terminar la ruta, en caso contrario visitará la estación de carga.
  - El ultimo cliente de retorno siempre está conectado con el depósito.
  - Esta condición de precedencia justifica que primero se realiza los clientes de entrega y luego los de retorno.
- Un circuito de clientes de entrega sólo es permitido y conectado a través de un enlace ( $\xi$ ) con el depósito.
  - la capacidad eléctrica de la batería depende de la distancia recorrida.
  - Los VEs salen totalmente cargados del depósito, igualmente de una estación de carga.
  - Las estaciones de carga en una ruta son usados sólo si son necesarios, en orden que la recarga de los VEs sean al final de la ruta de entrega o durante el curso de la ruta de retorno.
  - Las rutas pueden ser definidas como 2 sub-rutas, una compuesta por sólo clientes de entrega y otra por clientes de retorno, éstas son enlazadas a través de un arco  $\xi$ .
  - Las estaciones de carga ya están construidas y su demanda es equivalente a cero, a menos qué estén ubicadas en el mismo lugar de los clientes de retorno, aquí se analiza el costo de operación, quiere decir aquel que esta relacionado a ir a la estación de carga y volver hacia otro cliente.

En la tabla 3.1, se describen los tipos de rutas que pueden ser encontrados en el EVRPB.

### 3.3. Estructura matemática del modelo

$$\min = \sum_{i \in V} C_{ij} * s_{ij} + \sum_{\substack{i \in L \\ j \in B_o}} C_{ij} * \xi_{ij} \quad (3.1)$$

s.a

$$\sum_{\substack{i \in L_o \\ j \in L}} s_{ij} = |L| \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in L_o} l_{ij} - \sum_{k \in L} l_{jk} = D_j \quad \forall j \in L \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in L_o} s_{ij} = 1 \quad \forall j \in L \quad (3.4)$$

$$\sum_{k \in L_o} s_{jk} + \sum_{k \in B_o} \xi_{jk} = \sum_{i \in L_o} s_{ij} \quad \forall j \in L \quad (3.5)$$

$$l_{ij} \leq Q * s_{ij} \quad \forall i \in L_o, \forall j \in L \quad (3.6)$$

$$\sum_{j \in L_o} s_{0j} \geq \frac{\sum_{j \in L} D_j}{Q} \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in L} s_{0j} \geq K_L \quad (3.8)$$

$$p_j^L = \sum_{i \in L_o} D_{ij} * s_{ij} \quad \forall j \in L \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in L_o} p_{ij} - \sum_{k \in V} p_{jk} = p_j^L \quad \forall j \in L \quad (3.10)$$

$$p_{ij} \leq E^{max} * s_{ij} \quad \forall i \in L_o, \forall j \in L \quad (3.11)$$

$$p_{ij} \leq E^{max} * \xi_{ij} \quad \forall i \in L, \forall j \in B \quad (3.12)$$

$$p_{0j} = E^{max} * s_{0j} \quad \forall j \in L, \quad (3.13)$$

$$p_{j0} \geq D_{j0} * \xi_{j0} \quad \forall j \in L, \quad (3.14)$$

$$\sum_{\substack{i \in B \\ j \in B_o}} s_{ij} = |B| \quad (3.15)$$

$$\sum_{i \in B} l_{ij} - \sum_{k \in B_o} l_{jk} = -D_j \quad \forall j \in B \quad (3.16)$$

$$\sum_{j \in B_o} s_{ij} = 1 \quad \forall i \in B \quad (3.17)$$

$$\sum_{k \in B} s_{ki} + \sum_{j \in L} \xi_{ji} + \sum_{m \in K} s_{mi} = \sum_{j \in B_o} s_{ij} \quad \forall i \in B \quad (3.18)$$

$$l_{ij} \leq Q * s_{ij} \quad \forall i \in B, \forall j \in B_o \quad (3.19)$$



$$\sum_{i \in B} s_{i0} \geq \frac{\sum_{j \in B} D_j}{Q} \quad (3.20)$$

$$K_B \leq \sum_{i \in B} s_{i0} \leq K_L \quad (3.21)$$

$$\sum_{i \in B} s_{i0} + \sum_{i \in L} \xi_{i0} = \sum_{j \in L} s_{0j} \quad (3.22)$$

$$p_j^B = \sum_{i \in B} D_{ij} * s_{ij} + \sum_{i \in L} D_{ij} * \xi_{ij} + \sum_{i \in K} D_{ij} * s_{ij} \quad \forall j \in B \quad (3.23)$$

$$\sum_{i \in C_u} p_{ij} - \sum_{k \in B_o} p_{jk} = p_j^B \quad \forall j \in B \quad (3.24)$$

$$p_{ij} \leq E^{max} * s_{ij} \quad \forall i \in B, \forall j \in B_o \quad (3.25)$$

$$p_{j0} \geq D_{j0} * s_{j0} \quad \forall j \in B, \quad (3.26)$$

$$\sum_{k \in B} s_{ki} + \sum_{j \in L} \xi_{ji} = \sum_{j \in B} s_{ij} \quad \forall i \in K \quad (3.27)$$

$$\sum_{i \in B} l_{ij} - \sum_{k \in B_o} l_{jk} = 0 \quad \forall j \in K \quad (3.28)$$

$$p_j^K = \sum_{i \in B} D_{ij} * s_{ij} + \sum_{i \in L} D_{ij} * \xi_{ij} \quad \forall j \in K \quad (3.29)$$

$$\sum_{i \in C_u} p_{ij} - \sum_{k \in K_o} p_{jk} = p_j^K \quad \forall j \in K \quad (3.30)$$

$$p_{ij} = E^{max} * s_{ij} \quad \forall i \in K, \forall j \in B, \quad (3.31)$$

$$s_{ij} + s_{ji} \leq 1 \quad \forall i \in V, \forall j \in V \quad (3.32)$$

$$\sum_{\substack{i \in B \\ j \in L}} s_{ij} = 0 \quad (3.33)$$

$$\sum_{\substack{i \in L \\ j \in B}} s_{ij} = 0 \quad (3.34)$$

$$\sum_{j \in B} s_{0j} = 0 \quad (3.35)$$

$$\sum_{i \in L} s_{i0} = 0 \tag{3.36}$$

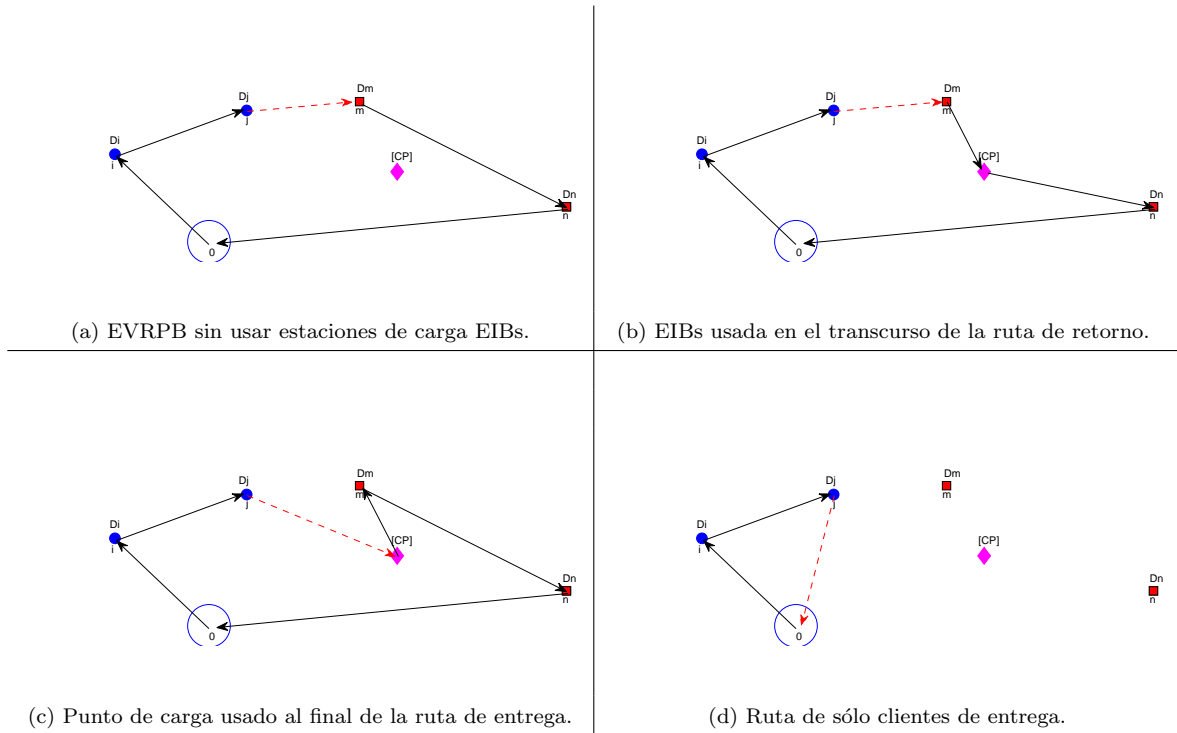


Tabla 3.1: Tipo de rutas para el EVRPB.

La función objetivo (3.1) minimiza los costos operativos, consta de 2 términos. El primero considera el costo relacionado a visitar los clientes de entrega, clientes de retorno y estaciones de carga. EL segundo busca minimizar el costo asociado a el enlace entre el ultimo cliente de retorno con una estación, con el depósito, o con cliente de entrega.

El conjunto de restricciones (3.2)-(3.8) modela el OVRP para la ruta de entrega (LOVRP), donde (3.2) y (3.3) impone los requerimientos de radialidad en la conexión. Más preciso la estructura de arborescencia, ésta impone que la cardinalidad de  $L$  (número de clientes de entrega) debe ser igual al número de arcos usados en la solución óptima, además es garantizado por la ecuación (3.2). Sin embargo, esta única condición no es suficiente para la solución de arborescencia es necesario considerar las propiedades de conectividad a través de (3.3) permitiendo el flujo de demanda de bienes en cada cliente de entrega. Las restricciones de

grado las impone (3.4) y (3.5), obligando que exactamente un arco entre y desde cada vértice asociado con los clientes de entrega respectivamente.

Restricciones (3.6) y (3.7) impone ambas la capacidad del vehículo y del depósito respectivamente, El primero es el limite superior definido por la capacidad del vehículo para transportar una cantidad de mercancía a través del los arcos de entrega, mientras el segundo es el limite inferior de número de rutas salientes del depósito para atender los clientes de entrega, que es determinado por el radio entre la demanda total a ser entregada y la capacidad del vehículo. Restricción (3.8) limita el número de vehículos a usar en la ruta de entrega.

Las restricciones para los VEs en las rutas de entrega son asignada por (3.9)-(3.14), donde en (3.9)  $p_j^L$  es una variable auxiliar que toma la distancia entre los nodos  $i$  y  $j$ , ésta restricción con (3.10), (3.11) y (3.12) permite la autonomía de la batería para ir desde un cliente de entrega a otro. Restricción (3.13) obliga el vehículo a dejar el depósito con la batería totalmente cargada, además el vehículo debe tener como mínimo capacidad en la batería para volver a depósito a través de un enlace  $\xi$ , por lo tanto es necesario la restricción (3.14).

Igualmente, el conjunto de restricciones (3.12)-(3.21) modela el OVRP para la ruta de recogida, donde (3.15) y (3.16) impone los requerimientos de conectividad radial. Note que (3.16) garantiza el balance de flujo de demanda en cada cliente de entrega. Las restricciones de grado (3.17) y (3.18) impone que un arco entre y salga de cada vértice respectivamente asociado con los clientes de retorno. Restricciones (3.19) y (3.20) impone ambos la capacidad del vehículo y del depósito, respectivamente, asociado con los clientes de retorno.

Restricciones (3.21) limita el mínimo número de vehículos usados en las rutas de retorno. Comparando ecuación (3.21) y (3.8) se puede ver que el número de arcos de entrega que dejan el depósito puede ser diferente al número de arcos de recogida que llegan al depósito. Entonces, restricciones (3.22) asegura que el número de arcos que dejan el depósito debe ser igual a el número de arcos que llegan al depósito.

Igualmente, las restricciones eléctricas para los clientes de retorno son asignadas por (3.23)-(3.26), en donde (3.23)  $p_j^B$  es una variable auxiliar que toma la diferencia entre los nodos  $i$  y  $j$ , ésta restricción con (3.24) y (3.25) permite que la batería este disponible para ir de un cliente a otro. La restricción (3.26) forza al vehículo volver de un depósito con la mínima capacidad de batería.

El conjunto de restricciones (3.27)-(3.31) describe la condición asumida para las estaciones de intercambio de batería EIBs, con el objetivo de que la recarga de la batería para los VEs ocurra al final de la ruta de entrega o durante el curso de la ruta de retorno es obligada por(3.27). El flujo de bienes es garantizado por (3.28), significa que la demanda es cero si no hay un cliente de retorno en la misma posición. Las restricciones (3.29)-(3.30) permite la disponibilidad de la batería para ir de un cliente a otro, además (3.31) forza al vehículo a

dejar el punto de carga con la batería máxima.

Finalmente, la restricción (3.32) asegura que sólo una de las dos variables  $s_{ij}$  o  $s_{ji}$  pueda ser usada. El número de variables y tiempo computacional son reducidos a través de las restricciones 3.33)-(3.36) que impone las condiciones del modelo descritas. El ultimo modelo puedo resolver el VRPB, para esto no se consideran las restricciones eléctricas (3.27)-(3.31) y el conjunto  $K$  es vacío, quiere decir  $K = \{\}$ .

# Capítulo 4

## Resultados computacionales

En la tabla 4.3, se presentan los resultados computacionales acerca del VRPB y EVRPB, se usaron VEs con diferente capacidad eléctrica definida ( $E^{max}$ ). Se usó como referencia para construir una nueva database denotado como *GJ dataset*, fue propuesta por Goetschalck and Jacobs-Blecha [3] y contiene 62 instancias con un número de clientes entre 20 y 150. Aquí se proponen nuevos vertices como puntos de carga ya construidos, algunas instancias fueron modificadas en capacidad ( $Q$ ), minimo número de vehículos ( $K_b, K_L$ ) con el objetivo de facilitar la solución, ya que un intervalo grande entre estos 2 valores hace que el modelo se demore mucho más en encontrar un óptimo debido a que algunos vehículos deben volver al depósito después de terminar los clientes de entrega, éstas instancias son mostradas con el signo (+). Finalmente, se obtiene una database compuesta por 40 instancias con entre 33 y 119 vértices.

El modelo propuesto corresponde a una formulación MILP (*mixed integer lineal programming*) implementada en AMPL [28] y resuelto con GUROBI 6.5 (llamado con el gap optimo igual a 0%), con un tiempo computacional de 14400 segundos, en un computador intel core i5-4210 2,4 Ghz, 4GB de RAM,

A continuación, se muestran ensayos realizados para verificar el cumplimiento del modelo utilizando 3 instancias del caso EVRPB de tamaño pequeño, medio y grande respectivamente. Se enuncian las rutas óptimas encontradas, y la distancia total que debería recorrer el vehículo de capacidad eléctrica limitada (VE), en algunas de estas rutas es necesario que el vehículo busque puntos de recarga para poder continuar con su recorrido, ésto sucede cuando la distancia a recorrer sobrepasa la capacidad del vehículo.

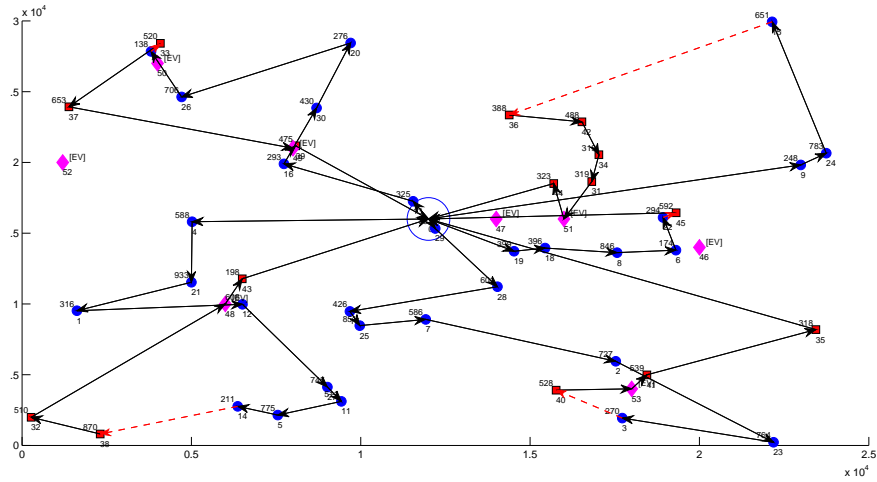


Figura 4.1: Rutas óptimas para la instancia E3.

$E^{max} = 40000$

Ruta	Salida	Llegada	Distancia total a recorrer	Estación en ruta
1	0-4	43-0	56493,8702	ACTIVA
2	0-9	44-0	48610,8937	ACTIVA
3	0-13	39-0	44135,6657	ACTIVA
4	0-19	45-0	18414,1764	
5	0-29	35-0	57314,9575	ACTIVA

Tabla 4.1: Detalles de las rutas encontradas para la instancia E3.

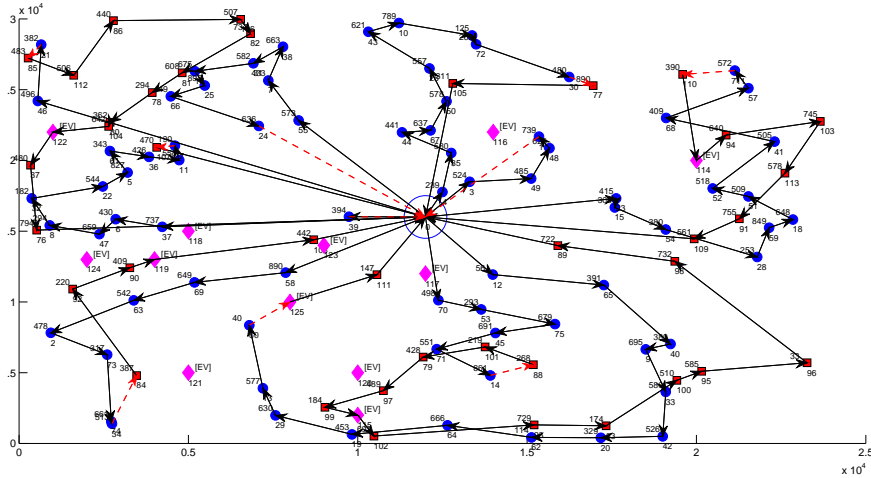


Figura 4.2: Rutas óptimas para la instancia K1.

$E^{max} = 38000$

Ruta	Salida	Llegada	Distancia total a recorrer	Estación en ruta
1	0-3	16-0	14322,23	
2	0-4	105-0	37374,5661	
3	0-12	111-0	47543,9847	ACTIVA
4	0-23	109-0	60036,4956	ACTIVA
5	0-37	107-0	32165,105	
6	0-39	39-0	4520,19513	
7	0-46	76-0	57788,4176	ACTIVA
8	0-55	24-0	30184,7862	
9	0-58	108-0	42835,3977	ACTIVA
10	0-70	89-0	59941,7452	ACTIVA

Tabla 4.2: Detalles de las rutas encontradas para la instancia K1.

Dado que uno de los factores que hace que un problema de programación lineal entera mixta sea complejo, es su relación con el número de variables binarias (número de columnas) y el número de filas (número de restricciones), para cada una de las 40 instancias se muestran en las figuras 4.3 y 4.4 dichas relaciones.

Como se puede notar, el modelo crece exponencialmente de acuerdo a las instancias en cada una de las gráficas, esto provoca un estancamiento de la formulación (El gap entre el valor óptimo entero y la solución relajada) lo que hace que los tiempos computacionales incrementen de igual manera, por lo tanto, el número de filas y de variables binarias son fuertemente dependientes del número de vértices  $V$  y mantienen una correlación entre ellas.

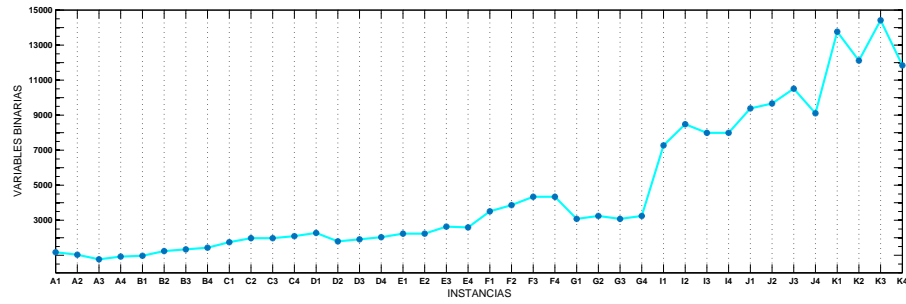


Figura 4.3: Número de variables binarias.

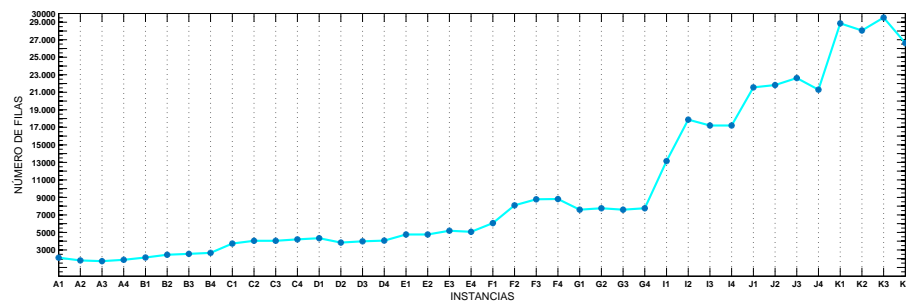


Figura 4.4: Número de filas para cada instancia.



Tabla 4.3: Resultados obtenidos para el VRPB y EVRPB, modelos modificados de [1].

Instancia	Parámetros				MILP-VRPB			MILP-EVRPB			
	V.L.B.K	$K_L; K_B$	Q	$E^{max}$	z*	Gap(%)	Tiempo[s]	z*	Gap(%)	Tiempo[s]	{PC}
A1	33_20_5.8	8;2	1550	28000	229885,65	0	3	241012,81	0	412	{2, 4, 5, 6}
A2	32_20_5.7	5;5	2550	35000	180119,21	0	2	195093,46	0	500	{2, 5}
A3	28_20_5.3	4;4	4050	38000	163405	0	2	188439,17	0	293	{3}
A4	30_20_5.5	3;3	4050	50000	155796,41	0	1	160849,62	0	6	{2}
B1	33_20_10.3	7;7	1600	40000	239080,16	0	6	244525,56	0	82	{1, 3}
B2	36_20_10.6	5;4	2600	30000	198047,77	0	4	197711,43	0	18	{3, 4, 5, 6}
B3	37_20_10.7	3;3	4000	45000	169372,29	0	1	169633,53	0	4	{2, 6}
B4	38_20_10.8	4;4	5000	28000	175120,93	0	1	193803,35	0	29	{1, 2, 3, 5, 6, 7}
C1	45_20_20.5	7;3	1800	35000	250556,77	0	63	253275,63	0	713	{1, 2, 3}
C2	47_20_20.7	5;4	2600	34000	215020,23	0	27	206443,58	0	70	{1, 2, 3, 6}
C3	47_20_20.7	5;5	4150	30000	199345,96	0	2	207498,7	0	34	{2, 3, 4, 6}
C4	48_20_20.8	4;3	4150	35000	195366,63	0	2	201072,21	0	314	{1, 2, 3, 6}
D1	47_30_8.9	12;12	2500	32000	304744,11	0	2	310743,7	0	168	{1, 2}
D2	43_30_8.5	3;3	6700	38000	180076,87	0	1	192125,45	0	450	{2, 5}
D3	44_30_8.6	7;7	2750	35000	239478,63	0	8	272490,06	0	2127	{1, 5}
D4	45_30_8.7	5;5	4075	38000	205831,94	0	30	217373,71	0	765	{6, 7}
E1	50_30_15.5	7;3	2650	45000	238879,58	0	37	243769,97	0	3200	{1}
E2	50_30_15.5	4;2	4300	48000	212263,11	0	3	214071,79	0	255	{1, 5}
E3	53_30_15.8	5;5	6500	40000	204218	0	1	224969,56	0	926	{3, 4, 5, 7}
E4	52_30_15.7	3;3	8500	55000	200350,29	0	1	200718,98	0	9	{1, 3, 5}
F1	65_30_30.5	6;6	3000	45000	263173,96	0	547	257673,24	0	248	{2, 3}
F2	67_30_30.7	7;6	3000	35000	265213,3	0	26	267501,87	0	864	{1, 3, 4, 7}
F3	70_30_30.10	5;4	4400	40000	241120,1	0	3	244156,23	0	275	{2, 4, 8, 9}
F4	70_30_30.10	4;3	5500	48000	233869,9	0	16	234049,2	0	173	{1, 2, 8, 9}
G1	59_45_12.3	6;2	4300	46000	245440,99	0	478	264851,25	6,1	12480	{1, 2}
G2	60_45_12.4	5;2	5300	51000	229507,48	0	38	239610,22	1,35	14400	{2, 4}
G3	59_45_12.2	6;6	5300	46000	240400	0	30	256805,79	5,87	14400	{2}
G4	60_45_12.3	4;4	8000	55000	213457,45	0	23	226093,4	1,41	14400	{1, 3}
I1	95_45_45.5	10;9	3000	46000	350857,59	0,4	14400	359317,326	1,78	14400	{1, 2}
I2	100_45_45.10	5;5	5700	55000	309943,84	0	560	288814,23	0	489	{4, 6, 8}
I3	98_45_45.8	6;6	5700	48000	294507,38	0	3500	293786,49	0	284	{4, 5, 6}
I4	98_45_45.8	7;4	5700	45000	295988,45	0	115	300912,05	0	370	{4, 5, 6}
J1	101_75_19.7	10;3	5400	50000	337255,38	2,73	14400	327007,97	1,57	14400	{3, 5}
J2	102_75_19.8	8;8	5600	70000	312034,68	2,43	14400	311950,24	1,96	14400	{1, 5, 6}
J3	105_75_19.11	6;6	8200	55000	279219,21	0	111	2840111,73	1,16	14400	{8}
J4	100_75_19.6	7;2	6600	65000	296553	2,99	14400	298083	2,32	14400	{}
k1	125_75_38_12	10;5	6100	38000	362673,1	0	2998	386712,92	6,69	14400	{1, 2, 7, 9, 12}
k2	123_75_38_10	8;4	8200	45000	341068,05	0	2000	372860,53	5,86	14400	{4, 8, 9}
k3	127_75_38_14	9;4	7800	42000	347780,64	0	508	371931,96	2,9	14400	{1, 8, 9, 12}
k4	119_75_38_6	7;6	7600	60000	339545,14	0	1900	354519,98	3,73	14400	{}

MILP: Modelo de programación lineal entera mixta propuesto con condiciones de radialidad.

V.L.B.K: Número de nodos (clientes y estaciones de carga), donde L y B corresponde a los clientes de entrega y retorno respectivamente. K son el número de puntos de carga implementados.

z\*: Valor de la mejor solución encontrada.

{PC}: Que estación es usada en el conjunto K.

Gap(%): Porcentaje gap, calculado como: (CPLEX-LB)/LB.

†: Indica que instancia a cambiado en capacidad en mercancía (Q).

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

Se propone un nuevo modelo matemático exacto que permite resolver el problema de ruteo de vehículos eléctricos con clientes de entrega y retorno (EVRPB), además el propuesto en la literatura para el VRPB.

El EVRPB prueba estar mas cerca a la realidad actual de las empresas de distribución de bienes. Se aprecia el incremento en los costos operacionales y tiempo computacional comparado con el VRPB debido a que el número de restricciones aumentan, pero el tiempo computacional que incrementa es pequeño comparado con el beneficio obtenido.

Se nota la complejidad del modelo en las instancias G debido al número reducido de clientes de retorno comparado con los clientes de entrega, una de las causas se debe a las limitaciones eléctricas del modelo, ya que se reduce el espacio de soluciones factibles y encontrar un costo optimo al tener rutas de entrega tan extensas que deben ir posteriormente a una estación de carga, además presionadas por el número mínimo de VEs que deben atender los clientes de retorno ( $K_B$ ).

Se contribuye a la discusión presentada por Toth y Vigo en [1], quien establece que no se han propuestos modelos matemáticos exactos para el VRPB en la ultima década.

Se demostró que la conectividad de arborescencia permite un modelo de propósito general que puede encontrar resultados de manera eficiente, porque para 40 instancias se logró gap 0 en 33 de ellas, y las otras instancias con gap aceptable.

Acerca del trabajo futuro, estos modelos pueden servir como referencia para posteriores estudios que envuelven el impacto de los VEs en el sistema de distribución de energía y éste es de gran importancia para las compañías eléctricas del sector, además es necesario estudiar las formas de carga para los VEs como carga rapida, lenta. Otras técnicas pueden ser estudiadas para resolver el problema, algunas de estas pueden ser: técnicas de descomposición, set-partitioning, técnicas Heurísticas y Metaheurísticas, entre otras.

# Bibliografía

- [1] P.Toth, D.Vigo, The vehicle routing problem, SIAM monographs on discrete mathematics and applications show all parts in this series.
- [2] S. Ropke D. Pisinger, A unified heuristic for a large class of vehicle routing problems with backhauls, European Journal of Operational Research 171 (2006) 750-775.
- [3] M. Goetschalckx, C. Jacobs-Blecha, The vehicle routing problem with backhauls, European Journal of Operational Research 42 (1) (1989) 39-51.
- [4] J. Santa, C. Meneses y M. Granada, Un algoritmo de búsqueda tabú para el problema de ruteo de vehículos considerando entregas y recogidas, Recent advances in theory, Methods, And Practice of Operations Research (2014) 152-159.
- [5] Y. Zhong y M. Cole, A vehicle routing problem with backhauls and time Windows: a guided local search solution, Transportation Research Part E 41 (2005) 131-144.
- [6] P.Toth, D.Vigo, An exact algorithm for the vehicle routing problem with backhauls, Transportation science 31 (4) (1997) 372-385.
- [7] Q. Lu y M. Dessouky (2004), An exact Algorithm for the Multiple Vehicle Pickup and Delivery Problem. Transportation Science, 38(4), 503-514.
- [8] Z. Alireza, S. Jadid, P. Siano, multi-objective scheduling of electric vehicles in smart distribution, Energy conversion and management 79(2014)43-53.
- [9] D. Goeke y M. Schneider, Routing a mixed fleet of electric and conventional vehicles, European Journal of Operational Research 245 (2015) 81-99.
- [10] A. Mingozzi, S. Giorgi, R. Baldacci, An exact method for the vehicle routing problem with backhauls, Transportation Science 33 (3) (1999) 325-329.

- [11] L.Schrage, Formulation and structure of more complex/realistic routing and scheduling problems, *Networks* 11 (2) (1981) 229-232.
- [12] L.Bodin, Bo. Golden, A. Assad, Routing and scheduling of vehicles and crews: the state of the art classification and review, *COmputers & Industrial Engineering*.
- [13] J. Yang y H. Sun, Batory swap station location- routing problem with capacitated electric vehicles, *Computers and Operations Research* (2014).
- [14] R. Fourer, D. M. Gay, B. W. Kernighan, *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*, 2nd Edition, Brooks/Cole-Thomson, 2002.
- [15] A. Zakariazadeh, S. Jadid, P. Siano, Multi-objective scheduling of electric vehicles in smart distribution, *Energy conversion and Management* 79 (2014) 43-53.
- [16] R. A. Gallego Rendón, A. H. Escobar Zuluaga & R. A. Romero Lázaro, *Programación Lineal Entera*, Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira, 2007.
- [17] A. Sarker, *S. Newton Optimization Modelling A practical Approach*, CRC Presse 2007.
- [18] R. Dantzig, The Truck Dispatching Problem, *Management Sci*, vol. 6, n 1, pp 80.
- [19] J. Salihi, Energy requirements for electric cars and their impact on electric power generation and distribution systems. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 516-532, 1973.
- [20] *Híbridos y Eléctricos. Ecotecnología del vehículo. Hitos del vehículo híbrido y eléctrico*
- [21] *Encyclopedia Britannica*, disponible en: <http://www.britannica.com/ebchecked/media/92626/1899-jenatzy-on-april-291899-camille-jenatzys-electric-vehicle>.
- [22] *Detroit Electric. The future began en 1907.*
- [23] Jesus Moreno Herrero. *Impacto del vehículo eléctrico sobre las redes de distribución*. Master's thesis, Escuela Técnica Superior De Ingenieros de Minas, 2013.
- [24] *Mundo Automotor. Ford modelo t- 100 años de historia*, 2008.
- [25] (2016) *Plugin cars*. [Online]. <http://www.pluginCars.com/cars>

- [26] Andreas Sumper, Pau Lloret-Gallego, Roberto Villafáfila-Robles, Antoni Sudria-Andreu Eduardo Valsera-Naranjo, 'Electrical Vehicles: State of Art and Issues for their Connection to the Network,' in *Electrical Power Quality*, 2009, pp. 1-3, IEEE 2009.
- [27] M. Keskin & B. Catay, partial recharge strategies for the electric vehicle routing problem with time Windows, *Transportation Research Part C* 65 (2016), 111-127.
- [28] R. Fourer, D. M. Gay, B. W. Kernighan, *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*, 2nd Edition, Brooks/Cole-Thomson, 2002.
- [29] M. Bazaraa, J. Jarvis, H. Sherali, *Linear programming and network flows*, 2010.