NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS MONGE DALAM ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
NOVITA IMROATUS SOLICHAH
NIM. 09610023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS MONGE DALAM ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NOVITA IMROATUS SOLICHAH
NIM. 09610023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS MONGE DALAM ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
NOVITA IMROATUS SOLICHAH
NIM. 09610023

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 11 Juni 2013

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Abdussakir, M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS MONGE DALAM ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
NOVITA IMROATUS SOLICHAH
NIM. 09610023

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Juni 2013

Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	________________
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	________________
Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : NOVITA IMROATUS SOLICHAH

NIM : 09610023

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Juni 2013

Yang membuat Pernyataan,

Novita Imroatus Solichah

NIM. 09610023

MOTTO

Bersyukurlah untuk apa yang dimiliki sekarang,

dan terus berjuang untuk apa yang diinginkan besok

PERSEMBAHAN

Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar,

Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ibunda tersayang Uswatun Chasannah

Ayahanda tersayang Moch. Ja'far

Kakak tersayang Andrik Mulyono

Adik tersayang Mei Shinta Rodotul Jannah

Adik tersayang Ronal Dzaki Rabbani

Keluarga besar di Sidoarjo dan Jombang

KATA PENGANTAR

Syukur *alhamdulillah* ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul **"Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus"** ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen pembimbing yang telah memberikan ijin dan kemudahan kepada penulis untuk menyusun skripsi serta yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberi arahan dan bimbingan.

6. Bapak dan Ibu dosen serta staf Jurusan Matematika maupun Fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
7. Bapak Moch. Ja'far dan ibu Uswatun Chasanah serta segenap keluarga yang tidak pernah berhenti memberikan doa, kasih sayang, inspirasi dan motivasi serta dukungan kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
8. Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009. Khususnya Tutik R., Iswayuni P., Febrina M., Arni H., Siti M., dan Deri I.. Terima kasih atas semua pengalaman dan motivasinya yang mereka berikan dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
9. Teman-teman kos Asrama Ifa Agistia, Ida F., Wulan R., Leli K., Umamah, Windi P., Lismiati M., dan Siska. Terima kasih atas dukungan semangat dan doanya.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka semua. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang aljabar. Amin.

Malang, Juni 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Solichah, Novita Imroatus. 2013. **Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: Aljabar Max-Plus, Matriks Monge, Nilai Eigen, dan Vektor Eigen

Aljabar Max-Plus adalah salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi ring idempoten komutatif yang lebih lanjut merupakan semi field. Dinotasikan sebagai berikut $(R_{max}, \oplus, \otimes)$, dan R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, di mana R adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$, operasi $\oplus$ didefinisikan sebagai maksimum dan operasi $\otimes$ didefinisikan sebagai penjumlahan normal bilangan real. Aljabar Max-Plus dapat ditentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks. Penelitian ini membahas nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge, serta sifat-sifat matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus. Suatu matriks A dengan unsur bilangan real berukuran $m \times n$ disebut matriks Monge, jika dan hanya jika memenuhi: $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$. Pada penelitian ini penulis akan mengkaji sifat-sifat matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus dan mendeskripsikan cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus.

Dari hasil studi pustaka diperoleh sifat-sifat yang dipenuhi matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus dan algoritma untuk memperoleh nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus. Sifat-sifat yang dipenuhi, yaitu sebagai berikut: idempoten, komutatif, asosiatif, distributif, elemen identitas dan elemen netral. Algoritma yang digunakan adalah sebagai berikut: (1) Mengecek Matriks A dengan syarat $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$ dan merupakan matriks Monge, (2) Menghitung nilai eigen dari matriks A, (3) Menghitung vektor eigen.

Matriks Monge memiliki nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-Plus, yang dapat ditentukan menggunakan algoritma. Hasil $C = A \oplus B$ merupakan matriks Monge, $C = \alpha \otimes A$ merupakan matriks Monge dan $C = A \otimes B$ merupakan matriks Invers Monge. Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks dalam Aljabar Max-Plus dengan menggunakan metode yang lain ataupun menggunakan matriks yang lain.

ABSTRACT

Solichah, Novita Imroatus. 2013. **Eigenvalues and Eigenvectors of Monge Matrices in Max-Plus Algebra**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Key Word: Eigenvalues, Eigenvectors, Max-Plus Algebra, and Monge Matrix

Max-Plus Algebra is one of the algebraic structure is a commutative idempotent semi-ring further a semi-field. Denoted as follows $(R_{max}, \oplus, \otimes)$, and R_{max} is the set $R \cup \{\varepsilon\}$, where R is the set real numbers and $\varepsilon = -\infty$, operation $\oplus$ stated maximum and operation $\otimes$ stated sum of normal real numbers. Max-Plus Algebra can be determined eigenvalues and eigenvectors matrix. This research discusses eigenvalues and eigenvectors Monge matrix, as well as properties of Monge matrix in Max-Plus Algebra. Matrix A with elements of real numbers measuring $m \times n$ called a Monge matriks, if and only if it satisfies: $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$. In this research the authors will examine the properties of Monge matrix in Max-Plus Algebra and describe how to determine the eigenvalues and eigenvectors Monge matrix in Max-Plus Algebra.

The results obtained from the literature study the properties that meet Monge matrices in Max-Plus Algebra and algorithm to find eigenvalues and eigenvectors Monge matrix in Max-Plus Algebra. Properties that meet such as: idempotent, commutatif, assosiatif, distributif, element identity and element netral. Algorithm which use is (1) checking matrix A with condition $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$ and constitute Monge matrix, (2) calculate eigenvalues from matrix A, (3) calculate eigenvectors from matrix A.

Monge matrix has eigenvalues and eigenvectors in the Max-Plus Algebra, whose can given with algorithm. Results $C = A \oplus B$ constitute Monge matrix, $C = \alpha \otimes A$ constitute Monge matrix and $C = A \otimes B$ constitute Inverse Monge matrix. It is advisable in future studies to discuss the eigenvalues and eigenvectors matrices in Max-Plus Algebra using another method or use another matrix.

ملخص

صالحة, نوفيتا إمرأة.٢٠١٣. **المتجهات الذاتية و القيم الذاتية في مصفوفة مونج ماكس زائد الجبر.**
البحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف: ١. عبد الشاكر، الماجستير
٢. فخرالرّازى، الماجستير

كلمة رئيسية : مصفوفة مونج، وماكس زائد الجبر,القيم الذاتية، المتجهات الذاتية

ماكس زائد الجبر هي واحدة من بنية جبرية هو تبادلي متساوي القوى شبه حلقة أخرى في الربيع الميدان .تدل على النحو التالي $(R_{max}, \oplus, \otimes)$، و R_{max} عبارة عن مجموعة من $R \cup \{\varepsilon\}$، حيث R هي مجموعة من الأرقام الحقيقية و $\varepsilon = -\infty$, $\oplus$ ولايات التشغيل والحد الأقصى للتشغيل العادي $\otimes$ دول عن مجموع الأعداد الحقيقية .في الجبر ماكس زائد يمكن تحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصفوفة . تناقش هذه الدراسة على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصفوفات مونج وخصائص مصفوفة مونج في الجبر ماكس زائد A .مصفوفة A مع عناصر من الأعداد الحقيقية يسمى مصفوفة قياس $m \times n$ مونج، إذا وفقط إذا استوفى. $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$: وهكذا، في هذه الدراسة واضعي سوف تدرس خصائص المصفوفات مونج في الجبر ماكس زائد وتصف كيفية تحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصفوفات مونج في الجبر ماكس زائد.

النتائج التي تم الحصول عليها من الأدب دراسة الخصائص التي تلبي المصفوفات مونج في الجبر ماكس زائد ومعرفة الخطوات كيفية تحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصفوفات مونج في الجبر ماكس زائد باستخدام خوارزمية. التي هي كما يلي :متساوي القوى، تبادلي، النقابي، التوزيع، وعناصر الهوية وعناصر محايدة .الخوارزمية المستخدمة هي كما يلي :١ التحقق من المصفوفة A مع حالة لذلك و $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$مصفوفة مونج، ٢ حساب القيم الذاتية للمصفوفة A. ٣ حساب المتجهات الذاتية. مونج مصفوفة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لديه في الجبر ماكس زائد باستخدام خوارزمية .العائد الأقصى $C = A \oplus B$ ومجموع اثنين من المصفوفات، $C = \alpha \otimes A$ ومجموع اثنين من المصفوفات، التي $C = \alpha \otimes A$ مونج مونج مصفوفة نتيجة المقابلة الحجم .فإنه من المستحسن في الدراسات المستقبلية لمناقشة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصفوفات في ماكس زائد الجبر باستخدام طريقة أخرى أو استخدام مصفوفة أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar yang sudah dikenalkan adalah lapangan *(field)*, yaitu grup *(group)* dan gelanggang *(ring)*. Pada perkembangannya, struktur aljabar tidak hanya terbatas pada grup dan gelanggang, tetapi ada jenis lain yaitu Aljabar Max-Plus. Aljabar Max-Plus tidak sepenuhnya dikembangkan seperti dalam grup dan gelanggang.

Pada Al-Qur'an terdapat ayat yang menjelaskan bahwa setiap ilmu pengetahuan yang telah ada dan berkembang sesuai dengan perkembangan zaman, yang terdapat dalam surat Al-Baqarah ayat 151, yang berbunyi sebagai berikut:

كَمَآ أَرۡسَلۡنَا فِيكُمۡ رَسُولاً مِّنكُمۡ يَتۡلُواْ عَلَيۡكُمۡ ءَايَـٰتِنَا وَيُزَكِّيكُمۡ وَيُعَلِّمُكُمُ ٱلۡكِتَـٰبَ وَٱلۡحِكۡمَةَ وَيُعَلِّمُكُم مَّا لَمۡ تَكُونُواْ تَعۡلَمُونَ ١٥١

Artinya: *"Sebagaimana (Kami Telah menyempurnakan nikmat kami kepadamu) kami Telah mengutus kepadamu Rasul diantara kamu yang membacakan ayat-ayat kami kepada kamu dan mensucikan kamu dan mengajarkan kepadamu Al Kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui"* (Q.S. Al-Baqarah: 151).

Pendekatan Aljabar Max-Plus dapat menentukan dan menganalisis berbagai sistem. Aljabar Max-Plus adalah salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi ring idempoten komutatif. Dinotasikan sebagai berikut $(R_{max}, \oplus, \otimes)$, dan R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R adalah himpunan bilangan real, dengan $\varepsilon = -\infty$, sedangkan operasi $\oplus$ menyatakan maksimum dan operasi $\otimes$ menyatakan penjumlahan normal bilangan real, yang dapat didefinisikan sebagai berikut: $\forall a, b \in R_{max}$ maka $a \oplus b = max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$ (Heidergott, 2005:13).

Matriks merupakan salah satu alat matematis untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam bidang keilmuan. Pada beberapa permasalahan, matriks digunakan untuk memodelkan suatu sistem dan sistem tersebut diselesaikan sehingga didapatkan solusinya. Pada bahasan matriks juga diketahui nilai eigen dan vektor eigen.

Penelitian ini membahas matriks Monge serta memperoleh algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus. Matriks Monge adalah suatu matriks $A_{m \times n}$ dengan unsur bilangan real, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dengan syarat: } a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$$

untuk semua $1 \leq i < r \leq m, 1 \leq j < s \leq n$ (Burkard, 1995:1).

Menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks dapat dilakukan dalam aljabar biasa atau dilakukan dalam Aljabar Max-Plus. Pada Al-Qur’an terdapat ayat yang menjelaskan bahwa dengan cara yang berbeda dan keadaan yang berbeda tetapi tetap mengarah pada tujuan yang sama. Hal ini terdapat dalam surat Al-Baqarah ayat 150, yang berbunyi sebagai berikut:

وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِۚ وَحَيۡثُ مَا كُنتُمۡ فَوَلُّواْ وُجُوهَكُمۡ
شَطۡرَهُۥ لِئَلَّا يَكُونَ لِلنَّاسِ عَلَيۡكُمۡ حُجَّةٌ إِلَّا ٱلَّذِينَ ظَلَمُواْ مِنۡهُمۡ فَلَا تَخۡشَوۡهُمۡ وَٱخۡشَوۡنِي
وَلِأُتِمَّ نِعۡمَتِي عَلَيۡكُمۡ وَلَعَلَّكُمۡ تَهۡتَدُونَ ١٥٠

Artinya: *"Dan dari mana saja kamu (keluar), maka palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram. Dan dimana saja kamu (sekalian) berada, maka palingkanlah wajahmu ke arahnya, agar tidak ada hujjah bagi manusia atas kamu, kecuali orang-orang yang zalim diantara mereka. Maka janganlah kamu takut kepada mereka dan takutlah kepada-Ku (saja). Dan agar Ku-sempurnakan nikmat-Ku atasmu, dan supaya kamu mendapat petunjuk"* (Q.S. Al-Baqarah: 150).

Surat Al-Baqarah ayat 150 tersebut berkaitan dengan permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai cara atau metode yang berbeda. Dari ayat tersebut terdapat arti yang berbunyi *"...dari mana saja kamu (keluar), maka palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram..."*. Penggalan arti tersebut menjelaskan bahwa dengan cara yang berbeda ataupun jalan yang berbeda tetapi tetap tertuju pada tujuan yang sama.

Pada penelitian ini, dibahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Monge di dalam Aljabar Max-Plus, serta mendapatkan algoritma dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus. Penulis merumuskan penelitian ini dengan judul "Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus?
2. Bagaimana menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat-sifat matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus.
2. Memperoleh algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus.

1.4 Batasan Masalah

Skripsi ini pembahasan difokuskan pada matriks Monge ukuran $n \times n$ dalam Aljabar Max-Plus. Pada proses pembuktian, penulis menggunakan matriks Monge ukuran 3×3.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis

   Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan Aljabar Max-Plus.

2. Lembaga

   Menambah bahan pustaka untuk rujukan penelitian dan bahan perkuliahan khususnya tentang materi Aljabar Max-Plus, yaitu mengenai nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus.

3. Pembaca

   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai Aljabar Max-Plus, khususnya memperluas kajian nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus dan diharapkan dapat menjadi rujukan penelitian yang akan datang.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah Aljabar Max-Plus. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan Aljabar Max-Plus dan matriks Monge, yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, maupun internet.
2. Memahami dan mempelajari konsep Aljabar Max-Plus, nilai eigen, vektor eigen, dan matriks Monge.
3. Menentukan sifat-sifat yang dimiliki matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus.

4. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dengan menggunakan operasi Aljabar Max-Plus.
5. Menentukan algoritma dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus.

1.7 Sistematika Penulisan

Pada penyusunan penelitian ini perlu dibuat langkah-langkah yang sistematis guna memudahkan dalam memahami makna setiap bab yang ada. Secara umum penulisan penelitian ini terdiri dari empat bab.

BAB I Pendahuluan

Bab ini membahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Bab ini membahas tentang teori-teori yang mendasari penulisan skripsi ini atau lebih dikenal dengan kajian pustaka. Adapun teori-teori yang termuat di dalamnya adalah matriks, matriks Monge, vektor, nilai eigen dan vektor eigen, Aljabar Max-Plus, dan permasalahan manusia dan solusinya dalam tinjauan agama.

BAB III Pembahasan

Bab ini membahas tentang sifat matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus, nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus dan algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus dan keterkaitan penyelesaian permasalahan manusia dengan hasil penelitian

BAB IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Matriks adalah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, yang panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris (Supranto, 2003:3).

Suatu matriks A terdiri m baris dan n kolom, maka matriks dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}], i = 1, 2, \ldots, m \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, n$$

Bilangan-bilangan a_{ij} disebut elemen-elemen dari matriks A berukuran $m \times n$ dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$ dan m, n adalah bilangan asli. Susunan unsur horisontal dinamakan baris atau vektor baris sedangkan susunan unsur vertikal dinamakan kolom atau vektor kolom dari matriks A (Supranto, 2003:4).

Definisi 2.1:

Dua matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran baris dan kolom yang sama dan unsur-unsur yang berpadanan sama (Anton, 2004:8).

Pada notasi matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j.

Contoh 2.1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada contoh 2.1 terlihat bahwa matriks A dan B sama secara ukuran baris dan kolom dan unsur-unsurnya.

Definisi 2.2:

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan unsur-unsur matriks A dengan unsur-unsur matriks B yang berpadanan. $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan unsur-unsur matriks A dengan unsur-unsur matriks B yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan (Anton, 2004:28).

Contoh 2.2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

maka $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 12 & 4 & 5 \\ 17 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.3:

Misalkan A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap unsur A dengan c (Anton, 2004:29).

Contoh 2.3:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } c = \frac{1}{2}$$

maka $cA = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.4:

Misalkan A adalah suatu matriks $m \times r$ dan B adalah suatu matriks $r \times n$, maka hasil kali matriks AB adalah matriks $m \times n$ yang unsur-unsurnya didefinisikan sebagai berikut: untuk mencari unsur dalam baris i dan kolom j dari matriks AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B, kalikan unsur-unsur yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya (Anton, 2004:30).

Contoh 2.4:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

maka $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 5 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 8 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 6 & 20 \\ 12 & 33 \end{bmatrix}.$$

2.1.1 Macam–macam Matriks

2.1.1.1 Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom $(m = n)$. Apabila $m = n$, maka matriks A disebut matriks bujur sangkar orde n (Arifin, 2000:8).

Contoh 2.5:

Misal $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Maka A adalah matriks bujur sangkar dengan ordo 2×2 dengan unsur bilangan real.

2.1.1.2 Matriks Identitas

Suatu matriks A dengan banyak baris n dan banyak kolom n disebut matriks bujur sangkar ordo n (*square matrix of order* n) dan elemen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ merupakan diagonal utama (*main diagonal*) matriks A (Anton & Rorres, 2004:28).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.5:

Matriks identitas atau matriks satuan, dinotasikan dengan I_n atau I, adalah matriks bujur sangkar dengan elemen 1 pada diagonal utamanya dan elemen nol pada bagian lainnya. Matriks identitas mirip dengan skalar 1 sehingga di dalam sebarang matriks bujur sangkar $A, AI = IA = A$ (Arifin, 2000:8).

Contoh 2.6:

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maka A merupakan matriks identitas karena diagonal utamanya adalah 1 dan lainnya 0.

2.1.1.3 Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal utama tidak 0, biasanya diberi simbol D (Arifin, 2000:9).

Matriks diagonal seringkali dinotasikan dengan: $D = diag(d_{11},\ \ldots, d_{nn})$, dengan d_{ii} tidak semuanya 0 untuk semua $1 \leq i \leq n$.

Contoh 2.7:

Misal $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Maka D merupakan matriks diagonal karena unsur pada diagonal utamanya tidak semuanya 0.

2.1.1.4 Matriks Skalar

Skalar adalah suatu bilangan konstan. Kalau k suatu skalar dan I suatu matriks identitas, maka hasil kali kI dinamakan matriks skalar (Arifin, 2000:10).

Contoh 2.8:

Misal $k = 4$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka $kI = 4\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$

2.1.2 Determinan Matriks

Definisi 2.6:

Permutasi dari bilangan bulat $\{1, 2, \dots, n\}$ adalah susunan bilangan menurut suatu aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan (Anton, 2004:90).

Contoh 2.9:

Himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3\}$ terdapat 6 permutasi yang berbeda, yaitu: $(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1)$

Suatu inversi dikatakan terjadi dalam permutasi $\{1, 2, \dots, n\}$ jika terdapat bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil.

Contoh 2.10:

Tentukan jumlah total inversi pada permutasi berikut: $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Penyelesaian:

(1) $a_1 = 6$ mendahului $a_2 = 5$

(2) $a_1 = 6$ mendahului $a_3 = 4$

(3) $a_1 = 6$ mendahului $a_4 = 3$

(4) $a_1 = 6$ mendahului $a_5 = 2$

(5) $a_1 = 6$ mendahului $a_6 = 1$

(6) $a_2 = 5$ mendahului $a_3 = 4$

(7) $a_2 = 6$ mendahului $a_4 = 3$

(8) $a_2 = 5$ mendahului $a_5 = 2$

(9) $a_2 = 5$ mendahului $a_6 = 1$

(10) $a_3 = 4$ mendahului $a_4 = 3$

(11) $a_3 = 4$ mendahului $a_5 = 2$

(12) $a_3 = 4$ mendahului $a_6 = 1$

(13) $a_4 = 3$ mendahului $a_5 = 2$

(14) $a_4 = 3$ mendahului $a_6 = 1$

(15) $a_5 = 2$ mendahului $a_6 = 1$

Jadi total banyaknya inversi adalah 15 atau $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Definisi 2.7:

Suatu permutasi dikatakan genap jika total banyaknya inversi adalah bilangan genap dan dikatakan ganjil jika total banyaknya inversi adalah bilangan ganjil (Anton, 2004:92).

Contoh 2.11:

Tabel berikut ini mengklasifikasi berbagai permutasi dari $\{1, 2, 3\}$ sebagai genap atau ganjil.

Tabel 2.1 Tabel Permutasi dari $\{1, 2, 3\}$

Permutasi	Banyaknya Inversi	Klasifikasi
(1,2,3)	0	Genap
(1,3,2)	1	Ganjil
(2,1,3)	1	Ganjil
(2,3,1)	2	Genap
(3,1,2)	2	Genap
(3,2,1)	3	Ganjil

Definisi 2.8:

Suatu hasil kali elementer dari suatu matriks $A_{n\times n}$ adalah hasil kali dari n entri dari A, yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama (Anton, 2004:92).

Contoh 2.12:

Buatlah daftar semua hasil kali elementer dari matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena setiap hasil kali elementer memiliki dua faktor dan karena setiap faktor berasal dari baris yang berbeda, maka hasil kali elementer dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut: $a_{1\_}a_{2\_}$ dimana titik-titik kosong menunjukkan nomor kolom. Karena tidak ada dua faktor dalam hasil kali tersebut yang berasal dari kolom yang sama, maka nomor kolom haruslah $\underline{1}\ \underline{2}$ atau $\underline{2}\ \underline{1}$. Jadi hasil kali elementer hanyalah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$.

Definisi 2.9:

Misalkan $A_{n\times n}$ adalah matriks bujur sangkar, determinan dari matriks $A_{n\times n}$ dinotasikan $det(A)$ atau $|A_{n\times n}|$ adalah jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A, atau secara simbolis dapat ditulis sebagai berikut:

$$det(A) = \sum (\underline{+})(a_{1j_1}a_{2j_2} \dots a_{nj_n})$$

dimana $\sum$ adalah penjumlahan suku-suku untuk semua permutasi $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ dan tanda $(+)$ dipilih untuk permutasi genap dan tanda $(-)$ untuk permutasi ganjil (Anton, 2004:94).

Contoh 2.13:

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini: $A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Matriks A berukuran 4 baris dan 4 kolom, maka berdasarkan definisi 2.8, ada 4 elemen hasil kali elementer pada matriks A yang masing-masing berasal dari baris yang berbeda. Hasil kali elementernya dapat ditulis dalam bentuk $(a_{1\_}, a_{2\_}, a_{3\_}, a_{4\_})$, dimana titik-titik kosong menunjukkan nomor kolom. Maka nomor-nomor kolom tersebut merupakan permutasi dari himpunan {1, 2, 3, 4}. Maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Permutasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$

Hasil kali Elementer	Permutasi	Jumlah Total Inversi	Kategori Permutasi	Hasil kali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$	(1,2,3,4)	0	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$	(1,2,4,3)	1	Ganjil	$-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$
$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$	(1,3,2,4)	1	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$
$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$	(1,3,4,2)	2	Genap	$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$
$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$	(1,4,2,3)	2	Genap	$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$
$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$	(1,4,3,2)	3	Ganjil	$-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$
$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$	(2,1,3,4)	1	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$
$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$	(2,1,4,3)	2	Genap	$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$
$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$	(2,3,1,4)	2	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$
$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$	(2,3,4,1)	3	Ganjil	$-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$
$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$	(2,4,1,3)	3	Ganjil	$-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$
$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$	(2,4,3,1)	4	Genap	$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$
$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$	(3,1,2,4)	2	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$
$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$	(3,1,4,2)	3	Ganjil	$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$
$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$	(3,2,1,4)	3	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$
$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$	(3,2,4,1)	4	Genap	$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$
$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$	(3,4,1,2)	4	Genap	$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$
$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$	(3,4,2,1)	5	Ganjil	$-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$
$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$	(4,1,2,3)	3	Ganjil	$-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$
$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$	(4,1,3,2)	4	Genap	$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$
$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$	(4,2,1,3)	4	Genap	$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$
$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$	(4,2,3,1)	5	Ganjil	$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$
$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$	(4,3,1,2)	5	Ganjil	$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$
$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$	(4,3,2,1)	6	Genap	$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

Sesuai dengan definisi 2.9, maka determinan dari matriks $A_{4\times4}$ adalah

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\ &\quad + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ &\quad + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ &\quad + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}. \end{aligned}$$

2.1.3 Adjoin Matriks

Definisi 2.10:

Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari sub-matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}(M_{ij})$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij} (Anton, 1997:77).

Contoh 2.14:

Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Minor dari entri a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 3 & 5 \\ \cancel{9} & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9$$

Kofaktor dari a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = -9$.

Definisi 2.11:

Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$ dan C_{ij} kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m3} & C_{m2} & \ldots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks kofaktor dari A. Transpos matriks C dinamakan adjoin A yang dinyatakan dengan $adj(A)$ (Anton, 1997:81).

Contoh 2.15:

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Minor dari entri a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0 - (-12) = 0 + 12 = 12$

Minor dari entri a_{12} adalah $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0 + 6 = 6$

Minor dari entri a_{13} adalah $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= -4 - 12 = -16$

Minor dari entri a_{21} adalah $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0 - 4 = -4$

Minor dari entri a_{22} adalah $M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 0 - (-2) = 0 + 2 = 2$

Minor dari entri a_{23} adalah $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= -12 - 6 = -18$

Minor dari entri a_{31} adalah $M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$

$= 9 - (-6) = 9 + 6 = 15$

Minor dari entri a_{32} adalah $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 9 - (-1) = 9 + 1 = 10$

Minor dari entri a_{33} adalah $M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

$= 18 - 3 = 15$

Sehingga matriks kofaktor adalah $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -16 \\ 4 & 2 & 18 \\ 15 & -10 & 15 \end{bmatrix}$

$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 15 \\ -6 & 2 & -10 \\ -16 & 18 & 15 \end{bmatrix}.$

Teorema 2.1:

Untuk setiap matriks A berorde n berlaku $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A|I$ (Rukmangadachari, 2010:9).

Bukti:

$$\text{Misalkan: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jika C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} pada A maka

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nj} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari hasil kali $A \times adj(A)$ adalah:

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

Jika $i = j$, maka $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$ adalah ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i dari A jika $i \neq j$, maka semua a dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari A, sehingga nilai dari $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0$. Oleh karena itu,

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & det(A) \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|I.$$

2.1.4 Invers Matriks

Definisi 2.12:

Misalkan A merupakan matriks bujur sangkar dengan n baris dan n kolom dan I_n suatu matriks identitas. Apabila ada matriks bujur sangkar A^{-1} sedemikian sehingga, berlaku hubungan sebagai berikut: $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$, maka A^{-1} disebut matriks invers dari A (Arifin, 2000:130).

Teorema 2.2:

Matriks yang *invertible* hanya memiliki tepat satu invers (Anton, 2004:47).

Bukti:

Jika B dan C kedua-duanya adalah invers dari matriks A,

maka $B = C$, karena B adalah invers dari A,

maka $BA = I$, dengan mengalikan kedua ruas di sisi kanannya dengan C diperoleh $(BA)C = IC = C.$ Tetapi $(BA)C = B(AC) = BI = B$, sehingga $C = B$.

Pernyataan berikut mengenai invers dari matriks yang *invertible*. Jika A *invertible*, maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol A^{-1}.

Terbukti $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$.

Teorema 2.3:

Jika A adalah matriks yang dapat dibalik (*invertible*), maka

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A)$$

(Anton, 1997:82).

Bukti:

Pertama ditunjukkan $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I$ yang sudah terbukti pada teorema 2.1, karena A *invertible* $det(A) \neq 0$, sehingga $A \cdot adj(a) = det(A) \cdot I$ dapat ditulis kembali sebagai berikut: $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I$

$$\frac{1}{det\,(A)}[A \cdot adj\,(A)] = I \text{ atau } A\left[\frac{1}{det\,(A)} \cdot adj\,(A)\right] = I,$$

dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Teorema berikut memberikan syarat-syarat di mana matriks 2×2 *invertible* dan memberikan rumus sederhana untuk perhitungan inversnya.

Teorema 2.4:

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *invertible* jika $ad - bc \neq 0$, dan inversnya dapat dihitung sesuai dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{-b}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \\ \frac{-c}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{a}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \end{bmatrix}$$

(Anton, 2004:48).

Bukti:

Karena $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{-b}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \\ \frac{-c}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{a}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \end{bmatrix}$ $|ad - bc| \neq 0$, maka akan ditunjukkan bahwa $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{-b}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \\ \frac{-c}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{a}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad - bc}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{-ab + ab}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \\ \frac{cd - cd}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{-bc + ad}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{-b}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \\ \frac{-c}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} & \frac{a}{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{da - bc}{\mathrm{ad - bc}} & \frac{db - bd}{\mathrm{ad - bc}} \\ \frac{-ca + ac}{\mathrm{ad - bc}} & \frac{-cb + ad}{\mathrm{ad - bc}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $AA^{-1} = A^{-1}A = I.$

Contoh 2.16:

Misal diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Carilah invers dari matriks P!

Penyelesaian:

$$det(P) = \big((6)(2)\big) - \big((2)(4)\big)$$

$$= (12) - (8) = 4$$

maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{4}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.2 Matriks Monge

Matematikawan Gaspard Monge (1746) telah menemukan suatu matrik yaitu matriks Monge. Suatu matriks A dengan unsur bilangan real berukuran $m \times n$ disebut matriks Monge, jika dan hanya jika memenuhi:

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$, dengan syarat: $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

untuk semua $1 \leq i < r \leq m, 1 \leq j < s \leq n$

(Burkard, 1995:1).

Contoh 2.17:

Matriks A dengan ukuran 3×3, yaitu: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, ada 9 sub-matriks ukuran 2×2 yang dapat diperiksa apakah masing-masing sub-matriks tersebut adalah matriks Monge:

$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{22} \leq a_{12} + a_{21}$$
$$3 + 1 \leq 1 + 5$$
$$4 < 6$$

$A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{23} \leq a_{13} + a_{21}$$
$$3 + 0 \leq 4 + 5$$
$$3 < 9$$

$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{12} + a_{23} \leq a_{13} + a_{22}$$
$$1 + 0 \leq 4 + 1$$
$$1 < 5$$

$A_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{32} \leq a_{12} + a_{31}$$
$$3 + 2 \leq 1 + 8$$
$$5 < 9$$

$A_5 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{33} \leq a_{13} + a_{31}$$
$$3 + 1 \leq 4 + 8$$
$$4 < 12$$

$A_6 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{12} + a_{33} \leq a_{13} + a_{32}$$
$$1 + 1 \leq 4 + 2$$
$$2 < 6$$

$A_7 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{21} + a_{32} \leq a_{22} + a_{31}$$

$$5 + 2 \leq 1 + 8$$

$$7 < 9$$

$A_8 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{21} + a_{33} \leq a_{23} + a_{31}$$

$$5 + 1 \leq 0 + 8$$

$$6 < 8$$

$A_9 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{22} + a_{33} \leq a_{23} + a_{32}$$

$$1 + 1 \leq 0 + 2$$

$$2 = 2$$

Dua hal penting dalam kasus matriks Monge adalah entri tak terbatas yang dibangun pada batas atas dan batas bawah segitiga matriks Monge yang memenuhi $a_{ij} = \infty$ untuk $i > j$. $a_{ij} = \infty$ untuk $i > j$ ekuivalen dengan A disebut batas segitiga matriks Monge, jika dan hanya jika:

$$a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$$

untuk semua $1 \leq i < r \leq m, 1 \leq j < s \leq n$

(Burkard, 1995:4).

2.3 Vektor

Matriks yang hanya memiliki satu baris atau satu kolom menjadi perhatian khusus karena matriks tersebut digunakan untuk menyatakan penyelesaian dari sistem linier. Suatu penyelesaian dari sistem dengan m persamaan linier dalam n peubah adalah suatu vektor.

Definisi 2.13:

Matriks yang terdiri dari suatu kolom adalah matriks $m \times 1$, disebut suatu vektor kolom dan ditulis:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

(Weber, 1999:168).

Notasi u_j berupa bilangan real, merupakan komponen vektor. u_j adalah komponen ke-j dari vektor $\boldsymbol{u}$. Vektor kolom A mempunyai m baris dikatakan suatu vektor berkomponen m atau vektor berdimensi m (Weber, 1999:169).

Contoh 2.18:

$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ adalah vektor berdimensi 4.

Definisi 2.14:

Suatu matriks yang berisi satu baris adalah matriks $1 \times n$, disebut suatu vektor baris dan ditulis: $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ (Weber, 1999:169).

Contoh 2.19:

$\boldsymbol{v} = [2, -5, 1]$ adalah vektor berdimensi 3.

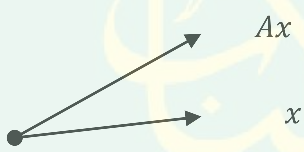
Definisi 2.15:

Jika $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ dan $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ adalah sebarang vektor pada R^n, maka hasil kali dalam Euclidis $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ didefinisikan dengan $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$ (Anton, 1997:133).

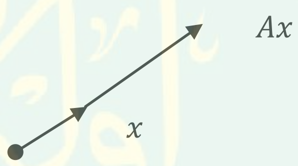
Norma Euclidis (panjang Euclidis) vektor $\boldsymbol{u} = [u_1, \dots, u_n]$ pada R^n didefinisikan sebagai berikut: $||\boldsymbol{u}|| = (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}) = \sqrt{u_1^2, \dots, u_n^2}$ (Anton, 1997:134).

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ dan x adalah suatu vektor pada R^n, maka biasanya tidak ada hubungan geometris umum antara vektor x dan vektor Ax (Gambar 2.1). Akan tetapi, seringkali ada vektor-vektor x tertentu sedemikian sehingga x dan Ax merupakan penggandaan satu sama lain (Gambar 2.2). Vektor-vektor tersebut terdapat dalam getaran, sistem elektrik, genetik, reaksi kimia, mekanika kuantum, tekanan mekanis, ekonomi, dan geometri (Anton, 2004:99).



Gambar 2.1



Gambar 2.2

Definisi 2.16:

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar λ disebut suatu nilai eigen atau nilai karakteristik dari A jika terdapat suatu vektor tak nol x sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ (Anton, 2004:99).

Contoh 2.20:

Vektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{x}$$

Nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ dengan $Ax = \lambda x$ ditulis kembali sebagai berikut: $A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$ atau secara ekuivalen $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$.

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada selesaian tak nol dari persamaan di atas. Persamaan akan mempunyai selesaian tak nol jika dan hanya jika: $det(\lambda I - A) = 0$,

$det(\lambda I - A) = 0$ dinamakan *persamaan karakteristik* A. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas, maka $det(\lambda I - A)$ adalah polinom λ yang dinamakan *polinom karakteristik* dari A.

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ adalah suatu persamaan yang banyak ditemukan pada aplikasi aljabar linier. Jika persamaan tersebut mempunyai selesaian tak nol x, maka λ disebut sebagai nilai eigen dari A dan x disebut vektor eigen yang dimiliki λ.

Setelah nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks A didapatkan, maka dengan mudah dicari nilai eigen dan vektor eigen dari sebarang pangkat bilangan bulat positif dari A, misalnya jika λ adalah suatu nilai eigen dari A dan x adalah vektor eigen yang berpadanan, maka

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x,$$

yang ditunjukkan bahwa λ^2 adalah suatu nilai eigen dari A^2 dan x adalah vektor eigen yang berpadanan.

Setelah nilai eigen dari suatu matriks ditemukan, maka vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen tersebut dapat diperoleh dengan menyelesaikan himpunan persamaan homogen yang sesuai. Berkaitan dengan setiap nilai eigen λ_i yang berbeda, maka terdapat vektor eigen x_i yang tak nol. Vektor eigen merupakan solusi dari persamaan homogen yang dapat diperoleh dengan mensubstitusi nilai λ_i ke dalam persamaan berikut: $(A - \lambda_i I)x_i = 0$ (Gere dan William, 1987:128).

2.5 Aljabar Max-Plus

Definisi 2.17:

Diberikan $R_{max} = R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$ untuk $a, b \in R_{max}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yaitu: $a \oplus b = max\,(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$ (Heidergott, 2005:13).

Himpunan R_{max} dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut Aljabar Max-Plus dan dinotasikan dengan $R_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$.

Contoh 2.21:

1. $2 \otimes (-6) \oplus 4 \otimes 8$

   Harus dipahami sebagai $(2 \otimes (-6)) \oplus (4 \otimes 8)$

   Perhatikan bahwa:

   $$(2 \otimes (-6)) \oplus (4 \otimes 8) = max((2 + (-6)), (4 + 8))$$
   $$= max(-4, 12) = 12$$

   sedangkan

   $$2 \otimes ((-6) \oplus 4) \otimes 8 = 2 + max\,(-6, 4) + 8$$
   $$= 2 + 4 + 8 = 14.$$

2. Perluasan operasi untuk $-\infty$

   $$max\,(a, -\infty) = max\,(-\infty, a) = a$$

   $$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$

untuk setiap $a \in R_{max}$, sehingga

$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$

$a \otimes \ \varepsilon = \varepsilon \otimes \ a = \varepsilon.$

3. $6 \oplus 10 \ = \ max\ (6, 10) \ = \ 10$

$6 \oplus \varepsilon \ = \ max\ (6, \varepsilon) \ = \ 10$

$6 \ \otimes \ \varepsilon \ = \ 6 + \ (-\infty) \ = \ -\infty \ = \ \varepsilon$

$e \ \otimes 6 \ = \ max\ (0, 6) \ = \ 6$

$6 \ \otimes 4 \ = \ 6 \ + \ 4 \ = \ 10.$

Teorema 2.5:

$(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring idempoten komutatif dengan elemen netral ε dan elemen kesatuan 0 (Subiono, 2012:3).

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring idempoten komutatif, maka harus ditunjukkan $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring, yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan $(R_{max}, \oplus)$ adalah semi grup komutatif
   a. Memenuhi sifat tertutup yaitu $\forall\ a, b \in R_{max}$ berlaku $a \oplus b \ \in R_{max}$.

      Bukti:

      $a \oplus b \ = \ max\ (a, b)$

      karena $a, b \ \in R_{max}$, jadi $a \oplus b \ \in R_{max}$.
   b. Memenuhi sifat asosiatif yaitu, $\forall\ a, b, c \ \in R_{max}$ berlaku

      $a \oplus (b \oplus c) \ = \ (a \oplus b) \oplus c$

Bukti:

$a \oplus (b \oplus c) \;=\; max\,(a, b \oplus c)$

$= \; max\,(a, max\,(b, c))$

$= \; max\,(max\,(a, b, c))$

$= \; max\,(max\,(a, b), c)$....................................... Asosiatif

$= max\big((a \oplus b), c\big)$

$= \; (a \oplus b) \oplus c$

Terbukti bersifat asosiatif pada operasi $\oplus$.

c. Memenuhi sifat komutatif, yaitu $\forall\, a, b \in R_{max}$ berlaku $a \oplus b \;=\; b \oplus a$

$a \oplus b \;=\; max\,(a, b)$

$= max(b, a)$... Komutatif

$= \; b \oplus a$

Terbukti bersifat komutatif pada operasi $\oplus$.

2. Akan ditunjukkan $(R_{max}, \otimes)$ adalah semi grup.

a. Memenuhi sifat tertutup yaitu $\forall\, a, b \in R_{max}$ berlaku $a \otimes b \in R_{max}$.

Bukti:

$a \otimes b \;=\; a + b$, karena R merupakan semi grup terhadap operasi $+$ maka $a \otimes b \in R_{max}$.

b. Memenuhi sifat asosiatif yaitu, $\forall\, a, b, c \in R_{max}$ berlaku:

$a \otimes (b \otimes c) \;=\; (a \otimes b) \otimes c$

Bukti:

$a \otimes (b \otimes c) \;=\; a \otimes b \otimes c$

$= \; a + b + c$

$= (a + b) + c$... Asosiatif

$= (a \otimes b) \otimes c$

Terbukti bersifat asosiatif pada operasi $\otimes$.

3. Berlaku sifat distributif dari operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus \forall\ a, b, c \in R_{max}$ berlaku: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

   Bukti:

   $a \otimes (b \oplus c) = a + max\,(b, c)$

   $= max\,(a + b, a + c)$.. Distributif

   $= (a + b) \oplus (a + c)$

   $= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Terbukti bersifat distributif dari operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

Pada pembuktian $1, 2, 3$ $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring idempoten komutatif, cukup dengan menunjukkan bahwa R memenuhi sifat idempoten terhadap operasi $\oplus$ dan memenuhi sifat komutatif terhadap operasi $\otimes$.

1. Berlaku sifat idempoten $\forall\ a \in R_{max}$ berlaku $a \oplus a = a$

   $a \oplus a = a = max\,(a, a) = a$

   Terbukti R_{max} bersifat idempoten.

2. Berlaku sifat komutatif yaitu $\forall\ a, b \in R_{max}$ berlaku $a \otimes b = b \otimes a$

   $a \otimes b = a + b$

   $= b + a$.. Komutatif

   $= b \otimes a$

   Terbukti bersifat komutatif pada operasi $\otimes$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ mempunyai elemen netral dan elemen kesatuan.

1. $\forall\ a, b \in R_{max}$ maka $\exists \varepsilon \in R_{max}$ sedemikian sehingga $a \oplus \varepsilon = a$. Perhatikan bahwa: $a \oplus \varepsilon = max\ (a, \varepsilon) = a$.

   Terbukti ε merupakan elemen netral.

2. Terdapat $0 \in R_{max}$, $\forall a \in R_{max}$, sedemikian sehingga $a \otimes 0 = a$. Perhatikan bahwa: $a \otimes 0 = a + 0 = 0$.

   Terbukti terdapat elemen kesatuan .

Berdasarkan poin 1 dan 2 di atas $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring idempoten komutatif dengan elemen netral ε dan elemen kesatuan 0.

Definisi 2.18:

Misalkan $x \in R_{max}$ dan $n \in N$, maka

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{sebanyak\ \ n},$$

dalam eksponensial Aljabar Max-Plus mereduksi perkalian konvensional $x^{\otimes n} = n \times x$.

Hal ini akan menjadi mudah untuk memperluas eksponensial Max-Plus untuk eksponen yang lebih umum sebagai berikut:

1. Jika $x \neq \varepsilon, x^{\otimes 0} = e = 0$

   Jika $a \epsilon R, x^{\otimes a} = ax$.

2. Jika k > 0 maka $\varepsilon^{\otimes k} = \varepsilon$ ($k \leq 0$ tidak terdefinisi).

(Subiono, 2012:4).

Contoh 2.22:

$6^{\otimes 4} = 4 \text{ x } 6 = 24$

$8^{\otimes -2} = -2 \text{ x } 8 = -16 = 16^{\otimes -1}$

R_{max} dengan operasi $(R_{max}, \oplus, \otimes)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. R_{max} memiliki sifat asosiatif pada operasi $\oplus$: $\forall\ a, b, c \in R_{max}$:
   $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$
2. R_{max} memiliki sifat komutatif pada operasi $\oplus$: $\forall a, b \in R_{max} : a \oplus b = b \oplus a.$
3. Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus : \forall a \in R_{max}\ \exists\ e \in R_{max}$, sehingga $a \oplus e = e \oplus a = a.$
4. Idempoten terhadap operasi $\oplus$: $\forall a \in a \oplus a = a.$
5. R_{max} memiliki sifat asosiatif pada operasi $\otimes$: $\forall\ a, b, c \in R_{max} : a \otimes (b \otimes c)$
   $= (a \otimes b) \otimes c.$
6. R_{max} memiliki sifat komutatif pada operasi $\otimes$: $\forall\ a, b \in R_{max} : a \otimes b = b \otimes a.$
7. Terdapat elemen identitas pada operasi $\otimes$, misal e adalah identitas terhadap operasi $\otimes$: $\forall a \in R_{max} : a \otimes e = e \otimes a = a.$
8. R_{max} memiliki invers pada operasi $\otimes$: $\forall\ a \in R_{max} : a \neq e$ terdapat $\in R_{max}$, sehingga $a \otimes - a = e.$
9. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$: $\forall\ a \in R_{max} : a \otimes e = e \otimes a = e.$
10. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:
    $\forall\ a, b, c \in R_{max} : (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$
    dan
    $\forall\ a, b, c \in R_{max} : a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$

2.5.1 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini dikenalkan matriks atas R_{max}. Himpunan matriks ukuran $n \times n$ dalam Aljabar Max-Plus dinotasikan oleh $R_{max}^{m \times n}$. Untuk $n \in N$ dengan $n \neq 0$ didefinisikan $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2,\dots,n\}$. Elemen $A \in R_{max}^{m \times n}$ baris ke-i kolom ke-j dinotasikan oleh a_{ij} untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Matriks A dapat ditulis sebagai berikut: $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$R_{max}^{m \times n} = \{A = (A_{ij}) | A_{ij} \in R_{max}, untuk\ i = 1,2,3,\dots,m\ dan\ j = 1,2,3,\dots,n\}$$

(Subiono, 2012:7).

Definisi 2.19:

Misalkan untuk setiap $A, B \in R_{max}^{m \times n}$ dan $a \in R_{max}$ didefinisikan:

1. $A \oplus B$ adalah matriks yang unsur ke-ij nya: $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = max(A_{ij}, B_{ij})$ untuk $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$.
2. $a \otimes A$ adalah matriks yang unsurnya ke-ij nya: $(a \otimes A)_{ij} = a \otimes A_{ij}$ untuk $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$.
3. Jika $A \in R_{max}^{m \times p}$ dan $B \in R_{max}^{p \times n}$ adalah matriks yang unsur ke-ij nya: $(A \otimes B)_{ij} = \oplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$ untuk $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$.

(Rudhito, 2004: 4).

Suatu matriks dikatakan sama jika setiap entri yang bersesuaian bernilai sama, misalkan matriks A sama dengan matriks B dengan ukuran matriks $m \times n$ artinya $A_{ij} = B_{ij}$ untuk untuk $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$. Elemen-elemen dari $R_{max}^{n} \stackrel{\text{def}}{=} R_{max}^{n \times 1}$ disebut vektor. Elemen ke j dari suatu vektor $x \in$

R^n_{max} dinotasikan dengan x_j atau ditulis $[x]_j$. Vektor di R^n_{max} dengan semua elemennya sama dengan e disebut vektor unit dinotasikan dengan $\boldsymbol{u}$, atau ditulis $[\boldsymbol{u}]_j = e$ untuk $j \in \underline{n}$. Diberikan sebarang $\alpha \in R^n_{max}$, maka perkalian $\alpha \otimes \boldsymbol{u}$ menghasilkan suatu vektor dengan semua elemennya sama dengan α (Subiono, 2012:14).

Sifat berikut mengenai perkalian matriks dengan vektor dalam R_{max} yang dikaitkan dengan relasi urutan parsial.

Teorema 2.6:

Diberikan matriks $A \in R^{m\times n}_{max}$. Bila vektor $x, y \in R^n_{max}$ dengan $x \preceq_{max} y$, maka $A \otimes x \preceq_{max} A \otimes y$ (Subiono, 2012:16).

Bukti:

Ambil sebarang elemen $x, y \in R^n_{max}$ dengan $x \preceq_{max} y$ berlaku, maka

$$x \otimes y = y$$

$$A \otimes (x \oplus y) = A \otimes y$$

$$(A \otimes x) \oplus (A \otimes y) = A \otimes y$$

$$A \otimes x \preceq_{max} A \otimes y.$$

Contoh 2.23:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ dan vektor $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

Jelas bahwa $A \otimes x \preceq_{max} A \otimes y$

$$A \otimes x = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa $A \otimes x \preceq_{max} A \otimes y$.

2.5.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar Max-Plus

Pengertian nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks persegi A berukuran $n \times n$ sebagaimana dijumpai dalam aljabar linier biasa juga dijumpai dalam Aljabar Max-Plus, yaitu bila diberikan suatu persamaan:

$$A \otimes x = \lambda \otimes x,$$

dalam hal ini masing-masing vektor $x \in R_{max}^{n}$ dan $\lambda \in R_{max}$ dinamakan vektor eigen dan nilai eigen dari matriks A dengan vektor $x \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^{T}$. Suatu algoritma untuk memperoleh vektor eigen dan nilai eigen dari matriks $A \in R_{max}^{m \times n}$, dilakukan secara berulang kali dalam bentuk persamaan linear:

$$x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \dots$$

Perilaku periodik dari persamaan linier di atas untuk matriks A yang tak tereduksi atau yang tereduksi erat kaitannya dengan apa yang dinamakan vektor waktu sikel yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x(k)}{k},$$

limit di atas ada untuk setiap keadaan awal $x(0) \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ dan matriks dalam persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \dots$ yang tereduksi selalu dapat dijadikan suatu bentuk blok matriks segitiga atas, dan untuk setiap $i = 1, 2, \dots, q$, $A_{i,i}$ berukuran $q_i \times q_i$ adalah matriks tak tereduksi dengan nilai karakteristik λ_i, maka vektor waktu sikel diberikan sebagai berikut:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x(k)}{k} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{bmatrix},$$

dengan

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i \end{bmatrix},$$

dan vektor λ_i berukuran $q_i \times 1$. Nilai eigen dan vektor eigen matriks A dinyatakan dalam teoema 2.7 (Subiono, 2012:24).

Teorema 2.7:

Misalkan untuk sebarang keadaan awal $x(0) \neq \varepsilon$, sistem persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$ untuk suatu bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq 0$ dan suatu bilangan real c, maka

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix},$$

dengan $\lambda = \frac{c}{p-q}$, selanjutnya λ adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh:

$$\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)).$$

Bukti:

Misalkan $l = p - q$, maka didapatkan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = \lim_{i\to\infty} \frac{x(q+il)}{q+il} = \lim_{i\to\infty} \frac{c^{\otimes i} \otimes x(q)}{q+il}$$

$$= \left(\lim_{i\to\infty} \frac{c^{\otimes i}}{q+il}\right) \otimes \left(\lim_{i\to\infty} \frac{x(q)}{q+il}\right)$$

$$= \left(\lim_{i\to\infty} \frac{ic}{q+il}\right) \otimes \left(\lim_{i\to\infty} \frac{x(q)}{q+il}\right)$$

$$= \left(\frac{c}{l}\right) \otimes 0 = \frac{c}{p-q} \otimes 0,$$

dengan vektor

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi bila $\lambda = \frac{c}{p-q}$, maka vektor waktu sikel adalah:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya bila:

$$\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)$$

maka

$$A \otimes \boldsymbol{v} = A \otimes (\bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{p-q} A \otimes \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \left(A \otimes x(q+i-1)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; i = j+1$$

$$= \bigoplus_{j=2}^{p-q+1} \lambda^{\otimes(p-q-j+1)} \otimes x(q+j+1)$$

$$= \lambda \otimes \left(\bigoplus_{j=2}^{p-q+1} \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1)\right)$$

$$= \lambda \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1)\right) = \lambda \otimes \boldsymbol{v}.$$

Persamaan yang terakhir diperoleh dari:

$$x(p) = \lambda^{\otimes(p-q)} \otimes x(q)$$

yang berakibat bahwa:

$$\lambda^{\otimes -1} x(p) = \lambda^{\otimes(p-q-1)} \otimes x(q)$$

(Subiono, 2012:25).

2.6 Permasalahan Manusia dan Solusinya dalam Tinjauan Agama

Suatu matriks dapat ditentukan nilai eigen dan vektor eigen yang mana keduanya memainkan peranan yang sangat penting dalam suatu sistem. Suatu konsep nilai eigen dan vektor eigen yang merupakan pemecahan real dari suatu persamaan karakteristik dapat digambarkan dengan setiap masalah dalam kehidupan pasti ada pemecahannya, meskipun harus melalui proses yang sulit. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Insyiroh ayat 5 dan 6, yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

Artinya: *"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"* (Q.S. Al-Insyiroh: 5-6).

Menurut Muhammad Abduh dalam tafsirnya menyebutkan bahwa dalam surat Al-Insyiroh ayat 5 diawali dengan huruf *fa* untuk menunjukkan adanya kaitan antara kedua keadaan tersebut, yaitu antara timbulnya kesulitan dan datangnya kemudahan, kemudian M. Quraish Shihab memberikan pendapat ulama lain yang menyoroti bentuk kata *'usr* dan *yusr* yang ternyata berbeda. Kata *yusr* pada dua ayat itu diawali dengan *al*, sehingga definit seperti kata dalam bahasa inggris yang diawali *the*. Sementara kata *yusr* tidak diawali dengan *al*, sehingga tidaklah definit. Hal ini mengandung makna bahwa dari suatu masalah yang telah dialami atau diketahui akan ada solusi yang tidak diketahui sebelumnya (Shihab, 2003:361). Sebagaimana untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen di mana setiap permasalahan pasti mempunyai solusi karakteristik.

Aplikasi nilai eigen dan vektor eigen mencakup berbagai bidang keilmuan. Nilai eigen dan vektor eigen digunakan untuk memecahkan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya masalah penjadwalan penerbangan pesawat pada suatu bandara, sistem produksi sederhana, penjadwalan sistem jaringan kereta, menentukan jalur tercepat dan model sistem antrian, sehingga dapat dikatakan metode dalam menemukan nilai eigen dan vektor eigen merupakan ilmu pengetahuan yang digunakan untuk membantu mempermudah kehidupan manusia dalam kehidupan sehari-hari. Allah SWT berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 183-184, yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ كُتِبَ عَلَيۡكُمُ ٱلصِّيَامُ كَمَا كُتِبَ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن قَبۡلِكُمۡ لَعَلَّكُمۡ تَتَّقُونَ
﴿١٨٣﴾ أَيَّامٗا مَّعۡدُودَٰتٖۚ فَمَن كَانَ مِنكُم مَّرِيضًا أَوۡ عَلَىٰ سَفَرٖ فَعِدَّةٞ مِّنۡ أَيَّامٍ أُخَرَۚ وَعَلَى
ٱلَّذِينَ يُطِيقُونَهُۥ فِدۡيَةٞ طَعَامُ مِسۡكِينٖۖ فَمَن تَطَوَّعَ خَيۡرٗا فَهُوَ خَيۡرٞ لَّهُۥۚ وَأَن تَصُومُواْ خَيۡرٞ
لَّكُمۡۖ إِن كُنتُمۡ تَعۡلَمُونَ ﴿١٨٤﴾

Artinya: *"Hai orang-orang yang beriman, diwajibkan atas kamu berpuasa sebagaimana diwajibkan atas orang-orang sebelum kamu agar kamu bertakwa, (yaitu) dalam beberapa hari yang tertentu. Maka barangsiapa diantara kamu ada yang sakit atau dalam perjalanan (lalu ia berbuka), maka (wajiblah baginya berpuasa) sebanyak hari yang ditinggalkan itu pada hari-hari yang lain. Dan wajib bagi orang-orang yang berat menjalankannya (jika mereka tidak berpuasa) membayar fidyah, (yaitu): memberi makan seorang miskin. Barangsiapa yang dengan kerelaan hati mengerjakan kebajikan, maka itulah yang lebih baik baginya. Dan berpuasa lebih baik bagimu jika kamu mengetahui"* (Q.S. Al-Baqarah:183-184).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa permasalahan itu terjadi jika harapan berbeda dengan kenyataan yang terjadi. Suatu permasalahan pasti terdapat kemudahan bagi seseorang yang menjalankannya. Ayat di atas menjelaskan bahwa kemudahan seseorang tidak terlepas dari adanya suatu perantara. Perantara di sini dapat berupa sesuatu yang berwujud (misalnya benda-benda) maupun sesuatu yang tidak terwujud (misalnya ilmu pengetahuan). Ayat itu berhubungan dengan masalah nilai eigen dan vektor eigen, karena setiap permasalahan pasti ada solusinya ataupun kemudahan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Berdasarkan dari ayat tersebut, maka dalam matematika penyelesaian suatu permasalahan dapat dilakukan dengan mencari solusi karakteristiknya. Suatu masalah dapat diselesaikan dengan beberapa cara untuk memperoleh solusinya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai sifat-sifat matriks serta nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-Plus dengan menggunakan operasi $\oplus$ menyatakan maksimum dan operasi $\otimes$ menyatakan penjumlahan, dalam penelitian ini menggunakan matriks Monge.

Matriks Monge adalah suatu matriks A dengan unsur bilangan real berukuran $m \times n$, jika dan hanya jika memenuhi: $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$ untuk semua $1 \leq i < r \leq m, 1 \leq j < s \leq n$, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dengan syarat } a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$$

untuk semua $1 \leq i < r \leq m, 1 \leq j < s \leq n$ (Burkard, 1995:1).

Bab ini dibagi dalam 2 bagian utama. Pada bagian pertama akan ditunjukkan sifat yang memenuhi matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus, pada bagian kedua akan dilanjutkan dengan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus, kemudian mengetahui algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus.

3.1 Sifat Matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus

Pada aljabar linier, jika F *field* maka dapat dibentuk suatu matriks berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya adalah elemen-elemen F. Hal yang serupa dapat dikerjakan pada R_{max}, yaitu dapat dibentuk matriks A berukuran $m \times n$

dengan entri-entrinya di R_{max}. Di mana untuk operasi $\oplus$ dan operasi $\otimes$ pada R_{max} dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $R_{max}^{m\times n}$ seperti dalam definisi berikut:

Definisi 3.1:

Misal $R_{max}^{m\times n} = \{A = (a_{ij})|a_{ij} \in R_{max}\}$. Jika matriks $A \in R_{max}^{m\times n}$ memenuhi $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$ untuk semua $1 \leq i < r, 1 \leq j < s$, maka matriks A disebut matriks Monge pada Aljabar Max-Plus.

Contoh 3.1:

Akan ditunjukkan bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks Monge.

Perhatikan:

Matriks A akan dibuktikan memenuhi syarat $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$.

$A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{22} \leq a_{12} + a_{21}$$
$$5 + 3 \leq 2 + 7$$
$$8 < 9$$

$A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{23} \leq a_{13} + a_{21}$$
$$5 + 4 \leq 6 + 7$$
$$9 < 13$$

$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{12} + a_{23} \leq a_{13} + a_{22}$$
$$2 + 4 \leq 6 + 3$$
$$6 < 9$$

$A_4 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{32} \leq a_{12} + a_{31}$$
$$5 + 4 \leq 2 + 8$$
$$9 < 10$$

$A_5 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{11} + a_{33} \leq a_{13} + a_{31}$$

$A_6 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{12} + a_{33} \leq a_{13} + a_{32}$$

$$5 + 2 \leq 6 + 8 \qquad\qquad 2 + 2 \leq 6 + 4$$

$$7 < 14 \qquad\qquad 4 < 10$$

$A_7 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$ $\qquad A_8 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{21} + a_{32} \leq a_{22} + a_{31} \qquad\qquad a_{21} + a_{33} \leq a_{23} + a_{31}$$

$$7 + 4 \leq 3 + 8 \qquad\qquad 7 + 2 \leq 4 + 8$$

$$11 = 11 \qquad\qquad 9 < 12$$

$A_9 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$

$$a_{22} + a_{33} \leq a_{23} + a_{32}$$

$$3 + 2 \leq 5 + 4$$

$$5 < 9$$

Jadi matriks A memenuhi $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$, maka matriks A adalah matriks Monge.

Definisi 3.2:

Misalkan A, B matriks Monge dalam $R_{max}^{m \times n}$. Penjumlahan dari A dan B, ditulis $C = A \oplus B$, definisikan dengan $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$

$$= max\{a_{ij}, b_{ij}\}.$$

Diketahui matriks A dan B, dimana matriks A dan B merupakan matriks Monge, dari definisi 3.2 maka penjumlahan matriks Monge A dan B adalah sebagai berikut:

Misal

$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ dan

$$B_{m\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dimana } i \in \underline{m},\ j \in \underline{n}.$$

$C = A \oplus B$ dengan

$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = max\{a_{ij}, b_{ij}\}$

maka

$c_{11} = a_{11} \oplus b_{11} = max\{a_{11}, b_{11}\}$

$c_{12} = a_{12} \oplus b_{12} = max\{a_{12}, b_{12}\}$

$c_{1n} = a_{1n} \oplus b_{1n} = max\{a_{1n}, b_{1n}\}$

$c_{m1} = a_{m1} \oplus b_{m1} = max\{a_{m1}, b_{m1}\}$

$\vdots$

$c_{mn} = a_{mn} \oplus b_{mn} = max\{a_{mn}, b_{mn}\}$

diperoleh

$$C_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}\oplus b_{11} & a_{12}\oplus b_{12} & a_{13}\oplus b_{13} & \dots & a_{1n}\oplus b_{1n} \\ a_{21}\oplus b_{21} & a_{22}\oplus b_{22} & a_{23}\oplus b_{23} & \dots & a_{2n}\oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\oplus b_{m1} & a_{m2}\oplus b_{m2} & a_{m3}\oplus b_{m3} & \dots & a_{mn}\oplus b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{11} b_{11}) & max(a_{12}, b_{12}) & max(a_{13}, b_{13}) & \dots & max(a_{1n}, b_{1n}) \\ max(a_{21}, b_{21}) & max(a_{22}, b_{22}) & max(a_{23}, b_{23}) & \dots & max(a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1}, b_{m1}) & max(a_{m2}, b_{m2}) & max(a_{m3}, b_{m3}) & \dots & max(a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Contoh 3.2:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka matriks $C = A \oplus B$ yang dapat ditentukan sebagai berikut:

$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = max(a_{ij}, b_{ij})$ .... Definisi 3.2

$c_{11} = a_{11} \oplus b_{11} = 4 \oplus 3 = max\{4,3\} = 4$

$c_{12} = a_{12} \oplus b_{12} = 2 \oplus 1 = max\{2,1\} = 2$

$c_{13} = a_{13} \oplus b_{13} = 6 \oplus 4 = max\{6,4\} = 6$

$c_{21} = a_{21} \oplus b_{21} = 7 \oplus 5 = max\{7,5\} = 7$

$c_{22} = a_{22} \oplus b_{22} = 3 \oplus 1 = max\{3,1\} = 3$

$c_{23} = a_{23} \oplus b_{23} = 5 \oplus 0 = max\{5,0\} = 5$

$c_{31} = a_{31} \oplus b_{31} = 9 \oplus 8 = max\{9,8\} = 9$

$c_{32} = a_{32} \oplus b_{32} = 3 \oplus 2 = max\{3,2\} = 3$

$c_{33} = a_{33} \oplus b_{33} = 2 \oplus 1 = max\{2,1\} = 2$

Dengan menggunakan notasi matriks didapatkan matriks $C = A \oplus B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Akan ditunjukkan bahwa matriks $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks Monge.

Perhatikan:

Matriks C akan dibuktikan memenuhi syarat $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$.

$C_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{11} + c_{22} \leq c_{12} + c_{21}$$

$$4 + 3 \leq 2 + 7$$

$$7 < 9$$

$C_2 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{11} + c_{23} \leq c_{13} + c_{21}$$

$$4 + 5 \leq 6 + 7$$

$$9 < 13$$

$C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{12} + c_{23} \leq c_{13} + c_{22}$$

$$2 + 5 \leq 6 + 3$$

$C_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{11} + c_{32} \leq c_{12} + c_{31}$$

$$4 + 3 \leq 2 + 9$$

$$7 < 9$$

$$7 < 11$$

$$C_5 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$

$$c_{11} + c_{33} \leq c_{13} + c_{31}$$

$$4 + 2 \leq 6 + 9$$

$$6 < 15$$

$$C_6 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$

$$c_{12} + c_{33} \leq c_{13} + c_{32}$$

$$2 + 2 \leq 6 + 3$$

$$4 < 9$$

$$C_7 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$

$$c_{21} + c_{32} \leq c_{22} + c_{31}$$

$$7 + 3 \leq 3 + 9$$

$$10 < 12$$

$$C_8 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$

$$c_{21} + c_{33} \leq c_{23} + c_{31}$$

$$7 + 2 \leq 5 + 9$$

$$9 < 14$$

$$C_9 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$

$$c_{22} + c_{33} \leq c_{23} + c_{32}$$

$$3 + 2 \leq 5 + 3$$

$$5 < 8$$

Jadi diperoleh bahwa penjumlahan dua matriks Monge menghasilkan matriks C yang memenuhi syarat matriks Monge yaitu: $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$, sehingga matriks C merupakan matriks Monge.

Dari contoh 3.2 maka dapat disimpulkan bahwa penjumlahan dua matriks Monge dengan ukuran yang bersesuaian akan dihasilkan matriks Monge yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 3.1:

Misalkan A dan B matriks Monge dalam $R_{max}^{m \times n}$. Maka $C = A \oplus B$ juga matriks Monge.

Bukti:

Karena $C = A \oplus B$ maka

$$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} .$$

Akan ditunjukkan bahwa

$$c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj} .$$

Karena A dan B matriks Monge, maka

$$a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$$

dan

$$b_{ij} + b_{rs} \leq b_{is} + b_{rj} .$$

Maka diperoleh

$$(a_{ij} \oplus b_{ij}) + (a_{rs} \oplus b_{rs}) \leq (a_{is} \oplus b_{is}) + (a_{rj} \oplus b_{rj})$$

$$c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj} .$$

Terbukti bahwa C matriks Monge .

Definisi 3.3:

Misalkan A matriks Monge dalam $R_{max}^{m \times n}$ dan α skalar. Perkalian dari A dan α, ditulis $C = \alpha \otimes A$ didefinisikan dengan $c_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$, untuk $i \in \underline{m}$, $j \in \underline{n}$.

Diketahui matriks A, di mana matriks A merupakan matriks Monge, dari definisi 3.3 maka perkalian matriks Monge A dan skalar α adalah sebagai berikut:

Misal

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ dan skalar α.

$C = \alpha \otimes A$ dengan

$c_{ij} = \alpha \otimes a_{ij} = \alpha + a_{ij}$

maka

$c_{11} = \alpha \otimes a_{11} = \alpha + a_{11}$

$c_{12} = \alpha \otimes a_{12} = \alpha + a_{12}$

$c_{1n} = \alpha \otimes a_{1n} = \alpha + a_{1n}$

$c_{m1} = \alpha \otimes a_{m1} = \alpha + a_{m1}$

$\vdots$

$c_{mn} = \alpha \otimes a_{mn} = \alpha + a_{mn}$

diperoleh

$$C_{m\times n} = \begin{bmatrix} \alpha\otimes a_{11} & \alpha\otimes a_{12} & \alpha\otimes a_{13} & \dots & \alpha\otimes a_{1n} \\ \alpha\otimes a_{21} & \alpha\otimes a_{22} & \alpha\otimes a_{23} & \dots & \alpha\otimes a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha\otimes a_{m1} & \alpha\otimes a_{m2} & \alpha\otimes a_{m3} & \dots & \alpha\otimes a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha + a_{11} & \alpha + a_{12} & \alpha + a_{13} & \dots & \alpha + a_{1n} \\ \alpha + a_{21} & \alpha + a_{22} & \alpha + a_{23} & \dots & \alpha + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha + a_{m1} & \alpha + a_{m2} & \alpha + a_{m3} & \dots & \alpha + a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Contoh 3.3:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan skalar $\alpha = 4$, maka matriks $C = \alpha \otimes A$ yang ditentukan sebagai berikut:

$c_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$ .... Definisi 3.3

$c_{11} = \alpha \otimes a_{11} = 4\otimes 3 = 4 + 3 = 7$

$c_{12} = \alpha \otimes a_{12} = 4\otimes 1 = 4 + 1 = 5$

$c_{13} = \alpha \otimes a_{13} = 4\otimes 4 = 4 + 4 = 8$

$c_{21} = \alpha \otimes a_{21} = 4 \otimes 5 = 4 + 5 = 9$

$c_{22} = \alpha \otimes a_{22} = 4 \otimes 1 = 4 + 1 = 5$

$c_{23} = \alpha \otimes a_{23} = 4 \otimes 0 = 4 + 0 = 4$

$c_{31} = \alpha \otimes a_{31} = 4 \otimes 8 = 4 + 8 = 12$

$c_{32} = \alpha \otimes a_{32} = 4 \otimes 2 = 4 + 2 = 6$

$c_{33} = \alpha \otimes a_{33} = 4 \otimes 1 = 4 + 1 = 5$

Dengan menggunakan notasi matriks didapatkan matriks $C = \alpha \otimes A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 4 \\ 12 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Akan dibuktikan bahwa matriks $C = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 4 \\ 12 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ adalah matriks Monge.

Perhatikan:

Matriks C akan dibuktikan memenuhi syarat $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$.

$C_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$c_{11} + c_{22} \leq c_{12} + c_{21}$

$7 + 5 \leq 5 + 9$

$12 < 14$

$C_2 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$c_{11} + c_{23} \leq c_{13} + c_{21}$

$7 + 4 \leq 8 + 9$

$11 < 17$

$C_3 = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$c_{12} + c_{23} \leq c_{13} + c_{22}$

$5 + 4 \leq 8 + 5$

$9 < 13$

$C_4 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$c_{11} + c_{31} \leq c_{12} + c_{32}$

$7 + 6 \leq 5 + 12$

$13 < 17$

$C_5 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$c_{11} + c_{33} \leq c_{13} + c_{31}$

$C_6 = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$c_{12} + c_{33} \leq c_{13} + c_{32}$

$$7 + 5 \leq 8 + 12$$
$$12 < 20$$

$$5 + 5 \leq 8 + 6$$
$$10 < 14$$

$C_7 = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{21} + c_{32} \leq c_{22} + c_{31}$$
$$9 + 6 \leq 5 + 12$$
$$14 < 17$$

$C_8 = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{21} + c_{33} \leq c_{23} + c_{31}$$
$$9 + 5 \leq 4 + 12$$
$$14 < 16$$

$C_9 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{22} + c_{33} \leq c_{23} + c_{32}$$
$$5 + 5 \leq 4 + 6$$
$$10 = 10$$

Jadi diperoleh bahwa perkalian skalar dengan matriks Monge menghasilkan matriks C yang memenuhi syarat matriks Monge yaitu: $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$, sehingga matriks C merupakan matriks Monge.

Dari contoh 3.3 maka dapat dikatakan bahwa perkalian matriks Monge dengan skalar dihasilkan matriks Monge yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 3.2:

Misalkan A matriks Monge dengan skalar α dalam R_{max}^{mxn}. Maka $C = \alpha \otimes A$ juga matriks Monge.

Bukti:

Karena $C = \alpha \otimes$A maka

$$c_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}.$$

Akan ditunjukkan bahwa: $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$.

Karena matriks A matriks Monge, maka

$$a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj} .$$

Maka diperoleh

$$(\alpha \otimes a_{ij}) + (\alpha \otimes a_{rs}) \leq (\alpha \otimes a_{is}) + (\alpha \otimes a_{rj})$$

$$c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj} .$$

Terbukti bahwa C adalah matriks Monge.

Definisi 3.4:

Misalkan A matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times p}$ dan B matriks Monge dalam $R_{max}^{p\times n}$. Perkalian dari A dan B, ditulis $C = A \otimes B$, didefinisikan dengan

$$C = \oplus_{k=1}^{p} A \otimes B$$

$$c_{ij} = \oplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj}$$

$$= max_{k\in j}\{a_{ik} + b_{kj}\}$$

untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$. Perkalian matriks ini serupa dalam perkalian matriks aljabar biasa dimana $\oplus$ diganti dengan max dan $\otimes$ diganti dengan $+$.

Diketahui matriks $A \in R_{max}^{m\times p}$ dan matriks $B \in R_{max}^{p\times n}$ di mana matriks A dan matriks B adalah matriks Monge, dari definisi 3.4 maka perkalian matriks A dan matriks B adalah sebagai berikut:

Misal

$$A_{m\times p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \text{dan } B_{p\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$C = A \otimes B$ dengan

$$c_{ij} = \oplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj}$$

maka

$c_{11} = \oplus_{k=1}^{p} a_{1k} \otimes b_{k1}$

$c_{12} = \oplus_{k=1}^{p} a_{1k} \otimes b_{k2}$

$\vdots$

$c_{mn} = \oplus_{k=1}^{p} a_{mk} \otimes b_{kn}$

diperoleh

$$C_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \oplus_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{p}} a_{1k} \otimes b_{k1} & \cdots & \oplus_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{p}} a_{1k} \otimes b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \oplus_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{p}} a_{mk} \otimes b_{k1} & \cdots & \oplus_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{p}} a_{mk} \otimes b_{kn} \end{bmatrix}$$

Contoh 3.4:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka maktriks $C = A \otimes B$ yang dapat ditentukan sebagai berikut:

$c_{ij} = \oplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj}$ .... Definisi 3.4

1. Substitusi nilai $p = 3, i = 1, k = 1 - 3$ dan $j = 1$

$c_{11} = \oplus_{k=1}^{3} a_{1k} \otimes b_{k1}$

$= (a_{11} \otimes b_{11}) \oplus (a_{12} \otimes b_{21}) \oplus (a_{13} \otimes b_{31})$

$= max\{(a_{11} \otimes b_{11}), (a_{12} \otimes b_{21}), (a_{13} \otimes b_{31})\}$

$= max\{(4 \otimes 3), (2 \otimes 5), (6 \otimes 8)\}$

$= max\{(4 + 3), (2 + 5), (6 + 8)\}$

$= max\{7,7,14\}$

$= 14.$

2. Substitusi nilai $p = 3, i = 1, k = 1 - 3$ dan $j = 2$

$c_{12} = \oplus_{k=1}^{3} a_{1k} \otimes b_{k2}$

$= (a_{11} \otimes b_{12}) \oplus (a_{12} \otimes b_{22}) \oplus (a_{13} \otimes b_{32})$

$= max\{(a_{11} \otimes b_{12}), (a_{12} \otimes b_{22}), (a_{13} \otimes b_{32})\}$

$= max\{(4 \otimes 1), (2 \otimes 1), (6 \otimes 2)\}$

$= max\{(4 + 1), (2 + 1), (6 + 2)\}$

$= max\{5,3,8\}$

$= 8.$

3. Substitusi nilai $p = 3, i = 1, k = 1 - 3$ dan $j = 3$

$c_{13} = \oplus_{k=1}^{3} a_{1k} \otimes b_{k3}$

$= (a_{11} \otimes b_{13}) \oplus (a_{12} \otimes b_{23}) \oplus (a_{13} \otimes b_{33})$

$= max\{(a_{11} \otimes b_{13}) \oplus (a_{12} \otimes b_{23}) \oplus (a_{13} \otimes b_{33})\}$

$= max\{(4 \otimes 4), (2 \otimes 0), (6 \otimes 1)\}$

$= max\{4 + 4, 2 + 0, 6 + 1\}$

$= max\{8,2,7\}$

$= 8.$

4. Substitusi nilai $p = 3, i = 2, k = 1 - 3$ dan $j = 1$

$c_{21} = \oplus_{k=1}^{3} a_{2k} \otimes b_{k1}$

$= (a_{21} \otimes b_{11}) \oplus (a_{22} \otimes b_{21}) \oplus (a_{23} \otimes b_{31})$

$= max\{(a_{21} \otimes b_{11}), (a_{22} \otimes b_{21}), (a_{23} \otimes b_{31})\}$

$= max\{(7 \otimes 3), (3 \otimes 5), (5 \otimes 8)\}$

$= max\{(7 + 3), (3 + 5), (5 + 8)\}$

$= max\{10,8,13\} = 13.$

5. Substitusi nilai $p = 3, i = 2, k = 1 - 3$ dan $j = 2$

$c_{22} = \oplus_{k=1}^{3} a_{2k} \otimes b_{k2}$

$= (a_{21} \otimes b_{12}) \oplus (a_{22} \otimes b_{22}) \oplus (a_{23} \otimes b_{32})$

$= max\{(a_{21} \otimes b_{12}), (a_{22} \otimes b_{22}), (a_{23} \otimes b_{32})\}$

$= max\{(7 \otimes 1), (3 \otimes 1), (5 \otimes 2)\}$

$= max\{(7 + 1), (3 + 1), (5 + 2)\}$

$= max\{8,4,7\}$

$= 8.$

6. Substitusi nilai $p = 3, i = 2, k = 1 - 3$ dan $j = 3$

$c_{23} = \oplus_{k=1}^{3} a_{2k} \otimes b_{k3}$

$= (a_{21} \otimes b_{13}) \oplus (a_{22} \otimes b_{23}) \oplus (a_{23} \otimes b_{33})$

$= max\{(a_{21} \otimes b_{13}), (a_{22} \otimes b_{23}), (a_{23} \otimes b_{33})\}$

$= max\{(7 \otimes 4), (3 \otimes 0), (5 \otimes 1)\}$

$= max\{(7 + 4), (3 + 0), (5 + 1)\}$

$= max\{11,3,6\}$

$= 11.$

7. Substitusi nilai $p = 3, i = 3, k = 1 - 3$ dan $j = 1$

$c_{31} = \oplus_{k=1}^{3} a_{3k} \otimes b_{k1}$

$= (a_{31} \otimes b_{11}) \oplus (a_{32} \otimes b_{21}) \oplus (a_{33} \otimes b_{31})$

$= max\{(a_{31} \otimes b_{11}), (a_{32} \otimes b_{21}), (a_{33} \otimes b_{31})\}$

$= max\{(9 \otimes 3), (3 \otimes 5), (2 \otimes 8)\}$

$= max\{(9 + 3), (3 + 5), (2 + 8)\}$

$= max\{12,8,10\} = 12.$

8. Substitusi nilai $p = 3, i = 3, k = 1 - 3$ dan $j = 2$

$c_{32} = \bigoplus_{k=1}^{3} a_{3k} \otimes b_{k1}$

$= (a_{31} \otimes b_{12}) \oplus (a_{32} \otimes b_{22}) \oplus (a_{33} \otimes b_{32})$

$= max\{(a_{31} \otimes b_{12}), (a_{32} \otimes b_{22}), (a_{33} \otimes b_{32})\}$

$= max\{(9 \otimes 1), (3 \otimes 1), (2 \otimes 2)\}$

$= max\{(9 + 1), (3 + 1), (2 + 2)\}$

$= max\{10,4,4\}$

$= 10.$

9. Substitusi nilai $p = 3, i = 3, k = 1 - 3$ dan $j = 3$

$c_{33} = \bigoplus_{k=1}^{3} a_{3k} \otimes b_{k1}$

$= (a_{31} \otimes b_{13}) \oplus (a_{32} \otimes b_{23}) \oplus (a_{33} \otimes b_{33})$

$= max\{(a_{31} \otimes b_{13}), (a_{32} \otimes b_{23}), (a_{33} \otimes b_{33})\}$

$= max\{(9 \otimes 4), (3 \otimes 0), (2 \otimes 1)\}$

$= max\{(9 + 4), (3 + 0), (2 + 1)\}$

$= max\{13,3,3\}$

$= 13.$

Dengan menggunakan notasi matriks didapatkan matriks $C = A \otimes B = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 8 \\ 13 & 8 & 11 \\ 12 & 10 & 13 \end{bmatrix}$

Akan ditunjukkan bahwa matriks $C = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 8 \\ 13 & 8 & 11 \\ 12 & 10 & 13 \end{bmatrix}$ adalah matriks Monge.

Perhatikan:

Matriks C akan dibuktikan memenuhi syarat $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$.

$C_1 = \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 13 & 8 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$ $C_2 = \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 13 & 11 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$

$$c_{11} + c_{22} \leq c_{12} + c_{21}$$
$$14 + 8 \leq 8 + 13$$
$$22 > 21$$

$$c_{11} + c_{23} \leq c_{13} + c_{21}$$
$$14 + 11 \leq 8 + 13$$
$$25 > 21$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$
$$c_{12} + c_{23} \leq c_{13} + c_{22}$$
$$8 + 11 \leq 8 + 8$$
$$19 < 16$$

$$C_4 = \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 12 & 10 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$
$$c_{11} + c_{32} \leq c_{12} + c_{31}$$
$$14 + 10 \leq 8 + 12$$
$$24 > 20$$

$$C_5 = \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$
$$c_{11} + c_{33} \leq c_{13} + c_{31}$$
$$14 + 13 \leq 8 + 12$$
$$27 > 20$$

$$C_6 = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 10 & 13 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$
$$c_{12} + c_{33} \leq c_{13} + c_{32}$$
$$8 + 13 \leq 8 + 10$$
$$21 > 18$$

$$C_7 = \begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 12 & 10 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$
$$c_{21} + c_{32} \leq c_{22} + c_{31}$$
$$13 + 10 \leq 8 + 12$$
$$23 > 20$$

$$C_8 = \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$
$$c_{21} + c_{33} \leq c_{23} + c_{31}$$
$$13 + 13 \leq 11 + 12$$
$$26 > 23$$

$$C_9 = \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ 10 & 13 \end{vmatrix}, c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$$
$$c_{22} + c_{33} \leq c_{23} + c_{32}$$
$$8 + 13 \leq 11 + 10$$
$$21 = 21$$

Matriks C tidak memenuhi syarat $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$ sehingga matriks C bukan merupakan matriks Monge.

Jadi diperoleh bahwa perkalian dua matriks Monge menghasilkan matriks C yang memenuhi syarat matriks Invers Monge yaitu: $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$, sehingga matriks C merupakan matriks Invers Monge bukan matriks Monge.

Dari contoh 3.4 maka dapat disimpulkan bahwa perkalian dua matriks Monge dengan ukuran yang bersesuaian akan dihasilkan matriks Invers Monge, yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 3.3:

Misalkan A dan B matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$. Maka $C = A \otimes B$ merupakan matriks Invers Monge.

Bukti:

Karena $C = A \otimes B$ maka

$$c_{ij} = \oplus_{k=1}^{p} a_{mk} \otimes b_{kn}.$$

Akan ditunjukkan bahwa

$$c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}.$$

Karena A dan B matriks Monge, maka

$$a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$$

dan

$$b_{ij} + b_{rs} \leq b_{is} + b_{rj}.$$

Maka diperoleh

$$\left(\oplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj}\right) + \left(\oplus_{k=1}^{p} a_{rk} \otimes b_{ks}\right) \leq \left(\oplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{ks}\right) + \left(\oplus_{k=1}^{p} a_{rk} \otimes b_{kj}\right)$$

$$c_{ij} + c_{rs} \geq c_{is} + c_{rj}.$$

Terbukti bahwa C matriks Invers Monge.

Contoh 3.5:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka matriks A⊕A = A yang dapat ditentukan sebagai berikut:

$$A \oplus A = A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(4,4) & max(2,2) & max(6,6) \\ max(7,7) & max(3,3) & max(5,5) \\ max(9,9) & max(3,3) & max(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Dari contoh 3.5 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.4:

Misalkan A matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$. Maka terdapat sifat idempoten terhadap operasi ⊕, sehingga berlaku: A⊕A = A

Bukti:

Ambil sebarang matriks Monge $A \in R_{max}^{m\times n}$, maka

$A = A \oplus A$

$= [A \oplus A]_{ij}$

$= A_{ij} \oplus A_{ij}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{..Definisi 3.2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus a_{11} & a_{12} \oplus a_{12} & a_{13} \oplus a_{13} & \cdots & a_{1n} \oplus a_{1n} \\ a_{21} \oplus a_{21} & a_{22} \oplus a_{22} & a_{23} \oplus a_{23} & \cdots & a_{2n} \oplus a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus a_{m1} & a_{m2} \oplus a_{m2} & a_{m3} \oplus a_{m3} & \cdots & a_{mn} \oplus a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{11}, a_{11}) & max(a_{12}, a_{12}) & max(a_{13}, a_{13}) & \cdots & max(a_{1n}, a_{1n}) \\ max(a_{21}, a_{21}) & max(a_{22}, a_{22}) & max(a_{23}, a_{23}) & \cdots & max(a_{2n}, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1}, a_{m1}) & max(a_{m2}, a_{m2}) & max(a_{m3}, a_{m3}) & \cdots & max(a_{mn}, a_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

= A .... Terbukti.

Contoh 3.6:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka matriks A⊕B = B⊕A dapat ditentukan sebagai berikut:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\oplus3 & 2\oplus1 & 6\oplus4 \\ 7\oplus5 & 3\oplus1 & 5\oplus0 \\ 9\oplus8 & 3\oplus2 & 2\oplus1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\oplus4 & 1\oplus2 & 4\oplus6 \\ 5\oplus7 & 1\oplus3 & 0\oplus5 \\ 8\oplus9 & 2\oplus3 & 1\oplus2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(4,3) & max(2,1) & max(6,4) \\ max(7,5) & max(3,1) & max(5,0) \\ max(9,8) & max(3,2) & max(2,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(3,4) & max(1,2) & max(4,6) \\ max(5,7) & max(1,3) & max(0,5) \\ max(8,9) & max(2,3) & max(1,2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Dari contoh 3.6 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.5:

Misalkan A dan B matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$ dengan ukuran matriks yang bersesuaian, maka berlaku sifat komutatif pada operasi $\oplus$:

$$A\oplus B = B\oplus A$$

Bukti:

Ambil sebarang matriks Monge $A, B \in R_{max}^{m\times n}$, maka

$$\begin{aligned} C &= A\oplus B \\ &= [A\oplus B]_{ij} \\ &= A_{ij}\oplus B_{ij} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}\oplus b_{11} & a_{12}\oplus b_{12} & a_{13}\oplus b_{13} & \cdots & a_{1n}\oplus b_{1n} \\ a_{21}\oplus b_{21} & a_{22}\oplus b_{22} & a_{23}\oplus b_{23} & \cdots & a_{2n}\oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\oplus b_{m1} & a_{m2}\oplus b_{m2} & a_{m3}\oplus b_{m3} & \cdots & a_{mn}\oplus b_{mn} \end{bmatrix} \text{............. Definisi 3.2} \\ &= \begin{bmatrix} max(a_{11}, b_{11}) & max(a_{12}, b_{12}) & max(a_{13}, b_{13}) & \cdots & max(a_{1n}, b_{1n}) \\ max(a_{21}, b_{21}) & max(a_{22}, b_{22}) & max(a_{23}, b_{23}) & \cdots & max(a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1}, b_{m1}) & max(a_{m2}, b_{m2}) & max(a_{m3}, b_{m3}) & \cdots & max(a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} max(b_{11}, a_{11}) & max(b_{12}, a_{12}) & max(b_{13}, a_{13}) & \dots & max(b_{1n}, a_{1n}) \\ max(b_{21}, a_{21}) & max(b_{22}, a_{22}) & max(b_{23}, a_{23}) & \dots & max(b_{2n}, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(b_{m1}, a_{m1}) & max(b_{m2}, a_{m2}) & max(b_{m3}, a_{m3}) & \dots & max(b_{mn}, a_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} \oplus a_{11} & b_{12} \oplus a_{12} & b_{13} \oplus a_{13} & \dots & b_{1n} \oplus a_{1n} \\ b_{21} \oplus a_{21} & b_{22} \oplus a_{22} & b_{23} \oplus a_{23} & \dots & b_{2n} \oplus a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} \oplus a_{m1} & b_{m2} \oplus a_{m2} & b_{m3} \oplus a_{m3} & \dots & b_{mn} \oplus a_{mn} \end{bmatrix} \text{........... Komutatif}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= B_{ij} \oplus A_{ij}$$

$$= [B \oplus A]_{ij}$$

$= B\oplus$A.. Terbukti

Terbukti bahwa A⊕B = B⊕A.

Contoh 3.7:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$,

maka matriks A⊕(B⊕C) = (A⊕B)⊕C yang dapat ditentukan sebagai berikut:

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3\oplus2 & 1\oplus2 & 4\oplus3 \\ 5\oplus6 & 1\oplus5 & 0\oplus4 \\ 8\oplus4 & 2\oplus6 & 1\oplus2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\oplus3 & 2\oplus1 & 6\oplus4 \\ 7\oplus5 & 3\oplus1 & 5\oplus0 \\ 9\oplus8 & 3\oplus2 & 2\oplus1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} max(3,2) & max(1,2) & (4,3) \\ max(5,6) & max(1,5) & (0,4) \\ max(8,4) & max(2,6) & (1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(4,3) & max(2,1) & max(6,4) \\ max(7,5) & max(3,1) & max(5,0) \\ max(9,8) & max(3,2) & max(2,1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\oplus 3 & 2\oplus 2 & 6\oplus 4 \\ 7\oplus 6 & 3\oplus 5 & 5\oplus 4 \\ 9\oplus 8 & 3\oplus 6 & 2\oplus 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\oplus 2 & 2\oplus 2 & 6\oplus 3 \\ 7\oplus 6 & 3\oplus 5 & 5\oplus 4 \\ 9\oplus 4 & 3\oplus 6 & 2\oplus 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(4,3) & max(2,2) & max(6,4) \\ max(7,6) & max(3,5) & max(5,4) \\ max(9,8) & max(3,6) & max(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(4,2) & max(2,2) & max(6,3) \\ max(7,6) & max(3,5) & max(5,4) \\ max(9,4) & max(3,6) & max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \right)$

$$= \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dari contoh 3.7 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.6:

Misalkan A, B dan C matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$ dengan ukuran matriks yang bersesuaian, maka memiliki sifat asosiatif pada operasi $\oplus$:

$$(A\oplus B)\oplus C = A\oplus (B\oplus C)$$

Bukti:

Ambil sebarang matriks Monge $A, B, C \in R_{max}^{m\times n}$, maka

$D = (A\oplus B)\oplus C$

$= [(A\oplus B)\oplus C]_{ij}$

$= (A_{ij}\oplus B_{ij})\oplus C_{ij}$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) \oplus \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\oplus b_{11} & a_{12}\oplus b_{12} & a_{13}\oplus b_{13} & \cdots & a_{1n}\oplus b_{1n} \\ a_{21}\oplus b_{21} & a_{22}\oplus b_{22} & a_{23}\oplus b_{23} & \cdots & a_{2n}\oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\oplus b_{m1} & a_{m2}\oplus b_{m2} & a_{m3}\oplus b_{m3} & \cdots & a_{mn}\oplus b_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{11},b_{11}) & max(a_{12},b_{12}) & max(a_{13},b_{13}) & \cdots & max(a_{1n},b_{1n}) \\ max(a_{21},b_{21}) & max(a_{22},b_{22}) & max(a_{23},b_{23}) & \cdots & max(a_{2n},b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1},b_{m1}) & max(a_{m2},b_{m2}) & max(a_{m3},b_{m3}) & \cdots & max(a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{11},b_{11})\oplus c_{11} & max(a_{12},b_{12})\oplus c_{12} & max(a_{13},b_{13})\oplus c_{13} & \cdots & max(a_{1n},b_{1n})\oplus c_{1n} \\ max(a_{21},b_{21})\oplus c_{21} & max(a_{22},b_{22})\oplus c_{22} & max(a_{23},b_{23})\oplus c_{23} & \cdots & max(a_{2n},b_{2n})\oplus c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1},b_{m1})\oplus c_{m1} & max(a_{m2},b_{m2})\oplus c_{m2} & max(a_{m3},b_{m3})\oplus c_{m3} & \cdots & max(a_{mn},b_{mn})\oplus c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max((a_{11},b_{11}),c_{11}) & max((a_{12},b_{12}),c_{12}) & max((a_{13},b_{13}),c_{13}) & \cdots & max((a_{1n},b_{1n}),c_{1n}) \\ max((a_{21},b_{21}),c_{21}) & max((a_{22},b_{22}),c_{22}) & max((a_{23},b_{23}),c_{23}) & \cdots & max((a_{2n},b_{2n}),c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max((a_{m1},b_{m1}),c_{m1}) & max((a_{m2},b_{m2}),c_{m2}) & max((a_{m3},b_{m3}),c_{m3}) & \cdots & max((a_{mn},b_{mn}),c_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{11},(b_{11},c_{11})) & max(a_{12},(b_{12},c_{12})) & max(a_{13},(b_{13},c_{13})) & \cdots & max(a_{1n},(b_{1n},c_{1n})) \\ max(a_{21},(b_{21},c_{21})) & max(a_{22},(b_{22},c_{22})) & max(a_{23},(b_{23},c_{23})) & \cdots & max(a_{2n},(b_{1n},c_{2n})) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1},(b_{m1},c_{m1})) & max(a_{m2},(b_{m2},c_{m2})) & max(a_{m3},(b_{m3},c_{m3})) & \cdots & max(a_{mn},(b_{mn},c_{mn})) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{11}\oplus(b_{11},c_{11})) & max(a_{12}\oplus(b_{12},c_{12})) & max(a_{13}\oplus(b_{13},c_{13})) & \cdots & max(a_{1n}\oplus(b_{1n},c_{1n})) \\ max(a_{21}\oplus(b_{21},c_{21})) & max(a_{22}\oplus(b_{22},c_{22})) & max(a_{23}\oplus(b_{23},c_{23})) & \cdots & max(a_{2n}\oplus(b_{1n},c_{2n})) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1}\oplus(b_{m1},c_{m1})) & max(a_{m2}\oplus(b_{m2},c_{m2})) & max(a_{m3}\oplus(b_{m3},c_{m3})) & \cdots & max(a_{mn}\oplus(b_{mn},c_{mn})) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} max(b_{11},c_{11}) & max(b_{12},c_{12}) & max(b_{13},c_{13}) & \cdots & max(b_{1n},c_{1n}) \\ max(b_{21},c_{21}) & max(b_{22},c_{22}) & max(b_{23},c_{23}) & \cdots & max(b_{2n},c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(b_{m1},c_{m1}) & max(b_{m2},c_{m2}) & max(b_{m3},c_{m3}) & \cdots & max(b_{mn},c_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11}\oplus c_{11} & b_{12}\oplus c_{12} & b_{13}\oplus c_{13} & \cdots & b_{1n}\oplus c_{1n} \\ b_{21}\oplus c_{21} & b_{22}\oplus c_{22} & b_{23}\oplus c_{23} & \cdots & b_{2n}\oplus c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}\oplus c_{m1} & b_{m2}\oplus c_{m2} & b_{m3}\oplus c_{m3} & \cdots & b_{mn}\oplus c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{A_{ij}} \oplus \left(\mathrm{B_{ij}} \oplus \mathrm{C_{ij}}\right)$$

$= [A\oplus(B\oplus C)]_{ij}$

$= A\oplus(B\oplus C)$ .... Terbukti

Terbukti bahwa $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C)$.

Contoh 3.8:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$,

maka matriks $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$ yang dapat ditentukan sebagai berikut:

$$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} max((4+3),(2+5),(6+8)) & max((4+1),(2+1),(6+2)) & max((4+4),(2+0),(6+1)) \\ max((7+3),(3+5),(5+8)) & max((7+1),(3+1),(5+2)) & max((7+4),(3+0),(5+1)) \\ max((9+3),(3+5),(2+8)) & max((9+1),(3+1),(2+2)) & max((9+4),(3+0),(2+1)) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} max((3+2),(1+6),(4+4)) & max((3+2),(1+5),(4+6)) & max((3+3),(1+4),(4+2)) \\ max((5+2),(1+6),(0+4)) & max((5+2),(1+5),(0+6)) & max((5+3),(1+4),(0+2)) \\ max((8+2),(2+6),(1+4)) & max((8+2),(2+5),(1+6)) & max((8+3),(2+4),(1+2)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(7,7,14) & max(5,3,8) & max(8,2,7) \\ max(10,8,13) & max(8,4,7) & max(11,3,6) \\ max(12,8,10) & max(10,4,4) & max(13,3,3) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} max(5,7,8) & max(5,6,10) & max(6,5,6) \\ max(7,7,4) & max(7,6,6) & max(8,5,2) \\ max(10,8,5) & max(10,7,7) & max(11,6,3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 8 & 8 \\ 13 & 8 & 11 \\ 12 & 10 & 13 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \\ 7 & 7 & 8 \\ 10 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max((14+2),(8+6),(8+4)) & max((14+2),(8+5),(8+6)) & max((14+3),(8+4),(8+2)) \\ max((13+2),(8+6),(11+4)) & max((13+2),(8+5),(11+6)) & max((13+3),(8+4),(11+2)) \\ max((12+2),(10+6),(13+4)) & max((12+2),(10+5),(13+6)) & max((12+3),(10+4),(13+2)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max((4+8),(2+7),(6+10)) & max((4+10),(2+7),(6+10)) & max((4+6),(2+8),(6+11)) \\ max((7+8),(3+7),(5+10)) & max((7+10),(3+7),(5+10)) & max((7+6),(3+8),(5+11)) \\ max((9+8),(3+7),(2+10)) & max((9+10),(3+7),(2+10)) & max((9+6),(3+8),(2+11)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(16,14,12) & max(16,13,14) & max(17,12,10) \\ max(15,14,15) & max(15,13,17) & max(16,12,13) \\ max(14,16,17) & max(14,15,19) & max(15,14,15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(12,9,16) & max(14,9,16) & max(10,10,17) \\ max(15,10,15) & max(17,10,15) & max(13,11,16) \\ max(17,10,12) & max(19,10,12) & max(15,11,13) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 16 & 17 \\ 15 & 17 & 16 \\ 17 & 19 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 17 \\ 15 & 17 & 16 \\ 17 & 19 & 15 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right).$$

Dari contoh 3.8 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.7:

Misal A, B dan C matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$ dengan ukuran matriks yang bersesuaian, maka terdapat sifat asosiatif pada operasi ⊗:

$$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$$

Bukti:

Ambil sebarang matriks Monge $A \in R_{max}^{m\times p}$, $B \in R_{max}^{p\times q}$, $C \in R_{max}^{p\times n}$, maka

$D = (A\otimes B)\otimes C$

$d_{ij} = (a_{ij}\otimes b_{ij})\otimes c_{ij}$

$= \oplus_{k=1}^{q}(\oplus_{k=1}^{p} a_{il}\otimes b_{lk})\otimes c_{kj}$ .... Definisi 3.4

$= \oplus_{k=1}^{q}\oplus_{k=1}^{p} a_{il}\otimes b_{lk}\otimes c_{kj}$

$= \oplus_{k=1}^{p} a_{il}\otimes(\oplus_{k=1}^{q} b_{lk}\otimes c_{kj})$ .... Sifat assosiatif

$D = A\otimes(B\otimes C)$.. Terbukti

Jadi terbukti bahwa $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$.

Contoh 3.9:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, maka $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} max(3,2) & max(1,2) & max(4,3) \\ max(5,6) & max(1,5) & max(0,4) \\ max(8,4) & max(2,6) & max(1,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max\big((4+3),(2+5),(6+8)\big) & max\big((4+1),(2+1),(6+2)\big) & max\big((4+4),(2+0),(6+1)\big) \\ max\big((7+3),(3+5),(5+8)\big) & max\big((7+1),(3+1),(5+2)\big) & max\big((7+4),(3+0),(5+1)\big) \\ max\big((9+3),(3+5),(2+8)\big) & max\big((9+1),(3+1),(2+2)\big) & max\big((9+4),(3+0),(2+1)\big) \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} max\big((4+2),(2+6),(6+4)\big) & max\big((4+2),(2+5),(6+6)\big) & max\big((4+3),(2+4),(6+2)\big) \\ max\big((7+2),(3+6),(5+4)\big) & max\big((7+2),(3+5),(5+6)\big) & max\big((7+3),(3+4),(5+2)\big) \\ max\big((9+2),(3+6),(2+4)\big) & max\big((9+2),(3+5),(2+6)\big) & max\big((9+3),(3+4),(2+2)\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(7,7,14) & max(5,3,8) & max(8,2,7) \\ max(10,8,13) & max(8,4,7) & max(11,3,6) \\ max(12,8,10) & max(10,4,4) & max(13,3,3) \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} max(6,8,10) & max(8,7,12) & max(7,6,8) \\ max(9,9,9) & max(9,8,11) & max(10,7,7) \\ max(11,9,6) & max(11,8,8) & max(11,7,4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max\big((4+3),(2+6),(6+8)\big) & max\big((4+2),(2+5),(6+6)\big) & max\big((4+4),(2+4),(6+2)\big) \\ max\big((7+3),(3+6),(5+8)\big) & max\big((7+2),(3+5),(5+6)\big) & max\big((7+4),(3+4),(5+2)\big) \\ max\big((9+3),(3+6),(2+8)\big) & max\big((9+2),(3+5),(2+6)\big) & max\big((9+4),(3+4),(2+2)\big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 8 & 8 \\ 13 & 8 & 11 \\ 12 & 10 & 13 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 \\ 9 & 11 & 10 \\ 11 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(7,8,14) & max(6,7,12) & max(8,6,8) \\ max(10,9,13) & max(9,8,11) & max(11,7,7) \\ max(12,9,10) & max(11,8,8) & max(13,7,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(14,10) & max(8,12) & max(8,8) \\ max(13,9) & max(8,11) & max(11,10) \\ max(12,11) & max(10,11) & max(13,11) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}14 & 12 & 8\\13 & 11 & 11\\12 & 11 & 13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14 & 12 & 8\\13 & 11 & 11\\12 & 11 & 13\end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\7 & 3 & 5\\9 & 3 & 2\end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\5 & 1 & 0\\8 & 2 & 1\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\6 & 5 & 4\\4 & 6 & 2\end{bmatrix}\right) =$

$$\left(\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\7 & 3 & 5\\9 & 3 & 2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\5 & 1 & 0\\8 & 2 & 1\end{bmatrix}\right) \oplus \left(\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\7 & 3 & 5\\9 & 3 & 2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\6 & 5 & 4\\4 & 6 & 2\end{bmatrix}\right).$$

Dari contoh 3.9 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.8:

Misal A, B dan C matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$ dengan ukuran matriks yang bersesuaian, maka terdapat sifat distributif operasi ⊗ terhadap operasi ⊕:

$$\mathrm{A}\otimes(\mathrm{B}\oplus\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\oplus(\mathrm{A}\otimes\mathrm{C})$$

Bukti:

Ambil sebarang matriks Monge $A \in R_{max}^{m\times p}$ dan $B, C \in R_{max}^{q\times n}$, maka

$\mathrm{D} = \mathrm{A}\otimes(\mathrm{B}\oplus\mathrm{C})$

$\mathrm{d_{ij}} = \mathrm{a_{ij}}\otimes(\mathrm{b_{ij}}\oplus\mathrm{c_{ij}})$

$= \oplus_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{p}} a_{ik}\otimes(b_{kj} \oplus c_{kj})$ .... Definisi 3.4

$= \oplus_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{p}} (a_{ik}\otimes b_{kj} \oplus a_{ik}\otimes c_{kj})$ .... Sifat distributif kiri

$= (\oplus_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{p}} a_{ik}\otimes b_{kj})\oplus(\oplus_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{p}} a_{ik}\otimes c_{kj})$

$= (a_{ik}\otimes b_{kj})\oplus(a_{ik}\otimes c_{kj})$

$\mathrm{D} = (\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\oplus(\mathrm{A}\otimes\mathrm{C})$.................................. Terbukti

Terbukti bahwa $\mathrm{A}\otimes(\mathrm{B}\oplus\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\oplus(\mathrm{A}\otimes\mathrm{C})$.

Contoh 3.10:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, maka $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} max(4,3) & max(2,1) & max(6,4) \\ max(7,5) & max(3,1) & max(5,0) \\ max(9,8) & max(3,2) & max(2,1) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max\big((4+2),(2+6),(6+4)\big) & max\big((4+2),(2+5),(6+6)\big) & max\big((4+3),(2+4),(6+2)\big) \\ max\big((7+2),(3+6),(5+4)\big) & max\big((7+2),(3+5),(5+6)\big) & max\big((7+3),(3+4),(5+2)\big) \\ max\big((9+2),(3+6),(2+4)\big) & max\big((9+2),(3+5),(2+6)\big) & max\big((9+3),(3+4),(2+2)\big) \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} max\big((3+2),(1+6),(4+4)\big) & max\big((3+2),(1+5),(4+6)\big) & max\big((3+3),(1+4),(4+2)\big) \\ max\big((5+2),(1+6),(0+4)\big) & max\big((5+2),(1+5),(0+6)\big) & max\big((5+3),(1+4),(0+2)\big) \\ max\big((8+2),(2+6),(1+4)\big) & max\big((8+2),(2+5),(1+6)\big) & max\big((8+3),(2+4),(1+2)\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(6,8,10) & max(6,7,12) & max(7,6,8) \\ max(9,9,9) & max(9,8,11) & max(10,7,7) \\ max(11,9,6) & max(11,8,8) & max(12,7,4) \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} max(5,7,8) & max(5,6,10) & max(6,5,6) \\ max(7,7,4) & max(7,6,6) & max(8,5,2) \\ max(10,8,5) & max(10,7,7) & max(11,6,3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max\big((4+2),(2+6),(6+4)\big) & max\big((4+2),(2+5),(6+6)\big) & max\big((4+3),(2+4),(6+2)\big) \\ max\big((7+2),(3+6),(5+4)\big) & max\big((7+2),(3+5),(5+6)\big) & max\big((7+3),(3+4),(5+2)\big) \\ max\big((9+2),(3+6),(2+4)\big) & max\big((9+2),(3+5),(2+6)\big) & max\big((9+3),(3+4),(2+2)\big) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 \\ 9 & 11 & 10 \\ 11 & 11 & 12 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \\ 7 & 7 & 8 \\ 10 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(6,8,10) & max(6,7,12) & max(7,6,8) \\ max(9,9,9) & max(9,8,11) & max(10,7,7) \\ max(11,9,6) & max(11,8,8) & max(12,7,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(10,8) & max(12,10) & max(8,6) \\ max(9,7) & max(11,7) & max(10,8) \\ max(11,10) & max(11,10) & max(12,11) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 \\ 9 & 11 & 10 \\ 11 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 \\ 9 & 11 & 10 \\ 11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} =$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right).$$

Dari contoh 3.10 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.9:

Misalkan A, B dan C matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$ dengan ukuran matriks yang bersesuaian, maka terdapat sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$(A\oplus B)\otimes C = (A\otimes C)\oplus(B\otimes C)$$

Bukti:

Ambil sebarang matriks Monge $A \in R_{max}^{m\times p}$ dan $B, C \in R_{max}^{q\times n}$, maka

$D = (A\oplus B)\otimes C$

$d_{ij} = (a_{ij}\oplus b_{ij})\otimes c_{ij}$

$= \oplus_{k=1}^{p}((a_{ik} \oplus b_{kj})\otimes c_{kj})$ .... Definisi 3.4

$= \oplus_{k=1}^{p}\left(a_{ik}\otimes c_{kj} \oplus b_{kj} \otimes c_{kj}\right)$ .... Sifat distributif kanan

$= (\oplus_{k=1}^{p} a_{ik}\otimes c_{kj})\oplus(\oplus_{k=1}^{p} b_{kj}\otimes c_{kj})$

$= \left(a_{ik}\otimes c_{kj}\right)\oplus\left(b_{kj}\otimes c_{kj}\right)$

$D = (A\otimes C)\oplus(B\otimes C)$.................................... Terbukti

Jadi terbukti bahwa $(A\oplus B)\otimes C = (A\otimes C)\oplus(B\otimes C)$.

Contoh 3.11:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka $A \otimes e = e \otimes A$ yang dapat ditentukan sebagai berikut:

$$A \otimes E = E \otimes A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max((4+0),(2+0),(6+0)) & max((4+0),(2+0),(6+0)) & max((4+0),(2+0),(6+0)) \\ max((7+0),(3+0),(5+0)) & max((7+0),(3+0),(5+0)) & max((7+0),(3+0),(5+0)) \\ max((9+0),(3+0),(2+0)) & max((9+0),(3+0),(2+0)) & max((9+0),(3+0),(2+0)) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} max((0+4),(0+2),(0+6)) & max((0+4),(0+2),(0+6)) & max((0+4),(0+2),(0+6)) \\ max((0+7),(0+3),(0+5)) & max((0+7),(0+3),(0+5)) & max((0+7),(0+3),(0+5)) \\ max((0+9),(0+3),(0+2)) & max((0+9),(0+3),(0+2)) & max((0+9),(0+3),(0+2)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Dari contoh 3.11 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.10:

Misalkan A matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$, maka terdapat elemen identitas pada operasi $\otimes$:

$$\forall A, E \in R_{max}^{m\times n}: A \otimes E = E \otimes A = A$$

Bukti:

$\forall A, E \in R_{max}^{m\times n}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } E_{ij} = \begin{bmatrix} 0_{11} & 0_{12} & 0_{13} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & 0_{23} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & 0_{m3} & \cdots & 0_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes E = [A \otimes E]_{ij}$$

$$= \oplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes E_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{11} & 0_{12} & 0_{13} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & 0_{23} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & 0_{m3} & \cdots & 0_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + 0_{11}) & (a_{12} + 0_{12}) & (a_{13} + 0_{13}) & \cdots & (a_{1n} + 0_{1n}) \\ (a_{21} + 0_{21}) & (a_{22} + 0_{22}) & (a_{23} + 0_{23}) & \cdots & (a_{2n} + 0_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} + 0_{m1}) & (a_{m2} + 0_{m2}) & (a_{m3} + 0_{m3}) & \cdots & (a_{mn} + 0_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

$$E \otimes A = [E \otimes A]_{ij}$$

$$= \oplus_{k=1}^{n} E_{ik} \otimes A_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} 0_{11} & 0_{12} & 0_{13} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & 0_{23} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & 0_{m3} & \cdots & 0_{mn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0_{11} + a_{11}) & (0_{12} + a_{12}) & (0_{13} + a_{13}) & \cdots & (0_{1n} + a_{1n}) \\ (0_{21} + a_{21}) & (0_{22} + a_{22}) & (0_{23} + a_{23}) & \cdots & (0_{2n} + a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0_{m1} + a_{m1}) & (0_{m2} + a_{m2}) & (0_{m3} + a_{m3}) & \cdots & (0_{mn} + a_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Terbukti bahwa $A \otimes E = E \otimes A$.

Contoh 3.12:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max\left((4+(-\infty)),(2+(-\infty)),(6+(-\infty))\right) & max\left((4+(-\infty)),(2+(-\infty)),(6+(-\infty))\right) & max\left((4+(-\infty)),(2+(-\infty)),(6+(-\infty))\right) \\ max\left((7+(-\infty)),(3+(-\infty)),(5+(-\infty))\right) & max\left((7+(-\infty)),(3+(-\infty)),(5+(-\infty))\right) & max\left((7+(-\infty)),(3+(-\infty)),(5+(-\infty))\right) \\ max\left((9+(-\infty)),(3+(-\infty)),(2+(-\infty))\right) & max\left((9+(-\infty)),(3+(-\infty)),(2+(-\infty))\right) & max\left((9+(-\infty)),(3+(-\infty)),(2+(-\infty))\right) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} max\left(((-\infty)+4),((-\infty)+2),((-\infty)+6)\right) & max\left(((-\infty)+4),((-\infty)+2),((-\infty)+6)\right) & max\left(((-\infty)+4),((-\infty)+2),((-\infty)+6)\right) \\ max\left(((-\infty)+7),((-\infty)+3),((-\infty)+5)\right) & max\left(((-\infty)+7),((-\infty)+3),((-\infty)+5)\right) & max\left(((-\infty)+7),((-\infty)+3),((-\infty)+5)\right) \\ max\left(((-\infty)+9),((-\infty)+3),((-\infty)+2)\right) & max\left(((-\infty)+9),((-\infty)+3),((-\infty)+2)\right) & max\left(((-\infty)+9),((-\infty)+3),((-\infty)+2)\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Dari contoh 3.12 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.11:

Misal A matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$, maka terdapat elemen netral bersifat menyerap pada operasi ⊗:

$$\forall A, (\varepsilon) \in R_{max}^{m\times n} : A \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes A = \varepsilon$$

Bukti:

$\forall A, E \in R_{max}^{m\times n}$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{m1} & \varepsilon_{m2} & \varepsilon_{m3} & \cdots & \varepsilon_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \varepsilon = [A \otimes \varepsilon]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes \varepsilon_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix}$$

$$[a \otimes \varepsilon]_{ij} = \bigoplus_{k}^{n} [(a_{i1} \otimes -\infty) \oplus (a_{i2} \otimes -\infty) \oplus \ldots \oplus (a_{in} \otimes -\infty)]$$

$$= max[(a_{i1} + -\infty), (a_{i2} + -\infty), \ldots, (a_{in} + -\infty)]$$

$$= max[(-\infty), (-\infty), \ldots, (-\infty)]$$

$$= -\infty$$

$$= \varepsilon$$

$$\varepsilon \otimes A = [\varepsilon \otimes A]_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik} \otimes A_{kj}$$

$$= \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon \otimes a]_{ij} = \bigoplus_{k}^{n} [(-\infty \otimes a_{i1}) \oplus (-\infty \otimes a_{i2}) \oplus \ldots \oplus (-\infty \otimes a_{in})]$$

$$= max[(-\infty + a_{i1}), (-\infty + a_{i2}), \ldots, (-\infty + a_{in})]$$

$$= max[(-\infty), (-\infty), \ldots, (-\infty)]$$

$$= -\infty$$

$$= \varepsilon$$

Terbukti bahwa $A \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes A$.

Contoh 3.13:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(4,(-\infty)) & max(2,(-\infty)) & max(6,(-\infty)) \\ max(7,(-\infty)) & max(3,(-\infty)) & max(5,(-\infty)) \\ max(9,(-\infty)) & max(3,(-\infty)) & max(2,(-\infty)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max((-\infty),4) & max((-\infty),2) & max((-\infty),6) \\ max((-\infty),7) & max((-\infty),3) & max((-\infty),5) \\ max((-\infty),9) & max((-\infty),3) & max((-\infty),2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = A$$

Jadi terbukti bahwa $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Dari contoh 3.13 diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.12:

Misal A matriks Monge dalam $R_{max}^{m\times n}$, maka terdapat elemen netral bersifat menyerap pada operasi $\oplus$:

$$\forall A, (\varepsilon) \in R_{max}^{m\times n} : A \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus A = A$$

Bukti:

$\forall A, E \in R_{max}^{m\times n}$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{m1} & \varepsilon_{m2} & \varepsilon_{m3} & \cdots & \varepsilon_{mn} \end{bmatrix}$$

$A \oplus \varepsilon = [A \oplus \varepsilon]_{ij}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus -\infty & a_{12} \oplus -\infty & a_{13} \oplus -\infty & \cdots & a_{1n} \oplus -\infty \\ a_{21} \oplus -\infty & a_{22} \oplus -\infty & a_{23} \oplus -\infty & \cdots & a_{2n} \oplus -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus -\infty & a_{m2} \oplus -\infty & a_{m3} \oplus -\infty & \cdots & a_{mn} \oplus -\infty \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{11}, -\infty) & max(a_{12}, -\infty) & max(a_{13}, -\infty) & \cdots & max(a_{1n}, -\infty) \\ max(a_{21}, -\infty) & max(a_{22}, -\infty) & max(a_{23}, -\infty) & \cdots & max(a_{2n}, -\infty) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(a_{m1}, -\infty) & max(a_{m2}, -\infty) & max(a_{m3}, -\infty) & \cdots & max(a_{mn}, -\infty) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$= A$.. Terbukti.

$\varepsilon \oplus A = [\varepsilon \oplus A]_{ij}$

$$= \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\infty & -\infty & -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\infty \oplus a_{11} \oplus & -\infty \oplus a_{12} & -\infty \oplus a_{13} & \cdots & -\infty \oplus a_{1n} \\ -\infty \oplus a_{21} & -\infty \oplus a_{22} & -\infty \oplus a_{23} & \cdots & -\infty \oplus a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\infty \oplus a_{m1} & -\infty \oplus a_{m2} & -\infty \oplus a_{m3} & \cdots & -\infty \oplus a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(-\infty, a_{11}) & max(-\infty, a_{12}) & max(-\infty, a_{13}) & \cdots & max(-\infty, a_{1n}) \\ max(-\infty, a_{21}) & max(-\infty, a_{22}) & max(-\infty, a_{23}) & \cdots & max(-\infty, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ max(-\infty, a_{m1}) & max(-\infty, a_{m2}) & max(-\infty, a_{m3}) & \cdots & max(-\infty, a_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$ .... Terbukti.

Terbukti bahwa $A \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus A$.

Pada $(\mathrm{R}_{\max}^{\mathrm{mxn}}, \oplus, \otimes)$ operasi penjumlahan matriks bersifat asosiatif, komutatif dan mempunyai elemen nol $\varepsilon\ (n, m)$, serta pada $(\mathrm{R}_{\max}^{\mathrm{mxn}}, \oplus, \otimes)$ operasi perkalian matriks bersifat asosiatif, distributif terhadap operasi penjumlahan $\oplus$ dan mempunyai elemen satuan $E(n, n)$ serta elemen penyerap $\varepsilon(n, n)$ untuk operasi perkalian $\otimes$. Pada pembahasan matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus adalah semiring idempoten dengan elemen nol ε dan elemen satuan E.

Diberikan sebarang $A \in \mathrm{R}_{\max}^{\mathrm{mxn}}$, pangkat ke-$k$ dari A dinotasikan oleh $A^{\otimes \mathrm{k}}$ didefinisikan sebagai $A^{\otimes \mathrm{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \otimes \mathrm{A} \otimes \ldots \otimes \mathrm{A}}_{k}$, untuk $k \in N$ dengan $k \neq 0$.

Contoh 3.14:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{\otimes 2} = A \otimes \mathrm{A}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 13 \\ 13 & 11 & 15 \end{bmatrix}.$$

3.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus

Pengertian nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks persegi A berukuran $n \times n$ sebagaimana dijumpai dalam aljabar linier biasa juga dijumpai dalam Aljabar Max-Plus, yaitu bila diberikan suatu persamaan:

$$A \otimes x = \lambda \otimes x$$

dalam hal ini masing-masing vektor $x \in R_{max}^{n}$ dan $\lambda \in R_{max}$ dinamakan vektor eigen dan nilai eigen dari matriks A dengan vektor $x \neq (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)^{T}$. Suatu algoritma untuk memperoleh vektor eigen dan nilai eigen dari matriks $A \in R_{max}^{m \times n}$, dilakukan secara berulang kali dalam bentuk persamaan linear:

$$x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \ldots$$

Teorema 3.13:

Misal A matriks Monge dengan sebarang keadaan awal $x(0) \neq \varepsilon$, maka sistem persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$ untuk suatu bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq 0$ dan suatu bilangan real c, maka $\lim_{k \to \infty} \frac{x(k)}{k} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$, sehingga $\lambda = \frac{c}{p-q}$, di mana λ adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh:

$$\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes (p-q-i)} \otimes x(q+i-1).$$

Contoh 3.15:

Diberikan matriks Monge $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Monge dalam aljabar Max-Plus.

Jawab :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

dengan keadaan awal $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dilakukan iterasi dalam persamaan linier sebagai berikut:

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

1. Iterasi pertama dengan nilai $k = 0$

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

$$x(0+1) = A \otimes x(0)$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{.. Definisi 3.4}$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} max((4+0),(2+0),(5+0)) \\ max((7+0),(3+0),(5+0)) \\ max((9+0),(3+0),(2+0)) \end{bmatrix} \text{............... Definisi 3.4}$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} max(4,2,5) \\ max(7,3,5) \\ max(9,3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. Iterasi kedua dengan nilai $k = 1$

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

$$x(1+1) = A \otimes x(1)$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \text{.. Definisi 3.4}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} max\big((4+5),(2+7),(5+9)\big) \\ max\big((7+5),(3+7),(5+9)\big) \\ max\big((9+5),(3+7),(2+9)\big) \end{bmatrix} \text{............... Definisi 3.4}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} max(9,9,14) \\ max(12,10,14) \\ max(14,10,11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

3. Iterasi ketiga dengan nilai $k = 2$

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

$$x(2+1) = A \otimes x(2)$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} \text{.. Definisi 3.4}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} max\big((4+14),(2+14),(5+14)\big) \\ max\big((7+14),(3+14),(5+14)\big) \\ max\big((9+14),(3+14),(2+14)\big) \end{bmatrix} \text{......... Definisi 3.4}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} max(18,16,19) \\ max(21,17,19) \\ max(23,17,16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

4. Iterasi keempat dengan nilai $k = 3$

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

$$x(3+1) = A \otimes x(3)$$

$$x(4) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 23 \end{bmatrix} \text{.. Definisi 3.4}$$

$$x(4) = \begin{bmatrix} max\big((4+19),(2+21),(5+23)\big) \\ max\big((7+19),(3+21),(5+23)\big) \\ max\big((9+19),(3+21),(2+23)\big) \end{bmatrix} \text{......... Definisi 3.4}$$

$$x(4) = \begin{bmatrix} max(23,23,28) \\ max(26,24,28) \\ max(28,24,25) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 28 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Didapatkan iterasi sebagai berikut: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 23 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 28 \\ 28 \\ 28 \end{bmatrix}$,

sehingga: $x(p) = c \otimes x(q)$

$$x(2) = 14 \otimes x(0)$$

maka nilai $p = 2$, $q = 0$ dan $c = 14$.

Jadi nilai eigen dari matriks A diperoleh sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{c}{p-q}$$

$$= \frac{14}{2-0} = \frac{14}{2} = 7$$

dan vektor eigen dari matriks A adalah:

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{2-0} \left(7^{\otimes(2-0-i)} \otimes x(0+i-1)\right)$$

$$= \left(7^{\otimes(2-1)} \otimes x(0+1-1)\right) \oplus \left(7^{\otimes(2-2)} \otimes x(0+2-1)\right)$$

$$= \left(7^{\otimes 1} \otimes x(0)\right) \oplus \left(7^{\otimes 0} \otimes x(1)\right)$$

$$= \left(7^{\otimes 1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \left(7^{\otimes 0} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(7 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \left(0 \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(7,5) \\ max(7,7) \\ max(7,9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

maka

$$A \otimes x = \lambda \otimes x$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 7 \otimes \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max\big((4+7),(2+7),(5+9)\big) \\ max\big((7+7),(3+7),(5+9)\big) \\ max\big((9+7),(3+7),(2+9)\big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+7 \\ 7+7 \\ 7+9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(11,9,14) \\ max(14,10,14) \\ max(16,10,11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Terbukti $A \otimes x = \lambda \otimes x$.

3.2.1 Algoritma

Nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus dapat diperoleh dengan menggunakan algoritma sebagai berikut:

1. Mengecek matriks A dengan syarat $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$. Jika matriks A yang diperoleh tidak memenuhi syarat tersebut maka matriks A bukanlah matriks Monge sebaliknya jika syarat terpenuhi maka matriks A merupakan matriks Monge.
2. Memberikan sebarang vektor awal $x(0) \neq \varepsilon$.
3. Melakukan iterasi persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \ldots$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c, sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu $x(p) = c \otimes x(q)$.
4. Menghitung nilai eigen dengan rumus sebagai berikut: $\lambda = \frac{c}{p-q}$.
5. Menghitung vektor eigen dengan rumus sebagai berikut: $\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$.
6. Mengecek kebenaran nilai eigen dan vektor eigen dengan rumus sebagai berikut: $A \otimes x = \lambda \otimes x$.

3.3 Keterkaitan Penyelesaian Permasalahan Manusia dengan Hasil Penelitian

Berdasarkan kajian permasalahan pada BAB II, terdapat keterkaitan suatu permasalahan yang diselesaikan dengan nilai eigen dan vektor eigen. Langkah-langkah untuk memperoleh nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljbar Max-Plus adalah sebagai berikut:

1. Memberikan sebarang vektor awal dengan $x(0) \neq \varepsilon$.
2. Melakukan iterasi persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \ldots$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c, sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu: $x(p) = c \otimes x(q)$.
3. Menghitung nilai eigen dengan $\lambda = \frac{c}{p-q}$.
4. Menghitung vektor eigen dengan $\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)$.

Adapun cara yang lain untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-Plus, yaitu:

1. Menghitung nilai eigen dari matriks A dengan $\lambda(A) = max_{i \in N}\{a_{ii}\}$.
2. Menghitung A_λ^+ dengan $A_\lambda = A \otimes -\lambda(A)$.
3. Menghitung vektor eigen pada kolom c dan baris i dengan $[v]_i = [A_\lambda^+]_{ic}$.

Nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-Plus dapat ditentukan dengan berbagai cara untuk memperoleh solusi karakteristik. Di mana nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-Plus dapat membantu dalam kehidupan manusia, misalnya menentukan jalur tercepat, menentukan masalah penjadwalan penerbangan pesawat, sistem produksi sederhana, penjadwalan sistem jaringan kereta dan model sistem antrian.

Pada surat Al-Baqarah ayat 184, Allah SWT menyebutkan kewajiban puasa bagi orang mukmin. Allah SWT mengabarkan bahwa puasa itu hanya pada hari-hari yang tertentu atau sedikit sekali dan sangat mudah. Kemudian Allah SWT memudahkan puasa itu dengan kemudahan lainnya. Allah SWT berfirman: "*Maka barang siapa di antara kamu ada yang sakit atau dalam perjalanan (lalu ia berbuka), maka (wajiblah baginya berpuasa) sebanyak hari yang ditinggalkan* *itu pada hari-hari yang lain*". Pada umumnya hal itu karena adanya kesulitan, sehingga Allah SWT memberikan kemudahan bagi keduanya untuk berbuka. Allah SWT memerintahkan kepada orang mukmin agar mengganti puasanya itu pada hari-hari yang lain apabila penyakitnya telah sembuh atau berakhirnya perjalanan dan adanya istirahat, dalam firman-Nya: "*Dan wajib bagi orang-orang yang berat menjalankannya (jika mereka tidak berpuasa)",* maksud dari firman tersebut yaitu jika mereka tidak mampu berpuasa Allah SWT memberikan kemudahan yang lain, yaitu membayar fidyah dari setiap hari yang mereka batalkan atau memberi makan seorang miskin.

Ayat di atas menjelaskan bahwa suatu permasalahan yang dihadapi pasti ada solusinya untuk memberi kemudahan. Surat Al-Baqarah ayat 184 di atas berhubungan dengan penelitian ini. Bahwa suatu permasalahan pasti ada solusinya, dalam penelitian ini yang berhubungan dengan ayat di atas yaitu untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-Plus dapat dilakukan dengan berbagai cara, sehingga mempermudah untuk memperoleh solusi karakteristiknya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Aljabar Max-Plus adalah $R_{max} = R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$ untuk $a, b \in R_{max}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yaitu: $a \oplus b = max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$, yang dinotasikan sebagai berikut: $(R_{max}, \oplus, \otimes)$. Matriks Monge adalah suatu matriks A dengan unsur bilangan real berukuran $m \times n$, jika dan hanya jika memenuhi: $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$. Kesimpulan yang dapat diambil berdasarkan pembahasan adalah:

1. Sifat-sifat yang berlaku untuk matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus adalah sebagai berikut: Dua matriks Monge yang dioperasikan dengan operasi $\oplus$ akan menghasilkan matriks Monge, perkalian skalar dengan matriks Monge akan menghasilkan matriks Monge, dua matriks Monge yang dioperasikan dengan operasi $\otimes$ menghasilkan matriks invers Monge, idempoten terhadap operasi $\oplus$, komutatif pada operasi $\oplus$, asosiatif pada operasi $\oplus$, asosiatif pada operasi $\otimes$, distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$, elemen identitas pada operasi $\otimes$, elemen netral bersifat menyerap pada operasi $\otimes$, dan elemen netral bersifat menyerap pada operasi $\oplus$.
2. Algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus adalah sebagai berikut:
   a. Mengecek matriks A dengan syarat $a_{ij} + a_{rs} \leq a_{is} + a_{rj}$.
   b. Memberikan sebarang vektor awal $x(0) \neq \varepsilon$.

c. Melakukan iterasi persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \ldots$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c, sehingga berlaku $x(p) = c \otimes x(q)$.

d. Menghitung nilai eigen dengan $\lambda = \frac{c}{p-q}$.

e. Menghitung vektor eigen dengan $v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)$.

f. Mengecek kebenaran nilai eigen dan vektor eigen dengan $A \otimes x = \lambda \otimes x$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus, maka disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-Plus terhadap matriks yang lainnya, misalnya matriks Polinomial, matriks Sirkulan, matriks Hermite, dan lain-lain, serta dapat ditentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus dengan menggunakan metode yang lain. Aljabar Max-Plus memiliki peranan dalam menyelesaikan persoalan dibeberapa bidang seperti kombinatorika, teori graf, teori sistem, teori antrian, *fuzzy*, dan proses stokastik. Penelitian ini hanya difokuskan dalam nilai eigen dan vektor eigen dalam Aljabar Max-plus, maka dapat diteliti pula tentang contoh aplikasi dalam kehidupan sehari-hari dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen matriks dalam Aljabar Max-Plus.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H.. 1997. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H.. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Arifin, A.. 2000. *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.

Burkard, R. E.. 1995. *Optimierung und Kontrolle.* Austria: Universitas Graz.

Gere, J. dan William, W.. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Jakarta: Erlangga.

Heidergott, B.. 2005. *Max-Plus Algebra and Queues.* Amsterdam: Vrije Universiteit.

Rudhito, A.. 2004. Semimodul atas Aljabar Max-Plus. *Jurnal Sains dan Teknologi SIGMA*. Vol.7. No.2. Hal:131-139.

Rukmangadachari, E.. 2010. *Mathematical Methods.* India: Dorling Kindersley.

Shihab, M. Q.. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Volume* 14. Jakarta: Lentera Hati.

Subiono. 2012. *Aljabar Max-Plus dan Terapannya.* Surabaya: FMIPA-ITS.

Supranto, M. A.. 2003. *Pengantar Matrix.* Jakarta: PT Rineka Cipta.

Weber, J. E.. 1999. *Analisis Matematika Penerapan Bisnis dan Ekonomi.* Jakarta: Erlangga.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Novita Imroatus Solichah
NIM : 09610023
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Monge dalam Aljabar Max-Plus
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	04 Januari 2013	Revisi Judul Skripsi	1.
2.	10 Januari 2013	Konsultasi Bab I	2.
3.	11 Januari 2013	Konsultasi Bab II	3.
4.	11 Januari 2013	Kajian Agama Bab I	4.
5.	29 Januari 2013	Kajian Agama Bab II	5.
6.	18 April 2013	Konsultasi Bab I, Bab II, III	6.
7.	02 Mei 2013	ACC Bab I	7.
8.	07 Mei 2013	Revisi Bab II	8.
9.	16 Mei 2013	ACC Bab II	9.
10.	20 Mei 2013	Revisi Bab III	10.
11.	22 Mei 2013	Konsultasi Agama Bab I, II	11.
12.	24 Mei 2013	Konsultasi Agama Bab II,III	12.
13	28 Mei 2013	Konsultasi Agama Bab III	13.
14	28 Mei 2013	Konsultasi Bab III	14.
15	10 Juni 2013	ACC Keseluruhan	15.
16	11 Juni 2013	ACC Agama Keseluruhan	16.

Malang, 11 Juni 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001