



Este documento ha sido descargado de:
This document was downloaded from:



**Portal *de* Promoción y Difusión
Pública *del* Conocimiento
Académico y Científico**

<http://nulan.mdp.edu.ar> :: @NulanFCEyS

+info <http://nulan.mdp.edu.ar/2643/>



Universidad Nacional de Mar del Plata



Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Asignatura Matemática para Economistas II

ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS A UN MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE HAAVELMO

Lizzie Marcel
Camila Roldán
Tamara Carboni
Beatriz Lupín

XVII Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática

Departamento Pedagógico de Matemática (DPM)
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y a la Gestión (CMA/IADCOM)

FCE-UBA, CABA, 11-12 mayo 2017

INTRODUCCIÓN

Como estudiantes, primer contacto con **CRECIMIENTO ECONÓMICO** → FPP

El interés de este Trabajo se centra en el **MODELO SIMPLE DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE HAAVELMO (1953)**.

Desde la perspectiva matemática, el Modelo ilustra acerca de la utilidad de las ED en el análisis dinámico. Asimismo, permite reflexionar sobre uno de los objetivos tradicionales de política macroeconómica, que ha sido y es motivo de arduas discusiones teóricas por sus implicancias sociales.

EDO, lineales, de 1er. orden, con coeficientes y término constantes.

FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL

ECONÓMICA



CRECIMIENTO ECONÓMICO

Expansión continuada de las posibilidades de producción, medida como el incremento del PBI real durante un período de tiempo determinado.

Objetivo fundamental de la Política Macroeconómica.

Fundamental en la medida que contribuya al nivel de vida de la población ⇒
⇒ PRODUCCIÓN POR PERSONA/TRABAJADOR/HORA LABORAL

Determinantes: capital humano, capital físico, recursos naturales, avances tecnológicos y espíritu empresarial.

TEORÍAS

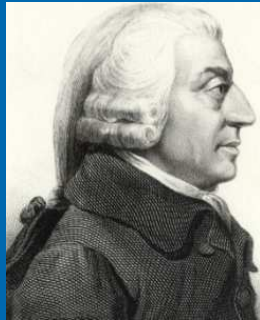
REVOLUCIÓN INDUSTRIAL



Adam SMITH

(economista y filósofo escocés, 1723-1790)

“La Riqueza de las Naciones” (1776)



División del trabajo. Proceso de acumulación del capital. PROGRESO CONTINUO

Thomas R. MALTHUS

(clérigo y erudito británico, 1766-1834)

“Ensayo sobre el Principio de la Población” (1798)



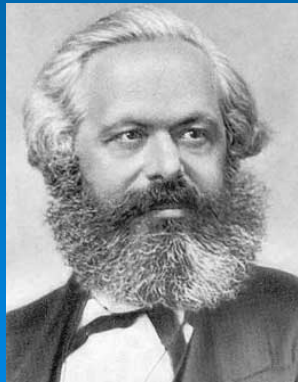
Teoría de la Población. ESTANCAMIENTO

TEORÍAS



David RICARDO
(economista y hombre de negocios inglés, 1772-1823)
“Principios Economía Política y Tributación” (1817)

Ley de Rendimientos Decrecientes. ESTADO ESTACIONARIO



Karl MARX
(filósofo, economista e intelectual prusiano, 1818-1883)
“El Capital” (1867, 1er. tomo)

Tasa descendente de beneficios. CRISIS CADA VEZ MÁS FRECUENTES

TEORÍAS



Guerras Mundiales



Crisis de 1929 y Depresión de 1930

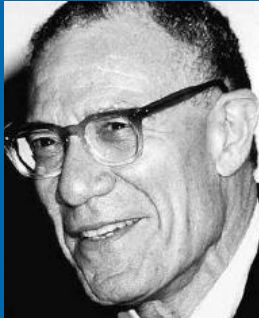
CRECIMIENTO ECONÓMICO generalizado en los países más industrializados. Diferencia entre las tasas de crecimiento de los países.



Joseph SCHUMPETER
(economista austro-húngaro, 1883-1950)
“Teoría del Desarrollo Económico” (1911)

Innovación. Emprendedores. NO ESTADO
ESTACIONARIO PARA EL CAPITALISMO

TEORÍAS

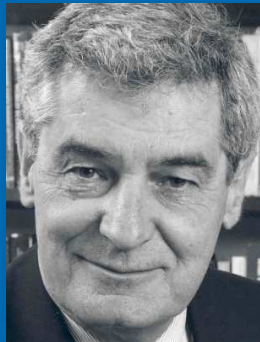


Robert SOLOW

(economista estadounidense, 1924. Premio Nobel 1987)

"A Contribution to the Theory of Economic Growth " (1956)

Teoría Neo-Clásica. Modelo Solow-Swan. Capital y trabajo. A largo plazo, ESTADO ESTABLE



Robert LUCAS Jr.

(economista estadounidense, 1937. Premio Nobel 1995)

"On the Mechanics of Economic Development " (1988)



Paul ROMER

(economista estadounidense, 1955)

"Increasing Returns and Long-Run Growth " (1986)

Teoría del Crecimiento Endógeno. Decisiones sociales. Ahorro.



MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES




ANÁLISIS DINÁMICO

Describe la **TRAYECTORIA** -senda temporal o cronológica- de alguna variable en el tiempo




La solución de una EDO...

Es convergente si tiende a algún valor \mathfrak{X} y definido, conforme " t " $\rightarrow \infty$.



El valor \mathfrak{X} al que tiende la trayectoria es el estado **ESTACIONARIO**. Implica un equilibrio a largo plazo. La variable " y " permanece estática: $dy/dt = 0$.



El estado estacionario es un caso particular del estado de equilibrio. En un estado de equilibrio, la variable " y " \uparrow a una misma tasa. Particularmente, en un estado estacionario, la variable " y " \uparrow a una tasa nula.

Se analizarán EDO, lineales, de 1er. orden, con coeficiente y término constantes y autónomas de la forma:

\dot{y}

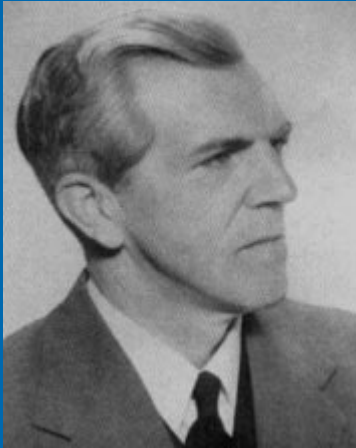
$\frac{dy}{dt} + ay = b$

$y = ce^{-at} + \frac{b}{a}$

Si “a” es una constante positiva \Rightarrow converge a “b/a” cuando $t \rightarrow \infty$

Estado **ESTACIONARIO**

MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE HAAVELMO



Trygve HAAVELMO
(economista noruego, 1911-1999. Premio Nobel 1989)

“A Study in the Theory of Economic Evolution” (1953)

A STUDY IN THE
THEORY OF ECONOMIC
EVOLUTION
BY
TRYGVE HAAVELMO



1964
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM

VARIABLES

- Volumen de producción
- Tamaño de la población
- Capital acumulado
- Nivel de educación acumulado y *know-how*

Modelo simple



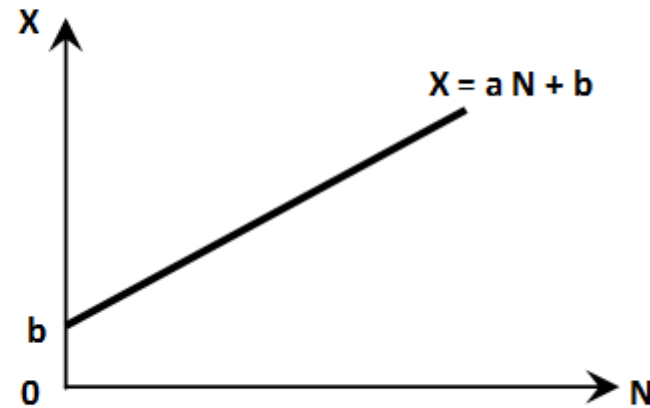
FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

- Lineal
- No lineal

Figura 1: Función de producción total lineal

$$X = a N + b$$

Donde: a = constante no negativa, matemáticamente representa la pendiente de la recta y económicamente la producción marginal; N = población; b = constante no negativa, matemáticamente representa la ordenada al origen de la recta.



Fuente: elaboración propia.

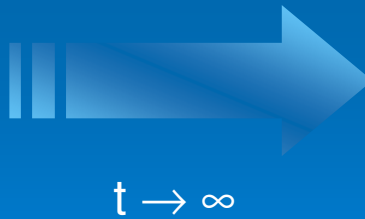
$$\bullet \frac{\dot{N}}{N} = \frac{(a\alpha - \beta)N + ab}{aN + b}$$

$$\bullet \frac{\dot{X}}{X - a} = \frac{(a\alpha - \beta)X + \beta b}{aX}$$

$$\bullet \frac{\dot{x}}{x - a} = \frac{\beta - ax}{x}$$

$$N, X > 0$$

$$X > b; x > a$$



x = producción media

EDO

Soluciones estacionarias

$$\bar{N} = \frac{ab}{\beta - \alpha a}$$

$$\bar{X} = \frac{\beta b}{\beta - \alpha a}$$

$$\bar{x} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\alpha a - \beta < 0$$

Condición necesaria y suficiente para asegurar que las soluciones sean estables

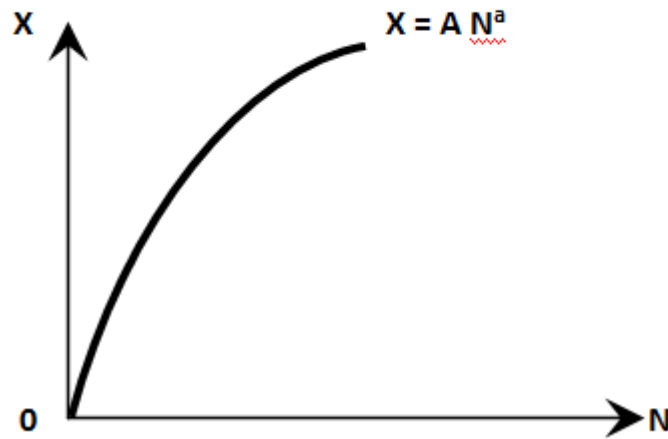
$$\alpha = TN$$

$$\beta (N/X) = TM$$

Figura 2: Función de producción no lineal

$$0 < a < 1$$

Rendimientos decrecientes



Fuente: elaboración propia.

$$X = AN^a$$

Donde: a = constante positiva, $\neq 1$. Determina la naturaleza de los rendimientos marginales de la mano de obra.; A = constante no negativa.

EDO

$$\dot{x} = \alpha (a - 1) x - \beta (a - 1)$$

Trayectorias

$$x = \left(x_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha(a-1)t} + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$N = \left\{ \frac{1}{A} \left[\left(x_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha(a-1)t} + \frac{\beta}{\alpha} \right] \right\}^{\left[\frac{1}{(a-1)} \right]}$$

$$X = A \left\{ \frac{1}{A} \left[\left(x_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha(a-1)t} + \frac{\beta}{\alpha} \right] \right\}^{\left[\frac{a}{(a-1)} \right]}$$



$t \rightarrow \infty$

$$\bar{x} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\bar{N} = \left(\frac{A \alpha}{\beta} \right)^{\left[\frac{1}{(1-a)} \right]}$$

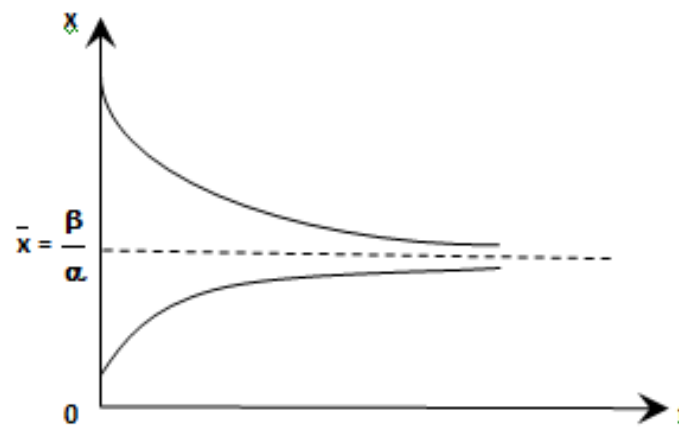
$$\bar{X} = A \left(\frac{A \alpha}{\beta} \right)^{\left[\frac{a}{(1-a)} \right]}$$

Soluciones estacionarias

$x_0 =$ constante arbitraria

Figura 3: Trayectoria de x

-X no lineal, rendimientos decrecientes-



Fuente: Adaptado de Bonifaz & Winkelried (op. cit.: 134).

INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA

Ejercicio disparador



6 Sea $N = N(t)$ el tamaño de una cierta población, $X = X(t)$ la producción total y $x(t) = X(t)/N(t)$ la producción per cápita en el instante t . T. Haavelmo³ estudió el modelo descrito por las ecuaciones:

$$(1) \quad \frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{X} \quad (2) \quad X = AN^a$$

donde α , β y a son constantes positivas, $a \neq 1$. Probar que este modelo da origen a una ecuación diferencial de la forma (21.8) en $x = x(t)$. Resolver esta ecuación y hallar las expresiones de $N = N(t)$ y $X = X(t)$. Estudiar los límites de $x(t)$, $N(t)$ y $X(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ si $0 < a < 1$.

Fuente: Sydsaeter, K. & Hammond, P. (2009). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid-España: Editorial Prentice Hall. Pág. 624.

Pista → consulte el texto:

Haavelmo, T. (1964). A study in the Theory of Economic Evolution. In J. Tinbergen, P. J. Verdoorn & H. J. Witeveen (Ed.) *Contributions to Economic Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-Netherlands. Pages 24 -29. Disponible en: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.112874>

CONSIDERACIONES FINALES

La principal diferencia entre el modelo con función de producción lineal y no lineal es que, en el último, el valor de “a” -coeficiente de productividad- determina si el sistema es estable independientemente del valor -positivo- de “ α ” y de “ β ”.

Los valores de las variables consideradas están determinados exógenamente y asociados a la capacidad que tiene la economía de absorber nueva mano de obra -y otros factores-.

Se trata de un modelo simple pero de utilidad para interpretar modelos más complejos. De hecho, Haavelmo sofisticó el análisis, “levantando” supuestos. Asimismo, permite a los estudiantes analizar la aplicación de ED, relacionar diferentes asignaturas y la lectura de textos originales.

CRECIMIENTO ECONÓMICO no implica necesariamente **DESARROLLO**. IDH (PNUD).

Gracias por su atención

Lizzie Marcel: lizziemarcel@gmail.com

Camila Roldán: camila.anto.roldan@gmail.com

Tamara Carboni: tamaracarboni_18@hotmail.com

Beatriz Lupín: beatrizlupin@gmail.com