ANALISIS DEKOMPOSISI SPEKTRAL DENGAN METODE
PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS

SKRIPSI

Oleh:
ANIS SAFIDAH
NIM. 09610121

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ANALISIS DEKOMPOSISI SPEKTRAL DENGAN METODE *PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ANIS SAFIDAH
NIM. 09610121

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ANALISIS DEKOMPOSISI SPEKTRAL DENGAN METODE *PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS*

SKRIPSI

Oleh:
ANIS SAFIDAH
NIM. 09610121

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 04 April 2014

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Sri Harini, M.Si	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19731014 200112 2 002	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS DEKOMPOSISI SPEKTRAL DENGAN METODE
PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS

SKRIPSI

Oleh:
ANIS SAFIDAH
NIM. 09610121

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 10 April 2014

Penguji Utama	:	Abdul Aziz, M.Si	
		NIP. 197603181 00604 1 002	....
Ketua Penguji	:	Drs. H. Turmudi, M.Si	
		NIP. 19571005 198203 1 006	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Sri Harini, M.Si	
		NIP. 19731014 200112 2 002	....
Anggota Penguji	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	
		NIP. 19710420 200003 1 003	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 00 1

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Anis Safidah

NIM : 09610121

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Analisis Dekomposisi Spektral dengan Metode *Principal Component Analysis*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 April 2014
Yang membuat pernyataan,

Anis Safidah
NIM. 09610121

MOTTO

فَإِذَا فَرَغْتَ فَٱنصَبْ ۝٧ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَٱرْغَب ۝٨

"Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain. Dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap"(Q.S. Al Insyirah:7-8).

"Apa yang Kau Tanam itu yang Kau Tuai"

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Karya ini penulis persembahkan kepada:

Ayah dan Ibu tercinta

(Ayah Ahmad Fadholi dan Ibu Nur Kumala)

Kakak Farida Fatmawati, Nur Afidatul Auziya, dan Keluarga Besar

yang telah memberi warna kecerian di setiap hari-hari penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada semua yang terlibat dan telah membantu selesainya skripsi ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Pembimbing pertama yang telah bersedia meluangkan waktu untuk membimbing, memotivasi, mengarahkan sampai terselesaikannya penyusunan skripsi ini penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal jaza'*.
5. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku Pembimbing Agama yang telah bersedia memberikan pengarahan keagamaan dalam penyelesaian skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu yang tidak pernah lelah mendo'akan, memberikan kasih sayang, semangat, serta motivasi kepada penulis. Kakak dan keluarga tercinta yang selalu memberikan semangat dan kasih sayang kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009 terima kasih atas segala pengalaman yang berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
9. Teman-teman kos trimakasih untuk semangatnya serta semua pihak yang telah membantu hingga selesainya skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT, selalu melimpahkan rahmat dan karunia-Nya. Akhirnya, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin Allah, mudah-mudahan skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amin ya Robbal 'alamiin...*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, April 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTARTABEL

ABSTRAK

Safidah, Anis. 2014. **Analisis Dekomposisi Spektral dengan Metode *Principal Component Analysis* (PCA)**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Sri Harini, M.Si (II) H. Wahyu Henki Irawan, M.Pd

Kata Kunci: Dekomposisi Spektral, matriks, nilai eigen, vektor eigen, *Principal Component Analysis* (PCA)

Data memiliki bentuk yang bermacam-macam. Salah satunya yaitu terdapat pada data yang tidak terbatas. Analisis dekomposisi spektral adalah sebuah analisis pemecahan relasi pada data yang tidak terbatas. Dekomposisi spektral juga disebut dekomposisi atau pemecahan relasi berdasarkan nilai eigen dan konsep terkait (*Eigendecomposition*). Dekomposisi spektral adalah suatu teknik yang digunakan secara luas untuk mendekomposisikan suatu matriks kedalam beberapa komponen matriks yang berkaitan erat dengan nilai eigen dari matriksnya. Proses dekomposisi ini sering juga disebut dengan *Faktorisasi*. Salah satu metode yang dapat digunakan dalam analisa dekomposisi spektral adalah dengan metode *Principal Component Analysis* (PCA). Dari hasil penelitian didapatkan lima langkah penting dalam analisis dekomposisi spektral dengan menggunakan analisis komponen utama yaitu: mendefinisikan model dekomposisi spektral, menentukan vektor eigen dan nilai eigen dari model dekomposisi spektral dengan menggunakan metode PCA, pemilihan komponen utama yang memenuhi dua kriteria yaitu jika nilai eigen lebih besar atau sama dengan satu ($\lambda \geq I$) dan jika keragaman kumulatif lebih dari 70%, selanjutnya melakukan uji interdependensi dengan MSA (*Measure Sampling Of Adequacy*), dan menentukan koefisien korelasi. Pada analisis data dapat dibuat model dari analisis dekomposisi spektral dengan metode PCA pada data frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang. Model tersebut adalah:

$$C_1 = 0{,}791x_2 + 0{,}542x_3 - 0{,}549x_4 - 0{,}634x_1.$$

Dekomposisi spektral juga dapat dianalisis menggunakan metode selain PCA, serta data yang sesuai dengan kebutuhan peneliti.

ABSTRACT

Safidah, Anis. 2014. **Spectral Decomposition Analysis Method with Principal Component Analysis (PCA)**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor: (I) Dr. Sri Harini, M.Si (II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Keywords: Spectral decomposition, matrix, eigenvalues, eigenvectors, Principal Component Analysis (PCA)

There are many varieties of data. One of them is an unlimited data. Spectral decomposition analysis is an analysis of the relationship breakdown of unlimited data. Spectral decomposition is also called decomposition or breakdown of relationships based on eigenvalues and related concepts (Eigendecomposition). Spectral decomposition is a widely used technique to decompose a matrix into several matrix components that closely related to the eigenvalues of the matrix. This decomposition process is often called as factorization. One method that can be used in the analysis of spectral decomposition is the method of Principal Component Analysis (PCA). From the results, there are five important steps in the spectral decomposition analysis using principal component analysis, these are defining the spectral decomposition of the model, determining the eigenvectors and eigenvalues of the spectral decomposition models using PCA, selecting the main components that meet two criteria: if the eigenvalues greater than or equal to one ($\lambda \geq$ I) and if the cumulative diversity more than 70 %, the next step istesting interdependence with MSA (Measure of Sampling Adequacy), and the last step is determining the correlation coefficient. In the data analysis we can make a model of the spectral decomposition analysis using the method of PCA to the delay frequency data in completing the task for psychology student UIN Maliki Malang 2009. The obtained model is:

$$C_1 = 0{,}791x_2 + 0{,}542x_3 - 0{,}549x_4 - 0{,}634x_1$$

Spectral decomposition can also be analyzed using methods other than, and the data that fits the needs of researchers .

الملخص

سافيدة، أنيس. ٢٠١٤.**الطيفية التحلل أسلوب التحليل مع تحليل المكونات الرئيسية**. أطروحة. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف: ١. الدكتور. سري هريني، الماجستير ٢. الحاج وهيوهنكي إراون الماجستير

الكلمات الرئيسية: التحلل الطيفي, قالب, القيم الذاتية, المتجهات الذاتية, تحليل المكونات الرئيسية (PCA)

هناك العديد من أنواع مختلفة من البيانات. واحد منهم هو بيانات غير محدودة. تحليل التحللل الطيفي هوتحليل لانهيار العلاقة بين البيانات غير محدودة . ويسمى التحلل الطيفي أيضا تحلل أو انهيار علاقات قائمة على القيم الذاتية و المفاهيم المرتبطة بها (Eigendecomposition) . التحلل الطيفية هي تقنية تستخدم على نطاق واسع لتحلل مصفوفة إلى عدة مكونات مصفوفة التي ترتبط ارتباطا وثيقا القيم الذاتية للمصفوفة . وغالبا هذه العملية تسمى توكيدجاري . طريقةواحد التي تمكن استخدامها في التحليل الطيفي هو طريقة تحليل المكونات الرئيسية (PCA). من نتائج ، هناك خمس خطوات مهمة في تحليل التحللالطيفي باستخدام تحليل المكون الرئيسي ، هي :التي تحدد التحلل الطيفي للنموذج ، وتحديد المتجهات الذاتية و القيم الذاتية لل لنماذج التحلل الطيفي باستخدام PCA ، واختيار المكوناتالرئيسية التي تلبي معيارين : إذا كانت القيم الذاتية أكبر من أو يساوي بواحد (λ≥1) و إذا كان التنوع التراكمي أكثر من ٪ 70 ، فإن الخطوة التالية هي اختبار الترابط مع MSA (قياس من أخذ العينات كفاية) ، و الخطوة الأخيرة هي تحديد معامل الارتباط . في تحليل البيانات يمكننا أن نجعل نموذجا لتحليل التحللالطيفي باستخدام طرية PCA للبيانات التردد التأخير في إكمال المهمة لطلاب علم النفس جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج 2009.ونموذج الحصول عليها هي:

$$C_1 = 0,791x_2 + 0,542x_3 - 0,549x_4 - 0,634x_1$$

ويمكن أيضاأن تحللالتحللالطيفيباستخدام طرائق أخرى يسوى PCA، والبيانات التي تناسباحتياجاتالباحثين.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Setiap manusia telah dianugerahkan akal yang menjadikannya mulia dibandingkan makhluk lainnya. Namun hanya manusia yang selalu mengembangkan akal yang senantiasa mengambil pelajaran dari segala sesuatu yang tercipta di dunia ini. Pengembangan akal ini dapat dilakukan dengan cara selalu menambah ilmu yang dimiliki, selalu berkeinginan untuk mendapatkan suatu pengetahuan baru. Manusia seperti ini selalu terbuka untuk menerima pendapat orang lain dan berpandangan tajam dalam berbagai hal.

Matematika merupakan salah satu ilmu dasar yang memiliki banyak cabang di dalamnya. Statistika merupakan salah satu dari cabang tersebut. Sebagaimana diketahui bahwa ilmu statistika merupakan cabang dari matematika yang sering diaplikasikan dalam masalah kehidupan sehari-hari. Ilmu statistika mengajarkan manusia untuk selalu teliti terhadap suatu informasi yang dilandasi dari data. Manusia tidak boleh percaya begitu saja pada sebuah informasi atau data yang didapat tanpa membuktikan kebenarannya terlebih dahulu. Hal ini sesuai dengan firman Allah yang termaktub dalam Al-Qur'an sabagai berikut:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن جَآءَكُمۡ فَاسِقُۢ بِنَبَإٖ فَتَبَيَّنُوٓاْ أَن تُصِيبُواْ قَوۡمَۢا بِجَهَٰلَةٖ فَتُصۡبِحُواْ عَلَىٰ مَا فَعَلۡتُمۡ نَٰدِمِينَ ٦

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita, maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak

> *menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaannya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu"* (*Q.S. Al-Hujurat:6*).

Dari ayat tersebut sangat jelas tersirat bahwa manusia tidak boleh mempercayai suatu berita begitu saja tanpa adanya data yang akurat. Hal ini dapat menyebabkan keputusan yang diambil salah dan dapat mendzolimi orang yang tidak bersalah. Begitu pentingnya suatu data maka diperlukan orang-orang yang mempunyai keilmuan yang profesional pada bidang tersebut.

Data memiliki bentuk yang bermacam-macam. Salah satunya yaitu terdapat pada data yang tidak terbatas. Analisis dekomposisi spektral adalah sebuah analisis pemecahan relasi pada data yang tidak terbatas. Dekomposisi spektral juga disebut dekomposisi atau pemecahan relasi berdasarkan nilai eigen dan konsep terkait (*Eigendecomposition*). Dekomposisi spektral adalah suatu teknik yang digunakan secara luas untuk mendekomposisikan suatu matriks kedalam beberapa komponen matriks yang berkaitan erat dengan nilai eigen dari matriksnya. Proses dekomposisi ini sering juga disebut dengan *Faktorisasi* (Silfiani, 2011). Banyak metode analisa yang dapat digunakan untuk menganalisis dekomposisi spektral. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah dengan metode *Principal Component Analysis* (PCA).

PCA diperkenalkan oleh Karl Pearson dan selanjutnya dikembangkan oleh Harold Hotelling dan bertujuan untuk menyederhanakan variabel yang diamati dengan cara menyusutkan dimensinya (Chatfield & Collins, 2000). PCA digunakan untuk mereduksi sejumlah variabel asal menjadi beberapa variabel baru yang bersifat ortogonal dan tetap mempertahankan total keragaman dari variabel asalnya (Johnson & Wichern, 1997). Hal ini dilakukan dengan menghilangkan korelasi variabel baru melalui transformasi variabel asal ke variabel baru yang tidak berkorelasi.

Menurut Nasyir dan Abdullah (2010), penentuan komponen utama dalam analisis komponen utama bertujuan untuk menjelaskan proses-proses yang terlibat dalam menentukan dan memilih komponen utama dalam PCA. Prasetyo, dkk. (2011), mengkaji analisis komponen utama sebagai salah satu cara untuk menangani multikolinieritas antar variabel bebas pada analisis regresi linier berganda, dan memberikan ilustrasi penerapan analisis regresi komponen utama.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis ingin mengkaji lebih dalam dan membahasnya dengan judul "Analisis Dekomposisi Spektral dengan Metode *Principal Component Analysis* (PCA)" untuk diteliti lebih lanjut pada skripsi ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan di atas, maka masalah yang dapat dirumuskan adalah bagaimana hasil analisis model dekomposisi spektral dengan metode *Principal Component Analysis* (PCA) ?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil dalam menganalisis dekomposisi spektral dengan metode PCA.

1.4 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi kerancuan terhadap maksud dan isi dari penelitian ini maka perlu adanya pembatasan masalah. Batasan masalah dalam analisis dekomposisi spektral dengan menggunakan matriks simetris berukuran 4×4 dan metode yang digunakan untuk analisis dekomposisi spektral adalah menggunakan PCA dan penyelesaian analisis komponen utama menggunakan matriks korelasi.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis
   a. Mampu mengaplikasikan mata kuliah statistik yang telah dipelajari kedalam kehidupan sehari-hari.
   b. Dapat mengembangkan wawasan dan pengetahuan mengenai analisis dekomposisi spektral dengan metode PCA.
2. Bagi Pembaca

   Sebagai tambahan pengetahuan dalam bidang matematika dan sumbangan pemikiran untuk memecahkan permasalahan khususnya dibidang statistika mengenai analisis dekomposisi spektral dengan metode PCA.
3. Bagi Instansi
   a. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan matematika, khususnya dalam bidang statistika.
   b. Meningkatkan peran serta Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dalam pengembangan wawasan keilmuan matematika dan statistika.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah *Library Research*, yakni mengumpulkan data secara literatur yang akan dipergunakan sebagai acuan dalam menganalisis masalah. Kemudian dilakukan analisis dekomposisi spektral dengan metode PCA.

Adapun langkah-langkah yang dipergunakan dalam analisis masalah adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan model dekomposisi spektral

   $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i a_i^T = P\Lambda P^T$

   $i = 1, 2, \ldots, 4$

2. Menentukan vektor eigen dan nilai eigen dari model dekomposisi spektral menggunakan metode PCA dengan matriks korelasi, sebagai berikut:
   a. Menentukan matriks ragam-peragam (Σ), dengan langkah-langkah sebagai berikut:
      i. Menentukan mean $(\bar{x})$
      ii. Menentukan varian (σ^2)
   b. Menentukan matriks korelasi (ρ), dengan menentukan kovarian terlebih dahulu.
   c. Menentukan nilai eigen (λ).
   d. Menentukan vektor eigen (a).
3. Menentukan keragaman komponen utama dengan mencari rata-rata jumlah populasi varian.
4. Uji interdependensi antar variabel.

Pada uji interdependensi ini digunakan *Measure Of Sampling Adequancy* (MSA) dengan rumus

$$MSA_1 = \frac{\sum_{j=1} \rho_j{}^2}{\sum_{j=1} \rho_j{}^2 \sum_{j=1} a_j{}^2}$$

dimana: ρ = koefisien korelasi

a = koefisien korelasi parsial

5. Menentukan koefisien korelasi untuk mengetahui tingkat korelasi masing-masing variabel dan model komponen utama dengan cara menghitung koefisien korelasi antar variabel dan komponen utama dengan vektor normal.
6. Menganalisis data
   a. Deskripsi data
   b. Uji MSA
   c. Menentukan nilai eigen dan pemilihan komponen utama
   d. Menentukan faktor peubah baru
7. Menarik kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami skripsi secara keseluruhan maka penulis menggambarkan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka

Dalam bab ini dijelaskan beberapa hal yang menjadi dasar dalam penelitian ini, yaitu membahas tentang matriks, analisis dekomposisi spektral, *Principal Component Analysis* (PCA), serta kajian keagamaan tentang pembentukan komponen utama dalam Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai analisa hasil tentang analisis dekomposisi spektral dengan metode *Principal Component Analysis* (PCA) dengan langkah-langkah sesuai dengan metode penelitian.

Bab IV Penutup

Dalam bab ini dipaparkan mengenai kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian dan beberapa saran.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Definisi Matriks

Anton (1987) menyatakan bahwa suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut *entri* dari matriks. Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (*arah horisontal*) dan kolom (*arah vertikal*) yang dimilikinya. Sebuah matriks dinotasikan dengan simbol huruf besar seperti A, X, atau Z dan sebagainya. Sebuah matriks A yang berukuran m baris dan n kolom dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis:

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Contoh:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

disebut matriks A dengan 2 baris dan 3 kolom. Jika A sebuah matriks, maka digunakan a_{ij} untuk menyatakan elemen yang terdapat didalam baris i dan kolom $j$dari A. Dalam contoh ini $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, 3$ atau dapat ditulis:

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3.$$

Definisi Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama banyak. Dalam suatu matriks persegi, elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ disebut elemen diagonal utama (Anton, 1987).

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi Matriks Diagonal

Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ dinamakan matriks diagonal jika semua elemen di luar diagonal utama adalah nol, $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan paling tidak satu elemen pada diagonal pokok $a_{ij} \neq 0$ untuk $i = j$. Jumlah elemen-elemen diagonal utama suatu matriks persegi A disebut *trace* A ditulis $tr(A)$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, (i = j)$$

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (Anton, 1987).

Tidak semua matriks bisa didiagonalisasi. Berikut ini merupakan teorema yang dapat mempermudah untuk mengetahui suatu matriks dapat didiagonalisasi atau tidak.

Teorema 4.1

1. Jika $v_1, v_2, \cdots, v_k$ adalah vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ yang berbeda, maka $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ adalah himpunan yang bebas linier.

2. Jika suatu matriks A berukuran $n \times n$ mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda-beda, maka A dapat didiagonalisasi (Nasoetion, 1980).

Definisis Matriks Identitas

Matriks identitas adalah suatu matriks skalar yang nilai-nilai unsur diagonal utamanya sama dengan satu. Matriks identitas dilambangkan dengan I. Indeks dibawah huruf I, jika dituliskan menunjukkan dimensinya (Nasoetion, 1980).

Contoh:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisis Invers

Jika A adalah matriks persegi, dan jika kita dapat mencari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A. Atau bisa ditulis $A^{-1} = B$ (Anton, 1987).

Definisi Transpos

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A (*transpos of* A), dinyatakan dengan A^T, didefinsikan sebagai matriks $n \times m$ yang diperolehkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T, adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton, 1987).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$ maka matriks $n \times m$ dengan $A^T = [a^T{}_{ij}]\, dan\, a^T{}_{ij} = a_{ij}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ disebut dengan transpos dari matriks A. Matriks $m \times n$ yang umum dapat ditulis:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

maka

$$(A_{m\times n})^T = A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

2.2 Matriks Simetris

Suatu matriks persegi$A$ adalah simetris (*symmetric*) jika $A = A^T$. Suatu matriks persegi $A = [a_{ij}];\ i,\ j = 1, 2, \dots, n$ disebut matriks simetris jika elemen dibawah diagonal utama merupakan cermin dari elemen diatas diagonal utama. Matriks simetris jika $A^T = A$ artinya $a_{ij} = a_{ji}$ (Anton, 1987).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

DefinisiMatriks Ortogonal

Ortogonal berarti tegak lurus. Tinjau dua buah vektor yaitu A dan B, keduanya dikatakan ortogonal jika $A \times B = 0$ (Basar, 2013). Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ dikatakan dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat matriks ortogonal P sehingga berlaku $P^{-1}AP = P^{T}AP$. Matriks ortogonal didefinisikan sebagai matriks persegi yang inversnya sama dengan transposnya, sehingga:

$$P^{-1} = P^{T}$$

maka$P$ adalah matriks ortogonal (Anton, 1987).

2.3 Operasi Matriks

Definisi Penjumlahan dan Pengurangan dalam Matriks

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan ciri-ciri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan selisih (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan (Anton, 1987).

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka } A + B=\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Perkalian Matriks

Jika Aadalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mancari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh (Anton, 1987).

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} B=\begin{bmatrix}7 & 3\\4 & 2\end{bmatrix} \text{ maka } A\times B=\begin{bmatrix}39 & 17\\29 & 13\end{bmatrix}.$$

2.4 Determinan Matriks

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $n \times n$. Fungsi determinan dari A ditulis dengan $det(A)$ atau $|A|$. Secara matematisnya ditulis:

$$Det(A) = |A| = \sum(\pm)a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

dengan $j_1, j_2, \dots, j_n$ merupakan himpunan $S = \{1, 2, \dots, n\}$ (Anton, 1987).

Assauri (1983) menyatakan bahwa determinan dari suatu matriks simetris adalah sama dengan hasil kali dari seluruh nilai eigennya.

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika$A$ adalah sebuah matriks$n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x yaitu, $Ax = \lambda x$ untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton, 1987).

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka $Ax = \lambda x$ dapat ditulis sebagai $Ax = \lambda I x$ atau $(\lambda I - A)x = 0$. Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan $(\lambda I - A)x = 0$. Akan tetapi karena $Det\ (A) \neq 0$, maka persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ akan mempunyai persamaan tak nol jika dan hanya jika

$$Det(\lambda I - A) = 0$$

yang dinamakan dengan persamaan karakteristik A skalar yang memenuhi ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas maka $Det(\lambda I - A) = 0$ adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari A

$$Det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n \text{ (Anton, 1987).}$$

Jika A adalah matriks $n \times n$ maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen satu sama lain:

1. λ adalah nilai eigen dari A.
2. Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai persamaan tak trivial.
3. Ada vektor tak nol x di dalam R^n sehingga $Ax = \lambda x$
4. λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $Det(\lambda I - A) = 0$(Anton, 1987).

Contoh:

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Karena $\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

maka polinom karakteristik dari A adalah

$$Det\ (\lambda I - A) = Det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

pemecahan-pemecahan persamaan ini adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$; inilah nilai-nilai eigen dari A.

2.6 Dekomposisi Spektral

Menurut Johnson dan Wichern (1997), menyatakan bahwa misal A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan x adalah vektor tak nol berukuran $n \times 1$. Nilai eigen dari matriks A yang dinotasikan oleh λ adalah suatu nilai yang memenuhi persamaan berikut: $|A - \lambda I| = 0$. Untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen, maka nilai eigen yang telah diperoleh disubstitusi ke persamaan $Ax = \lambda x$.

Definisi dekomposisi spektral

Ditunjukkan A adalah matriks simetris berukuran $n \times n$, maka dekomposisi spektral matriks dari A adalah:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i a_i^T = P \Lambda P^T \quad (2.1)$$

dengan λ_i adalah nilai eigen ke-i, dan a_i adalah vektor eigen ke-i dari matriks $A. P$ adalah suatu matriks yang elemen-elemennya vektor eigen berukuran $n \times n$, dan Λ adalah matriks diagonalyang memiliki nilai eigen pada diagonal utamanya.

Sehingga

$$A_{(n\times n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i_{(n\times 1)}} a_{i_{(1\times n)}}^T = P_{(n\times n)} \Lambda_{(n\times n)} P^T{}_{(n\times n)} \quad (2.2)$$

dimana $PP^T = P^T P = I$ dan Λ adalah matriks diagonal

$$\Lambda_{(n\times n)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} dengan\ \lambda_i > 0.$$

Maka $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_1} a_i a_i^T$ (2.3) karena$(P\Lambda^{-1}P^T)P\Lambda P^T = P\Lambda P^T(P\Lambda^{-1}P^T) = PP^T = I$.

Definisi

Ditunjukkan bahwa $A = [a_{ij}]$ adalah sebuah matriks simetris berukuran $n \times n$. *Trace* pada matriks A ditulis $tr(A)$ adalah jumlah elemen diagonal, dimana:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

$$tr(A) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \cdots + \sigma_{nn}.$$

Ditunjukkan bahwa A dan B adalah matriks berukuran $n \times n$ dan c adalah skalar.

a. $tr(A) = c\ tr(A)$

b. $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

c. $tr(AB) = tr(BA)$

d. $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$

e. $tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$(Johnson& Wichern, 1997).

2.7 *Principal Component Analysis* (PCA)

2.7.1 Definisi PCA

Ada beberapa definisi analisis komponen utama atau PCA menurut para ahli.

1. Menurut Johnson dan Wichern (1997), analisis komponen utama merupakan suatu teknik analisis statistik untuk mentransformasi peubah-peubah asli yang masih saling berkorelasi satu dengan yang lain menjadi satu set peubah baru yang tidak berkorelasi lagi. Peubah-peubah baru itu disebut sebagai komponen utama (*principal component*).

2. Menurut Supranto (2004), analisis komponen utama merupakan suatu teknik mereduksi data *multivariat* (banyak data) untuk mengubah suatu matriks data awal atau asli menjadi suatu set kombinasi linier yang lebih sedikit akan tetapi menyerap sebagian besar jumlah varian dari data awal.
3. Merurut Gasperz (1995), analisis komponen utama bertujuan untuk mereduksi data dan menginterpretasikannya, meskipun dari n buah variabel asal dapat diturunkan n buah komponen utama untuk menerangkan keragaman total sistem, namun sering kali keragaman total itu dapat diterangkan secara memuaskan oleh sejumlah kecil komponen utama.
4. Menurut Sudjana (2001), analisis komponen utama adalah metode menguraikan varian variabel dependen menjadi komponen-komponen varian kontribusi unik dan varian kontribusi bersama dengan maksud untuk mengidentifikasi pengaruh variabel-veriabel independen.

Peubah baru yang dimaksud di atas disebut sebagai komponen utama yang berciri:

1. Merupakan kombinasi linier peubah-peubah asal.
2. Jumlah persegi koefisien dalam kombinasi linier tersebut bernilai satu.
3. Tidak berkorelasi.
4. Mempunyai ragam terurut dari yang terbesar ke yang kecil.

2.7.2 Konsep Dasar PCA

Menurut Gasperz (1995) menyatakan bahwa komponen utama (*principal component*) didefinisikan sebagai kombinasi linier dari n variabel asal yang dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$C_{n\times 1} = A_{n\times n}X_{n\times 1}. \quad (2.4)$$

Dimana A merupakan matriks konstanta, C dan X adalah matriks variabel baru dan matriks variabel asal.

Persamaan (2.4) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

Ada dua cara yang digunakan dalam analisis komponen utama, yaitu:

2.7.2.1 Menggunakan Matriks Ragam Peragam

Jika A didefinisiskan sebagai matriks konstan berukuran $n \times n$, maka komponen utama didefinisikan sebagai kombinasi linier dari n peubah asal yang dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks:

$$C_{n\times 1} = A_{n\times n}X_{n\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

dengan X = vektor kolom peubah asal

A =matriks transformasi terhadap peubah asal

C =komponen utama.

Komponen utama ini bergantung pada matriks ragam-peragam (Σ) atau matriks korelasi dari peubah asal $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ secara umum kombinasi linier yang dimaksud adalah:

$$C_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{p1}X_p = a_{j1}^T X$$

$$C_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{p2}X_p = a_{j2}^T X$$

$$C_n = a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = a_{jn}^T X \quad (2.5)$$

dari transformasi tersebut diperolehkan ragam masing-masing komponen utama dan peragam, yaitu:

varian $(C_1) = a_1^T \sum a_1$(2.6)

$$\text{kovarian } (C_1, C_n) = \text{Cov } (a_1^T X, a_n^T X) \quad (2.7)$$

(Chatfield & Collins, 2000).

Komponen utama yang pertama berupa kombinasi linier $C_1 = a_1^T X$ yang bertujuan memaksimumkan varian (C_1) dengan batasan $a_1^T a_1 = 1$ dan akan diperoleh bahwa:

$$\text{varian } (C_1) = a_1^T \sum a_1 = s^2 c_1 = \lambda_1 \quad (2.8)$$

dimana λ_1 merupakan nilai eigen terbesar dari matriks Σ, selanjutnya komponen utama pertama dapat ditulis:

$$C_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{n1}X_n = a_1^T X. \quad (2.9)$$

Sedangkan komponen utama kedua berupa kombinasi linier $C_2 = a_2^T X$ yang bertujuan memaksimumkan varian (C_2) yang tidak berkorelasi dengan komponen utama pertama tetapi bersifat ortogonal dengan komponen utama pertama.

Oleh karena itu harus memenuhi batasan $a_2^T a_2 = 1, a_2^T a_2 = 0$ dan kovarian $(a_1^T X, a_2^T X) = 0$ akan diperoleh:

$$\text{varian } (C_2) = a_2^T \sum a_2 = s^2 c_2 = \lambda_2 \quad (2.10)$$

dengan λ_2 adalah nilai eigen terbesar kedua yang diperoleh dari matriks Σ, selanjutnya komponen kedua dapat ditulis

$$C_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{n2}X_n = a_2^T X. \quad (2.11)$$

Jika komponen utama ke-i merupakan kombinasi linier $C_i = a_i^T X$ yang bertujuan memaksimumkan varian (C_i) dan tidak berkorelasi dengan komponen utama yang lain tetapi bersifat ortogonal dengan komponen utama yang lain. Oleh karena itu harus memenuhi batasan $a_i^T a_i = 1, a_i^T a_n = 0$ dan kovarian $(a_i^T X, a_n^T X) = 0$. Dengan cara diatas akan diperolehkan komponen utama ke-i sebagai berikut:

$$C_i = a_{1i}X_1 + a_{2i}X_2 + \cdots + a_{ni}X_n = a_i^T X$$

$$\text{varian } (C_i) = s^2 c_2 = \lambda_2$$

dari matriks Σ diperolehkan n pasangan nilai eigen dan vektor eigen, yaitu $(\lambda_1, a_1), (\lambda_2, a_2), \ldots, (\lambda_n, a_n)$ dimana $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ vektor-vektor eigen dari Σ akan ortogonal bila seluruh nilai eigen nyata, karena matriks Σ adalah matriks simetris maka seluruh nilai-nilainya nyata (Chatfield & Collins, 2000).

Untuk menggunakan banyaknya komponen utama digunakan pedoman persentase ragam, proporsi dari total ragam untuk komponen ke-i adalah:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}, i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.12)$$

sedangkan untuk proporsi kumulatif dari ragam total yang dijelaskan oleh n komponen utama adalah:

$$\frac{\sum_{j=i}^{m} \lambda_j}{\sum_{j=i}^{n} \lambda_n} \text{ dimana } m < n. \qquad (2.13)$$

Bila sebagian besar (70%-80%) dari total ragam, untuk n yang besar dapat dihubungkan oleh komponen utama pertama, kedua, atau ketiga, maka komponen-komponen ini dapat menggantikan n peubah asal tanpa banyak kehilangan informasi (Gasperz, 1995).

Sedangkan skor komponen dari individu ke-i pada komponen utama yang dihasilkan dari matriks ragam-peragam didefinisikan sebagai:

$$Sk_{ij} = \left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\right) \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{in} - \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

$$Sk_{ij} = a_j(x_j - \bar{x})$$

dimana Sk_{ij} = skor komponen ke-j objek pengamatan ke-i

a_j = vektor pembobot komponen utama ke-j

x_j = vektor kolom nilai variabel ke-j

$\bar{x}$ = vektor nilai rata-rata variabel.

2.7.2.2 Menggunakan Matriks Korelasi

Bila komponen utama dihasilkan dari ragam-peragam, maka komposisi dari komponen utama bergantung pada ukuran satuan yang digunakan untuk mengukur peubah-peubah tersebut. Untuk mengatasi persoalan tersebut maka dapat ditempuh dengan membentuk komponen utama dari matriks korelasi. Bila n variabel asal tidak menggunakan satuan pengukuran yang sama maka variabel tersebut perlu ditransformasikan keskor baku (Gasperz, 1995). Pembakuan variabel asal X ke dalam peubah baku Z dapat dilakukan dengan

$$z_n = \frac{(X_n - \bar{x}_n)}{\sqrt{\sigma_{nn}}}, \sigma = 1, 2, \dots, n. \qquad (2.14)$$

Persamaan transformasi Z dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$Z \quad = \left(V^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} (X - \bar{x})$$

dengan:

Z = variabel baku

$V^{\frac{1}{2}}$= matriks simpangan baku dengan unsur diagonal utama $\left(\sigma_{ij}{}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

X= variabel pengamatan

$\bar{x}$= nilai rata-rata pengamatan

dari matriks Z diperoleh:

$$\text{kovarian}(Z) = \left(V^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \sum \left(V^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$
$$= \rho$$

Dengan demikian komponen utama dari Z dapat ditentukan dari vektor ciri matriks korelasi variabel n, model komponen utama ke-n dapat ditulis:

$$C_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{n1}X_n = a_{j1}^T X$$
$$C_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{p2}X_n = a_{j2}^T X$$
$$C_n = a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = a_{jn}^T X \quad (2.15)$$

untuk data sampel harga n_x dapat diduga dengan R, cara menentukan harga vektor-vektor a sama seperti penggunaan matriks ragam-peragam, juga vektor-vektor ciri dan nilai akar ciri diperoleh dari matriks korelasi. Bagaimanapun juga nilai-nilai yang diturunkan dari matriks ragam-peragam berbeda dengan matriks korelasi (Hollmen, 2006).

Sedangkan untuk menentukan banyaknya komponen utama yang digunakan dari matriks korelasi, menggunakan kriteria bahwa komponen utama yang memiliki keragaman yang lebih besar dari 1. Pengertian dari kriteria tersebut adalah bahwa suatu komponen utama harus menjelaskan proporsi ragam yang lebih banyak dari apa yang dijelaskan oleh suatu variabel, diantara variabel-variabel semula yang dinyatakan dalam skor baku. Hal ini yang dapat digunakan untuk menentukan banyaknya komponen utama yang digunakan adalah proporsi dari total ragam dari skor-skor baku yang disebabkan oleh komponen ke-j yaitu $\frac{\lambda_j}{n}$. Persentase komulatif yang digunakan juga sama seperti penggunaan matriks korelasi yaitu berkisar 70%-80% (Supranto, 2004).

2.7.3 PCA

Menurut Johnson dan Wichern (1997), yang dimaksud kombinasi linier adalah:

$$a_1^T X = a_{11}X_{j1} + a_{12}X_{j2} + \cdots + a_{1n}X_{jn}$$

dengan vektor pembobot komponen utama ke-j $(j = 1, 2, \dots, n)$ yaitu a_j^T ditentuntukan dengan jalan menyelesaikan sistem persamaan berikut:

$$(\Sigma - \lambda_j I)a_j = 0 \tag{2.16}$$

agar persamaan (2.16) menghasilkan vektor a_j^T yang tidak sama dengan nol, maka harus dipenuhi syarat bahwa determinan dari matriks $(\Sigma - \lambda_j I)a_j = 0$ sehingga $|\Sigma - \lambda_j I| = 0$, jika persamaan (2.16) dikalikan dengan vektor a_j^T maka menghasilkan:

$$a_j^T \sum a_j - a_j^T \lambda_j I a_j = 0$$

$$a_j^T \sum a_j - a_j^T \lambda_j I a_j$$

dengan batasan $a_j^T a_j = 1$ maka diperoleh persamaan $a_j^T \sum a_j = \lambda_j$ sehingga terbentuk:

$$\lambda_j = a_j^T \sum a_j = s^2 c_j. \tag{2.17}$$

Dari uraian diatas, maka konsep analisis komponen utama berupa komponen utama ke-j $(j = 1, 2, \dots, n)$ dari contoh pengamatan berdimensi n variabel dengan kombinasi linier berbobot variabel asal yang dinyatakan dalam persamaan

$$C_j = a_{1j}X_1 + a_{2j}X_2 + \cdots, a_{nj}X_n$$
$$= a_j^T X \quad (2.18)$$

C_j =komponen utama.

Vektor pembobot a_j^T adalah vektor normal yang dipilih sehigga keragaman komponen utama ke-j maksimum, serta ortogonal terhadap vektor pembobot a_j^T dari komponen utama ke-i $(i \neq j, ij = 1, 2, \dots, n)$. Agar ragam komponen utama ke-j maksimum serta antar komponen utama tidak berkorelasi dengan komponen utama ke-i untuk $i \neq j$, dengan $a_j^T a_j = 1$ serta $a_j^T a_j = 0$ untuk $i \neq j$ $(ij = 1, 2, \dots, n)$, maka akar ciri λ_j dapat diinterpretasikan sebagai ragam komponen utama ke-j yang tidak berkorelasi antar komponen. Sehingga berlaku:

$$s^2 c_j = a_j^T$$
$$\sum a_j = \lambda_1 \quad (2.19)$$

kovarian(C_i, C_j) =kovarian$(a_i^T X, a_j^T X)$

untuk$i \neq j$ $(ij = 1, 2, \dots, n)$.

Matriks peragam Σ digunakan dalam analisis komponen utama apabila semua variabel yang diamati (n variabel) diukur dalam satuan pengukuran yang sama. Jika dari n variabel yang diamati itu tidak menggunakan satuan pengukuran yang sama, maka variabel asal itu perlu dibakukan.

Pembakuan variabel asal X ke dalam variabel baku Z, dapat dilakukan sebagai berikut:

$$Z_1 = \frac{(X_1 - \bar{x}_1)}{\sqrt{\sigma_{11}{}^2}}$$

$$Z_2 = \frac{(X_2 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sigma_{22}{}^2}}$$

$$\vdots$$

$$Z_p = \frac{(X_n - \bar{x}_n)}{\sqrt{\sigma_{nn}{}^2}} \tag{2.20}$$

dalam kasus data contoh (*sampel*), diduga $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ yang merupakan nilai rata-rata serta simpangan baku populasi $\sqrt{\sigma_{ii}{}^2}$ dapat diduga berdasarkan simpangan baku $\sqrt{s_{ii}{}^2}$ yang merupakan akar pangkat dua dari elemen diagonal utama dalam matriks Σ. Persamaan transformasi (2.18) dapat dinyatakan secara singkat dalam bentuk matriks berikut:

$$Z = \left(V^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} (X - \bar{x}) \tag{2.21}$$

sedangkan kovariannya adalah

$$\begin{aligned}(Z) &= (V^{\frac{1}{2}})^{-1} \textstyle\sum (V^{\frac{1}{2}})^{-1} \\ &= \rho.\end{aligned}$$

Dengan demikian komponen utama dari *Z* dapat ditentukan dari vektor eigen matriks korelasi variabel asal *P*. Dalam dimensi dimana data pengamatan merupakan data contoh, maka matriks korelasi populasi *P* diduga berdasarkan matriks korelasi contoh R. Komponen utama ke-*j* ($j = 1,2, \dots, n$) dari contoh pengamatan berdimensi *P* variabel baku (variabel asal yang dibakukan satuan pengukurannya) adalah kombinasi linier terbobot variabel baku yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}C_j &= a_{1j}Z_1 + a_{2j}Z_2 + \cdots + a_{pj}Z_p \\ &= a_j^T Z\end{aligned} \tag{2.22}$$

vektora_i^T ditentukan dengan jalan menyelesaikan sistem persamaan ciri berikut:

$$\left(R - \lambda_j I\right) a_j = 0. \tag{2.23}$$

Agar persamaan (2.23) menghasilkan solusi vektor a_i^T yang tidak sama dengan nol, maka haruslah dipenuhi syarat bahwa determinan dari matriks $(R - \lambda_j I)$ sama dengan nol. Ragam komponen utama ke-*j* adalah sama dengan akar ciri ke-*j*, serta antara komponen utama ke-*j* dan komponen utama ke-*i* tidak berkorelasi untuk *i*≠*j*, $ij = 1, 2, \dots, n$.

2.7.3.1. Komponen Utama Pertama

Menurut Chatfield dan Collins (2000), definisi komponen utama pertama adalah sebagai kombinasi linier berbobot variabel asal, dinyatakan sebagai berikut:

$$C_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{n1}X_n$$
$$= a_1^T X$$
$$s^2 c_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i1} a_{ji} s_{ij} \qquad (2.24)$$
$$= a_1^T \sum a_1.$$

Untuk menentukan vektor koefisien pembobot komponen utama pertama C_1, yang memaksimumkan ragam komponen utama pertama $s^2 c_1$, dengan batasan $a_1^T a_1 = 1$ adalah menggunakan fungsi Lagrange (metode pengganda Lagrange). Jadi perumusan masalah secara matematik adalah:

maksimum $s^2 c_1 = a_1^T \sum a_1$

dengan batasan: $a_1^T a_1 = 1$ atau $a_1^T a_1 - 1 = 0$.

Fungsi Lagrange dibentuk sebagai berikut:

$$L(a_1) = a_1^T \sum a_1 - \lambda_1 (a_1^T a_1 - 1).$$

Apabila $L(a_1)$ diturunkan terhadap vektor, maka diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2\sum a_1 - 2\lambda_1 a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\Sigma - \lambda_1 I)a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\Sigma - \lambda_1 I)a_1 = 0 \quad (2.25)$$

dimana: Σ = matriks peragam

λ_1 = nilai eigen

a_1 = vektoreigen

I = matriks identitas.

Untuk memperoleh vektor koefisien pembobot utama C_1, yang memaksimumkan ragam komponen utama $s^2 c_1$dengan kendala $a_1^T a_1 = 1$, maka persamaan (2.23) harus menghasilkan solusi yang tidak sama dengan nol untuk nilai a_1, sehingga matriks $(\Sigma - \lambda_1 I)$ haruslah merupakan matriks singular, yaitu matriks yang tidak mempunyai invers. Hal ini berarti, determinan dari matriks itu sama dengan nol, dalam persamaan:

$$|(\Sigma - \lambda_1 I) = 0|. \quad (2.26)$$

Agar diperoleh solusi a_1 tidak trivial, maka penentuan akar cirri atau nilai eigen untuk memperoleh komponen utama pertama, dilakukan dengan mengalikan sistem persamaan pada persamaan (2.25) dengan a_1 sebagai berikut:

$$(\Sigma - \lambda_1 I)a_1 = 0$$

$$\sum a_1 - \lambda_1 I a_1 = 0$$

$$\sum a_1 = \lambda_1 I a_1.$$

Dikalikan dengan $a_1{}^T$akan menjadi $a_1^T \sum a_1 = a_1^T \lambda_1 I a_1$.

Jika diberikan batasan bahwa $a_1^T a_1 = 1$ maka diperoleh:

$$a_1^T \sum a_1 = \lambda_1 \text{atau} \lambda_1 = a_1^T \sum a_1$$

$$\lambda_1 = a_1^T \sum a_1$$
$$= s^2 c_1. \qquad (2.27)$$

Dari persamaan (2.27) tampak bahwa ragam komponen utama maksimum, dengan nilai eigen terbesar dari matriks Σ. Uraian diatas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$C_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{n1}X_n$$
$$= a_1^T X$$

dengan a_1^T adalah vektor normal serta $a_1^T a_1 = 1$ dipilih agar keragaman komponen utama menjadi maksimum. Ragam komponen utama pertama adalah:

$$s^2 c_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i1} a_{j1} s_{ij}$$
$$= a_1^T \sum a_1$$
$$= \lambda_1$$

Jika koefisien a_{j1} dinormalkan sehingga $a_1^T a_1 = 1$ maka λ_1 dapat diinterpretasikan sebagai ragam contoh (*sample variance*) dari komponen utama C_1.

2.7.3.2.Komponen Utama Kedua

Selanjutnya dengan menggunakan prosedur yang sama dapat membentuk komponen utama kedua C_2 . Komponen utama kedua didefinisikan sebagai kombinasi linier terbobot variabel asal yang dinyatakan sebagai berikut:

$$C_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{n2}X_n$$
$$= a_2^T X$$
$$s^2 c_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i2} a_{j2} s_{ij}$$
$$= a_2^T \sum a$$

agar ragam komponen utama kedua maksimum untuk semua koefisien normal $a_2^T a_2 = 1$ serta komponen utama kedua berkorelasi dengan komponen utama pertama maka $a_2^T a_2 = 0$. Untuk menentukan vektor koefisien pembobot komponen kedua C_2 yang memaksimumkan ragam komponen utama kedua $s^2 c_2$ serta ortogonal terhadap komponen utama pertama, maka batasan $a_2^T a_2 = 1$ dan $a_2^T a_2 = 0$. Dengan menggunakan fungsi Lagrange, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{maksimum } s^2 c_2 = a_2^T \sum a_2 \text{ dengan } a_2^T a_2 = 1 \text{ atau } a_2^T a_2 - 1 = 0.$$

Fungsi Lagrange dapat dibentuk sebagai berikut:

$$L(a_2) = a_2^T \sum a_2 - \lambda_2 (a_2^T a_2 - 1) - \pi a_2^T a_1.$$

Selanjutnya $L(a_2)$ diturunkan terhadap vektor a_2, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = 2a_2^T \Sigma - 2\lambda_2 a_2 - \pi a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a_2^T \Sigma - \lambda_2 a_2) - \pi a_1 = 0$$

Hasil differensiasi dikalikan dengan a_1^T akan diperoleh:

$$a^T \sum a_2 - a_1^T \lambda_2 I a_2 - a_1^T \pi a_1 = 0$$

$$0 - 0 - 0 - \pi = 0$$

Jika $\pi = 0$, berarti hasil differensiasi dari fungsi Lagrange terhadap vektor akan menjadi

$$(\Sigma - \lambda_2 I) a_2 = 0. \tag{2.28}$$

Jika $(\Sigma - \lambda_2 I) a_2 = 0$ adalah matriks singular maka $(\Sigma - \lambda_2 I) a_2 \neq 0$ untuk nilai a_2 sehingga determinan dari matriks sama dengan nol:

$$|\Sigma - \lambda_2 I| = 0. \tag{2.29}$$

Untuk menentukan komponen utama kedua,pilih peragam komponen utama maksimum dan tidak berkorelasi dengan komponen pertama, yaitu dengan perkalian antara persamaan (2.28) dengan a_2^T, sehingga akan diperoleh:

$$a_2^T \sum a_2 - a_2^T \lambda_2 I a_2 = 0$$

$$a_2^T \sum a_2 = a_2^T \lambda_2 I a_2$$

dengan batasan $a_2^T \sum a_2 = 1$ maka $a_2^T \sum a_2 = \lambda_2$.

Jadi diperoleh persamaan $\lambda_2 = a_2^T \sum a_2 = s^2 c_2$. (2.30)

Dengan demikian diketahui bahwa agar ragam komponen utama kedua maksimum perlu dipilih nilai eigen λ_2 terbesar setelah λ_1 jadi dalam hal ini $\lambda_1 > \lambda_2$.

Komponen utama kedua adalah kombinasi linier berbobot variabel asal yang tidak berkorelasi dengan komponen utama pertama, serta memaksimumkan sisa keragaman data setelah diterangkan oleh komponen utama pertama. Komponen pertama kedua dapat dirumuskan sebagai:

$$C_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{n2}X_n$$

$$= a_2^T X. \quad (2.31)$$

Agar komponen utama kedua maksimum serta tidak berkorelasi dengan komponen utama pertama, maka vektor pembobot a_2^T dengan $a_2^T a_2 = 1$ atau $a_2^T a_2 = 0$. Ragam komponen utama kedua adalah

$$s^2 c_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i1} a_{j1} s_{ij}$$

$$= a_1^T \sum a_1$$

$$= \lambda_1$$

dengan koefisien a_{i2} adalah elemen-elemen dari vektor eigen yang berhubungan dengan nilai eigen terbesar kedua λ_2 yang diturunkan dari matriks peragam Σ. Jika a_{i2} koefisien dinormalkan sehingga $a_2^T a_2 = 1$ maka λ_2 dapat diinterpretasikan sebagai ragam contoh dari komponen utama kedua C_2 .

2.7.4 Uji Interdependensi antar Variabel

Uji interdependensi antar variabel adalah pengujian apakah antara variabel yang satu dengan variabel yanglain memiliki keterkaitan atau tidak. Pengujian dilakukan melalui:

1. Nilai *Keisee-Meyer-Olkin* (KMO)

   Nilai KMO dianggap mencukupi jika lebih dari 0.5, dengan rumus KMO adalah

   $$\text{KMO} = \frac{\sum_{j\neq 1}\sum \rho^2 ij}{\sum_{j\neq 1}\sum \rho^2 ij + \sum_{j\neq 0}\sum a^2 ij} \quad (2.32)$$

   dimana ρ = koefisienkorelasi

   a= koefisien korelasi parsial.

   Jika jumlah persegi dari koefisien korelasi parsial antara semua variabel adalah kecil ketika dibandingkan dengan jumlah persegi koefisien korelasi maka KMO mendekati l.

2. Uji *Bartlett*

   Bartlett's tes dengan signifikansi $P < 0.05$ memberi implikasi bahwa matriks korelasi sesuai untuk analisis.

   Rumus uji Bartlett:

   $$-ln|R|\left[n - 1 - \frac{2p+5}{6}\right] \quad (2.33)$$

$|R|$= nilai determinan

n = jumlah data

p = jumlah variabel.

3. *Measure Of Sampling Adequacy* (MSA)

Rumus MSA:

$$MSA_1 = \frac{\sum_{j=1} \rho_j{}^2}{\sum_{j=1} \rho_j{}^2 \sum_{j=1} a_j{}^2}$$

dimana: ρ = koefisien korelasi

a = koefisien korelasi parsial.

Angka ukuran sampling MSA berkisar 0 – 1, dengan kriteria:

a. MSA $=$ 1 variabel tersebut diprediksi dan dianalisis lebih lanjut.
b. MSA$>$ 0,5 variabel tersebut dapat diprediksi dan dianalisis lebih lanjut.
c. MSA$<$ 0,5 variabel tersebut tidak dapat diprediksi dan harus dikeluarkan dari analisis.

2.7.5 Korelasi Linier Sederhana

Jika memiliki contoh acak berukuran n dengan pasangan data (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n), serta apabila data itu menunjukkan hubungan linier, artinya mendekati suatu garis lurus, maka koefisien korelasi linier antara dua variabel X dan Y dapat ditentukan menggunakan rumus:

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{[(n\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2)(n\sum y_i{}^2 - (\sum y_i)^2)]}}. \qquad (2.34)$$

Menurut Gasperz (1995) korelasi dua variabel bersifat simetris, dalam arti bahwa korelasi antara variabel X dan Y sama dengan korelasi antara variabel Y

dan X, sehingga koefisien korelasi antara X dan Y (ρ_{xy} atau ρ_{yx}) akan sama dengan kofisien korelasi antara Y dan X (ρ_{yx} atau ρ_{xy}).

2.8 Kajian Al-Qur'an tentang PCA

Dalam Al-Qur'an terdapat beberapa ayat tentang bekerja sesuai kemampuan (*profesi*), sebagai berikut:

وَيَٰقَوۡمِ ٱعۡمَلُواْ عَلَىٰ مَكَانَتِكُمۡ إِنِّي عَٰمِلٞۖ سَوۡفَ تَعۡلَمُونَ مَن يَأۡتِيهِ عَذَابٞ
يُخۡزِيهِ وَمَنۡ هُوَ كَٰذِبٞۖ وَٱرۡتَقِبُوٓاْ إِنِّي مَعَكُمۡ رَقِيبٞ ٩٣

Artinya: "Dan (dia berkata): "Hai kaumku, berbuatlah menurut kemampuanmu, Sesungguhnya akupun berbuat (pula). kelak kamu akan mengetahui siapa yang akan ditimpa azab yang menghinakannya dan siapa yang berdusta. dan tunggulah azab (Tuhan), Sesungguhnya akupun menunggu bersama kamu"(Q.S. Huud:93).

Dari ayat tersebut, Allah SWT menyampaikan informasi perkataan Syu'aib "*I'maluu 'alaamakaanatikum*" kepada kaumnya yang berarti menurut kemampuanmu, atau bisa dipahami dalam arti kondisi yang menjadikan seseorang mampu melaksanakan pekerjaan yang dikehendakinya semaksimal mungkin (Ath-Thabari, 2009). Sebagian ahli tafsir mengatakan bahwa makna ayat tersebut adalah menurut kedudukanmu.

Dalam tafsir Al-Aitsar, "*berbuatlah menurut kemampuanmu*" diartikan dengan berbuatlah apa-apa yang ingin kalian perbuat sesuai kemampuanmu dari amalan kalian (Al-Jazairi, 2007). Dekomposisi merupakan suatu bentuk metode yang relevan untuk digunakan dalam pembagian kerja sesuai dengan profesi dan posisi. Hal ini bisa dilihat dari konsep dekomposisi yang berarti manguraikan dalam bentuk yang lebih sederhana. Bentuk yang lebih sederhana tersebut bisa diterapkan pada suatu data. Untuk mendapatkan data yang akurat diperlukan banyak tahapan yang harus dilakukan. Salah satu tahapan yang dapat digunakan adalah dengan metode PCA.

Pada metode ini, hal pertama yang dilakukan adalah menentukan nilai eigen, kemudian vektor eigen, serta mencari keragaman, pembentukan variabel-variabel baru, dan pengujian terhadap variabel baru. Variabel baru ini selanjutnya dinamakan komponen utama yang memiliki tugas untuk mereduksi suatu data agar lebih sederhana dan mudah diolah. Pembagian-pembagian tugas ini bukan hanya terjadi dalam metode PCA saja, lebih jauh lagi dalam kehidupan sehari-sehari banyak ditemukan pembagian tugas untuk lebih meringankan pekerjaan dan juga agar pekerjaan yang diselesaikan lebih maksimal dan sesuai dengan yang diharapkan.

Pembagian tugas ini juga berlaku pada para malaikat yang telah menerima pembagian tugas masing-masing sebagaimana tertulis dalam Al-Qur'an:

فَٱلْمُقَسِّمَٰتِ أَمْرًا ﴿٤﴾

Artinya: "dan (malaikat-malaikat) yang membagi-bagi urusan"(Q.S. Al-Dzariyat:4).

Maksud dari ayat di atas adalah malaikat membagi-bagikan urusan makhluk yang diperintahkan kepadanya seperti perjalanan bintang-bintang, menurunkan hujan, rezki dan sebagainya. Hal ini dimaksudkan agar setiap tugas bisa dijalankan dengan baik. Ayat tersebut mengajarkan kepada kita bahwa suatu pekerjaan akan selesai dengan baik bahkan dapat selesai lebih cepat apabila ada pembagian tugas yang jelas dan dilaksanakan oleh orang-orang yang mumpuni di bidang tersebut.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Mendefinisikan Model Dekomposisi Spektral

Model dekomposisi spektral dapat digunakan untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen. Menurut Johnson dan Wichern (1997), model dekomposisi spektral A dari suatu matriks yang simetris berukuran 4×4, adalah:

$$A = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i {a_i}^T \tag{3.1}$$

dimana:

λ_i = nilai eigen ke-i dari matriks A

a_i = vektor eigen ke-i dari matriks A

P = matriks yang elemen-elemennya vektor eigen berukuran 4×4

Λ = matriks diagonalyang memiliki nilai eigen pada diagonal utamanya.

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah sebuah matriks simetris berukuran 4×4. Maka $tr(A)$ adalah jumlah elemen diagonal. Jika dijabarkan sesuai dengan persamaan

$$A_{(n \times n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i_{(n\times 1)}} a^T_{i_{(1\times n)}} = P_{(n\times n)} \Lambda_{(n\times n)} P^T{}_{(n\times n)}.$$

Jika $n = 4$menjadi

$$A = \lambda_1 a_{1_{(4\times1)}} a^T_{1_{(1\times4)}} + \lambda_2 a_{2_{(4\times1)}} a^T_{2_{(1\times4)}} + \cdots + \lambda_4 a_{4_{(4\times1)}} a^T_{4_{(1\times4)}}.$$

Apabila ditulis dalam bentuk matriks maka

$$A = P\Lambda P^T$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {a_{11}}^T & {a_{21}}^T & {a_{31}}^T & {a_{41}}^T \\ {a_{12}}^T & {a_{22}}^T & {a_{32}}^T & {a_{42}}^T \\ {a_{13}}^T & {a_{23}}^T & {a_{33}}^T & {a_{43}}^T \\ {a_{14}}^T & {a_{24}}^T & {a_{34}}^T & {a_{44}}^T \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\lambda_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {a_{11}}^T & {a_{21}}^T & {a_{31}}^T & {a_{41}}^T \\ {a_{12}}^T & {a_{22}}^T & {a_{32}}^T & {a_{42}}^T \\ {a_{13}}^T & {a_{23}}^T & {a_{33}}^T & {a_{43}}^T \\ {a_{14}}^T & {a_{24}}^T & {a_{34}}^T & {a_{44}}^T \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\lambda_1{a_{11}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}\lambda_2{a_{22}}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\lambda_3{a_{33}}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\lambda_4{a_{44}}^T \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Jika $A=\Sigma$ dapat ditulis $\Sigma = P\Lambda P^T$

$$tr(A)=tr(\Sigma)$$

$$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_4.$$

Menurut Giudici (2003) jika didefinisikan $C=a^TX$ dan diketahui bahwa $\sum = \{(X-\bar{x})\times(X-\bar{x})^T\}$ maka dari persamaan $C_{(4\times1)}=A_{(4\times4)}X_{(4\times1)}$ diperoleh ragam setiap komponen utama, yaitu:

$$Var\,(C)=Var\,(a^TX)$$

$$=E\{(a^TX-a^T\bar{x})(a^TX-a^T\bar{x})^T\}$$

$$=E\{(a^TX-a^T\bar{x})(a^T(X-\bar{x})^T)\}$$

$$=E\left\{(a^TX-a^T\bar{x})\big(a^T(X-\bar{x})\big)^T\right\}$$

$$= E[(X - \bar{x})(a^T(X - \bar{x}))]^T a^T$$

$$= E[(X - \bar{x})^T(a^T(X - \bar{x}))^T]a^T$$

$$= aE(X - \bar{x})(X - \bar{x})^T a^T$$

$$= a\Sigma a^T \tag{3.3}$$

dimana $\bar{x}$ = vektor rata-rata X.

Menurut Chatfield dan Collins (2000), untuk menentukan vektor koefisien pembobot komponen utama pertama C_1, yang memaksimumkan ragam komponen utama pertama s^2c_1, dengan batasan $a_1^T a_1 = 1$ adalah menggunakan fungsi Lagrange (metode pengganda Lagrange) sebagai berikut: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ dengan memaksimumkan $s^2c_1 = a_1^T \sum a_1$ dan batasan: $a_1^T a_1 = 1$ atau $a_1^T a_1 - 1 = 0$.

Agar diperoleh $Var\ (C)$ yang maksimum maka digunakan batasan $a_i^T a_i = 1$, dengan menggunakan metode penganda Lagrange diperoleh:

$$L(a_i, \lambda) = a_i^T \sum a_i - \lambda_i(a_i^T a_i - 1). \tag{3.4}$$

Fungsi ini akan maksimum jika turunan parsial pertama dari $L(a, \lambda)$ terhadap a_i dan λ_i disamadengankan dengan nilai nol, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L(a_i,\lambda_i)}{\partial a_i} = 2\sum a_i - 2\lambda a_i = 0 \tag{3.5}$$

$$= 2(\sum - \lambda_i I)a_i = 0$$

$$= (\sum - \lambda_i I)a_i = 0$$

$$= \sum a_i - \lambda_i a_i = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial L(a_i,\lambda_i)}{\partial a_i} = a_i^T a_i - 1 = 0$$

$$a_i^T a_i = 1$$

Persamaan $\frac{\partial L(a_i,\lambda_i)}{\partial a_i} = \sum a_i - \lambda_i a_i = 0$ dikenal sebagai persamaan karakteristik dari matriks ragam-peragam, sehingga diperoleh akar-akar karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_4$ dimana $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_4 \geq 0$. Jika persamaan $\sum a_i - \lambda_i a_i = 0$ dikalikan dengan a_i^T dan $a_i^T a_i = 1$, maka akan diperoleh hasil

$$(\sum a_i - \lambda_i a_i)a_i^T = a_i^T \sum a_i - a_i^T \lambda_i a_i = 0$$

$$= a_i^T \sum a_i - \lambda_i a_i^T a_i = 0$$

$$= a_i^T \sum a_i - \lambda_i = 0$$

$$\lambda_i = a_i^T \sum a_i^T. \tag{3.7}$$

Berdasarkan persamaan $a\Sigma a^T$ dan $\lambda_i = a_i^T \sum a_i^T$ diperoleh nilai untuk $Var\ (C)$ sama dengan λ. Dengan demikian diketahui bahwa ragam setiap komponen utama berpadanan dengan nilai setiap akar ciri atau nilai eigen yang ada. Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} Var(C_i) = tr(\Sigma) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} Var(C_i, C_j). \tag{3.8}$$

3.2 Menentukan Vektor Eigen dan Nilai Eigen dari Model Dekomposisi Spektral Menggunakan Metode PCA dengan Matriks Korelasi

Berdasarkan definisi dari model dekomposisi spektral di atas maka hal yang terlebih dahulu ditentukan adalah matriks ragam-peragam (Σ). Matriks ragam-peragam dapat dicari berdasarkan model dari persamaan vektor eigen, yaitu $(\Sigma - \lambda I)a = 0$. Untuk menggunakan persamaan tersebut maka perlu menentukan matriks ragam-peragam(Σ), nilai eigen (λ), dan vektor eigen (a).

a. Menentukan matriks ragam-peragam(Σ)

Matriks ragam-peragam (Σ) adalah matriks yang berisi varian antar variabel. Pada matriks data multivariat, masing-masing variabel dapat dihitung meannya, disajikan dalam bentuk vektor mean. Menentukan matriks ragam-peragam dengan langkah-langkah sebagai berikut.

i. Menentukan mean ($\bar{x}$)

Misalkan diketahui X adalah matriks data, $\bar{x}$ adalah matriks rata-rata (*mean*), i menunjukkan baris, j menunjukkan kolom, dan Σ adalah matriks ragam-peragam, dimana:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}$$

X adalah matriks dengan ordo 4×4.

Untuk mencari $\bar{x}$ maka dicari $\bar{x}_j$ terlebih dahulu, dimana $\bar{x}_j$ adalah rata-rata (*mean*) dari tiap kolom

$$\bar{x}_j = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{ij}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}{4}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}}{4}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}}{4}$$

$$\bar{x}_4 = \frac{x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}}{4}$$

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}X^T 1$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$\bar{x}$ adalah matriks rata-rata (*mean*) dengan ordo 4×1.

ii. Menentukan varian($\boldsymbol{\sigma^2}$)

Menentukan varian dari matriks X dengan rumus $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$. Untuk mendapatkan varian dari matriks X maka mean ($\bar{x}$) dirubah dalam bentuk matriks berukuran 4×4, dengan cara mengalikan mean ($\bar{x}$) dengan transpose vektor 1

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 & \bar{x}_4 & \bar{x}_4 & \bar{x}_4 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}$ adalah matriks rata-rata dengan ordo 4×4.

Selanjutnya, menentukan matriks diagonal simpangan rata-rata (R_s) dengan cara mengurangkan matriks X dengan $\bar{\boldsymbol{x}}$ yang menghasilkan matriks baku 4×4 dinotasikan dengan R_s

$$R_s = X - \bar{\boldsymbol{x}}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 & \bar{x}_4 & \bar{x}_4 & \bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_1 & x_{13} - \bar{x}_1 & x_{14} - \bar{x}_1 \\ x_{21} - \bar{x}_2 & x_{22} - \bar{x}_2 & x_{23} - \bar{x}_2 & x_{24} - \bar{x}_2 \\ x_{31} - \bar{x}_3 & x_{32} - \bar{x}_3 & x_{33} - \bar{x}_3 & x_{34} - \bar{x}_3 \\ x_{41} - \bar{x}_4 & x_{42} - \bar{x}_4 & x_{43} - \bar{x}_4 & x_{44} - \bar{x}_4 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Setelah simpangan rata-rata (R_s) diketahui kemudian dihitung variabilitas sampel. Varian dan simpangan baku dari data sampel mempunyai rumus dasar yang sama dengan populasi. Varian mengukur rata-rata kuadrat jarak dari mean dan standar deviasi merupakan akar dari varian. Nilai kuadrat ini kemudian digunakan untuk menghitung rata-rata kuadrat simpangannya yang disebut varian. Untuk menghitung nilainya, pertama-tama harus menentukan jumlah kuadrat simpangan (JK). JK dapat dicari dengan cara perkalian silang antara matriks R_s dengan matriks transposnya.

JK

$$= \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_1 & x_{13} - \bar{x}_1 & x_{14} - \bar{x}_1 \\ x_{21} - \bar{x}_2 & x_{22} - \bar{x}_2 & x_{23} - \bar{x}_2 & x_{24} - \bar{x}_2 \\ x_{31} - \bar{x}_3 & x_{32} - \bar{x}_3 & x_{33} - \bar{x}_3 & x_{34} - \bar{x}_3 \\ x_{41} - \bar{x}_4 & x_{42} - \bar{x}_4 & x_{43} - \bar{x}_4 & x_{44} - \bar{x}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{21} - \bar{x}_2 & x_{31} - \bar{x}_3 & x_{41} - \bar{x}_4 \\ x_{12} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & x_{32} - \bar{x}_3 & x_{42} - \bar{x}_4 \\ x_{13} - \bar{x}_1 & x_{23} - \bar{x}_2 & x_{33} - \bar{x}_3 & x_{43} - \bar{x}_4 \\ x_{14} - \bar{x}_1 & x_{24} - \bar{x}_2 & x_{34} - \bar{x}_3 & x_{44} - \bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{R_s R_s}^{\mathrm{T}}$$

$$= (X - \boldsymbol{\bar{x}})(X - \boldsymbol{\bar{x}})^T.$$

Apabila JK sudah diketahui maka langkah selanjutnya adalah menentukan varian, dimana varian untuk data diperoleh dari $\frac{JK}{n}$ sehingga

$$\sigma_{ij}{}^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{ji} - \bar{x}_j)$$

maka diperoleh matriks ragam-peragam(Σ)

$$\sigma_1{}^2 = \frac{(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{12}-\bar{x}_1)+(x_{13}-\bar{x}_1)(x_{13}-\bar{x}_1)+(x_{14}-\bar{x}_1)(x_{14}-\bar{x}_1)}{4}$$

$$\sigma_{12}{}^2 = \frac{(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{22}-\bar{x}_2)+(x_{13}-\bar{x}_1)(x_{23}-\bar{x}_2)+(x_{14}-\bar{x}_1)(x_{24}-\bar{x}_2)}{4}$$

$$\sigma_{13}{}^2 = \frac{(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{31}-\bar{x}_3)+(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{32}-\bar{x}_3)+(x_{13}-\bar{x}_1)(x_{33}-\bar{x}_3)+(x_{14}-\bar{x}_1)(x_{34}-\bar{x}_3)}{4}$$

$$\sigma_{14}{}^2 = \frac{(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{41}-\bar{x}_4)+(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{42}-\bar{x}_4)+(x_{13}-\bar{x}_1)(x_{43}-\bar{x}_4)+(x_{14}-\bar{x}_1)(x_{44}-\bar{x}_4)}{4}$$

$$\sigma_{21}{}^2 = \frac{(x_{21}-\bar{x}_2)(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{22}-\bar{x}_2)(x_{12}-\bar{x}_1)+(x_{23}-\bar{x}_2)(x_{13}-\bar{x}_1)+(x_{24}-\bar{x}_2)(x_{14}-\bar{x}_1)}{4}$$

$$\sigma_2{}^2 = \frac{(x_{21}-\bar{x}_2)(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{22}-\bar{x}_2)(x_{22}-\bar{x}_2)+(x_{23}-\bar{x}_2)(x_{23}-\bar{x}_2)+(x_{24}-\bar{x}_2)(x_{24}-\bar{x}_2)}{4}$$

$$\sigma_{23}{}^2 = \frac{(x_{21}-\bar{x}_2)(x_{31}-\bar{x}_3)+(x_{22}-\bar{x}_2)(x_{32}-\bar{x}_3)+(x_{23}-\bar{x}_2)(x_{33}-\bar{x}_3)+(x_{24}-\bar{x}_2)(x_{34}-\bar{x}_3)}{4}$$

$$\sigma_{24}{}^2 = \frac{(x_{21}-\bar{x}_2)(x_{41}-\bar{x}_4)+(x_{22}-\bar{x}_2)(x_{42}-\bar{x}_4)+(x_{23}-\bar{x}_2)(x_{43}-\bar{x}_4)+(x_{24}-\bar{x}_2)(x_{44}-\bar{x}_4)}{4}$$

$$\sigma_{31}{}^2 = \frac{(x_{31}-\bar{x}_3)(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{32}-\bar{x}_3)(x_{12}-\bar{x}_1)+(x_{33}-\bar{x}_3)(x_{13}-\bar{x}_1)+(x_{34}-\bar{x}_3)(x_{14}-\bar{x}_1)}{4}$$

$$\sigma_{32}{}^2 = \frac{(x_{31}-\bar{x}_3)(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{32}-\bar{x}_3)(x_{22}-\bar{x}_2)+(x_{33}-\bar{x}_3)(x_{23}-\bar{x}_2)+(x_{34}-\bar{x}_3)(x_{24}-\bar{x}_2)}{4}$$

$$\sigma_3{}^2 = \frac{(x_{31}-\bar{x}_3)(x_{31}-\bar{x}_3)+(x_{32}-\bar{x}_3)(x_{32}-\bar{x}_3)+(x_{33}-\bar{x}_3)(x_{33}-\bar{x}_3)+(x_{34}-\bar{x}_3)(x_{34}-\bar{x}_3)}{4}$$

$$\sigma_{34}{}^2 = \frac{(x_{31}-\bar{x}_3)(x_{41}-\bar{x}_4)+(x_{32}-\bar{x}_3)(x_{42}-\bar{x}_4)+(x_{33}-\bar{x}_3)(x_{43}-\bar{x}_4)+(x_{34}-\bar{x}_3)(x_{44}-\bar{x}_4)}{4}$$

$$\sigma_{41}{}^2 = \frac{(x_{41}-\bar{x}_4)(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{42}-\bar{x}_4)(x_{12}-\bar{x}_1)+(x_{43}-\bar{x}_4)(x_{13}-\bar{x}_1)+(x_{44}-\bar{x}_4)(x_{14}-\bar{x}_1)}{4}$$

$$\sigma_{42}{}^2 = \frac{(x_{41}-\bar{x}_4)(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{42}-\bar{x}_4)(x_{22}-\bar{x}_2)+(x_{43}-\bar{x}_4)(x_{23}-\bar{x}_2)+(x_{44}-\bar{x}_4)(x_{24}-\bar{x}_2)}{4}$$

$$\sigma_{43}{}^2 = \frac{(x_{41}-\bar{x}_4)(x_{31}-\bar{x}_3)+(x_{42}-\bar{x}_4)(x_{32}-\bar{x}_3)+(x_{43}-\bar{x}_4)(x_{33}-\bar{x}_3)+(x_{44}-\bar{x}_4)(x_{34}-\bar{x}_3)}{4}$$

$$\sigma_4{}^2 = \frac{(x_{41}-\bar{x}_4)(x_{41}-\bar{x}_4)+(x_{42}-\bar{x}_4)(x_{42}-\bar{x}_4)+(x_{43}-\bar{x}_4)(x_{43}-\bar{x}_4)+(x_{44}-\bar{x}_4)(x_{44}-\bar{x}_4)}{4}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & \sigma_{12}{}^2 & \sigma_{13}{}^2 & \sigma_{14}{}^2 \\ \sigma_{21}{}^2 & \sigma_2{}^2 & \sigma_{23}{}^2 & \sigma_{24}{}^2 \\ \sigma_{31}{}^2 & \sigma_{32}{}^2 & \sigma_3{}^2 & \sigma_{34}{}^2 \\ \sigma_{41}{}^2 & \sigma_{42}{}^2 & \sigma_{43}{}^2 & \sigma_4{}^2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

b.Menentukan matriks korelasi $(\boldsymbol{\rho})$

Matriks korelasi 4 peubah acak $x_1, \dots, x_4$ adalah matriks berordo 4×4 dimana *i,j* adalah $corr(x_i, x_j)$. Jika ukuran korelasi yang digunakan adalah koefisien momen produk, matriks korelasi akan sama dengan matriks ragam peragam peubah acak yang telah distandarkan x_i, untuk $i = 1, 2, \dots, 4$. Sehingga, matriks korelasi merupakan matriks definit tak-negatif. Matriks korelasi selalu simetris, yakni korelasi antara x_i dan x_j adalah sama dengan korelasi antara x_j dan x_i.

Untuk menentukan matriks korelasi (ρ) maka terlebih dahulu menentukan kovariannya. Langkah-langkah untuk menentukan kovarian sebagai berikut:
Menghitung matriks baku yang isinya adalah simpangan baku, dengan asumsi

$$Var(x_i, x_j) = \begin{cases} \sigma, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Simpangan baku merupakan akar dari varian, sehingga rumusnya menjadi $\sqrt{\sigma_{ij}^{\,2}}$. Sehingga dapat ditulis kedalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^{\,2} & \sigma_{12}^{\,2} & \sigma_{13}^{\,2} & \sigma_{14}^{\,2} \\ \sigma_{21}^{\,2} & \sigma_2^{\,2} & \sigma_{23}^{\,2} & \sigma_{24}^{\,2} \\ \sigma_{31}^{\,2} & \sigma_{32}^{\,2} & \sigma_3^{\,2} & \sigma_{34}^{\,2} \\ \sigma_{41}^{\,2} & \sigma_{42}^{\,2} & \sigma_{43}^{\,2} & \sigma_4^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{V}_{(4\times4)}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{12}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{13}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{14}^{\,2}} \\ \sqrt{\sigma_{21}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_2^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{23}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{24}^{\,2}} \\ \sqrt{\sigma_{31}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{32}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_3^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{34}^{\,2}} \\ \sqrt{\sigma_{41}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{42}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_{43}^{\,2}} & \sqrt{\sigma_4^{\,2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menentukan korelasi dari matriks A maka menentukan variabel baku dengan cara menghitung invers dari matriks baku, yaitu $\left(V_{(4\times4)}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

$$Det\left(V^{\frac{1}{2}}\right) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$$

$$K = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

dimana:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = \sigma_2\sigma_3\sigma_4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{14} = (-1)^{1+4}M_{14}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}M_{21}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}M_{22}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_3\sigma_4$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}M_{23}$$

$$= -\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{24} = (-1)^{2+4}M_{24}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}M_{31}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}M_{32}$$

$$= -\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}M_{33}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_4$$

$$c_{41} = (-1)^{4+1}M_{41}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{42} = (-1)^{4+2}M_{42}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{43} = (-1)^{4+3} M_{43}$$

$$= -\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{44} = (-1)^{4+4} M_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$Adj\left(V^{\frac{1}{2}}\right) = K^T$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_2\sigma_3\sigma_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(V_{(4\times4)}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(V^{\frac{1}{2}}\right)} Adj(V^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} \begin{bmatrix} \sigma_2\sigma_3\sigma_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(V_{(4\times4)}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_4} \end{bmatrix}$$

Setelah variabel baku diketahui maka dapat dihasilkan matriks korelasi dengan rumus

$$\rho = \left(V_{(4\times4)}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \Sigma \left(V_{(4\times4)}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & {\sigma_{12}}^2 & {\sigma_{13}}^2 & {\sigma_{14}}^2 \\ {\sigma_{21}}^2 & {\sigma_2}^2 & {\sigma_{23}}^2 & {\sigma_{24}}^2 \\ {\sigma_{31}}^2 & {\sigma_{32}}^2 & {\sigma_3}^2 & {\sigma_{34}}^2 \\ {\sigma_{41}}^2 & {\sigma_{42}}^2 & {\sigma_{43}}^2 & {\sigma_4}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_4} \end{bmatrix}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{{\sigma_1}^2}{\sigma_1} & \frac{{\sigma_{12}}^2}{\sigma_1} & \frac{{\sigma_{13}}^2}{\sigma_1} & \frac{{\sigma_{14}}^2}{\sigma_1} \\ \frac{{\sigma_{21}}^2}{\sigma_2} & \frac{{\sigma_2}^2}{\sigma_2} & \frac{{\sigma_{23}}^2}{\sigma_2} & \frac{{\sigma_{24}}^2}{\sigma_2} \\ \frac{{\sigma_{31}}^2}{\sigma_3} & \frac{{\sigma_{32}}^2}{\sigma_3} & \frac{{\sigma_3}^2}{\sigma_3} & \frac{{\sigma_{34}}^2}{\sigma_3} \\ \frac{{\sigma_{41}}^2}{\sigma_4} & \frac{{\sigma_{42}}^2}{\sigma_4} & \frac{{\sigma_{43}}^2}{\sigma_4} & \frac{{\sigma_4}^2}{\sigma_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_4} \end{bmatrix}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{{\sigma_1}^2}{\sigma_1\sigma_1} & \frac{{\sigma_{12}}^2}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{{\sigma_{13}}^2}{\sigma_1\sigma_3} & \frac{{\sigma_{14}}^2}{\sigma_1\sigma_4} \\ \frac{{\sigma_{21}}^2}{\sigma_2\sigma_1} & \frac{{\sigma_2}^2}{\sigma_2\sigma_2} & \frac{{\sigma_{23}}^2}{\sigma_2\sigma_3} & \frac{{\sigma_{24}}^2}{\sigma_2\sigma_4} \\ \frac{{\sigma_{31}}^2}{\sigma_3\sigma_1} & \frac{{\sigma_{32}}^2}{\sigma_3\sigma_2} & \frac{{\sigma_3}^2}{\sigma_3\sigma_3} & \frac{{\sigma_{34}}^2}{\sigma_3\sigma_4} \\ \frac{{\sigma_{41}}^2}{\sigma_4\sigma_1} & \frac{{\sigma_{42}}^2}{\sigma_4\sigma_2} & \frac{{\sigma_{43}}^2}{\sigma_4\sigma_3} & \frac{{\sigma_4}^2}{\sigma_4\sigma_1} \end{bmatrix}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

dengan:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{x_{ij}-\bar{x}_i}{\sigma_{ii}}\right)\left(\frac{x_{ji}-\bar{x}_j}{\sigma_{jj}}\right)$$

untuk $i = j$ menghasilkan $\rho = 1$

$$\rho_{11} = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{x_{11}-\bar{x}_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_{11}-\bar{x}_1}{\sigma_1}\right) = \frac{(x_{11}-\bar{x}_1)(x_{11}-\bar{x}_1)}{\sigma_1\sigma_1} = 1$$

dan untuk $i \neq j$

$$\rho_{12} = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{x_{12}-\bar{x}_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_{21}-\bar{x}_2}{\sigma_2}\right) = \frac{(x_{12}-\bar{x}_1)(x_{21}-\bar{x}_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

c. Menentukan nilai eigen ($\boldsymbol{\lambda}$)

Selanjutnya menentukan nilai eigen. Nilai eigen dapat dicari dengan menggunakan persamaan vektor eigen, jika $(\rho - \lambda I)$ adalah merupakan matriks singular maka λ dapat dicari dengan cara

$$|\rho - \lambda I| = 0$$

$$\left\|\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right\| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\begin{bmatrix} 1-\lambda & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1-\lambda & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1-\lambda & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1-\lambda \end{bmatrix}\right\| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=1-\lambda det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{32} & 1-\lambda & \rho_{34} \\ \rho_{42} & \rho_{43} & 1-\lambda \end{bmatrix} + \rho_{21} det \begin{bmatrix} \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{32} & 1-\lambda & \rho_{34} \\ \rho_{42} & \rho_{43} & 1-\lambda \end{bmatrix} +$$

$$\rho_{31} det \begin{bmatrix} \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ 1-\lambda & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{42} & \rho_{43} & 1-\lambda \end{bmatrix} + \rho_{41} det \begin{bmatrix} \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ 1-\lambda & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{32} & 1-\lambda & \rho_{34} \end{bmatrix}$$

$$=1-\lambda \left(1-\lambda det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \rho_{34} \\ \rho_{43} & 1-\lambda \end{bmatrix} - \rho_{23} det \begin{bmatrix} \rho_{32} & \rho_{34} \\ \rho_{42} & 1-\lambda \end{bmatrix} -\right.$$

$$\left.\rho_{24} det \begin{bmatrix} \rho_{32} & 1-\lambda \\ \rho_{42} & \rho_{43} \end{bmatrix}\right) +$$

$$\rho_{21} \left(\rho_{12} det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \rho_{34} \\ \rho_{43} & 1-\lambda \end{bmatrix} - \rho_{13} det \begin{bmatrix} \rho_{32} & \rho_{34} \\ \rho_{42} & 1-\lambda \end{bmatrix} -\right.$$

$$\left.\rho_{14} det \begin{bmatrix} \rho_{32} & 1-\lambda \\ \rho_{42} & \rho_{43} \end{bmatrix}\right) +$$

$$\rho_{31}\left(\rho_{12}det\begin{bmatrix}\rho_{23} & \rho_{24}\\ \rho_{43} & 1-\lambda\end{bmatrix} - \rho_{13}det\begin{bmatrix}1-\lambda & \rho_{24}\\ \rho_{42} & 1-\lambda\end{bmatrix} -\right.$$

$$\left.\rho_{14}det\begin{bmatrix}1-\lambda & \rho_{23}\\ \rho_{42} & \rho_{43}\end{bmatrix}\right) +$$

$$\rho_{41}\left(\rho_{12}det\begin{bmatrix}\rho_{23} & \rho_{24}\\ 1-\lambda & \rho_{34}\end{bmatrix} - \rho_{13}det\begin{bmatrix}1-\lambda & \rho_{24}\\ \rho_{32} & \rho_{34}\end{bmatrix} -\right.$$

$$\left.\rho_{14}det\begin{bmatrix}1-\lambda & \rho_{24}\\ \rho_{32} & 1-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

sehingga diperoleh

$$\lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_4\end{bmatrix} \tag{3.14}$$

nilai eigen dipilih mulai yang terbesar hingga yang terkecil (lebih besar daripada 0) yaitu $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_4 > 0$.

d. Menentukan vektor eigen ($\boldsymbol{a}$)

Untuk menentukan vektor eigen yang sesuai digunakan persamaan berikut:

$$(\rho - \lambda I)a = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14}\\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34}\\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14}\\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34}\\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14}\\ \rho_{21} & 1-\lambda_2 & \rho_{23} & \rho_{24}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1-\lambda_3 & \rho_{34}\\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1-\lambda_4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix} = 0$$

permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan cara mencari eselon baris (*row echelon matrices*) sebagai berikut:

$$(1-\lambda_1)a_1 + \rho_{12}a_2 + \rho_{13}a_3 + \rho_{14}a_4 = 0$$

$$\rho_{21}a_1 + (1-\lambda_2)a_2 + \rho_{23}a_3 + \rho_{24}a_4 = 0$$

$$\rho_{31}a_1 + \rho_{32}a_2 + (1-\lambda_3)a_3 + \rho_{34}a_4 = 0$$

$$\rho_{41}a_1 + \rho_{42}a_2 + \rho_{42}a_3 + (1-\lambda_1)a_4 = 0. \qquad (3.15)$$

Untuk memenuhi persamaan $a_i^T a_i = 1$ maka iterasi tersebut dinormalkan melalui *Jarak Euclidan* sebagai berikut:

$$\text{jarak vektor, } l = \sqrt{((a_1)^2 + (a_2)^2 + \cdots + (a_4)^2)}$$

$$\text{vektor eigen} = \left[\frac{a_1}{l}, \frac{a_2}{l}, \cdots, \frac{a_4}{l}\right] \qquad (3.16)$$

sehingga diperoleh vektor normal $a_j{}^T$.

3. 3 Menentukan Keragaman Komponen Utama

Setelah mendapat matriks ragam-peragam, nilai eigen dan vektor eigen maka persamaan komponen utama dapat dibentuk, yaitu:

$$C_1 = a_1^T X = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 + a_{41}X_4$$

$$C_2 = a_2^T X = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4$$

$$C_3 = a_3^T X = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4$$

$$C_4 = a_4^T X = a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4 \qquad (3.17)$$

Terdapat dua cara yang digunakan dalam pemilihan komponen utama, yaitu melalui nilai eigen dan varian. Pertama jika nilai eigen lebih besar atau sama dengan satu ($\lambda \geq I$). Karena matriks peragam (Σ) merupakan matriks segiempat maka hasil tambah setiap elemen-elemen ialah jumlah varian= $\sum_{j=1}^{4} Var(C_4)$

$$= tr\ (\Sigma)$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_4$$

kemudian jumlah populasi varian untuk komponen ke- j ialah

jumlah varian= $\frac{\lambda_j}{4}$, $j = 1, 2, \ldots, 4.$

Kedua, jika keragaman kumulatif lebih dari 70%. Proses ini sangat penting karena proporsi keragaman yang dianggap cukup mewakili total keragaman data. Proses ini dapat menentukan bilangan komponen utama yang akan diperoleh dengan syarat:

$$\text{keragaman kumulatif} = \left(\frac{\sum_{j=1}^{4} \lambda_j}{4}\right) \times 100\% \geq 70\%, j = 1, 2, \ldots, 4 \qquad (3.18)$$

kemudian jumlah varian untuk komponen ke-j adalah

$$\text{jumlah varian} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_4}, j = 1, 2, \ldots, 4.$$

Jumlah varian inilah yang akan menentukan bilangan komponen yang akan dipilih berdasarkan jumlah proporsi keragaman (varian) atau nilai eigen (λ).

3.4 Uji Interdependensi antar Variabel

Untuk mengetahui apakah variabel dianggap dapat diproses lebih lanjut atau dikatakan layak untuk diproses, maka terlebih dahulu dilakukan uji interdependensi. Pengujian ini mengharuskan adanya korelasi yang signifikan antar variabel paling sedikit beberapa variabel. Pengujian interdependensi antar variabel ini menggunakan *Measure Of Sampling Adequacy* (MSA). Angka ukuran sampling MSA berkisar 0 – 1. Agar data dapat diproses lebih lanjut maka nilai MSA> 0,5 denga rumus MSA:

$$MSA = \frac{\sum_{j=1} \rho_j{}^2}{\sum_{j=1} \rho_j{}^2 \sum_{j=1} a_j{}^2} \tag{3.19}$$

maka diperoleh nilai MSA sebagai berikut

$$MSA_1 = \frac{1+\rho_{21}+\rho_{31}+\rho_{41}}{(1+\rho_{21}+\rho_{31}+\rho_{41})(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)}$$

$$MSA_1 = \frac{\sum_{j=1} \rho_j{}^2}{\sum_{j=1} \rho_j{}^2 \sum_{j=1} a_j{}^2}$$

$$MSA_2 = \frac{\rho_{12}+1+\rho_{32}+\rho_{42}}{(\rho_{12}+1+\rho_{32}+\rho_{42})(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)}$$

$$MSA_2 = \frac{\sum_{j=2} \rho_j{}^2}{\sum_{j=2} \rho_j{}^2 \sum_{j=1} a_j{}^2}$$

$$MSA_3 = \frac{\rho_{13}+\rho_{23}+1+\rho_{43}}{(\rho_{13}+\rho_{23}+1+\rho_{43})(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)}$$

$$MSA_3 = \frac{\sum_{j=3} \rho_j{}^2}{\sum_{j=3} \rho_j{}^2 \sum_{j=1} a_j{}^2}$$

$$MSA_4 = \frac{\rho_{14}+\rho_{24}+\rho_{34}+1}{(\rho_{14}+\rho_{24}+\rho_{34}+1)(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)}$$

$$MSA_4 = \frac{\sum_{j=4} \rho_j{}^2}{\sum_{j=4} \rho_j{}^2 \sum_{j=1} a_j{}^2}$$

3.5 Menentukan Koefisien Korelasi

Untuk mengenal pasti komponen $x_1, x_{2,} \cdots, x_4$ yang berkorelasi dalam komponen pertama (C_1) dan seterusnya maka terlebih dahulu mencari korelasi antara C_p dan $x_n$dengan rumus:

$$\rho_{C_p,x_n} = \frac{a_{np}\sqrt{\lambda_p}}{\sqrt{\sigma_{nn}{}^2}} \tag{3.20}$$

$p, n = 1, 2, \dots, 4$

$$\rho_{C_1,X_1} = \frac{a_{11}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{{\sigma_1}^2}} \rho_{C_1,X_2} = \frac{a_{12}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{{\sigma_2}^2}} \rho_{C_1,X_3} = \frac{a_{13}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{{\sigma_3}^2}} \rho_{C_1,X_4} = \frac{a_{14}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{{\sigma_4}^2}}$$

$$\rho_{C_2,X_1} = \frac{a_{21}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{{\sigma_1}^2}} \rho_{C_2,X_2} = \frac{a_{22}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{{\sigma_2}^2}} \rho_{C_2,X_3} = \frac{a_{23}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{{\sigma_3}^2}} \rho_{C_2,X_4} = \frac{a_{24}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{{\sigma_4}^2}}$$

$$\rho_{C_3,X_1} = \frac{a_{31}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{{\sigma_1}^2}} \rho_{C_3,X_2} = \frac{a_{32}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{{\sigma_2}^2}} \rho_{C_3,X_n} = \frac{a_{33}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{{\sigma_3}^2}} \rho_{C_3,X_4} = \frac{a_{34}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{{\sigma_4}^2}}$$

$$\rho_{C_4,X_1} = \frac{a_{41}\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{{\sigma_1}^2}} \rho_{C_4,X_2} = \frac{a_{42}\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{{\sigma_2}^2}} \rho_{C_4,X_3} = \frac{a_{43}\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{{\sigma_3}^2}} \rho_{C_4,X_4} = \frac{a_{44}\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{{\sigma_4}^2}}$$

sehingga diperoleh koefisien korelasi sebagai berikut:

$$= \begin{bmatrix} \rho_{C_1,X_1} & \rho_{C_1,X_2} & \rho_{C_1,X_{31}} & \rho_{C_1,X_4} \\ \rho_{C_2,X_1} & \rho_{C_2,X_2} & \rho_{C_2,X_3} & \rho_{C_2,X_4} \\ \rho_{C_3,X_1} & \rho_{C_3,X_2} & \rho_{C_3,X_3} & \rho_{C_3,X_4} \\ \rho_{C_4,X_1} & \rho_{C_4,X_2} & \rho_{C_4,X_3} & \rho_{C_4,X_4} \end{bmatrix}$$

kemudian mengukur keeratan hubungan antar variabel dengan komponen utama yang terbentuk, yaitu dengan menghitung koefisien korelasi antar variabel dan komponen utama dengan vektor normal sebagai berikut:

$$a_{11} = \frac{a_{11}}{\sqrt{((a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+(a_4)^2)}}$$

$$a_{21} = \frac{a_{21}}{\sqrt{((a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+(a_4)^2)}}$$

$$a_{31} = \frac{a_{31}}{\sqrt{((a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+(a_4)^2)}}$$

$$a_{41} = \frac{a_{41}}{\sqrt{((a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+(a_4)^2)}}$$

Sehingga vektor normal ${a_j}^T$ diperoleh sebagai berikut:

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Setelah tingkat korelasi yang dihitung dengan menggunakan persamaan $\rho_{C_p,X_n} = \frac{a_{np}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\sigma_{nn}}}$ diketahui maka langkah selanjutnya yaitu menentukan komponen utama yang diperoleh yaitu

$$C_1 = a_1{}^T X = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{41}X_4$$

$$C_2 = a_2{}^T X = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{42}X_4$$

$$C_3 = a_3{}^T X = a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + \cdots + a_{43}X_4$$

$$C_4 = a_4{}^T X = a_{14}X_1 + a_{24}X_2 + \cdots + a_{44}X_4$$

atau $C = a^T X = a^T \sum a.$ (3.21)

Berdasarkan hasil analisa tersebut diperoleh lima langkah penting dalam analisis dekomposisi spektral dengan menggunakan analisis komponen utama, yaitu mendefinisikan model dekomposisi spektral, menentukan vektor eigen dan nilai eigen dari model dekomposisi spektral dengan menggunakan metode PCA dengan cara menentukan matriks ragam-peragam (Σ), matriks korelasi (ρ), nilai eigen (λ), dan vektor eigen (a) yang sesuai dengan nilai eigen yang diperoleh serta pemilihan komponen utama yang memenuhi dua kriteria, yaitu jika nilai eigen lebih besar atau sama dengan satu $(\lambda \geq I)$ dan jika keragaman kumulatif lebih dari 70%.

Selanjutnya mengetahui apakah variabel dianggap dapat diproses lebih lanjut atau dikatakan layak untuk diproses, maka terlebih dahulu dilakukan uji interdependensi dengan menggunakan *Measure Of Sampling Adequacy* (MSA). Kemudian untuk mengetahui variabel yang berkorelasi dalam setiap komponen utama melalui korelasi linier sederhana dengan nilai korelasi yang lebih tinggi dari setiap komponen utama maka komponen-komponen utama dapat dibentuk.

3.6 Analisis Data

Data dalam penelitian ini berupa data sekunder yang bersumber dari data frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 yang mengampu kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim (UIN Maliki) Malang. Pada penelitian ini model PCA diterapkan pada faktor-faktor penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009. Variabel yang diteliti, yaitu variabel takut gagal (x_1), manajemen waktu (x_2), lingkungan (x_3), dan perfeksionis (x_4).

Dengan analisis dekomposisi spektral dan menggunakan metode analisis komponen utama, akan dicari komponen apakah yang paling dominan dalam membentuk komponen utama. Pada analisis data ini terlebih dahulu menentukan matriks korelasi antara indikator-indikator yang diobservasi. Langkah selanjutnya, yaitu menentukan jumlah faktor yang diperlukan untuk mewakili data. Pada langkah ini akan diketahui sejumlah faktor yang dapat diterima atau layak mewakili seperangkat variabel yang dianalisis dengan melihat dari besarnya *eigenvalue* serta presentase varian total. Selanjutnya dengan memperhatikan matriks faktor mula-mula, *eigenvalue*, persentase varian dan faktor *loading* minimum maka dapat ditentukan suatu variabel masuk faktor yang mana, sehingga dapat diidentifikasi nama atau sebutan lain dari variabel yang baru. Untuk mempermudah dalam menganalisa data tersebut maka akan digunakan *software* SPSS 16.

Untuk mengetahui apakah keempat variabel dianggap dapat diproses lebih lanjut atau dikatakan layak untuk diproses, maka pada tahap pertama, penulis menguji apakah analisis faktor tepat digunakan untuk penelitian ini. Pengujian tersebut menggunakan uji *Keiser-Meiyer-Olkin* (KMO) dan *Barlett's Test Of Sphericity* untuk melihat signifikasi (*sig*) kesalahannya. Hasil uji *Keiser-Meiyer-Olkin* (KMO) dan *Barlett's Test Of Sphericity* pada penelitian ini dapat dilihat pada tabel 3.1 berikut ini :

Tabel 3.1 *KMO and Bartlett's Test*

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		.579
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	13.084
	Df	6
	Sig.	.042

Sumber SPSS 16

Dari tabel 3.1 di atas, diperoleh nilai *Keiser-Meiyer-OlkinMeasure of Sampling Adequacy* sebesar 0,579 dengan nilai sig atau *peluang* (*p*) = 0.042. Artinya, nilai KMO-MSA pada analisis faktor yang dilakukan menunjukkan bahwa sub-variabel pembentuk frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang dinyatakan layak dan dapat dianalisis lebih lanjut.

Kemudian perhatikan tabel 3.2 berikut ini, dimana dapat dilihat nilai *Anti Image Matrix*, khususnya nilai yang terdapat tanda "a" pada *Anti Image Correlations*. Apabila nilai matriks *Anti Image Correlations* lebih kecil dari 0,5, maka variabel tersebut harus dikeluarkan dari analisis faktor.

Tabel 3.2 *Anti-image Matrices*

		x1	x2	x3	x4
Anti-image Covariance	x1	.908	.177	.092	-.080
	x2	.177	.797	-.224	.237

	x3	.092	-.224	.905	-.077
	x4	-.080	.237	-.077	.899
Anti-image Correlation	x1	.677[a]	.208	.102	-.088
	x2	.208	.563[a]	-.264	.280
	x3	.102	-.264	.554[a]	-.085
	x4	-.088	.280	-.085	.548[a]

a. Measures of Sampling Adequacy(MSA)

Sumber SPSS 16

Berdasarkan tabel 3.2, dapat dilihat bahwa semua variabel mempunyai nilai korelasi di atas 0,5. Oleh Karena itu, semua variabel tersebut layak dianalisis lebih lanjut.

Analisis selanjutnya adalah menentukan jumlah faktor yang diperlukan untuk mewakili data. Pada langkah ini akan diketahui sejumlah faktor yang dapat diterima atau layak mewakili seperangkat variabel yang dianalisis dengan melihat dari besarnya *eigenvalue* serta presentase varian total. Untuk model dekomposisi spektral pada data frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang adalah:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}4990 & -0{,}1537 & -0{,}8544 & -0{,}0433 \\ -0{,}6224 & -0{,}7523 & -0{,}2368 & -0{,}0241 \\ -0{,}4278 & 0{,}4462 & -0{,}3521 & 0{,}7032 \\ 0{,}4249 & -0{,}4597 & 0{,}2998 & 0{,}7093 \end{bmatrix}$$

$$P^T = \begin{bmatrix} 0{,}4990 & -0{,}6224 & -0{,}4297 & 0{,}4249 \\ -0{,}1537 & -0{,}7523 & 0{,}4462 & -0{,}4597 \\ -0{,}8544 & 0{,}4462 & -0{,}3521 & 0{,}2998 \\ -0{,}0433 & -0{,}4597 & 0{,}7032 & 0{,}7093 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1,6207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9863 \end{bmatrix}$$

$$A = P\Lambda P^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,4990 & -0,1537 & -0,8544 & -0,0433 \\ -0,6224 & -0,7523 & -0,2368 & -0,0241 \\ -0,4278 & 0,4462 & -0,3521 & 0,7032 \\ 0,4249 & -0,4597 & 0,2998 & 0,7093 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,6207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9863 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4990 & -0,6224 & -0,4297 & 0,4249 \\ -0,1537 & -0,7523 & 0,4462 & -0,4597 \\ -0,8544 & 0,4462 & -0,3521 & 0,2998 \\ -0,0433 & -0,4597 & 0,7032 & 0,7093 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,4990 & -0,1537 & -0,8544 & -0,0433 \\ -0,6224 & -0,7523 & -0,2368 & -0,0241 \\ -0,4278 & 0,4462 & -0,3521 & 0,7032 \\ 0,4249 & -0,4597 & 0,2998 & 0,7093 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4990 & -0,6224 & -0,4297 & 0,4249 \\ -0,1537 & -0,7523 & 0,4462 & -0,4597 \\ -0,8544 & 0,4462 & -0,3521 & 0,2998 \\ -0,0433 & -0,4597 & 0,7032 & 0,7093 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,6207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9863 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1,003575 & 0,007254 & -0,0113992 & -0,00403 \\ 0,007254 & 1,00866 & -0,018638 & -0,00614 \\ -0,013992 & -0,018628 & 0.999358 & 0,007417 \\ -0,00403 & -0,00614 & -0,001763 & 0,982539 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,6207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9863 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}6207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9863 \end{bmatrix}$$

$$tc(A) = tr(\Sigma)$$

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

$$tr(A) = 1{,}621 + 0{,}986 + 0{,}800 + 0{,}593$$

dimana dengan menggunakan model dekomposisi spektral menghasilkan nilai eigen seperti di atas. Selanjutnya pemecahan relasi ini akan dilanjutkan dengan menggunakan metode PCA guna memudahkan penulis untuk memilih faktor inti yang dapat mewakili sekelompok variabel. Faktor inti yang dipakai adalah yang mempunyai nilai eigen ≥ 1 (lebih dari atau sama dengan satu). Hasil analisis dari tahapan ini dapat dilihat pada Tabel 3.3 berikut ini :

Tabel 3.3 *Total Variance Explained*

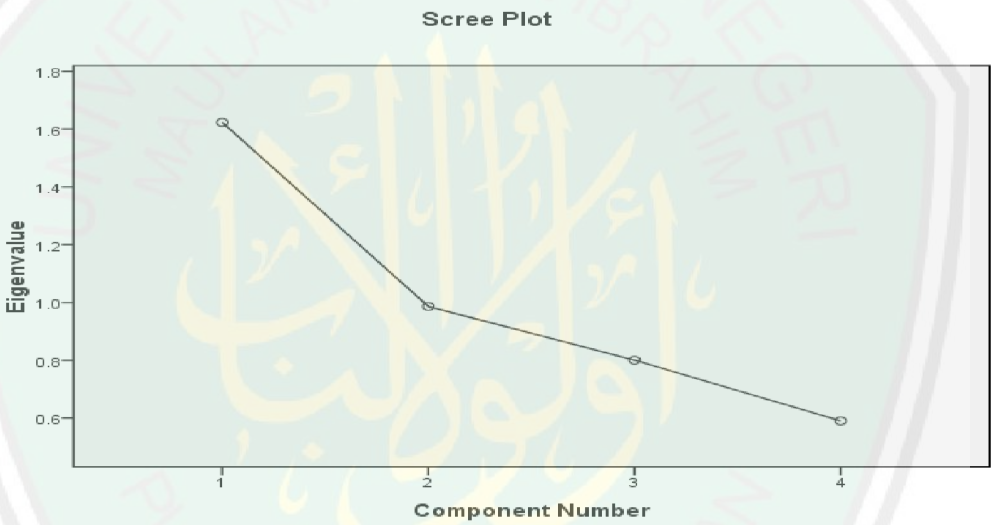
Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	1.623	40.578	40.578	1.623	40.578	40.578
2	.986	24.657	65.235			
3	.800	20.008	85.243			
4	.590	14.757	100.000			

Extraction Method: Principal Component Analysis.

Sumber SPSS 16

Tabel 3.3 di atas memberikan informasi bahwa nilai eigen pada komponen utama kedua sampai komponen utama keempat cukup kecil nilainya atau kurang dari 1. Oleh karena itu, komponen yang terbentuk berdasarkan nilai eigen $(\lambda) > 1$ yaitu sebanyak 1 komponen utama. Sedangkan total varian dari komponen tersebut sebesar 40,578%. Hal ini menunjukkan bahwa komponen utama tersebut mampu menerangkan keragaman data sebesar 40,578%. Sehingga diketahui bahwa komponen utama yang terbentuk memiliki pengaruh yang sangat besar dalam frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang.

Selain menggunakan tabel tersebut komponen utama yang terbentuk juga dapat dilihat pada plot sebagai berikut:



Gambar 3.1 *Scree Plot*
Sumber SPSS 16

Gambar 3.1 diatas menjelaskan tentang komponen utama dan nilai eigen. Syarat suatu komponen utama terbentuk, yaitu apabila memiliki nilai eigen ≥ 1. Dan pada gambar diatas terlihat bahwa hanya ada satu komponen saja yang memiliki nilai eigen ≥ 1, yaitu pada komponen utama pertama dengan nilai eigen 1,623.

Agar dapat diketahui variabel manayang masuk ke dalam faktor inti tersebut dapat dilihat pada Tabel 3.4*Component Matrix*.

Tabel 3.4 *Component Matrix*[a]

	Component
	1
x1	-.634
x2	.791
x3	.542
x4	-.549

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. 1 components extracted.

Sumber SPSS 16

Tabel 3.4 merupakan inti dari analisa faktor, yaitu menentukan ketiga faktor utama yang telah teridentifikasi melalui beberapa tahapan sebelumnya. Cara membaca tabel 3.4 cukup mudah, dalam tabel terdapat 1 komponen yang merupakan faktor utama frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang. Untuk menentukan variabelnya, dipilih nilai koefisien yang tertinggi pada kolom komponen. Setelah mendapatkan nilai koefisien tertinggi, kemudian dicocokkan pada kolom sebelah kiri, yaitu kolom faktor. Setelah dicocokkan, maka dapat dilihat bahwa pada komponen 1 terdapat variabel x_2 (manajemen waktu) yang mempunyai nilai tertinggi, yaitu sebesar 0,791.

Berdasarkan pemaparan di atas, dapat disimpulkan bahwa variabel tersebut memiliki persentase tinggi sebagai indikator faktor frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang. Sedangkan variabel yang lain (x_1, x_3 dan x_4) juga ikut serta sebagai faktor frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas dengan persentase lebih kecil.

Dari hasil tersebut dapat dibuat model dari analisis dekomposisi spektral dengan metode PCA pada data frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang adalah:

$$C_1 = 0{,}791x_2 + 0{,}542x_3 - 0{,}549x_4 - 0{,}634x_1.$$

3.7 Kajian Agama tentang Penelitian

Islam adalah agama yang mempelajari banyak hal. Salah satunya yaitu masalah waktu. Kebenaran nilai Islam bukan hanya untuk masa dahulu, tetapi juga untuk masa sekarang bahkan masa yang akan datang. Sehingga nilai-nilai dari Islam berlaku sepanjang masa. Sebagaimana disebutkan dalam firman Allah:

وَٱلۡعَصۡرِ ١ إِنَّ ٱلۡإِنسَٰنَ لَفِي خُسۡرٍ ٢ إِلَّا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَعَمِلُواْ ٱلصَّٰلِحَٰتِ
وَتَوَاصَوۡاْ بِٱلۡحَقِّ وَتَوَاصَوۡاْ بِٱلصَّبۡرِ ٣

Artinya: *"demi masa. Sesungguhnya manusia itu benar-benar dalam kerugian, kecuali orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal saleh dan nasehat menasehati supaya mentaati kebenaran dan nasehat menasehati supaya menetapi kesabaran" (Q.S. Al-'Asr:1-3).*

Pada ayat di atas disebutkan bahwasannya manusia akan berada dalam kerugian kecuali bagi orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal soleh. Amal soleh dapat diartikan banyak hal, salah satu contoh amal soleh, yaitu dalam melaksanakan tugas. Dari hasil penelitian pada bagian sebelumnya telah dijelaskan bahwasannya terdapat empat faktor yang menyebabkan manusia sering menunda-nunda suatu pekerjaan. Hal ini dapat dikarenakan banyak faktor, diantaranya takut menghadapi kegagalan, waktu yang diberikan dirasa kurang, lingkungan yang mempengaruhi, dan kesempurnaan dalam menyelesaikan tugas.

Dari keempat faktor tersebut, waktu adalah kendala yang paling berat dalam menyelesaikan tugas bagi manusia. Seringkali manusia menganggap remeh tugas yang telah diberikan sehingga membuat mereka menundanya dari waktu ke waktu. Sehingga menyebabkan tugas yang diberiakan tertunda dan selesai melebihi waktu yang telah ditetapkan.

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya pada Al-Qur'an surat Al-Hujuraat ayat 6 yang kesimpulannya adalah jika mendapat suatu kabar atau berita dari seorang fasik hendaknya tidak diterima secara langsung tetapi harus diteliti terlebih dahulu agar tidak berakibat pada tindakan yang tidak tepat dan menimbulkan penyesalan.

Allah tidak memerintahkan manusia untuk menolak berita yang dibawa orang fasik, kebohongan atau kesaksiannya secara menyeluruh, tetapi hanya ada perintah meneliti, *tabayyun*, sehingga harus benar-benar meneliti permasalahan yang dibawa oleh orang fasik tersebut dan menimbangnya dengan timbangan akal, hikmah, dan pemahaman.

Begitu juga jika peneliti akan meneliti suatu objek tertentu, maka untuk mendapatkan informasi yang valid hendaknya tidak menerima informasi tersebut dari orang yang belum dikenal, tetapi harus diteliti terlebih dahulu asal-usul suatu informasi tersebut berdasarkan sebab dan akibat. Selain itu, untuk mendapatkan hasil yang sesuai dengan kenyataan yang ada, maka dalam sebuah penelitian tidak hanya dilakukan dengan satu variabel, tetapi harus lebih dari satu variabel. Semakin banyak informasi yang diperoleh berdasarkan variabel yang ditentukan, maka kesimpulan yang diperoleh juga akan semakin mendekati kebenaran.

Sebaliknya, jika seorang peneliti akan meneliti suatu objek hanya berdasarkan satu variabel saja, maka informasi yang diperoleh akan semakin sedikit dan kesimpulan yang diperoleh kurang mendekati kebenaran.

Al-Qur'an surat Al-Hujuraat ayat 6 tersebut juga menggambarkan bahwa untuk mengolah suatu data maka harus mempunyai data yang cukup dengan lebih dari satu variabel dan dianjurkan untuk tidak menggunakan data secara mentah-mentah supaya mendapatkan hasil yang baik dalam proses pengolahan data. Dalam kalimat "*jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita, maka periksalah dengan teliti"*. Telah digambarkan untuk selalu mencari data yang valid, dan tidak hanya satu data untuk diolah, sedangkan dalam kalimat "*yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu*" telah digambarkan untuk menggunakan data tidak dalam satu variabel tetapi dianjurkan untuk beberapa variabel untuk mendapatkan data atau informasi yang lebih akurat supaya peneliti berhati-hati dalam mengolah data dan mendapatkan hasil yang sesuai dengan harapan. Dari kesinambungan dua kalimat tersebut telah digambarkan tentang adanya sebab akibat.

Sehingga dapat disimpulkan hubungan sebab akibat antara manusia yang sering melalaikan tugas dengan orang fasik. Apabila manusia mendapatkan suatu tugas dan ketika menyepelekan tugasnya maka manusia tersebut tidak dapat dipercaya lagi dan tergolong pada orang fasik.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pada pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa model dekomposisi spektral, yaitu

$$A = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i {a_i}^T$$

kemudian model tersebut didefinisikan sehingga diperoleh nilai untuk $Var\ (C)$ adalah sama dengan λ dan disimpulkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} Var(C_i) = tr(\Sigma) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} Var(C_i, C_j)$$

selanjutnya model dekomposisi spektral dianalisis dengan PCA dan diperoleh model

$$C = a^T X = a^T \sum a$$

Pada analisis data dapat dibuat model dari analisis dekomposisi spektral dengan metode PCA dengan data berupa frekuensi penundaan dalam menyelesaikan tugas oleh mahasiswa psikologi angkatan 2009 UIN Maliki Malang adalah:

$$C_1 = 0{,}791x_2 + 0{,}542x_3 - 0{,}549x_4 - 0{,}634x_1.$$

4.2 Saran

Dari penelitian ini terdapat beberapa saran yang dapat dilakukan untuk penelitian selanjutnya, yaitu:

1. Untuk penelitian selanjutnya, perlu ditambahkan ukuran matriks yang lebih besar agar mendapatkan hasil yang lebih sempurna.
2. Dapat menggunakan metode lain yang dapat digunakan untuk analisis dekomposisi spektral.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Jazairi, S.A.B.. 2007. *Tafsir Al-Qur'an AL-AISAR, Jilid 3*. Jakarta: Darus Sunnah Press.

Anton, H.. 1987. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Assauri, S.. 1983. *Aljabar Linier Dasar Ekonometri*. Jakarta: CV Rajawali.

Ath-Thabari, A.J.M.J.. 2009. *Tafsir Ath-Thabari, 14*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Basar, K.. 2013. *Ortogonalitas dan Normalitas*. http://www.Personal.fmipa.itb.ac.id. Diakses tanggal 17 April 2014.

Chatfield, C. dan Collins, A.J.. 2000. *Introductin To Multivariate Analisys*. New York: Chapman dan Hall.

Gasperz, V.. 1995. *Teknik Analisis Dalam Penelitian Percobaan*. Bandung: Tarsito.

Giudici, P.. 2003. *Applied Data-Mining: Statistical Methods for Business and Industry*. England: John Wiley and Sons.

Hollmen, J.. 2006. *Principal Component Analysis*. http://www.cis.hut.fi/~jhollmen/dippa/node30.html. Diakses tanggal 25 Agustus 2006.

Johnson, R.A. dan Wichern, D.W.. 1997. *Applied Multivariate Statistic Analysis*. Texas: University Of Wisconsin-Madison.

Nasoetion, A.H.. 1980. *Aljabar Matriks*. Jakarta: Bhratara Karya Aksara.

Nasyir, A. dan Abdullah, L.. 2010. *Penentuan Komponen Utama dalam Analisis Komponen Prinsipal*. Universitas Malaysia Terengganu.

Prasetyo, H.B., Handayani, D., Rahayu, W.. 2011. *Analisis Regresi Komponen Utama Untuk Mengatasi Masalah Multikolinieritas Dalam Analisis Regresi Linier Berganda*. Universitas Negeri Jakarta.

Silfiani, M.. 2011. *Dekomposisi Spektral dari Matriks Berbentuk Kuadratik*. http://www.Simegs.blogspot.com/2011/04/dekomposisi-spektral-dari-matriks.html. Diakses tanggal 23 Juni 2013.

Sharma, S.. 1996. *Applied To Multivariate Techniques*. USA: Wiley and Sons.

Sudjana. 2001. *Teknik Analisis Regresi Dan Korelasi Bagi Para Peneliti*. Bandung: Tarsito.

Supranto. 2004. *Analisis Multivariat Arti dan Interpretasi*. Jakarta: Adi Mahasatya.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Anis Safidah
Nim : 09610121
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dekomposisi Spektral dengan Metode *Principal Component Analysis* (PCA)
Pembimbing I : Dr. Sri Harini, M.Si
Pembimbing II : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 Oktober 2013	Konsultasi Bab I	1.
2.	05 November 2013	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	12 November2013	Revisi Bab I & Bab II	3.
4.	25 Desember 2013	Konsultasi Agama Bab I& II	4.
5.	26 Desember 2013	Konsultasi Bab III	5.
6.	07 Maret 2014	Revisi Hasi Seminar	6.
7.	10 Maret 2014	Konsultasi Bab III	7.
8.	11 Maret 2014	Konsultasi Bab III	8.
9.	12 Maret 2014	Konsultasi Bab III	9.
10.	20 Maret 2014	Revisi Bab III	10.
11.	24 Maret 2014	Revisi Bab III	11.
12.	01 April 2014	Revisi Agama Bab III	12.
13.	26 Maret 2014	ACC Keseluruhan	13
14.	04 April 2014	ACC Agama Keseluruhan	14

Malang, 04 April 2014
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

LAMPIRAN

Lampiran 1

HASIL SKOR TAKUT GAGAL (x_1)

Jenis Kelamin	Subjek/aitem	Takut Gagal				
		TG 1	TG 2	TG 3	TG 4	Σ
Laki-laki	Subjek 1	3	4	2	1	10
	Subjek 2	3	3	1	2	9
	Subjek 3	3	3	2	3	11
	Subjek 4	3	4	4	1	12
	Subjek 5	3	4	1	3	11
	Subjek 6	3	4	2	3	12
	Subjek 7	2	4	3	3	12
	Subjek 8	2	4	1	1	8
	Subjek 9	3	4	3	3	13
	Subjek 10	3	3	1	1	8
	Subjek 11	3	3	1	1	8
	Subjek 12	2	2	2	1	7
	Subjek 13	4	2	4	3	13
	Subjek 14	3	2	3	3	11
	Subjek 15	2	2	1	3	8
	Subjek 16	2	3	2	3	10
	Subjek 17	3	3	3	1	10
	Subjek 18	2	2	1	2	7
	Subjek 19	2	2	2	3	9
	Subjek 20	2	3	3	3	11
	Subjek 21	3	3	2	2	10
	Subjek 22	2	2	1	2	7
	Subjek 23	3	2	2	2	9
Perempuan	Subjek 24	4	4	4	3	15
	Subjek 25	3	4	1	3	11
	Subjek 26	2	4	2	3	11
	Subjek 27	3	4	3	3	13
	Subjek 28	3	5	1	1	10
	Subjek 29	2	4	3	3	12
	Subjek 30	3	4	2	1	10
	Subjek 31	4	4	1	1	10
	Subjek 32	3	4	2	3	12
	Subjek 33	2	4	4	3	13
	Subjek 34	2	5	3	2	12
	Subjek 35	2	5	1	3	11

	Subjek 36	2	4	2	3	11
	Subjek 37	3	4	3	1	11
	Subjek 38	3	5	1	2	11
	Subjek 39	3	5	2	3	13
	Subjek 40	2	5	3	3	13
	Subjek 41	2	4	4	1	11
	Subjek 42	2	4	1	3	10
	Subjek 43	3	4	2	3	12
	Subjek 44	2	4	3	3	12
	Subjek 45	3	3	1	2	9
	Subjek 46	2	3	3	3	11
	Subjek 47	1	4	1	2	8
	Subjek 48	3	4	2	1	10
	Subjek 49	2	4	2	2	10
	Subjek 50	4	4	1	3	12

HASIL SKOR MANAJEMEN WAKTU (x_2)

Jenis Kelamin	Subjek/aitem	Manajemen Waktu				
		MW 1	MW 2	MW 3	MW 4	Σ
Laki-laki	Subjek 1	2	3	2	2	9
	Subjek 2	5	3	3	1	12
	Subjek 3	3	3	4	3	13
	Subjek 4	4	2	3	2	11
	Subjek 5	3	3	4	3	13
	Subjek 6	4	3	3	3	13
	Subjek 7	3	2	3	1	9
	Subjek 8	3	3	3	3	12
	Subjek 9	3	3	2	4	12
	Subjek 10	5	2	3	2	12
	Subjek 11	5	3	3	5	16
	Subjek 12	2	3	3	3	11
	Subjek 13	4	3	4	4	15
	Subjek 14	5	2	2	4	13
	Subjek 15	5	3	4	4	16
	Subjek 16	4	3	3	5	15
	Subjek 17	4	3	3	5	15
	Subjek 18	3	4	3	4	14
	Subjek 19	3	2	4	5	14
	Subjek 20	4	3	3	4	14
	Subjek 21	4	3	2	4	13
	Subjek 22	4	4	3	5	16
	Subjek 23	4	3	4	5	16
Perempuan	Subjek 24	3	5	3	5	16
	Subjek 25	4	4	4	4	16
	Subjek 26	3	4	3	3	13
	Subjek 27	3	4	3	3	13
	Subjek 28	5	3	3	5	16
	Subjek 29	2	3	2	3	10
	Subjek 30	4	3	3	5	15
	Subjek 31	5	4	3	5	17
	Subjek 32	5	4	3	3	15
	Subjek 33	4	4	4	2	14
	Subjek 34	2	3	2	2	9
	Subjek 35	2	3	4	2	11
	Subjek 36	4	3	3	1	11
	Subjek 37	2	2	3	2	9

	Subjek 38	4	2	3	3	12
	Subjek 39	2	4	4	1	11
	Subjek 40	2	3	3	3	11
	Subjek 41	3	2	3	5	13
	Subjek 42	4	4	4	4	16
	Subjek 43	3	4	3	3	13
	Subjek 44	3	4	3	3	13
	Subjek 45	5	5	3	5	18
	Subjek 46	2	3	2	3	10
	Subjek 47	4	4	3	5	16
	Subjek 48	5	4	3	5	17
	Subjek 49	5	4	3	3	15
	Subjek 50	4	4	4	2	14

HASIL SKOR LINGKUNGAN (x_3)

Jenis Kelamin	Subjek/aitem	Lingkungan				
		LG 1	LG 2	LG 3	LG 4	Σ
Laki-laki	Subjek 1	2	2	4	5	13
	Subjek 2	3	3	1	5	12
	Subjek 3	2	2	4	4	12
	Subjek 4	3	3	3	3	12
	Subjek 5	3	2	2	3	10
	Subjek 6	3	3	4	4	14
	Subjek 7	1	3	4	2	10
	Subjek 8	2	2	3	4	11
	Subjek 9	3	3	2	5	13
	Subjek 10	2	2	5	5	14
	Subjek 11	1	4	3	5	13
	Subjek 12	3	4	2	3	12
	Subjek 13	2	3	2	4	11
	Subjek 14	1	2	3	4	10
	Subjek 15	1	3	3	4	11
	Subjek 16	1	3	5	4	13
	Subjek 17	1	4	1	5	11
	Subjek 18	1	4	3	4	12
	Subjek 19	2	4	2	4	12
	Subjek 20	4	3	4	5	16
	Subjek 21	2	3	4	5	14
	Subjek 22	3	2	1	5	11
	Subjek 23	2	3	4	4	13
Perempuan	Subjek 24	3	4	3	2	12
	Subjek 25	3	4	2	5	14
	Subjek 26	3	3	4	4	14
	Subjek 27	1	3	4	3	11
	Subjek 28	2	3	3	5	13
	Subjek 29	3	3	2	3	11
	Subjek 30	2	2	5	5	14
	Subjek 31	1	3	3	5	12
	Subjek 32	3	3	2	4	12
	Subjek 33	2	4	2	2	10
	Subjek 34	1	3	3	3	10
	Subjek 35	1	2	3	5	11
	Subjek 36	1	3	5	4	13
	Subjek 37	1	4	1	3	9

	Subjek 38	1	4	3	5	13
	Subjek 39	2	3	2	4	11
	Subjek 40	4	4	4	3	15
	Subjek 41	3	3	3	4	13
	Subjek 42	3	4	2	4	13
	Subjek 43	3	3	4	3	13
	Subjek 44	1	2	4	3	10
	Subjek 45	2	4	3	4	13
	Subjek 46	3	3	2	4	12
	Subjek 47	2	2	5	5	14
	Subjek 48	1	5	3	5	14
	Subjek 49	3	4	2	3	12
	Subjek 50	2	3	2	3	10

HASIL SKOR PERFEKSIONIS (x_4)

Jenis Kelamin	Subjek/aitem	Perfeksionis				
		PF 1	PF 2	PF 3	PF 4	Σ
Laki-laki	Subjek 1	2	4	3	4	13
	Subjek 2	1	4	5	4	14
	Subjek 3	2	4	4	4	14
	Subjek 4	2	3	3	4	12
	Subjek 5	3	3	2	4	12
	Subjek 6	3	3	3	3	12
	Subjek 7	3	4	3	3	13
	Subjek 8	1	4	4	3	12
	Subjek 9	4	4	4	2	14
	Subjek 10	3	4	5	2	14
	Subjek 11	2	3	5	2	12
	Subjek 12	3	3	4	3	13
	Subjek 13	2	3	4	3	12
	Subjek 14	1	2	5	3	11
	Subjek 15	1	2	5	2	10
	Subjek 16	2	2	5	2	11
	Subjek 17	2	4	5	2	13
	Subjek 18	3	3	5	2	13
	Subjek 19	1	3	4	2	10
	Subjek 20	3	2	3	2	10
	Subjek 21	2	3	3	2	10
	Subjek 22	1	3	5	2	11
	Subjek 23	2	2	4	3	11
Perempuan	Subjek 24	2	4	3	3	12
	Subjek 25	3	5	2	2	12
	Subjek 26	3	4	3	2	12
	Subjek 27	3	5	3	3	14
	Subjek 28	1	4	4	3	12
	Subjek 29	4	3	4	4	15
	Subjek 30	3	3	5	4	15
	Subjek 31	2	3	5	4	14
	Subjek 32	3	5	4	3	15
	Subjek 33	2	4	4	3	13
	Subjek 34	1	3	5	4	13
	Subjek 35	1	5	5	5	16
	Subjek 36	2	4	5	5	16
	Subjek 37	2	3	5	5	15

	Subjek 38	3	5	5	4	17
	Subjek 39	1	4	4	4	13
	Subjek 40	3	3	3	5	14
	Subjek 41	2	2	3	4	11
	Subjek 42	3	3	2	5	13
	Subjek 43	3	4	3	4	14
	Subjek 44	3	3	3	3	12
	Subjek 45	1	3	4	4	12
	Subjek 46	4	3	4	4	15
	Subjek 47	3	3	5	4	15
	Subjek 48	2	4	5	4	15
	Subjek 49	3	4	4	4	15
	Subjek 50	2	3	4	3	12

Lampiran 2

HASIL DENGAN MENGGUNAKAN SPSS 16

Correlation Matrix

		x1	x2	x3	x4
Correlation	x1	1.000	-.277	-.166	.156
	x2	-.277	1.000	.284	-.298
	x3	-.166	.284	1.000	-.014
	x4	.156	-.298	-.014	1.000

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		.579
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	13.084
	df	6
	Sig.	.042

Anti-image Matrices

		x1	x2	x3	x4
Anti-image Covariance	x1	.908	.177	.092	-.080
	x2	.177	.797	-.224	.237
	x3	.092	-.224	.905	-.077
	x4	-.080	.237	-.077	.899
Anti-image Correlation	x1	.677[a]	.208	.102	-.088
	x2	.208	.563[a]	-.264	.280
	x3	.102	-.264	.554[a]	-.085
	x4	-.088	.280	-.085	.548[a]

a. Measures of Sampling Adequacy(MSA)

Communalities

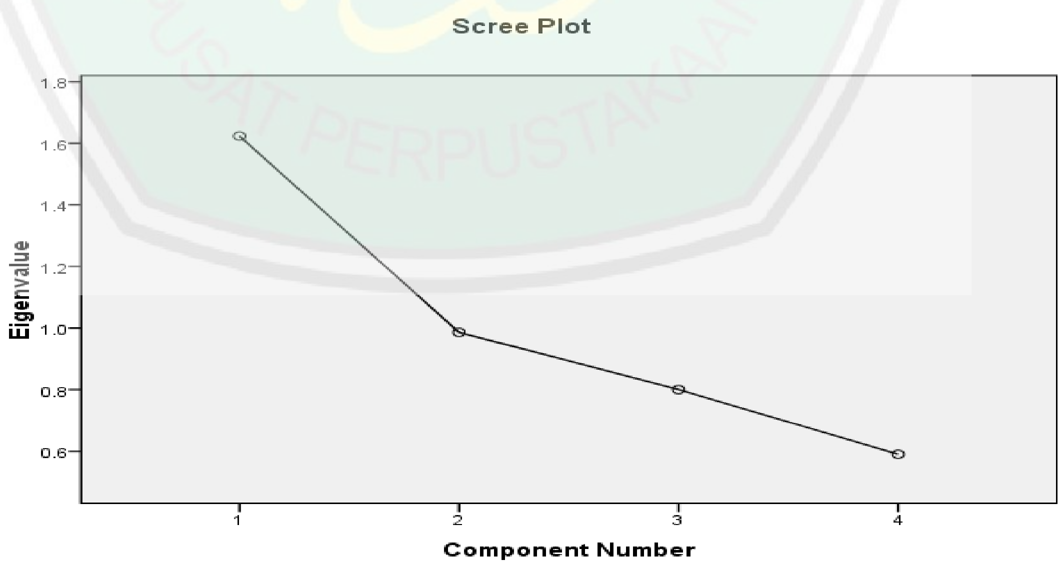
	Initial	Extraction
x1	1.000	.402
x2	1.000	.626
x3	1.000	.294
x4	1.000	.301

Extraction Method: Principal Component Analysis.

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	1.623	40.578	40.578	1.623	40.578	40.578
2	.986	24.657	65.235			
3	.800	20.008	85.243			
4	.590	14.757	100.000			

Extraction Method: Principal Component Analysis.



Component Matrix[a]

	Component
	1
x1	-.634
x2	.791
x3	.542
x4	-.549

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. 1 components extracted.