



# LUND UNIVERSITY

## Processreglering - föreläsningssanteckningar 1997

Nilsson, Bernt

1997

*Document Version:*  
Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*  
Nilsson, B. (1997). *Processreglering - föreläsningssanteckningar 1997*. (Technical Reports TFRT-7560). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

*Total number of authors:*  
1

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:  
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

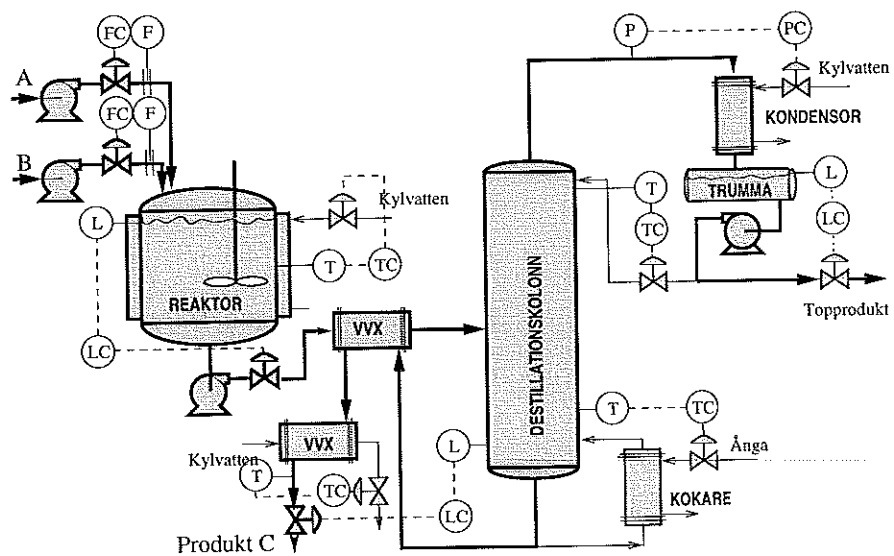
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00

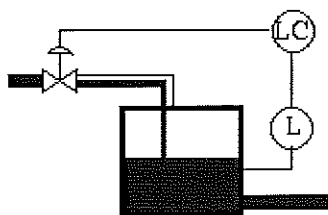
# Processreglering — föreläsninganteckningar 1997

Bernt Nilsson



<b>Department of Automatic Control</b> <b>Lund Institute of Technology</b> Box 118 S-221 00 Lund Sweden	<i>Document name</i> TECHNICAL REPORT	
	<i>Date of issue</i> June 1997	
	<i>Document Number</i> ISRN LUTFD2/TFRT--7560--SE	
<i>Author(s)</i> Bernt Nilsson	<i>Supervisor</i>	
	<i>Sponsoring organisation</i>	
<i>Title and subtitle</i> Processreglering - föreläsninganteckningar 97 (Process Control - lecture notes 97)		
<i>Abstract</i> <p>Kursen i Processreglering omarbetades under våren 1997. Denna rapport är en sammanställning av kursens föreläsningar och de omarbetningar som har gjorts.          (The course in Process Control was modified during the spring 1997. This report contains the lecture notes and other modifications done.)</p>		
<i>Key words</i>		
<i>Classification system and/or index terms (if any)</i>		
<i>Supplementary bibliographical information</i>		
<i>ISSN and key title</i> 0280-5316		<i>ISBN</i>
<i>Language</i> Swedish	<i>Number of pages</i> 133	<i>Recipient's notes</i>
<i>Security classification</i>		

The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Fax +46 46 110019, Telex: 33248 lubbis lund.



# PROCESSREGLERING

Grundläggande kurs i Reglerteknik vid  
Kemiteknik-programmet. Valfri i K3 och K4.  
Se FRT 080 i studiehandboken.  
4 poäng, läsperiod 3 och 4

(senast uppdaterad: 30 maj)

Innehåll:

Kommunikation | Veckoschema | Föreläsningar | Övningar | Lab | Tider och tenta | Litteratur | Övrigt

## Målsättning:

Kursen skall ge en översikt av reglertekniska problem och metoder i kemitekniska tillämpningar. Kursen presenterar grundläggande begrepp, modellering av dynamik i processer, dynamisk analys av processer och återkopplade system. Design av enkla regulatorer, hela regulatorstrukturer samt processer med flera in- och utsignaler är viktiga moment. Logik- och sekvensstyrning samt styrning med hjälp av dator ingår i kursen.

## Lärare och kommunikation:

namn	tel	email	Kommentarer på
Bernt Nilsson	222 8784	bernt@control.lth.se	föreläsningar
Jörgen Malmborg	222 8796	jorgen@control.lth.se	övningsgrupp 2
Martin Öhman	222 0362	martin@control.lth.se	övningsgrupp 1

## Veckoschema:

1. *Introduktion,*
  - Föreläsning 1 , 13/1 mån K:G, kap 1, 2.1-3, LAB 1
  - Övning 1: Grafiska representationer, LAB 1
2. *Processmodeller,*
  - Föreläsning 2 , 20/1 mån K:G, kap 2.4-8
  - Övning 2: Processmodellering
3. *Processdynamik I - verktyg,*
  - Föreläsning 3 , 24/1 fre K:F, kap 3.1-5
  - Övning 3: Laplacetransform och överföringsfunktioner
  - Laboration 1 (24 pers/grp: mån och ons)
4. *Processdynamik II - egenskaper,*
  - Föreläsning 4, 31/1 fre V:D, kap 3.5, 3.9, 2.7
  - Övning 4: Transientsvar och linjärisering
5. *Återkopplade system I - verktyg,*
  - Föreläsning 5, 7/2 fre K:F, kap 3.7, 4.1-3
  - Övning 5: Analys av återkopplade system
6. *Återkopplade system II - egenskaper,*

- Föreläsning 6, **14/2 fre K:C**, kap 4.2-4
- Övning 6: Egenskaper hos återkopplade system
- 7. *PID-regulatorn och regulatorinställning*,
  - Föreläsning 7, **21/2 fre K:C**, kap 5.2-5
  - Övning 7: PID och regulatorinställning, **LAB 2**

---

- 8. *Kopplade regulatorer och modellbaserade regulatorer*,
  - Föreläsning 8, **10/3 mån MA:3**, kap 6 och 7
  - Övning 8: Regulatorstrukturer
  - Laboration 2 (24 pers/grp: ons eller tors)
- 9. *Processreglersystem*,
  - Föreläsning 9, **17/3 mån K:E**, Shinskey-kapitel, Tyreus-artikel
  - Övning 9: Reglersystemstrukturer
- 10. *Multivariabel reglering*,
  - Föreläsning 10, **24/3 mån K:E**, kap 9
  - Övning 10: Multivariabel reglering

---

- 11. *Dator-, logik- och sekvensstyrning*,
  - Föreläsning 11, **14/4 mån K:G**, kap 10, 5.6, 8
  - Övning 11: Datorstyrning och GRAFCET
- 12. *Analys och design i frekvensplanet*,
  - Föreläsning 12, **21/4 mån K:G**, kap 3.8-9, 4.4 (122-124)
  - Övning 12: Analys
  - Laboration 3 (8 pers/grp: ons och tors)
- 13. *Design av reglersystem*,
  - Övning 13: Design av reglersystem
  - Laboration 3 (8 pers/grp: ons och tors)
- 14. *Repetition*,
  - Föreläsning 13, **12/5 mån K:G**
  - Övning 14
  - Laboration 3 (8 pers/grp: ons)

## Föreläsningar och sidhänvisningar:

**LP 4:** måndagar 8-10; 10/3: MA:3 17/3, 24/3: K:E, 14/4, 21/4, 12/5: K:G,

Föreläsningsanteckningarna är i pdf-format och kan läsas av Acrobat Read, som du kan hämta på Adobes hemsida.

1. *Introduktion*,
  - Vad är Processreglering?
  - Vad är ett reglersystem? kap 1.1-2
  - Kursprogram97
  - Grafiska representationer, kap 2.1-3
  - Reglertekniska principer, kap 1.3-4
  - kap 1.5 läses översiktligt
  - **Matte rep:** Analys i en variabel, kap 8.1-2 (321-332), 1:a ordn. diff.ekv.
2. *Processmodeller*,
  - Matematisk modellering, kap 2.4

- Modeller av enhetsoperationer, *kap 2.5 (läs subexemplen översiktligt)*
  - *kap 2.6 läses översiktligt*
  - Generella modeller, *kap 2.7, läs ej linjärisering*
  - Störningsmodeller, *kap 2.8*
  - *kap 2.9 läses översiktligt*
  - **Matte rep:** Analys i en variabel, kap 8.5-7 (340-358), 2:a ordn. diff.ekv.
3. *Processdynamik I - verktyg*
- Linjära tidsinvarianta system, *kap 3.1-2*
  - Laplacetransform, *kap 3.3*
  - Lösning av systemekvationen, *kap 3.4*
  - Olika representationer, *kap 3.5 (75-76)*
  - *läs kap 3.6*
  - **Matte rep:** Analys i en variabel, kap 5.2 (228-231), Part.bråksuppdeln.
  - **Matte rep:** Linjär algebra, kap 10.2-3 (223-241), Egenvärden
4. *Processdynamik II - egenskaper*
- Insignal-utsignalmodeller, *kap 3.5*
  - *läs ej 3.7 och 3.8*
  - Transienter, *kap 3.9 (93-95)*
  - Olinjära modeller och linjärisering, *kap 2.7*
  - **Matte rep:** Analys i en variabel, kap 9.2 (377), Taylors formel
5. *Återkopplade system I - grunder och analys,*
- Blockdiagramalgebra, *kap 3.7*
  - Enkel reglering, P och PI, *kap 4.1*
  - Återkopplad reglering, *kap 4.2*
  - På/Av-reglering, *kap 4.3*
6. *Återkopplade system II - stabilitet och egenskaper,*
- Stabilitet, *kap 4.4 (läs ej 119-124)*
  - PID-reglering, *kap 5.1*
  - Styrsignal- och robusthetsanalys
7. *PID-regulatorn,*
- PID-regulatorn, *kap 5.2*
  - Uppvridning och moder, *kap 5.3*
  - Parameterinställning, *kap 5.4*
  - Design av ett återkopplat system, *kap 5.5*
  - *läs ej 5.6*
8. *Kopplade regulatorer och modellbaserade regulatorer,*
- Kaskad-, kvot- och framkopplingar, *kap 6.1-4*
  - *kap 6.5-6 läses översiktligt*
  - Dödtidskompensering, *kap 7.2*
  - *kap 7.3-4 läses översiktligt*
9. *Processreglersystem,*
- Multivariabel reglering med enkla regulatorer
  - Metodik för reglerstrategier, *Shinsky; kapitel 1*
  - Processreglersystem, *Tyreus-artikel*
10. *Multivariabel reglering,*
- Multivariabel interaktion, *kap 9.1-2*
  - Reglering och RGA, *kap 9.3-4*
  - Särkoppling, *kap 9.5*
11. *Dator-, logik- och sekvensstyrning,*
- Digital reglering, *kap 10.1-4, kap 10.6-7 läses översiktligt*
  - Digital PID-regulator, *kap 5.6*

- Logik- och sekvensstyrning samt GRAFCET, kap 8
- 12. *Frekvensbeskrivningar och reglerdesign,*
  - Frekvensplansmodeller, Transienter och frekvenser, kap 3.8-9
  - Nyquist och praktisk stabilitet, kap 4.4 (122-124)
  - Parameterinställning igen, kap 5.4 (142-145)
- 13. *Sammanfattning och repetition,*
  - Repetition av kursens viktigaste delar och deras sammanhang

### **Tillämpningar i föreläsningarna:**

- *Flödesreglering,*
  - Återkopplade system I - OH: *Känslighet I-III*
  - Kopplade regulatorer - OH: *Kvotreglering II-III*
- *Nivåreglering,*
  - Processmodeller - OH: *Tankreaktor II-III*
  - Processdynamik II - OH: *Stegsvar III, Manometer I-III och Linjärisering III-VII*
  - Återkopplade system I - OH: *Stationära fel I-IV*
  - PID-regulatorn - OH: *Nivåreglering I-III*
  - Kopplade regulatorer - OH: *Kaskadreglering III-IV*
  - Kopplade regulatorer - OH: *Framkoppling II*
  - Frekvensbeskrivningar - OH: *Analys VI, Design VI-VIII*
- *Temperaturreglering,*
  - Processmodeller - OH: *Tankreaktor VI-VII Värmeväxlare I-III*
  - Återkopplade system I - OH: *Enkel reglering I-VIII*
  - Återkopplade system II - OH: *VVX-reglering I-XI*
  - PID-regulatorn - OH: *Temperaturreglering I-V*
  - Kopplade regulatorer - OH: *Kaskadreglering V*
- *Koncentrationsreglering,*
  - Introduktion - OH: *Reglertekniska principer I-V*
  - Processmodeller - OH: *Tankreaktor IV-V Destillation II-VI*
  - Processdynamik I - OH: *Systemekvationen III-V, Lösning med Laplace III och Överföringsfunktioner V*
  - Processdynamik II - OH: *Stegsvar II,*
  - Modellbaserade regulatorer - OH: *Dödtid*
  - Modellbaserade regulatorer - OH: *Multiloop reglering I-II*
- *Reaktorreglering,*
  - Processmodeller - OH: *Tankreaktor VIII*
  - Modellbaserade regulatorer - OH: *Multiloop reglering I-II*
  - Processreglersystem - OH: *Reaktor I-II*
  - Dator- och sekvensstyrning - OH: *Logik III-IV, Sekvensstyrning II-IV*
- *Destillationsreglering,*

- Processreglersystem - OH: *Destillation I-II, Destillationsreglering I-VI*
- *Processexempel,*
- Processreglersystem - OH: *Process I-VI*

### Veckans Quiz:

Dessa kräver Java för att fungera rätt! (dvs det klarar inte KC:s datorer)

- Quiz 1
- Quiz 2
- Quiz 3

### Övningar:

Grp 1, LP 4: onsdagar 8-10; K:L, Grp 2, LP 4: onsdagar 13-15; K:L

Övn	Område	Uppgifter	Hemuppgifter
1	Grunder	A.1, A.4, A.5, A.3, A.6	A.2, A.7
2	Processmodeller	A.9, 1.1, 1.2, 1.3 ab, 1.6	1.5, A.10, A.8
3	Processdynamik I	2.1, 2.2, 2.3, 3.4, 2.4	2.5, 3.9
4	Processdynamik II	3.6ab, 3.1, 3.2, 4.1	3.7, 3.8 4.2, 4.6
5	Återkopplade system I	4.3, 4.4, 5.3, 6.4ab	5.2, 5.4
6	Återkopplade system II	5.1, 6.1, 6.3	6.2
7	PID-regulatorn	7.1, 7.2, LAB 2	7.3, 7.4, 10.3, 10.4
8	Regulatorstrukturer	12.1, 12.2, 12.3	12.4
9	Processreglersystem	B.1, B.2, B.5, B.6	B.3, B.4, B.7
10	Multivariabel reglering	13.1, 13.2, 13.3	13.5, 13.4, B.8, B.10
11	Dator- och sekvensstyrning	11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5	11.9, 11.6, 11.7
12	Analys i frekvensplanet	8.1, 8.5, 8.6, 8.4, 9.2	3.5, 8.2
13	Design av reglersystem	C.1, C.2, C.3	10.4, 9.4, 9.5
14	Repetition	(gamla tal/X-tenta)	(eget val)

**Kompletterande uppgifter:** del A (några lösningar), del B (endast i pappersform) och del C (några lösningar).

**MATLAB-kopiering:** Studenter som läser Reglerteknik-kurser får kopiera MATLAB för att användas vid hemarbete på egen dator. Det går till på följande sätt:

1. Lämna lapp med namn och datoridentitet till Bernt, Jörgen eller Martin.
2. Ni får tillbaka ett avtal där ni godkänner villkoren.
3. När ni skrivit på avtalet kommer ni att registreras för kopiering.
4. Gå till Reglertekniks terminalrum (Lab C på Reglerteknik i M-huset, alltid öppet mellan 12-13)
5. Logga in med er identitet och "password" står på ert avtal.



6. Därefter sker kopiering automatiskt.

(MATLAB 4.2: Mac 4 disketter, PC-Windows 5 disketter)

(MATLAB 3.5: Mac 1 diskett, PC-DOS 1 diskett)

---

## Laborationer:

3 stycken obligatoriska laborationer. Inga laborationsredogörelser krävs utan laborationerna föregås av korta kunskapsprov och uppvisandet av lösta förberedelseuppgifter.

	Omgång 1	Omgång 2	storlek	ansvarig handledare
Lab 1	måndag, 27/1, 13-17	onsdag, 29/1, 13-17	24	Jörgen Malmberg
Lab 2	onsdag, 12/3, 13-17 #	torsdag, 13/3, 13-17 #	24	Martin Öhman
Lab 3	*	*	8	Mattias Grundelius

# Lab 2 Anmälan på Reglertekniks anslagstavla. (1 vån M-huset)

\* Lab 3 Anmälan på Reglertekniks anslagstavla: kl 13-17; 23/4, 24/4, 5/5, 6/5, 14/5

PLATS: Reglertekniks kurslab (Lab D) på 1:a våningen i M-husets södra del.

---

## Tider och Tentamena:

	LP 3	LP 4
Föreläsningar	13/1, 20/1 mån 10-12 K:G 24/1 fre 10-12 K:F 31/1 fre 10-12 V:D 7/2 fre 10-12 K:F 14/2, 21/2 fre 10-12 K:C	10/3 mån 8-10 MA:3 17/3, 24/3 mån 8-10 K:F 14/4, 21/4 mån 8-10 K:G 28/4, 5/5 inga föreläs. 12/5 mån 8-10 K:G
Övningar: Grp 1	ons 8-10 K:P	ons 8-10 K:L
Övningar: Grp 2	ons 8-10 M:G1	ons 13-15 K:L

TENTAMEN: fredagen 30/5; 8-13; Plats: MA:9

---

## Litteratur:

Kursböcker:

- Wittenmark, Åström, Jörgensen: "Process Control", KF-Sigma
- "Process Control - Exercises", KF-Sigma
- "Processreglering - Laborationer", KF-Sigma
- "Formelsamling i Reglerteknik", KF-Sigma
- Shinskey-kapitel och Tyreus-artikel

Andra böcker:

- I Reglerteknik AK används *Glad, Ljung*: **Reglerteknik, Grundläggande teori**, Studentlitteratur
  - En helt ny och trevlig bok är *Marlin*: **Process Control**. Se bokinformation på Internet-bookshop.
  - En något äldre men bredare bok är *Luyben*: **Process Modelling, Simulation, and Control for Chemical Engineers**. Bokinformation på Internet-bookshop.
- 

## X-tentor:

De senaste tentorna på "gamla" kursen (OBS! PostScript-format):

- Jun 95 med lösningar
- Jan 96 med lösningar
- Jun 96 med lösningar
- Aug 96 med lösningar
- Jan 97 med lösningar

Senaste tentan:

- Jun 97
- 

## Övrigt:

- Gamla kursen i processreglering (med extentor)
  - Tänkbara fortsättningskurser i Reglerteknik;
    - Digital reglering och sedan Processidentifiering, Adaptiv reglering
    - Realtidssystem,
    - Olinjär reglering och servosystem.
  - Några kul reglerteknik länkar:
    - Control Tutorial in MATLAB,
    - Control Lab OnLine,
    - Nuclear power plant demo,
    - Reglerteknikkurs (Exeter),
    - Picles.
- 

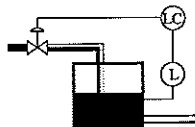
Antal besök: **0380**

Denna sida har följande address: <http://www.control.lth.se/~kurspr>



## PROCESSREGLERING

### Introduktion



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

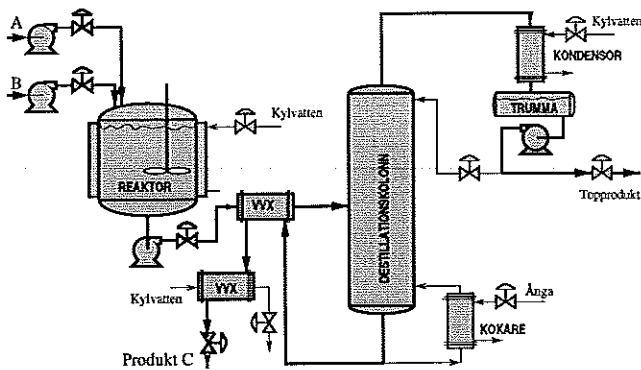
### Dagens föreläsning

#### Föreläsning 1: Introduktion

- Vad är **processreglering**?
- Hur ser reglersystem ut och vad är en **regulator**?
- Kursprogram 97
- Grafiska representationer
  - Process och instrumentdiagram (P/I)
  - Blockschema
- Reglertekniska principer

## Reglering av kemiska processer I

### Processexempel 1



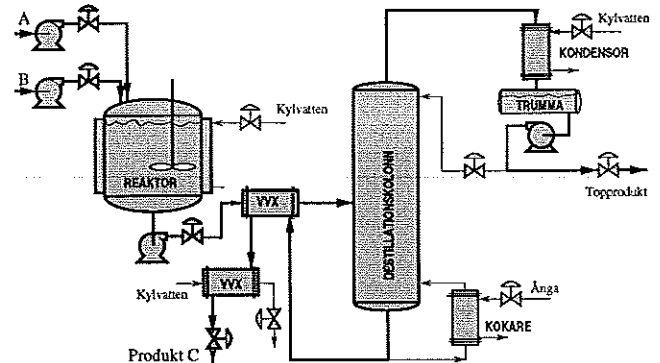
#### En enkel kemisk process

- Två reaktanter, *A* och *B*, blandas
- Antag följande reaktion,  $A + B \rightarrow C$ .
- Reaktorn är mantelkyld med kallvatten
- Separation av *C* och oreagerat
- Bottenprodukten förvärmer feeden

Alla delar är kända från andra kurser

## Reglering av kemiska processer II

### Processexempel 1



#### Hur kör man en process?

- Vilka *processvariabler* kan vi hålla under *kontroll*, *mäta* samt utnyttja för *styrning*?
- Hur betar sig processen och hur reglerar man?
- Hur startar man?

Detta är **reglertekniska** frågor!



# PROCESSREGLERING

Kursprogram 97

Innehåll:

- Hur betar sig processer?
- Hur betar sig ett regelsystem?
- Att ställa in regulatorer.
- Processreglersystem!
- Start, stopp och styrning med dator?
- Räkna på lite svårare reglerproblem.

Omfattning:

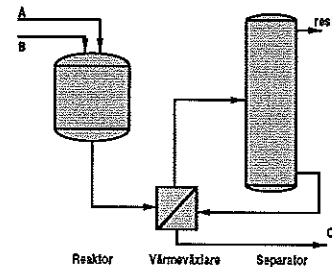
- 13 Föreläsningar
- 14 Övningar
- 3 Laborationer (oblig.)

Kursprogram:

<http://www.control.lth.se/~kurspr>

# Grafiska representationer I

Processchema



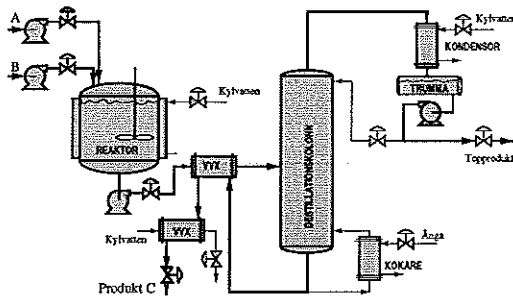
Principiellt processchema:

- Produktflöden
- Viktiga enhetsoperationer
- "Principiell" sekvens av operationer
- Inga detaljer skall visas

PC: kap 2.1-2, sid 14-18

# Grafiska representationer II

Processchema

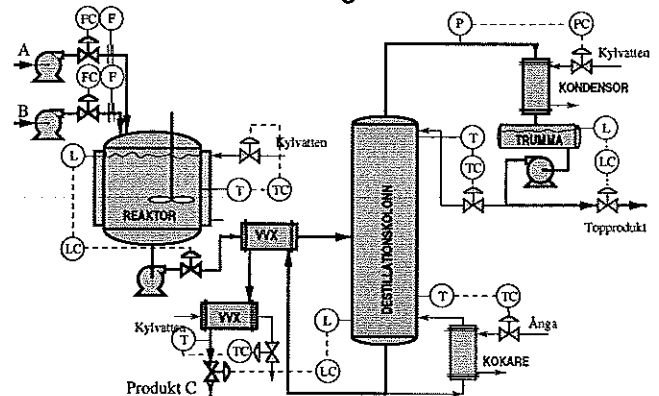


Detaljerat processchema:

- Viktiga flöden
  - Produktflöden
  - Energiflöden
- Enhetsoperationer
  - "Alla" enheter, tex pumpar, ventiler
  - Viktiga delsteg, tex kokare, kondensor
- Visar ej stödprocesser (energisystem)

# Grafiska representationer III

P/I-diagram

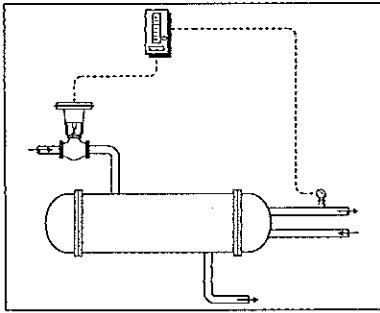


Process- och instrumentdiagram:

- Viktiga flöden
  - Produkt- och energiflöden
  - Signalflöden
- Enhetsoperationer och instrument
  - "Alla" enheter
  - Mätgivare, regulatorer och styrdon
- Visar ej uppstartsprocedurer

## Grafiska representationer IV

### Informationsflöde

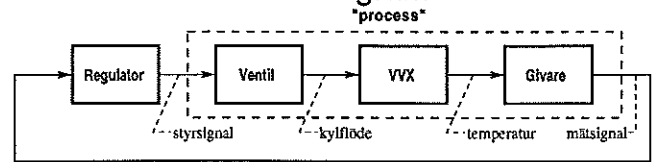


### Informationsomvandling och signaler

- Temperaturen omvandlas till mätsignal i givaren.
- Mätsignalen överförs till regulatorn
- Regulatorn beräknar en styrsignal
- Styrsignalen överförs till styrdonet
- Styrdonet ändrar flödet (ventilläget)
- Flödet överförs till kylflöde
- Kylflödet påverkar temperaturen

## Grafiska representationer V

### Blockdiagram



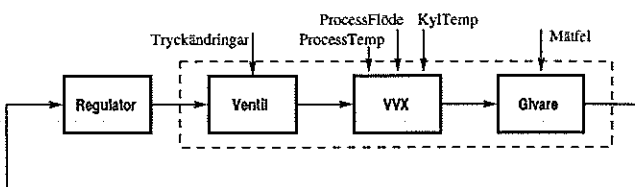
### Blockdiagram och signaler

- Blocken omvandlar information
  - Block kan motsvara flera apparater
  - Apparat kan vara flera block
- Pilar överför information (signaler)
  - Pilar beskriver *inte* flöden
  - Helt ideal *omedelbar* överföring
  - Information kan gå till flera block
- *Fysiska enheter slås ihop till en "process"*

Blockdiagram kallas också blockschema

## Grafiska representationer VI

### Blockdiagram

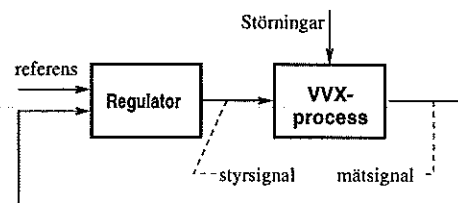


### Störningar

- Ventilen påverkas av trycket
- Värmeväxlaren påverkas av:
  - flöde och temperatur i procesströmmen
  - temperaturen i kylflödet
- Mätfel i mätgivaren
  - flödesvariationer
  - elektriska störningar

## Grundläggande begrepp I

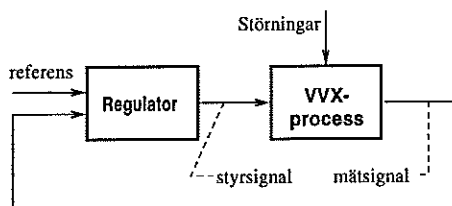
### Blockdiagram



### Abstraktion i blockdiagram

- Fysikaliska enheter bildar en "process"
- Processen påverkas av:
  - styrsignal, insignal, ( $u$ )
  - störningar, ( $d$  eller  $v$ )
- Regulatorn påverkas av:
  - referensvärde, börvärde, ( $y_{ref}$ )
  - mätsignal, ärvärde, ( $y$ )

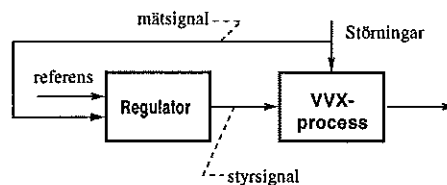
## Grundläggande begrepp II Återkoppling



**Återkoppling:** Mätning av den reglerade variabeln

- Mätning av den reglerade variabeln
- Reglersystemets egenskaper
  - + Alla typer av störningar kan regleras
  - Störningen måste "slå igenom processen"

## Grundläggande begrepp III Framkoppling

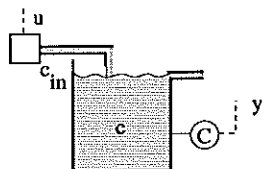


**Återkoppling:** Mätning av störningen

- Mätning av störning
- Reglersystemets egenskaper
  - Bara de mätbara störningen kan regleras
  - + Störningen regleras direkt och behöver ej "synas i processen"

## Reglertekniska principer I

Tankexempel



**Dynamisk modell:**

Materialbalans över tanken för en kemisk komponent:

$$\frac{\text{In} + \text{Produktion}}{c_{in}q_{in} + 0} = \frac{\text{Ut} + \text{Ackumulation}}{c_{out} + \frac{d(Vc)}{dt}}$$

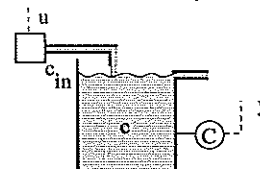
Antag

- ideal omblandning,  $c = c_{ut}$
- konstant flöde,  $q_{in} = q_{ut} = q$
- konstant volym,  $V$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{q}{V}(c_{in}(t) - c(t))$$

## Reglertekniska principer II

Tankexempel



**Lösning av dynamisk modell:**

Differentialekvation med begynnelsevärdet,  $c(0) = c_0$ . Antag konstant  $c_{in}$ .

$$e^{\frac{q}{V}t} \left( \frac{dc(t)}{dt} + \frac{q}{V}c(t) \right) = e^{\frac{q}{V}t} \frac{q}{V}c_{in}$$

$$\left[ e^{\frac{q}{V}t}c(t) \right]_0^T = \int_0^T (e^{\frac{q}{V}t} \frac{q}{V}c_{in}) dt$$

$$e^{\frac{q}{V}T}c(T) - e^{\frac{q}{V}0}c(0) = c_{in}(e^{\frac{q}{V}T} - 1)$$

Lösning

$$c(T) = e^{-\frac{q}{V}T}c_0 + c_{in}(1 - e^{-\frac{q}{V}T})$$

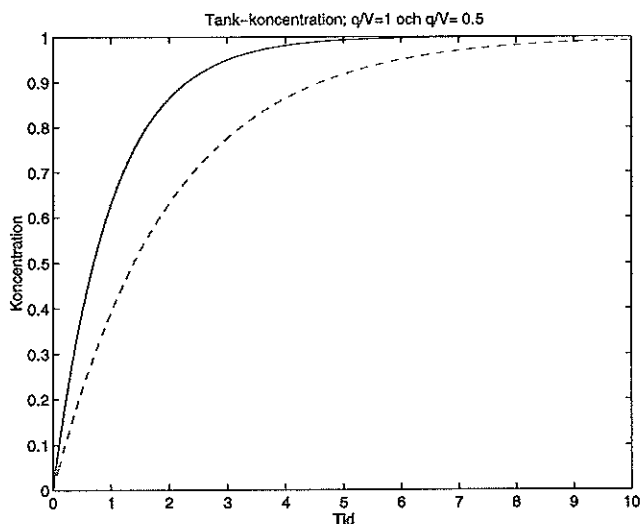
Rita  $c(T)$  för  $c_0 = 0$  och  $c_{in} = 1!$

## Reglertekniska principer III

### Tankexempel

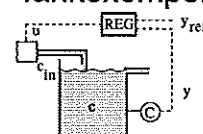
Lösning:

$$c(T) = (1 - e^{-\frac{q}{V}T})$$



## Reglertekniska principer IV

### Tankexempel



**Proportionell reglering:**

Koppla in en enkel P-regulator,  $u = K(y_{ref} - y)$ . (OBS!  $u = c_{in}$  och  $y = c$ )

$$\frac{dc}{dt} = \frac{q}{V}(u - c)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{V}(K(y_{ref} - y) - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{V}(Ky_{ref} - (K+1)y)$$

$$\frac{dy}{dt} + (K+1)\frac{q}{V}y = K\frac{q}{V}y_{ref}$$

Utnyttja integrerande faktor igen

$$y(T) = e^{-(K+1)\frac{q}{V}T}y(0) + \frac{K}{K+1}(1 - e^{-(K+1)\frac{q}{V}T})y_{ref}$$

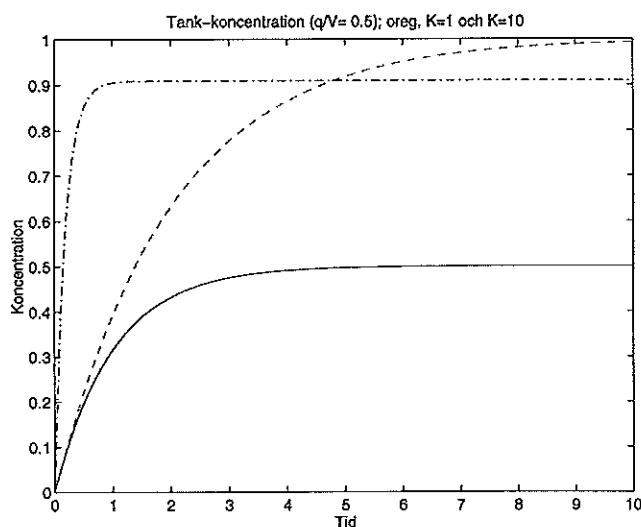
Rita  $y(T)$  för  $y_0 = 0$  och  $y_{ref} = 1$ !

## Reglertekniska principer V

### Tankexempel

Lösning:

$$y(T) = \frac{K}{K+1}(1 - e^{-(K+1)\frac{q}{V}T})$$



## Reglertekniska principer VI

### Sammanfattning

**Öppet system:** *ingen regulator*

- Insvängningshastigheten beroende av processparameter
- Slutvärdet det samma (i detta fall)

**Slutet system:** *Återkoppling med en regulator*

- Förändrar insvängningshastigheten
- Förändrar slutvärdet

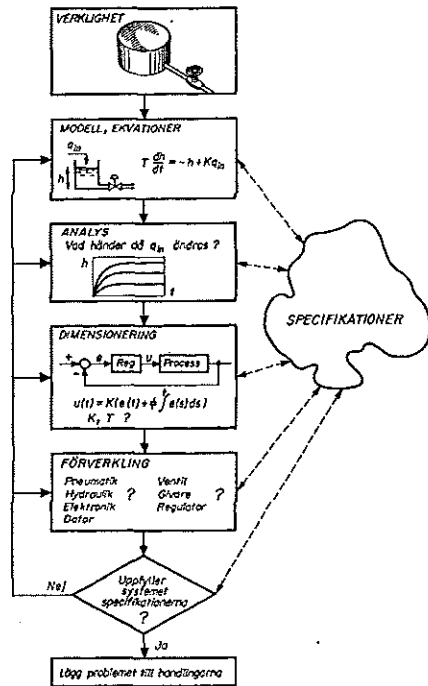
**Analys** för att studera reglersystemets dynamiska beteende.

**Design** för att välja regulator typ och parameterinställning för önskat dynamiska beteende.



# Reglertekniska principer VII

## Reglerteknisk arbetsmetodik

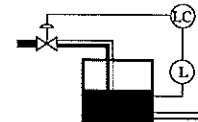


# PROCESSREGLERING

## Sammanfattning

### Föreläsning 1: Introduktion

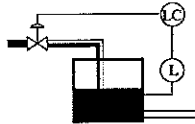
- Processreglering
- Vad är ett regelsystem?
- Kursprogram 97
- Grafiska representationer
  - P/I-diagram
  - Blockdiagram
- Reglertekniska principer
  - Fram- och Återkoppling
  - Analys och design av dynamik
- PC: kap 1, kap 2.1-3, P&B: kap 8.1-2





## PROCESSREGLERING

### Processmodeller



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

### Dagens föreläsning

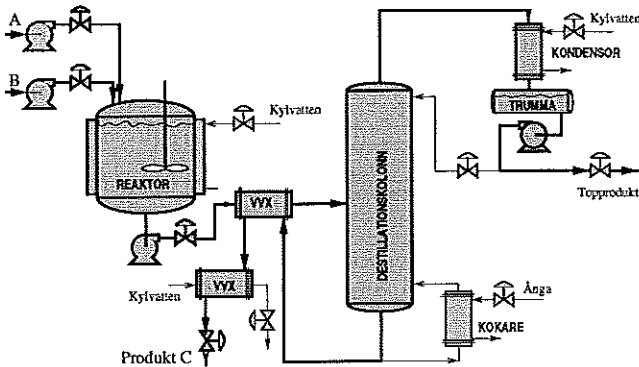
#### Föreläsning 2: Processmodeller

- Dynamiska modeller
  - Behov och krav
  - Modellantaganden
- Matematisk modellering
  - Mass- och komponentbalanser
  - Energibalanser
  - (Impulsbalanser)
- Modeller av enhetsoperationer
  - Tank och tankreaktor
  - Destillationskolonn
  - Värmeväxlare
- Systemrepresentationer
- Störningsmodeller

PC: kap 2.3-6, 2.7 sid 44-45, 2.8

## Modellering av kemiska processer

### Processexempel 1



Hur betar sig en kemisk process?

- Dynamisk modell
  - Vad skall beskrivas?
  - Antaganden
- Analytisk lösning och simulering
- Karaktäristiska egenskaper

*Detta är vad följande 3 föreläsningar handlar om!*

## Dynamiska modeller I

### Behov och krav

Dynamiska processmodeller:

- Processtekniska behov
  - dimensionering av buffert
  - design av satsvisa processer
- Reglertekniska behov
  - förståelse av dynamiska egenskaper
  - behövs vid val av regulator
  - behövs vid beräkning av parametrar
- Driftstekniska behov
  - förståelse av start och stopp
  - optimering av driftförändringar
  - träning av operatörer

*Låga krav på reglering kräver "bara" enkel modell*

*Reglering med höga krav kräver noggrann modell*

## Dynamiska modeller II

Antaganden och val

Antaganden:

- Noggrannhet
  - Statistisk avvikelse
  - Fysikalisk tolkning
- Giltighet
  - Vilket processavsnitt
  - Vilka processvariabler
  - Vilket driftsfall
  - Vilka störningar
- Komplexitet
  - Antalet processvariabler
  - Antalet ekvationer
  - Antalet parametrar

Antaganden skall noggrant övervägas (styr modellens beteende)

## Matematisk modellering I

Grunder

Oförstörbara kvantiteter:

- **Massa**
  - Totala massan oförändrad
  - Massa kan övergå i olika former, dvs i olika kemiska komponenter
- **Energi**
  - Totala energin oförändrad
  - Energi kan övergå i olika former, t ex från termisk till mekanisk energi
- **Impuls**
  - (tas upp i undantagsfall)

Total massa, komponent och termisk energi är de vanligaste balanserna som utnyttjas vid reglerteknisk processmodellering.

## Matematisk modellering II

Massbalanser

Antaganden:

1. Homogen kontrollvolym

Dynamisk balans över total massa

$$\frac{\text{In}}{q_{in}\rho_{in}} + 0 = \frac{\text{Ut}}{q_{ut}\rho} + \frac{d(V\rho)}{dt}$$

Dynamisk balans över komponent  $j$  (mol)

$$\frac{\text{In}}{q_{in}c_{j,in}} + r_j V = \frac{\text{Ut}}{q_{ut}c_j} + \frac{d(Vc_j)}{dt}$$

PC: sid.20-21

## Matematisk modellering III

Energibalanser

Dynamisk balans över total energi

$$\frac{\text{In}}{e_{in} + Q_{tf}} + Q_{prod} = \frac{\text{Ut}}{e_{ut} + W_{uf}} + \frac{dE}{dt}$$

Vanliga antagelser är:

- potentiell/kinetisk energi försummas,  $E = U$  och  $e = q\rho H$
- i vätskefas antas  $U \approx H$
- inget arbete  $W = 0$

Dynamisk entalpi-balans

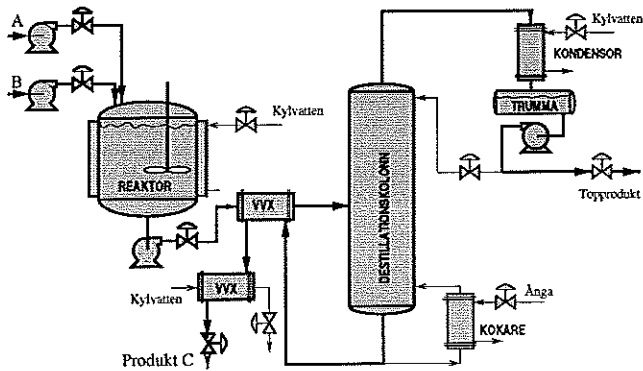
$$\frac{\text{In}}{q_{in}\rho_{in}H_{in} + Q_{tf}} + rV\Delta H_r = \frac{\text{Ut}}{q_{ut}\rho H} + \frac{d(V\rho H)}{dt}$$

Oftast antas också  $H_j \approx C_{p_j}(T - T_0)$ , dvs konstanta  $C_{p_m}$ .

PC sid.20-21

## Processmodellering

Några enhetsoperationer

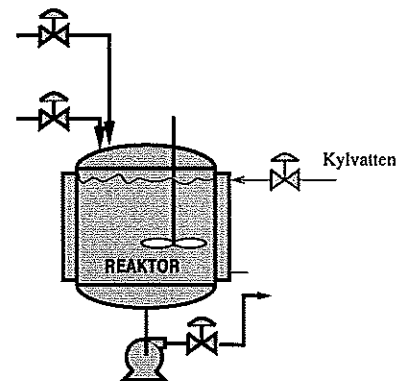


Modeller av enhetsoperationer

- (Tank), PC: 23-30
- Tankreaktor, PC: 36-39
- Kokare, PC: 30-33
- Destillationskolonn, PC: 33-36
- (Tubvärmväxlare, PC: 39-41)

## Tankreaktor I

Dynamiska modeller



Vad vill vi beskriva?

1. Volym och flöden
2. Koncentration och omblandning
3. Temperaturer och värmeöverföring

## Tankreaktor II

Volymodynamik

Antaganden: delmodell 1

1. Vätskefas
2. Konstant tvärsnittsarea,  $V = Ah$
3. Konstant densitet,  $\rho = \rho_{in} = \rho_{ut}$

Dynamisk balans över total massa

$$\frac{In + Prod}{q_{in}\rho + 0} = \frac{Ut + Ack}{q_{ut}\rho + \rho A \frac{dh}{dt}}$$

Total massbalans ger differentialekvation för tanknivån

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(q_{in} - q_{ut})$$

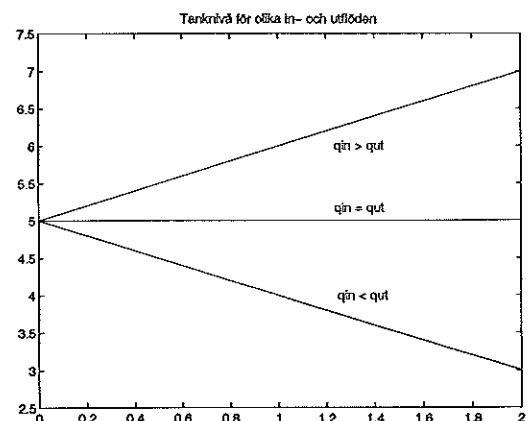
PC: exempel 2.1, sid 23

## Tankreaktor III

Volymodynamik

Total massbalans ger differentialekvation för tanknivån

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(q_{in} - q_{ut})$$



## Tankreaktor IV

### Koncentrationsdynamik

Antaganden: delmodell 2

1. Vätskefas
2. 1:a ordningens reaktion  $r = kc_B$
3. Ideal omblandning
4. Isoterm
5. Konstant flöde och volym

Dynamisk komponentbalans över reaktant  $j$ :

$$\frac{\text{In} + \text{Prod}}{qc_{j,in} + (-kc_B)V} = \frac{\text{Ut} + \text{Ack}}{qc_j + \frac{d(Vc_j)}{dt}}$$

ger följande differentialekvationer för A och B:

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{dt} &= -\frac{q}{V}c_A - kc_B + \frac{q}{V}c_{A,in} \\ \frac{dc_B}{dt} &= -\left(\frac{q}{V} + k\right)c_B + \frac{q}{V}c_{B,in} \end{aligned}$$

## Tankreaktor V

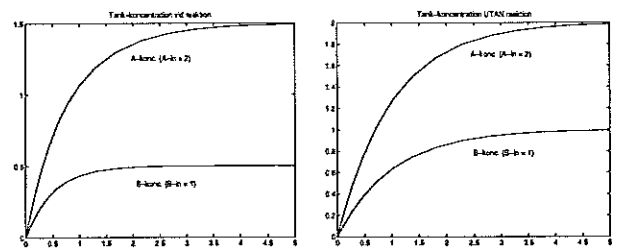
### Koncentrationsdynamik

Speciellt antaganden för en tank

1. Ingen reaktion  $r = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{dt} &= -\frac{q}{V}c_A + \frac{q}{V}c_{A,in} \\ \frac{dc_B}{dt} &= -\frac{q}{V}c_B + \frac{q}{V}c_{B,in} \end{aligned}$$

(ekvationerna oberoende av varandra.)



## Tankreaktor VI

### Temperaturdynamik

Antaganden: delmodell 3

1. Vätskefas
2. Ideal omblandning
3. Konstant uppehållstid och densitet
4. Konstant värmekapacitet,  $H = C_{pm}(T - T_{ref})$

Dynamisk energibalans

$$\frac{\text{In} + \text{Prod}}{q\rho C_p T_{in} + Q_{tf} + rV\Delta H_r} = \frac{\text{Ut} + \text{Ack}}{q\rho C_p T + \rho V C_p \frac{dT}{dt}}$$

Energibalansen ger differentialekvation för tanktemperaturen

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{V}(T_{in} - T) + \frac{1}{\rho V C_p} Q_{tf} + \frac{\Delta H_r}{\rho C_p} r$$

## Tankreaktor VII

### Temperaturdynamik i tank

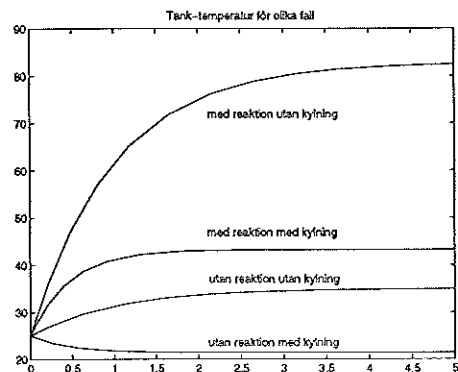
Speciella antaganden:

1. Ingen reaktion

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{V}(T_{in} - T) + \frac{1}{\rho V C_{pm}} Q_{tf}$$

2. Ingen värmeöverföring

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{V}(T_{in} - T)$$



## Tankreaktor VIII

Sammanfattning av modell

Tankreaktorn i *processexempel 1* kan beskrivas med 4 differentialekvationer.

Nivåvariationer:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(q_{in} - q_{ut})$$

Koncentrationsvariationer:

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{q}{Ah}(c_{A,in} - c_A) - kc_B$$

$$\frac{dc_B}{dt} = \frac{q}{Ah}(c_{B,in} - c_B) - kc_B$$

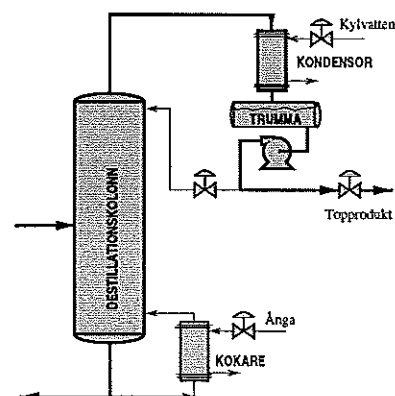
Temperaturvariationer:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{Ah}(T_{in} - T) + \frac{1}{\rho VC_{pm}}Q_{tf} - \frac{\Delta H_r}{\rho C_p}kc_B$$

(Notera  $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$  och att  $\Delta H_r < 0$  för exoterma reaktioner)

## Destillation I

Dynamiska modeller



Vad vill vi beskriva?

1. Volym och flöden
2. Sammansättningar

## Destillation II

Bottenmodell

Antaganden:

1. Ideal botten, (jämvikt  $T = f(x)$ )
2. Isobar
3. Relativ flyktighet  $y = \frac{\alpha x}{1+x(1-\alpha)}$
4. Förångning är lika med kondensering
5. Ingen ackumulering av ånga

Total- och komponentbalans över *botten*  
(extra term för inflödesbotten)

In	+Prod	= Ut	+Ack
$L_{i+1}$	+0	= $L_i$	$+\frac{dM_i}{dt}$
$L_{i+1}x_{i+1} + Vy_{i-1}$	+0	= $L_i x_i + Vy_i$	$+\frac{d(M_i x_i)}{dt}$

Sätt in totalbalansen i andra Ack-termen

$$\frac{dM_i}{dt} = L_{i+1} - L_i$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{L_{i+1}}{M_i}(x_{i+1} - x_i) + \frac{V}{M_i}(y_{i-1} - y_i)$$

PC: sid 33 - 36

## Destillation IV

Kokare och Trumma

Antaganden:

1. Ingen ackumulering av ånga

Total- och komponentbalans över *kokaren*

In	+Prod	= Ut	+Ack
$L_1$	+0	= $V + B$	$+\frac{dM_B}{dt}$
$L_1 x_1$	+0	= $(V + B)x_B$	$+\frac{d(M_B x_B)}{dt}$

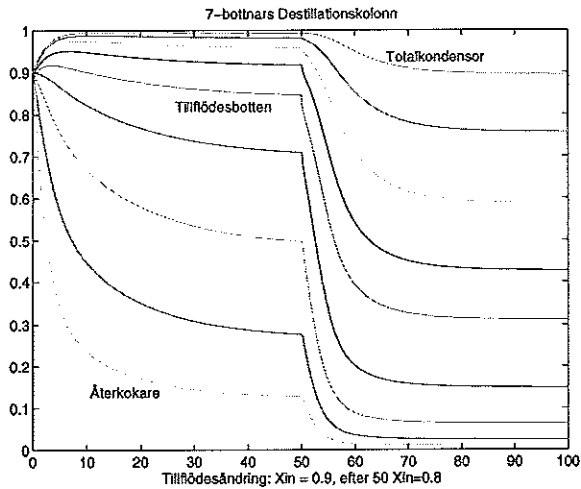
2. Ideal kondensator

Total- och komponentbalans över *återflödestrumma* (med kondensator)

In	+Prod	= Ut	+Ack
$V_n$	+0	= $L + D$	$+\frac{dM_D}{dt}$
$V_n y_n$	+0	= $(L + D)x_D$	$+\frac{d(M_D x_D)}{dt}$

## Destillation V

### Simulering



Sammansättningen i tillflödet ändras från 0.9 till 0.8 vid tiden 50.

*OBS! Bara sammansättningsdynamik!  
(konstanta flöden och ingen reglering)*

## Destillation VI

### Sammanfattning av modell

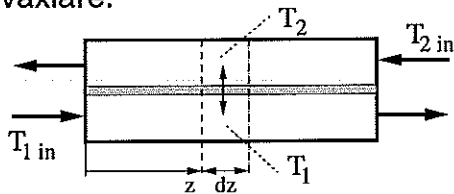
Dynamisk modell av en destillationskolonn

1.  $2(N + 2)$  differentialekvationer beskriver ( $N =$  antal bottnar)
  - (a) total mängd
  - (b) molfraktion i vätskan
2. Temperatur är funktion av molfraktion ingen explicit energibalans över botten
3. Energibalanser krävs för beräkning av  $V$  och kondensering av  $L_n$

## Värmeväxlare I

### Enkel beskrivning

Förenklad beskrivning av en motströms värmeväxlare.



Antaganden:

1. Vätskefas
2. Konstant uppehållstid och densitet
3. Konstant värmekapacitet,  
 $H = C_{pm}(T - T_{ref})$
4. Enkel värmeöverföringsmodell,  
 $Q = kA(T_1 - T_2)$

PC: kap 2.6

## Värmeväxlare II

### Förenklad modell

Antaganden för enkel modell:

1. Ideal omblandning på varje sida

Dynamiska energibalanser över sida 1 och 2.

$$\begin{array}{l} \text{In} \\ q_1 \rho_1 C_{p1} T_{1,in} \\ q_2 \rho_2 C_{p2} T_{2,in} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Ut} \\ q_1 \rho_1 C_{p1} T_1 + kA(T_1 - T_2) \\ q_2 \rho_2 C_{p2} T_2 - kA(T_1 - T_2) \end{array} \begin{array}{l} \text{+Ack} \\ + \rho_1 V_1 C_{p1} \frac{dT_1}{dt} \\ + \rho_2 V_2 C_{p2} \frac{dT_2}{dt} \end{array}$$

Två kopplade differentialekvationer för de båda temperaturerna.

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{q_1}{V_1} (T_{1,in} - T_1) - \frac{kA}{\rho_1 V_1 C_{p1}} (T_1 - T_2) \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{q_2}{V_2} (T_{2,in} - T_2) + \frac{kA}{\rho_2 V_2 C_{p2}} (T_1 - T_2) \end{aligned}$$

## Värmeväxlare III

Modell med rumsberoende

Antaganden för rumsberoende:

1. Volym  $V = A_z dz$   
( $A_z$  är kanalens tvärsnittsarea)
2. Överföringsyta  $A = L_z dz$   
( $L_z$  är överföringsytans bredd)

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{q_1}{A_{1,z} dz} (T_{1,z} - T_1) - \frac{kL_{1,z} dz}{\rho_1 A_{1,z} dz C_{p1}} (T_1 - T_2)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{q_2}{A_{2,z} dz} (T_{2,z+dz} - T_2) + \frac{kL_{2,z} dz}{\rho_2 A_{2,z} dz C_{p2}} (T_1 - T_2)$$

Låt  $dz \rightarrow 0$  och vi får

2 partiella differentialekvationer.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\frac{q_1}{A_{1,z}} \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{kL_{1,z}}{\rho_1 A_{1,z} C_{p1}} (T_1 - T_2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{q_2}{A_{2,z}} \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{kL_{2,z}}{\rho_2 A_{2,z} C_{p2}} (T_1 - T_2)$$

## Systemrepresentationer I

Tillståndsform

Alla modellerna ovan kan i princip uttryckas på **tillståndsform** med explicita högerled:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

Variablerna  $x_i$  kallas **tillstånd**.

Variablerna  $u_j$  kallas **insignaler**.

Exempel på olika tillstånd är

- tanknivå  $h$
- koncentration  $c$
- temperatur  $T$
- molfraktion  $x_i$

## Systemrepresentationer II

Linjära system

I vissa fall resulterar modellerna i en linjär tillståndsform (i detta fall med "bara" en insignal)

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu$$

Detta kan skrivas med vektorer och matriser

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

och på matrisform

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

## Systemrepresentationer III

Linjära system

Mätinsignaler kan i det generella fallet uttryckas

$$y_1 = h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

$$\vdots$$

$$y_p = h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

Specialfall: linjära  $h$ ,  $y = [c_1 \dots c_n]x + d \cdot u$

För ett linjärt system av differentialekvationer kan relationen mellan mätinsignal  $y$  och insignal  $u$  skrivas på matrisform enligt

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

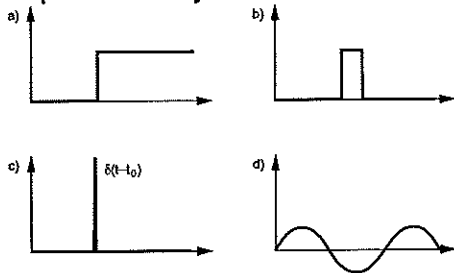
$$y = Cx + Du$$



## Störningsmodeller I

### Enkla beskrivningar

Dynamiskt beteende relateras till de störningar som påverkar system.



Exempel på enkla störningsbeskrivningar:

- Steg
- Puls (med utbredning)
- Impuls ("ingen" utbredning)
- Sinussignal

"Riktiga" processtörningar ser inte ut så här. Dom är oftast "snällare".

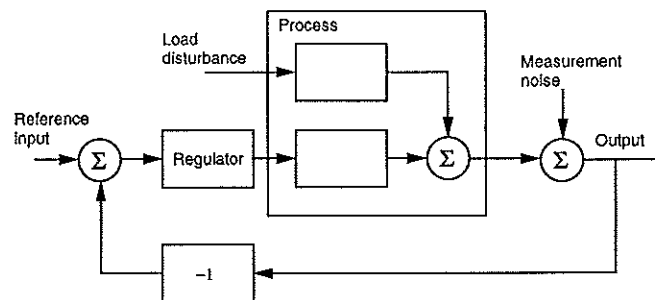
PC: kap 2.8

## Störningsmodeller II

### Applicering

Störningar påverkar det reglerade systemet på två sätt:

- Processtörningar som påverkar processvariablerna
- Mätstörningar som skapas vid mätning.

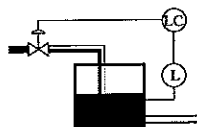


## PROCESSREGLERING

### Sammanfattning

Föreläsning 2: Processmodeller

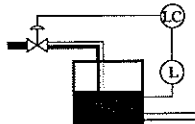
- Behov och krav på modeller
- Matematisk modellering
- Modeller av några enhetsoperationer
  - Tank och tankreaktor
  - Destillationskolonn
  - Värmeväxlare
- Systemrepresentationer
- Störningsmodeller





## PROCESSREGLERING

### Processdynamik I



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

### Dagens föreläsning

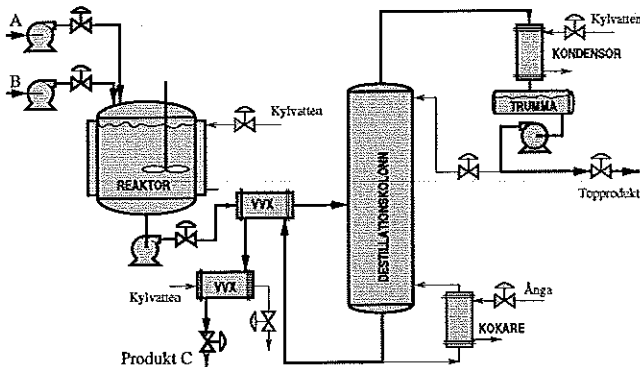
#### Föreläsning 3: Processdynamik Matematiska verktyg

- Lösning av ordinära differentialekvationer (ODE)
  - 1:a ordningens ODE
  - Lösning av systemekvationen
  - Tidskonstant och egenvärde
- Laplacetransform
  - Lösning av ODE
- Överföringsfunktion
  - Poler och nollställe
  - Singularitetsdiagram

PC: kap 3.1-5, sid. 57-70

## Dynamik i kemiska processer

### Processexempel 1



Hur beter sig en kemisk process?

- Dynamisk modell
  - Vad skall beskrivas?
  - Antaganden och noggrannhet
- Analytisk lösning eller simulering
- Karaktäristiska egenskaper

Detta är vad följande föreläsning 2, 3 och 4 handlar om

## Processdynamik I

### Matematiska verktyg

#### Lösnings- och analysmetoder

- Analytiska metoder
  - Direkt lösning av ODE (Analys B)
  - Systemekvationen
  - Laplacetransform
  - Analys av ODE (utan att lösa)
  - Insignal-utsignalmodeller
  - Frekvensanalytiska metoder
  - (det finns fler metoder)
- Simulering

## Direkt lösning av ODE I

1:a ordningens ODE

Första ordningens linjär tidsinvariant ordinär differentialekvation

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$

Hur ser lösningen ut för olika insignaler?  
Matematikkurser ger oss lösningen

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau) d\tau$$

Lösningen består av:

- Inverkan av initialvärde
- Insignalens inverkan över intervallet  $[0, t]$

P&B: kap 8.2

## Direkt lösning av ODE II

1:a ordningens ODE

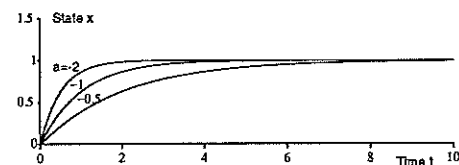
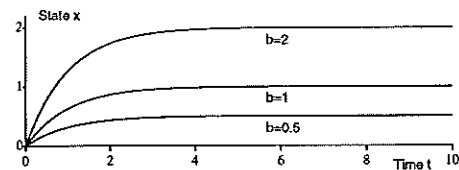
Generell lösning

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau) d\tau$$

Låt insignalen vara konstant  $u_0$

$$x(t) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)u_0$$

Simulera differentialekvationen



## Direkt lösning av ODE III

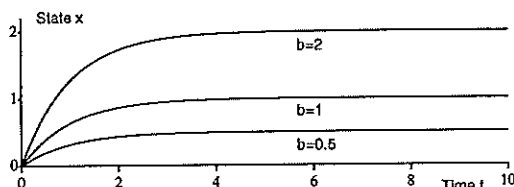
Stationär förstärkning

$$x(t) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)u_0$$

Vi ser direkt på lösningen att

- $x \rightarrow \infty$  då  $t \rightarrow \infty$  om  $a > 0$
- $x \rightarrow \frac{b}{-a}u_0$  då  $t \rightarrow \infty$  om  $a < 0$

Om  $x$  konvergerar mot ett stationärt värde så kallas  $\frac{b}{-a}$ , **stationär förstärkning**



( $a = -1$ )

## Direkt lösning av ODE IV

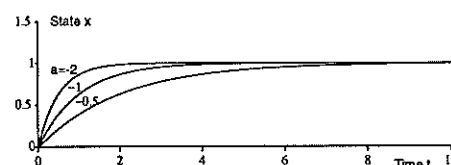
Tidskonstant

$$x(t) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)u_0$$

Vi ser direkt på lösningen att

- Om  $a > 0$  "exploderar" lösningen
- Om  $a < 0$  "försvinner" exponentialtermerna för stora  $t$ 
  - Om  $|a|$  är stort försvinner det **fort**
  - Om  $|a|$  går det **långsamt**

$-\frac{1}{a}$  kallas för **tidskonstant**



( $b = 1$ )

## Systemekvationen I

Lösning

Ett linjärt system av differentialekvationer kan skrivas på matrisform som

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

och har följande lösning

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}u(\tau) d\tau$$

$x$  och  $u$  är vektorer och  $A$  och  $B$  är matriser.

PC: kap 3.4, sats 3.5

## Systemekvationen II

Egenvärden

Lösning av systemekvationen

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}u(\tau) d\tau$$

Motsvarigheten till tidskonstanten är **egenvärdena till A**.

Följande gäller (då  $A$  kan diagonaliseras)

$$e^{At} = e^{T^{-1}\Lambda T t} = T^{-1}e^{\Lambda t}T$$

där  $\Lambda$  är en diagonalmatris med egenvärden.

**Egenvärden** fås ur karaktäristiska polynomet

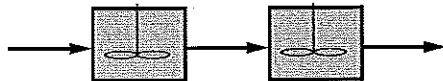
$$\det(\lambda I - A) = 0$$

PC: kap 3.4, sats 3.5. Sparr: 10.2 sid 227

## Systemekvationen III

Tankserie-exempel

Antag konstant flöde och konstanta volymer.



Ställ upp 2 komponentbalanser (1 för varje tank)

In	+Prod	= Ut	+Ack
$qc_0$	+0	$= qc_1$	$+ \frac{d(V_1c_1)}{dt}$
$qc_1$	+0	$= qc_2$	$+ \frac{d(V_2c_2)}{dt}$

Lös ut på tillståndsform

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{q}{V_1}c_1 + \frac{q}{V_1}c_0$$
$$\frac{dc_2}{dt} = -\frac{q}{V_2}c_2 + \frac{q}{V_2}c_1$$

och sedan med hjälp av matriser

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q}{V_1} & 0 \\ \frac{q}{V_2} & -\frac{q}{V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix} c_0$$

OBS! inflödets koncentration är insignal

## Systemekvationen III

Tankserie-exempel

Antag  $\frac{q}{V_1} = 1$  och  $\frac{q}{V_2} = 2$ .



$$\frac{dc}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_0$$

**Karaktäristiskt polynom**

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2) - (-2)(0)$$
$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

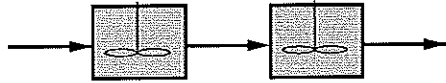
Egenvärden är

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

## Systemekvationen IV

Tankserie-exempel

Antag  $c_1(0) = c_2(0) = 0$  och  $c_0 = 1$ .



Lös  $c_2(t)$ !

Första tanken är enkel!

$$c_1(t) = e^{-t}c_1(0) - (e^{-t} - 1)c_0 = 1 - e^{-t}$$

Detta blir insignal till den andra tanken.

$$c_2(t) = e^{-2t}c_2(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 2(1 - e^{-\tau}) d\tau$$

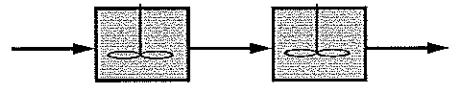
Initialvärdet är noll och integralen blir

$$c_2(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

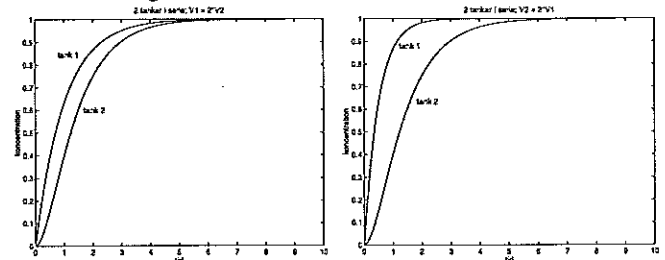
Notera att egenvärdena ses i exponential-termerna.

## Systemekvationen V

Tankserie-exempel



Simulering av 2 tankar i serie.



- *höger*: Stor tank (2V) - liten tank (V)
- *vänster*: Liten tank (V) - stor tank (2V)

Utfloppet oberoende av ordning.

## Laplacetransform I

Ett första exempel

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a_1x(t) + b_1u(t)$$

- $u(t) = 1$  för  $t \geq 0$
- $x(0) = 0$

Laplacetransformera (ur tabell)

$$\begin{aligned} sX(s) &= -a_1X(s) + b_1U(s) \\ (s + a_1)X(s) &= b_1U(s) \\ X(s) &= \frac{b_1}{(s + a_1)}U(s) \\ X(s) &= \frac{b_1}{(s + a_1)} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Invers Laplacetransform (ur tabell)

$$x(t) = \frac{b_1}{a_1}(1 - e^{-a_1t})$$

**OBS! Vi löser ekvationen utan att integrera!**

## Laplacetransform II

Definition

Begrepp:

- $f(t)$  tidsfunktion
- $F(s)$  funktion av komplex variabel  $s$

Laplacetransformen

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Inversa Laplacetransformen

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

PC: kap 3.3

### Laplace transform III

Exempel 1: stegfunktion

$f(t)$  ett **steg**, dvs

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0; \end{cases}$$

Laplace transformen blir

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

### Laplace transform IV

Exempel 2: sinusfunktion

$f(t)$  är en **sinus**-funktion

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

Laplace transformen blir

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{0-}^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

### Laplace transform V

Tabell exempel

Många transformeringar och inverser finns i tabeller

Tidsfunktion	Transform
$f(t) = 1, \quad t \geq 0$	$F(s) = \frac{1}{s}$
$f(t) = \delta(t)$	$F(s) = 1$
$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{s-a}$
$f(t) = \sin(\omega t)$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$f(t) = e^{At}$	$F(s) = [sI - A]^{-1}$

Formelsamling: sid. 7-10. PC: app. A

### Laplace transform VI

Egenskaper

- Linjäritet

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

- Faltning

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = F_1(s) F_2(s)$$

- Tidsderivata

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$$

## Laplace transform VII

Egenskaper forts.

- **Slutvärdesteoremet**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Om gränsvärdet på vänster hand existerar

- **Begynnelsevärdesteoremet**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Om gränsvärdet på vänster hand existerar

PC: sats 3.2 och 3.3, sid 63

## Lösning med Laplace I

Metod

$n$ -ordningens ODE

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y \\ = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u \end{aligned}$$

- $u(t)$  känd tidsfunktion  $u(t) = 0$  för  $t < 0$
- Alla initialvärden noll

Laplace transformera

$$\begin{aligned} (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) Y(s) &= A(s) Y(s) \\ &= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) U(s) = B(s) U(s) \end{aligned}$$

Lös ut  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U(s) = G(s) U(s)$$

$G(s)$  kallas **överföringsfunktion**

## Lösning med Laplace II

Metod

Insignalens Laplace transform

$$U(s) = \frac{B_f(s)}{A_f(s)}$$

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{B_f(s)}{A_f(s)}$$

Partialbråksuppdelning

$$Y(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \dots + \frac{c_n}{s-p_n} + \frac{d_1}{s-r_1} + \dots + \frac{d_r}{s-r_r}$$

Inverstransformera

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + \dots + c_n e^{p_n t} + d_1 e^{r_1 t} + \dots + d_r e^{r_r t}$$

Multipla rötter

$$P_{k_i-1}(t) e^{p_i t}$$

## Lösning med Laplace III

Tankserie-exempel

Antag initialvärdena  $c_1(0) = c_2(0) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= -c_1 + c_0 \\ \frac{dc_2}{dt} &= -2c_2 + 2c_1 \end{aligned}$$

Laplace transformera

$$\begin{aligned} sC_1(s) &= -C_1(s) + C_0(s) \\ sC_2(s) &= -2C_2(s) + 2C_1(s) \end{aligned}$$

Lös ut  $C_1(s)$  och sätt in  $C_0(s) = \frac{1}{s}$  i  $C_2(s)$

$$C_2(s) = \frac{2}{s+2} C_1(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)} \frac{1}{s}$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

ger  $A = 1$ ,  $B = -2$  och  $C = 1$ .

Invers Laplace transform (ur tabell)

$$c_2(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

## Överföringsfunktioner I

Analys

- Överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Rötterna till karakteristiska polynomet  $A(s)$  ger ingående tidsfunktioner

Kan dra slutsatser om

- "stabilitet" – rötter i vänstra halvplanet
- Tidsskala
- Svängningar eller rent exponentiella förlopp
- Stationära värden
- $x(t) \rightarrow 0$  ?

## Överföringsfunktioner II

Poler och nollställe

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Rötter till  $A(s)$  kallas **poler**
- Rötter till  $B(s)$  kallas **nollställen**

$G(s)$  är oändligt stor vid poler och noll vid nollställen

**Tankserie-exemplet:**

överföringen från  $c_0$  till  $c_2$

$$\frac{C_2(s)}{C_0(s)} = \frac{2}{(s+2)(s+1)}$$

poler:  $p_1 = -1$  och  $p_2 = -2$

nollställe: saknas

## Överföringsfunktioner III

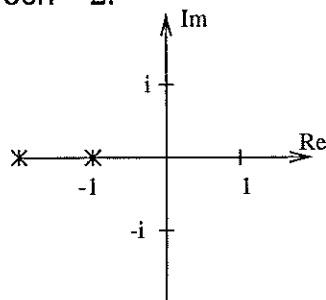
Singuläritetsdiagram

Poler och nollställen ritas i **singuläritetsdiagram**.

Poler är kryss och nollställen ringar.

**Tankserie-exempel:**

Poler i  $-1$  och  $-2$ .



## Överföringsfunktioner IV

Linjära system

För ett linjärt system av differentialekvationer kan relationen mellan mätsignal  $y$  och insignal  $u$  skrivas på matrisform enligt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Vi kan finna överföringsfunktionen genom att Laplacetransformera (antag  $x(0) = 0$ ).

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Detta ger  $X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s)$  som sätts in i  $Y(s)$ .

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C [sI - A]^{-1} B + D$$



## Överföringsfunktioner V

Linjära system

Tankserie-exempel:

$$\frac{dc}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_0$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} c$$

Överföringsfunktion:

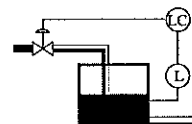
$$G(s) = C [sI - A]^{-1} B + D$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

## PROCESSREGLERING

Sammanfattning

Föreläsning 3: Processdynamik

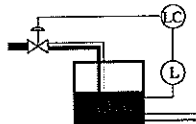
- Direct lösning av ODE
- Tidskonstant
- Systemekvationen och egenvärden
- Laplacetransform
- Analys utan att lösa ODE
- Överföringsfunktion
- Poler och nollställe





## PROCESSREGLERING

### Processdynamik II



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

Dagens föreläsning

### Föreläsning 4: Processdynamik II Transienter och dynamiska egenskaper

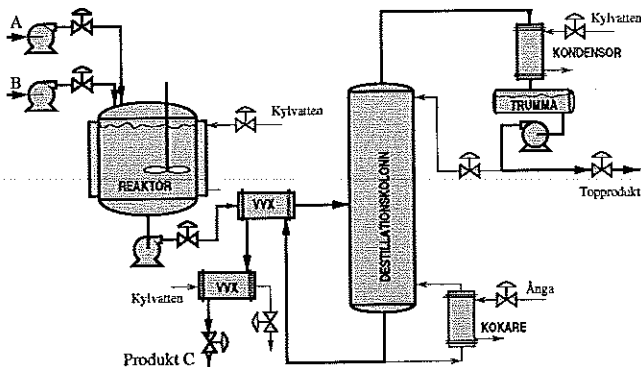
- Analys av överföringsfunktioner
- Insignal-utsignalmodeller
- Transientsvar
- Manometerexempel
- Linjärisering

PC: kap 3.5-6, 3.9 sid. 93-95

PC: kap 2.7 sid. 47-51

## Dynamik i kemiska processer

### Processexempel 1



Hur beter sig en kemisk process?

- Dynamisk modell
  - Vad skall beskrivas?
  - Antaganden och noggrannhet
- Analytisk lösning eller simulering
- Karakteristiska egenskaper

Detta är vad föreläsning 2,3 och 4 handlar om

## Överföringsfunktioner

Analys utan att lösa ODE

- Överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Rötterna till karakteristiska polynomet  $A(s)$  ger ingående tidsfunktioner

Kan dra slutsatser om

- "stabilitet" – rötter i vänstra halvplanet
- Tidsskala
- Svängningar eller rent exponentiella förlopp
- Stationära värden
- $x(t) \rightarrow 0$  ?

## Insignal-utsignal modeller

Transientsvar

Titta på uppförandet vid speciella insignaler

- Impuls
- Steg
- Sinussignaler

Räcker teoretiskt att bara studera inverkan av en typ av signaler

## Tankmodell

1:a ordningens ODE

Ställ upp komponentbalans över en väl omrörd tank. Antag konstant  $\frac{q}{V} = 1$

$$\frac{\text{In}}{qc_0} + \frac{\text{+Prod}}{+0} = \frac{\text{Ut}}{qc} + \frac{\text{+Ack}}{\frac{d(Vc)}{dt}}$$

Lös ut på tillståndsform

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{q}{V}c + \frac{q}{V}c_0$$

- Ansätt  $a = \frac{q}{V}$  och  $b = \frac{q}{V}$

$$\dot{c}(t) = -ac(t) + bc_0(t) \Rightarrow G(s) = \frac{b}{s+a}$$

- Ansätt  $T = \frac{1}{a} = \frac{V}{q}$  och  $K = \frac{b}{a} = 1$

$$T\dot{c}(t) = -c(t) + Kc_0(t) \Rightarrow G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

## Impulssvar I

1:a ordningens ODE

Laplacetransformen av en impuls

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Impulssvaret för 1:a ordningens ODE

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot 1$$

Invers Laplacetransform (ur tabell)

$$y(t) = \frac{K}{T}e^{-t/T}$$

Rita impulssvaret!

## Stegsvar I

1:a ordningens ODE

Första ordningens system

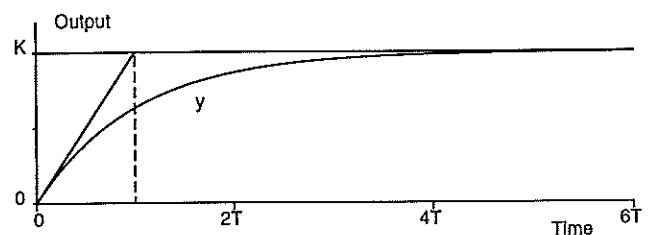
$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

Utsignalens Laplacetransform

$$Y(s) = \frac{K}{Ts+1} \frac{1}{s} = \frac{K}{s} - \frac{KT}{Ts+1}$$

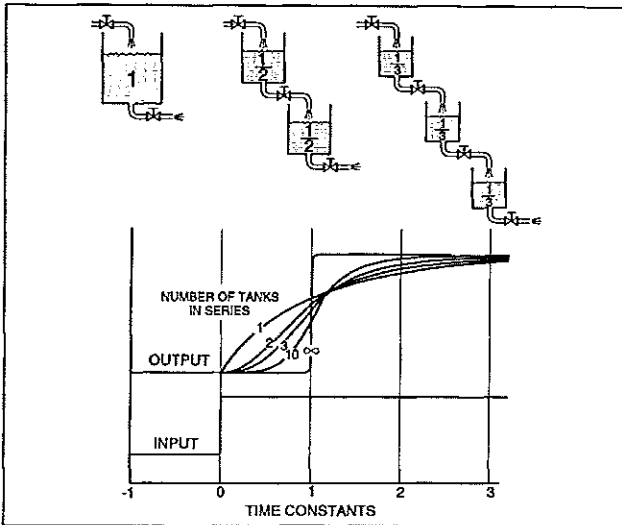
Tidsfunktion

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$



Tolkning av  $K$  och  $T$

## Stegsvar II Tankserier



Koncentrationsdynamik i tankserier.

Oändligt många och små tankar är en beskrivning av ett rör  
Det som kommer in kommer ut en tid senare (hur lång tid?)

## Stegsvar III Integrator

Antag att högerledet är oberoende av tillståndet,  $x$ :

$$\frac{dx}{dt} = Ku$$

Exempel: Tanknivå med styrda in- och utflöden.

Laplace av denna ger  $sH(s) = KU(s)$   
dvs  $G(s) = K \frac{1}{s}$  (pol i origo).

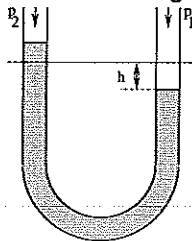
Stegsvar:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{K \frac{1}{s}\right\} = Kt$$

Rita stegsvaret!  
(kan du även rita impulssvaret?)

## Manometer I

Modellering



Antaganden:

- Isoterm och inkompressibel vätska
- Tryck-volym effekt:  $W = (p_1 - p_2)Av$
- Skjuvningsförluster:  $E = -8LA\mu v^2 \frac{1}{R^2}$
- Kinetisk ackumulering:  $\frac{dK}{dt} = \frac{4}{3}\rho LA v \frac{dv}{dt}$
- Potentiell ackumulering:  $\frac{dP}{dt} = 2\rho g Ah \frac{dh}{dt}$
- Höjdderivata är hastighet:  $\frac{dh}{dt} = v$

Mekanisk energibalans över vätskepelaren

Ack	=	In	-	Ut
$\frac{d(K+\Phi)}{dt}$	=	$W$	-	$E$
$\frac{4\rho LA}{3}v \frac{dv}{dt} + 2\rho g Ahv$	=	$(p_1 - p_2)Av$	+	$\frac{8LA\mu}{R^2}v^2$

## Manometer II

Systembeskrivning

Differentialekvationen som beskriver höjdvariationerna blir

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{6\mu}{R^2\rho} \frac{dh}{dt} + 2\frac{3g}{4L}h = \frac{3}{4} \frac{(p_a - p_b)}{\rho L}$$

Vid ett val av parametrar och skalning erhålls följande ODE

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 4\frac{dh}{dt} + 8h = 16u$$

OBS!  $u = \Delta p$

Laplace transformera (initialvärden = noll)

$$s^2H(s) + 4sH(s) + 8H(s) = 16U(s)$$

och överföringsfunktionen

$$\frac{H(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 8}$$

## Manometer III

Stegsvar

Stegsvaret blir

$$H(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 8} U(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 8} \frac{1}{s}$$

Partialbråksuppdelning

$$H(s) = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2 + 4s + 8} - \frac{8}{s^2 + 4s + 8}$$

och ta invers Laplacetransformen av varje term

$$h(t) = 2(1 - 2e^{-2t} (\cos(2t) + \sqrt{2} \sin(2t - \arctan(\sqrt{2}))))$$

Formelsamling sid 8-9: transform 2, 20 och 21.

## Stegsvar IV

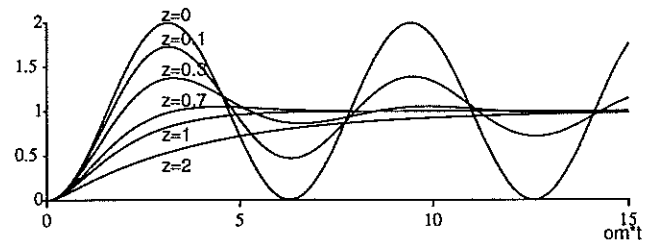
2:a ordningens ODE

Systemet

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

har det allmänna stegsvaret ( $\zeta < 1$ )

$$y(t) = 1 - \frac{2\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t) - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t - \arctan(\frac{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_0}))$$



## Stegsvar V

2:a ordningens ODE

Överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

har poler i

$$p_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\zeta\omega_0}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

- $\zeta$  kallas *relativ dämpning*
- $\zeta < 1$  ger komplexa poler

$$p_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})$$

- $\zeta > 1$  ger reella poler

$$p_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

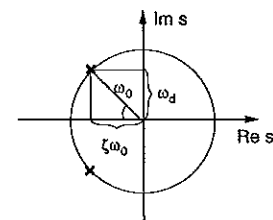
- $\omega_0$  är "bara" en skalfaktor
- $\omega_0$  kallas *odämpad egenfrekvens*

## Stegsvar VI

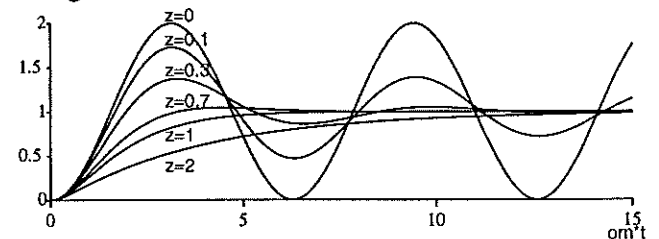
2:a ordningens ODE

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

Singularitetsdiagram



Stegsvar



## Impulssvar II

2:a ordningens ODE

Överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

Impulssvaret för denna är ( $\zeta < 1$ )

$$\mathcal{L}\{G(s) \cdot 1\} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t)$$

Rita impulssvaret för manometern  $G(s) = \frac{16}{s^2+4s+8}$

## Olika representationer

Överföringsfunktioner

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \\ &= K_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \\ &= K' \frac{s^l(1+T_{z1}s)\dots(1+T_{zm}s)}{s^k(1+T_{p1}s)\dots(1+T_{pn}s)} \\ &= \frac{c_1}{s-p_1} + \dots + \frac{c_n}{s-p_n} \end{aligned}$$

Viktiga begrepp:

- Poler  $p_i$
- Nollställen  $z_i$
- Tidskonstanter  $T_{pi}$
- Stationär förstärkning  $K = G(0)$

## Nollställe I

2:a ordningens ODE

Överföringsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\omega_0^2(1+bs)}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

ett nollställe,  $z_1 = -b$

Motsvarande differentialekvation är

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2y(t) = \omega_0^2(u(t) + b\dot{u}(t))$$

$b$  förstärker derivatan på insignalen

- $b \ll 1$  derivatan kan försummas
- $b \gg 1$  derivatan dominerande
- $b < 0$  derivatan motarbetar insignalen (Systemet kan "gå åt fel håll" i början av en transient)
- nollställe i origo innebär högerledet =  $\omega_0^2 b \dot{u}(t)$  (konstant insignal har derivatan noll)

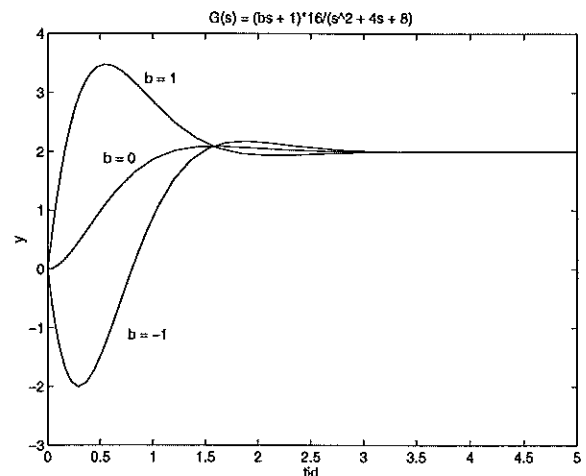
## Nollställe II

2:a ordningens ODE

Stegsvar för

$$G(s) = \frac{16(bs+1)}{s^2+4s+8}$$

med tre olika  $b = 0, 1, -1$



## Olinjära modeller

Varför linjärisering?

Olinjära modeller

- All denna teori gäller *bara linjära system*
- Motsvarande "enkla" teori finns *ej för olinjära system*
- Processmodeller är nästan alltid olinjära!

Olinjära modeller linjäriseras

- Runt en driftpunkt kan vi alltid approximera en olinjär modell med en linjär
- I nästan alla fall duger en *linjäriserad modell för reglering*

## Linjärisering I

Taylorutveckling

Linjärisering = Taylorutveckling

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x, u) \\ &= f_i(x^0, u^0) \\ &\quad + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_0 (x_1 - x_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_0 (x_n - x_n^0) \\ &\quad + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \right|_0 (u_1 - u_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \right|_0 (u_m - u_m^0) \\ &\quad + \text{higher order terms} \\ &\cong \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_0 (x_1 - x_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_0 (x_n - x_n^0) \\ &\quad + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \right|_0 (u_1 - u_1^0) + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \right|_0 (u_m - u_m^0) \end{aligned}$$

Linjäriseringspunkten är vid stationäritet,  
 $f_i(x^0, u^0) = 0$

## Linjärisering II

Linjäriserade systemet

Inför avvikelserna (variabelbyte)

$$\bar{x}_j = x_j - x_j^0; \quad j = 1, \dots, n$$

$$\bar{u}_j = u_j - u_j^0; \quad j = 1, \dots, m$$

Linjärt system

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{d\bar{x}_i}{dt} \\ &= \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_0 \bar{x}_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_0 \bar{x}_n \\ &\quad + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \right|_0 \bar{u}_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \right|_0 \bar{u}_m \\ &= a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n + b_{i1}\bar{u}_1 + \dots + b_{im}\bar{u}_m \end{aligned}$$

där

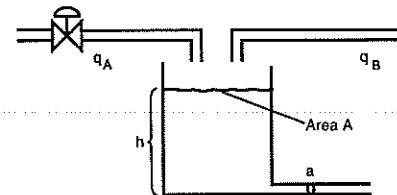
$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_0 \quad \text{and} \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_0$$

På samma sätt för utsignalerna ger

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u} \end{aligned}$$

## Linjärisering III

Tankexempel



Massbalans

$$A \frac{dh}{dt} = -q_{out} + q_A + q_B$$

Bernoulli's ekvation, turbulent utflöde,

$$q_{out} = av$$

$$\rho gh = \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow q_{out} = a\sqrt{2gh}$$

## Linjärisering IV

Tankexempel

Antag konstanta inflöden

$$\begin{aligned} q_A &= q_A^0 \\ q_B &= q_B^0 \end{aligned}$$

Nivån blir också konstant  $h^0$  och utflödet blir

$$q_{out} = q_A^0 + q_B^0$$

I stationäritet gäller  $\frac{dh}{dt} = 0$ .

Lös ut

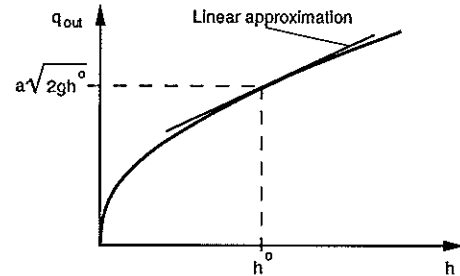
$$h^0 = \frac{(q_A^0 + q_B^0)^2}{2g\alpha^2}$$

Enligt definitionen på stationäritet gäller alltså

$$f(h^0, q_A^0, q_B^0) = 0$$

## Linjärisering V

Tankexempel



Approximera den olinjära utflödesbeskrivningen med tangenten

$$\begin{aligned} q_{out} &= \alpha\sqrt{2gh} \approx \alpha\sqrt{2gh^0} + \alpha\sqrt{\frac{g}{2h^0}}(h - h^0) \\ &= q_{out}^0 + \alpha\sqrt{\frac{g}{2h^0}}(h - h^0) \end{aligned}$$

## Linjärisering VI

Tankexempel

Inför avvikelserna (variabelbyte)

$$\begin{aligned} x &= h - h^0 \\ u &= q_A - q_A^0 \\ v &= q_B - q_B^0 \\ y &= h - h^0 \end{aligned}$$

Systemet blir nu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x + \beta u + \beta v \\ y &= x \end{aligned}$$

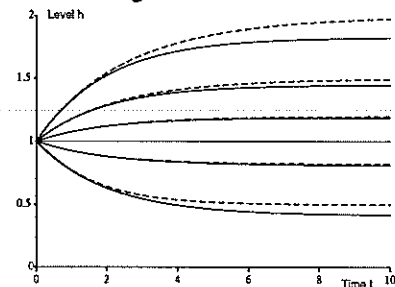
där

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha 2A\sqrt{2g/h^0} = \frac{\alpha\sqrt{2gh^0}}{2Ah^0} = \frac{q_{out}^0}{2V^0} \\ \beta &= 1/A \end{aligned}$$

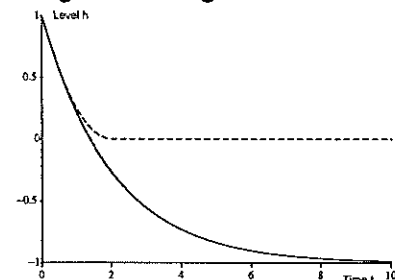
## Linjärisering VII

Tankexempel

Stegsvar: Ändring av inflöde



Stor störning: Tömning av tank



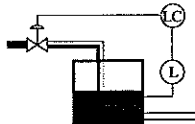


# PROCESSREGLERING

## Sammanfattning

### Föreläsning 4: Processdynamik II

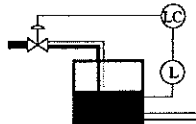
- Analys utan att lösa ODE
- Insignal-utsignalmodeller
- Stegsvvar och impulssvar
  - 1:a ordningens ODE
  - 2:a ordningens ODE med oscillationer
- Manometerexempel
- Poler och nollställe
- Linjärisering





## PROCESSREGLERING

### Återkopplade system I



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

Dagens föreläsning

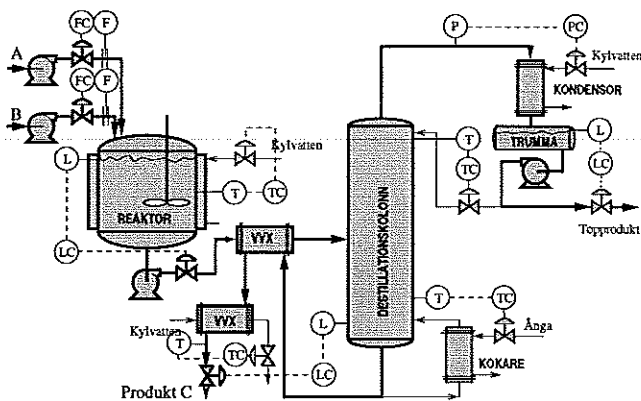
### Föreläsning 5: Återkopplade system I Grunder och analys

- Blockdiagramalgebra
- Enkel reglering
  - Proportionell
  - Proportionell-Integrerande
- Analys av återkopplade system
  - Stationära fel
  - Känslighet
- På/Av-reglering

PC: kap 3.7, 4.1-3

## Dynamik i kemiska processer

Processexempel 1



Hur betar sig reglersystemen?

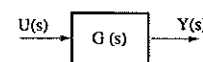
- Temperaturreglering
- Nivåreglering
- Flödesreglering

Detta är vad föreläsning 5 och 6 handlar om

## Kopplade system I

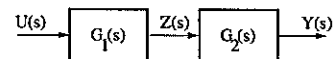
Blockdiagramalgebra

Grunder:  $Y(s) = G(s)U(s)$



- Block representerar överföringsfunktion
- Pil representerar en signal

Seriekoppling:



$$Y(s) = G_2(s)Z(s) = G_2(s)(G_1(s)U(s)) \\ = G_{tot}(s)U(s)$$

överföringsfunktionen från  $u(t)$  till  $y(t)$  är

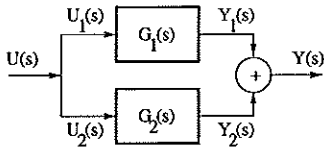
$$G_{tot}(s) = G_2(s)G_1(s)$$

- Seriekoppling är produkten av blocken

## Kopplade system II

Blockdiagramalgebra

### Parallellkoppling:



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) \\ = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = G_{tot}(s)U(s)$$

överföringsfunktionen från  $u(t)$  till  $y(t)$  är

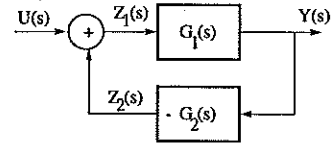
$$G_{tot}(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

- Parallellkoppling är summan av blocken

## Kopplade system III

Blockdiagramalgebra

### Återkoppling:



$$Y(s) = G_1(s)Z_1(s) = G_1(s)(U(s) + Z_2(s)) \\ = G_1(s)(U(s) - G_2(s)Y(s))$$

Lös ut  $Y(s)$ !

$$(1 + G_1(s)G_2(s))Y(s) = G_1(s)U(s) \\ \Rightarrow Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}U(s)$$

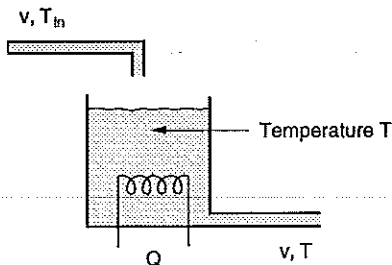
överföringsfunktionen från  $u(t)$  till  $y(t)$  är

$$G_{tot}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Detta kallas "baklängesmetoden" (se example 3.16)

## Enkel reglering I

Tank med värmare



Energibalans över en ideal tank.

(se föreläsning 2: OH-tankreaktor IV)

$$\begin{array}{cccc} \text{In} & + \text{Prod} & = & \text{Ut} & + \text{Ack} \\ \frac{q\rho C_p T_{in} + Q}{q\rho C_p T_{in} + Q} & + 0 & = & q\rho C_p T & + \rho V C_p \frac{dT}{dt} \end{array}$$

skriv balansen på tillståndform

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{V}(T_{in} - T) + \frac{1}{\rho V C_p}Q$$

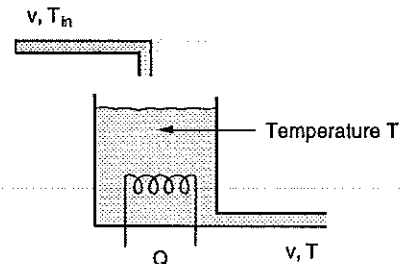
eller som i boken sidan 102

$$T_1 \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = KQ(t) + T_{in}$$

där  $T_1 = \frac{V}{q}$  och  $K = \frac{1}{\rho q C_p}$

## Enkel reglering II

Tank med värmare



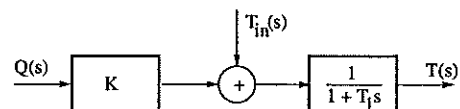
Differentialekvationen för tanktemperaturen

$$T_1 \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = KQ(t) + T_{in}(t)$$

(där  $T_1 = \frac{V}{q}$  och  $K = \frac{1}{\rho q C_p}$ )

har följande överföringsfunktion

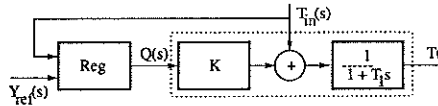
$$T(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} (KQ(s) + T_{in}(s))$$



## Enkel reglering III

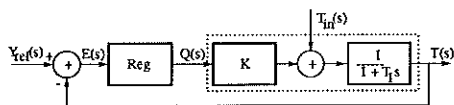
### Fram- och återkoppling

#### Framkoppling:



- mätning av störning,  $T_{in}$ .
- kompensering av störning i  $Q(s)$

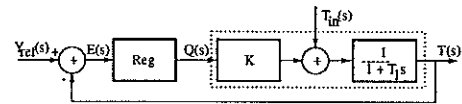
#### Återkoppling:



- mätning av reglerad variabel,  $T$ .
- reglering till önskat värde

## Enkel reglering IV

### Proportionell reglering



#### P-reglering:

$$u(t) = K_c e(t) = K_c (y_{ref}(t) - y(t))$$

i vårt fall är  $Q(t) = u(t)$  och  $y(t) = T(t)$ .  
OBS!  $K_c$  är regulatorns förstärkning.

$$T(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} K_c (Y_{ref}(s) - T(s)) + \frac{1}{T_1 s + 1} T_{in}(s)$$

Alla  $T$  på vänster hand!

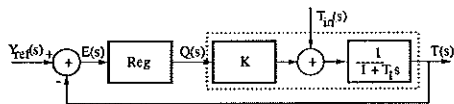
$$(1 + \frac{K K_c}{T_1 s + 1}) T(s) = \frac{K K_c}{T_1 s + 1} Y_{ref}(s) + \frac{1}{T_1 s + 1} T_{in}(s)$$

Ta bort alla nämnare!

$$(T_1 s + 1 + K K_c) T(s) = K K_c Y_{ref}(s) + T_{in}(s)$$

## Enkel reglering V

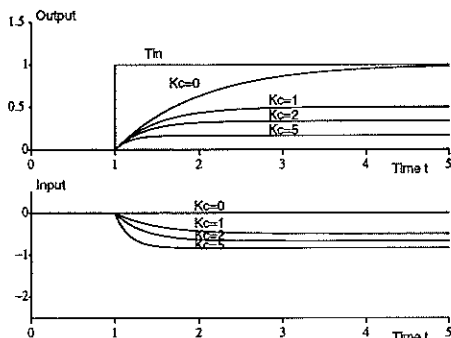
### Proportionell reglering



Lös ut  $T$ !

$$T(s) = \frac{K K_c}{T_1 s + 1 + K K_c} Y_{ref}(s) + \frac{1}{T_1 s + 1 + K K_c} T_{in}(s)$$

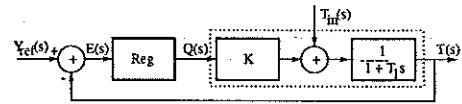
- 1:a ordnings system från  $y_{ref}$  till  $T(t)$
- 1:a ordnings system från  $T_{in}$  till  $T(t)$



( $K = 1$  och  $T_1 = 1$ )

## Enkel reglering VI

### Proportionell-Integrerande reglering



#### PI-reglering:

$$u(t) = K_c (e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau)$$

i vårt fall är  $Q(t) = u(t)$  och  $e(t) = Y_r(t) - T(t)$ .

Laplaceformen av  $PI$ -regulatorn:

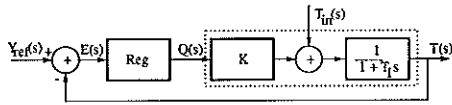
$$U(s) = K_c (1 + \frac{1}{T_i s}) E(s) = K_c \frac{T_i s + 1}{T_i s} E(s)$$

Räkna ut det återkopplade systemet

$$T(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} K_c \frac{T_i s + 1}{T_i s} (Y_{ref}(s) - T(s)) + \frac{1}{T_1 s + 1} T_{in}(s)$$

## Enkel reglering VII

Proportionell-Integrerande reglering



Alla  $T$  på vänster hand!

$$\left(1 + \frac{KK_c}{T_1 s + 1} \frac{T_i s + 1}{T_i s}\right) T(s) = \frac{KK_c}{T_1 s + 1} \frac{T_i s + 1}{T_i s} Y_{ref}(s) + \frac{1}{T_1 s + 1} T_{in}(s)$$

Ta bort alla nämnare!

$$(T_1 s(T_1 s + 1) + KK_c) T(s) = KK_c Y_{ref}(s) + (T_i s) T_{in}(s)$$

Lös ut  $T!$

$$T(s) = \frac{KK_c}{T_1 T_1 s^2 + T_1 s + KK_c} Y_{ref}(s) + \frac{T_i s}{T_1 T_1 s^2 + T_1 s + KK_c} T_{in}(s)$$

- 2:a ordnings system från  $y_{ref}$  till  $T(t)$  och från  $T_{in}$  till  $T(t)$

## Enkel reglering IX

Sammanfattning

**P-reglering:**

- Minska störningars inverkan
- Insvängningshastigheten ändras
- Stationära fel

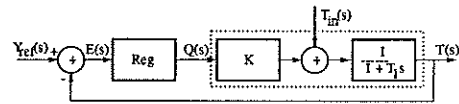
**PI-reglering:**

- Tar bort stationära fel
- Insvängningen kan börja oscillera

(gäller för detta fall)

## Enkel reglering VIII

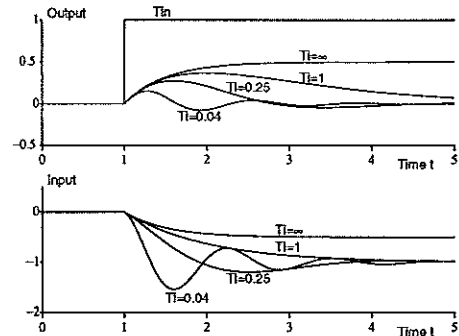
Proportionell-Integrerande reglering



Återkopplat system med **PI-reglering**

$$T(s) = \frac{KK_c}{T_1 T_1 s^2 + T_1 s + KK_c} Y_{ref}(s) + \frac{T_i s}{T_1 T_1 s^2 + T_1 s + KK_c} T_{in}(s)$$

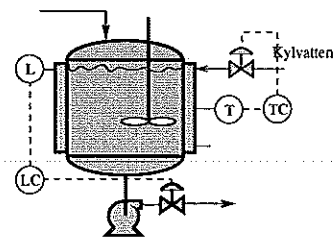
- Temperaturen ställer in sig på  $y_{ref}$
- Störningar kompenseras



( $K = 1$  och  $T_1 = 1$  samt  $K_c = 1$ )

## Stationära fel I

Nivåreglering



Nivådynamik. (se föreläsning2: OH-Tankreaktor II)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (q_{in} - q)$$

Laplacetransform

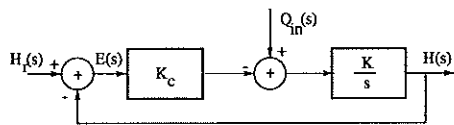
$$H(s) = \frac{K}{s} (Q_{in}(s) - Q(s))$$

(där  $K = \frac{1}{A}$ )

Överföringsfunktionen  $G_{Q \rightarrow H} = \frac{-K}{s}$   
"Processen" är en integrator!

## Stationära fel II

### Nivåreglering



Nivådynamik med **P-regulator**.

$$H(s) = \frac{K}{s} (Q_{in}(s) - K_c(H_r(s) - H(s)))$$

Lös ut  $H(s)$

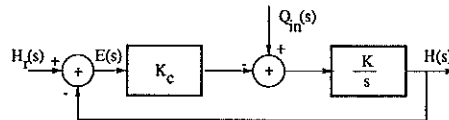
$$H(s) = \frac{1}{s - KK_c} (K Q_{in}(s) - KK_c H_r(s))$$

- Pol i  $KK_c$ . Vad betyder det?
- $K_c < 0$ . Varför då?
- Inget stationärt fel vid ändringar av  $H_r$
- Stationärt fel vid ändringar av  $Q_{in}$

(Vad är tidskonstant och statisk förstärkning i de olika överföringsfunktionerna)

## Stationära fel III

### Nivåreglering



Vi kan även uttrycka

- **reglerfelet**,  $E(s) = H_r(s) - H(s)$

$$\begin{aligned} E(s) &= \left(1 + \frac{KK_c}{s - KK_c}\right) H_r(s) + \frac{K}{s - KK_c} Q_{in}(s) \\ &= \frac{s}{s - KK_c} H_r(s) + \frac{K}{s - KK_c} Q_{in}(s) \end{aligned}$$

- **styrsignal**,  $U(s) = K_c E(s)$

$$U(s) = \frac{K_c s}{s - KK_c} H_r(s) + \frac{K_c K}{s - KK_c} Q_{in}(s)$$

(Vad är tidskonstant och statisk förstärkning i de olika överföringsfunktionerna)

## Stationära fel IV

### Nivåreglering

Slutvärdesteoremet säger:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$\text{Reglerfelet: } E(s) = \frac{s}{s - KK_c} H_r(s) + \frac{K}{s - KK_c} Q_{in}$$

- $H_r$  är ett steg

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot s}{s - KK_c} H_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot s}{s - KK_c} \frac{1}{s} = 0$$

- $H_r$  är en ramp

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot s}{s - KK_c} H_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot s}{s - KK_c} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{-KK_c}$$

- $Q_{in}$  är ett steg

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot K}{s - KK_c} Q_{in}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot K}{s - KK_c} \frac{1}{s} = \frac{1}{-K_c}$$

- $Q_{in}$  är en ramp

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot K}{s - KK_c} Q_{in}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot K}{s - KK_c} \frac{1}{s^2} \rightarrow \infty$$

(Tolka!!!)

## Stationära fel V

### Sammanfattning

Integratorns placering

- Integrator i regulator eller process tar bort stationära fel map referenssignal
- Integrator i regulatorn tar bort stationära fel map störningar
- (se diskussion sid 108-110)

Nivåreglering mha utflödet

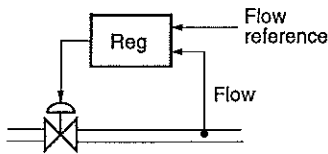
- Negativ förstärkning
- Reverserad verkan

Nivåreglering mha inflödet

- Positiv förstärkning
- Direkt verkan
- (samma analys som ovan)

## Känslighet I

### Reglerventil



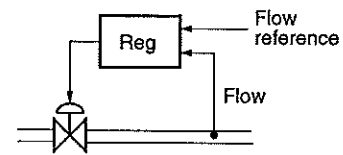
En enkel modell för reglerventilen

$$q = C_v f(z) \sqrt{\frac{\Delta p_v}{g}}$$

- $\Delta p_v$ , tryckdifferens över ventil
- $C_v$  bestämmer storleken på ventilen
- $f(z)$  bestäms av ventilkonstruktionen
- Ventilpositionering,  $u \rightarrow z$ , görs
  - pneumatiskt (tryckluft)
  - motor (elektisk)

## Känslighet II

### Flödesreglering



Antag:

- För en ventil gäller  $q = K_v f(z)$
- Ventilens konstruktionen ger  $f(z) = z^2$
- $K_v = 1$
- Studera stationäritet,  $z = u$

Example 4.2: P-reglering

$$y_r = e + y = \frac{u}{K} + y = \frac{\sqrt{y}}{K} + y = f_1(y)$$

Linjärisering

$$\Delta y = \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^{-1} \Delta y_r = \frac{1}{\frac{1}{2K\sqrt{y}} + 1} \Delta y_r = \frac{2K\sqrt{y}}{1 + 2K\sqrt{y}} \Delta y_r$$

Om  $K$  är stort är överföring nästan 1  
**Okänslig för ventilkarakteristik!**

## Känslighet III

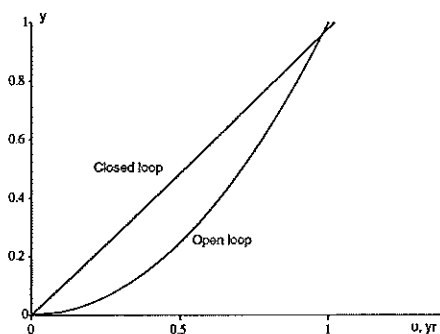
### Flödesreglering

- Bara ventil (öppet system)

$$\Delta y = 2K \Delta u$$

- P-reglering (slutet system)

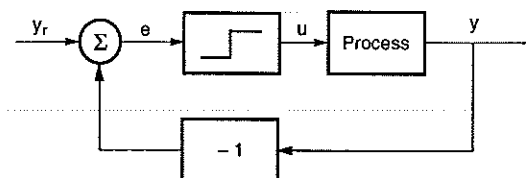
$$\Delta y = \frac{2Ku}{1+2Ku} \Delta y_r$$



**Återkoppling gör systemet okänsligt för ventilkarakteristik!**

## På/Av-reglering I

### Principer



Mycket enkel form av reglering

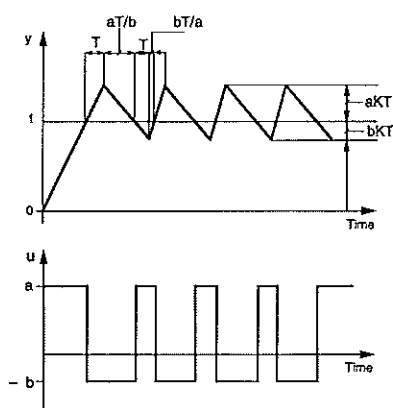
- Regulator:

$$u = \begin{cases} u_{max} & ; e > 0 \\ u_{min} & ; e < 0 \end{cases}$$

- Styrdonet är ett relä eller strömbrytare
- Ex: Temperaturreglering med *termostat*

## På/Av-reglering II

### Egenskper



Ex: integrator med tidsfördröjning

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ku(t - T)$$

- Oscillerar alltid
- Periodtid  $T_p = T(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a})$   
(där  $a = u_{max}$  och  $b = -u_{min}$ )
- Top-till-top värde ("∝ amplitud")  
 $A = (a + b)KT$

## På/Av-reglering III

### Modifieringar

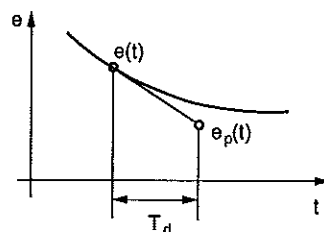
Integrator med tidsfördröjning

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ku(t - T)$$

- Oscillerar alltid
- Top-till-top värde ("∝ amplitud")  
 $A = (a + b)KT$
- "Tröga" system (stora T) ger stora A.  
**Stora svängningar!**

⇒ Åtgärd: *Prediktion av reglerfel*

$$e_p(t) = e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$



## På/Av-reglering IV

### Modifieringar

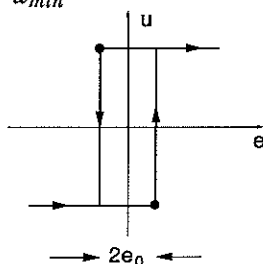
Integrator med tidsfördröjning

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ku(t - T)$$

- Oscillerar alltid
- Periodtid  $T_p = T(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a})$   
(där  $a = u_{max}$  och  $b = -u_{min}$ )
- "Snabba" system (små T) ger kort periodtid. **Knatter!**

⇒ Åtgärd: *Relä med hysteres*

$$u = \begin{cases} u_{max} & ; e > e_0 \\ u_0 + \frac{e}{2e_0}(u_{max} - u_{min}) & ; |e| \leq e_0 \\ u_{min} & ; e < -e_0 \end{cases}$$

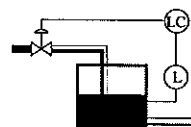


## PROCESSREGLERING

### Sammanfattning

Föreläsning 5: Återkopplade system I

- Blockdiagramalgebra
- Enkla regulatorer
  - P- och PI-reglering
  - På/Av-reglering
- Analys av återkopplade system
  - I-del i regulator tar bort stationära fel
  - Känsligheten minskar vid återkoppling
  - Direkt och reverserad reglerverkan
- Reglerexempel:
  - Temperatur, nivå, flöde



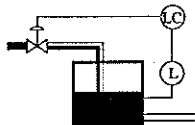




## PROCESSREGLERING

—

### Återkopplade system II



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

### Dagens föreläsning

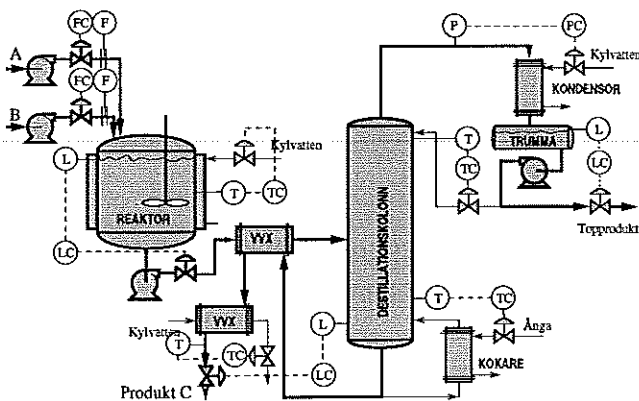
#### Föreläsning 6: Återkopplade system II Stabilitet och egenskaper

- Stabilitet
- PID-reglering
- Analys av ett återkopplat system
  - dynamik
  - störningsreduktion
  - robusthet

PC: kap 4.4 p 117-122

## Dynamik i kemiska processer

### Processexempel 1



Egenskaper hos ett reglersystem?

- Dynamik
- Störningsreduktion och stationära fel
- Stabilitet och robusthet

Detta är vad denna föreläsning handlar om

## Stabilitet I

### Definitioner

#### Definition 1 - Asymptotisk stabilitet

Ett system är asymptotiskt stabilt om  $y(t) \rightarrow 0$  då  $t \rightarrow \infty$  för alla initialvärden då  $u(t) = 0$ .

#### Definition 2 - Stabilitet

Ett system är stabilt om  $y(t)$  är begränsad för alla initialvärden då  $u(t) = 0$ .

#### Definition 3 - Instabilitet

Ett system är instabilt om det finns något initialvärde som ger en obegränsad utsignal även om  $u(t) = 0$ .

#### Definition 4 - Insignal-utsignal stabilitet

Ett system är insignal-utsignal stabilt om en begränsad insignal ger en begränsad utsignal för alla initialvärden.

Tolka!!!

## Stabilitet II

### Definitioner

#### Linjära system:

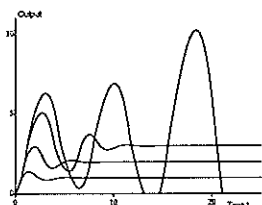
- Stabilitet är en systemegenskap
- Asymptotisk stabilitet starkaste

I fortsättningen:

"Stabilitet" = Asymptotisk stabilitet

#### Olinjära system:

- Stabilitet gäller bara en lösning
- Ingen systemegenskap



## Stabilitetstester I

### Metoder

Kategorisering:

- Direkta metoder
  - Lösning av karakteristiska ekvationens rötter
- Indirekta metoder
  - Routh's algoritim
  - Nyquistkriteriet (föreläsning 12)

Två problem:

- Är det slutna systemet stabilt?
- Vad kan jag göra om det är instabilt?

## Stabilitetstester II

### Direkta metoder

#### 1:a ordningens system:

$$G(s) = \frac{b}{s + a}$$

Asymptotiskt stabilt för alla  $a > 0$ .

#### 2:a ordningens system:

$$G(s) = \frac{b_1s + b_2}{s^2 + a_1s + a_2}$$

Asymptotiskt stabilt för alla  $a_i > 0$ .

#### 3:e ordningens system:

$$G(s) = \frac{b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

Asymptotiskt stabilt om  $a_i > 0$  och  $a_1a_2 > a_3$ .

## Stabilitetstester III

### Routh's algoritim

Routh-1875

$$\begin{aligned} A(s) &= a_0s^n + b_0s^{n-1} + a_1s^{n-2} + b_1s^{n-3} + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Koefficienterna reella samt  $a_0 > 0$
- Faktorera  $A(s)$  i  $s + \alpha$  eller  $s^2 + \beta s + \gamma$   
Varje faktor stabil om koefficienterna positiva
- Nödvändigt villkor (men ej tillräckligt):  
Alla koefficienter i  $A(s)$  måste vara positiva

## Stabilitetstester IV

Routh's algoritm

$$A(s) = a_0s^n + b_0s^{n-1} + a_1s^{n-2} + b_1s^{n-3} + \dots = 0$$

1. Bilda tabellen

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots \\ d_0 & d_1 & d_2 & \dots \\ \vdots & & & \end{array}$$

2. Nya raden ur de två föregående

$$\begin{array}{l} c_0 = a_1 - a_0b_1/b_0 \\ c_1 = a_2 - a_0b_2/b_0 \\ \vdots \\ c_i = a_{i+1} - a_0b_{i+1}/b_0 \\ \vdots \end{array}$$

3. Bilda  $n + 1$  rader

## Stabilitetstester V

Routh's algoritm

### Teorem 1 - Routh's stabilitetstest

Antalet teckenväxlingar i  $a_0, b_0, c_0, d_0, \dots$  (dvs i första kolumnen i tabellen) är lika med antalet rötter till  $A(s)$  som ligger i högra halvplanet.

Formelsamlingen sid 14 eller PC: sid 119-121

## Stabilitetstester VI

Exempel 4.6

Hur många rötter har polynomet  $A(s)$  i HHP?

$$A(s) = s^5 + 2s^4 + 10s^3 + 30s^2 + 100s + 360 = 0$$

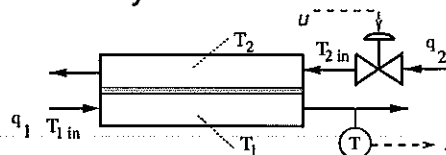
Tabellen blir

$$\begin{array}{l} a: \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 10 \quad 100 \\ b: \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 30 \quad 360 \\ c: \quad \quad 10 - 1\frac{30}{2} = -5 \quad 100 - 1\frac{360}{2} = -80 \quad 0 \\ d: \quad \quad 30 - 2\frac{-80}{-5} = -2 \quad 360 - 2\frac{0}{-5} = 360 \\ e: \quad -80 - (-5)\frac{360}{-2} = -980 \quad 0 - (-5)\frac{0}{-2} = 0 \\ f: \quad 360 - (-2)\frac{0}{-980} = 360 \end{array}$$

- 6 rader ( $n+1$ )
- första kolonnen: 1, 2, -5, -2, -980, 360
- Två teckenbyten  $\Rightarrow$  Två rötter i HHP

## Värmeväxlar-reglering I

Fysikalisk modell



En förenklad modell diskuteras i föreläsning 2 - OH-Värmeväxlare II. Antag att varje sida är en väl omrörd kontrollvolym med konstant volym.

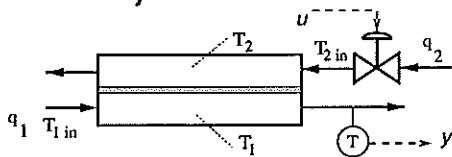
(OBS! en ganska grov approximation för "vanliga" vvx)

Två kopplade differentialekvationer för de båda temperaturerna.

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{q_1}{V_1}(T_{1,in} - T_1) - \frac{kA}{\rho_1 V_1 C_{p1}}(T_1 - T_2) \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{q_2}{V_2}(T_{2,in} - T_2) + \frac{kA}{\rho_2 V_2 C_{p2}}(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

## VVX-reglering II

Linjär tillståndsform



Låt oss reglera  $T_1$  genom att styra  $q_2$ .  
Viktiga störningar är  $T_{1,in}$  och  $q_1$ .

Linjärisera och gör variabelbyte:

$$x_1 = T_1 - T_1^0; \quad x_2 = T_2 - T_2^0; \quad u = q_2 - q_2^0$$

$$v_1 = q_1 - q_1^0 \text{ och } v_2 = T_{1,in} - T_{1,in}^0.$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(\frac{q_1}{V_1} + \frac{kA}{\rho_1 V_1 C_{p1}}\right)x_1 + \frac{kA}{\rho_1 V_1 C_{p1}}x_2$$

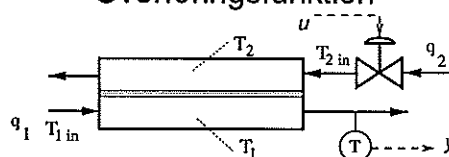
$$+ \frac{(T_{1,in}^0 - T_1^0)}{V_1}v_1 + \frac{q_1}{V_1}v_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{kA}{\rho_2 V_2 C_{p2}}x_1 - \left(\frac{q_2}{V_2} + \frac{kA}{\rho_2 V_2 C_{p2}}\right)x_2$$

$$+ \frac{(T_{2,in}^0 - T_2^0)}{V_2}u$$

## VVX-reglering III

Överföringsfunktion



Antag att en värmeväxlare har följande parametrar

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Överföringsfunktion:

$$G_{vux}(s) = C [sI - A]^{-1} B + D$$

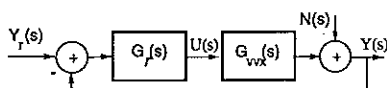
$$= \frac{1}{(s+2)(s+2)-1} = \frac{1}{(s^2+4s+3)}$$

Poler i:

$$p_i = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \Rightarrow p_1 = -3; \quad p_2 = -1$$

## VVX-reglering IV

PI-reglering



$$G_{tot} = \frac{G_r G_{vux}}{1 + G_r G_{vux}}$$

$$G_{tot} = \frac{K_c \frac{s+1/T_i}{s} \frac{1}{(s^2+4s+3)}}{1 + K_c \frac{s+1/T_i}{s} \frac{1}{(s^2+4s+3)}}$$

$$= \frac{K_c (s+1/T_i)}{s(s^2+4s+3) + K_c (s+1/T_i)}$$

Nämnarpolynomet blir nu

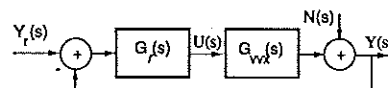
$$A(s) = s^3 + 4s^2 + (3 + K_c)s + K_c/T_i$$

Stabilt om (3:e ordn. syst.  $a_1 a_2 > a_3$ )

$$3 + K_c > 0; \quad 4(3 + K_c) > K_c/T_i$$

## VVX-reglering V

Stabilitet med PI



Stabilitetskravet är

$$4(3 + K_c) > K_c/T_i$$

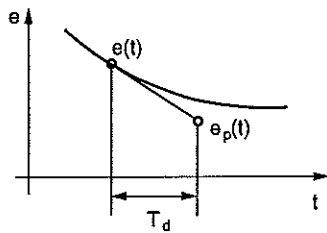
Vilket ger:

- PI-regulatorn  $K_c = 1$  och  $T_i = 0.1$  gör det återkopplade systemet **stabilt**
- PI-regulatorn  $K_c = 10$  och  $T_i = 0.1$  gör det återkopplade systemet **instabilt**
- PI-regulatorn  $K_c = 1$  och  $T_i = 0.05$  gör det återkopplade systemet **instabilt**

**Olämpligt val av regulatorparametrar kan göra en stabil "process" instabil vid återkoppling.**

## PID-reglering I

Deriverande reglering



Deriverande del (prediktion)

$$D(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}$$

D-del förekommer i PD och PID

PD-reglering

$$u(t) = K_c(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt})$$

PID-reglering

$$u(t) = K_c(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt})$$

(PD-regulatorer är inte så vanliga i processillämpningar)

## PID-reglering II

Överföringsfunktion

PID-reglering

$$u(t) = K_c(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt})$$

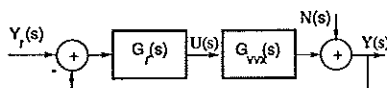
Överföringsfunktionen från  $E$  till  $U$

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{E(s)} = G_{PID} &= K_c(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s) \\ &= K_c \frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s} \\ &= K_c T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + 1 + \frac{1}{T_i T_d}}{s} \end{aligned}$$

- pol i origo,  $p_1 = 0$ , (integrator)
- nollställe i  $z_{1,2} = \frac{1}{T_d}(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{T_d}{T_i}})$ 
  - ( $T_i < 4T_d$  ger reella nollställena)
  - Fler nollställe än poler.

## VVX-reglering VI

PID-reglering



$$G_{tot} = \frac{G_r G_{vvx}}{1 + G_r G_{vvx}}$$

$$\begin{aligned} G_{tot} &= \frac{K_c T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i}}{s} \frac{1}{(s^2 + 4s + 3)}}{1 + K_c T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i}}{s} \frac{1}{(s^2 + 4s + 3)}} \\ &= \frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} \end{aligned}$$

Nämnarpolynomet blir nu

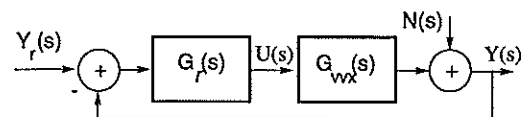
$$A(s) = s^3 + (4 + K_c T_d)s^2 + (3 + K_c)s + K_c/T_i$$

Stabilt om

$$(4 + K_c T_d)(3 + K_c) > K_c/T_i$$

## VVX-reglering VII

Stabilitet med PID



- PI-regulatorn  $K_c = 10$  och  $T_i = 0.1$  gör det återkopplade systemet **instabilt**
- PID-regulatorn  $K_c = 10$ ,  $T_i = 0.1$  med  $T_d > \frac{48}{120} = 0.4$  gör det återkopplade systemet **stabilt**

**D-delen förbättrar "stabiliteten"!**

## VVX-reglering VIII

### Styrsignalanalys

Styrsignalens egenskaper för olika insignaler

$$U = G_r(Y_{ref} - (N + G_{vux}(V + U)))$$

Lös ut U!

$$U = \frac{G_r}{1 + G_r G_{vux}}(Y_{ref} - N) - \frac{G_r G_{vux}}{1 + G_r G_{vux}}V$$

Vilket ger 3 överföringsfunktioner

$$U = \frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})(s^2 + 4s + 3)}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} Y_{ref} - \frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})(s^2 + 4s + 3)}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} N - \frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} V$$

## VVX-reglering IX

### Styrsignalanalys

Styrsignalens egenskaper för laststörning V

$$U = -\frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} V$$

Slutvärdesteoremet säger för  $V = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} \\ &= -\frac{K_c T_d \frac{1}{T_d T_i}}{K_c T_d \frac{1}{T_d T_i}} = -1 \end{aligned}$$

Styrsignalen eliminerar störningen V om systemet ställer in sig.

*Detta påstående gäller BARA om regulatorparametrarna ger ett stabilt system! (se stabilitetstester ovan)*

## VVX-reglering X

### Styrsignalanalys

Styrsignalens egenskaper för mätbrus N

$$U = -\frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})(s^2 + 4s + 3)}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} N$$

Begynnelsevärdesteoremet säger för  $N = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} -s \frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})(s^2 + 4s + 3)}{s(s^2 + 4s + 3) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} -s \frac{K_c T_d s^2 s^2}{s s^2} = -\infty \end{aligned}$$

Styrsignalen är mycket känslig för mätbrus. **D-del gör styrsignalen känsligare för mätbrus**

## VVX-reglering XI

### Robusthetsanalys

**Robusthet** innebär att systemet bibehåller egenskaper vid störningar och parametervariationer.

- Reglera vvx:en med en PID med  $K_c = 10, T_i = 0.1, T_d = 0.5$  (stabilt enligt ovan)
- Antag att  $q_1$  halveras, tex  $G_{vux} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$
- Nytt  $A(s) = s(s^2 + 3s + 1) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})$
- Parametervariationen pga  $q_1$  gör systemet **instabilt!**  
*Det är inte robust för denna typ av störning.*

## Enkel reglering

### Sammanfattning

- **På/Av-reglering**
  - mycket enkel, "strömbrytare" kan vara styrdon
  - oscillerar alltid
- **PID-reglering**
  - **P-del:** ökar snabbhet, minskar fel
  - **I-del:** eliminerar stationära fel, minskar "stabiliteten"
  - **D-del:** ökar "stabiliteten", gör styrsignalen känslig

## Analys av reglersystem

### Sammanfattning

Analys av reglersystem görs för att avgöra

- **Störningsreduktion**

Om och hur snabbt störningar behandlas i reglersystemet
- **Stabilitet**

För vilka parametrar är systemet stabilt
- **Dynamik**

Vilket dynamiskt beteende får det återkopplade systemet
- **Känslighet och robusthet**

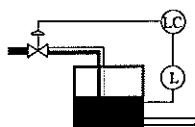
Hur ändras dynamik och stabilitet för stora störningar och parametervariationer.

## PROCESSREGLERING

### Sammanfattning

Föreläsning 6: Återkopplade system II

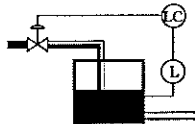
- **Stabilitet**
  - 1:a, 2:a och 3:e ordn. system
  - Routh's algoritm för högre ordn
- **D-del i PID-regulatorn**
- **Analys av återkopplade system**
  - Stabilitet
  - Styrsignalanalys
  - Robusthet
- **Reglerexempel**
  - Värmeväxlarreglering





## PROCESSREGLERING

### PID-regulatorn



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

### Dagens föreläsning

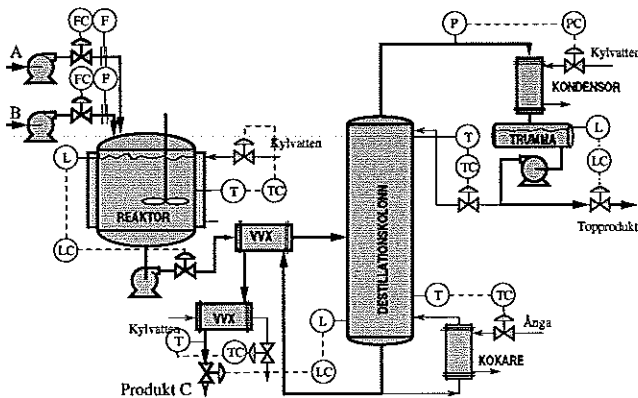
#### Föreläsning 7: PID-regulatorn Förverkligande och inställning

- PID-reglering
- Praktiska modifieringar
  - Proportionalband och  $\beta$
  - Derivering av filtrerad mätning
  - Integratoruppvridning
- Inställningsmetoder
  - Empiriska
  - Modellbaserade
  - Automatiska

PC: kap 5.1-5 p 126-150

## Reglering av kemiska processer

### Processexempel 1



Processen regleras med 10 regulatorer

- PI- och PID-regulatorer
- Praktiska modifieringar av PID
- Inställningsmetoder av PID

Detta är vad denna föreläsning handlar om

## PID-regulatorn

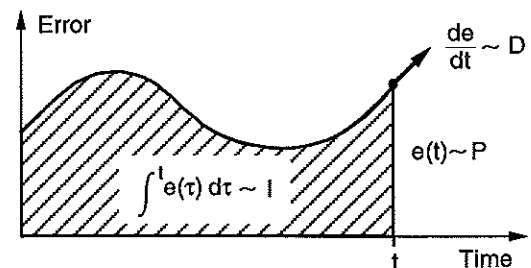
### Läroboksformen

"Läroboksformen" av en PID-regulator

$$u(t) = K_c \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$= P + I + D$$

- Dominerande typen av regulator
- 90 - 95 % är PID-regulatorer
- D-del ofta urkopplad





## Praktiska modifieringar I

### Proportionaldel

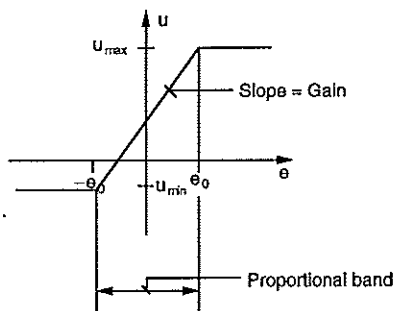
P-regulator:

- Bias (nollägesjustering):  $u_b$

$$u_p = K_c(u_c - y) + u_b = K_c e + u_b$$

- Proportionalband:  $p_B$

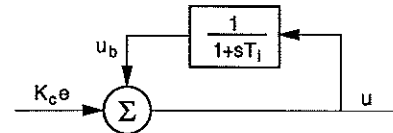
$$K_c = \frac{u_{max} - u_{min}}{p_B}$$



## Praktiska modifieringar II

### Integraldel

- Automatisk nollägesjustering



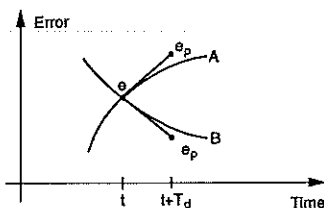
$$U = K_c E + \frac{1}{1 + sT_i} U \Rightarrow U = K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) E$$

- $T_i$  - integration time or reset time
- Flytande reglering - bara I-del

## Praktiska modifieringar III

### Derivatadel

- Prediktion



- Maximal derivataförstärkning,  $N$
- Derivera bara på mätsignalen  $y$

D-del med filtrering av mätsignal

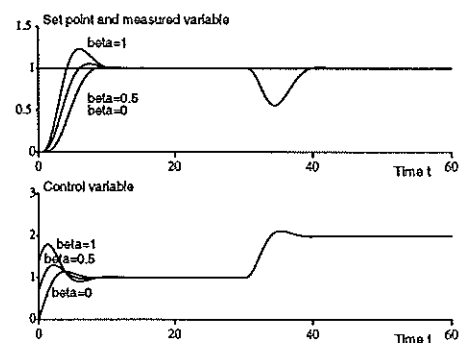
$$sT_d E(s) \approx \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} Y(s)$$

## Praktiska modifieringar IV

### Referensvärdesändringar

- P-delen med viktad  $U_c$ ,  $(\beta U_c - Y)$
- D-delen med viktad  $U_c$ ,  $(\gamma U_c - Y)$
- Två nya parametrar,  $\beta$  och  $\gamma$  för att ställa in **servo**-beteende

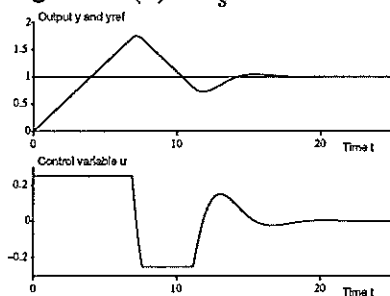
$$U = K_c \left[ (\beta U_c - Y) + \frac{1}{sT_i} (U_c - Y) + \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} (\gamma U_c - Y) \right]$$



## Praktiska modifieringar V

### Integratoruppvriddning

PI-reglering av  $G(s) = \frac{1}{s}$



Orsak:

- Styrsignalen är begränsad men det vet inte regulatormen om.
- I-delen integrerar fel orsakad av fel styrsignal (och inte av "processen")

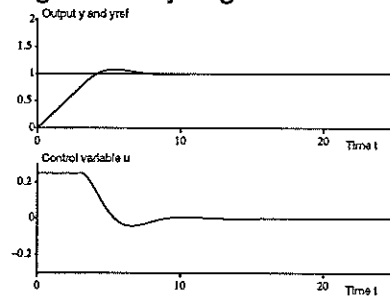
Åtgärd:

- I-delen måste modifieras då styrsignalen är begränsad ("mättad")

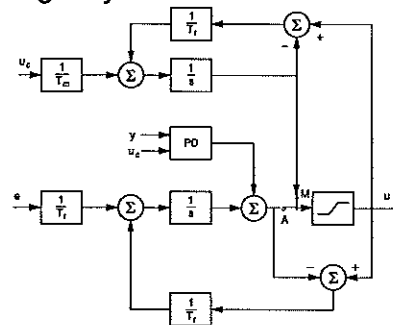
## Praktiska modifieringar VI

### I-del med följning

PI-reglering med följning



PID-regulator med manuell mode och uppvriddningsskydd



## Praktiska modifieringar VII

### Stötfri övergång

Problem: Stötar i styrsignalen

Orsak:

1. Manuellt inställd styrsignal är skiljd ifrån regulatorns styrsignal vid inkoppling.
2. Nya regulatorparametrar ger en ny styrsignal vid parameterbyte

Åtgärder:

- I manuell mode är I-delen i följning (som vid styrsignalbegränsning)
- Vid parameterbyte måste I-del korrigeras för att inte ge styrsignalstöt

## Praktisk PID-regulator

### Sammanfattning

- PID:n 3 parametrar,  $K_c, T_i, T_d$
- Nya parametrar
  - Proportionalband,  $p_B, u_{min}, u_{max}$
  - Maximal derivataförstärkning,  $N$
  - Viktade referenser,  $\beta, \gamma$
  - (Reverserad verkan,  $R$ )
- Praktiska krav
  - Integratoruppvriddningsskydd,  $T_r$
  - Stötfria övergångar,  $T_m$
- Implementationsformer
  - Parallell och seriell
  - Inkrementell
- Praktisk PID har 15-20 parametrar

## Inställningsmetoder I

### PID-inställning

- Manuella inställningsregler
- Empiriska regler baserade på enkla experiment
  - Ziegler-Nichols stegsvarmetod
  - Ziegler-Nichols självsvängningsmetod
  - *det finns fler enkla metoder*
- Modellbaserade metoder
  - Polplacering
  - Faskompensering (föreläsning 12)
  - *det finns fler modellbaserade metoder*
- Automatiska metoder

## Inställningsmetoder II

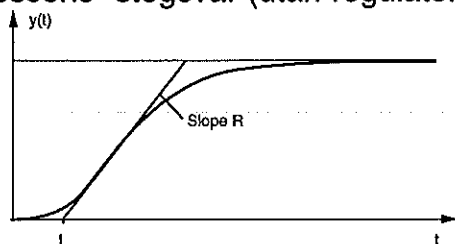
### Manuell inställning

- **Snabbhet:**
  - P: Ökar med *högre*  $K_c$
  - I: Ökar med *lägre*  $T_i$
  - D: Ökar med *högre*  $T_d$
- **Laststörningsreduktion:**
  - P: Mindre fel och fortare med *högre*  $K_c$
  - I: Fel tas bort, fortare med *lägre*  $T_i$
  - D: (relativt små effekter)
- **Stabilitet:**
  - P: Mindre med *högre*  $K_c$
  - I: Mycket mindre med *lägre*  $T_i$
  - D: Större med *högre*  $T_d$
- **Mätbruskänslighet:**
  - P: Högre med *högre*  $K_c$
  - I: (relativt små effekter)
  - D: Mycket högre med *högre*  $T_d$

## Inställningsmetoder III

### Stegsvarmetod

"Processens" stegsvar (utan regulator)



Ziegler-Nichols inställningsregler

Regulator type	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3L$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$0.5L$

- Ur stegsvar fås:  $a = RL$
- Användbart om  $0.15 < L/T < 0.6$

## Inställningsmetoder IV

### Självsvängningsmetod

Självsvängningsexperiment:

1. Koppla in en P-regulator
2. Vrid upp  $K_c$  till självsvängning
3. Bestäm regulatorns förstärkning  $K_u$  och självsvängningsperioden  $T_u$
4. Använd tabellen

Ziegler-Nichols inställningsregler

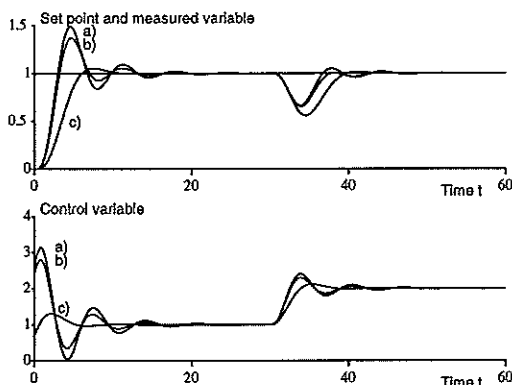
Regulator type	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_u$		
PI	$0.45K_u$	$T_u/1.2$	
PID	$0.6K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$

## Inställningsmetoder V

### Praktisk PID inställning

Praktisk regulatorinställning:

1. Gör Z-N stegsvarsmetod
2. Fininställ manuellt



"Process":  $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$

- a) Stegsvarsmetoden;
- b) Självsvängningsmetoden;
- c) Manuell

## Inställningsmetoder VI

### Polplacering

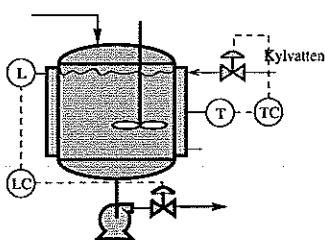
- Tag fram en linjär modell av "processen"
- Välj en regulator typ
- Bestäm det återkopplade systemets karaktäristiska polynom via

$$G = \frac{G_{reg} G_{proc}}{1 + G_{reg} G_{proc}}$$

- Välj önskad polplacering (önskat beteende)
- Beräkna regulators parametrar
  - Lika många parametrar som poler  $\Rightarrow$  entydigt ekvationssystem
  - Färre parametrar  $\Rightarrow$  ej godtycklig polplacering

## Nivåreglering I

### Fysikalisk modell



Nivådynamik. (se föreläsning2: OH-Tankreaktor II)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(q_{in} - q)$$

Laplace transform

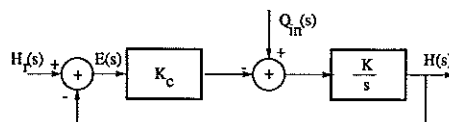
$$H(s) = \frac{K}{s}(Q_{in}(s) - Q(s))$$

(där  $K = \frac{1}{A}$ )

Överföringsfunktionen  $G_{Q \rightarrow H} = \frac{-K}{s}$

## Nivåreglering II

### Polplacering med P-regulator



- Återkoppla med en **P-regulator**.

$$H(s) = -\frac{K}{s} K_c (H_r(s) - H(s))$$

- Slutna systemets överföringsfunktion från  $H_r$  till  $H$  med **P-regulator**.

$$G_{tot}(s) = -\frac{K K_c}{s - K K_c}$$

- Välj pol;  $p_1 = -1$
- Detta ger

$$K_c = \frac{-1}{K} \quad (= -A)$$

## Nivåreglering III

Polplacering med PI-regulator

- Återkoppla med en **PI-regulator**.

$$H(s) = -\frac{K}{s} K_c \frac{s + 1/T_i}{s} (H_r(s) - H(s))$$

- Slutna systemets överföringsfunktion från  $H_r$  till  $H$  med **PI-regulator**.

$$G_{tot}(s) = -\frac{K K_c (s + 1/T_i)}{s^2 - K K_c (s + 1/T_i)}$$

- Välj poler;  $p_i = \omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2})$   
tex  $\zeta = 0.7$  och  $\omega_0 = 2K$

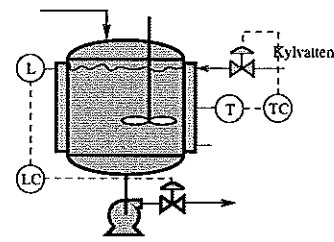
- Detta ger

$$K_c = 2\zeta\omega_0/(-K) \quad (= -4\zeta = 2.8)$$

$$T_i = \frac{-K K_c}{\omega_0^2} \quad (= \frac{2\zeta}{\omega_0} = 0.7A)$$

## Temperaturreglering I

Fysikalisk modell



En förenklad modell är en modifierad vvx-modell (föreläsning 2 och 6).

Antag att varje sida är en väl omrörd kontrollvolym med konstant volym.

Två kopplade differentialekvationer för de båda temperaturerna.

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{q_r}{V_r} (T_{in} - T_r) - \frac{kA}{\rho_r V_r C_{pr}} (T_r - T_j)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = \frac{q_j}{V_j} (T_{j,in} - T_j) + \frac{kA}{\rho_j V_j C_{pj}} (T_r - T_j)$$

reaktor - index  $r$ ; mantel - index  $j$ .

## Temperaturreglering II

Linjär tillståndsform

Låt oss reglera  $T_r$  genom att styra  $q_j$ .

Linjärisera och gör variabelbyte:

$$x_1 = T_r - T_r^0; \quad x_2 = T_j - T_j^0; \quad u = q_j - q_j^0$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(\frac{q_r}{V_r} + \frac{kA}{\rho_r V_r C_{pr}}\right)x_1 + \frac{kA}{\rho_r V_r C_{pr}}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{kA}{\rho_j V_j C_{pj}}x_1 - \left(\frac{q_j^0}{V_j} + \frac{kA}{\rho_j V_j C_{pj}}\right)x_2 + \frac{(T_{j,in}^0 - T_j^0)}{V_j}u$$

## Temperaturreglering III

Överföringsfunktion

Antag att en tank har följande parametrar

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.02 \\ 0.1 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.11 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix} x$$

Överföringsfunktion:

$$\begin{aligned} G_{tank}(s) &= C [sI - A]^{-1} B + D \\ &= \frac{1}{(s + 0.1)(s + 0.5) - 0.002} \\ &= \frac{0.05}{(s^2 + 0.6s + 0.048)} \end{aligned}$$

Poler i:

$$p_1 \approx -0.5; \quad p_2 \approx -0.1$$

## Temperaturreglering IV

Polplacering med PID

- Återkoppla med en **PID-regulator**.

$$G_{tot}(s) = \frac{G_{reg} G_{proc}}{1 + G_{reg} G_{proc}}$$

- Slutna systemets överföringsfunktion från  $T_{ref}$  till  $T_r$  med **PID-regulator**.

$$G_{tot} = \frac{K_c T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i}}{s} \frac{1}{(s^2 + 0.6s + 0.048)}}{1 + K_c T_d \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i}}{s} \frac{1}{(s^2 + 0.6s + 0.048)}}$$

$$= \frac{K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})}{s(s^2 + 0.6s + 0.048) + K_c T_d (s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i})}$$

Nämnrpolynomet blir nu

$$A(s) = s^3 + (0.6 + K_c T_d) s^2 + (0.048 + K_c) s + K_c / T_i$$

## Temperaturreglering V

Polplacering med PID

- Välj poler;  $p_1 = \alpha \omega_0$  och  $p_{2,3} = \omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})$
- Detta ger det önskade karakteristiska polynomet:  
 $A(s) = (s + \alpha \omega_0)(s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2)$
- Vilket resulterar i ekvationssystemet

$$0.6 + K_c T_d = \alpha \omega_0 + 2\zeta \omega_0$$

$$(0.048 + K_c) = \omega_0^2 + 2\alpha \zeta \omega_0^2$$

$$K_c / T_i = \alpha \omega_0^3$$

- Regulatorparametrar:

$$K_c = \omega_0^2(1 + 2\alpha\zeta) - 0.048$$

$$T_i = \frac{1}{\alpha \omega_0} (1 + 2\alpha\zeta) - \frac{0.048}{\alpha \omega_0^3}$$

$$T_d = \frac{(\alpha + 2\zeta)\omega_0 - 0.6}{\omega_0^2(1 + 2\alpha\zeta) - 0.048}$$

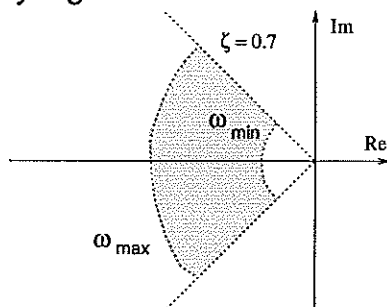
- Exempel:  $\alpha = 1, \zeta = 0.7$  och  $\omega_0 = 1$   
 $K_c = 2.35; T_i = 2.35$  och  $T_d = 0.76$

## Inställningsmetoder VII

Polplacering

Var skall man placera polerna?

- Krav på dämpning ger  $\zeta > 0.7$
- Alla poler ungefär lika snabba  $\alpha = 1$
- Tillåten snabbhet kan begränsas av
  - robusthet (tröga högre ordn.)
  - mätsignal (snabba lägre ordn.)
  - styrsignal

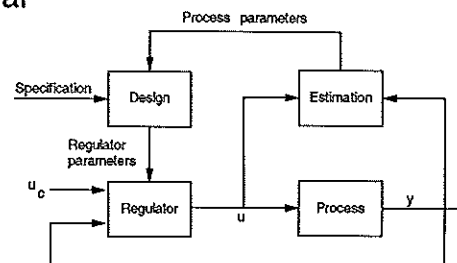


## Inställningsmetoder VIII

Självinställande regulator

Adaptiv reglering bygger på idén att **hela tiden** göra modellbaserad inställning av regulatorn.

- *Estimering* av "processens" parametrar
- *Design* av regulator och dess parametrar



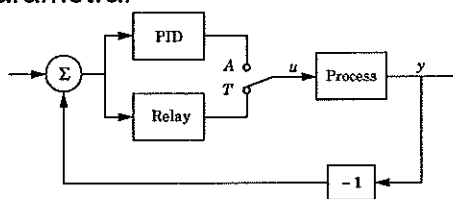
Regulatorn kan adaptiera sig för att klara "processer" med varierande beteende.

## Inställningsmetoder IX

### Automatinställning

Automatinställning bygger på Ziegler-Nichols ide med ett enkelt experiment som bas för regulatorinställning

- Operatören bestämmer när ett reglerexperiment skall göras
- Regulatorn skapar självsvängning med ett relä
- Regulatorn beräknar därefter nya parametrar



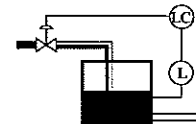
*Regulatorn beräknar sina parametrar på order av operatören.*

## PROCESSREGLERING

### Sammanfattning

#### Föreläsning 7: PID-regulatorn

- Förverkligande
  - Proportionalband
  - Integratoruppridningsskydd
  - Derivering av mätsignal med filter
- Inställningsmetoder
  - Manuella metoder
  - Enkla empiriska metoder
  - Modellbaserade metoder
  - Automatisk inställning
- Reglerexempel
  - Nivå- och temperaturreglering av tank

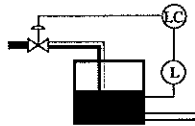




## PROCESSREGLERING

—

### Kopplade regulatorer och Modellbaserade regulatorer



kursprogram: <http://www.control.lth.se/~kurspr>

## Innehåll

### Dagens föreläsning

#### Föreläsning 8: Kopplade regulatorer och Modellbaserade regulatorer

- Kort repetition av LP3
- Schema för LP4
- Kopplade regulatorer, (kap 6)
  - Kaskadreglering
  - Kvotreglering
  - Framkoppling
  - Parameterstyrning
- Modellbaserade regulatorer, (kap 7)
  - Dödtidskompensering
  - IMC och Tillståndsåterkoppling

PC: kap 6 och 7 (7.3 och 7.4 läses översiktligt)

## Repetition I

### Processdynamik

- **Processmodellering** resulterar oftast i ett system med olinjär ODE:er

$$\dot{z} = f(z, u)$$

- **Linjärisering** approximerar den olinjära modellen (variabelbyte  $x = z - z^0$ )

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- **Överföringsfunktion** är Laplacetransformen av en linjär ODE

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D = \frac{B(s)}{A(s)}$$

**Poler** avgör systemets dynamiska egenskaper. (poler är rötter till  $A(s)$ )  
**Nollställe** avgör hur signalen,  $U(s)$ , påverkar systemet. (nollställe är rötter till  $B(s)$ )

## Repetition II

### Analys av återkopplade system

- **Återkoppling**

$$G_{tot} = \frac{G_{reg} G_{proc}}{1 + G_{reg} G_{proc}}$$

- **Återkopplade systemets dynamik**  
Poler och nollställe hos  $G_{tot}$
- **Reglerfel och Styrsignaldynamik**

$$E = \frac{1}{1 + G_{reg} G_{proc}} Y_{ref} + \frac{-G_{proc}}{1 + G_{reg} G_{proc}} V$$

Slutvärdesteoremet.

- **Stabilitet**



## Repetition III

### Regulatorinställning

- **Empiriska inställningsregler**
  - Manuella inställningsregler
  - Ziegler-Nichols
- **Polplacering**
  - Ta fram en överföringsfunktion,  $G_p$
  - Återkoppla,  $G_{tot} = \frac{G_r G_p}{1 + G_r G_p}$
  - Välj polplacering
  - Jämför koefficienterna ger  $K_e, T_i, T_d$
- **Designkrav:**
  - Robusthet, variationer i  $G_p$
  - Styrsignalbegränsningar
  - Mätbrus

## Processreglering

### Schema för LP4

Kursavsnitt före påsk:

#### Processreglersystem:

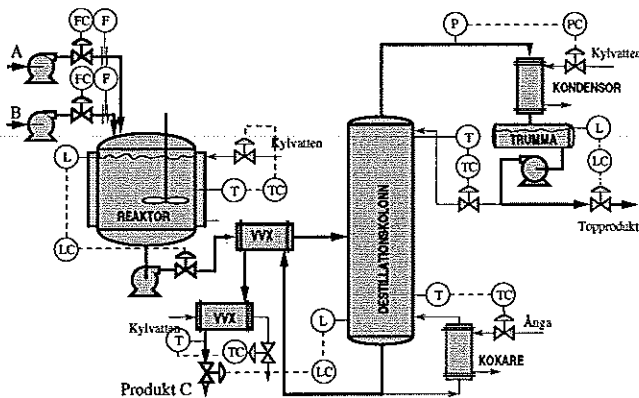
- 8 Kopplade regulatorer (kap 6-7)
- 9 Processreglersystem (utdelat mtrl)
- 10 Multivariabel reglering (kap 9)

Kursavsnitt efter påsk:

- 11 Dator- och sekvensstyrning (kap 8, 10)
- 12 Frekvensmodeller (kap 3.8-9, 4.4)
- 13 Repetition

## Reglering av kemiska processer

### Processexempel 1



Processen regleras med 10 enkla regulatorer

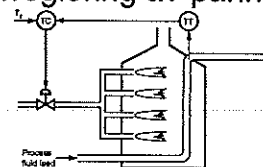
- Bättre reglering med fler mätsignaler?
- Hur kopplar vi ihop regulatorer?

*Detta är vad denna föreläsning handlar om*

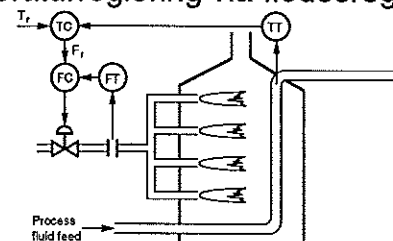
## Kaskadreglering I

### Extra mätsignal

- Temperaturreglering av panna.



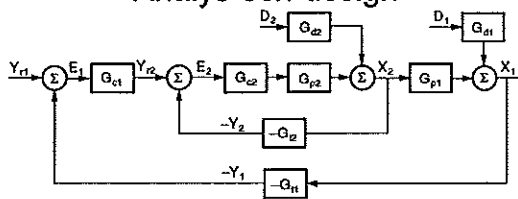
- Temperaturreglering via flödesreglering.



- Flödesregleringen kallas *inre krets* eller **sekundärkrets**
- Temperaturregleringen kallas *yttre krets* eller **primärkrets**

## Kaskadreglering II

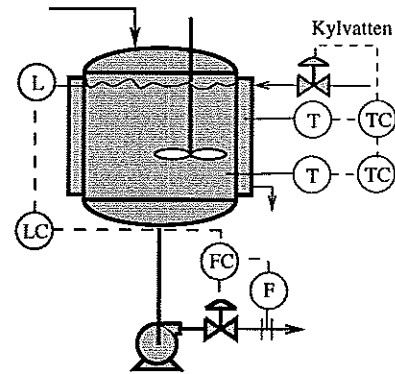
Analys och design



- **Analys:** antag snabb inre krets
  - Inre krets eliminerar  $D_2$
  - Okänslig mot variationer i  $G_{p2}$
  - Yttre krets används för  $D_1$  och  $Y_{r1}$
- **Design:**
  - Inre krets snabbare är yttre
  - Inre krets P(D)-regulator
- *När är kaskad onödig*
  - Tidsfördröjningar eller nollställe i HHP i inre kretsen
  - Viktigaste störningarna i yttre loopen

## Kaskadreglering III

Nivåreglering



Viktiga störningar på nivån i reaktor

- Inre krets - flödesreglering
  - Tryckvariationer över ventil
  - Olinjär ventil
- Yttre krets - nivåreglering
  - Inflödesvariationer

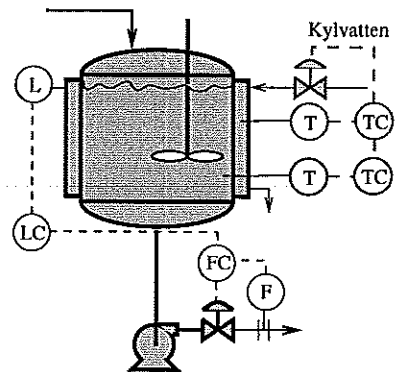
## Kaskadreglering IV

Design av nivåreglering

1. Ventil:  $G_v = \frac{K_v}{T_v s + 1}$
2. Nivå:  $G_t = -\frac{K_t}{s}$
3. Rita blockschema
4. Polplacering av inre loop (P-reg)
5. Antag mycket snabb inre loop
6. Polplacering av yttre loop (PI-reg)

## Kaskadreglering V

Temperaturreglering



Viktiga störningar på reaktortemperatur

- Inre krets - kylreglering
  - Temperaturvariationer i kylvatten
  - Kylflödesvariationer
  - Olinjär ventil
- Yttre krets - reaktorreglering
  - Inflödesvariationer
  - Reaktionsvärmevariationer