Tobias Kreisel & Florian Dumpert im März 2015

DAS GIECHER FRIEDHOFSPROBLEM

1 Einstieg und Motivation

Wiesengiech, 1. November, 3 °C Außentemperatur. In guter Tradition steht der Besuch der Gräber durch die Angehörigen im Anschluss an die Messe an. Die Verwandten versammeln sich dazu auf dem Friedhof, der Pfarrer spricht dort ein Gebet, Fürbitten werden formuliert, Lieder werden gesungen. Am Ende sollen die Gräber gesegnet werden, d. h. der Pfarrer und die Ministranten laufen durch die Reihen und besprengen die Gräber mit Weihwasser. Zur besseren Orientierung zeigt Abbildung 1 eine Luftaufnahme des Friedhofs von Giech.[1]

Abbildung 1: Luftaufnahme des Friedhofs von Giech

Wesentlich ist für die folgenden Überlegungen, dass *alle* Gräber den Segen erhalten, der Pfarrer also an allen Gräbern vorbeikommt. Dies ist (zukunftssicher) dadurch sicherzustellen, dass er alle Wege des Friedhofs abläuft. Wie obiges Bild zeigt, gibt es drei horizontale, lange Wege und drei vertikale, kürzere Wege. Betrachtet man Schnittpunkte von Wegen als eine Art Grenze, so erhält man sechs horizontale und lange sowie sechs vertikale und kurze Wege. In der Giecher Tradition beginnt der Pfarrer liturgiebedingt den Rundgang zur Segnung der Gräber (auf obiges Bild bezogen) „Oben in der Mitte" und läuft dann mehr oder weniger strukturiert alle Wege ab, um schließlich wieder am Ausgangspunkt „Oben in der Mitte" die Zeremonie zu beenden. Die Segnung erfordert selbstverständlich eine gewisse Andacht und Sorgfalt, sodass die Wege nicht schnellen Schrittes, sondern angemessen langsam abgelaufen werden. Dies führt bei kaltem oder nassem Wetter fast zwangsläufig zu der Frage, ob es nicht eine günstigste Route gibt, welche der Pfarrer wählen könnte, um einerseits alle Gräber segnen zu können, andererseits aber auch die Dauer des Rundgangs zu minimieren. Eben dieser Frage ist dieser Aufsatz gewidmet. Er behandelt die Fragestellung lediglich aus mathematischer Sicht; die theologischen Aspekte werden außen vor gelassen. Geprüft wurde nur, ob es grundsätzliche theologische oder liturgische Bedenken gegen eine Optimierung des Rundgangs gibt. Dies ist nicht der Fall.[2] Somit steht den folgenden Überlegungen nichts mehr im Wege.

[1] Die Luftaufnahme wurde mittels *maps.google.de* gewonnen.
[2] An dieser Stelle möchten die Autoren Herrn David Olszynski für die Beratung in theolo-

Für eine mathematische Betrachtung ist die Modellierung der Realität notwendig. Wege oder Kreuzungen in Form gepflasterten oder geschotterten Untergrunds gibt es in der Sprache der Mathematik nicht. Es gibt ja auch keine Fußbälle in der Mathematik, wohl aber Kugeln – und mit diesen Kugeln kann dann gearbeitet werden. Zurück zum Friedhof: Zunächst wird dieser mit einer mathematischen Struktur in Form von Kanten (Wege) und Verzweigungen (Kreuzungen, Schnittpunkte) versehen, wie in Abbildung 2 dargestellt.

Abbildung 2: Der Friedhof von Giech, versehen mit einer Struktur

Anhand des Schemas sind wieder der Ausgangs- und Endpunkt des Rundgangs (Verzweigung Nr. 2), die sechs längeren, horizontalen Wege sowie die sechs kürzeren, vertikalen Wege zu erkennen. Für die weitere Arbeit lösen wir uns nun von der Luftbildaufnahme und betrachten nur noch die Struktur, wie sie in Abbildung 3 dargestellt ist.

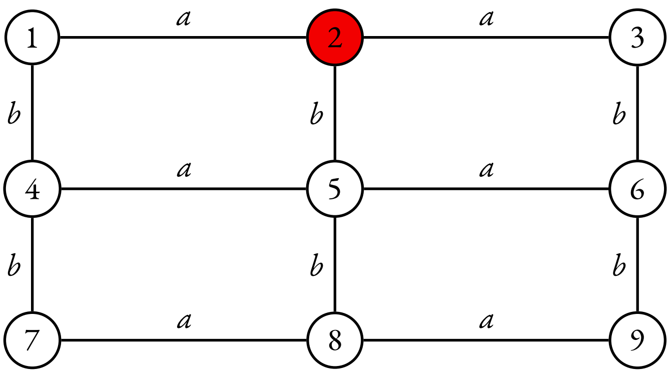

Abbildung 3: Die Struktur des Friedhofs von Giech

Verzweigung Nr. 2 wurde dabei rot eingefärbt, um deutlich zu machen, dass diese Verzweigung der Ausgangs- und Endpunkt der Route sein soll. Außerdem haben die Kanten den Zeitbedarf für die Segnung in diesem Bereich zugewiesen bekommen. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass für die längeren Wege jeweils gleich viel Zeit benötigt wird (nämlich a Sekunden) und die kürzeren Wege ebenfalls einen einheitlichen Zeitbedarf besitzen (nämlich b Sekunden).

gischen Fragen danken. Die notwendige Ernsthaftigkeit und Ruhe bei liturgischen Handlungen und frommen Übungen vorausgesetzt, sind Priester selbstverständlich gehalten, verantwortungsvoll mit ihrer Zeit umzugehen. Dies ergibt sich schon daraus, dass ihr Amt viele weitere Aufgaben neben der Liturgie umfasst, vgl. [4].

Beispielsweise anhand von Abbildung 2 wird deutlich, dass $a > b$ sein muss und außerdem auch die kürzeren, vertikalen Wege keinen großen Beitrag zur Dauer der Segnung liefern. Wir gehen also davon aus, dass die vertikalen Wege in Windeseile durchschritten sind und ignorieren daher die dafür notwendige Zeit. Es ist so, als ob die Länge b der vertikalen Wege extrem klein wäre. Was passiert aber mit der Struktur, wenn wir b kleiner werden lassen. Nun, in einem ersten Schritt wird alles ein wenig gestaucht (vgl. Abbildung 4).

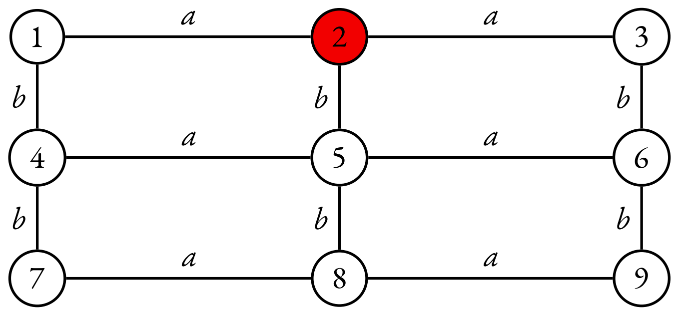

Abbildung 4: Die Struktur des Friedhofs von Giech, b etwas kleiner

Wenn b noch etwas kürzer gedacht wird, steigert sich das Maß der Stauchung und wir erhalten Abbildung 5.

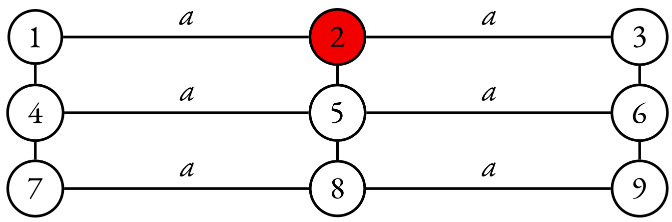

Abbildung 5: Die Struktur des Friedhofs von Giech, b noch etwas kleiner

Im letzten Schritt beachten wir die Länge der vertikalen Wege gar nicht mehr und setzen $b = 0$. Abbildung 6 zeigt, dass sich damit unsere Struktur verändert hat. Anstelle der faktisch vorhandenen neun Verzweigungen betrachten wir nun nur noch drei Verzweigungen. Das ergibt Sinn, denn wegen $b = 0$ kommen wir ja ohne Zeitverlust von beispielsweise Verzweigung Nr. 1 zu Verzweigung Nr. 4 und weiter zu Verzweigung Nr. 7. Gleiches gilt für die Verzweigungen Nr. 2, 5 und 8 bzw. 3, 6 und 9. Die Segnung der Gräber entlang der vertikalen, kurzen Wege ist also gesichert.

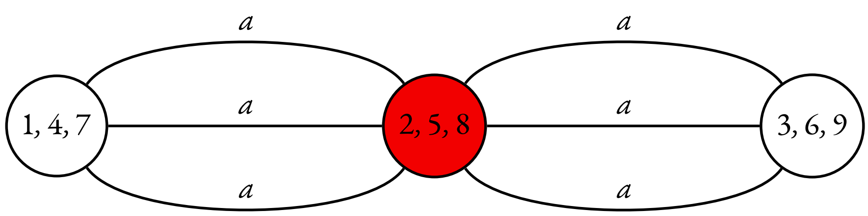

Abbildung 6: Die Struktur des Friedhofs von Giech, $b = 0$

Bei diesem Vorgehen ist aber unbedingt zu beachten, dass nicht auch die horizontalen Wege in unserem Modell verschwinden. Würde man die drei linken, horizontalen Wege zu einem einzigen fusionieren, so würde unser Modell eine Lösung erlauben, bei der nur einmal nach links gelaufen werden müsste. Das reicht aber nicht aus, denn damit wäre nur eine der drei horizontalen, linken Gräberreihen gesegnet worden. Somit bleibt es im Modell bei den insgesamt sechs horizontalen, langen Wegen mit einem Zeitbedarf von jeweils a.

Anhand des Modells, wie es in Abbildung 7 dargestellt ist, können wir uns überlegen, wie der Pfarrer laufen muss, um in möglichst kurzer Zeit die Gräber zu segnen. Insbesondere erhalten wir damit auch die kürzest mögliche Zeit (wenn $b = 0$). Am Anfang befinden wir uns in der aus diesem Grund gelb umrandeten Verzweigung (2, 5, 8).

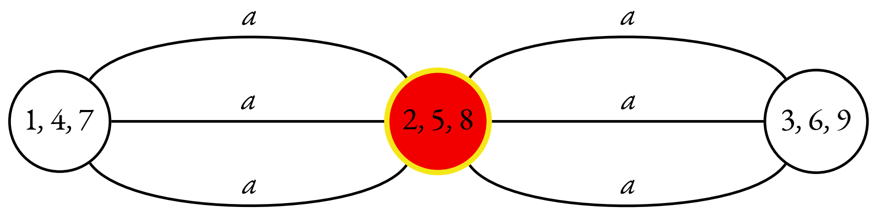

Abbildung 7: Die Struktur des Friedhofs von Giech, $b = 0$

Alle sechs verbliebenen Wege müssen durchlaufen werden, idealerweise jeder nur genau einmal, um keine Zeit durch wiederholtes Ablaufen eines bereits gesegneten Bereichs zu verlieren. Der Pfarrer könnte nun also zunächst von Verzweigung Nr. 2 zur Verzweigung Nr. 1 laufen; der Verbindungsweg ist damit erfasst und wird daher grün markiert. Neuer Standort des Pfarrers ist nun also Verzweigung Nr. 1.

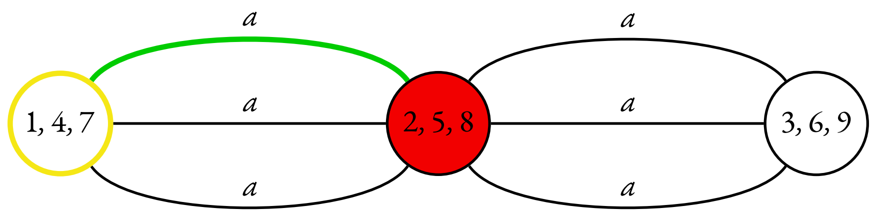

Abbildung 8: Erster durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $1 \cdot a$

Den gleichen Weg zurück zu laufen, wäre nicht sinnvoll; stattdessen entscheidet sich der Pfarrer beispielsweise dafür, den kurzen (und das Zeitbudget nicht belastenden) Weg zur Verzweigung Nr. 4 zu gehen. Anschließend wählt er den Weg von Verzweigung Nr. 4 zur Verzweigung Nr. 5.

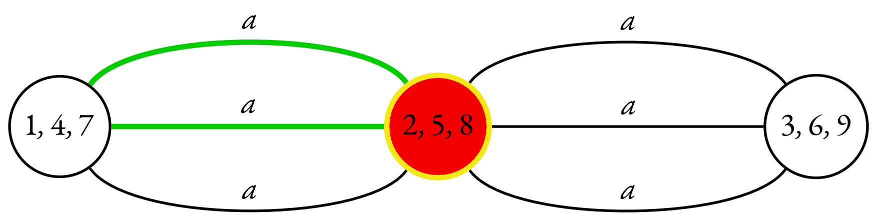

Abbildung 9: Zweiter durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $2 \cdot a$

Nun geht es weiter, beispielsweise wieder den kurzen Weg von Verzweigung Nr. 5 zur Verzweigung Nr. 2 (kostet ja keine Zeit) und anschließend weiter zur Verzweigung Nr. 3.

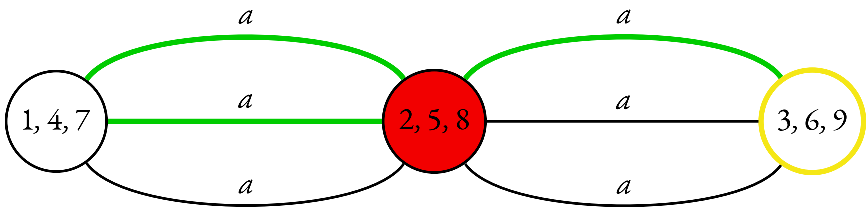

Abbildung 10: Dritter durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $3 \cdot a$

Anschließend geht er zurück zur Verzweigung Nr. 5.

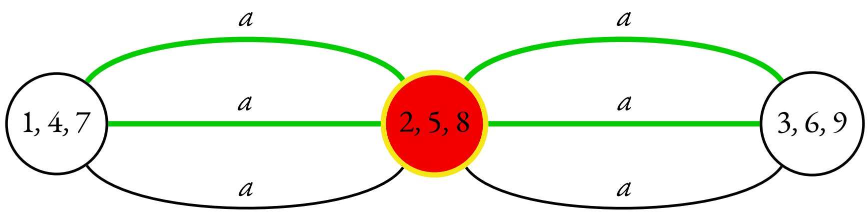

Abbildung 11: Vierter durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $4 \cdot a$

Von Verzweigung Nr. 5 gehen Pfarrer und Ministranten nun den kurzen Weg zur Verzweigung Nr. 8 und dann weiter zur Verzweigung Nr. 7.

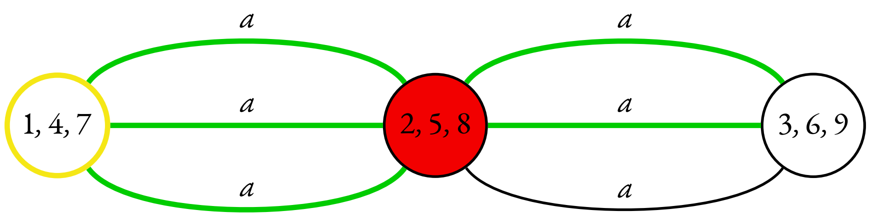

Abbildung 12: Fünfter durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $5 \cdot a$

Nun kann der Pfarrer noch den kurzen Weg von Verzweigung Nr. 7 zur Verzweigung Nr. 4 gehen (ohne Zeitverlust) und steht anschließend vor dem Problem, dass es keinen noch nicht gesegneten Weg um ihn herum mehr gibt. Er muss aber zur Verzweigung (2, 5, 8), um noch die Gräber entlang des Weges von Verzweigung Nr. 8 zur Verzweigung Nr. 9 segnen zu können. Er muss also einen Weg mehrfach gehen, wie Abbildung 13 durch die Strichelung andeutet.

Von Verzweigung Nr. 5 zur Verzweigung Nr. 8 wird nun erneut ein kurzer Weg beschritten, sodass nun noch der lange Weg von Verzweigung Nr. 8 zur Verzweigung Nr. 9 gelaufen werden kann.

Um wieder zur Ausgangsposition (also zur Verzweigung Nr. 2) zurückkehren zu können, muss der Pfarrer beispielsweise von der Verzweigung Nr. 9 zur Verzweigung Nr. 6 laufen (zeitunschädlich), dann den langen Weg von Verzweigung Nr. 6 zur Verzweigung Nr. 5 und schließlich den kurzen Weg von Verzweigung Nr. 5 zur Verzweigung Nr. 2.

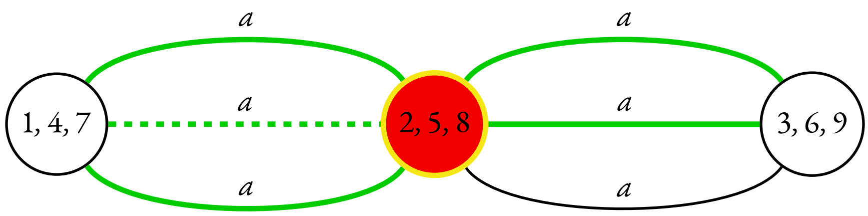

Abbildung 13: Sechster durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $6 \cdot a$

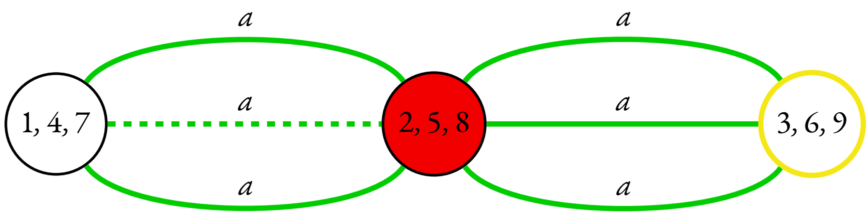

Abbildung 14: Siebter durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $7 \cdot a$

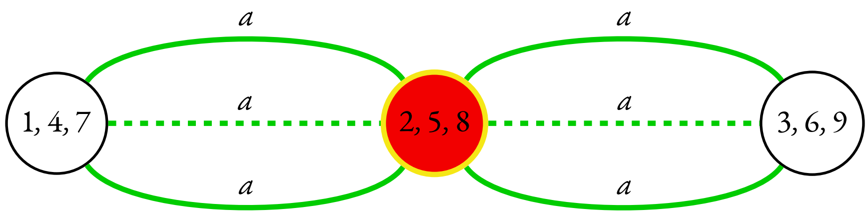

Abbildung 15: Achter durchlaufener Weg; Zeitbedarf bislang: $8 \cdot a$

Lässt man also die kurzen, vertikalen Wege außen vor, so erkennen wir, dass das Problem in nicht weniger als acht Mal der Dauer der Segnung eines horizontalen Weges gelöst werden kann. Mindestens zwei lange, horizontale Wege müssen zweimal durchlaufen werden.

III Mathematische Optimierung: Betrachtungen für $b \neq 0$

Zu diesem Zweck berücksichtigen wir zunächst, dass man einen Weg – wenn man es ganz genau nimmt – als zwei Wege betrachten kann: einen Hinweg und einen Rückweg. In der Realität spielt das meist keine große Rolle, ob man z. B. den Weg hin zu einer Stadt oder den zurück betrachtet, in der Mathematik sind das unter Umständen aber zwei verschiedene Dinge.[3] Wir stellen uns den Friedhof also nicht mehr wie in Abbildung 3 vor, sondern wie in Abbildung 16.

[3] Auch in der Realität trennen wir manchmal gedanklich, z. B. wenn der Hinweg ins Tal und somit der Rückweg bergauf führt. Hier würden wir unterschiedlich viel Zeit einplanen. Oder denken Sie an Autobahnen, bei denen eine Richtung aufgrund eines Unfalls gesperrt ist. Während Sie gemütlich in der anderen Richtung vorbei fahren, ärgern sich viele Menschen links von Ihnen über den Stau. Und das obwohl Sie alle auf der gleichen Autobahn unterwegs sind.

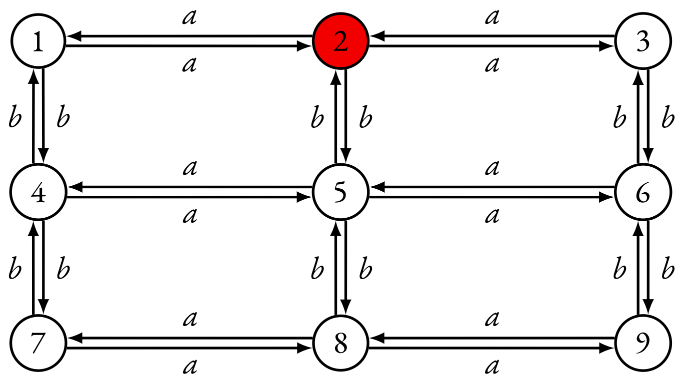

Abbildung 16: Die Struktur des Friedhofs von Giech, ganz exakt

Mathematiker nennen ein solches Gebilde *Graph*. Gegeben sei also der Graph $G := (V, K)$ bestehend aus der Menge der Verzweigungen $V := \{1, 2, \dots, 9\}$ und den Kanten $K := \{(v_i, v_j) \in V \times V \mid v_j \in N_G(v_i)\}$, wobei $N_G(v)$ die zur Verzweigung $v \in V$ benachbarten Verzweigungen angibt. $N_G(4)$ wäre beispielsweise $\{1, 5, 7\}$. Die Teilmenge $W \subset K$ bezeichne die waagerechten Kanten, $S \subset K$ entsprechend die senkrechten Kanten; es gilt somit $K = W \cup S$. Desweiteren sei eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ gegeben; für $a, b \geq 0$ sei

$$f(k) = \begin{cases} a & \text{falls } k \in W, \\ b & \text{falls } k \in S. \end{cases}$$

Durch die Funktion f werden somit jeder Kante Kosten, also Zeitbedarfe, zugewiesen: a falls es sich um eine waagerechte handelt, b falls es eine senkrechte ist. (Im konkreten Fall werden waagerechten Kanten hohe, senkrechten Kanten niedrige Kosten zugewiesen. Negative Kosten sind zwar theoretisch denkbar, z. B. in Form von Prämien oder Nutzen, hier aber nicht von Interesse).

Damit können wir unser Vorhaben als ganzzahliges lineares Programm formulieren:

$$\min \sum_{k \in K} f(k) x_k \tag{1}$$

$$\text{s. t. } x_{(v_i,v_j)} + x_{(v_j,v_i)} \geq 1 \qquad \text{für alle } (v_i, v_j) =: k \in W \tag{2}$$

$$\sum_{k \in \delta^{\text{in}}(v)} x_k = \sum_{k \in \delta^{\text{out}}(v)} x_k \qquad \text{für alle } v \in V \tag{3}$$

$$\sum_{\substack{(v_i,v_j) \in K: \\ v_i \in B, \\ v_j \in V \setminus B}} x_{(v_i,v_j)} \geq 1 \qquad \text{für alle } B \subseteq V, B \neq \emptyset, B \neq V \tag{4}$$

$$\sum_{k \in \delta^{\text{out}}(2)} x_k \geq 1 \tag{5}$$

$$x_k \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } k \in K \tag{6}$$

Gehen wir die Zeilen im einzelnen durch, um zu verstehen, dass hierdurch tatsächlich unser Vorhaben modelliert wird, eine möglichst kurze Tour durch den Graphen, also den Friedhof, zu finden, bei der alle waagerechten Kanten, also alle waagerechten Wege, besucht werden.

Blicken wir zunächst auf das Ende, Zeile (6). Sie gibt an, dass zu jeder Kante k ein x_k existiert, welches den Wert 0 oder 1 annehmen kann, die x_k sind also unsere Variablen. Man spricht auch von Entscheidungsvariablen, da sie abbilden, ob eine Kante $k \in K$ benutzt wird ($x_k = 1$) oder nicht ($x_k = 0$), ob man sich also dazu entscheidet, die Kante entlang zu gehen oder nicht.

Zeile (2) sagt, dass wir die Entscheidungsvariablen so belegen müssen, dass jede waagerechte Kante benutzt wird, in die eine oder die andere Richtung.

Zeile (3) sorgt dafür, dass man nicht an einer Verzweigung verharrt: die Summe der gewählten Kanten, die in eine Verzweigung $v \in V$ hinein gehen ($\delta^{\text{in}}(v)$), muss gleich der Summe derer sein, die aus ihr heraus gehen ($\delta^{\text{out}}(v)$).

Zeile (4) schließlich verhindert, dass man als Lösung mehrere, voneinander getrennte Touren erhält, indem sie fordert, dass aus jeder Teilmenge von Verzweigungen mindestens eine Kante heraus geht.

Sicherheitshalber verlangen wir in (5), dass wir zu Beginn Verzweigung 2 tatsächlich verlassen. Im konkreten Fall ist diese Bedingung aufgrund der Struktur des Graphens sowieso erfüllt (da zwei zwingend abzulaufende Kanten an Verzweigung 2 anliegen), sie schadet aber auch nicht und macht deutlich, dass Verzweigung 2 eine besondere Rolle spielt (außerdem lässt sich das Modell so auch auf andere Graphen übertragen).

Ganz am Anfang, in Zeile (1), geben wir noch an, dass wir nach einer kostenminimalen, hier also zeitminimalen, Lösung suchen (man nennt dies auch *Zielfunktion*).

Eine naive – aber in diesem Fall durchaus nicht aussichtslose – Methode, eine Lösung zu finden, besteht darin, alle möglichen Variablenbelegungen durchzuprobieren und sich die beste (also die mit der kürzesten Strecke) zu merken. Wieviele Möglichkeiten gibt es? Streng genommen haben wir 24 Kanten (weil wir jede Kante in zwei Richtungen ablaufen können) und müssen für jede entscheiden, ob wir sie benutzen oder nicht. Folglich haben wir für jede Kante zwei Möglichkeiten, also ingesamt 2^{24}, was ungefähr $16,7$ Millionen entspricht – nicht gerade wenige. Für jede dieser Möglichkeiten müssten wir nun nicht nur den Zielfunktionswert bestimmen, sondern auch noch prüfen, ob sie überhaupt unsere gestellten Bedingungen erfüllt: beispielsweise erfüllt die Lösung, die alle Variablen mit 0 belegt, sicherlich nicht unsere Bedingungen.

Ein sehr viel ausgeklügelteres Verfahren, um das obige Optimierungsproblem zu lösen, erhält man, indem man den *Simplexalgorithmus* mit dem *Branch-&-Bound-Verfahren* kombiniert: mit ersterem lassen sich Lösungen zu *linearen Programmen* finden. Ein solches erhalten wir, wenn wir (6) umschreiben zu $x_k \in [0,1]$ für alle $k \in K$ – auch Werte *zwischen* 0 und 1 sind nun zugelassen, die Bedingung, dass unsere Entscheidungsvariablen ganzzahlig sein müssen, wurde *gelockert*. Man spricht dann von einem *relaxierten* Optimierungsproblem.[4]

Man beginnt nun damit das relaxierte Problem zu lösen. In der Regel werden in der Lösung einige Variablen nicht-ganzzahlige Werte haben, also weder 0 noch 1 sein. Das Branch-&-Bound-Verfahren besteht nun darin, bei solchen nicht-ganz-

[4]Bemerkenswerterweise *vergrößert* sich durch die Relaxierung der zu durchsuchende Lösungsraum und trotzdem ist dieses Verfahren höchst effizient.

zahligen Variablen zu verzweigen (deswegen *Branch*), indem man diese Variable auf 0 oder 1 fixiert. Nach der ersten Verzweigung erhält man somit zwei *Subprobleme* und löst diese erneut. Fährt man so fort, wird man früher oder später eine ganzzahlige Lösung finden. Diese kann man dann im weiteren Verlauf – man möchte schließlich eine *optimale* Lösung – dazu nutzen, sich Arbeit zu ersparen: stellt man bei einem Subproblem fest, dass dieses eine schlechtere Lösung hat (egal ob ganzzahlig oder nicht) als die bisherige ganzzahlige Lösung, braucht man sich nicht die Mühe zu machen, an dieser Stelle weiterzusuchen; durch die zusätzlichen Einschränkungen (Fixierung weiterer Variablen) kann die Lösung unmöglich besser werden (deswegen *Bound*).

Diese Verfahren liefern beispielsweise das folgende Ergebnis: Der Pfarrer startet in 2 und begibt sich über 3 nach 6, von dort weiter über 9 nach 8. Über Verzweigung 7 geht er anschließend zur 4, dann zur 5 und zur 6. Dort wendet er, läuft zurück zur 5 und von dort zur 4. Abschließend kehrt er über Verzweigung 1 zur 2 zurück.[5] Insgesamt hat er hierfür $8 \cdot a + 4 \cdot b$ benötigt. Da wir b zwar modellieren, aber dennoch als nicht allzu groß betrachten, erhalten wir als Ergebnis einen Zeitaufwand von ungefähr $8 \cdot a$, also das Ergebnis aus dem Gedankenexperiment in Abschnitt II.

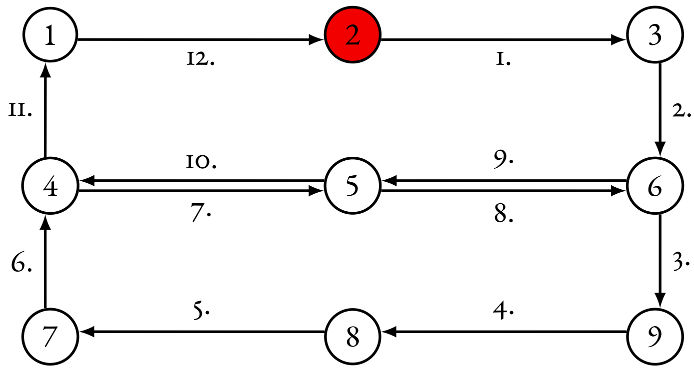

Abbildung 17: Eine optimale Lösung der Betrachtungen in Abschnitt III

Wie anhand der grafischen Darstellung gut zu erkennen ist, wurden nicht alle möglichen Wege beschritten. Die Wege zwischen den Verzweigungen 2 und 5 bzw. 5 und 8 wurden nicht abgelaufen. Dies war vereinbarungsgemäß bislang auch nicht notwendig. Wollte man sicherstellen, dass auch die vertikalen Wege sämtlich abgelaufen werden, muss man die Optimierung ein wenig anpassen.

IV Betrachtungen für grössere b

Dieser Abschnitt behandelt die Frage, wie sich das Problem verändern würde, wenn auch die vertikalen Wege zwingend abgelaufen werden müssten. Bislang war dies ja nicht verpflichtend in das Problem eingebaut; man ging davon aus, dass das Besprengen der Gräber entlang eines vertikalen Weges durch schwungvollen Einsatz des Aspergills auch von einer Verzweigung oder einem horizontalen Weg aus möglich gewesen wäre. Lässt man diese Annahme fallen, so ist das

[5]Natürlich gibt es weitere optimale Lösungen. Z. B. könnte der Pfarrer, statt am Anfang zur 3 und dann zur 6 zu laufen, auch in die andere Richtung starten; also von der 2 zur 1, von dort zur 4 usw.

Optimierungsproblem entsprechend anzupassen:

$$\min \sum_{k \in K} f(k) x_k \tag{7}$$

$$\text{s. t. } x_{(v_i,v_j)} + x_{(v_j,v_i)} \geq 1 \qquad \text{für alle } (v_i, v_j) =: k \in K \tag{8}$$

$$\sum_{k \in \delta^{\text{in}}(v)} x_k = \sum_{k \in \delta^{\text{out}}(v)} x_k \qquad \text{für alle } v \in V \tag{9}$$

$$\sum_{\substack{(v_i,v_j) \in K: \\ v_i \in B, \\ v_j \in V \setminus B}} x_{(v_i,v_j)} \geq 1 \qquad \text{für alle } B \subseteq V, B \neq \emptyset, B \neq V \tag{10}$$

$$\sum_{k \in \delta^{\text{out}}(2)} x_k \geq 1 \tag{11}$$

$$x_k \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } k \in K \tag{12}$$

Folgendes (optimales) Ergebnis ergibt sich in dieser Situation: Der Pfarrer beginnt in Verzweigung 2, besprengt die Gräber bis zur 1, dann weiter zur 4, anschließend über die 5 zur 6. Von dort zur 9, weiter zur 8 und zur 7. Von dort einmal kurz zur 4 und wieder zurück zur 7, dann zur 8. Von dort zur 5, anschließend weiter zur 2. Nun müssen die Beteiligten noch zur 3, von dort zur 6 und wieder zurück zur 3 und abschließend zur 2. Fertig. Es wurde sichergestellt, dass alle (horizontalen und vertikalen) Wege abgelaufen wurden. Die Gesamtkosten, also die benötigte Zeit, betragen $8 \cdot a + 8 \cdot b$.

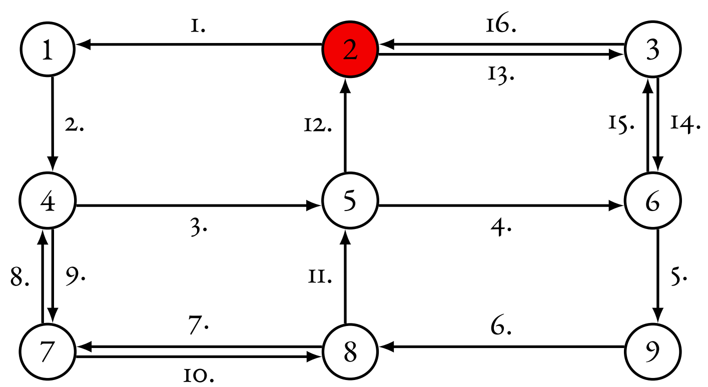

Abbildung 18: Eine optimale Lösung der Betrachtungen in Abschnitt IV

Für $b \longrightarrow 0$ ergibt sich wieder die Lösung aus dem Abschnitt II, also $8 \cdot a$. Wichtig festzuhalten ist, dass die vorgeschlagene Lösung auch hier nicht eindeutig ist. Es gibt also weitere, ebenfalls optimale Lösungen, z. B. wenn man die gesamten Überlegungen an der „2-5-8-Achse“ spiegelt. Man würde in diesem Fall also am Anfang nicht von 2 nach 1, sondern von 2 nach 3 laufen, dann weiter zur 6, dann über die 5 zur 4 usw.

V Beispielrechnung

Um die theoretischen Überlegungen mit Leben zu füllen, liegt es nahe, konkrete Werte für a und b einzusetzen. Die Liturgie und das Ziel, die Gräber mit Weihwasser zu besprengen, erfordern ein angemessen langsames Abschreiten der Gräber.[6] Geht man von einem halben Meter Weg pro Sekunde aus und berücksichtigt man die Längen der Wege (horizontal: 51 Meter; vertikal: 8 Meter), so ergeben sich die folgenden Zeitbedarfe:

$$a = \frac{51\,\text{m}}{0.5\,\text{m/s}} = 102\,\text{s}, \quad b = \frac{8\,\text{m}}{0.5\,\text{m/s}} = 16\,\text{s}.$$

Für die in den vorangehenden Abschnitten erörterten Situationen erhalten wir somit:

Situation	Zeitbedarf theoretisch	Zeitbedarf konkret
$b = 0$	$8 \cdot a + 0 \cdot b$	$8 \cdot 102\,\text{s} + 0 \cdot 16\,\text{s} =$ 13 min 36 s
$b \neq 0$, aber vernachlässigbar	$8 \cdot a + 4 \cdot b$	$8 \cdot 102\,\text{s} + 4 \cdot 16\,\text{s} =$ 14 min 40 s
$b \neq 0$, nicht vernachlässigbar	$8 \cdot a + 8 \cdot b$	$8 \cdot 102\,\text{s} + 8 \cdot 16\,\text{s} =$ 15 min 44 s

Tabelle 1: Übersicht über die benötigten minimalen Zeitbedarfe

Selbstverständlich kann der Pfarrer durch schnelleres Ablaufen der Gräberreihen die dafür benötigte Zeit reduzieren. Bei konstanter Geschwindigkeit hätte eine solche Anpassung keine Auswirkungen auf die vorgestellten Lösungen des Optimierungsproblems. Würden jedoch verschiedene Wege unterschiedlich schnell abgelaufen, müsste man unter Umständen die Anzahl der Zeitbedarfe anpassen: Statt – wie aktuell verwendet – a und b gäbe es dann im Extremfall 24 verschiedene Zeitbedarfe a bis x.

VI Zusammenfassung

Die in diesem Aufsatz dargestellten Überlegungen zeigen eine praktische Anwendung der Mathematik und liefern somit zum einen eine Antwort auf die Frage, wozu man Mathematik überhaupt nutzen kann. Wie in Abschnitt II dargestellt, ist das Problem des zeitoptimalen Weges des Pfarrers im Rahmen der Gräbersegnung am Giecher Friedhof an Allerheiligen auch schnell ohne den Einsatz mathematischer Optimierungsmethoden zu lösen, sofern man die Gültigkeit von Annahmen voraussetzt. Verallgemeinerungen finden sich in den Abschnitten III und IV. Hier wurde erläutert, wie man *allgemein*, d. h. unabhängig von der konkreten Giecher Situation, an die Problemstellung aus mathematischer Sicht herangehen würde. Als zweiten Aspekt ermöglicht dieser Aufsatz daher einen Einblick in die Idee der mathematischen Modellierung und Problemlösung. Darüberhinaus wurde in allen Abschnitten das Giecher Friedhofsproblem auch konkret gelöst (dritter Aspekt) und das Ergebnis abschließend in Abschnitt V mit einem Zahlenbeispiel anschaulich gemacht.

[6] In manchen Pfarreien wird das angemessen langsame Schreiten auch als *frommes Wandeln* bezeichnet.

VII Weitere Lektüre

Der ein oder andere Leser mag sich an dieser Stelle fragen, wie genau die eingesetzten Verfahren arbeiten. Für ihn haben wir eine Auswahl von Werken zusammengestellt, die darauf genau eingehen.

Zunächst wären hier zwei Klassiker aus dem Bereich der linearen und ganzzahligen Programmierung zu erwähnen: [1] befasst sich ausführlich mit dem Simplexalgorithmus, seinen Anwendungen und Erweiterungen – die hier verwendeten Methoden der ganzzahligen Programmierung kommen allerdings nicht vor, da diese erst später entwickelt wurden. [7] füllt diese Lücke. Beide Bücher sind keine leichte Kost, sondern mathematische Fachlektüre und erfordern fortgeschrittene Kenntnisse der linearen Algebra.

Der gleichen Voraussetzungen bedürfen die Vorlesungsskripte [3] und [2]. Ersteres gibt einen guten Überblick über kombinatorische Optimierung und führt einige Konzepte aus der Graphentheorie ein. Letzteres konzentriert sich – ähnlich wie [1] – auf die lineare Programmierung und den Simplexalgorithmus. Für die ganzzahlige Programmierung lohnt ein Blick auf die Vorlesungsnotizen [5].

Zu guter Letzt wird in [6] beschrieben, wie man den Simplexalgorithmus mit Papier und Bleistift benutzt. Da die Zielgruppe des Buches Nicht-Mathematiker sind, dürfte der Einstieg hier leichter fallen, als bei den zuvor genannten Werken.

Literaturverzeichnis

[1] G. B. Dantzig, 1963: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press and the RAND Corporation, 641 Seiten.

[2] M. Grötschel, 2004: Lineare Optimierung (Vorlesungsskriptum). `http://www.zib.de/groetschel/teaching/skriptADMII.pdf`.

[3] M. Grötschel, 2013: Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung (Vorlesungsskriptum). `http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1213/Skriptum_ADM_I_130326.pdf`.

[4] H. Heinemann, 1999: Der Pfarrer. In: *Handbuch des Katholischen Kirchenrechts*, Joseph Listl und Heribert Schmitz (Hrsg.), Pustet, 496–514.

[5] S. O. Krumke, 2013: Integer Programming. `http://www.mathematik.uni-kl.de/opt/lehre/ws1314/integer-programming/`.

[6] S. Kurz, J. Rambau, 2012: *Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler*. Kohlhammer, 274 Seiten.

[7] A. Schrijver, 1998: *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, 484 Seiten.