

Ein Verfahren zur güteoptimalen Parametrierung von PID-Reglern

Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Abteilung Elektrotechnik und Informationstechnik
der Universität Duisburg-Essen

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

genehmigte Dissertation

von

Jonas Esch
aus
Duisburg

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. S. X. Ding
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. D. Söffker
Tag der mündlichen Prüfung: 23.08.2016

Für Denise.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Problemformulierung	12
2.1	Betrachtete Regelungsstruktur	12
2.2	Indizes zur Regelgütebewertung	14
2.3	Präzisierung der Aufgabe	16
3	Methoden zur güteoptimalen PID-Regler-Parametrierung	18
3.1	Einstellregeln	18
3.2	Regelbasierte Parametrierungs-Algorithmen	19
3.3	PID-Parametrierung als Optimierungsproblem	21
4	Güteoptimale Regler-Parametrierung als Optimierungsproblem	24
4.1	Problemformulierung	24
4.2	Etwas Theorie zu konvexen Funktionen	26
4.3	Regelgüteindizes als konvexe Funktionen	27
4.4	Definitionsmenge der Regelgüteindizes	31
4.5	Konvexität der Definitionsmengen	34
4.5.1	Vorsteuerungs-Parametrierung	34
4.5.2	PID-Parametrierung	35
5	Menge der stabilisierenden PID-Parameter	42
5.1	Problemformulierung	43
5.2	Methode zur Ermittlung der stabilisierenden PID-Regler-Parameter	44
5.3	Prüfung der Menge auf Konvexität	51
5.3.1	Etwas Theorie zu konvexen Mengen	51
5.3.2	Visuelle Prüfung	52
5.3.3	Analytische Prüfung	53
5.3.3.1	Eine Anmerkung	60

5.3.4	Vorgehen bei nicht konvexen Mengen	61
5.4	Erweiterung auf robuste Stabilität	63
6	Iterative Algorithmen zur automatisierten Parametrierung	67
6.1	Abstiegsverfahren zur Vorsteuerungs-Parametrierung	69
6.2	Sukzessiver Algorithmus zur PID-Parametrierung	71
6.3	Schrittweitenwahl und Stabilitätsgrenzen	73
6.4	Simulationsbeispiel	74
7	Ein Verfahren zur automatisierten, güteoptimalen PID-Parametrierung	76
7.1	Versuchsplanung	76
7.2	Verfahren zur automatisierten, güteoptimalen Parametrierung	78
7.3	Messwert Aufbereitung	80
7.4	Verwendung zur Parametrierung diskret implementierter PID-Regler	84
7.5	Verwendung für Strecken mit ungewissen Parametern	86
8	Anwendungsbeispiel	90
8.1	Systembeschreibung des Rührkesselreaktors	90
8.2	Mathematisches Modell der Füllhöhen-Regelstrecke	91
8.3	Problemformulierung	93
8.4	Ergebnisse aus der Simulation	95
8.5	Anwendung am realen System	104
9	Zusammenfassung und Ausblick	110
	Literatur	113

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Automatisierungstechnik und komplexe Systeme, Abteilung Elektrotechnik und Informationstechnik, Fakultät für Ingenieurwissenschaften der Universität Duisburg-Essen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. S. X. Ding gilt mein besonderer Dank für die Anregungen zu dieser Arbeit, die vielseitige Unterstützung und die Möglichkeit zur freien Arbeit während meiner Zeit am Fachgebiet, sowie für die Übernahme des Hauptreferats.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. D. Söffker gilt mein Dank für die kurzfristige Übernahmen des Koreferates.

Für die stetige Diskussionsbereitschaft und Unterstützung möchte ich mich bei allen Kollegen und Angehörigen des Fachgebietes Automatisierungstechnik und komplexe Systeme bedanken. Mein besonderer Dank gilt den Herren Dr.-Ing. Adel Haghani A. S. und Dr.-Ing. Tim Könings für die fruchtbare Zusammenarbeit.

Bei Herrn M. A. Abdulkadir Topal möchte ich mich für den wöchentlichen stimulierenden Gedankenaustausch bei gutem Essen bedanken.

Ein großer Dank gilt meinen Eltern für ihre Unterstützung während meines Studiums, die ausführliche Korrektur dieser Dissertationsschrift und insbesondere dafür, dass sie die für eine solche Arbeit so wichtige Neugier in mir früh geweckt und stets gefördert haben.

Mein größter Dank gilt jedoch meiner Frau Denise, ohne deren Unterstützung und Verzicht auf gemeinsame Zeit die Anfertigung der vorliegenden Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Ihr ist diese Arbeit daher gewidmet.

1 Einleitung

In vielen Industrie-Branchen nimmt die Komplexität der zu betreibenden technischen Anlagen und Systeme stetig zu, was einen manuellen Betrieb dieser zunehmend unmöglich macht. Zudem wird meist ein (teil-)automatisierter Betrieb präferiert, da dieser eine gleichbleibende Qualität und niedrige Kosten verspricht. Die Automatisierung solcher komplexer Prozesse und Systeme wird oftmals anhand von kaskadierten Reglern beziehungsweise Steuerungssystemen realisiert. Hierbei werden Eingrößen-Teilprozesse, wie zum Beispiel die Füllhöhe in einem Behälter, in unterlagerten Regelkreisen isoliert betrachtet und geregelt. Basierend auf der Annahme, dass diese Regelkreise mit einer hohen Güte dem Sollwert folgen beziehungsweise Störungen unterdrücken, wird ein übergeordneter Regler beziehungsweise Steuerungssystem für das betrachtete Gesamtsystem entworfen und implementiert, wobei die Dynamik der unterlagerten Regelkreise ignoriert wird. Ein optimaler Betrieb eines so automatisierten Prozesses ist entsprechend nur möglich, wenn alle unterlagerten Regelkreise die an sie gestellten Anforderungen in der Regelgüte erfüllen. Regelungssysteme für komplexe Prozesse wie zum Beispiel chemische und verfahrenstechnische Anlagen oder komplexe mechatronische Systeme wie beispielsweise Verbrennungsmotoren können hierbei einige hundert unterlagerte Regelkreise aufweisen.

Obwohl die Forschung in den vergangenen Jahrzehnten eine Vielzahl elaborierter Regelungsverfahren hervor gebracht hat, zeigen Studien, dass auch heute noch beispielsweise in der Prozessindustrie bis zu 95 % der unterlagerten Regler PID-Regler¹ sind, siehe *Vilanova u. a., 2012*. Auch in anderen Industrie-Branchen wie der Automobilindustrie sind in den dort verwendeten Steuergeräten für mechatronische Systeme meist eine große Zahl an (unterlagerten) PID-Reglern implementiert, siehe beispielsweise *Yang u. a., 2009*. Die große Verbreitung dieses Reglertyps kann laut *Åström u. a., 2001* darauf zurückgeführt werden, dass PID-Regler trotz ihres einfachen Aufbaus und geringer Parameteranzahl für die meisten Anwendungen gute Ergebnisse erzielen. Des Weiteren ist der Rechenaufwand für diskret implementierte PID-Regler gering gegenüber elaborierteren Regelungskonzepten, die meist Regler beziehungsweise dynamische Systeme höherer Ordnung oder Echtzeitoptimierungsalgorithmen implementieren, weshalb PID-Regler zum Einsatz in ressourcenbeschränkten Umgebungen wie beispielsweise mikrocontrollergestützten Steuergeräten für mechatronische Anwendungen prädestiniert sind.

¹Wobei der Begriff *PID-Regler* in der vorliegenden Arbeit zusammenfassend für P-, I-, D-, PI-, PD-, ID- und PID-Regler genutzt wird.

Die Anpassung des PID-Reglers an die zu regelnde Strecke und die zu erreichende Regelgüte geschieht aufgrund der festen Struktur des Reglers allein durch die Wahl der Reglerparameter. Methoden zur Wahl der Reglerparameter – hier Parametrierung (englisch: *tuning*) genannt – von PID-Reglern sind Gegenstand der Forschung seit der ersten Nutzung dieser Regler zu Beginn des 20. Jahrhunderts und es existiert heutzutage eine Vielzahl an PID-Parametrierungs-Techniken und -Verfahren. Die Anzahl und Vielfalt dieser Verfahren ist ähnlich groß wie die Anzahl der Anwendungsmöglichkeiten des PID-Reglers, so dass die folgende Liste nur einen Überblick über die bedeutendsten und meistgenutzten geben kann. Einen ausführlichen Überblick über die verschiedenen Verfahren geben beispielsweise *Åström u. a., 1995* beziehungsweise *Åström u. a., 2006* sowie *Vilanova u. a., 2012*, *Visioli, 2010* und *O'Dwyer, 2009*.

- **Manuelle Parametrierung**

Die manuelle Parametrierung ist der in der regelungstechnischen Praxis wohl meistgenutzte Ansatz zur Wahl der Reglerparameter. Das Vorgehen bei der manuellen Parametrierung basiert häufig darauf, dass den PID-Parametern jeweils eine physikalische Bedeutung im geschlossenen Regelkreis zugeschrieben wird, die durch die Parametrierung beeinflusst werden kann.

So gibt beispielsweise *Visioli, 2010* die folgenden phänomenologischen Zusammenhänge an: „*Indeed, increasing the proportional gain leads to an increasing of the bandwidth of the system and therefore a faster but more oscillatory response should be expected. Conversely, increasing the integral time constant (i.e., decreasing the effect of the integral action) leads to a slower response but to a more stable system. Finally, increasing the derivative time constant gives a damping effect, although much care should be taken in avoiding to increase it too much as an opposite effect occurs in this case and an unstable system could eventually result.*“

Entsprechend bewertet der Anwender die Eigenschaften der Regelung oftmals qualitativ und verstellt die Reglerparameter intuitiv in einem unstrukturierten Vorgehen von Versuch und Fehler. Eine quantitative Bewertung der Eigenschaften der Regelung und eine hierauf basierende gezielte Verbesserung dieser findet meist nicht statt.

- **Einstellregeln**

Nach der manuellen Parametrierung stellen die Einstellregeln (englisch: *tuning rules*) das meistgenutzte Verfahren zur PID-Parametrierung in Theorie und Praxis dar. Eine der ersten und gleichzeitig bekanntesten Einstellregeln für PID-Reglerparameter wurde von *Ziegler u. a., 1942* beschrieben und wird auch heute noch oftmals als Vergleichswert für PID-Parametrierungen in der Literatur verwendet. Seither wurde eine Vielzahl weiterer Einstellregeln für verschiedenste Zwecke und Anwendungen erdacht, eine gute Übersicht der heute in großer Anzahl verfügbaren Einstellregeln für PID-Regler findet sich bei *O'Dwyer, 2009*.

Sämtliche Einstellregeln geben die PID-Parameter als Funktionen von Streckenparametern beziehungsweise bestimmter Streckencharakteristika an und setzen somit eine Identifikation dieser Werte voraus. Für die meisten Einstellregeln existieren

zudem Angaben welche Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises durch Anwendung der jeweiligen Regel erreicht beziehungsweise optimiert werden.

- **Frequenzbereichs-Verfahren**

Eine oftmals in theoretischen Arbeiten behandelte Klasse von Methoden zur PID-Parametrierung sind Verfahren im Frequenzbereich, die auf der Beeinflussung des Frequenzverlaufes des geschlossenen Kreises beziehungsweise einzelner Charakteristika des geschlossenen Kreises im Frequenzbereich durch PID-Parametrierung basieren. Einen Überblick über diese Verfahren und deren Anwendung zur PID-Parametrierung geben *Skogestad u. a., 2005* und *Åström u. a., 1995* beziehungsweise *Åström u. a., 2006*. Beispiele hierfür sind die Formgebung des Frequenzverlaufes der Kreisverstärkung (*loop shaping*), die Vorgabe der Lage der Polstellen oder einer einzuhaltenden Phasen- und Amplituden-Reserve, sowie verschiedenste Kriterien und Verfahren, die den geometrischen Verlauf der Ortskurve der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises beeinflussen.

Die Verwendung dieser Verfahren setzt eine Betrachtung der Eigenschaften des geschlossenen Kreises im Frequenzbereich voraus, was insbesondere bei oszillierenden Ein- und Ausgangssignalen des Regelkreises vorteilhaft ist. In vielen praktischen Anwendungen jedoch ist eine Charakterisierung des Regelkreisverhaltens nur anhand von Messsignaleigenschaften im Zeitbereich möglich. In diesem Fall müssen die Anforderungen an den Regelkreis und dessen Eigenschaften anhand von Faustformeln zwischen dem Frequenz- und Zeitbereich übertragen werden. Ein Rückschluss vom Verhalten im Frequenzbereich auf das Verhalten im Zeitbereich ist somit oftmals schwierig und erklärt die seltene Anwendung dieser Verfahren in der regelungstechnischen Praxis.

- **Automatisierte Parametrierung**

Eine Vielzahl an Verfahren / Algorithmen zur automatisierten PID-Parametrierung sind in der regelungstechnischen Literatur beschrieben beziehungsweise in kommerziellen Produkte implementiert. Einen Überblick der nicht proprietären Verfahren geben beispielsweise *Leva u. a., 2002*, *Yu, 2006*, *Åström u. a., 2006* und *Vilanova u. a., 2012*. Die meisten dieser Verfahren basieren auf einer automatisierten Identifikation der Regelstreckenparameter beziehungsweise bestimmter Streckencharakteristika oder der Parameter eines vereinfachten Modells und der anschließenden Berechnung der Reglerparameter anhand einer Einstellregel.

Elaborierte Varianten implementieren zudem eine Benutzerschnittstelle, die eine Wahl der zu erreichenden Charakteristik des geschlossenen Kreises erlaubt und hieraus die anzuwendende Einstellregel wählt.

In den letzten Jahren sind zudem vermehrt iterative Verfahren zur PID-Parametrierung beschrieben und implementiert worden, die anstelle der beschriebenen Ein-Schritt-Verfahren iterative Algorithmen zur PID-Parametrierung verwenden. Auch das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Verfahren ist hier einzuordnen, weshalb eine detaillierte Beschreibung des Standes der Technik dieser Verfahren in Kapitel 3 gegeben wird.

Sämtliche hier beschriebenen Verfahren und Methoden zur PID-Parametrierung versuchen eine oder mehrere Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises gezielt zu beeinflussen beziehungsweise einzustellen. Das Erreichen eines bestimmten Regelkreisverhaltens ist somit neben der Stabilität des geschlossenen Regelkreises und dem damit einhergehenden zerstörungsfreien Betrieb des zu regelnden Systems stets Ziel einer PID-Parametrierung.

Unter den Begriffen der Regelgüteüberwachung und -bewertung (englisch: *control performance monitoring/assessment*) finden sich in der regelungstechnischen Literatur verschiedene Maßzahlen und Indizes im Frequenz- und Zeitbereich zur Beschreibung des Verhaltens eines geschlossenen Regelkreises.

Im Rahmen der Regelgüteüberwachung werden Regelgüteindizes verwendet, um die Regelgüte über die Betriebszeit einer Regelung zu überwachen und eine Verminderung der Regelgüte zu detektieren. Hierzu wird der zeitliche Verlauf eines oder mehrerer Indizes aufgenommen und eine Änderung detektiert, wenn die Indexwerte ein vorgegebenes Toleranzband verlassen. Dies ermöglicht beispielsweise die Erkennung einer Änderung der geregelten Strecke durch Alterung oder Verschleiß und kann genutzt werden, um eine Neuparametrierung des Reglers oder Instandsetzung der Strecke zu veranlassen.

Die Regelgütbewertung hingegen stellt einen einmaligen Vorgang dar, bei dem ein oder mehrere Indexwerte für den betrachteten Regelkreis aufgenommen werden. Die so gewonnen Indexwerte können absolut oder im Verhältnis zu theoretisch möglichen Werten genutzt werden, um eine quantitative Aussage zur Regelgüte des betrachteten Kreises zu treffen.

Regelgüteindizes können entsprechend verwendet werden, um das Ziel einer Reglerauslegung oder PID-Parametrierung auszudrücken. So findet sich beispielsweise bei *O'Dwyer, 2009* eine große Anzahl an PID-Einstellregeln, deren Ziel die Minimierung des integrierten absoluten Regelfehlers als Güteindex ist. Weiterhin ermöglichen Güteindizes eine objektive Bewertung des verwendeten Reglers sowie den Vergleich verschiedener Reglerparametrierungen oder -konzepte.

Einen Überblick über existierende Verfahren und Indizes zur Regelgüteüberwachung und -bewertung liefern beispielsweise *Jelali, 2010*, *Åström u. a., 2006* und *Boyd u. a., 1991* sowie der Abschnitt 2.2 der vorliegenden Arbeit.

Trotz der beschriebenen Fülle an PID-Parametrierungsverfahren und Methoden zur Regelgütbewertung zeigen Studien², dass in der regelungstechnischen Praxis die manuelle Parametrierung auch heute noch das meistgenutzte Verfahren darstellt und etwa in der Prozessindustrie circa 50% der verwendeten PID-Regler schlecht parametriert sind.

Eine schlechte Parametrierung und die daraus resultierende geringe Regelgüte der oftmals unterlagerten PID-Regelkreise hat eine Verminderung der Leistungsfähigkeit der geregelten Anlage beziehungsweise des geregelten Systems zur Folge. Beispiele hierfür sind langsames Sollwertfolgen und starkes Überschwingen in der Regel- oder Stellgröße durch schlechte Parametrierung, was direkte finanzielle Auswirkungen haben kann durch übermäßige Produktion von Ausschuss oder dem vorschnellen Verschleiß von Aktoren.

²Siehe beispielsweise Vilanova u. a. (2012) oder Åström u. a. (1995).

Die schlechte PID-Regelgüte in praktischen Anwendungen sowie die Erkenntnis, dass die meisten PID-Parameter durch manuelle Parametrierung und somit durch ein phänomenologisches Vorgehen beziehungsweise einem unstrukturierten Ansatz von Versuch und Fehler gefunden werden, lässt den Schluss zu, dass die in der Literatur vorhandene Parametrierungsverfahren kaum Anwendung in der Praxis finden oder eine schlechte Regelgüte erzielen, wenn sie angewendet werden. Als Grund hierfür kann die schlechte Benutzbarkeit sowie der hohe zeitliche Aufwand bei der Anwendung einiger Verfahren aufgeführt werden. Zudem sind viele Verfahren nicht auf die gezielte Optimierung von Regelgüteindizes ausgelegt oder garantieren nicht das Auffinden der global güteoptimalen Reglerparameter.

Aus diesen Beobachtungen kann ein großer Bedarf nach einfach zu handhabenden, automatisierten PID-Parametrierungsverfahren abgeleitet werden, die eine direkte Minimierung von Regelgüteindizes als Funktionen der PID-Parameter umsetzen und das Auffinden des globalen Optimums garantieren.

In der vorliegenden Arbeit wird ein solches Verfahren zur automatisierten global güteoptimalen Parametrierung sollwertgewichteter PID-Regler vorgestellt.

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im Anschluss wird in **Kapitel 2** die Problemformulierung präzisiert. Die Regelungsstruktur des sollwertgewichteten PID-Reglers wird vorgestellt und deren Funktion als Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden erläutert. Weiterhin beinhaltet Kapitel 2 einen Überblick der wichtigsten Güteindizes im Zeit- und Frequenzbereich und es wird gezeigt, wie sich die güteoptimale Parametrierung eines Reglers als Minimierungsproblem darstellen lässt.

In **Kapitel 3** wird der Stand der Technik zur güteoptimalen PID-Parametrierung dargestellt. Die Vor- und Nachteile der existierenden Methoden und Verfahren werden erläutert und darauf basierend die Motivation der vorliegenden Arbeit formuliert.

In **Kapitel 4** wird die güteoptimale Parametrierung der hier betrachteten Regelungsstruktur in Form zweier nacheinander zu lösender Minimierungsprobleme formuliert. Basierend hierauf wird gezeigt, wie sich die Konvexität dieser Probleme auf die Konvexität der Parametermengen, über die die Parametrierung durchgeführt wird, zurückführen lässt. Hierzu wird – nach einer kurzen Einführung in die Theorie konvexer Funktionen – am Beispiel des integrierten absoluten Regelfehlers demonstriert, wie sich die Konvexität verschiedener Regelgüteindizes nachweisen lässt. Zudem wird erläutert, dass sich die Definitionsmengen der Regelgüte-Indizes für die betrachteten Parametrierungsprobleme als Mengen von Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises ergeben. In Abschnitt 4.5 wird dargelegt, wie sich die notwendige Konvexität dieser Definitionsmengen auf die Konvexität der Parametermengen, über die die Parametrierung durchgeführt wird, zurückführen lässt. Hierzu wird für den Fall der PID-Parametrierung die Invarianz der Regelgüteindizes gegenüber einer Erweiterung der Elemente der Definitionsmenge ausgenutzt.

Da nur eine Parametrierung über stabilisierende PID-Parameter finite Güteindexwerte und den zerstörungsfreien Betrieb des zu regelnden Systems gewährleistet, wird in **Kapitel 5** gezeigt, wie sich die Menge der stabilisierenden PID-Parameter bestimmen und auf Konvexität prüfen lässt. Es wird der Stand der Forschung zur Bestimmung dieser Menge und eine Methode näher vorgestellt, die eine analytische Beschreibung des Randes dieser Menge ermöglicht. Nach einer kurzen Einführung in die Theorie konvexer Mengen wird im fünften Kapitel gezeigt, wie sich die Konvexität der Mengen der stabilisierenden PID-Parameter visuell und analytisch prüfen lässt. Im Anschluss werden Möglichkeiten zur konvexen Approximation nichtkonvexer Mengen vorgestellt und eine Erweiterung auf robuste Stabilisierung vorgeschlagen.

In **Kapitel 6** der vorliegenden Arbeit wird dargelegt, wie iterative Algorithmen zur Approximation der global güteoptimalen Reglerparameter und somit zur automatisierten güteoptimalen Parametrierung genutzt werden können. Die vorgestellten Algorithmen nutzen die Konvexität der betrachteten Probleme aus, um eine Parametrierung mit einer möglichst geringen Anzahl an Systemanregungen zu ermöglichen. Weiterhin erlauben sie durch geeignete Wahl der Schrittweite einen besonders in der praktischen Anwendung notwendigen Kompromiss zwischen der Konvergenzgeschwindigkeit und der Genauigkeit, mit der die global optimalen Parameter approximiert werden.

In **Kapitel 7** wird basierend auf den Erkenntnissen der vorangegangenen Kapitel ein Verfahren zur automatisierten güteoptimalen Parametrierung von PID-Reglern vorgestellt. Das Verfahren kombiniert die in Kapitel 6 gezeigten Algorithmen mit einer Versuchsplanung und wird als Vorgehensweise für die Parametrierung formuliert. Es werden zudem Erweiterungen des Verfahrens um eine Messwertaufbereitung durch Filterung, sowie dessen Anwendung für Strecken mit ungewissen Parametern vorgestellt und die Anwendung zur Parametrierung diskret implementierter Regler untersucht.

Die Anwendung des vorgestellten Verfahrens zur automatisierten güteoptimalen Parametrierung wird in **Kapitel 8** für die Parametrierung eines sollwertgewichteten PI-Reglers für die Füllhöhenregelung eines Rührkesselreaktors gezeigt. Nach der Beschreibung und Modellierung des betrachteten Systems wird die Anwendung des Verfahrens in der Simulation und am realen System demonstriert. Weiterhin werden die Auswirkungen des am realen Systems auftretenden Sensorrauschens und der Stellgrößen- und Messwertbegrenzung auf die Parametrierungsprobleme simulativ untersucht und beschrieben.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick, gefolgt vom Literaturverzeichnis.

Einige der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Ergebnisse wurden, in Übereinstimmung mit § 9 (1) der Promotionsordnung der Fakultät für Ingenieurwissenschaften der Universität Duisburg-Essen vom 9. Juni 2009, bereits in den Aufsätzen (*Esch u. a., 2011; Esch u. a., 2013b; Esch u. a., 2013a; Esch u. a., 2013c*) und (*Könings u. a., 2013*) veröffentlicht.

2 Problemformulierung

Zur weiteren Bezugnahme und Abgrenzung der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Problemstellung werden hier kurz die betrachtete Regelungsstruktur sowie die zur Quantifizierung der Regelgüte verwendeten Indizes vorgestellt. Weiterhin wird eine präzise Formulierung der in dieser Arbeit betrachteten Reglerparametrierungs-Aufgabe gegeben.

2.1 Betrachtete Regelungsstruktur

In dieser Arbeit wird ein PID-Rückführregelkreis betrachtet, wie er in Abbildung 2.1 dargestellt ist.

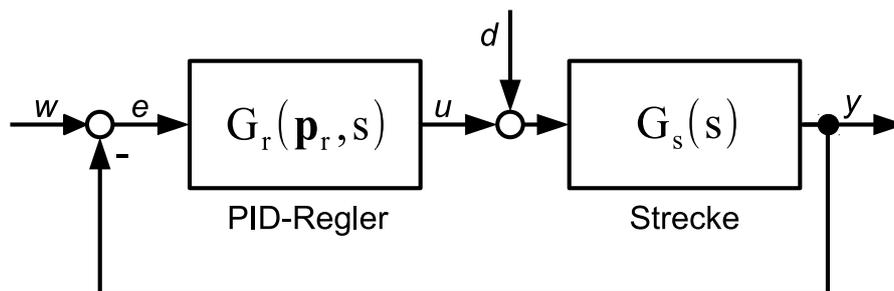


Abbildung 2.1: geschlossener PID-Regelkreis

Hierbei bezeichnet der Eingang w den Sollwert und der Eingang d eine additive Störung, die auf den Eingang der Strecke G_s wirkt. Die Übertragungsfunktion des hier betrachteten PID-Reglers kann als Funktion des Reglerparameter-Vektors \mathbf{p}_r geschrieben werden zu

$$G_r(\mathbf{p}_r, s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}_r = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Weiterhin kann durch das Nullsetzen der jeweiligen Parameter ebenso ein PI-, PD-, ID-, P-, I- oder D-Regler betrachtet werden, weshalb in der vorliegenden Arbeit der Begriff *PID-Regler* synonym für alle diese Regler verwendet wird. Eine terminologische Abgrenzung findet nur dann statt, wenn die Sammelbezeichnung PID missverständlich

ist wie beispielsweise in Rechenbeispielen, in denen eine Reglerübertragungsfunktion mit einer bestimmten Form (z.B. PI) gegeben ist.

Um gleichzeitig eine gute Störunterdrückung und gutes Führungsverhalten zu erreichen¹ wird der PID-Regler, wie von *Åström u. a., 1995* beschrieben, um ein Sollwertgewicht β im Proportionalanteil zu einer Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden erweitert. Der Reglerausgang u kann dann durch

$$\begin{aligned} u(s) &= K_p(\beta \cdot w(s) - y(s)) + \left(\frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \right) \cdot (w(s) - y(s)) \\ &= K_p(\beta - 1) \cdot w(s) + \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \right) \cdot (w(s) - y(s)) \\ &= K_{sw} \cdot w(s) + G_r(\mathbf{p}_r, s) \cdot (w(s) - y(s)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

beschrieben werden mit der Verstärkung $K_{sw} = K_p(\beta - 1)$.

Aus (2.2) ist ersichtlich, dass die Verstärkung K_{sw} als proportionale Vorsteuerung interpretiert werden kann und einen zusätzlichen Freiheitsgrad bietet, um das Übertragungsverhalten vom Sollwerteingang w auf den Streckeneingang u unabhängig von der Reglerübertragungsfunktion G_r zu beeinflussen. Die Sollwertgewichtung ist somit die einfachste Implementierung einer PID-basierten Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden (vergleiche auch *Horowitz, 1963*) und wird dementsprechend häufig verwendet. Abbildung 2.2 zeigt den Regelkreis mit sollwertgewichtetem PID-Regler, wie in (2.2).

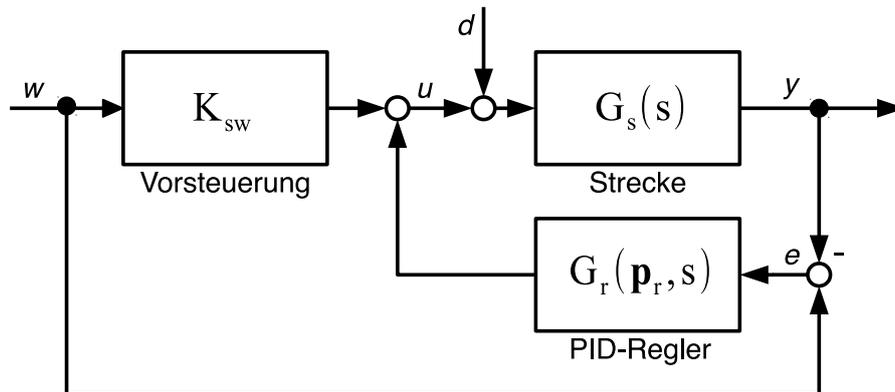


Abbildung 2.2: Regelkreis mit sollwertgewichtetem PID-Regler

Weiterhin werden in dieser Arbeit lineare, zeitinvariante Strecken mit einem Eingang und einem Ausgang berücksichtigt, deren Übertragungsfunktion $G_s(s)$ als Bruch zweier Polynome in s sowie eines Totzeitterms mit $T_t \geq 0$ geschrieben werden kann als

$$G_s(s) = \frac{Z_s(s)}{N_s(s)} \cdot e^{-sT_t}. \quad (2.3)$$

¹Eine Abhandlung darüber, dass dies mit einem klassischen PID-Regler nicht möglich ist, findet sich beispielsweise bei *Horowitz, 1963* und *Åström u. a., 1995*.

Hierbei werden keinerlei Annahmen über die Lage der Nullstellen der Polynome $Z_s(s)$ beziehungsweise $N_s(s)$ und somit über die Stabilität und Minimalphasigkeit der Strecke getroffen.

2.2 Indizes zur Regelgütebewertung

Zur Bewertung der Regelgüte des in Abbildung 2.2 gezeigten Regelkreises können verschiedene Regelgüteindizes verwendet werden. Einen guten Überblick über bestehende Verfahren und Indizes zur Regelgütebewertung geben *Jelali, 2010, Åström u. a., 2006* und *Boyd u. a., 1991*. Die dort beschriebenen Indizes quantifizieren die Regelgüte anhand von Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises im Frequenz- oder Zeitbereich. Im folgenden sind die wichtigsten, für die PID-Parametrierung verwendbaren Regelgüteindizes mit einer kurzen Erläuterung aufgeführt:

Indizes im Frequenzbereich

Regelgüteindizes im Frequenzbereich quantifizieren charakteristische Eigenschaften von Übertragungsfunktionen und deren Amplituden- oder Phasenverlauf.

Zu den wichtigsten Indizes im Frequenzbereich gehören:

- **maximale Sensitivität**

$$\sup_{\omega \geq 0} |G_{yd}(s = j\omega)| \quad (2.4)$$

Die maximale Sensitivität gibt die größte Verstärkung der Übertragungsfunktion von der Störung $d(t)$ auf den gemessenen Streckenausgang $y(t)$ an.

- **maximale komplementäre Sensitivität**

$$\sup_{\omega \geq 0} |G_{yw}(s = j\omega)| \quad (2.5)$$

Die maximale komplementäre Sensitivität gibt die größte Verstärkung der Übertragungsfunktion vom Sollwertsignal $w(t)$ auf den Streckenausgang $y(t)$ an.

- **Verstärkungs- und Phasenreserve**

$$g_m = \frac{1}{|G_{oK}(j\omega_{vs})|} \quad \text{und} \quad \varphi_m = 180^\circ - |\arg G_{oK}(j\omega_{ps})| \quad (2.6)$$

Die Verstärkungs- beziehungsweise Phasenreserve sind Maßzahlen für die Robustheit des geschlossenen Kreises, die aus dem Nyquistkriterium beziehungsweise der Ortskurve der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $G_{oK} = G_r \cdot G_s$ bestimmt werden.

Die **Verstärkungsreserve** g_m gibt an, wie weit die Verstärkung des Reglers bei der Frequenz ω_{vs} mit $\arg G_{oK}(j\omega_{vs}) = -180^\circ$ erhöht werden kann, bevor der geschlossene Kreis instabil wird.

Die **Phasenreserve** φ_m gibt den Abstand der Phase des geschlossenen Kreises zur Instabilität bei der Schnittfrequenz ω_{ps} mit $|G_{oK}(j\omega_{ps})| = 1$ an.

Normen

Eine Klasse von Regelgüteindizes, die sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich verwendet werden können, bilden die Signal- und Systemnormen. Diese besonders in der modernen Regelungstechnik (siehe beispielsweise bei *Ding, 2013* oder *Skogestad u. a., 2005*) oftmals verwendeten Maßzahlen lassen sich basierend auf der Theorie der Vektorräume definieren. Gemäß *Boyd u. a., 1991* ist eine Funktion ϕ , die den Vektorraum \mathbb{V} auf den Raum der finiten positiven reellen Zahlen abbildet, eine Norm, wenn sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v, w \in \mathbb{V}$ folgende Bedingungen erfüllt:

- nicht negativ: $\phi(v) \geq 0$,
- homogen: für $\phi(v) < \infty$ gilt $\phi(\alpha v) = |\alpha|\phi(v)$,
- erfüllt die Dreiecksungleichung: $\phi(v + w) \leq \phi(v) + \phi(w)$.

Der Vektorraum \mathbb{V} ist dabei je nach Verwendung eine Menge von Signalen oder Übertragungsfunktionen, für die die oben verwendeten mathematischen Operationen definiert sind. Von *Boyd u. a., 1991* wurde eine Vielzahl von Funktionen angegeben, die diese Bedingungen erfüllen, und weiterhin gezeigt, dass aus der Forderung nach Homogenität und der Erfüllung der Dreiecksungleichung stets die Konvexität dieser Funktionen folgt.

Indizes im Zeitbereich

In der praktischen Anwendung ist oftmals eine Bewertung des Regelkreisverhaltens im Zeitbereich erwünscht, da lediglich gemessene Signalverläufe des geschlossenen Kreises als Zeitreihen vorliegen. Hierzu existiert eine Vielzahl von Indizes, die Eigenschaften von Signalverläufen im Zeitbereich quantifizieren und somit eine Regelgütebewertung erlauben. Zur Anwendung dieser Indizes muss der geschlossene Regelkreis durch Stimulation eines Einganges mit einem festgelegten Zeitsignal aus dem stationären Verhalten ausgelenkt werden. Hierzu werden oftmals sprung- oder rampenförmige Signale verwendet.

Zu den wichtigsten Indizes im Zeitbereich gehören:

- **Ausregelzeit**

$$T_{aus} = \inf \{T \mid |s(t) - s_\infty| < \epsilon \text{ für } t \geq T\} \quad (2.7)$$

Die Ausregelzeit ist die Zeit T_{aus} , die vergeht, bevor das betrachtete Signal $s(t)$ nach einer Änderung endgültig in einem Toleranzband mit Breite ϵ um den Endwert s_∞ eintaucht.

- **Überschwingweite**

$$\ddot{U}SW = \sup_{t \geq 0} s(t) - s_\infty \quad (2.8)$$

Die Überschwingweite quantisiert die größte Abweichung des Signals $s(t)$ von diesem Endwert s_∞ nach oben.

- **integrierter absoluter Fehler**

$$IAE = \int_0^{T_{IAE}} |e(t)| dt \quad (2.9)$$

Der integrierte absolute Fehler IAE wird als das Integral des Absolutwertes des Regelfehler-Signals über die Zeit T_{IAE} gebildet und quantisiert die Größe des Regelfehlers.

Indizes im Zeitbereich quantifizieren charakteristische Größen der Signale im geschlossenen Kreis während der Antwort auf eine definierte, zeitlich beschränkte Anregung wie beispielsweise einen (Einheits)-Sprung. Da diese Indizes aus Messreihen der jeweiligen Signale gebildet werden, können sie für jede beliebige Kombination von Regler und Strecke verwendet werden und es wird kein Streckenmodell zur Bestimmung der Indexwerte benötigt. Weiterhin besitzen viele Güteindizes im Zeitbereich einen direkten Bezug zu physikalischen Eigenschaften oder Beschränkungen der Größen im geschlossenen Regelkreis. So kann beispielsweise eine Begrenzung im Aktor durch das maximal erlaubte Überschwingen der Stellgröße ausgedrückt werden.

Aufgrund dieses physikalischen Bezuges sowie der Möglichkeit, die Indizes direkt aus Messsignalen bestimmen zu können, haben Indizes im Zeitbereich eine große Verbreitung in der regelungstechnischen Praxis und finden deshalb besondere Beachtung in der vorliegenden Arbeit.

Bei der Regler-Parametrierung können die vorgestellten Indizes zur Bewertung der Regelgüte für verschiedene Parameterwerte verwendet werden, wodurch die jeweils erreichte Regelgüte vergleichbar wird. Da für die meisten Indizes gilt, dass eine hohe Regelgüte durch einen kleinen Indexwert beschrieben wird, kann entsprechend die Parametrierung als Minimierung des betrachteten Index über die Wahl der Parameter interpretiert werden.

2.3 Präzisierung der Aufgabe

Die in dieser Arbeit behandelte Fragestellung lässt sich folgendermaßen formulieren:

Gegeben sei ein PID-Regelkreis wie in Abbildung 2.2 sowie ein oder mehrere Indizes zur Beschreibung der Regelgüte im Stör- und Führungsverhalten. Wie lassen sich die Parameter K_p , K_i , K_d , K_{sw} finden, die für ein gegebenes Anregungssignal im Zeitbereich

die globalen Minima der verwendeten Indexwerte erreichen und wie kann das Auffinden dieser Parameter automatisiert werden?

Hierzu sind die folgenden Teilprobleme zu lösen:

- **Formulierung der güteoptimalen Parametrierung als Minimierungsproblem**
Um eine systematische Untersuchung der güteoptimalen PID- und Vorsteuerungs-Parametrierung mit Werkzeugen und Hilfsmitteln der mathematischen Optimierung zu ermöglichen, müssen diese zunächst als Minimierungsprobleme formuliert werden. Entsprechend soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen sich Güteindexwerte ausschließlich als Funktionen der Regler-Parameter ergeben und wie diese Bedingungen während der Parametrierung einzuhalten sind. Anschließend soll die güteoptimale Parametrierung als Minimierungsproblem formuliert werden – mit den jeweils verwendeten Güteindizes als Zielfunktionen und den Reglerparametern als Variablen.
- **Nachweis der Konvexität der Parametrierungs-Probleme**
Sofern die betrachteten Parametrierungsprobleme konvex sind, ist sichergestellt, dass die Probleme nur globale Minima besitzen und es existiert eine Vielzahl von Algorithmen zur Approximation dieser Minima und somit zur automatisierten Parametrierung. Entsprechend soll gezeigt werden, ob und unter welchen Bedingungen die betrachteten Parametrierungsprobleme konvex sind und wie diese Bedingungen geprüft und eingehalten werden können.
- **Verfahren zur automatisierten Parametrierung**
Die Erkenntnisse über die Parametrierungsprobleme sowie die Bedingungen, unter denen sich diese als konvexe Minimierungsprobleme ergeben, sollen zur Erstellung eines Verfahrens zur automatisierten güteoptimalen Parametrierung genutzt werden.

Nachdem die in der vorliegenden Arbeit betrachtete Aufgabe der güteoptimalen Parametrierung formuliert ist, werden im nächsten Kapitel bereits existierenden Parametrierungsverfahren vorgestellt und erörtert.

3 Methoden zur güteoptimalen PID-Regler-Parametrierung

Es existieren heute bereits verschiedene Lösungsansätze für das Problem der güteoptimalen PID-Parametrierung, von denen die bedeutendsten in diesem Kapitel kurz vorgestellt und auf ihre Vor- und Nachteile hin untersucht werden.

3.1 Einstellregeln

Die Parametrierung von PID-Reglern anhand von Einstellregeln stellt nach der manuellen Parametrierung eine der verbreitetsten Parametrierungs-Techniken dar. Bereits von *Ziegler u. a., 1942* wurden erste Einstellregeln für PID-Regler angegeben, die bis heute oftmals zu Vergleichszwecken herangezogen werden. Die Zusammenstellung von *O'Dwyer, 2009* bietet einen guten Überblick über die seitdem in der Literatur beschriebenen Einstellregeln.

Meist geben diese Regeln die Reglerparameter als Funktionen der Streckenparameter oder auch als Funktionen bestimmter Streckencharakteristika an. Ein Beispiel hierfür ist die Einstellregel von *Ziegler u. a., 1942* für eine Strecke erster Ordnung mit Totzeit, wie sie in Tabelle 3.1 angegeben ist. Es ist ersichtlich, dass Einstellregeln stets eine Ein-Schritt Lösung zur Parametrierung darstellen, da aus den bekannten Streckenparametern direkt die jeweiligen Reglerparameter bestimmt werden können.

Zudem werden PID-Einstellregeln oftmals mit dem Ziel entwickelt, bestimmte Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu beeinflussen. So finden sich beispielsweise bei *O'Dwyer, 2009* eine Vielzahl an Einstellregeln, die eine Minimierung des IAE-Index erreichen sollen, sofern die PID-Parameter entsprechend den jeweils angegebenen Formeln ermittelt werden. Diese Einstellregeln stellen somit ein einfaches Verfahren zur güteoptimalen PID-Parametrierung dar.

Tabelle 3.1: PID-Parameter nach *Ziegler u. a., 1942* für $G_s = \frac{K}{T_1 s + 1} \cdot e^{-sT_t}$

K_p	$\frac{1,2}{K} \cdot \frac{T_1}{T_t}$
K_i	$\frac{K_p}{2T_t}$
K_d	$\frac{2K_p}{T_t}$

Jedoch geben auch diese Regeln die PID-Parameter als Funktionen der Streckenparameter an, entsprechend stellt die hierzu benötigte exakte Streckenidentifikation einen oftmals nicht akzeptablen Aufwand dar und die Verschlechterung der Regelgüte durch eine inexakte Identifikation ist nicht abschätzbar.

Weiterhin kann im Versuch gezeigt werden, dass die wenigsten Einstellregeln tatsächlich die global optimalen PID-Parameter für das jeweils betrachtete Gütekriterium finden. Zur Illustration sind in Tabelle 3.2 beispielhaft die Parameter aus den von *O'Dwyer, 2009* aufgeführten Einstellregeln zur IAE Minimierung für PI-Regler zur Störkompensation an einem Verzögerungsglied erster Ordnung mit Totzeit und bekannten Streckenparametern angegeben. Als Anregung wurde in diesem Fall ein Einheitssprung des Streckeneingangs d genutzt. Weiterhin ist das globale Optimum (siehe Kapitel 4) des IAE-Index, das von keiner der Regeln erreicht wird, in der ersten Zeile der Tabelle angegeben.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Verwendung von Einstellregeln nur der Gewinnung von initialen, stabilisierenden PID-Parametern dienen kann und das Auffinden der global güteoptimalen Parameter stets weiteren Aufwand erfordert.

Tabelle 3.2: PI-Parameter aus Einstellregeln in (*O'Dwyer, 2009*) und korrespondierende IAE-Index Werte für $G_s = \frac{2,47}{0,12s+1}e^{-0,12s}$

	K_p^*	K_i^*	IAE
Optimum	0,37	2,14	0,4995
Shinskey 03	0,2701	0,5543	1,8038
Shinskey 88	0,3942	2,2653	0,5043
Marlin 95	0,292	3,4269	0,8529
Edgar 97	0,3431	0,7147	1,3991
Arrieta 03	0,4007	2,1331	0,5021

3.2 Regelbasierte Parametrierungs-Algorithmen

Regelbasierte Algorithmen zur automatisierten PID-Parametrierung bilden das Vorgehen eines erfahrenen Anwenders bei der manuellen güteoptimalen Parametrierung in Form von Regeln zur Parameterverstellung ab. Einen Überblick über diese Methodik findet sich beispielsweise bei *Åström u. a., 2006* beziehungsweise *Yang, 2010*, Anwendungen bei *Visioli, 2005* und bei *Yang u. a., 2009*.

Grundlage dieser Algorithmen sind phänomenologische Erkenntnisse darüber, wie sich die jeweils betrachteten Güteindizes in Abhängigkeit von den Reglerparametern verändern. Hieraus kann ein Regelsatz gebildet werden, der das Vorgehen zur Indize-Minimierung durch Verstellen der PID-Parameter beschreibt. In einem iterativen Verfahren werden dann die aktuellen Index-Werte bestimmt und die Parameter entsprechend der aufgestellten Regeln verstellt, bis der Algorithmus konvergiert.

Regelbasierte Parametrierungs-Algorithmen stellen im Vergleich zur manuellen Parametrierung ein reproduzierbares Verfahren dar, dessen Ergebnis nicht von den Fähigkeiten

des jeweiligen Anwenders abhängig ist.

Die hierzu benötigten Zusammenhänge zwischen dem Wert der verwendeten Indizes und den Reglerparametern können durch gezieltes Probieren an der realen Strecke oder aus den Erfahrungen der Anwender mit dem jeweiligen Regelkreis gewonnen werden.

Von *Visioli, 2005* wurden beispielsweise die Zusammenhänge zwischen Werten eines Flächenindex(AI) sowie eines Idle-Index(II) und den Parametern eines PI-Reglers für eine Strecke erster Ordnung mit Totzeit angegeben, die Tabelle 3.3 entnommen werden können.

Tabelle 3.3: Zusammenhänge zwischen AI / II und Reglerparameter-Werten aus *Visioli, 2005*

Wert des AI	Wert des II	Bewertung der Parameter
hoch	hoch	K_p zu klein, K_i zu klein
hoch	gering	K_p zu klein
mittel / hoch	mittel	K_p zu klein, K_i zu hoch
mittel	gering	K_p gut, K_i gut
gering	mittel/hoch	K_i zu klein
gering	gering	K_p zu hoch und / oder K_i zu hoch

Basierend auf diesen Zusammenhängen wurden beispielsweise von *Visioli, 2005* und *Yang u. a., 2009* Regeln zur Parametrierung in der Form

"Falls AI und II zu hoch sind, erhöhe K_p und K_i ."
"Falls AI und II gering sind, verringere K_p oder K_i ."

angegeben. Die Gesamtheit aller so abgeleiteten Regeln ergibt den regelbasierten Algorithmus zur Parametrierung.

Ein solcher Algorithmus bildet das Vorgehen eines erfahrenen Anwenders bei der manuellen Parametrierung des Reglers ab und kann auf einem beliebigen Computersystem implementiert werden, sofern dieses die Manipulation der Reglerparameter sowie die Bestimmung von Indexwerten im geschlossenen Kreis ermöglicht.

Bei der Ausführung des Algorithmus wird die Strecke angeregt und der aktuelle Wert der betrachteten Indizes bestimmt. Anhand der vorhandenen Regeln wird dann eine Verstellung der Parameter vorgenommen, um den Indexwert zu optimieren. Da die hergeleiteten Regeln keine Aussage darüber erlauben, in welchem Maße die Parameter verstellt werden müssen um einen besseren Indexwert zu erreichen, ist eine passende Schrittweite für die jeweilige Anwendung zu bestimmen. Weiterhin muss ein für die jeweilige Anwendung zugeschnittenes Abbruchkriterium für den Algorithmus definiert werden.

Ein großer Vorteil bei der Verwendung von regelbasierten Parametrierungs-Algorithmen liegt darin, dass kein Modell der Strecke notwendig ist, wenn Zusammenhänge wie in Tabelle 3.3 bekannt sind, und sie somit für beliebige Kombinationen aus Regler und Strecke

aufgestellt werden können. Jedoch sind diese Zusammenhänge und auch die hergeleiteten Regeln stets nur für die betrachtete Kombination gültig. Regelbasierte Algorithmen eignen sich somit hauptsächlich für Anwendungen, in denen Regler für gleiche Strecken mit unterschiedlichen Streckenparametern parametrierbar sind und bereits Expertenwissen zur Parametrierung vorhanden ist.

Von *Yang u. a., 2009* sowie *Esch u. a., 2011* wurde beispielsweise die praktische Anwendung von regelbasierten Algorithmen zur Parametrierung von PI-Reglern in Motorsteuergeräten gezeigt. Hierzu wurden die Zusammenhänge in Tabelle 3.3 um Expertenwissen erweitert und ein regelbasierter Algorithmus zur automatisierten Parametrierung eines PI-Reglers für das Hochdruck-Kraftstoff-System eines direkt-einspritzenden Ottomotors entwickelt und erfolgreich eingesetzt. In dieser Anwendung ist der Streckentyp stets derselbe, jedoch unterscheiden sich die Dimensionen der physikalischen Strecke und somit ihre Parameter bei verschiedenen Motoren und Bauteilen. Die Algorithmen wurden jeweils aus zusammengetragenem Expertenwissen entwickelt und stellen somit das Vorgehen eines erfahrenen Anwenders nach. Im Gegensatz zur manuellen Parametrierung, bei der die Güte der gewonnenen Reglerparametrierung stark abhängig von der Versiertheit des Anwenders ist, werden durch die feststehenden Algorithmen reproduzierbare Parametrierungen und eine hohe Regelgüte erreicht.

Auch wenn regelbasierte Parametrierungs-Algorithmen in praktischen Anwendungen gute Ergebnisse erzielen, ist die Qualität der gefundenen Parametrierungs-Regeln und somit auch des gefundenen Optimums stets abhängig von der Wissensbasis, die zur Erstellung des Algorithmus verwendet wird. Zudem existiert keinerlei Nachweis, dass die von den Algorithmen als optimal gefundenen Parameter tatsächlich die globalen Minimierer des verwendeten Güteindex sind.

3.3 PID-Parametrierung als Optimierungsproblem

In der Literatur existieren bereits verschiedene Ansätze, das Problem der güteoptimalen PID-Parametrierung unter Zuhilfenahme von Werkzeugen und Algorithmen der mathematischen Optimierung zu beschreiben und zu lösen. Diese werden hier kurz beschrieben und auf ihre Vor- und Nachteile hin untersucht.

Sofern keinerlei Annahmen über das zu lösende Optimierungsproblem getroffen werden können, stellen Metaheuristiken¹ eine geeignete Lösungsmethode dar. Diese Algorithmen basieren auf lokalen Suchen und einer übergeordneten Heuristik zur intelligenten Koordination dieser und eignen sich (theoretisch) zur Lösung beliebiger Optimierungsprobleme. Die übergeordnete Heuristik basiert oftmals auf stochastischen Verfahren oder bildet Optimierungsvorgänge aus der Natur ab, wie zum Beispiel die Bewegung eines Schwarms oder die natürliche Selektion.

In der regelungstechnischen Literatur wurden beispielsweise von *Visioli, 2001* und *Kim*

¹Einen guten Überblick der bedeutendsten Metaheuristiken geben *Blum u. a., 2003*.

u. a., 2008 die Verwendung eines genetischen Algorithmus beziehungsweise eines Partikel-Schwarm-Algorithmus zur güteoptimalen PID-Parametrierung beschrieben. Die stochastische Natur dieser Algorithmen führt jedoch oftmals zu einer großen Anzahl an zu bestimmenden Indexwerten und somit Anregungen des geschlossenen Kreises. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn gefordert wird, das globale Optimum mit großer Sicherheit aufzufinden. In der praktischen Anwendung ist eine Bestimmung von Indexwerten jedoch häufig mit Kosten in Zeit und Geld verbunden und deren Anzahl nach Möglichkeit gering zu halten. Entsprechend eignen sich Metaheuristiken zur PID-Parametrierung hauptsächlich für simulative Anwendungen, da dort kaum Kosten pro Indexwert-Bestimmung anfallen.

Unter der Annahme, dass die betrachteten Parametrierungsprobleme konvex sind – beziehungsweise unter Verzicht auf das Auffinden des globalen Optimums – können auch die aus der Optimierungstheorie bekannten gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen² zur Parametrierung verwendet werden. So beschreiben beispielsweise *Killingsworth u. a., 2006* die Verwendung von Extremwert-Regelungs-Techniken zur PID-Parametrierung. Hierbei wird aus einer immer gleichen Anregung des geschlossenen Kreises der Gradient des verwendeten Güteindex als Funktion der PID-Parameter gewonnen und die Parameter in Richtung negativer Gradientenwerte verstellt und somit in ein Minimum geführt. Ein ähnlicher Ansatz zur gradientenbasierten güteoptimalen Parametrierung wird von *Hjalmarsson, 2002* beschrieben. Die dort vorgestellte Technik des *Iterative Feedback Tuning* (IFT) betrachtet den quadratischen Regelfehler als Güteindex, der sich als Funktion der PID-Parameter ergibt, und verwendet ein iteratives gradientenbasiertes Abstiegsverfahren zur Minimierung des Index. Der hierzu notwendige Gradient des Güteindex wird in jeder Iteration durch gezielte 3-malige Anregung des geschlossenen Kreises mit spezifischen Signalen bestimmt.

Die von *Killingsworth u. a., 2006* beziehungsweise *Hjalmarsson, 2002* verwendeten gradientenbasierten Algorithmen konvergieren auf lokale Optima. Sofern kein Nachweis der Konvexität des betrachteten Parametrierungsproblems existiert, ist demnach nicht sichergestellt, dass die beschriebenen Parametrierungstechniken die global optimalen Reglerparameter finden. Weiterhin basieren die beschriebenen gradientenbasierten Verfahren auf der signalbasierten Bestimmung des Gradienten im geschlossenen Regelkreis anhand spezifischer Signalverläufe. Zur praktischen Umsetzung muss entsprechend die Anregung des geschlossenen Kreises mit diesen Signalen möglich sein und der Regelkreis beziehungsweise die Strecke diese Signale umsetzen können. Zudem kann die Anzahl der Anregungen, die zur Bestimmung des Gradienten benötigt wird, in der praktischen Anwendung mit hohen Kosten in Zeit und Geld verbunden sein.

Erste systematische Untersuchungen güteoptimaler PID-Parametrierungsprobleme für verschiedene lineare zeitinvariante SISO-Strecken mit und ohne Totzeit finden sich bei *Garpinger u. a., 2008* und *Garpinger, 2009*. Die Autoren betrachten den Verlauf des IAE Index sowie verschiedener Systemnormen als Funktion der Reglerparameter unter Einhaltung von Robustheits-Nebenbedingungen sowie Begrenzungen in der Stellgröße.

²Siehe beispielsweise bei *Boyd u. a., 2004* oder *Alt, 2004*.

Die Verläufe der Güteindizes als Funktionen der Reglerparameter werden dort durch umfangreiche Simulationen des geschlossenen Regelkreises für die jeweiligen Reglerparameter gewonnen. Hierbei wurde festgestellt, dass viele, wenn nicht sogar alle, Verläufe unimodal/quasikonvex sind: „Analysis [...] has shown that if not all, then at least a majority of them only have one minimum.“ (*Garpinger, 2009*). Für eine solche quasikonvexe Funktion³ ist das lokale Minimum gleich dem globalen Minimum und entspricht somit den global güteoptimalen Reglerparametern. Entsprechend schlagen die Autoren die Verwendung des von *Nelder u. a., 1965* beschriebenen Simplex-Algorithmus zur Lösung der quasikonvexen Parametrierungs-Probleme vor. Dieser iterative, heuristische Algorithmus benötigt keine Information über den Gradienten des Index und konvergiert auf ein lokales Minimum des Gütefunktional. Jedoch benötigt der Algorithmus hierzu oftmals eine große Anzahl an Indexwert-Bestimmungen und eignet sich somit vorrangig für die simulative Anwendung, wie sie auch von *Garpinger, 2009* betrachtet wird.

Die Arbeiten von *Garpinger u. a., 2008* und *Garpinger, 2009* zeigen somit erstmals, dass güteoptimale PID-Parametrierungsprobleme unimodal sind und iterative Algorithmen zur automatisierten global güteoptimalen Parametrierung verwendet werden können. Die quasikonvexe Eigenschaft der betrachteten Parametrierungsprobleme wurde von *Garpinger u. a., 2008* und *Garpinger, 2009* jedoch lediglich empirisch durch umfangreiche Simulation nachgewiesen.

Es ist anzumerken, dass keiner der aufgeführten Ansätze zur güteoptimalen PID-Parametrierung einen analytischen Nachweis über die Konvexität des betrachteten Parametrierungs-Problems enthält. Entsprechend kann nicht sichergestellt werden, dass der jeweilige Algorithmus auf die global optimalen Reglerparameter konvergiert. Die Untersuchung der Konvexität der hier betrachteten Regler-Parametrierungsprobleme ist daher eine wichtige Aufgabe der vorliegenden Arbeit und wird in den folgenden Kapiteln behandelt. Weiterhin wird gezeigt, wie die Konvexität der Probleme ausgenutzt werden kann, um die global güteoptimalen Reglerparameter anhand einfacher iterativer Algorithmen mit einer geringen Anzahl an Systemanregungen zu approximieren und somit eine automatisierte global güteoptimale Parametrierung zu ermöglichen.

³Siehe auch *Boyd u. a., 2004* beziehungsweise Abschnitt 4.2 der vorliegenden Arbeit.

4 Güteoptimale Regler-Parametrierung als Optimierungsproblem

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die güteoptimale Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern als Minimierungsproblem dargestellt werden kann, und es werden die Bedingungen hergeleitet, unter denen diese Minimierungsprobleme konvex sind. In Anlehnung an *Boyd u. a., 1991* wird auch hier ein Güteindex als Zielfunktion des Minimierungsproblems verwendet, wobei der Güteindex als Funktion von Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises betrachtet wird. Um Konvexität der Minimierungsprobleme zu zeigen, muss demnach die Konvexität des verwendeten Regelgüteindex bewiesen werden, was in diesem Kapitel beispielhaft für den integrierten absoluten Regelfehler durchgeführt wird. Abweichend von *Boyd u. a., 1991* wird hier gezeigt, wie sich die Definitionsmengen der Indizes für die betrachteten Parametrierungsprobleme als Mengen von Übertragungsfunktionen ergeben. Weiterhin wird demonstriert, wie die notwendige Konvexität dieser Definitionsmengen auf die Konvexität der Menge der Parameter, über die die Vorsteuerungs- beziehungsweise PID-Parametrierung durchgeführt wird, zurückgeführt werden kann. Hierzu wird für den Fall der PID-Parametrierung die Invarianz der Regelgüteindizes gegenüber einer Erweiterung der Elemente der Definitionsmenge ausgenutzt, um eine *konvexe Repräsentanz* der Definitionsmenge zu beschreiben.

4.1 Problemformulierung

Güteoptimale Regler-Parametrierung kann als Minimierung des Wertes des betrachteten Güteindex $J(\cdot)$ über den Vektor \mathbf{p} der Regler-Parameter und somit als ein Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p}) \quad (4.1)$$

ausgedrückt werden. Wie von *Åström u. a., 2006* und in Kapitel 7 dieser Arbeit ausführlich beschrieben, wird die Parametrierung der hier betrachteten Regelungsstruktur nacheinander für den PID-Regler und die Vorsteuerung vorgenommen, um eine unabhängige Parametrierung der zwei Freiheitsgrade der Struktur zu ermöglichen. Hierbei wird zuerst der PID-Regler parametriert, wobei der Vorsteuerungsparameter auf einem festen Wert $K_{sw} = K_{sw,init}$ gehalten wird. Im zweiten Schritt wird der Vorsteuerungsparameter parametriert, wobei der PID-Parametervektor auf den zuvor als optimal gefundenen Werten $\mathbf{p}_r = \mathbf{p}_r^*$ festgehalten wird. Entsprechend können die optimalen Parameter der

Vorsteuerung und des PID-Reglers als die Lösungen der zwei nacheinander zu lösenden Optimierungsprobleme

$$\mathbf{p}_r^* = \arg \min_{\mathbf{p}_r} J_{\text{PID}}(\mathbf{p}_r, K_{\text{sw}} = K_{\text{sw,init}}) \quad (4.2)$$

$$K_{\text{sw}}^* = \arg \min_{K_{\text{sw}}} J_{\text{VST}}(K_{\text{sw}}, \mathbf{p}_r = \mathbf{p}_r^*) \quad (4.3)$$

beschrieben werden. Als Zielfunktionen J_{PID} und J_{VST} werden Indizes zur Gütebeschreibung des PID-Reglers beziehungsweise der Vorsteuerung verwendet.

Nach *Boyd u. a., 2004* sind Minimierungsprobleme wie in (4.2) und (4.3) beschrieben konvex und besitzen somit nur globale Minima, falls die Zielfunktionen konvexe Funktionen sind. Von *Boyd u. a., 1991* wurde bereits gezeigt, dass dies für viele geläufige Güteindizes¹ gilt, sofern die Definitionsmenge der Indizes konvex sind.

Die Konvexität der Definitionsmenge wurde von *Boyd u. a., 1988* beziehungsweise *Boyd u. a., 1991* für das Problem der Synthese des Q-Parameters eines Youla-Kučera-Reglers bewiesen. Aufgrund des affinen Zusammenhanges zwischen dem Q-Parameter und den Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises kann in diesem Fall die Konvexität der Definitionsmenge auf die Konvexität der Menge aller stabiler Q-Übertragungsfunktionen zurückgeführt werden, die sich, wie von *Boyd u. a., 1991* gezeigt, leicht nachweisen lässt. Jedoch stellt die Synthese des Q-Parameters eine Optimierung der Struktur sowie der Parameter einer Übertragungsfunktion dar, sodass diese Ergebnisse nicht ohne Weiteres auf die hier betrachtete Parametrierung eines PID-Reglers mit fester Struktur übertragen werden können.

In diesem Kapitel wird daher gezeigt, wie die Konvexität der betrachteten Parametrierungsprobleme – basierend auf den Ideen und Vorgehensweisen von *Boyd u. a., 1991* – für die hier betrachtete Parametrierung sollwertgewichteter PID-Regler nachgewiesen werden kann. Der in dieser Arbeit erbrachte Nachweis der Konvexität der hier betrachteten Parametrierungsprobleme von strukturell festen PID-Reglern gliedert sich dabei in die folgenden drei Teilaufgaben:

1. Nachweis der Konvexität der Güteindexfunktionen

Der Nachweis der Konvexität wird hier durch Erfüllen der Jensenschen Ungleichung – wie in Definition 4.1 angegeben – geführt.

2. Beschreibung der Definitionsmengen der Güteindizes

Die Güteindizes werden hier als Funktionen der Übertragungsfunktionen vom jeweils angeregten Eingang des geschlossenen Regelkreises zum Signal, auf dem der Index gebildet wird, betrachtet. Entsprechend werden die Definitionsmengen für den Fall der Vorsteuerungs- und PID-Parametrierung und für Indizes auf dem Regelfehler und der Stellgröße beschrieben.

¹*Boyd u. a., 1988* beziehungsweise *Boyd u. a., 1991* verwenden den Begriff *performance specifications*.

3. Nachweis der Konvexität der Definitionsmengen

Zum Nachweis der Konvexität der Definitionsmenge der Indizes muss gezeigt werden, dass das Linienelement zwischen zwei beliebigen Elementen der Definitionsmenge ebenfalls in der Definitionsmenge liegt. Dies wird, für die hier betrachteten Definitionsmengen von Übertragungsfunktionen mit gleicher Struktur und unterschiedlichen PID- beziehungsweise Vorsteuerungs-Parametern, auf die Konvexität der zur Parametrierung verwendeten Parametermenge zurückgeführt.

4.2 Etwas Theorie zu konvexen Funktionen

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie zu konvexen Funktionen vorgestellt. Die hier verwendeten Sätze und Definitionen finden sich samt Beweis und Herleitung beispielsweise bei *Boyd u. a., 2004*.

Definition 4.1.

Eine Funktion $J(\cdot)$ ist konvex auf ihrer konvexen Definitionsmenge $\mathbf{dom} J$, wenn für alle $G, \tilde{G} \in \mathbf{dom} J$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$J(\lambda G + (1 - \lambda)\tilde{G}) \leq \lambda J(G) + (1 - \lambda)J(\tilde{G}). \quad (4.4)$$

Bemerkung 4.1. Die Jensensche Ungleichung (4.4) beschreibt, dass für zwei beliebige Elemente G, \tilde{G} der Definitionsmenge die Linie $\lambda J(G) + (1 - \lambda)J(\tilde{G})$ zwischen den Funktionswerten $J(G), J(\tilde{G})$ stets über dem Funktionsgraphen $J(\lambda G + (1 - \lambda)\tilde{G})$ zwischen den beiden Funktionswerten liegt.

Definition 4.2.

Eine Funktion $J(\cdot)$ ist unimodal/quasikonvex, wenn alle Mengen

$$S_\alpha = \{G \in \mathbf{dom} J \mid J(G) \leq \alpha\} \quad (4.5)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex sind.

Dies kann äquivalent mit einer Variation der Jensenschen Ungleichung beschrieben werden, wonach eine Funktion $J(\cdot)$ quasikonvex auf ihrer konvexen Definitionsmenge $\mathbf{dom} J$ ist, wenn mit $G, \tilde{G} \in \mathbf{dom} J$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$J(\lambda G + (1 - \lambda)\tilde{G}) \leq \max\{J(G), J(\tilde{G})\}. \quad (4.6)$$

Bemerkung 4.2. Gleichung (4.6) beschreibt, dass für zwei beliebige Elemente G, \tilde{G} der Definitionsmenge der Funktionsgraph $J(\lambda G + (1 - \lambda)\tilde{G})$ in dem Segment zwischen zwei Funktionswerten $J(G), J(\tilde{G})$ stets unter dem Maximum der beiden Funktionswerte liegt.

Satz 4.1.

Jedes lokale Minimum einer konvexen oder quasikonvexen Funktion ist ein globales Minimum der Funktion.

Bemerkung 4.3. Aus Satz 4.1 kann geschlossen werden, dass ein lokaler Minimierer

$$G^* = \arg \min_G J(G) \quad (4.7)$$

auch ein globaler Minimierer der konvexen oder quasikonvexen Funktion $J(\cdot)$ ist.

Satz 4.2.

Gegeben seien m konvexe Funktionen

$$J_i(\cdot) \quad i = 1, \dots, m \quad (4.8)$$

und nicht-negative Gewichte $w_i \geq 0$, dann ist die gewichtete Summe

$$J = w_1 \cdot J_1 + \dots + w_m \cdot J_m \quad (4.9)$$

wieder eine konvexe Funktion.

Bemerkung 4.4.

Satz 4.2 wurde in Boyd u. a., 2004 (Abschnitt 3.2.1) hergeleitet und lässt sich wie dort beschrieben auch auf unendliche Summen und Integrale anwenden.

4.3 Regelgüteindizes als konvexe Funktionen

Bereits von *Boyd u. a., 1991* wird Konvexität beziehungsweise Quasikonvexität vieler geläufiger Regelgüteindizes bewiesen, wie zum Beispiel der Überschwingweite, der Ausregelzeit, verschiedener Systemnormen sowie den allgemeinen Einhüllenden von Sprungantworten dynamischer Systeme. Um die Konvexität der Regelgüteindizes anhand von Definition 4.1 zu zeigen, interpretieren *Boyd u. a., 1991* hierzu die Indizes als Funktionen von Übertragungsfunktionen. Als Argument der Index-Funktionen wird jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises von dem Eingang, welcher zur Bestimmung des Index angeregt wurde, zu dem Signal, auf dem der Index gebildet wird, verwendet.

In diesem Abschnitt wird beispielhaft die Konvexität des in der Literatur häufig zur Gütebewertung von PID-Reglern genutzten Index des integrierten absoluten Fehlers (*Integrated Absolute Error, IAE*) bewiesen.

Definition 4.3.

Der IAE über einen finiten Zeitraum $t \in [0, T_{IAE}]$ ist wie folgt definiert

$$IAE(e(t)) = \int_0^{T_{IAE}} |e(t)| dt, \quad (4.10)$$

was mit dem Operator der inversen Laplace-Transformation $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ als

$$\begin{aligned} \text{IAE} &= \int_0^{T_{\text{IAE}}} \left| \frac{1}{2j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{es_{in}}(s) \cdot s_{in}(s) \cdot e^{st} ds \right| dt \\ &= \int_0^{T_{\text{IAE}}} \left| \mathcal{L}^{-1}(G_{es_{in}}(s) \cdot s_{in}(s)) \right| dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

geschrieben werden kann – mit der Übertragungsfunktion $G_{es_{in}}$ des geschlossenen Kreises vom angeregten Eingang s_{in} auf den Regelfehler e und der Laplace-Transformierten $s_{in}(s)$ des zur Anregung verwendeten Zeitsignals $s_{in}(t)$. Der angeregte Eingang des geschlossenen Kreises kann in der Regelungs-Struktur nach Abbildung 2.2 entweder der Sollwerteingang w oder der Störeingang d sein.

Satz 4.3.

Die Laplace-Transformation wie auch die inverse Laplace-Transformation sind eineindeutige Abbildungen zwischen Zeit- und Frequenzbereich, sofern Nullfunktionen der Form

$$y(x) = \begin{cases} b & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \quad \text{und } b \in \mathbb{R}^{\neq 0} \quad (4.12)$$

als Argument ausgeschlossen werden können.

Bemerkung 4.5.

Satz 4.3 samt Herleitung und Beweis findet sich beispielsweise bei Doetsch, 1974. Signalverläufe, die Nullfunktionen wie in (4.12) entsprechen, können in realen Anwendungen ausgeschlossen werden, da diese im Zeitbereich eine instantane Wertänderung der physikalischen Größe und somit einen unendlichen Energieaufwand beschreiben und sich $G_{es_{in}}(s)$ sowie $s_{in}(s)$ für die hier betrachteten Strecken, Regler und Anregungen als stetige beziehungsweise stückweise stetige Funktionen ergeben.

Anhand von Satz 4.3 kann gefolgert werden, dass das Argument $G_{es_{in}}(s) \cdot s_{in}(s)$ durch den Operator $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ eineindeutig auf das Zeitsignal $e(t)$ abgebildet wird. Entsprechend kann, wie in (4.11) gezeigt, der Index äquivalent als eine Funktion der Übertragungsfunktion $G_{es_{in}}(s)$ und des Eingangssignals $s_{in}(s)$ beschreiben werden als

$$\text{IAE}(G_{es_{in}}, s_{in}). \quad (4.13)$$

Sofern während der Parametrierung stets das gleiche Signal s_{in} zur Anregung des geschlossenen Kreises verwendet wird, kann sich eine Änderung des IAE-Wertes nur aus einer Änderung der Übertragungsfunktion $G_{es_{in}}$ ergeben und es folgt

$$\text{IAE}|_{s_{in}}(G_{es_{in}}). \quad (4.14)$$

Der folgende Satz formuliert Konvexität des IAE-Index als Funktion der Übertragungsfunktion G_{esin} , sofern eine konvexe Definitionsmenge $\mathbf{dom} J$ vorausgesetzt werden kann:

Satz 4.4.

Der IAE-Index gemäß Definition 4.3 ist eine konvexe Funktion auf der konvexen Definitionsmenge $\mathbf{dom} J$.

Beweis: Zum Beweis der Konvexität wird Definition 4.1 herangezogen und die Erfüllung von Gleichung (4.4) geprüft. Die Jensensche Ungleichung kann mit zwei unterschiedlichen Übertragungsfunktionen $G_{esin}, \tilde{G}_{esin} \in \mathbf{dom} J$ geschrieben werden als

$$J(\lambda G_{esin} + (1 - \lambda)\tilde{G}_{esin}) \leq \lambda J(G_{esin}) + (1 - \lambda)J(\tilde{G}_{esin}). \quad (4.15)$$

Mit (4.11) kann die linke Seite der Jensenschen Ungleichung (4.15) geschrieben werden als

$$J(\lambda G_{esin} + (1 - \lambda)\tilde{G}_{esin}) = \int_0^\infty \left| \mathcal{L}^{-1} \left((\lambda G_{esin} + (1 - \lambda)\tilde{G}_{esin}) \cdot s_{in} \right) \right| dt. \quad (4.16)$$

Nutzt man die Linearität der inversen Laplacetransformation, wird dies zu

$$\int_0^\infty \left| \lambda \mathcal{L}^{-1}(G_{esin} \cdot s_{in}) + (1 - \lambda) \mathcal{L}^{-1}(\tilde{G}_{esin} \cdot s_{in}) \right| dt. \quad (4.17)$$

Mit der Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$ und unter Berücksichtigung der Linearität der Integration kann (4.17) umformuliert werden zu

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \lambda \mathcal{L}^{-1}(G_{esin} \cdot s_{in}) + (1 - \lambda) \mathcal{L}^{-1}(\tilde{G}_{esin} \cdot s_{in}) \right| dt \leq \\ & \lambda \int_0^\infty \left| \mathcal{L}^{-1}(G_{esin} \cdot s_{in}) \right| dt + (1 - \lambda) \int_0^\infty \left| \mathcal{L}^{-1}(\tilde{G}_{esin} \cdot s_{in}) \right| dt, \end{aligned} \quad (4.18)$$

was mit (4.16) wieder geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \mathcal{L}^{-1} \left((\lambda G_{esin} + (1 - \lambda)\tilde{G}_{esin}) \cdot s_{in} \right) \right| dt \leq \dots \\ & \lambda \int_0^\infty \left| \mathcal{L}^{-1}(G_{esin} \cdot s_{in}) \right| dt + (1 - \lambda) \int_0^\infty \left| \mathcal{L}^{-1}(\tilde{G}_{esin} \cdot s_{in}) \right| dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mit (4.11) ist ersichtlich, dass (4.19) die Jensensche Ungleichung (4.15) erfüllt und somit Konvexität des IAE-Index bewiesen ist. ■

Bemerkung 4.6. Der Beweis des Satzes 4.4 gilt für ein beliebiges Eingangssignal s_{in} ,

sofern dieses einen finiten IAE Wert erzeugt, was beispielsweise für ungedämpfte Schwingungen nicht der Fall ist.

Bemerkung 4.7.

Eine Filterung des Signals auf dem der Index gebildet wird durch ein lineares, zeitinvariantes und stabiles Filter beeinträchtigt die Konvexität des Index nicht.

Da für die betrachteten linearen Systeme das Superpositionsprinzip gilt, kann in diesem Fall das ursprüngliche Eingangssignal als mit der Übertragungsfunktion des Filters $G_f(s)$ multipliziert angenommen werden und es ergibt sich das virtuelle Eingangssignal

$$\tilde{s}_{\text{in}} = G_f(s) \cdot s_{\text{in}}. \tag{4.20}$$

Für ein zeitinvariantes Filter ergibt sich bei der Verwendung des immer gleichen Eingangssignals s_{in} entsprechend ein immer gleiches \tilde{s}_{in} , sodass dieses statt des eigentlich genutzten Eingangssignals gleichermaßen für den Beweis der Konvexität des jeweiligen Güteindex verwendet werden kann.

Bemerkung 4.8.

Damit die Jensensche Ungleichung (4.4) definiert ist, muss sichergestellt sein, dass der verwendete Index nur finite Werte annehmen kann. Für viele Indizes ist dies dann der Fall, wenn die als Argument betrachtete Übertragungsfunktion Eingangs-Ausgangs-Stabilität² besitzt. Da die Jensensche Ungleichung für zwei beliebige Übertragungsfunktionen $G, \tilde{G} \in \mathbf{dom} J$ gelten muss, um Konvexität des jeweiligen Index J zu zeigen, muss sichergestellt werden, dass die Definitionsmenge des Index nur aus stabilen Übertragungsfunktionen besteht.

Gemäß Satz 4.2 können auch mehrere konvexe Indizes als nicht-negativ gewichtete Summe zu einem konvexen Güteindex zusammengefasst werden. Dies ermöglicht eine multi-kriterielle Parametrierung, wobei durch die Wahl der Gewichte w_i eine Priorisierung der Indizes vorgenommen werden kann.

Aus Definition 4.1 kann geschlossen werden, dass für eine konvexe Zielfunktion $J(\cdot)$ die Konvexität der Definitionsmenge $\mathbf{dom} J$ der Funktion notwendig ist. In den folgenden Abschnitten wird daher erläutert, wie sich die Definitionsmenge der Güteindizes für die betrachteten Parametrierungsprobleme zusammensetzt und wie deren Konvexität auf die Konvexität der Parametermengen, über die die Parametrierung durchgeführt wird, zurückgeführt werden kann.

²Eine ausführliche Definition der hier betrachteten Eingangs-Ausgangs-Stabilität von Übertragungsfunktionen findet sich beispielsweise bei Lunze, 2006.

4.4 Definitionsmenge der Regelgüteindizes

Im vorherigen Abschnitt wird gezeigt, dass der Konvexitätsbeweis für Güteindizes $J(\cdot)$ gelingt, wenn diese als Funktionen der Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises betrachtet werden. Entsprechend ergibt sich die Definitionsmenge $\mathbf{dom} J$ des jeweiligen Index $J(\cdot)$ als eine Menge von Übertragungsfunktionen.

In dieser Arbeit werden Güteindizes auf den Signalen u und e der Regelungsstruktur in Abbildung 2.2 nach Anregung der Eingänge w oder d betrachtet. Demnach können die Güteindizes als Funktionen der vier Übertragungsfunktionen

$$G_{uw} = \frac{K_{sw} + G_r}{1 + G_r \cdot G_s} \quad G_{ew} = \frac{1 - K_{sw} \cdot G_s}{1 + G_r \cdot G_s} \quad (4.21)$$

$$G_{ud} = -\frac{G_r \cdot G_s}{1 + G_r \cdot G_s} \quad G_{ed} = -\frac{G_s}{1 + G_r \cdot G_s}. \quad (4.22)$$

gebildet werden.

Bei den hier betrachteten Parametrierungs-Problemen (4.2) und (4.3) ergeben sich die Definitionsmengen der Indizes entsprechend als Mengen der Übertragungsfunktionen (4.21) beziehungsweise (4.22), wobei sich die einzelnen Elemente der Mengen in ihren Vorsteuerungs- beziehungsweise PID-Parametern unterscheiden. Die Definitionsmengen der zur Vorsteuerungs- beziehungsweise PID-Parametrierung auf den Signalen $e(t)$ beziehungsweise $u(t)$ verwendeten Indizes können demnach wie folgt formal beschrieben werden:

Vorsteuerung-Parametrierung

Definition 4.4.

Die Definitionsmenge $\mathbf{dom} J_{VST}$ der zur Vorsteuerung-Parametrierung verwendeten Indizes kann je nach dem vom Index bewerteten Signal wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{dom} J_{VST} = \begin{cases} \mathbf{dom} J_{uw} = \mathbb{G}_{uw} = \{G_{uw}(K_{sw}) \mid K_{sw} \in \mathbb{K}\} & \text{für Indizes auf } u(t) \\ \mathbf{dom} J_{ew} = \mathbb{G}_{ew} = \{G_{ew}(K_{sw}) \mid K_{sw} \in \mathbb{K}\} & \text{für Indizes auf } e(t). \end{cases} \quad (4.23)$$

Wobei die Menge \mathbb{K} die Parameter-Menge bezeichnet, über die die Vorsteuerungs-Parametrierung durchgeführt wird.

Aus 4.23 ist ersichtlich, dass die Definitionsmengen jeweils aus Übertragungsfunktionen mit gleicher Struktur³ bestehen, die sich lediglich in ihrem Vorsteuerungs-Parameter unterscheiden.

PID-Parametrierung

Definition 4.5.

Die Definitionsmenge $\mathbf{dom} J_{PID}$ der zur PID-Parametrierung verwendeten Indizes kann

³Festgelegt durch den Grad der (Quasi-)Polynome in Zähler und Nenner.

je nach dem vom Index bewerteten Signal wie folgt angegeben werden:

$$\text{dom } J_{\text{PID}} = \begin{cases} \text{dom } J_{\text{ud}} = \mathbb{G}_{\text{ud}} = \{G_{\text{ud}}(\mathbf{p}_r) \mid \mathbf{p}_r \in \mathbb{P}\} & \text{für Indizes auf } u(t) \\ \text{dom } J_{\text{ed}} = \mathbb{G}_{\text{ed}} = \{G_{\text{ed}}(\mathbf{p}_r) \mid \mathbf{p}_r \in \mathbb{P}\} & \text{für Indizes auf } e(t). \end{cases} \quad (4.24)$$

Wobei die Menge \mathbb{P} die Parameter-Menge bezeichnet, über die die PID-Parametrierung durchgeführt wird.

Aus 4.24 ist ersichtlich, dass die Definitionsmengen jeweils aus Übertragungsfunktionen mit gleicher Struktur³ bestehen, die sich lediglich in ihren PID-Parametern unterscheiden.

Satz 4.5 formuliert, dass die Übertragungsfunktionen (4.21) - (4.22) des geschlossenen Kreises eindeutige Abbildungen zwischen den Elementen der Mengen \mathbb{P} , \mathbb{K} und den jeweils betrachteten Definitionsmengen darstellen.

Satz 4.5.

Die Übertragungsfunktionen (4.21) - (4.22) stellen eindeutige Abbildungen zwischen den Mengen \mathbb{P} sowie \mathbb{K} und der jeweiligen Definitionsmenge der Indizes \mathbb{G}_{uw} , \mathbb{G}_{ew} , \mathbb{G}_{ud} und \mathbb{G}_{ed} dar.

Beweis: Eine Übertragungsfunktion der Form

$$G = \frac{Z(s) + Z_{T_t}(s) \cdot e^{sT_t}}{N(s) + N_{T_t}(s) \cdot e^{sT_t}} \quad (4.25)$$

mit

$$\begin{aligned} Z(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0 \\ Z_{T_t}(s) &= \tilde{a}_n s^n + \tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + \dots \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0 \\ N(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_1 s + b_0 \\ N_{T_t}(s) &= \tilde{b}_m s^m + \tilde{b}_{m-1} s^{m-1} + \dots \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0 \end{aligned}$$

sowie den Parametern

$$T_t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \quad \text{und} \quad a_i, \tilde{a}_i, b_j, \tilde{b}_j \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^{\geq 0} \quad (4.26)$$

ist durch die Koeffizienten (4.26) ihres Zähler- beziehungsweise Nennerquasipolynoms eindeutig bestimmt.

Die hier betrachteten Übertragungsfunktionen (4.21) - (4.22) ergeben sich mit den Über-

tragungsfunktionen des Reglers (2.1) und der Strecke (2.3) zu

$$G_{uw}(\mathbf{p}_r, K_{sw}) = \frac{(K_d s^2 + (K_p + K_{sw})s + K_i) \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t}}{s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t} + (K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s(s)} \quad (4.27)$$

$$G_{ew}(\mathbf{p}_r, K_{sw}) = \frac{s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t} - s \cdot Z_s(s) \cdot K_{sw}}{s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t} + (K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s(s)} \quad (4.28)$$

und

$$G_{ud}(\mathbf{p}_r) = -\frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s(s)}{s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t} + (K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s(s)} \quad (4.29)$$

$$G_{ed}(\mathbf{p}_r) = -\frac{s \cdot Z_s(s)}{s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t} + (K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s(s)}, \quad (4.30)$$

die jeweils eine Form gemäß (4.25) besitzen.

Aus (4.27) - (4.30) ist ersichtlich, dass die Parameter der jeweiligen (Quasi-)Polynome im Zähler und Nenner der Übertragungsfunktionen affine und somit eineindeutige Funktionen der PID- beziehungsweise der Vorsteuerungs-Parameter sind. Weiterhin ist durch die Betrachtung von zeitinvarianten Strecken in dieser Arbeit sichergestellt, dass die (Quasi-)Polynome Z_s , N_s und e^{sT_t} konstante Koeffizienten besitzen. Hieraus kann geschlossen werden, dass durch (4.27) - (4.30) jeweils die Menge \mathbb{K} beziehungsweise die Menge \mathbb{P} eineindeutig auf eine Menge von Übertragungsfunktionen abgebildet wird. ■

Durch die Sätze 4.3 und 4.5 ist bewiesen, dass eine eineindeutige Abbildung von einem Element der Menge \mathbb{P} beziehungsweise \mathbb{K} auf die jeweils betrachtete Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises existiert, nämlich

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &\xleftarrow{G_{ud}(\cdot)} \mathbb{G}_{ud} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P} \xleftarrow{G_{ed}(\cdot)} \mathbb{G}_{ed} \\ \mathbb{K} &\xleftarrow{G_{uw}(\cdot)} \mathbb{G}_{uw} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{K} \xleftarrow{G_{ew}(\cdot)} \mathbb{G}_{ew} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aus der eineindeutigen Abbildung der Mengen \mathbb{P} und \mathbb{K} auf die jeweiligen Definitionsmengen $\mathbf{dom} J_{PID}$ und $\mathbf{dom} J_{VST}$ der verwendeten Indizes durch die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises kann gefolgert werden, dass die Parametrierungsprobleme (4.2) und (4.3), wie in (4.32) dargestellt, äquivalent als Probleme über den Mengen

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{ud} &\hat{=} \{G_{ud} \mid \mathbf{p}_r \in \mathbb{P}\} \\ \mathbb{G}_{ed} &\hat{=} \{G_{ed} \mid \mathbf{p}_r \in \mathbb{P}\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{uw} &\hat{=} \{G_{uw} \mid K_{sw} \in \mathbb{K}, \mathbf{p}_r \in \mathbb{P}\} \\ \mathbb{G}_{ew} &\hat{=} \{G_{ew} \mid K_{sw} \in \mathbb{K}, \mathbf{p}_r \in \mathbb{P}\} \end{aligned}$$

formuliert werden können als

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{p}_r \in \mathbb{P}} J_{ud}(\mathbf{p}_r) &\Leftrightarrow \min_{G_{ud} \in \mathbb{G}_{ud}} J_{ud}(G_{ud}) & \text{bzw.} & \min_{\mathbf{p}_r \in \mathbb{P}} J_{ed}(\mathbf{p}_r) \Leftrightarrow \min_{G_{ed} \in \mathbb{G}_{ed}} J_{ed}(G_{ed}) \\
\min_{K_{sw} \in \mathbb{K}} J_{uw}(K_{sw}) &\Leftrightarrow \min_{G_{uw} \in \mathbb{G}_{uw}} J_{uw}(G_{uw}) & \text{bzw.} & \min_{K_{sw} \in \mathbb{K}} J_{ew}(K_{sw}) \Leftrightarrow \min_{G_{ew} \in \mathbb{G}_{ew}} J_{ew}(G_{ew}).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Gemäß Definition 4.1 ist die Konvexität der in (4.23) und (4.24) gezeigten Definitionsmengen notwendig, damit der in Abschnitt 4.3 gezeigte Beweis der Konvexität der Güteindizes gilt. Entsprechend wird im folgenden Abschnitt gezeigt, wie Konvexität der hier definierten Mengen $\mathbf{dom} J_{VST}$ und $\mathbf{dom} J_{PID}$ beziehungsweise deren Repräsentanzen auf die Notwendigkeit der Konvexität der Mengen \mathbb{K} und \mathbb{P} zurückgeführt werden kann.

4.5 Konvexität der Definitionsmengen

Um die Konvexität der in (4.23) und (4.24) angegebenen Definitionsmengen zu prüfen, kann die von *Boyd u. a., 2004* gegebene Definition einer konvexen Menge verwendet werden⁴. Demnach muss für zwei beliebige Elemente $G, \tilde{G} \in \mathbb{G}$ einer konvexen Menge \mathbb{G} gelten, dass auch das Linienelement $G_\lambda = \lambda G + (1 - \lambda)\tilde{G}$ mit $\lambda \in [0, 1]$ ein Element der Menge \mathbb{G} ist.

4.5.1 Vorsteuerungs-Parametrierung

Zwei Elemente der Definitionsmengen (4.23) können durch Einsetzen zweier verschiedener Werte $K_{sw}, \tilde{K}_{sw} \in \mathbb{K}$ des Vorsteuerungsparameters in die Übertragungsfunktionen G_{uw} und G_{ew} des geschlossenen Kreises gebildet werden. Entsprechend ergeben sich die Linienelemente

$$\begin{aligned}
G_{\lambda uw} &= \lambda \cdot G_{uw}(K_{sw}) + (1 - \lambda) \cdot G_{uw}(\tilde{K}_{sw}) \\
&= \lambda \cdot \frac{K_{sw} + G_r}{1 + G_r \cdot G_s} + (1 - \lambda) \cdot \frac{\tilde{K}_{sw} + G_r}{1 + G_r \cdot G_s} \\
G_{\lambda ew} &= \lambda \cdot G_{ew}(K_{sw}) + (1 - \lambda) \cdot G_{ew}(\tilde{K}_{sw}) \\
&= \lambda \cdot \frac{1 - K_{sw} \cdot G_s}{1 + G_r \cdot G_s} + (1 - \lambda) \cdot \frac{1 - \tilde{K}_{sw} \cdot G_s}{1 + G_r \cdot G_s}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

⁴Siehe auch Definition 5.1 im folgenden Kapitel.

mit $\lambda \in [0, 1]$. Der Vorsteuerungsparameter geht in beiden Fällen affin in die Koeffizienten des Zählerpolynom ein und (4.33) kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} G_{\lambda_{uw}} &= \frac{(\lambda \cdot K_{sw} + (1 - \lambda) \cdot \tilde{K}_{sw}) + G_r}{1 + G_r \cdot G_s} = \frac{K_{\lambda_{sw}} + G_r}{1 + G_r \cdot G_s} \\ G_{\lambda_{ew}} &= \frac{1 - (\lambda \cdot K_{sw} + (1 - \lambda) \cdot \tilde{K}_{sw}) \cdot G_s}{1 + G_r \cdot G_s} = \frac{1 - K_{\lambda_{sw}} \cdot G_s}{1 + G_r \cdot G_s}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

mit

$$K_{\lambda_{sw}} = \lambda \cdot K_{sw} + (1 - \lambda) \cdot \tilde{K}_{sw}. \quad (4.35)$$

Die Übertragungsfunktionen (4.34) besitzen die gleiche Struktur wie die Elemente der Definitionsmenge (4.23). Wenn weiterhin $K_{\lambda_{sw}} \in \mathbb{K}$ gilt, kann entsprechend Definition 4.4 gefolgert werden, dass

$$\begin{aligned} G_{uw}(K_{\lambda_{sw}}) &\in \mathbf{dom} J_{uw} \\ G_{ew}(K_{\lambda_{sw}}) &\in \mathbf{dom} J_{ew}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$K_{\lambda_{sw}}$ in (4.35) beschreibt das Linienelement zwischen zwei Elementen $K_{sw}, \tilde{K}_{sw} \in \mathbb{K}$. Da (4.36) und somit $K_{\lambda_{sw}} \in \mathbb{K}$ für zwei beliebige $K_{sw}, \tilde{K}_{sw} \in \mathbb{K}$ gelten muss, um Konvexität der Definitionsmengen $\mathbf{dom} J_{uw}$ und $\mathbf{dom} J_{ew}$ zu zeigen, muss entsprechend gelten, dass das Linienelement $K_{\lambda_{sw}}$ gemäß (4.35) für beliebige $K_{sw}, \tilde{K}_{sw} \in \mathbb{K}$ ein Element der Menge \mathbb{K} ist.

Hieraus kann geschlossen werden, dass \mathbb{K} eine konvexe Menge sein muss, damit (4.36) gilt. Entsprechend kann der folgende Satz über die Konvexität der Definitionsmengen (4.23) formuliert werden:

Satz 4.6. *Die Definitionsmengen $\mathbf{dom} J_{uw}$ und $\mathbf{dom} J_{ew}$ sind konvex, falls die Menge \mathbb{K} , über die die Vorsteuerungsparametrierung durchgeführt wird, eine konvexe Menge ist.*

4.5.2 PID-Parametrierung

Zwei Elemente der Definitionsmengen (4.24) können durch Einsetzen zweier verschiedener PID-Parametervektoren $\mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r \in \mathbb{P}$ in die Übertragungsfunktionen G_{ud} beziehungsweise G_{ed} des geschlossenen Kreises gebildet werden. Entsprechend ergeben sich die Linienelemente

$$\begin{aligned} G_{\lambda_{ud}} &= \lambda \cdot G_{ud}(\mathbf{p}_r) + (1 - \lambda) \cdot G_{ud}(\tilde{\mathbf{p}}_r) \\ &= -\lambda \cdot \frac{G_r(\mathbf{p}_r) \cdot G_s}{1 + G_r(\mathbf{p}_r) \cdot G_s} - (1 - \lambda) \cdot \frac{G_r(\tilde{\mathbf{p}}_r) \cdot G_s}{1 + G_r(\tilde{\mathbf{p}}_r) \cdot G_s} \\ G_{\lambda_{ed}} &= \lambda \cdot G_{ed}(\mathbf{p}_r) + (1 - \lambda) \cdot G_{ed}(\tilde{\mathbf{p}}_r) \\ &= -\lambda \cdot \frac{G_s}{1 + G_r(\mathbf{p}_r) \cdot G_s} - (1 - \lambda) \cdot \frac{G_s}{1 + G_r(\tilde{\mathbf{p}}_r) \cdot G_s} \end{aligned} \quad (4.37)$$

mit $\lambda \in [0, 1]$. Aus den Gleichungen (4.29) und (4.30) ist ersichtlich, dass die unterschiedlichen PID-Parameter affin in das Nennerpolynom der jeweiligen Übertragungsfunktion eingehen. Die Übertragungsfunktionen $G_{\lambda\text{ud}}$ und $G_{\lambda\text{ed}}$ der Linienelemente können entsprechend nur durch Erweiterung der Elemente $G_{\text{ud}}(\mathbf{p}_r)$ und $G_{\text{ud}}(\tilde{\mathbf{p}}_r)$ beziehungsweise $G_{\text{ed}}(\mathbf{p}_r)$ und $G_{\text{ed}}(\tilde{\mathbf{p}}_r)$ auf den jeweiligen Hauptnenner gebildet werden.

Eine Hauptnennererweiterung führt jedoch stets zu einer Änderung der Struktur der betrachteten Übertragungsfunktionen, so dass nach Definition 4.5 gefolgert werden muss, dass

$$\begin{aligned} G_{\lambda\text{ud}} &\notin \mathbf{dom} J_{\text{ud}} \\ G_{\lambda\text{ed}} &\notin \mathbf{dom} J_{\text{ed}}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

da sich die Linienelemente (4.37) nicht allein durch Variation der PID-Parameter in den Übertragungsfunktionen (4.22) bilden lassen und somit die Konvexität der Definitionsmenge nicht so einfach wie im Fall der Vorsteuerungs-Parametrierung gezeigt werden kann.

Jedoch quantifizieren die zur Parametrierung verwendeten Indizes lediglich das Ein-Ausgangs-Verhalten der betrachteten Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises und nicht deren Struktur. Diese Invarianz der Indizes gegenüber einer Strukturänderung der Übertragungsfunktionen, die das Ein-Ausgangs-Verhalten nicht ändern, kann genutzt werden, um wie folgt beschrieben eine *konvexe Repräsentanz* der Definitionsmengen (4.24) zu finden.

Invarianz der Indizes

Bemerkung 4.9 beschreibt die Invarianz der betrachteten Indizes gegenüber einer Multiplikation der Elemente ihrer Definitionsmenge mit einem Polynom in Zähler und Nenner und somit einer Strukturänderung, wie sie sich durch eine Hauptnennererweiterung ergibt.

Bemerkung 4.9. *Die betrachteten Indizes sind invariant gegenüber einer Multiplikation der Elemente ihrer Definitionsmenge mit einem stabilen (Quasi-) Polynom $P(s)$ in Zähler und Nenner und der damit einhergehenden Strukturänderung*

$$\begin{aligned} J(G_{\text{ud}}(\mathbf{p}_r)) &= J\left(G_{\text{ud}}(\mathbf{p}_r) \cdot \frac{P(s)}{P(s)}\right) \\ J(G_{\text{ed}}(\mathbf{p}_r)) &= J\left(G_{\text{ed}}(\mathbf{p}_r) \cdot \frac{P(s)}{P(s)}\right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Bemerkung 4.9 kann aus der Feststellung hergeleitet werden, dass die Eineindeutigkeit der inversen Laplace-Transformation wie in Satz 4.3 beschrieben hier nur für Übertragungsfunktionen mit teilerfremden Zähler- und Nennerpolynomen gilt. So kann, wie in (4.40), durch Kürzen des Terms $P(s)$ gezeigt werden, dass das Ausgangssignal einer

Übertragungsfunktion G_{yu} angeregt durch das Signal u gleich dem Ausgangssignal der Übertragungsfunktion $G_{yu} \cdot \frac{P}{\tilde{P}}$ bei gleicher Anregung ist:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(G_{yu} \cdot \frac{P}{\tilde{P}} \cdot u \right) = \mathcal{L}^{-1}(G_{yu} \cdot u). \quad (4.40)$$

Durch eine Erweiterung wie in Bemerkung 4.9 können für jedes durch einen PID-Parametervektor \mathbf{p}_r beschriebenes Element $G_{ud}(\mathbf{p}_r)$ beziehungsweise $G_{ed}(\mathbf{p}_r)$ unendlich viele Erweiterungen $G_{ud}(\mathbf{p}_r) \cdot \frac{P(s)}{\tilde{P}(s)}$ beziehungsweise $G_{ed}(\mathbf{p}_r) \cdot \frac{P(s)}{\tilde{P}(s)}$ des Elements gefunden werden, die jeweils das gleiche Ein-Ausgangs-Verhalten wie das ursprüngliche Element besitzen, sich jedoch in ihrer Struktur von diesem unterscheiden. Dieser Freiheitsgrad kann bei der Definition der Elemente der Mengen $\mathbf{dom} J_{ud}$ beziehungsweise $\mathbf{dom} J_{ed}$ verwendet werden und motiviert die Formulierung von Bemerkung 4.10, wonach eine *konvexe Repräsentanz* der Definitionsmengen gefunden werden kann.

Konvexe Repräsentanz der Definitionsmengen

Bemerkung 4.10 beschreibt die Existenz einer *konvexen Repräsentanz* der jeweiligen Definitionsmenge und beruht auf der Definition einer konvexen Menge unter Ausnutzung des oben beschriebenen Freiheitsgrades bei der Definition der Elemente der Mengen $\mathbf{dom} J_{ud}$ beziehungsweise $\mathbf{dom} J_{ed}$ in (4.24).

Bemerkung 4.10. *Konvexe Repräsentanzen der Mengen $\mathbf{dom} J_{ud}$ und $\mathbf{dom} J_{ed}$ können gefunden werden, wenn Erweiterungsterme $P(s)$ und $\tilde{P}(s)$ für alle zwei Elemente $G_{ud}, \tilde{G}_{ud} \in \mathbf{dom} J_{ud}$ beziehungsweise $G_{ed}, \tilde{G}_{ed} \in \mathbf{dom} J_{ed}$ gefunden werden können, so dass sich die zwei Erweiterungen $G_{ud} \cdot \frac{P}{\tilde{P}}$ und $\tilde{G}_{ud} \cdot \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}}$ beziehungsweise $G_{ed} \cdot \frac{P}{\tilde{P}}$ und $\tilde{G}_{ed} \cdot \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}}$ sowie das Linienelement $G_{\lambda ud} = \lambda \cdot G_{ud} \cdot \frac{P}{\tilde{P}} + (1 - \lambda) \cdot \tilde{G}_{ud} \cdot \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}}$ beziehungsweise $G_{\lambda ed} = \lambda \cdot G_{ed} \cdot \frac{P}{\tilde{P}} + (1 - \lambda) \cdot \tilde{G}_{ed} \cdot \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}}$ zwischen ihnen nur in ihren Reglerparametervektoren aus der Menge \mathbb{P} , nicht jedoch in ihrer Struktur unterscheiden.*

Wie in Bemerkung 4.9 beschrieben, besitzt ein Element G_{ud} beziehungsweise G_{ed} und die jeweilige Erweiterung $G_{ud} \cdot \frac{P}{\tilde{P}}$ beziehungsweise $G_{ed} \cdot \frac{P}{\tilde{P}}$ das gleiche Ein-Ausgangs-Verhalten. Dies kann als Überbestimmung der Struktur der einzelnen Elemente der jeweiligen Definitionsmenge interpretiert werden. Aufgrund des gleichen Eingangs-Ausgangs-Verhaltens der bei der Parametrierung betrachteten Elemente können die in (4.24) beschriebenen Definitionsmengen $\mathbf{dom} J_{ud}$ beziehungsweise $\mathbf{dom} J_{ed}$ und ihre konvexen Repräsentanzen äquivalent als Definitionsmengen der Indizes verwendet werden. Sofern Erweiterungen und konvexe Repräsentanzen der Definitionsmengen wie in Bemerkung 4.10 beschrieben gefunden werden können, kann somit die jeweilige Repräsentanz anstelle der ursprünglichen Definitionsmenge verwendet, um die Konvexität der betrachteten Indizes zu zeigen.

Satz 4.7 formuliert, dass eine konvexe Repräsentanz der Definitionsmengen $\mathbf{dom} J_{ud}$ beziehungsweise $\mathbf{dom} J_{ed}$ gefunden werden kann und führt dies auf die Konvexität der Menge \mathbb{P} , über die die Parametrierung durchgeführt wird, zurück.

Satz 4.7. Eine konvexe Repräsentanz der Mengen $\mathbf{dom} J_{\text{ud}}$ und $\mathbf{dom} J_{\text{ed}}$ gemäß Bemerkung 4.10 kann gefunden werden, wenn die Menge \mathbb{P} konvex ist.

Beweis: Für alle zwei Elemente $G_{\text{ud}}(\mathbf{p}_r)$, $\tilde{G}_{\text{ud}}(\tilde{\mathbf{p}}_r) \in \mathbf{dom} J_{\text{ud}}$ beziehungsweise $G_{\text{ed}}(\mathbf{p}_r)$, $\tilde{G}_{\text{ed}}(\tilde{\mathbf{p}}_r) \in \mathbf{dom} J_{\text{ed}}$ der ursprünglichen Definitionsmenge können mit

$$P(s, \tilde{\mathbf{p}}_r) = s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_i} + (\tilde{K}_d s^2 + \tilde{K}_p s + \tilde{K}_i) \cdot Z_s(s) \quad (4.41)$$

$$\tilde{P}(s, \mathbf{p}_r) = s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_i} + (K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s(s) \quad (4.42)$$

und stabilisierenden Reglerparametern

$$\mathbf{p}_r = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_r = \begin{bmatrix} \tilde{K}_p \\ \tilde{K}_i \\ \tilde{K}_d \end{bmatrix} \in \mathbb{P} \quad (4.43)$$

stabile (Quasi-)Polynome $P(s, \tilde{\mathbf{p}}_r)$, $\tilde{P}(s, \mathbf{p}_r)$ gefunden werden, mit denen sich die Erweiterungen

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\text{ud}} &= G_{\text{ud}} \cdot \frac{P(s, \tilde{\mathbf{p}}_r)}{P(s, \tilde{\mathbf{p}}_r)} & \hat{\tilde{G}}_{\text{ud}} &= \tilde{G}_{\text{ud}} \cdot \frac{\tilde{P}(s, \mathbf{p}_r)}{\tilde{P}(s, \mathbf{p}_r)} \\ \hat{G}_{\text{ed}} &= G_{\text{ed}} \cdot \frac{P(s, \tilde{\mathbf{p}}_r)}{P(s, \tilde{\mathbf{p}}_r)} & \hat{\tilde{G}}_{\text{ed}} &= \tilde{G}_{\text{ed}} \cdot \frac{\tilde{P}(s, \mathbf{p}_r)}{\tilde{P}(s, \mathbf{p}_r)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{G}}_{\text{ud}} &= - \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s(s) \cdot s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_i}}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} - \dots \\ &\quad - \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot (\tilde{K}_d s^2 + \tilde{K}_p s + \tilde{K}_i) \cdot Z_s^2(s)}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\text{ud}} &= - \frac{(\tilde{K}_d s^2 + \tilde{K}_p s + \tilde{K}_i) \cdot Z_s(s) \cdot s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_i}}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} - \dots \\ &\quad - \frac{(\tilde{K}_d s^2 + \tilde{K}_p s + \tilde{K}_i) \cdot (K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot Z_s^2(s)}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

und

$$\hat{G}_{\text{ed}} = - \frac{s^2 \cdot Z_s(s) \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_i} + s \cdot Z_s^2(s) \cdot (\tilde{K}_d s^2 + \tilde{K}_p s + \tilde{K}_i)}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} \quad (4.47)$$

$$\hat{\tilde{G}}_{\text{ed}} = - \frac{s^2 \cdot Z_s(s) \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_i} + s \cdot Z_s^2(s) \cdot (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} \quad (4.48)$$

ergeben.

Ein Linienelement zwischen den beiden erweiterten Elementen (4.45) und (4.46) bezie-

hungsweise (4.47) und (4.48) kann mit $\lambda \in [0, 1]$ geschrieben werden als

$$\hat{G}_{\lambda\text{ud}} = \lambda \hat{G}_{\text{ud}} + (1 - \lambda) \hat{\hat{G}}_{\text{ud}} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{(K_{d\lambda}s^2 + K_{p\lambda}s + K_{i\lambda}) \cdot Z_s(s) \cdot s \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t}}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} - \dots \\ &\quad \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i) \cdot (\tilde{K}_d s^2 + \tilde{K}_p s + \tilde{K}_i) \cdot Z_s^2(s)}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\hat{G}_{\lambda\text{ed}} = \lambda \hat{G}_{\text{ed}} + (1 - \lambda) \hat{\hat{G}}_{\text{ed}} \quad (4.51)$$

$$= - \frac{s^2 \cdot Z_s(s) \cdot N_s(s) \cdot e^{sT_t} + s \cdot Z_s^2(s) \cdot (K_{d\lambda}s^2 + K_{p\lambda}s + K_{i\lambda})}{P(s) \cdot \tilde{P}(s)}, \quad (4.52)$$

wobei in (4.50)

$$K_{d\lambda} = \lambda K_d + (1 - \lambda) \tilde{K}_d, \quad K_{p\lambda} = \lambda K_p + (1 - \lambda) \tilde{K}_p, \quad K_{i\lambda} = \lambda K_i + (1 - \lambda) \tilde{K}_i \quad (4.53)$$

und in (4.52)

$$K_{d\lambda} = \lambda \tilde{K}_d + (1 - \lambda) K_d, \quad K_{p\lambda} = \lambda \tilde{K}_p + (1 - \lambda) K_p, \quad K_{i\lambda} = \lambda \tilde{K}_i + (1 - \lambda) K_i \quad (4.54)$$

gilt. Aus dem Vergleich von (4.50) sowie (4.45) und (4.46) beziehungsweise (4.52) sowie (4.47) und (4.48) kann gefolgert werden, dass sich die Übertragungsfunktionen wie in Bemerkung 4.10 gefordert nur in ihren PID-Parametern, nicht jedoch in ihrer Struktur unterscheiden. Wird weiterhin angenommen, dass

$$\mathbf{p}_{r\lambda} = \begin{bmatrix} K_{p\lambda} \\ K_{i\lambda} \\ K_{d\lambda} \end{bmatrix} \in \mathbb{P} \quad \forall \mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r \in \mathbb{P} \quad (4.55)$$

für die beiden Fälle (4.53) und (4.54) gilt, so kann mit den Erweiterungstermen (4.41) und (4.42) eine konvexe Repräsentanz der Definitionsmengen $\mathbf{dom} J_{\text{ud}}$ beziehungsweise $\mathbf{dom} J_{\text{ed}}$ gemäß Bemerkung 4.10 gefunden werden.

Die Erweiterungsterme P und \tilde{P} können mit (4.41) und (4.42) für beliebige zwei Elemente aus $\mathbf{dom} J_{\text{ud}}$ und $\mathbf{dom} J_{\text{ed}}$ gefunden werden. Die Forderung $\mathbf{p}_{r\lambda} \in \mathbb{P}$ für alle $\mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r \in \mathbb{P}$ in (4.55) ist immer dann für beliebige $\mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r$ erfüllt, wenn \mathbb{P} eine konvexe Menge ist, da $\mathbf{p}_{r\lambda}$ mit $\lambda \in [0, 1]$ in beiden Fällen (4.53) und (4.54) ein Linienelement zwischen den Elementen \mathbf{p}_r und $\tilde{\mathbf{p}}_r$ beschreibt. ■

Satz 4.7 formuliert, dass die Existenz einer konvexen Repräsentanz der Definitionsmengen $\mathbf{dom} J_{\text{ud}}$ beziehungsweise $\mathbf{dom} J_{\text{ed}}$ gemäß Bemerkung 4.10 die Konvexität der Menge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ bedingt. Satz 4.7 kann durch Nullsetzen eines oder mehrerer PID-Parameter äquivalent für PI-, PD-, P-, I-, oder D-Regler bewiesen werden und auch für diese Fälle auf die Konvexität der Menge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ beziehungsweise $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$, über die Parametrierung durchgeführt wird, zurückgeführt werden.

Bemerkung 4.11.

Aus (4.50) und (4.52) ist ersichtlich, dass die Polynome der Übertragungsfunktionen der Linienelemente für $\lambda \in (0, 1)$ teilerfremd sind und somit gemäß der Eineindeutigkeit der Laplace-Transformation nicht durch Variation der PID-Parameter in den Übertragungsfunktionen G_{ud} beziehungsweise G_{ed} des Regelkreises dargestellt werden können. Jedoch bedingt die Existenz der konvexen Repräsentanz der Definitionsmenge, wie im Beweis des Satzes 4.7 gezeigt, nicht die Implementierung solcher erweiterten Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises, die aufgrund der festen Struktur der Elemente der ursprünglichen Definitionsmenge nicht möglich ist.

Da bei der PID-Parametrierung lediglich das Ein-Ausgangsverhalten der Elemente (4.45) - (4.48) betrachtet wird und dieses äquivalent durch die Elemente G_{ud} beziehungsweise G_{ed} der Definitionsmengen (4.24) dargestellt werden kann, ist eine Implementierung der erweiterten Übertragungsfunktionen (4.45) - (4.48) oder (4.50) - (4.52) nicht notwendig und die Existenz einer konvexen Repräsentanz der Definitionsmenge kann entsprechend verwendet werden, um die Konvexität der Definitionsmenge (4.24) auf die Konvexität der Parametermenge \mathbb{P} zurückzuführen.

Vielmehr ist die konvexe Repräsentanz als ein Gedankenexperiment zu verstehen, das zeigt, dass Übertragungsfunktionen mit gleicher Struktur⁵ existieren, anhand derer sich durch Variation der PID-Parameter sowohl die Elemente mit dem Ein-Ausgangsverhalten der Elemente der ursprünglichen Definitionsmenge (4.24) als auch die Linienelemente zwischen diesen darstellen lassen, sofern die Menge \mathbb{P} konvex ist.

Stabilität des geschlossenen Kreises

Gemäß Bemerkung 4.8 müssen die jeweils betrachteten Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises, welche die Elemente der Definitionsmengen der Indizes bei der Parametrierung bilden, eingangs-ausgangs-stabil sein, damit (4.4) und somit die Konvexität der betrachteten Indizes gilt.

Aus (4.27) - (4.28) ist ersichtlich, dass der Vorsteuerungsparameter K_{sw} keinen Einfluss auf die Lage der Nullstellen des Nennerpolynoms und somit auf die Stabilität des geschlossenen Kreises hat. Entsprechend kann zur Parametrierung eine beliebige konvexe Menge \mathbb{K} gewählt werden, beispielsweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sofern während der Vorsteuerungs-Parametrierung ein stabilisierender PID-Parametervektor verwendet wird.

Aus (4.27) - (4.30) ist ersichtlich, dass die Reglerparameter K_p , K_i und K_d Einfluss auf die Stabilität des geschlossenen Kreises haben. Wird angenommen, dass für die betrachtete Kombination aus Regler und Strecke eine Menge an Reglerparametern \mathbb{P}_{stab} existiert, die den geschlossenen Kreis stabilisieren, so kann die Parametrierung über die Menge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}_{\text{stab}}$ durchgeführt werden. Weiterhin kann dem Beweis des Satzes 4.7 entnommen werden, dass für die Konvexität der betrachteten Parametrierungsprobleme die Konvexität der Menge \mathbb{P} notwendig ist.

Nachdem in diesem Kapitel gezeigt wurde, dass die Konvexität der Parametermengen über die die Parametrierung durchgeführt wird für die Konvexität der betrachteten gü-

⁵Siehe (4.45) - (4.48) und (4.50) - (4.52).

teoptimalen Vorsteuerungs- und PID-Parametrierungsprobleme notwendig ist, werden im folgenden Kapitel Methoden zur Ermittlung dieser Mengen für PID-Regler sowie Techniken zur Prüfung der Konvexität der Mengen beschrieben.

5 Menge der stabilisierenden PID-Parameter

Um einen sicheren und zerstörungsfreien Betrieb der zu regelnden Strecke sowie finite Werte der Güteindizes sicherzustellen, müssen die Variablen der betrachteten PID-Parametrierungsprobleme auf die Menge der stabilisierenden PID-Parameter beschränkt werden. Weiterhin wird im vorherigen Kapitel dieser Arbeit hergeleitet, dass Konvexität dieser Parametermenge notwendig ist, damit die betrachteten Parametrierungsprobleme konvex sind.

Die Bestimmung und analytische Beschreibung der Menge von stabilisierenden PID-Parametern für beliebige SISO-Strecken hat in den letzten zwei Dekaden einige Beachtung in der Forschung erfahren, sodass heute umfassende theoretische Erkenntnisse und erste Software-Implementierungen der hierzu hergeleiteten Verfahren zur Verfügung stehen.

Erste Ansätze zur analytischen Beschreibung der Menge von stabilisierenden Parametern für Regler mit fester Struktur finden sich im Aufsatz von *Ho u. a., 1996* und für PID-Regler bei *Ho u. a., 1997*. Die dort dargelegten Methoden basieren auf einer generalisierten Form des Hermite-Biehler-Theorems und ermöglichten erstmals eine analytische Beschreibung der Menge der stabilisierenden PID-Parametern für beliebige totzeitfreie SISO-Strecken. Eine erste Anwendung dieser Methoden für eine totzeitbehaftete Strecke erster Ordnung zeigen *Silva u. a., 2001* und *Xu u. a., 2003* für totzeitbehaftete Strecken beliebiger Ordnung und einer in einem Intervall angegebenen Totzeit.

Parallel wurden von *Ackermann, 2002* beziehungsweise *Bajcinca, 2001; Bajcinca u. a., 2002* Methoden entwickelt, um die Grenzen, an denen die Pole eines geschlossenen PID-Regelkreises die Stabilitätsgrenze überschreiten, als Funktionen der PID-Parameter auszudrücken. Basierend auf der Erkenntnis von *El'sgol'ts u. a., 1973*, dass sich die Wurzeln eines Polynoms bei stetiger Änderung der Koeffizienten stetig ändern, wird bereits von *Bajcinca u. a., 2002* die Unterteilung (D-Dekomposition) des PID-Parameterraumes in Regionen mit einer festen Anzahl instabiler Wurzeln vorgeschlagen. Die Methode der D-Dekomposition wird ebenfalls von *Hohenbichler, 2009a; Hohenbichler, 2009b* zur Bestimmung der Menge aller stabilisierenden PID-Parameter für totzeitbehaftete und totzeitfreie SISO-Strecken verwendet. Weiterhin wurden die dort beschriebenen Methoden und Techniken in der frei verfügbaren Matlab-Toolbox *PIDrobust*¹ implementiert, die eine Visualisierung der Menge der stabilisierenden PID-Parameter ermöglicht.

¹Weiter Informationen zur Toolbox und eine Bezugsquelle finden sich bei *Hohenbichler, 2009a*.

Sämtliche vorgestellten Methoden betrachten einen PID-Regler wie in (2.1) mit drei freien Parametern K_p , K_i und K_d und finden eine analytische Beschreibung der Stabilitätsgrenzen in der K_i - K_d -Ebene. Weiterhin wird eine Rasterung über Intervalle von stabilisierenden K_p -Parametern verwendet, um die gesamte Menge der stabilisierenden PID-Parameter zu bestimmen. Abgesehen vom selten auftretenden Fall eines ID-Reglers erlauben diese Methoden demnach keine analytische Beschreibung der Menge der stabilisierenden Reglerparameter für die häufig verwendeten PI- beziehungsweise PD-Regler mit nur zwei freien Parametern.

Hierzu wurde von *Tan, 2005* beziehungsweise *Tan u. a., 2006* gezeigt, wie die Ortskurve der Stabilitätsgrenze für PI-Regler als planare parametrische Funktion dargestellt werden kann. Dieses Vorgehen ermöglicht die analytische Beschreibung der Grenze der Menge der stabilisierenden Reglerparameter für solche Regler und wird deshalb in diesem Kapitel detailliert beschrieben und für PD-Regler erweitert. Im Anschluss wird in diesem Kapitel beschrieben, wie sich die Mengen der stabilisierenden Reglerparameter visuell und analytisch auf Konvexität überprüfen lassen. Zur analytischen Prüfung werden in diesem Kapitel Verfahren für totzeitfreie beziehungsweise totzeitbehaftete Strecken präsentiert, welche auf dem Hurwitz-Kriterium beziehungsweise den Eigenschaften der den Stabilitätsrand beschreibenden planar parametrischen Kurven basiert.

5.1 Problemformulierung

Um sicherzustellen, dass die zur Parametrierung verwendeten Güteindizes finite Werte annehmen, müssen die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises, von den stimulierten Eingängen auf die Signale, auf denen die Indizes berechnet werden, stabil sein. Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Indizes werden auf dem Regelfehler $e(t)$ beziehungsweise der Stellgröße $u(t)$ berechnet, deren Laplace-Transformierte sich für einen geschlossenen Kreis gemäß Abbildung 2.2 zu

$$\begin{aligned} E(s) &= G_{ew} \cdot W(s) + G_{ed} \cdot D(s) \\ U(s) &= G_{uw} \cdot W(s) + G_{ud} \cdot D(s) \end{aligned} \quad (5.1)$$

ergeben, mit dem Sollwert-Eingang $W(s)$ und dem Störsignal-Eingang $D(s)$. Mit (2.1) und (2.3) sowie $Z_r = K_d s^2 + K_p s + K_i$ und $\tilde{Z}_s = Z_s \cdot e^{-sT_t}$ können die Übertragungs-

funktionen aus (5.1) geschrieben werden als

$$G_{\text{ew}} = \frac{1 - K_{\text{sw}} \cdot G_{\text{s}}}{1 + G_{\text{r}} \cdot G_{\text{s}}} = \frac{N_{\text{s}}s - K_{\text{sw}}\tilde{Z}_{\text{s}}}{N_{\text{s}}s + \tilde{Z}_{\text{s}}Z_{\text{r}}} \quad (5.2)$$

$$G_{\text{ed}} = -\frac{G_{\text{s}}}{1 + G_{\text{r}} \cdot G_{\text{s}}} = -\frac{\tilde{Z}_{\text{s}}s}{N_{\text{s}}s + \tilde{Z}_{\text{s}}Z_{\text{r}}} \quad (5.3)$$

$$G_{\text{uw}} = \frac{G_{\text{r}} + K_{\text{sw}}}{1 + G_{\text{r}} \cdot G_{\text{s}}} = \frac{Z_{\text{r}}N_{\text{s}} + K_{\text{sw}}N_{\text{s}}s}{N_{\text{s}}s + \tilde{Z}_{\text{s}}Z_{\text{r}}} \quad (5.4)$$

$$G_{\text{ud}} = -\frac{G_{\text{r}} \cdot G_{\text{s}}}{1 + G_{\text{r}} \cdot G_{\text{s}}} = -\frac{\tilde{Z}_{\text{s}}Z_{\text{r}}}{N_{\text{s}}s + \tilde{Z}_{\text{s}}Z_{\text{r}}}. \quad (5.5)$$

Aus (5.2) - (5.5) ist ersichtlich, dass alle betrachteten Übertragungsfunktionen das gleiche charakteristische (Nenner-)Polynom

$$\Delta = N_{\text{s}}s + \tilde{Z}_{\text{s}}Z_{\text{r}} \quad (5.6)$$

besitzen. Entsprechend genügt es somit zum Nachweis der Stabilität aller Übertragungsfunktionen (5.2) - (5.5) zu zeigen, dass das charakteristische Polynom (5.6) nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzt.

Für die hier betrachteten zeitinvarianten Streckenübertragungsfunktionen kann die Lage dieser Wurzeln allein durch eine Änderung der PID-Parameter verändert werden. Es existiert folglich eine Menge an PID-Parametern $\mathbb{P}_{\text{stab}} \subseteq \mathbb{R}^3$, welche die Übertragungsfunktionen (5.2) - (5.5) stabilisieren und eine Menge an PID-Parametern $\mathbb{P}_{\text{nstab}} \subseteq \mathbb{R}^3$, welche (5.2) - (5.5) nicht stabilisieren. Hierbei kann jeweils eine der beiden disjunkten Mengen eine leere Menge sein.

Die Bestimmung und analytische Beschreibung der Menge \mathbb{P}_{stab} für Strecken gemäß (2.3) mit einer Totzeit $T_{\text{t}} \geq 0$ ist Gegenstand dieses Kapitels. Insbesondere werden hier solche Verfahren betrachtet, die eine analytische Beschreibung von \mathbb{P}_{stab} für die oftmals verwendeten PI- beziehungsweise PD-Regler erlauben. Weiterhin werden Methoden zur Prüfung dieser Mengen auf Konvexität vorgestellt und es wird gezeigt, wie die Menge der robust stabilisierenden Reglerparameter für eine vorgegebene Phasen- und Amplitudenreserve gefunden werden kann.

5.2 Methode zur Ermittlung der stabilisierenden PID-Regler-Parameter

Von *Tan, 2005* wurden Techniken zur Bestimmung der Menge \mathbb{P}_{stab} entwickelt, welche auf der Beschreibung der Ortskurve der Stabilitätsgrenze des Polynoms (5.6) basieren.

Bestimmung der Ortskurve der Stabilitätsgrenze

Zur Beschreibung der Ortskurve der Stabilitätsgrenze $\Delta(s) = 0$ werden die Polynome Z_s und N_s in ihre geraden und ungeraden Potenzen von $s = j\omega$ zerlegt, sodass sich diese zu

$$\begin{aligned} Z_s(s = j\omega) &= Z_{sg}(-\omega^2) + j\omega Z_{su}(-\omega^2) \\ N_s(s = j\omega) &= N_{sg}(-\omega^2) + j\omega N_{su}(-\omega^2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

ergeben. Mit Gleichung (5.7), der Beziehung $e^{-sT_t} = \cos(\omega T_t) - j \sin(\omega T_t)$ und unter Vernachlässigung des Bezeichners $(-\omega^2)$ ergeben sich Real- und Imaginärteil des Ausdrucks $\Delta(j\omega)$ zu

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\Delta(j\omega)) &= \left[-\omega^2 K_d Z_{sg} + K_i Z_{sg} - \omega^2 K_p Z_{su} \right] \cos(\omega T_t) + \dots \\ &\quad \left[\omega K_p Z_{sg} - \omega^3 K_d Z_{su} + \omega K_i Z_{su} \right] \sin(\omega T_t) - \omega^2 N_{su} \\ \operatorname{Im}(\Delta(j\omega)) &= \left[\omega K_p Z_{sg} - \omega^3 K_d Z_{su} + \omega K_i Z_{su} \right] \cos(\omega T_t) + \dots \\ &\quad \left[\omega^2 K_d Z_{sg} - K_i Z_{sg} + \omega^2 K_p Z_{su} \right] \sin(\omega T_t) + \omega N_{sg}. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man aus der Forderung $\Delta(j\omega) = 0$ mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= Z_{sg} \sin(\omega T_t) - \omega Z_{su} \cos(\omega T_t) \\ R(\omega) &= Z_{sg} \cos(\omega T_t) - \omega Z_{su} \sin(\omega T_t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \omega^2 N_{su} \\ Y(\omega) &= -\omega N_{sg} \end{aligned}$$

die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega K_p Q(\omega) + K_i R(\omega) - \omega^2 K_d R(\omega) &= X(\omega) \\ \omega K_p R(\omega) - K_i Q(\omega) + \omega^2 K_d Q(\omega) &= Y(\omega), \end{aligned} \quad (5.8)$$

welche die Ortskurve der Stabilitätsgrenze $\Delta(s) = 0$ als Funktion der Reglerparameter und der Frequenz ω beschreiben.

Um die Ortskurve als parametrische Funktion der jeweiligen PID-Parameter von der Frequenz zu beschreiben, müssen die Gleichungen (5.8) nach den jeweiligen Reglerpara-

metern aufgelöst werden und es ergeben sich

$$\begin{aligned}
K_p(\omega) &= \frac{X(\omega) \cdot Q(\omega) + Y(\omega) \cdot R(\omega)}{\omega \cdot Q^2(\omega) + \omega \cdot R^2(\omega)} \\
K_i(\omega) &= \frac{X(\omega) \cdot R(\omega) - Q(\omega) \cdot Y(\omega)}{Q^2(\omega) + R^2(\omega)} + K_d(\omega) \cdot \omega^2 \\
K_d(\omega) &= \frac{Q(\omega) \cdot Y(\omega) - X(\omega) \cdot R(\omega)}{\omega^2 Q^2(\omega) + \omega^2 R^2(\omega)} + K_i(\omega) \cdot \frac{1}{\omega^2}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Aus (5.9) beziehungsweise der Unterbestimmtheit des Gleichungssystems (5.8) ist ersichtlich, dass eine eindeutige Beschreibung der Stabilitätsgrenze in der K_p - K_i -Ebene nur für fixe K_d -Werte beziehungsweise in der K_p - K_d -Ebene nur für fixe K_i -Werte gelingt. Werden die Fälle $K_d = 0$ respektive $K_i = 0$ betrachtet, ergeben sich aus (5.9) die Stabilitätsgrenzen für einen PI- beziehungsweise PD-Regler.

Bestimmung der kritischen Frequenz

Die Frequenzvariable ω , welche per Definition über das Intervall $[0, \infty)$ variiert, kann auf ein endliches Intervall $[0, \omega_{\text{krit}}]$ beschränkt werden, siehe (*Tan, 2005*). Hierzu kann das Phasenrandkriterium, wie beispielsweise von *Lunze, 2006* beschrieben, verwendet werden. Demnach ist ein geschlossener Regelkreis immer dann stabil, wenn die Phase $\arg(G_o(j\omega))$ der Übertragungsfunktion $G_o(j\omega) = G_r(j\omega) \cdot G_s(j\omega)$ bei einer Verstärkung von $|G_o| = 1$ einen Wert von -180° beziehungsweise $-\pi$ noch nicht unterschritten hat. Für einen PI-Regler, dessen Phasengang im Bereich $-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$ verläuft, ergibt sich nach *Tan, 2005* entsprechend die kritische Frequenz ω_{krit} als die Frequenz, bei der die Phase der Streckenübertragungsfunktion $\arg(G_s)$ den Wert -180° beziehungsweise $\tilde{\varphi}_{\text{krit}} = -\pi$ annimmt.

Für einen PD-Regler, dessen Phasengang im Bereich $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ verläuft, kann die kritische Frequenz ω_{krit} demnach als die Frequenz, bei der die Phase der Streckenübertragungsfunktion $\arg(G_s)$ den Wert -270° beziehungsweise $\tilde{\varphi}_{\text{krit}} = -\frac{3}{2}\pi$ annimmt, definiert werden.

Zur Bestimmung der Phase $\arg(G_s)$ kann die Übertragungsfunktion der Strecke (2.3) als komplexe Zahl in Polarform dargestellt werden als

$$G_{j\omega} = r \cdot e^{j(\varphi - \omega T_t)} \tag{5.10}$$

mit der Phase

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \omega T_t = \tan^{-1} \left(\frac{\omega(Z_{\text{su}}N_{\text{sg}} - Z_{\text{sg}}N_{\text{su}})}{Z_{\text{sg}}N_{\text{sg}} + \omega^2 Z_{\text{su}}N_{\text{su}}} \right) - \omega T_t. \tag{5.11}$$

Entsprechend muss an der Stelle $\omega = \omega_{\text{krit}}$ gelten

$$\tan^{-1} \left(\frac{\omega_{\text{krit}}(Z_{\text{su}}N_{\text{sg}} - Z_{\text{sg}}N_{\text{su}})}{Z_{\text{sg}}N_{\text{sg}} + \omega_{\text{krit}}^2 Z_{\text{su}}N_{\text{su}}} \right) - \omega_{\text{krit}} T_t = \tilde{\varphi}_{\text{krit}} \tag{5.12}$$

beziehungsweise

$$f(\omega) = \tan(\omega_{\text{krit}}T_t + \tilde{\varphi}_{\text{krit}}) - \frac{\omega_{\text{krit}}(Z_{\text{su}}N_{\text{sg}} - Z_{\text{sg}}N_{\text{su}})}{Z_{\text{sg}}N_{\text{sg}} + \omega_{\text{krit}}^2 Z_{\text{su}}N_{\text{su}}} = 0. \quad (5.13)$$

Die kritische Frequenz ω_{krit} kann demnach als die Lage der ersten Nullstelle der Funktion $f(\omega)$ in $\omega \in (0, \frac{\pi - \tilde{\varphi}_{\text{krit}}}{T_t})$ gefunden werden.

Stabilitätsgrenzen im stationären Fall

Gemäß *Tan, 2005* kann eine weitere Stabilitätsgrenze aus der Betrachtung des Nenner-Polynoms $\Delta(j\omega)$ für den stationären Fall $\omega = 0$ gewonnen werden. Die Stabilitätsgrenze für den stationären Fall bestimmt sich aus

$$\Delta(j\omega = 0) = 0. \quad (5.14)$$

Für einen PI-Regler ergibt sich das Nenner-Polynom zu

$$\Delta(j\omega) = j\omega N_s(j\omega) + (K_i + K_p j\omega) Z_s e^{-j\omega T_t} \quad (5.15)$$

und somit

$$\Delta(j\omega = 0) = K_i Z_s = 0 \quad (5.16)$$

beziehungsweise für Strecken ohne differenzierendes Verhalten und somit $Z_s(j\omega = 0) \neq 0$ zu der Linie

$$K_i = 0. \quad (5.17)$$

Für einen PD-Regler ergibt sich das Nenner-Polynom zu

$$\Delta(j\omega) = j\omega N_s(j\omega) + j\omega(K_p + K_d j\omega) Z_s e^{-j\omega T_t} \quad (5.18)$$

und somit die nichttriviale Nullstelle zu

$$N_s(j\omega = 0) + K_p Z_s(j\omega = 0) = 0 \quad (5.19)$$

beziehungsweise für Strecken ohne differenzierendes Verhalten zu der Linie

$$K_p = -\frac{N_s(j\omega = 0)}{Z_s(j\omega = 0)}. \quad (5.20)$$

Prüfung der Menge auf stabilisierende Eigenschaft der Parameter

Die Ortskurven (5.9) in Kombination mit der Linie (5.17) beziehungsweise (5.20) teilen in den meisten Fällen den jeweils betrachteten Regler-Parameterraum in die zwei disjunkten Mengen \mathbb{P}_{stab} und $\mathbb{P}_{\text{nstab}}$. Die Elemente / Reglerparameter der Menge \mathbb{P}_{stab} stabilisieren den geschlossenen Kreis, wohingegen die Elemente aus $\mathbb{P}_{\text{nstab}}$ zu einem instabilen Verhalten des geschlossenen Kreises führen. Um zu prüfen, welche der Mengen

der Menge der stabilisierenden Reglerparameter \mathbb{P}_{stab} entspricht, genügt es, ein Element einer der beiden Mengen auf die stabilisierende Eigenschaft der jeweiligen Parameter zu prüfen. Dies kann beispielsweise durch die Simulation der Sprungantwort einer der in Abschnitt 5.1 gezeigten Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises für Reglerparameter aus einer der beiden Mengen geprüft werden.

Anwendung für PID-Regler mit drei freien Parametern

Sofern die Menge \mathbb{P}_{stab} für einen PID-Regler mit drei freien Parametern bestimmt werden soll, kann die gezeigte Methode, wie von *Tan, 2005* beziehungsweise *Hohenbichler, 2009a* gezeigt, durch die Rasterung eines Parameters erweitert werden. Hierbei handelt es sich jedoch um einen rein grafischen Ansatz zur Bestimmung der Menge.

Abbildung 5.1 zeigt beispielhaft die Menge \mathbb{P}_{stab} aus Beispiel 5.1 für einen PID-Regler mit drei freien Parametern und eine Strecke gemäß (5.22), welche anhand der von *Hohenbichler, 2009a* beschriebene Matlab-Toolbox durch Rasterung des K_p -Parameters und Bestimmung der jeweiligen stabilisierenden Gebiete in der K_i - K_d -Ebene erzeugt wurde. Analytische Verfahren zur Bestimmung und Beschreibung von \mathbb{P}_{stab} für PID-Regler mit drei freien Parametern sind hingegen nicht bekannt und scheinen laut *Tan, 2005* unmöglich.

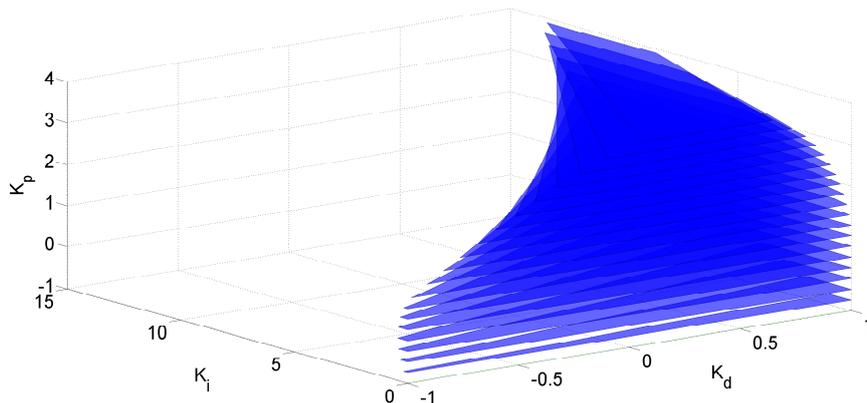


Abbildung 5.1: \mathbb{P}_{stab} für einen PID-Regler mit einer Strecke gemäß (5.22)

Beispiel 5.1.

Für einen PI-Regler mit

$$G_r = \frac{K_p s + K_i}{s} \quad (5.21)$$

und eine Strecke gemäß

$$G_s = \frac{1}{s+1} \cdot e^{-0,5s} \quad (5.22)$$

ergeben sich aus (5.7)

$$Z_{\text{sg}} = 1; \quad Z_{\text{su}} = 0; \quad N_{\text{sg}} = 1; \quad N_{\text{su}} = 1$$

und daraus

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) & R(\omega) &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ X(\omega) &= \omega^2 & Y(\omega) &= -\omega. \end{aligned}$$

Die Ortskurve der Stabilitätsgrenze kann somit durch die planare parametrische Funktion

$$\Omega(\omega) = [K_p(\omega), K_i(\omega)] \quad \forall \omega \in [0, \omega_{\text{krit}}] \quad (5.23)$$

beschrieben werden, mit

$$\begin{aligned} K_p(\omega) &= \omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ K_i(\omega) &= \omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + \omega^2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Frequenz ω_{krit} kann gemäß (5.12) als die Lösung der Gleichung

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\omega \quad (5.24)$$

beziehungsweise als die erste Nullstelle der Funktion

$$f(\omega) = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \omega \quad (5.25)$$

im Intervall $\omega \in (0, 4\pi)$ zu $\omega_{\text{krit}} = 3,6732$ bestimmt werden. Weiterhin kann, wie oben

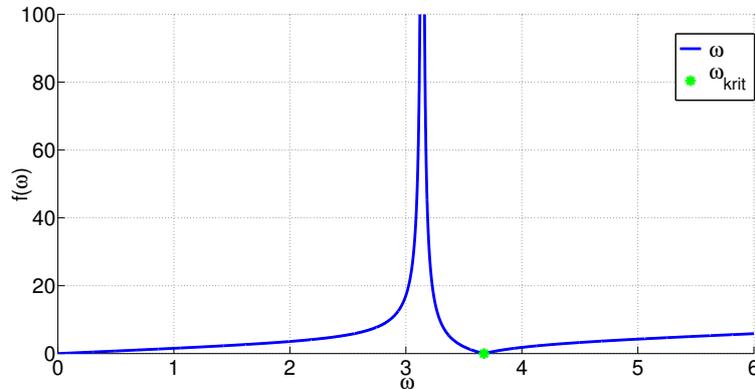


Abbildung 5.2: Verlauf der Funktion $f(\omega)$ gemäß (5.25) mit Nullstelle bei ω_{krit}

beschrieben, neben der Ortskurve (5.23) aus dem stationären Fall $\Delta(0) = 0$ die Linie $K_i = 0$ als weiterer Bestandteil des Stabilitätsrandes bestimmt werden.

Abbildung 5.3 zeigt die Ortskurve (5.23) mit $\omega = [0, \omega_{\text{krit}}]$ in blau sowie die Linie $K_i = 0$ zwischen den Punkten $K_p(0)$ und $K_p(\omega_{\text{krit}})$ in grün, welche gemeinsam den Rand der Menge \mathbb{P}_{stab} beschreiben. Die Ortskurve (5.23) mit $K_i(0) = 0 = K_i(\omega_{\text{krit}})$ beginnt und

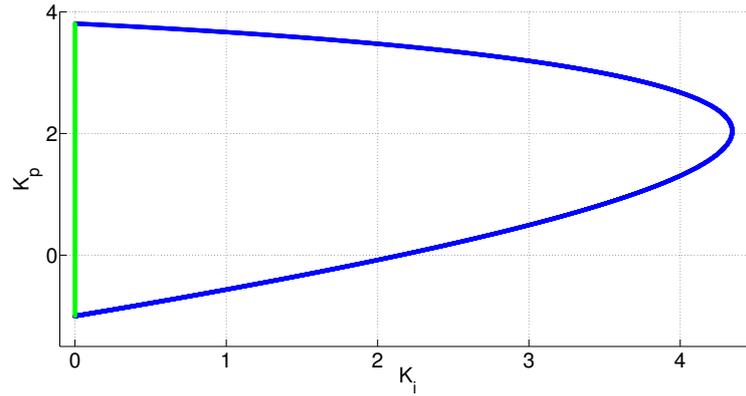


Abbildung 5.3: Stabilitätsgrenzen für den Regler (5.21) mit der Strecke (5.22)

endet auf der Linie $K_i = 0$ und begrenzt demnach mit dieser zusammen eine beschränkte Menge.

Aus Abbildung 5.3 ist ersichtlich, dass die gefundenen Grenzen den K_p - K_i -Parameterraum in die von der Grenze umschlossene Menge und den Rest des Parameterraums teilen. Sofern ein Punkt einer der Mengen den geschlossenen Kreis stabilisiert, entspricht diese Menge der gesuchten Menge \mathbb{P}_{stab} . Dies kann hier beispielsweise durch Simulation mit den Parametern $K_p = 1$ und $K_i = 1$ für die von der Stabilitätsgrenze umschlossene Menge gezeigt werden, für die der geschlossene Kreis wie in Abbildung 5.4 dargestellt stabiles Verhalten zeigt. Demnach entspricht die Menge innerhalb der Stabilitätsgrenze der Menge \mathbb{P}_{stab} und der Rest des Parameterraums der Menge $\mathbb{P}_{\text{nstab}}$.

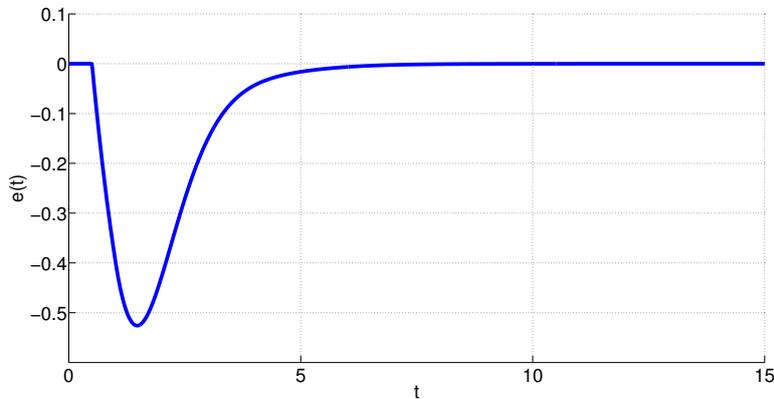


Abbildung 5.4: Einheitssprung-Antwort des geschlossenen Kreises G_{ed} mit $K_p = K_i = 1$

5.3 Prüfung der Menge auf Konvexität

In Kapitel 4 dieser Arbeit wird hergeleitet, dass die Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} notwendig für die Konvexität der betrachteten PID-Parametrierungsprobleme ist. In diesem Abschnitt werden deshalb Techniken zur Prüfung der Menge \mathbb{P}_{stab} auf Konvexität gezeigt.

5.3.1 Etwas Theorie zu konvexen Mengen

In diesem Unterabschnitt werden einige grundlegende Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie zu konvexen Mengen vorgestellt. Definition 5.1 sowie die Sätze 5.1 und 5.2 finden sich beispielsweise bei *Boyd u. a., 2004*. Die Sätze 5.3 und 5.4 finden sich samt Herleitung und Beweis bei *Liu u. a., 1997*.

Definition 5.1.

Eine Menge \mathbb{P} ist konvex, wenn mit $p, \tilde{p} \in \mathbb{P}$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$p_\lambda = \lambda p + (1 - \lambda)\tilde{p} \in \mathbb{P}. \quad (5.26)$$

Bemerkung 5.1.

Gleichung (5.26) beschreibt, dass das Linienelement p_λ zwischen zwei beliebigen Elementen p und \tilde{p} der Menge \mathbb{P} in der Menge \mathbb{P} liegen muss.

Satz 5.1.

Gegeben seien m konvexe Mengen

$$\mathbb{P}_i \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.27)$$

dann ist die Schnittmenge

$$\mathbb{P}_\cap = \bigcap_i \mathbb{P}_i \quad (5.28)$$

eine konvexe Menge.

Bemerkung 5.2.

Satz 5.1 wurde von Boyd u. a., 2004 (Kap. 2.3.1) hergeleitet und kann, wie dort beschrieben, auf die Schnittmenge beliebig vieler Mengen angewendet werden.

Satz 5.2.

Ein Polyeder \mathcal{P} , das gemäß (5.29) als Lösung einer finiten Anzahl linearer Gleichungen und Ungleichungen beschrieben werden kann, ist konvex.

$$\mathcal{P} = \left\{ x \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p \right\} \quad (5.29)$$

Bemerkung 5.3.

Ein Polyeder (5.29) ist die Schnittmenge einer finiten Anzahl von Halbräumen und Hyperebenen². Nach Boyd u. a., 2004 (Kap. 2.2.1 und 2.2.4) sind Hyperebenen affine Mengen und somit konvex und Halbräume ebenfalls konvex. Entsprechend kann mit Satz 5.1 gezeigt werden, dass ein Polyeder \mathcal{P} gemäß (5.29) stets eine konvexe Menge ist.

Satz 5.3.

Eine sich nicht selbst schneidende parametrische Kurve $\Omega(\alpha) = [x(\alpha), y(\alpha)]$ mit $\alpha \in [0, 1]$ ist Teil der Begrenzung einer konvexen Menge, wenn sie eine global konvexe Kurve ist.

Satz 5.4.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine sich nicht selbst schneidende planare parametrische Kurve $\Omega(\alpha) = [x(\alpha), y(\alpha)]$ mit $\alpha \in [0, 1]$ global konvex ist, ist die gleichzeitige Erfüllung der Ungleichungen (5.30) - (5.32) sowie der Gleichung (5.33).

$$\Omega'(\alpha) \times \Omega''(\alpha) \leq 0, \forall \alpha \in [0, 1] \quad (5.30)$$

$$(\Omega(\alpha) - \Omega(0)) \times \Omega'(\alpha) \leq 0, \forall \alpha \in [0, 1] \quad (5.31)$$

$$\Omega'(0) \times (\Omega(\alpha) - \Omega(0)) \leq 0, \forall \alpha \in [0, 1] \quad (5.32)$$

$$\Omega(0) \neq \Omega(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad (5.33)$$

Hierbei bezeichnet das '-Symbol die Ableitung nach α und der \times -Operator in den Gleichungen (5.30) - (5.32) ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \Omega'(\alpha) \times \Omega''(\alpha) &= \begin{vmatrix} x'(\alpha) & x''(\alpha) \\ y'(\alpha) & y''(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= x'(\alpha)y''(\alpha) - y'(\alpha)x''(\alpha). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Bemerkung 5.4.

Satz 5.4 wird von Liu u. a., 1997 hergeleitet und bewiesen und kann auf beliebige planare parametrische Kurven angewendet werden, wenn das Definitionsintervall der Kurve auf das Intervall $[0, 1]$ abgebildet wird.

5.3.2 Visuelle Prüfung

Die von Hohenbichler, 2009a beziehungsweise Tan, 2005 beschriebenen Methoden können zur Visualisierung der Menge \mathbb{P}_{stab} für beliebige totzeitbehaftete wie auch totzeitfreie SISO-Strecken verwendet werden. So bietet beispielsweise die von Hohenbichler, 2009a

²Hyperebenen entsprechen Linien in zweidimensionalen Räumen beziehungsweise Ebenen in dreidimensionalen Räumen.

beschriebene Matlab Toolbox ein einfach zu handhabendes Softwarewerkzeug zur Visualisierung von \mathbb{P}_{stab} für beliebige SISO-Strecken, wie beispielhaft in den Abbildungen 5.1 und 5.5 gezeigt.

Die einfachste Möglichkeit zur Prüfung der so gewonnenen Formen auf Konvexität ist die visuelle Prüfung. Hierzu kann ausgenutzt werden, dass gemäß Definition 5.1 die Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Elementen in \mathbb{P}_{stab} stets wieder in der Menge liegen muss. Entsprechend ist die Menge nichtkonvex, sofern zwei Elemente $\mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r \in \mathbb{P}_{\text{stab}}$ gefunden werden können, deren Verbindungslinie $\mathbf{p}_{r\lambda} = \lambda\mathbf{p}_r + (1 - \lambda)\tilde{\mathbf{p}}_r$ nicht wieder in der Menge liegt.

Beispiel 5.2.

Abbildung 5.5 zeigt beispielhaft die Menge \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler mit einem Verzögerungsglied erster Ordnung mit Totzeit als Strecke wie in Beispiel 5.1. Es ist ersichtlich, dass für diese Menge das Linienelement zwischen zwei beliebigen Elementen $\mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r \in \mathbb{P}_{\text{stab}}$ stets wieder in \mathbb{P}_{stab} liegt, hier beispielhaft für den Fall $\mathbf{p}_r = [0 \ 1]$, $\tilde{\mathbf{p}}_r = [2 \ 3]$ gezeigt, und somit Definition 5.1 erfüllt ist.

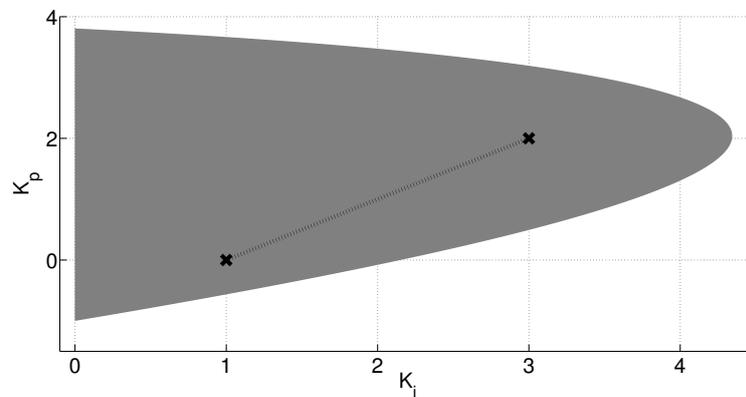


Abbildung 5.5: \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler mit $G_s = \frac{1}{s+1}e^{-0.5s}$

Als Beispiel einer nichtkonvexen Menge zeigt bereits Abbildung 5.1 die Menge \mathbb{P}_{stab} bei Verwendung eines PID-Reglers mit der gleichen Strecke. In diesem Fall ist auf Grund der nach innen gewölbten Form von \mathbb{P}_{stab} leicht ersichtlich, dass die Menge nicht konvex ist, da Elemente der Menge existieren, deren Verbindungslinie außerhalb von \mathbb{P}_{stab} liegt.

Eine Menge wie in Abbildung 5.1 ist ein typisches Beispiel für die oftmals nichtkonvexen Mengen \mathbb{P}_{stab} bei Verwendung von PID-Reglern mit drei freien Parametern. In diesem Falle ist daher meist die Approximation der Menge \mathbb{P}_{stab} durch eine oder mehrere konvexe Mengen, wie in Abschnitt 5.3.4 beschrieben, notwendig.

5.3.3 Analytische Prüfung

Es wurde bereits von *Hohenbichler, 2009a* beziehungsweise in den dort zitierten Quellen gezeigt, dass die Menge der stabilisierenden PID-Reglerparameter in der K_i - K_d -Ebene,

unabhängig vom K_p -Wert und der Übertragungsfunktion der Strecke, durch eine finite Anzahl an Geraden in dieser Ebene begrenzt wird. Mit Satz 5.2 und Bemerkung 5.3 kann hieraus geschlossen werden, dass für einen ID-Regler die Menge \mathbb{P}_{stab} stets konvex ist.

Bisher existieren jedoch keine Nachweise für Konvexität in der K_p - K_i -Ebene beziehungsweise der K_p - K_d -Ebene, womit die in der Praxis häufig vorkommenden Fälle der Parametrierung von PI und PD-Regler abgedeckt werden könnten. In diesem Abschnitt werden basierend auf dem Hurwitz-Kriterium³, der in Abschnitt 5.2 gezeigten analytischen Beschreibung von \mathbb{P}_{stab} sowie den theoretischen Grundlagen in Abschnitt 5.3.1 solche Methoden zur analytischen Prüfung der Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} für die in der Praxis oftmals verwendeten PI- und PD-Regler gezeigt.

Weiterhin wird die Anwendung der hergeleiteten Methoden in Beispielen für PI-Regler mit integrierender totzeitbehafteter und totzeitfreier Strecke demonstriert.

Totzeitfreie Strecken

Für Strecken ohne Totzeit kann das Hurwitz-Kriterium³ zur Bestimmung der Menge \mathbb{P}_{stab} beziehungsweise zur Überprüfung der Konvexität der Menge genutzt werden. Hierzu werden die durch das Hurwitz-Kriterium aufgestellten Bedingungen an die Koeffizienten des Nennerpolynoms zu Ungleichungen in den Reglerparametern umgeformt, welche die Grenzen der Menge der stabilisierenden Reglerparameter \mathbb{P}_{stab} beschreiben.

Das Vorgehen kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Bestimme die Hurwitzmatrix \mathbf{H} aus den Koeffizienten des Nennerpolynoms $\Delta(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$ des geschlossenen Kreises gemäß

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & a_{n-0} & a_{n-2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

2. Bestimme die Hauptminoren H_1, H_2, \dots, H_n der Matrix \mathbf{H} gemäß

$$H_1 = |a_{n-1}|, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_{n-0} & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (5.36)$$

3. Formuliere das Hurwitz-Kriterium als Ungleichungen

$$H_1 > 0, \quad H_2 > 0, \quad \dots, \quad H_n > 0 \quad (5.37)$$

und forme diese Ungleichungen nach den Reglerparametern um.

³Siehe beispielsweise bei *Parks, 1993*.

Die hieraus gewonnenen Ungleichungen in den Reglerparametern beschreiben die Menge \mathbb{P}_{stab} , die entsprechend auf Konvexität überprüft werden kann.

Beispiel 5.3.

Für einen PI-Regler

$$G_r = \frac{K_p s + K_i}{s} \tag{5.38}$$

und eine integrierende Strecke

$$G_s = \frac{K}{s} \tag{5.39}$$

mit $K \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ ergibt sich das Nennerpolynom des geschlossenen Kreises zu $s^2 + KK_p s + KK_i$ und die Hurwitz-Matrix zu

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} KK_p & 0 \\ 1 & KK_i \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

Hieraus kann das Hurwitz-Kriterium für die Hauptminoren wie folgt formuliert werden:

$$H_1 = KK_p > 0 \qquad H_2 = KK_p \cdot KK_i > 0. \tag{5.41}$$

Die Ungleichungen (5.41) beschreiben Bedingungen, unter denen das Polynom $s^2 + KK_p s + KK_i$ stabil ist und somit die Menge \mathbb{P}_{stab} beziehungsweise deren Grenzen.

Für eine Strecke mit bekanntem Parameter können die Ungleichungen (5.41) nach dem jeweiligen Reglerparameter umgestellt werden und es ergeben sich Grenzwerte der Parameter K_p und K_i , ab denen der geschlossene Kreis stabil ist. Anhand einer Fallunterscheidung des Vorzeichens des Streckenparameters K können (5.41) für einen beliebigen Streckenparameter nach den Reglerparametern umgestellt werden und es ergeben sich die in Tabelle 5.1 angegebenen linearen Ungleichungen zur Beschreibung der Menge \mathbb{P}_{stab} .

Tabelle 5.1: \mathbb{P}_{stab} für Regler (5.38) und Strecke (5.39)

	$K > 0$	$K < 0$
\mathbb{P}_{stab}	$K_p > 0$	$K_p < 0$
	$K_i > 0$	$K_i < 0$

Aus Tabelle 5.1 ist ersichtlich, dass \mathbb{P}_{stab} unabhängig vom Wert des Parameters K jeweils einem Quadranten des K_p - K_i -Raumes und somit einer unbeschränkten Menge entspricht. Weiterhin besagt Satz 5.2, dass ein solches durch Lösungen von zwei linearen Ungleichungen beschriebenes Polyeder stets eine konvexe Menge ist.

Somit kann anhand des Hurwitz-Kriteriums bewiesen werden, dass \mathbb{P}_{stab} für einen Regler gemäß (5.38) und eine Strecke gemäß (5.39) stets eine konvexe Menge ist, unabhängig vom Wert des Streckenparameters K .

Bemerkung 5.5.

Ein Nachweis der Konvexität von \mathbb{P}_{stab} anhand des Hurwitz-Kriteriums eignet sich besonders für Strecken mit geringer Nennerpolynomordnung. In diesem Fall können die

Bedingungen (5.37) in lineare Ungleichungen in den Reglerparametern umgeformt werden, die gemäß Satz 5.2 stets konvexe Mengen beschreiben.

So wird beispielsweise von Esch u. a., 2013a gezeigt, dass ein streckenparameterunabhängiger Beweis der Konvexität von \mathbb{P}_{stab} wie in Beispiel 5.3 anhand des oben vorgestellten Vorgehens für Strecken mit einer Nennerpolynomordnung von bis zu zwei gelingt.

Strecken mit Totzeit

In diesem Abschnitt wird demonstriert, wie die von Tan, 2005 beziehungsweise in Abschnitt 5.2 hergeleiteten parametrischen Gleichungen zur analytischen Beschreibung des Randes der Menge \mathbb{P}_{stab} verwendet werden können, um die Konvexität von \mathbb{P}_{stab} in der K_p - K_i -Ebene und der K_p - K_d -Ebene für die jeweils betrachtete Strecke zu prüfen.

Die Methode zur Prüfung der Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} für PI und PD-Regler basiert auf den Sätzen 5.1 und 5.3 sowie 5.4 und kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Bestimme die Obergrenze ω_{krit} des Intervalls $\omega = [0, \omega_{\text{krit}}]$ anhand von (5.13).
2. Bestimme anhand von (5.9) die planare parametrische Kurve $\Omega_{\text{pi}}(\omega) = [K_p(\omega), K_i(\omega)]$ beziehungsweise $\Omega_{\text{pd}}(\omega) = [K_p(\omega), K_d(\omega)]$, die den Rand der Menge \mathbb{P}_{stab} in der jeweiligen Reglerparameter-Ebene beschreibt.
3. Prüfe ob es sich bei $\Omega_{\text{pi}}(\omega)$ beziehungsweise $\Omega_{\text{pd}}(\omega)$ um eine offene, sich nicht selbst schneidende Kurve handelt, die für $\omega = [0, \omega_{\text{krit}}]$ auf der Geraden $K_i = 0$ beziehungsweise $K_p = -\frac{N_s(j\omega=0)}{Z_s(j\omega=0)}$ beginnt und endet.
4. Bilde das Intervall $\omega = [0, \omega_{\text{krit}}]$ auf das Intervall $\alpha = [0, 1]$ ab und prüfe, ob $\Omega_{\text{pi}}(\alpha)$ beziehungsweise $\Omega_{\text{pd}}(\alpha)$ die Bedingungen in (5.30) - (5.33) erfüllt.
5. Prüfe einen Punkt innerhalb oder außerhalb der geschlossenen Begrenzung auf die stabilisierende Eigenschaft der Parameter.

Sofern die Bedingungen in Schritt 3 und 4 erfüllt sind, ist nach Satz 5.3 und 5.4 bewiesen, dass $\Omega_{\text{pi}}(\omega)$ beziehungsweise $\Omega_{\text{pd}}(\omega)$ Teil der Begrenzung einer konvexen Menge ist. Aus Schritt 3 und den Ausführungen über die Stabilitätsgrenze im stationären Fall im Abschnitt 5.2 kann weiterhin gefolgert werden, dass die $K_i = 0$ beziehungsweise $K_p = -\frac{N_s(j\omega=0)}{Z_s(j\omega=0)}$ Linie die Begrenzung der Menge schließt.

Entsprechend ergibt sich die von der Kurve und der Linie begrenzte Menge als die Schnittmenge der von $K_i = 0$ beziehungsweise $K_p = -\frac{N_s(j\omega=0)}{Z_s(j\omega=0)}$ begrenzten Halbmengen, in der die Kurve $\Omega_{\text{pi}}(\omega)$ beziehungsweise $\Omega_{\text{pd}}(\omega)$ liegt, und der von der Kurve begrenzten Menge. Da eine Halbebene wie auch die von der Kurve begrenzte Menge konvexe Mengen sind, ist deren Schnittmenge nach Satz 5.1 ebenfalls konvex.

Im letzten Schritt muss überprüft werden, ob die Menge innerhalb oder außerhalb der geschlossenen Begrenzung der Menge \mathbb{P}_{stab} entspricht. Hierzu genügt es, wie schon in Abschnitt 5.2 beschrieben, ein Element einer der Mengen auf die stabilisierende Eigenschaft der Reglerparameter zu überprüfen.

Für Strecken mit bekannten Parametern kann das oben angegebene Verfahren direkt angewendet werden, um zu überprüfen, ob die Menge \mathbb{P}_{stab} für den betrachteten Regler konvex ist. Anhand von Fallunterscheidungen für die Werte der Streckenparameter kann das vorgestellte Verfahren, ähnlich wie bereits für totzeitfreie Strecken hergeleitet, auch auf Strecken mit bekannter Struktur und unbekanntem Parametern angewendet werden, um Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} für den betrachteten Regler unabhängig vom Wert der Streckenparameter zu zeigen.

Im folgenden Beispiel 5.4 wird das vorgestellte Verfahren verwendet, um Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} eines PI-Reglers für alle integrierenden Strecken mit Totzeit zu beweisen.

Beispiel 5.4.

Für einen PI-Regler

$$G_r = \frac{K_p s + K_i}{s} \tag{5.42}$$

und eine integrierende Strecke mit Totzeit

$$G_s = \frac{K}{s} e^{-sT_t} \tag{5.43}$$

und den Streckenparametern $K \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ sowie $T_t \in \mathbb{R}^{> 0}$ ergibt sich, wie in Abschnitt 5.2 gezeigt, die Grenze der Menge \mathbb{P}_{stab} aus zwei Teilen:

- Den ersten Teil stellt die Linie $K_i = 0$ dar, die unabhängig von der Streckenübertragungsfunktion aus der Betrachtung des stationären Falles gewonnen werden kann.
- Der zweite Teil kann gemäß (5.9) als planare parametrische Kurve $\Omega_{\text{pi}}(\omega) = [K_p(\omega), K_i(\omega)]$ im Intervall $\omega = (0, \omega_{\text{krit}})$ beschrieben werden mit

$$K_p(\omega) = \frac{\omega \sin(\omega T_t)}{K} \quad K_i(\omega) = \frac{\omega^2 \cos(\omega T_t)}{K} \tag{5.44}$$

und $\omega_{\text{krit}} = \frac{\pi}{2T_t}$ als kleinstes $\omega \in (0, \frac{2\pi}{T_t})$ welches (5.45) löst.

$$\tan(\omega T_t) = \infty \tag{5.45}$$

Aus der Kurve (5.44) ist ersichtlich, dass

$$K_i(\omega) \geq 0 \quad \forall K > 0 \quad K_i(\omega) \leq 0 \quad \forall K < 0 \tag{5.46}$$

sowie

$$K_i(0) = 0 = K_i\left(\frac{\pi}{2T_t}\right) \tag{5.47}$$

gilt und dass K_p mit $\omega \in (0, \frac{2\pi}{T_t})$ monoton steigend für $K > 0$ und monoton fallend für $K < 0$ ist. Dementsprechend ist die Kurve (5.44) eine offene, sich nicht selbst schneidende

de Kurve, die je nach Vorzeichen des Streckenparameters K entweder in der $K_i > 0$ oder der $K_i < 0$ Halbebene liegt. Weiterhin ist aus (5.47) ersichtlich, dass die Kurve (5.44) auf der $K_i = 0$ Achse beginnt und endet und somit mit dieser eine geschlossene Grenze bildet.

Um zu prüfen ob die Kurve (5.44) global konvex und somit die von ihr begrenzte Menge konvex ist, können die in Satz 5.3 und 5.4 angegebenen Bedingungen genutzt werden. Hierzu wird $\alpha = \frac{2\omega T_t}{\pi}$ gewählt, um das Intervall $\omega = [0, \frac{\pi}{2T_t}]$ auf das Intervall $\alpha = [0, 1]$ abzubilden. Wird die betrachtete Kurve (5.44) in die Bedingungen (5.30) - (5.32) eingesetzt, ergeben sich diese nach Vereinfachung zu

$$\frac{S_1(\alpha)}{8K^2} = \frac{-12\pi\alpha - \pi^3\alpha^3 + 4\pi\alpha \cos(\pi\alpha) + (8 - \pi^2\alpha^2) \sin(\pi\alpha)}{8K^2} \leq 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{S_2(\alpha)}{8T_t^2K^2} = \frac{\pi^2\alpha^2(-\pi\alpha + \sin(\pi\alpha))}{8T_t^2K^2} \leq 0 \quad (5.49)$$

$$0 \leq 0. \quad (5.50)$$

Aus (5.48) - (5.49) ist ersichtlich, dass die Terme $S_1(\alpha)$ und $S_2(\alpha)$ kleiner gleich Null sein müssen, um die Ungleichungen zu erfüllen.

Für die trigonometrischen Terme in $S_1(\alpha)$ und $S_2(\alpha)$ können anhand der Taylorreihen-näherung die folgenden Schranken gefunden werden:

$$\cos(\pi\alpha) \leq 1 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (5.51)$$

$$0 \leq \sin(\pi\alpha) \leq \pi\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (5.52)$$

Entsprechend finden sich die folgenden Schranken nach oben für die Zählerterme $S_1(\alpha)$ und $S_2(\alpha)$:

$$S_1(\alpha) \leq -12\pi\alpha - \pi^3\alpha^3 + 4\pi\alpha + 8\pi\alpha = -\pi^3\alpha^3 \leq 0 \quad (5.53)$$

$$S_2(\alpha) \leq \pi^2\alpha^2(-\pi\alpha + \pi\alpha) = 0. \quad (5.54)$$

Da der Ausdruck $\pi^3\alpha^3$ stets positiv ist, stellen (5.53) und (5.54) sicher, dass (5.48) - (5.50) erfüllt sind. Weiterhin ist ersichtlich, dass Gleichung (5.33) für offene, sich nicht selbst schneidende Kurven wie (5.44) stets erfüllt ist.

Entsprechend der Sätze 5.3 und 5.4 ist somit bewiesen, dass die Kurve (5.44) Teil der Begrenzung einer konvexen Menge ist. Aus (5.53) - (5.54) ist außerdem ersichtlich, dass sich die Schranken der Zählerterme unabhängig von den Streckenparametern zu Werten kleiner gleich Null ergeben und somit die Bedingungen (5.30) - (5.32) unabhängig von den Streckenparameterwerten erfüllt sind.

Die von der $K_i = 0$ Linie und der Kurve $\Omega_{pi}(\omega)$ begrenzte Menge ergibt sich als konvexe Schnittmenge der positiven K_i -Halbebene für $K > 0$ beziehungsweise der negativen K_i -Halbebene für $K < 0$ und der von der Kurve (5.44) begrenzten Menge, die in der jeweiligen Halbebene liegt. Abbildung 5.6 zeigt dies beispielhaft für eine Strecke nach (5.43) mit $K > 0$.

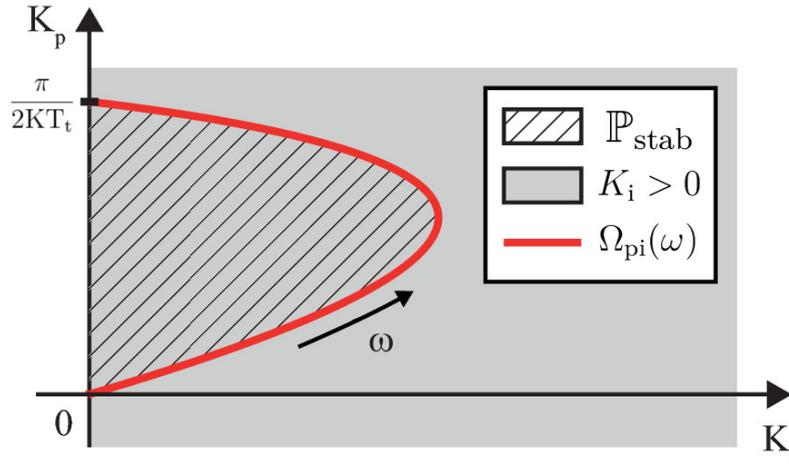


Abbildung 5.6: Zusammensetzung von \mathbb{P}_{stab}

Da die von der $K_i = 0$ Linie und der Kurve $\Omega_{\text{pi}}(\omega)$ gebildete Begrenzung geschlossen ist, ist die Menge \mathbb{P}_{stab} entweder die konvexe Menge innerhalb der Begrenzung oder die hierzu disjunkte Menge außerhalb der Begrenzung. Um zu zeigen, dass es sich bei der Menge im Inneren der Begrenzung um die Menge \mathbb{P}_{stab} der stabilisierenden Reglerparameter handelt, genügt es zu zeigen, dass ein Element aus der Menge den Regelkreis stabilisiert beziehungsweise ein Element außerhalb der Menge den Regelkreis nicht stabilisiert.

Hierzu kann ausgenutzt werden, dass gemäß (5.44) $K_p(0) = 0$ gilt und K_p im betrachteten Intervall $\omega \in [0, \omega_{\text{krit}}]$ monoton steigend für $K > 0$ und monoton fallend für $K < 0$ ist. Entsprechend liegen für $K > 0$ keine Reglerparameter mit $K_p < 0$ und für $K < 0$ keine Reglerparameter mit $K_p > 0$ in der Menge im Inneren der Begrenzung. Um zu prüfen, ob die Menge \mathbb{P}_{stab} innerhalb der Begrenzung liegt, genügt es demnach für eine beliebige Strecke mit $K > 0$ zu zeigen, dass ein PI-Regler mit $K_p < 0$ diese nicht stabilisiert beziehungsweise für eine beliebige Strecke mit $K < 0$ ein PI-Regler mit $K_p > 0$ diese nicht stabilisiert. Dies kann beispielsweise durch Simulation der Sprungantwort der Übertragungsfunktion (5.3) für die Regler / Strecken-Kombinationen

$$G_s = \frac{1}{s}e^{-s} \text{ mit } G_r = -1 + \frac{1}{s} \quad \text{bzw.} \quad G_s = -\frac{1}{s}e^{-s} \text{ mit } G_r = 1 - \frac{1}{s} \quad (5.55)$$

gezeigt werden.

Da beide Kombinationen (5.55) instabile Übertragungsfunktionen (5.3) ergeben, ist somit bewiesen, dass die Menge \mathbb{P}_{stab} stets die konvexe Menge innerhalb der von der $K_i = 0$ Linie und der Kurve $\Omega_{\text{pi}}(\omega)$ gebildeten Begrenzung ist.

Es ist anzumerken, dass dies unabhängig von den Streckenparameterwerten für alle PI-Regler mit totzeitbehafteten integrierenden Strecken gemäß (5.43) mit $K \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ sowie $T_t \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt.

Für Strecken höherer Ordnung mit unbekanntem Streckenparametern können Nachweise

zur Konvexität von \mathbb{P}_{stab} ähnlich des in Beispiel 5.4 gezeigten geführt werden, sofern obere Schranken der Terme in (5.30) - (5.32) gefunden werden können. Die Bestimmung dieser Schranken sollte in diesem Fall anhand von leistungsfähigen Computeralgebrasystemen für symbolische Mathematik unterstützt werden.

5.3.3.1 Eine Anmerkung

Erste Ansätze, die Menge \mathbb{P}_{stab} für PI-Regler auf Konvexität zu untersuchen, finden sich bereits in dem Übersichtsartikel von Åström u. a., 2001. Die Autoren geben dort – ohne Beweis und weitere Ausführungen – an, dass die Menge der stabilisierenden PI-Regler für stabile, monotone Strecken stets konvex ist: „For systems with monotone transfer functions the stability region is a convex set [...]“ (Åström u. a., 2001).

Eine monotone Strecke ist nach Hägglund u. a., 2002 durch einen Monotonizitäts-Index von $m = 1$ gekennzeichnet. Der Monotonizitäts-Index m ist hierbei definiert als das Verhältnis

$$m = \frac{\int_0^{\infty} g(t) dt}{\int_0^{\infty} |g(t)| dt}, \quad (5.56)$$

wobei $g(t)$ die Impulsantwort der betrachteten Strecke ist.

Die Berechnung des Monotonizitäts-Index aus einer simulierten Strecken-Impulsantwort stellt oftmals einen geringeren Aufwand dar, als die Anwendung der in diesem Kapitel angegebenen analytischen Verfahren.

Sofern die Aussage von Åström u. a., 2001 als allgemeingültig bewiesen werden kann, erlaubt diese somit eine positive Aussage über die Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} für PI-Parametrierungsprobleme. Jedoch lässt dies den Umkehrschluss einer nicht konvexen Menge \mathbb{P}_{stab} für Strecken mit $m \neq 1$ nicht zu, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.5.

Die Strecke

$$G_s = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (5.57)$$

besitzt ein stabiles konjugiert komplexes Polpaar bei $s_{1,2} = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ sowie eine Impulsantwort wie in Abbildung 5.7 gezeigt. Der Monotonizitäts-Index dieser Strecke kann mit (5.56) zu $m = 0,7197$ berechnet werden. Demnach ist die Strecke gemäß Hägglund u. a., 2002 nicht monoton und die Angabe aus Åström u. a., 2001 erlaubt keine positive Aussage über die Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler.

Anhand des Hurwitz-Kriteriums kann jedoch, wie bereits von Esch u. a., 2013a gezeigt, bewiesen werden, dass die Menge \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler und die Strecke (5.57) konvex ist. Entsprechend kann aus einem Monotonizitäts-Index von $m \neq 1$ nicht geschlossen werden, dass \mathbb{P}_{stab} für die Strecke mit PI-Regler nicht konvex ist.

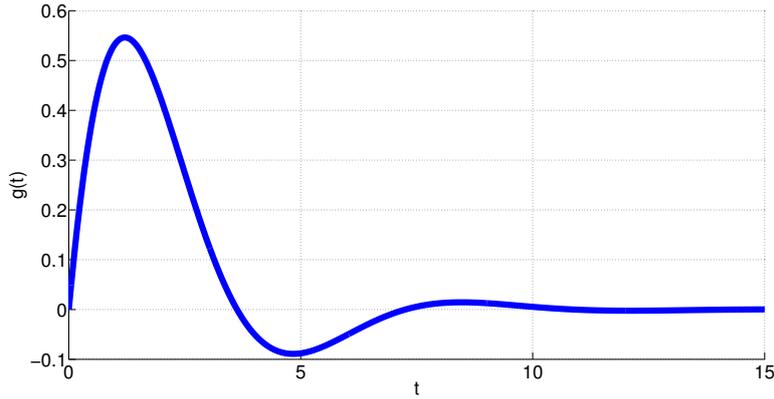


Abbildung 5.7: Impulsantwort der Strecke (5.57)

5.3.4 Vorgehen bei nicht konvexen Mengen

Für einige Kombinationen aus Regler und Strecke ergeben sich nichtkonvexe Mengen \mathbb{P}_{stab} . Dies gilt insbesondere für PID-Regler mit drei freien Parametern, für die häufig nichtkonvexe \mathbb{P}_{stab} , wie die in Abbildung 5.1 gezeigte, gefunden werden. Von *Tan u. a., 2006* wurde darüber hinaus gezeigt, dass auch bei der Betrachtung von PI-Reglern nichtkonvexe Mengen \mathbb{P}_{stab} für entsprechende Strecken gefunden werden können⁴. Gemäß den Ausführungen in Kapitel 4 kann bei einer nichtkonvexen Menge \mathbb{P}_{stab} nicht auf ein konvexes PID-Parametrierungsproblem geschlossen werden.

Um trotz einer nichtkonvexen Menge \mathbb{P}_{stab} ein konvexes PID-Parametrierungsproblem zu erlangen, kann \mathbb{P}_{stab} durch eine oder mehrere konvexe Teilmengen $\mathbb{P}_{\text{stab}\approx} \subset \mathbb{P}_{\text{stab}}$ approximiert und die Reglerparametrierung über diese Menge(n) durchgeführt werden. Bereits von *Silva u. a., 2005 (Kap. 9.4.2)* wurde hierzu beispielsweise ein Algorithmus entwickelt, anhand dessen eine konvexe Untermenge $\mathbb{P}_{\text{stab}\approx}$ für PID-Regler und Strecken mit bekannten Parametern als größtmögliche Kugel in einer nichtkonvexen Menge \mathbb{P}_{stab} ermittelt werden kann.

Für PID-Regler kann eine konvexe Untermenge $\mathbb{P}_{\text{stab}\approx}$ ebenfalls durch Angabe von Reglerparameter-Intervallen in der Form

$$\begin{aligned} K_{\text{pmin}} &\leq K_{\text{p}} \leq K_{\text{pmax}} \\ K_{\text{imin}} &\leq K_{\text{i}} \leq K_{\text{imax}} \\ K_{\text{dmin}} &\leq K_{\text{d}} \leq K_{\text{dmax}} \end{aligned}$$

angegeben werden, wobei die so beschriebene Menge $\mathbb{P}_{\text{stab}\approx}$ nach Satz 5.2 stets konvex ist. Diese Methode kann für PID-Regler mit ein, zwei oder drei freien Parametern durch Nullsetzen der jeweils nicht verwendeten Parameter angewendet werden.

⁴Siehe auch Beispiel 5.6.

Es existieren weiterhin Strecken, für die \mathbb{P}_{stab} aus mehreren nicht zusammenhängenden Mengen $\mathbb{P}_{\text{stab},i}$ besteht. In Abbildung 5.8 ist dies beispielhaft für den Fall $i = 2$, wie er bei der PI-Parametrierung für ein Verzögerungsglied erster Ordnung als Strecke auftritt, dargestellt.

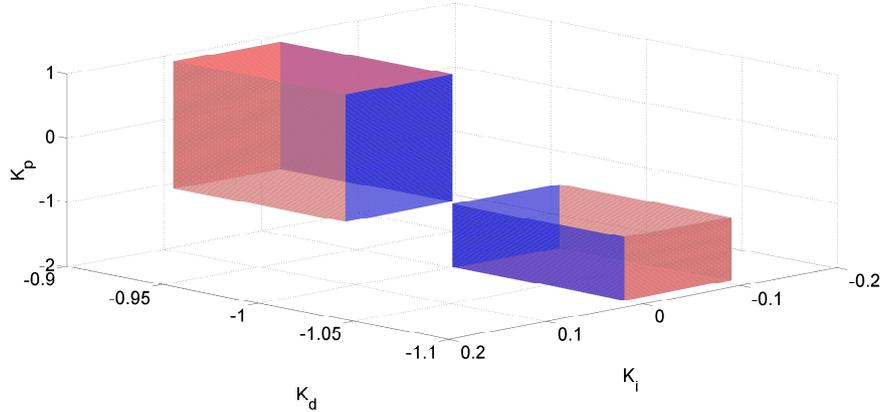


Abbildung 5.8: \mathbb{P}_{stab} für einen PID-Regler mit $G_s = \frac{1}{s+1}$

Sofern \mathbb{P}_{stab} aus mehreren nicht zusammenhängenden konvexen Mengen besteht, beziehungsweise durch mehrere nicht zusammenhängende konvexe Mengen approximiert wird, wird für jede der Mengen $\mathbb{P}_{\text{stab},i}$ eine Reglerparametrierung vorgenommen. Hieraus ergeben sich i güteoptimale Parametervektoren $\mathbf{p}_{r,i}$ und der global güteoptimale Parametervektor kann bestimmt werden zu

$$\mathbf{p}_r = \{\mathbf{p}_{r,i} \mid i = \arg \min_i (J(\mathbf{p}_{r,i}))\}. \quad (5.58)$$

Das folgende Beispiel zeigt den Fall einer nichtkonvexen Menge \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler wie von *Tan, 2005* angegeben. Weiterhin werden der daraus resultierende, nichtkonvexe Verlauf des IAE-Index sowie eine mögliche konvexe Approximation der Menge \mathbb{P}_{stab} gezeigt.

Beispiel 5.6.

Von *Tan, 2005* wurde die Strecke

$$G_s = \frac{s + 500}{s(s + 0,0325)(s^2 + 2,57s + 6667)} \quad (5.59)$$

als Beispiel für eine nichtkonvexe Menge \mathbb{P}_{stab} bei Betrachtung eines PI-Reglers angegeben. Abbildung 5.9 zeigt die Menge \mathbb{P}_{stab} für dieses Beispiel. Die Nichtkonvexität dieser Menge lässt sich leicht visuell überprüfen, beispielsweise anhand des Linienelementes zwischen den Elementen $[K_p = 2000; K_i = 500]$ und $[K_p = 16000; K_i = 3800]$, welches nicht komplett in der Menge liegt. Abbildung 5.10 zeigt den hieraus resultierenden, nichtkonvexen Verlauf des IAE-Index über \mathbb{P}_{stab} , gewonnen durch Anregung der Übertragungsfunktion G_{ed} durch einen Einheitsprung.

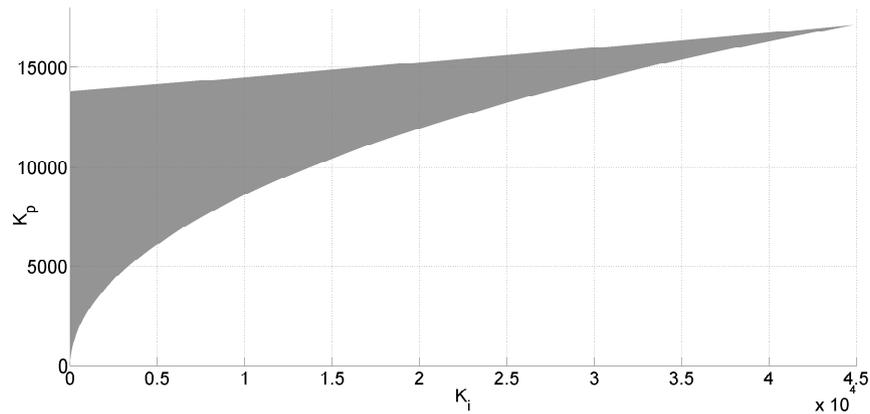


Abbildung 5.9: \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler mit der Strecke (5.59)

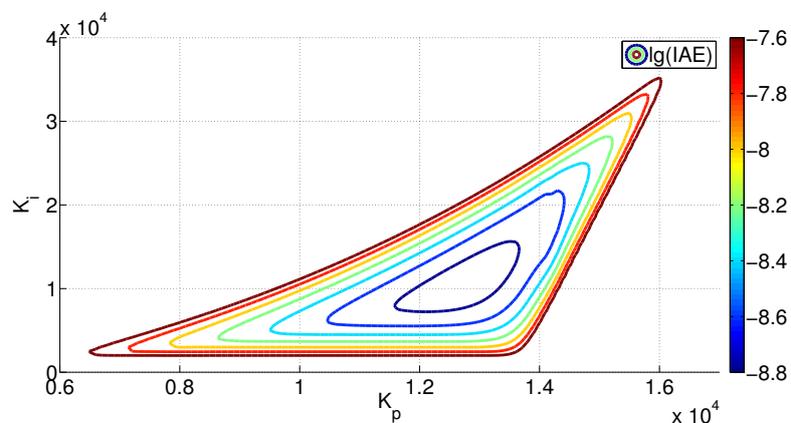


Abbildung 5.10: Verlauf des $\lg(IAE)$ über die nichtkonvexe Menge \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler mit der Strecke (5.59)

Für das in Abbildung 5.10 gezeigte Problem kann jedoch eine konvexe Teilmenge $\mathbb{P}_{\text{stab}\approx}$ durch die Intervalle

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10^3 &\leq K_p \leq 13,5 \cdot 10^3 \\ 2 \cdot 10^3 &\leq K_i \leq 11 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (5.60)$$

beschrieben werden, über die die Reglerparametrierung vorgenommen werden kann. Abbildung 5.11 zeigt den konvexen Verlauf des IAE-Index über diese konvexe Teilmenge $\mathbb{P}_{\text{stab}\approx}$.

5.4 Erweiterung auf robuste Stabilität

In den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels wurde gezeigt, wie die Menge der stabilisierenden PID-Regler Parameter für eine bekannte Strecke mit invarianten Para-

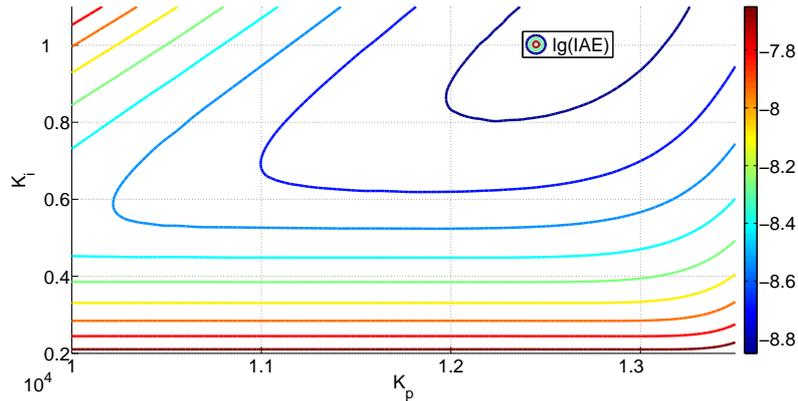


Abbildung 5.11: Verlauf des $\lg(IAE)$ über die konvexe Teilmenge $\mathbb{P}_{\text{stab}\approx}$ nach (5.60)

metern ermittelt werden kann. In der praktischen Anwendung ist die exakte Ermittlung der Streckenparameter jedoch oftmals schwierig bis unmöglich und es können nur ungefähre Werte der Streckenparameter angegeben werden oder die Streckenparameter ändern sich während des Betriebes. Entsprechend muss ein Regler für eine solche Strecke nicht mehr nur die Stabilität des Regelkreises für die nominale Strecke beziehungsweise deren Streckenparameter sicherstellen, sondern auch robuste Stabilität im Falle der Veränderung der Streckenparameter garantieren. Die Verstärkungs- beziehungsweise Phasenreserve, wie in (2.6) definiert, werden hierzu oftmals als Maßzahlen der robusten Stabilität eines Regelkreises verwendet. Entsprechend zeigt der folgende Abschnitt, wie die Bestimmung der Menge der stabilisierenden Reglerparameter auf die Bestimmung der Menge der robust stabilisierenden Reglerparameter, die neben Stabilität auch die Einhaltung einer vorgebbaren Verstärkungs- und Phasenreserve garantieren, erweitert werden kann.

Menge der robust stabilisierenden Reglerparameter

Wie beispielsweise von *Lunze, 2006* beschrieben, garantiert das Einhalten bestimmter Mindestwerte der Verstärkungs- und Phasenreserve die robuste Stabilität des Kreises gegenüber Unsicherheiten in den Streckenparametern. Die Verstärkungs- beziehungsweise Phasenreserve gibt den Abstand des Regelkreises von stabilitätskritischen Punkten in der Phase beziehungsweise Verstärkung an. Da eine Abweichung in den Streckenparametern den Abstand zu den stabilitätskritischen Punkten verändert, kann robuste Stabilität erlangt werden, indem die Reglerparametrierung für die nominale Strecke mit einer Verstärkungs- beziehungsweise Phasenreserve durchgeführt wird, die größer als die durch Parameterabweichung zu erwartende ist.

Es ist bekannt⁵, dass das Einhalten einer bestimmten Phasen- / Verstärkungsreserve auf die Stabilisierung mehrerer erweiterter Strecken zurückgeführt werden kann. Das Einhal-

⁵Siehe beispielsweise bei *Vilanova u. a., 2012 (S. 343)*.

ten einer Verstärkungsreserve g_m kann demnach durch die Stabilisierung der Strecke

$$G_{sg} = g_m \cdot G_s \quad (5.61)$$

erreicht werden. Das Einhalten einer Phasenreserve φ_m kann durch die Stabilisierung der Strecke

$$G_{s\varphi} = e^{-j\varphi_m} \cdot G_s \quad (5.62)$$

erlangt werden mit der Übertragungsfunktion der nominalen Strecke G_s .

Basierend hierauf wurde von *Tan, 2005* beschrieben, wie die in Abschnitt 5.2 gezeigten Methoden zur Bestimmung der Menge der robust stabilisierenden Reglerparameter $\mathbb{P}_{\text{robstab}}$ erweitert werden können. Hierzu werden die Menge \mathbb{P}_{stab} , welche die nominale Strecke G_s stabilisiert, sowie die Mengen $\mathbb{P}_{\text{robstab},g_m}$, welche die erweiterte Strecke (5.61) stabilisiert, und die Menge $\mathbb{P}_{\text{robstab},\varphi_m}$, welche die erweiterte Strecke (5.62) stabilisiert, bestimmt. Die Reglerparameter in der Schnittmenge dieser Mengen stabilisieren sowohl die nominale Strecke wie auch die erweiterten Strecken (5.61) und (5.62) und garantieren somit das Einhalten der vorgegebenen Amplituden- und Phasen-Reserve. Die gesuchte Menge der robust stabilisierenden Reglerparameter ergibt sich demnach als

$$\mathbb{P}_{\text{robstab}} = \mathbb{P}_{\text{stab}} \cap \mathbb{P}_{\text{robstab},g_m} \cap \mathbb{P}_{\text{robstab},\varphi_m}. \quad (5.63)$$

Wird die Regler-Parametrierung über die Menge $\mathbb{P}_{\text{robstab}}$ durchgeführt, so können güteoptimale Reglerparameter gefunden werden, die zudem die vorgegebene Phasen- und Verstärkungs-Reserve und somit Robustheit gegenüber Streckenparametervariation garantieren.

Das folgende Beispiel zeigt die Bestimmung der Mengen \mathbb{P}_{stab} , $\mathbb{P}_{\text{robstab},g_m}$ und $\mathbb{P}_{\text{robstab},\varphi_m}$ für einen PI-Regler mit totzeitbehafteter Strecke zweiter Ordnung und einer vorgegebenen Verstärkungs- und Phasenreserve.

Beispiel 5.7. *Tan, 2005*

Für einen PI-Regler mit der Strecke

$$G_s = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-s} \quad (5.64)$$

soll die Menge $\mathbb{P}_{\text{robstab}}$ der robust stabilisierenden Reglerparameter bestimmt werden, die eine Amplitudenreserve $g_m = 2,5$ und Phasenreserve $\varphi_m = 45^\circ$ bei gleichzeitiger Stabilisierung der nominalen Strecke ermöglichen.

Hierzu ergeben sich die Elemente der parametrischen Funktion $\Omega(\omega) = [K_p(\omega), K_i(\omega)]$ für alle $\omega \in [0, \omega_{\text{krit}}]$, die zusammen mit der $K_i = 0$ -Linie die Grenze der jeweiligen Menge an stabilisierenden Reglerparametern beschreibt, gemäß Abschnitt 5.2 wie folgt: Für die Grenze der Menge \mathbb{P}_{stab} ergeben sich

$$K_p(\omega) = 2\omega \sin(\omega) - (-\omega^2 + 1) \cos(\omega) \quad (5.65)$$

$$K_i(\omega) = \omega(-\omega^2 + 1) \sin(\omega) + 2\omega^2 \cos(\omega) \quad (5.66)$$

mit $\omega_{\text{krit}} = 1,307$. Für die Grenze der Menge $\mathbb{P}_{\text{robstab,gm}}$ ergeben sich diese zu

$$K_p(\omega) = 0,8\omega \sin(\omega) - 0,4(-\omega^2 + 1) \cos(\omega) \quad (5.67)$$

$$K_i(\omega) = 0,4\omega(-\omega^2 + 1) \sin(\omega) + 0,8\omega^2 \cos(\omega) \quad (5.68)$$

mit $\omega_{\text{krit}} = 1,307$ und für die Grenze der Menge $\mathbb{P}_{\text{robstab,\varphi_m}}$ zu

$$K_p(\omega) = 2\omega \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) - (-\omega^2 + 1) \cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.69)$$

$$K_i(\omega) = \omega(-\omega^2 + 1) \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) + 2\omega^2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.70)$$

mit $\omega_{\text{krit}} = 0,895$. Abbildung 5.12 zeigt die so gewonnenen Mengen \mathbb{P}_{stab} , $\mathbb{P}_{\text{robstab,gm}}$ und $\mathbb{P}_{\text{robstab,\varphi_m}}$.

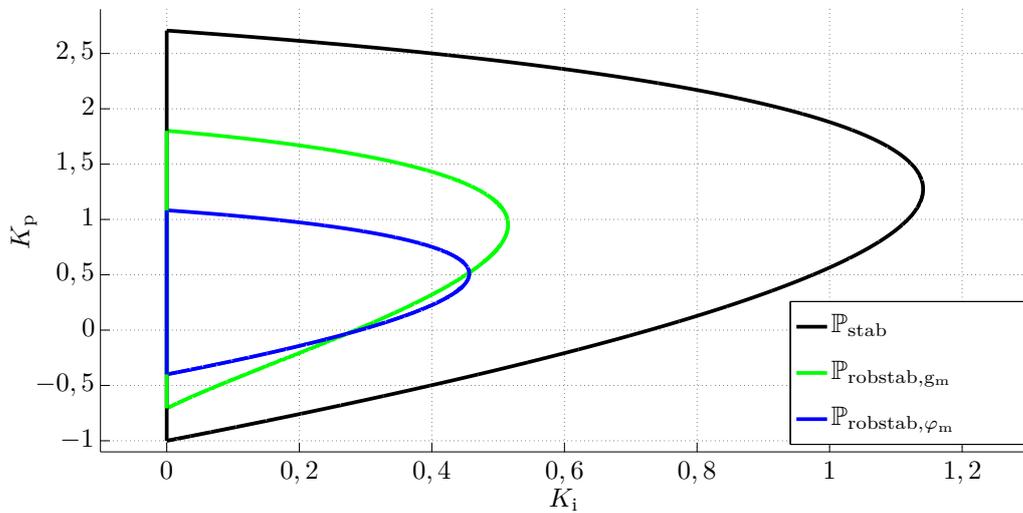


Abbildung 5.12: \mathbb{P}_{stab} sowie $\mathbb{P}_{\text{robstab,gm}}$ und $\mathbb{P}_{\text{robstab,\varphi_m}}$ aus Beispiel 5.7

Zwar garantiert das Einhalten einer vorgegebenen Phasen- und Verstärkungs-Reserve Robustheit gegenüber Streckenunsicherheiten, jedoch erlaubt dies nur eine qualitative Aussage über die Robustheit des geschlossenen Kreises (*Lunze, 2006, Kap. 8.6.*) und es existiert kein direkter Zusammenhang zwischen den Werten der Reserven und den zulässigen Abweichungen der Streckenparameter, für die der robust stabilisierend parametrisierte Regler den geschlossenen Kreis noch stabilisiert.

Um vorhandene Kenntnisse über die Größe möglicher Parameterabweichungen direkt in die Parametrierung einfließen zu lassen, wurden von *Könings u. a., 2013* Methoden, basierend auf der Verwendung randomisierter Algorithmen und dem hier gezeigten Verfahren zur güteoptimalen Parametrierung, präsentiert, die in Abschnitt 7.5 als Erweiterung des in dieser Arbeit entwickelten Parametrierungsverfahrens vorgestellt werden.

6 Iterative Algorithmen zur automatisierten Parametrierung

In diesem Kapitel werden Algorithmen vorgestellt, die das globale Optimum der in den Kapiteln 4 und 5 hergeleiteten Parametrierungsprobleme iterativ approximieren und somit eine automatisierte Parametrierung ermöglichen. Hierbei werden die vom Algorithmus benötigten Zielfunktionswerte (Indexwerte) durch Anregung des geschlossenen Regelkreises für verschiedene Variablen (Reglerparameter) bestimmt. Abbildung 6.1 zeigt schematisch die Verwendung eines Optimierungsalgorithmus zur automatisierten PID-Parametrierung. Hierzu muss eine Schnittstellenfunktion zwischen dem Algorithmus und dem Regelkreis vorhanden sein, welche die Anregung des Kreises im Sollwertsignal w beziehungsweise Störgrößensignal d sowie eine Verstellung der Reglerparameter \mathbf{p}_r und Messung des Regelfehlers e beziehungsweise der Stellgröße u sowie die Berechnung der jeweiligen Indizes J_e und J_u auf diesen Signalen ermöglicht.

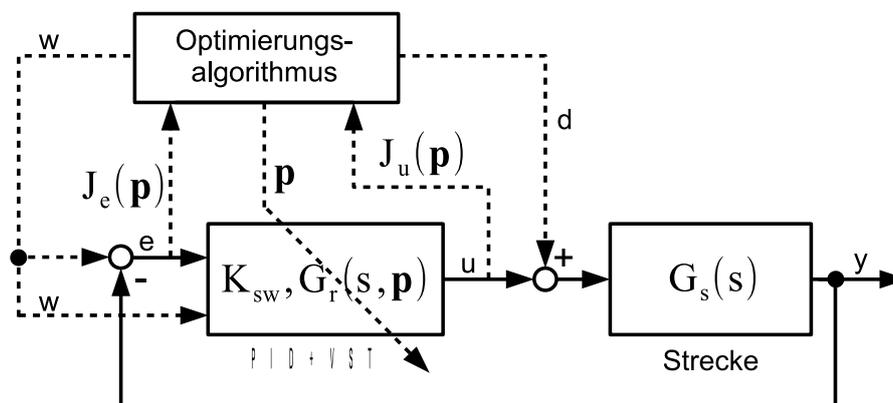


Abbildung 6.1: Optimierungsalgorithmus zur PID-Parametrierung mit Anregung des Regelkreises und Bestimmung der Indexwerte

In der Literatur wird eine Vielzahl von verschiedenen Algorithmen zur effizienten und schnellen Lösung konvexer Optimierungsprobleme beschrieben. Einen guten Überblick über bestehende Algorithmen geben beispielsweise *Boyd u. a., 2004* und *Alt, 2004* sowie die dort jeweils angegebenen Quellen.

Meist handelt es sich hierbei jedoch um gradientenbasierte Algorithmen, für deren Anwendung der Gradient der Zielfunktion als Funktion der Variablen bekannt sein muss. Im Falle der betrachteten Parametrierungsprobleme mit einem Güteindex als Zielfunktion

und den Regler-Parametern als Variablen ist dieser Gradient jedoch stets auch eine Funktion der Streckenübertragungsfunktion und somit der Streckenparameter. Dies macht die analytische Bestimmung des Gradienten für den Fall der nicht exakten Streckenmodellierung oder der in Beispiel 5.4 beschriebenen Fälle von unbekanntem Streckenparametern ungenau beziehungsweise unmöglich.

Ein Ansatz, den Gradienten für Parametrierungsprobleme ähnlich den hier betrachteten ohne Streckenkenntnis aus gezielten Anregungen des geschlossenen Kreises zu schätzen, findet sich als *Iterative Feedback Tuning*¹ bei *Hjalmarsson, 2002*. Jedoch erfordert dieses Vorgehen eine nicht unerhebliche Anzahl von speziellen Anregungssignalen des geschlossenen Regelkreises, was im praktischen Einsatz oftmals zeitintensiv oder nicht umsetzbar ist.

Es wurde bereits von *Garpinger, 2009* gezeigt, dass sich aufgrund der Unimodalität – beziehungsweise Konvexität – der betrachteten PID-Parametrierungsprobleme auch heuristische Suchalgorithmen wie der von *Nelder u. a., 1965* beschriebene Simplex Algorithmus zur Approximation der global güteoptimalen Reglerparameter eignen. Iterative heuristische Algorithmen wie der von *Nelder u. a., 1965* beschriebene bestimmen in jeder Iteration die absteigende Richtung und folgen dieser meist mit einer variablen Schrittweite, bis sie auf ein lokales Minimum konvergieren. Diese Algorithmen benötigen keine Information über den Gradienten der Zielfunktion, sondern bestimmen während der Laufzeit die absteigende Richtung der Zielfunktion aus Zielfunktionswerten für verschiedene Variablenwerte. Sofern die Parametrierungsprobleme konvex sind, ist nach Satz 4.1 jedes lokale Minimum ein globales Minimum und die Algorithmen approximieren entsprechend die global güteoptimalen Reglerparameter.

Der von *Garpinger, 2009* zur automatisierten Parametrierung vorgeschlagene Algorithmus von *Nelder u. a., 1965* ist jedoch zur heuristischen Lösung beliebiger (nichtkonvexer) Probleme konzipiert. Dies bedingt die Bestimmung mehrerer Zielfunktionswerte in jeder Iteration des Algorithmus, um hieraus den jeweils kleinsten Wert und somit die Laufrichtung des Algorithmus sowie die Änderung der Schrittweite / Simplexgröße zu errechnen. Dies kann gerade bei konvexen Probleme zu einer unnötig hohen Anzahl an Zielfunktionswert-Bestimmungen und somit zu einer hohen Anzahl an Anregungen des Regelkreises bei der automatisierten Parametrierung führen. In der praktischen Anwendung führt dies meist zu einem unverträglich hohen Zeitaufwand, weshalb sich der Nelder-Mead-Simplex Algorithmus hauptsächlich für simulative Untersuchungen, wie sie von *Garpinger, 2009* vorgenommen wurden, eignet.

In diesem Kapitel werden iterative heuristische Algorithmen zur Vorsteuerungs- und Regler-Parametrierung mit einer festen Schrittweite entwickelt, die durch die Wahl der Schrittweite einen Kompromiss zwischen der Anzahl der Anregungen und der erzielten Genauigkeit beim Auffinden des Optimums ermöglichen. Weiterhin nutzen die hier vorgeschlagenen Algorithmen die Konvexität der betrachteten Probleme aus, um den Rechenaufwand sowie die Anzahl der zur Richtungsbestimmung notwendigen Anregungen des geschlossenen Kreises gering zu halten. Die Algorithmen erzeugen zudem einfach

¹Siehe auch Abschnitt 3.3 der vorliegenden Arbeit.

nachvollziehbare Verläufe und können anhand einer Adaption der Schrittweite die global optimalen Reglerparameter beliebig genau approximieren.

6.1 Abstiegsverfahren zur Vorsteuerungs-Parametrierung

Bei der hier betrachteten Vorsteuerungs-Parametrierung handelt es sich, wie in Kapitel 4 gezeigt, um ein konvexes Optimierungsproblem mit einer Variablen, wobei die Zielfunktion in diesem Fall der gewählte Güteindex ist und der Vorsteuerungs-Parameter die Variable darstellt. Das globale Minimum einer solchen Funktion kann gemäß *Boyd u. a., 2004* anhand des allgemeinen Abstiegsverfahrens, wie es in Algorithmus 1 gezeigt ist, approximiert werden.

Algorithmus 1 : allgemeines Abstiegsverfahren aus (*Boyd u. a., 2004*)

Daten : Anfangswert $p_0 \in \text{dom } J$

solange *Abbruchbedingung nicht erfüllt tue*

 Bestimme die absteigende Richtung dir in den Zielfunktionswerten.

 Bestimme die Schrittweite Δ .

$p \leftarrow p + dir \cdot \Delta$

Ende

Der Algorithmus 2 zur Vorsteuerungs-Parametrierung implementiert das allgemeine Abstiegsverfahren und nutzt die Konvexität des Parametrierungsproblems aus, um die absteigende Richtung in den Zielfunktionswerten sowie das Überschreiten des globalen Minimums zu detektieren.

Zur Richtungsbestimmung in Algorithmus 2 wird ausgenutzt, dass gemäß *Boyd u. a., 2004* eine konvexe Funktion nur globale Minima besitzt, entsprechend kann die Funktion ihren minimalen Wert nur bei einem Variablenwert oder in einem Variablenintervall annehmen. Der global minimale Funktionswert einer konvexen Funktion mit einer Variablen liegt demnach von einem beliebigen Start-Variablenwert aus immer in Richtung absteigender Funktionswerte. Entsprechend genügt es für den hier betrachteten Fall die absteigende Richtung nur einmal zu Beginn zu bestimmen und anschließend in diese Richtung zu iterieren bis das globale Optimum gefunden wurde. Dies wurde in Algorithmus 2 in der Unterfunktion zur Bestimmung der absteigenden Richtung dir umgesetzt, die zu Beginn einmalig aufgerufen wird.

Als Abbruchkriterium wird in Algorithmus 2 das Überschreiten des globalen Minimums erkannt, sobald der Algorithmus von einem Startwert aus begonnen hat in absteigender

Richtung zu laufen. Da die konvexe Zielfunktion nur einen global minimalen Funktionswert besitzt, kann das Überschreiten des Minimums durch wieder ansteigende Funktionswerte erkannt werden. Als der für die gewählte Schrittweite optimale Wert K_{sw}^* wird der vor dem Überschreiten des Minimums erreichte Wert zurückgegeben.

Der Algorithmus iteriert mit einer festen Schrittweite, welche neben dem Anfangswert des Vorsteuerungs-Parameters als Eingangswert übergeben werden muss. Für eine höhere Genauigkeit bei der Approximation des Minimums kann der Algorithmus nach dem Konvergieren mit kleinerer Schrittweite und dem optimalen K_{sw}^* aus dem vorherigen Durchlauf als Anfangswert neu gestartet werden.

Algorithmus 2 : Abstiegsverfahren zur Vorsteuerungs-Parametrierung

Daten : Anfangswert $K_{sw0} \in \mathbb{K}$ und Schrittweite Δ

$i \leftarrow 1$

Funktion *Bestimme die absteigende Richtung dir:*

Bestimme $J_1 \leftarrow J(K_{sw0})$ und $J_2 \leftarrow J(K_{sw0} + \Delta)$.

wenn $J_2 - J_1 > 0$ **dann**

| $dir \leftarrow -1$

sonst wenn $J_2 - J_1 < 0$ **dann**

| $dir \leftarrow 1$

Ende

$K_{sw} = K_{sw0}$

solange *Abbruchbedingung nicht erfüllt tue*

| $i \leftarrow i + 1$

| $K_{sw} \leftarrow K_{sw} + dir \cdot \Delta$

| Bestimme $J_i(K_{sw})$.

| **wenn** $J_i > J_{i-1}$ **dann**

| | Abbruchbedingung ist erfüllt.

| **Ende**

Ende

Ergebnis : $K_{sw}^* \leftarrow K_{sw} - dir \cdot \Delta$

Der gezeigte Algorithmus 2 speichert während des Verlaufes einen alten Güteindexwert und berechnet in jedem Schritt die Differenz zweier Indexwerte und wertet deren Vorzeichen aus. Abgesehen von der Berechnung der Indexwerte benötigt der Algorithmus demnach wenig Rechen- und Speicherkapazität, weshalb er sich insbesondere auch für den praktischen Einsatz auf ressourcenbeschränkten Rechnersystemen eignet. Durch geeignete Wahl der Schrittweite lässt sich weiterhin ein Kompromiss zwischen der Anzahl der benötigten Indexwertbestimmungen und der Genauigkeit, mit der das globale Minimum approximiert wird, angeben.

6.2 Sukzessiver Algorithmus zur PID-Parametrierung

Die hier betrachteten PID-Parametrierungsprobleme stellen, wie in den vorherigen Kapiteln gezeigt, konvexe Minimierungsprobleme über bis zu drei Variablen dar, sofern über eine konvexe Menge von PID-Parametern optimiert wird. Hierbei stellt der gewählte Güteindex die Zielfunktion und die Reglerparameter die Variablen des Problems dar.

Der hier vorgestellte sukzessive Algorithmus zur PID-Parametrierung basiert auf der Feststellung, dass die in den Kapiteln 4 und 5 hierzu angegebenen Herleitungen auch gelten, wenn nur ein Regler-Parameter optimiert wird, während die anderen einen festen Wert annehmen. In diesem Fall unterscheiden sich zwei Parametervektoren \mathbf{p}_r und $\tilde{\mathbf{p}}_r$, wie sie dort betrachtet werden, nur in einem Parameter und es kann anhand des in Abschnitt 4.5.2 gezeigten Vorgehens gezeigt werden, dass sich die Konvexität des Parametrierungsproblems auf die Konvexität der Menge, über die dieser eine Parameter variiert wird, zurückführen lässt.

Entsprechend wird im folgende Algorithmus 3 zur PID-Parametrierung das bereits in Algorithmus 2 implementierte Abstiegsverfahren sukzessiv für einzelne Parameter angewendet. Hierbei bezeichnet $\mathbf{p}_r(i)$ den aktuell optimierten PID-Parameter und $\Delta(i)$ die für den jeweiligen PID-Parameter gewählte Schrittweite. Algorithmus 3 optimiert,

Algorithmus 3 : sukzessive PID-Parametrierung

Daten : Anfangswerte $\mathbf{p}_{r, \text{init}} \in \text{dom } J$ und Schrittweiten Δ

Wähle den ersten zu optimierenden PID-Parameter $\mathbf{p}_r(i)$.

$\text{adap_end} \leftarrow 0$

solange $\text{adap_end} \neq 1$ **tue**

$\text{adap_end}_i \leftarrow 0$

 Bestimme die absteigende Richtung dir des Güteindex anhand von Algorithmus 4.

solange $\text{adap_end}_i \neq 1$ **tue**

$\mathbf{p}_r(i) \leftarrow \mathbf{p}_r(i) + \text{dir} \cdot \Delta(i)$

 Rege den Regelkreis an und bestimme den Güteindexwert $J_2(\mathbf{p}_r)$.

wenn $J_2 > J_1$ **dann**

$\text{adap_end}_i \leftarrow 1$

$\mathbf{p}_r(i) \leftarrow \mathbf{p}_r(i) - \text{dir} \cdot \Delta(i)$

sonst

$J_1 \leftarrow J_2$

Ende

wenn *Abbruchkriterium* **dann**

$\text{adap_end} \leftarrow 1$

$\text{adap_end}_i \leftarrow 1$

Ende

Ende

 Wechsle zum nächsten Regler-Parameter.

Ende

Ergebnis : $p^* = p - \text{dir} \cdot \Delta$

wie in Abbildung 6.2 dargestellt, ausgehend von Anfangswerten nacheinander einzelne PID-Parameter, während die jeweils anderen PID-Parameter auf ihrem vorherigen Wert festgehalten werden.

Die Optimierung der einzelnen Parameter wird anhand von Algorithmus 2 durchgeführt. Der so gefundene Minimierer des aktuell optimierten Parameters stellt das Minimum des Güteindex für die jeweils anderen festen Reglerparameter dar. Durch das sukzessi-

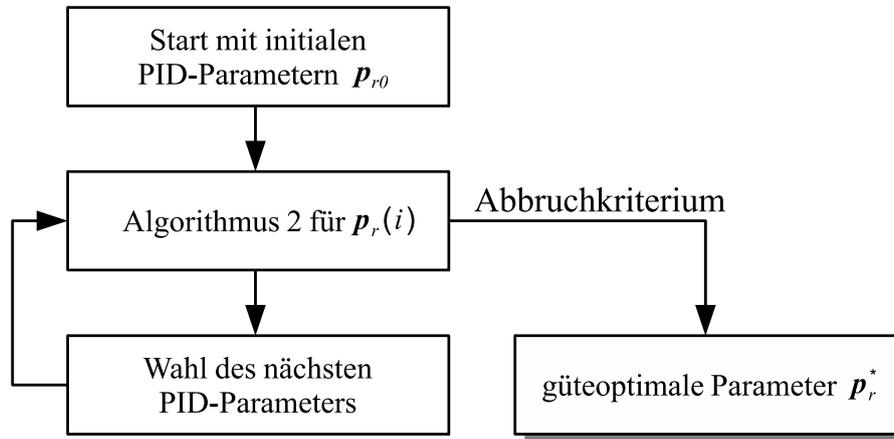


Abbildung 6.2: sukzessiver Algorithmus zur PID-Parametrierung

ve Optimieren der einzelnen PID-Parameter approximiert der Algorithmus den global optimalen Parametervektor in einem charakteristischen abknickenden Verlauf, wie er beispielsweise in Abbildung 6.3 zu erkennen ist.

Die Bestimmung der absteigenden Richtung in Algorithmus 3 erfolgt anhand von Algorithmus 4. Es wird dabei ausgenutzt, dass auch die Optimierung über einen einzelnen Parameter konvex ist und entsprechend nur ein globales Optimum existiert.

Algorithmus 4 : Bestimmung der absteigenden Richtung *dir* des Güteindex

Rege den Regelkreis an und bestimme Güteindexwert $J_{init1}(\mathbf{p}_r)$.

$J_1 \leftarrow J_{init1}$

$\mathbf{p}_r(i) \leftarrow \mathbf{p}_r(i) + \Delta(i)$

Rege den Regelkreis an und bestimme Güteindexwert $J_{init2}(\mathbf{p}_r)$.

$\mathbf{p}_r(i) \leftarrow \mathbf{p}_r(i) - \Delta(i)$

wenn $J_{init2} - J_{init1} > 0$ **dann**

 | $dir \leftarrow -1$

sonst wenn $J_{init2} - J_{init1} < 0$ **dann**

 | $dir \leftarrow 1$

Ende

Ergebnis : *dir*

Durch die sukzessive Funktionsweise von Algorithmus 3 kommt es zu einem oszillierenden Verlauf in den vom Algorithmus gewählten Parametern, falls das Optimum mit der

gewählten Schrittweite approximiert wurde. In diesem Fall wird bei jedem Aufruf von Algorithmus 2 nur ein Schritt in die absteigende Richtung vorgenommen und anschließend das Überschreiten des Optimums detektiert und der nächste Reglerparameter zur Optimierung ausgewählt. Sobald das Optimum in allen Parametern approximiert wurde, erzeugt dies das oszillierende Verhalten in den Parametern.

Dieses Muster im Verlauf der Parameter kann einfach erkannt und als ein unterlagertes Abbruchkriterium verwendet werden. In diesem Fall kann der Algorithmus mit verringerter Schrittweite neu gestartet werden, wobei die im vorherigen Durchlauf als optimal gefundenen Reglerparameter als Initialparameter genutzt werden.

Als Hauptabbruchkriterium kann neben der Oszillation um das Minimum für die aktuell gewählte Schrittweite das Unterschreiten eines zu erreichenden Indexwertes verwendet werden.

6.3 Schrittweitenwahl und Stabilitätsgrenzen

Die gewählte Schrittweite beeinflusst die Anzahl der benötigten Iterationen und somit Anregungen des Regelkreises sowie die Laufzeit der gezeigten Algorithmen stark und sollte entsprechend groß gewählt werden. Durch eine große Schrittweite kann eine schnelle aber grobe Approximation des globalen Optimums mit wenigen Anregungen des Regelkreises gewährleistet werden. Sofern das Optimum genauer approximiert werden soll, können die Algorithmen mit verringerter Schrittweite erneut gestartet werden, wobei die im ersten Durchlauf als optimal gefundenen Parameter als Initialparameter verwendet werden. Anhand dieses Vorgehens können die global optimalen Parameter beliebig genau approximiert werden.

Eine zu groß gewählte Schrittweite kann jedoch dazu führen, dass während der Regler-Parametrierung durch den oben beschriebenen Algorithmus nicht stabilisierende PID-Parameter gewählt und der so parametrisierte Regelkreis angeregt wird, was in realen Anwendungen unbedingt zu vermeiden ist. Für eine nicht überwachte Parametrierung muss deshalb stets gewährleistet sein, dass die Menge der stabilisierenden PID-Parameter \mathbb{P}_{stab} während der Parametrierung nicht verlassen wird.

Wird eine bekannte Strecke oder eine konvexe Approximation der Parametermenge betrachtet, können die Menge \mathbb{P}_{stab} und ihre Grenzen anhand der in Kapitel 5 beschriebenen Methoden bestimmt werden. In diesem Fall kann der Algorithmus um einen Schritt erweitert werden, indem vor der Änderung der PID-Parameter und vor der Anregung des Regelkreises überprüft wird, ob die nächsten vom Algorithmus gewählten Parameter noch in der Menge \mathbb{P}_{stab} liegen. Eine geeignete Schrittweite vorausgesetzt, kann somit gewährleistet werden, dass während der Parametrierung mit dem vorgestellten Algorithmus keine Parameter außerhalb der Menge \mathbb{P}_{stab} verwendet werden.

6.4 Simulationsbeispiel

Die Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen den Verlauf der Algorithmen 3 beziehungsweise 2 zur Parametrierung eines sollwertgewichteten PI-Reglers mit der Strecke

$$G_s = \frac{2,47}{0,12s + 1} e^{-0,12s} \quad (6.1)$$

und den Parametern gemäß Tabelle 6.1. Hierbei wurde zuerst der PI-Regler optimal parametrierung und im Anschluss die Vorsteuerung parametrierung, wobei die als optimal gefundenen PI-Parameter beibehalten wurden.

	Anfangswert(e)	Schrittweite(n)
PI-Regler	$\mathbf{p}_{r0} = [0 \ 1]$	$\Delta = [0, 1 \ 0, 5]$
Sollwertgewicht	$K_{ff0} = -1, 5$	$\Delta = 0, 1$

Tabelle 6.1: Verwendete Parameter der Algorithmen 2 und 3

Als Indizes wurden der IAE nach (4.10) für die PI-Parametrierung und das Maximum der Stellgröße $\sup_{t \geq 0} u(t)$ für die Vorsteuerungs-Parametrierung verwendet. Konvexität dieser Indizes beziehungsweise der jeweiligen Definitionsmenge wurden in Kapitel 4 beziehungsweise von *Boyd u. a., 1991* gezeigt. Die notwendige Konvexität der Menge \mathbb{P}_{stab} kann anhand der in Kapitel 5 gezeigten Software-Werkzeuge visuell geprüft werden. Als Anregung wurden in beiden Fällen Einheitssprünge $\sigma(t)$ auf dem Stör- beziehungsweise Sollwert-Eingang des geschlossenen Kreises verwendet.

Die Simulation des Regelfehlers $e(t)$ sowie der Stellgröße $u(t)$ wurde im MATLAB/Simulink Softwaresystem der Firma The MathWorks, Inc. in Version R2011b mit einer Abtastzeit von $T_s = 0,01$ und einer Simulationszeit von $T_{\text{sim}} = 10$ durchgeführt. Die Algorithmen wurden abgebrochen, sofern eine Oszillation um das Minimum mit der jeweiligen Schrittweite erkannt wurde. Die Algorithmen wurden nach erstmaliger Konvergenz mit einer

	globales Minimum	approximiertes Minimum
PI-Regler	$\mathbf{p}_r^* = [0, 37 \ 2, 14]$	$\mathbf{p}_r^* = [0, 373 \ 2, 135]$
Sollwertgewicht	$K_{sw} = -0, 37$	$K_{sw} = -0, 37$

Tabelle 6.2: globale Minima aus der Simulation und approximierte Minima der Algorithmen 2 und 3

durch 10 dividierten Schrittweite erneut gestartet, wobei die im ersten Lauf als optimal gefundenen Parameter als Initialparameter verwendet wurden.

In den Abbildungen 6.3 und 6.4 sind die Verläufe der Algorithmen mit den Parametern aus Tabelle 6.1 sowie die konvexen Verläufe der Güteindizes über die jeweils betrachteten Parameter abgebildet. Die Indexverläufe wurden durch Berechnung der Indexwerte über eine feine Rasterung der Parameter von $\Delta K_p = 0,005$ und $\Delta K_i = 0,01$ sowie

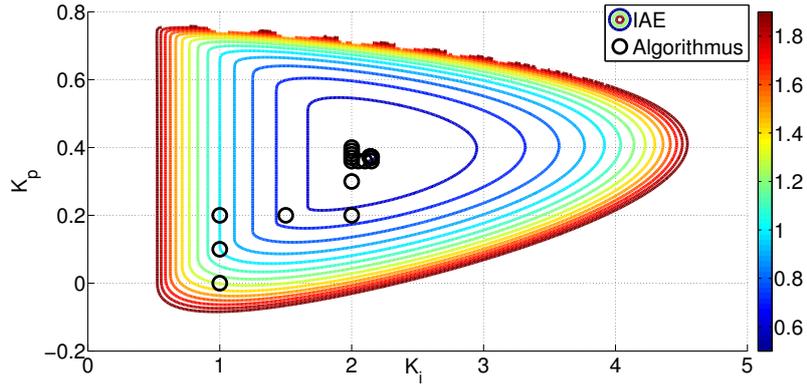


Abbildung 6.3: Verlauf Algorithmus 3

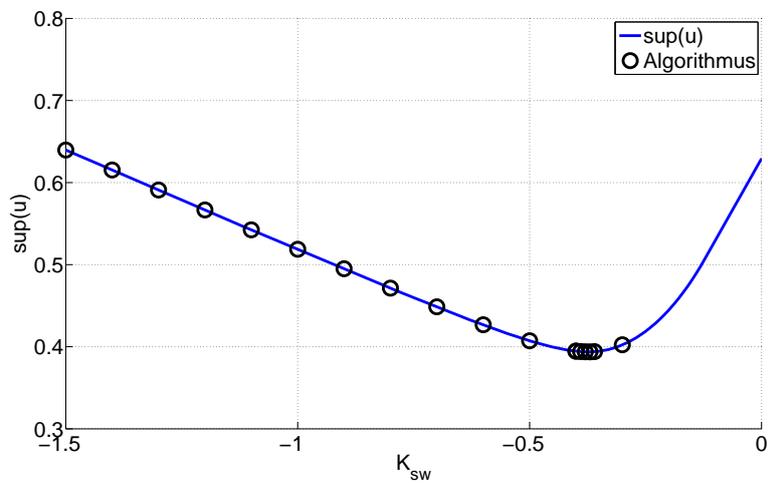


Abbildung 6.4: Verlauf Algorithmus 2

$\Delta K_{sw} = 0,01$ erzeugt. Tabelle 6.2 listet die von den Algorithmen approximierten Optima sowie die aus der Simulation gefundenen globalen Optima. Aus den Abbildungen 6.3 und 6.4 sowie Tabelle 6.2 ist zu erkennen, dass die globalen Optima der Index-Verläufe mit den angegebenen Algorithmen im Rahmen der gewählten Schrittweiten approximiert werden. Weiterhin zeigt Abbildung 6.3 den typischen abknickenden Verlauf der sukzessiven Parametrierung anhand von Algorithmus 3.

7 Ein Verfahren zur automatisierten, güteoptimalen PID-Parametrierung

In diesem Kapitel wird ein Verfahren zur automatisierten, güteoptimalen Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern entwickelt. Hierzu werden die in den Kapiteln 4 und 5 erarbeiteten theoretischen Erkenntnisse zur Konvexität der Parametrierungsprobleme anhand einer Versuchsplanung nutzbar gemacht und die in Kapitel 6 vorgestellten Algorithmen zur automatisierten Parametrierung verwendet. Weiterhin werden in diesem Kapitel wichtige Aspekte bei der praktischen Anwendung sowie Erweiterungen des Verfahrens erläutert.

Das hier gezeigte Verfahren ist als Vorgehensweise beziehungsweise Werkzeug für die mit der Parametrierung von PID-Reglern betrauten Anwender gedacht und kann sowohl in simulativen Untersuchungen als auch zur Parametrierung realer sollwertgewichteter PID-Regler verwendet werden.

Die hierzu notwendige Signalerzeugung, -filterung und -auswertung sowie die verwendeten Optimierungsalgorithmen sind nicht an eine spezifische Software oder Rechnerarchitektur gebunden und können auf beliebigen Systemen, die die Möglichkeit zur Systemanregung, Messung und Auswertung bereitstellen, implementiert werden.

7.1 Versuchsplanung

Die Versuchsplanung dient der Einhaltung der in Kapitel 4 getroffenen Annahmen einer immer gleichen Anregung, einer Parametrierungsreihenfolge zur getrennten Parametrierung von Regler und Sollwertgewicht sowie der Definition der Initialparameter und Schrittweiten der Algorithmen 2 und 3.

Die Versuchsplanung umfasst hierzu die folgenden Elemente:

- **Wahl der Anregung**

In Kapitel 4 wurde gefordert, dass während eines Parametrierungsvorgangs stets die gleiche Anregung zur Bestimmung der Indexwerte verwendet wird, um einen veränderlichen Einfluss der Anregung auf den Verlauf der Indexwerte auszuschließen.

Weiterhin wurde gezeigt, dass die gefundenen Parameter die optimalen Parameter für die jeweils gewählte Anregung darstellen. Dementsprechend sollte die Anregung

ähnlich den im Betrieb zu erwartenden Signalverläufen im Sollwert beziehungsweise Störsignal gewählt werden.

Sofern keine Annahmen über die zu erwartenden Signalverläufe getroffen werden können, wird beispielsweise von *Åström u. a., 2006* die Verwendung eines sprungförmigen Signals vorgeschlagen, da dieses die schnellste anzunehmende Änderung repräsentiert und dafür optimierte Parameter oftmals auch für langsamere Anregungen ein gutes Verhalten des geschlossenen Kreises erzeugen.

- **Festlegen der Parametrierungsreihenfolge**

Um die Funktionsaufteilung der betrachteten Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden, wie in Kapitel 2 angegeben, zu gewährleisten, wird hier die bereits von *Åström u. a., 2006* vorgeschlagene Parametrierungsreihenfolge, wie in Abbildung 7.1 gezeigt, verwendet. Grundlage dieses Vorgehens ist die Feststellung, dass sämt-

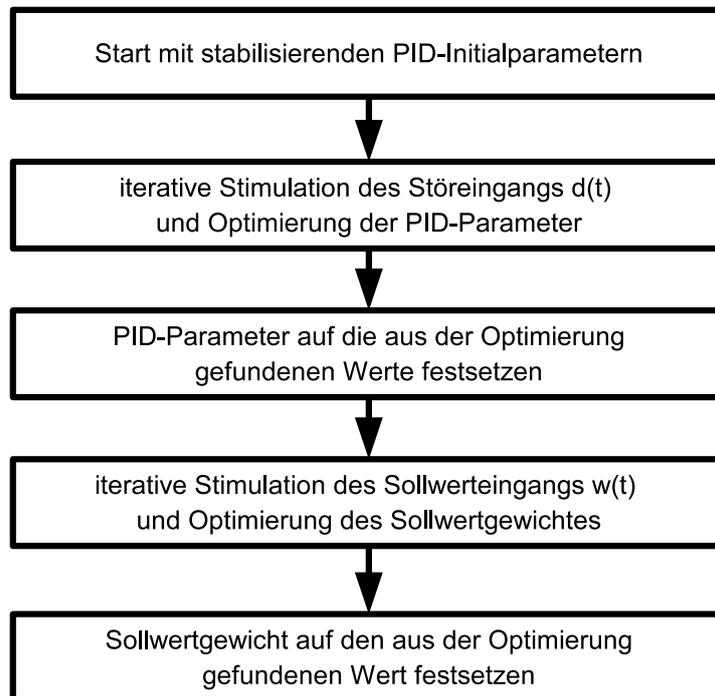


Abbildung 7.1: Parametrierungsreihenfolge für sollwertgewichtete PID-Regler nach *Åström u. a. (2006)*

liche Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises (4.21) - (4.22) Funktionen der PID-Übertragungsfunktion sind, wohingegen der Vorsteuerungsparameter nur in den Übertragungsfunktionen (4.21) vom Sollwerteingang auf die Signale e und u vorkommt. Entsprechend haben die PID-Parameter Einfluss auf das Stör- und Führungsverhalten des geschlossenen Kreises und der Vorsteuerungsparameter nur auf das Führungsverhalten.

Um die klare Trennung der PID-Parametrierung für gutes Störverhalten und der Vorsteuerungs-Parametrierung für gutes Führungsverhalten zu erreichen, wird deshalb der PID-Regler zuerst auf gutes Störverhalten parametriert und im Anschluss

nur der Vorsteuerungsparameter zur Verbesserung des Führungsverhaltens parametrisiert.

Zudem garantiert diese Parametrierungsreihenfolge stabilisierende PID-Parameter während der Parametrierung der Vorsteuerung, wie in Kapitel 4 gefordert.

- **Wahl der Initialparameter**

Die in Kapitel 6 beschriebenen Algorithmen zur automatisierten Parametrierung benötigen stabilisierende Initialparameter. Für die Vorsteuerung kann der initiale Parameter als eine beliebige reelle Zahl $K_{sw,init} \in \mathbb{R}$ gewählt werden, da der Vorsteuerungsparameter keinen Einfluss auf die Stabilität des geschlossenen Kreises hat. Für die PID-Parametrierung muss als initialer PID-Parameter-Vektor $\mathbf{p}_{r,init} \in \mathbb{P}_{stab}$ ein Element der Menge der stabilisierenden Reglerparameter gewählt werden.

- **Wahl der Schrittweite**

Die Schrittweite beeinflusst die Anzahl der von den Algorithmen 2 und 3 benötigten Anregungen des geschlossenen Kreises sowie die Genauigkeit der Approximation der global güteoptimalen Reglerparameter und kann entsprechend der jeweiligen Anwendung gewählt werden.

Die vorgestellte Versuchsplanung bildet die Grundlage des im folgenden Abschnitt präsentierten Verfahrens zur automatisierten, güteoptimalen Parametrierung sollwertgewichteter PID-Regler.

7.2 Verfahren zur automatisierten, güteoptimalen Parametrierung

Die im vorherigen Abschnitt gezeigte Versuchsplanung wird hier anhand der Erkenntnisse aus den Kapiteln 4 und 5 sowie der Algorithmen 2 und 3 zu einem Verfahren zur automatisierten güteoptimalen Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern ergänzt. Das Verfahren setzt sich aus den folgenden Komponenten zusammen:

- **Konvexe Güteindizes**

Die durch die Parametrierung zu optimierende Regelgüte wird durch einen konvexen Güteindex ausgedrückt. Wie bereits in Kapitel 4 erläutert, können hierzu auch mehrere solcher Indizes als positiv gewichtete Summe zu einem konvexen Index zusammengefasst werden, was eine multikriterielle Parametrierung erlaubt. Hierzu können die in dieser Arbeit, die von *Boyd u. a., 1991* angegebenen oder beliebige andere Indizes auf dem Regelfehler oder der Stellgröße genutzt werden, sofern diese die Jensensche Ungleichung (4.4) erfüllen.

- **Menge der stabilisierenden Parameter**

Die PID-Parametrierung muss, wie in Kapitel 4 hergeleitet, auf eine konvexe Menge an stabilisierenden PID-Parametern begrenzt werden. Zur Bestimmung der Menge

der stabilisierenden Reglerparameter \mathbb{P}_{stab} können die in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren und Software-Werkzeuge verwendet werden. Sofern die Menge \mathbb{P}_{stab} nicht konvex oder nicht exakt bekannt ist, kann alternativ eine konvexe Teilmenge $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_{\text{stab}}$ von stabilisierenden Reglerparametern gewählt werden, um den PID-Regler hierüber zu parametrieren.

- **Versuchsplanung**

Die im vorherigen Abschnitt beschriebene Versuchsplanung garantiert die Einhaltung der in Kapitel 4 getroffenen Annahmen der immer gleichen Anregung des stabilisierenden PID-Reglers während der Parametrierung des Sollwertgewichtes sowie eine Parametrierungsreihenfolge zur getrennten Parametrierung der Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden auf gutes Stör- beziehungsweise Führungsverhalten.

- **Iterative Optimierungs-Algorithmen**

Zur Lösung der hier betrachteten Parametrierungsprobleme können im Rahmen des Verfahrens beliebige iterative heuristische Algorithmen verwendet werden. Die Algorithmen können entsprechend des Anwendungsfalles beziehungsweise ihrer Verfügbarkeit und Implementierbarkeit auf dem jeweils genutzten Computersystem gewählt werden.

Für die praktische Anwendung haben sich Algorithmen mit fester Schrittweite bewährt, wie die in Kapitel 6 entwickelten. Diese geben dem Anwender die Möglichkeit einen für die jeweilige Anwendung optimalen Kompromiss in der Schrittweite, zwischen der Geschwindigkeit und der Genauigkeit mit der die güteoptimalen Parameter approximiert werden, zu wählen.

Verfahren zur global güteoptimalen Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern

Das Verfahren zur automatisierten, global güteoptimalen Parametrierung kombiniert die oben beschriebenen Komponenten in einer Vorgehensweise und kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Formuliere das Parametrierungsziel anhand konvexer Güteindizes.
2. Wähle die Anregung zur Bestimmung der Güteindizes.
3. Bestimme die Mengen \mathbb{K} und \mathbb{P}_{stab} und prüfe diese auf Konvexität.
 - Bestimme eine konvexe Teilmenge $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_{\text{stab}}$ falls notwendig.
4. Wähle die Initialparameter sowie die Schrittweite des zur Parametrierung verwendeten Algorithmus.
5. Verwende iterative Algorithmen zur automatisierten Parametrierung
 - a) des PID-Reglers auf gutes Störverhalten.

b) des Sollwertgewichtes auf gutes Führungsverhalten.

Durch das Verfahren wird sichergestellt, dass während der jeweiligen Parametrierung stets die gleiche Anregung verwendet wird und die Parameter-Mengen, über die die Parametrierung durchgeführt wird, konvex sind. Gemäß den Ausführungen in Kapitel 4 und 5 sind die Parametrierungsprobleme konvex und die von den Algorithmen gefundenen Parameter somit die global güteoptimalen Parameter für die jeweils gewählten Indizes und Anregungen.

Weiterhin ist das Verfahren durch die freie Wahl der zu minimierenden Indizes und des zur Parametrierung verwendeten Algorithmus modular aufgebaut und kann für eine Vielzahl von Anwendungen angepasst werden.

In den folgenden Abschnitten werden Erweiterungen des Verfahrens um eine Messwert-aufbereitung durch Filterung sowie zur Parametrierung von PID-Reglern für Strecken mit variierenden beziehungsweise ungewissen Parametern beschrieben und es werden die Besonderheiten bei der Verwendung zur Parametrierung von diskret implementierten Reglern aufgezeigt.

7.3 Messwert Aufbereitung

Bei der praktischen Anwendung des vorgestellten Verfahrens werden die Güteindizes aus gemessenen Signalen ermittelt, die sich meist aus dem zu bewertenden Nutzsignal und einem überlagerten Rauschsignal zusammensetzen.

Zur Modellierung von additivem, mittelwertfreiem Messrauschen kann der Regelkreis um den Eingang eines mittelwertfreien Rauschsignals $n(t)$ wie in Abbildung 7.2 gezeigt erweitert werden. In diesem Fall ergibt sich das gemessene Ausgangssignal $\tilde{y}(t) = y(t) + n(t)$ als die additive Überlagerung des Streckenausgangs $y(t)$ und des Rauschsignals $n(t)$. Für einen Regelkreis mit additivem Messrauschen gemäß Abbildung 7.2 ergeben sich der

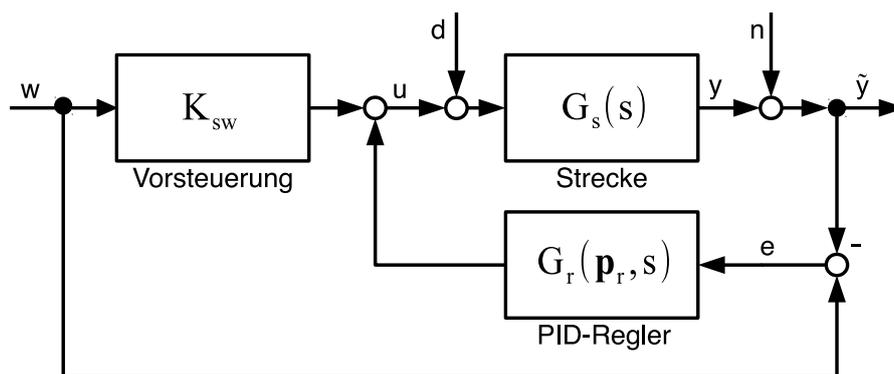


Abbildung 7.2: Regelungsstruktur mit additivem Messrauschen n und gemessener Größe \tilde{y}

Regelfehler und die Stellgröße zu

$$\begin{aligned} e &= \frac{1 - K_{sw}G_s}{1 + G_rG_s}w - \frac{G_s}{1 + G_rG_s}d - \frac{1}{1 + G_rG_s}n \\ u &= \frac{K_{sw} + G_r}{1 + G_rG_s}w - \frac{G_rG_s}{1 + G_rG_s}d - \frac{G_r}{1 + G_rG_s}n. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Aus (7.1) ist ersichtlich, dass durch das additive Messrauschen auch die von den Indizes bewerteten Signale des geschlossenen Regelkreises eine stochastische Komponente erhalten. Aufgrund dessen ist die Annahme einer immer gleichen Anregung bei der Bestimmung der Indexwerte aus Kapitel 4 nicht mehr gültig und die Indexwerte ergeben sich ebenfalls als stochastische Größen.

Durch das stochastische Verhalten des Indexwertes können sich die Wertebereiche des Index für zwei verschiedene Regler-Parametrierungen mit kleiner Schrittweite überlappen und somit eine Unterscheidung zwischen der stochastischen Änderung des Indexwertes und der durch das Verstellen der Regler-Parameter um die jeweilige Schrittweite erzeugten Änderung des Indexwertes verhindern. Für die meisten iterativen Algorithmen führt ein solcher stochastischer Verlauf des Zielfunktional zu Konvergenzproblemen beziehungsweise dem frühzeitigen Abbruch der Algorithmen. Insbesondere beruht die Funktionsweise der in Kapitel 6 beschriebenen Abstiegsverfahren auf einer eindeutigen Unterscheidung zweier durch verschiedene Reglerparameter erzeugten Indexwerte.

Durch Ermittlung des empirischen Mittelwertes der Indexwerte aus einer möglichst großen Stichprobe ließe sich eine deterministische Aussagen über die Regelgüte treffen, jedoch wäre hierzu eine Vielzahl von Anregungen des Regelkreises notwendig, weshalb sich dieser Ansatz kaum für die praktische Anwendung eignet.

Hier wird daher die Verwendung von gefilterten Signalverläufen zur Indexwert-Bestimmung vorgeschlagen, um den stochastischen Einfluss des Messrauschens auf den Indexwert zu minimieren. Hierzu werden die Signale e oder u geeignet gefiltert und die gefilterten Signale anstelle der Messsignale zur Indexwert-Bestimmung verwendet. Da die Indizes auch aus gespeicherten Signalen bestimmt werden können, erlaubt dieses Vorgehen ebenfalls den Einsatz nichtkausaler Filter, wie im folgenden Simulationsbeispiel gezeigt.

Das Beispiel illustriert die Problematik von sich überlappenden Index-Wertebereichen bei additivem Messrauschen und zeigt weiterhin, wie ein nichtkausales Filter zur Minderung dieses Problems verwendet werden kann. Weiterhin wird gezeigt, dass der Einsatz eines solchen Filters geringere Schrittweiten und somit eine genauere Approximation der güteoptimalen Parameter durch Algorithmen zur automatisierten Parametrierung erlaubt.

Simulationsbeispiel

Abbildung 7.3 zeigt beispielhaft den Verlauf von 300 IAE Werten, die durch Anregung des Störeinganges des simulierten geschlossenen Kreises

$$G_{\text{ed}} = -\frac{G_s}{1 + G_s G_r} \quad \text{mit} \quad G_s = \frac{2,74}{0,12s + 1} e^{-0,12s}; \quad G_r = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (7.2)$$

mit einem Einheitssprung $d(t) = \sigma(t)$, einer additiven Überlagerung des Ausgangssignals mit einem Rauschsignal $\tilde{y} = y + n$ sowie den Reglerparametern

$$\mathbf{p}_{r1} = \begin{cases} K_p = -0,1 \\ K_i = 0,6 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p}_{r2} = \begin{cases} K_p = -0,05 \\ K_i = 0,75 \end{cases} \quad (7.3)$$

gewonnen wurden. Die Simulationen wurde mit einer Abtastzeit von $T_s = 0,01$ im MATLAB/Simulink Softwaresystem der Firma The MathWorks, Inc. in Version R2011b durchgeführt, als Rauschsignal wurde mittelwertfreies weißes gaußsches Rauschen, mit einer Leistung die -11dBW an einem 1Ω Widerstand entspricht, verwendet, welches durch die Funktion *wgn* in Matlab erzeugt wurde.

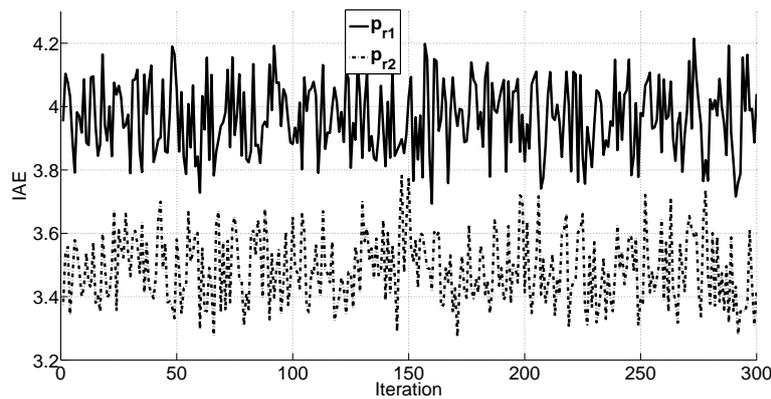


Abbildung 7.3: stochastischer Verlauf des IAE bei additiv überlagertem Messrauschen

Wie aus Abbildung 7.3 ersichtlich wird, ist keine eindeutige Zuordnung eines IAE Wertes zu den jeweiligen PI-Parametern möglich, da sich aufgrund der hohen Varianz die Wertebereiche der Indizes überlappen. Eine solche Nichteindeutigkeit kann bei Verwendung der in Kapitel 6 beschriebenen Algorithmen mit kleinen Schrittweiten Konvergenzprobleme verursachen beziehungsweise zum frühzeitigen Abbruch der Algorithmen führen. Um den stochastischen Einfluss auf die Indexwerte zu minimieren, können gemäß Bemerkung 4.7 beliebige stabile lineare zeitinvariante Filter zur Aufbereitung des jeweils zur Indexwert-Bestimmung genutzten Signals eingesetzt werden. Sofern eine Zwischenspeicherung des Signals möglich ist, können entsprechend auch nichtkausale Filter verwendet werden. Hierzu wird das Messsignal über die benötigte Zeit nach Anregung des geschlossenen Kreises gespeichert, durch das nichtkausale Filter geglättet und anschließend das

\overline{IAE}	$IAE(e)$	$IAE(e_f)$	s^2	$IAE(e)$	$IAE(e_f)$
\mathbf{p}_{r1}	3.9645	2.5271	\mathbf{p}_{r1}	0.0130	0.0063
\mathbf{p}_{r2}	3.4869	1.9752	\mathbf{p}_{r2}	0.0119	0.0050

Tabelle 7.1: Empirische Mittelwerte und korrigierte Stichprobenvarianzen der IAE Verläufe in Abbildungen 7.3 und 7.4.

gefilterte Signal zur Bestimmung des Indexwertes genutzt.

Abbildung 7.4 zeigt die IAE Verläufe zu den in (7.3) angegebenen PI-Parametern, wobei zur Berechnung des IAE das mit dem gleitenden Mittelwert nach (7.4) und $m = 20$ gefilterte Regelfehlersignal verwendet wurde.

$$e_f(k) = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=k-m}^{k+m} e(i) \quad (7.4)$$

Des Weiteren zeigt Tabelle 7.1 die Mittelwerte \overline{IAE} und korrigierten Stichprobenvarianzen s^2 der in den Abbildungen 7.3 und 7.4 gezeigten IAE Verläufe mit $N = 300$ gemäß

$$\overline{IAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N IAE(i) \quad \text{bzw.} \quad s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (IAE(i) - \overline{IAE})^2. \quad (7.5)$$

Aus Abbildung 7.4 und Tabelle 7.1 ist ersichtlich, dass die Filterung des Regelfehlersignals die Varianz des IAEs deutlich verringert und die Differenz der Mittelwerte ausreichend erhöht, sodass eine eindeutige Zuordnung der IAE Werte zu den jeweiligen PI-Parametern möglich ist, da sich die Wertebereiche nicht mehr überlappen. Dementsprechend können durch Filterung der Signale die oben beschriebenen Konvergenzprobleme bei Verwendung kleiner Schrittweiten vermieden und das Optimum anhand dieser genauer bestimmt werden.

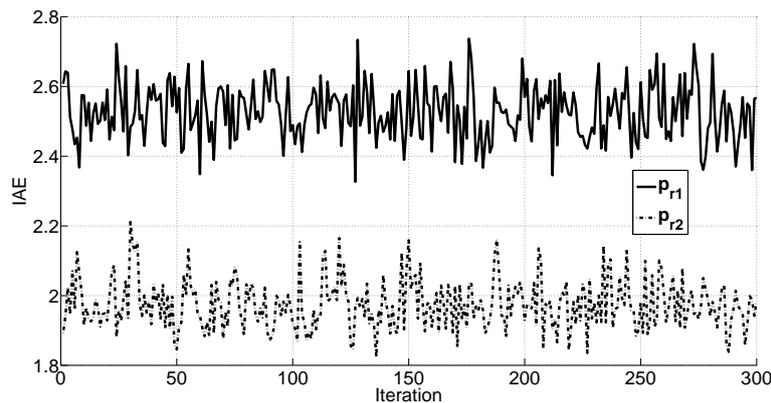


Abbildung 7.4: stochastischer Verlauf des IAE bei additiv überlagertem Messrauschen und gemäß (7.4) gefiltertem Regelfehlersignal

7.4 Verwendung zur Parametrierung diskret implementierter PID-Regler

Bei den in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen zur Konvexität der Parametrierungsprobleme und der Menge der stabilisierenden Reglerparameter wurden stets kontinuierliche Übertragungsfunktionen der Strecke und des Reglers betrachtet. In der regelungstechnischen Praxis werden PID-Regler jedoch meist auf Computern oder Mikrocontrollern implementiert, wodurch sich Regelkreise mit diskret implementierten Reglerübertragungsfunktionen und kontinuierlichen oder durch Abtastung diskretisierten Strecken ergeben.

Oftmals wird zum einfachen Entwurf eines diskret implementierten Reglers die bilineare Transformation $s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ zur Diskretisierung der kontinuierlichen Reglerübertragungsfunktion (2.1) verwendet. Eine ausreichend kleine Abtastzeit T_s vorausgesetzt wird eine stabile kontinuierliche Übertragungsfunktion so wieder in eine stabile diskrete Übertragungsfunktion überführt und es lassen sich Entwurfs- und Parametrierungsverfahren für kontinuierliche PID-Regler verwenden, um den diskret implementierten Regler zu parametrieren.

Eine gute Übersicht über Theorie und Praxis diskreter Regelkreise und Systeme geben beispielsweise *Lampe u. a., 1997*, *Åström u. a., 1997* und *Oppenheim u. a., 2004*.

Für einen anhand der bilinearen Transformation diskretisierten PID-Regler kann die diskrete Übertragungsfunktion geschrieben werden zu

$$G_{rd} = \frac{(K_d + 2T_s K_p + T_s^2 K_i)z^2 + (2T_s^2 K_i - 2K_d)z + K_d - 2T_s K_p + T_s^2 K_i}{2T_s(z^2 - 1)}. \quad (7.6)$$

Aus (7.6) ist ersichtlich, dass auch für den diskret implementierten Regler die PID-Parameter affin in die Koeffizienten des Zählerpolynoms eingehen. Entsprechend kann für eine diskret beschriebene Strecke

$$G_s(z) = \frac{Z(z)}{N(z)} z^{-\frac{T_t}{T_s}}, \quad (7.7)$$

mit dem Zähler- und Nennerpolynom $Z(z)$ beziehungsweise $N(z)$ in z und dem Verhältnis $\frac{T_t}{T_s} \in \mathbb{N}$, äquivalent zu Kapitel 4.4 gezeigt werden, dass die Konvexität der PID-Parametrierung auf die Konvexität der Menge, über die die PID-Parametrierung durchgeführt wird, zurückgeführt werden kann.

Für einen diskret implementierten Regler hat jedoch neben den PID-Parametern auch die gewählte Abtastzeit Einfluss auf die Stabilität des geschlossenen Kreises und somit auf die Menge \mathbb{P}_{stab} beziehungsweise die Grenzen der Menge.

Zur Bestimmung der Grenzen der Menge der stabilisierenden PID-Parameter für diskrete Systeme wurden von *Bajcinca, 2013* beziehungsweise in den dort zitierten Quellen die in der Einleitung des Kapitels 5 erwähnten, auf der D-Dekomposition basierenden Techniken zur Bestimmung von \mathbb{P}_{stab} für diskrete Übertragungsfunktionen erweitert. Dies

erlaubt die Bestimmung der stabilisierenden Parameter in der K_d - K_i -Ebene und durch anschließende Rasterung über K_p die Bestimmung von \mathbb{P}_{stab} für diskret implementierte PID-Regler.

Die bestehenden Erweiterungen von *Bajcinca, 2013* erlauben jedoch weder die Beschreibung eines hybriden Regelkreises – bestehend aus diskret implementiertem Regler und kontinuierlicher Strecke – noch die eines diskreten Kreises mit einer Streckenabtastzeit, die sich von der Abtastzeit des Reglers unterscheidet.

Die Menge \mathbb{P}_{stab} kann in einem solchen Fall jedoch durch Simulation des geschlossenen Kreises und Rasterung über die Reglerparameter bestimmt werden, indem die Sprungantworten des geschlossenen Kreises für die Reglerparameter aufgenommen und auf Stabilität untersucht werden. Stabilität kann hierbei beispielsweise durch Nullwerden des Regelfehlers in einer ausreichend lang gewählten Simulationszeit oder die Finitheit eines geeigneten Güteindex detektiert werden.

Simulationsbeispiel

Die Abbildungen 7.5 - 7.7 zeigen beispielhaft den Bereich finiter IAE-Werte für den diskreten PI-Regler (7.8) und die Strecke (7.9) mit $K = 1$ und $T_t = 0,5$ und unterschiedlich gewählter Regler-Abtastzeit T_{sr} sowie die Grenzen der Menge \mathbb{P}_{stab} , die nach dem in Abschnitt 5.2 angegebenen Verfahren für einen kontinuierlich implementierten Regler bestimmt wurde.

$$G_{\text{rd}} = K_p + K_i \frac{T_{\text{sr}}(z + 1)}{2(z - 1)} \quad (7.8)$$

$$G_{\text{sd}} = \frac{K}{s} \cdot e^{-sT_t} \quad (7.9)$$

Zur diskreten Simulation wurde die Strecke anhand der Näherung $s \approx \frac{z-1}{T_{\text{ss}}}$ mit einer Streckenabtastzeit von $T_{\text{ss}} = 0,001$ quasikontinuierlich implementiert. Die aus den simulierten Sprungantworten gewonnenen IAE-Werte wurden für einen Wert ≤ 10.000 als finit betrachtet.

Aus den Abbildungen 7.5 - 7.7 kann der Einfluss der Regler-Abtastzeit T_{sr} auf die Menge \mathbb{P}_{stab} erkannt werden. Es ist ersichtlich, dass eine Vergrößerung der Regler-Abtastzeit zu einer Verkleinerung der Menge \mathbb{P}_{stab} führt. Es ist jedoch bemerkenswert, dass die Menge \mathbb{P}_{stab} unabhängig von der Abtastzeit T_{sr} stets eine konvexe Form besitzt. Weiterhin ist ersichtlich, dass trotz der unterschiedlichen Abtastzeiten T_{sr} und T_{ss} die Indexverläufe weiterhin konvex sind.

Das hier vorgestellte Verfahren zur automatisierten Parametrierung kann demnach auch für einen hybriden Regelkreis aus diskretem Regler und kontinuierlicher oder durch Abtastung diskretisierter Strecke verwendet werden, sofern die Menge \mathbb{P}_{stab} und ihre Konvexität wie hier gezeigt durch Simulation bestimmt werden kann.

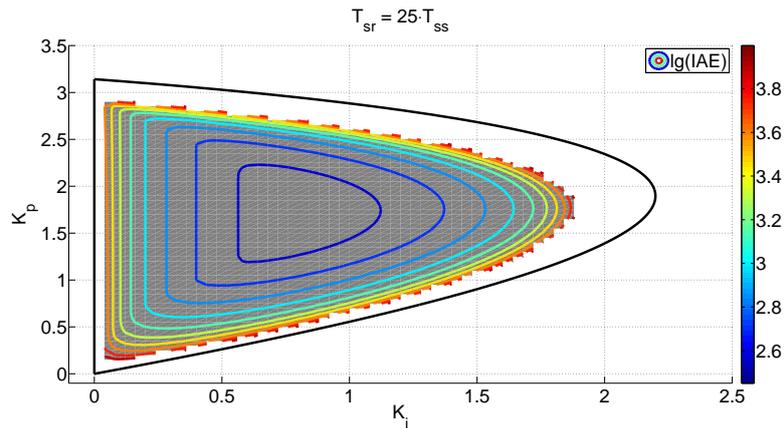


Abbildung 7.5: Menge der stabilisierenden Reglerparameter \mathbb{P}_{stab} sowie Verlauf des IAE-Index für $T_{\text{sr}} = 25 \cdot T_{\text{ss}}$

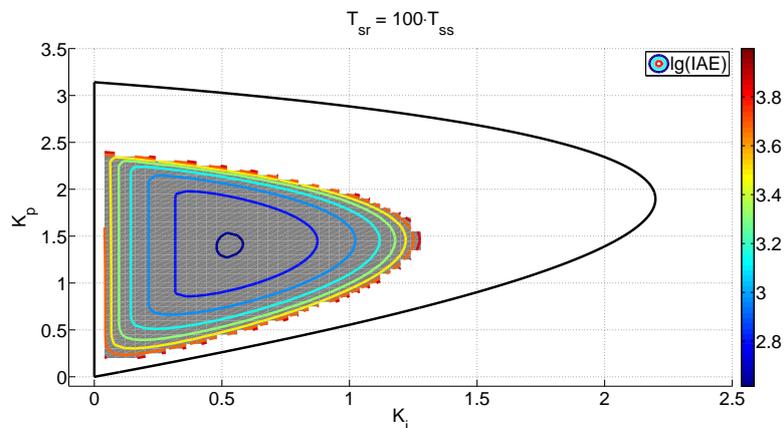


Abbildung 7.6: Menge der stabilisierenden Reglerparameter \mathbb{P}_{stab} sowie Verlauf des IAE-Index für $T_{\text{sr}} = 100 \cdot T_{\text{ss}}$

7.5 Verwendung für Strecken mit ungewissen Parametern

In der praktischen Anwendung existieren oftmals Strecken, deren Parametervektor Δ nicht exakt, sondern in einem Wertebereich $\Delta \in [\Delta_{\text{min}}, \Delta_{\text{max}}]$ bekannt ist oder sich während des Betriebes in einem solchen Intervall ändern kann, sowie Strecken, deren Parameter sich im Laufe der Zeit durch Alterung in einem bekannten Intervall ändern. Sofern für solche Strecken ein PID-Regler mit festen Parametern verwendet werden soll, müssen diese Streckeneigenschaften bei der Parametrierung berücksichtigt werden.

Klassische Verfahren zum Reglerentwurf und zur Reglerparametrierung für Strecken mit ungewissen Parametern, wie sie beispielsweise von *Zhou u. a., 1996* oder *Skogestad u. a., 2005* beschrieben werden, entwerfen und parametrieren den Regler deshalb für die Stre-

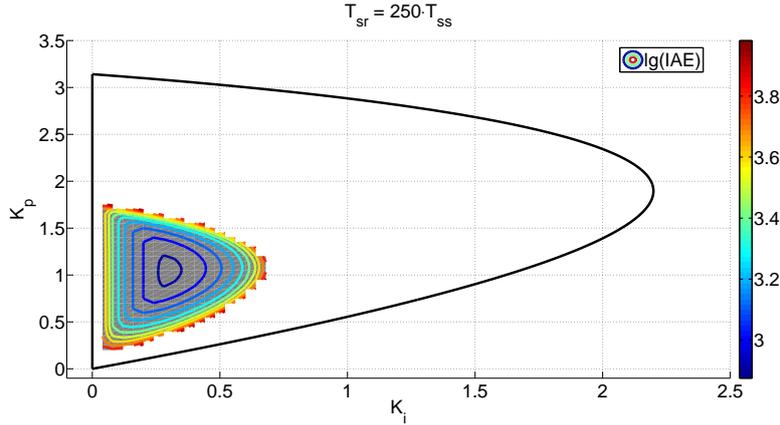


Abbildung 7.7: Menge der stabilisierenden Reglerparameter \mathbb{P}_{stab} sowie Verlauf des IAE-Index für $T_{\text{sr}} = 250 \cdot T_{\text{ss}}$

ckenparameter, die dem ungünstigsten Fall entsprechen. Sofern der dem ungünstigsten Fall entsprechende Vektor Δ_{uF} für die Streckenübertragungsfunktion gewählt wird, ist mit dem in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren ebenfalls eine solche Parametrierung auf den ungünstigsten Fall möglich. Ein Verfahren, das den Streckenparametervektor Δ_{uF} aus $[\Delta_{\text{min}}, \Delta_{\text{max}}]$ mit vorgegebbarer Genauigkeit und Konfidenz bestimmt, wurde von *Königs u. a., 2013* angegeben.

Ein so auf den ungünstigsten Fall parametrierter Regler gewährleistet die Funktion und Stabilität des geschlossenen Kreises für alle Streckenparameter innerhalb des betrachteten Intervalls. Jedoch besitzt ein solcher Regler oftmals auch eine schlechte Regelgüte für alle Fälle / Streckenparameter, die nicht dem ungünstigsten Fall entsprechen. Da sich der ungünstigste Fall in den meisten Anwendungen – wenn überhaupt – nur selten einstellt, besitzt der Regelkreis daher, wie auch von *Skogestad u. a., 2005* beschrieben, für den größten Teil der Betriebsdauer eine schlechte Regelgüte.

Um eine gleichmäßige Regelgüte für alle Streckenparametervektoren $\Delta \in [\Delta_{\text{min}}, \Delta_{\text{max}}]$ zu ermöglichen, muss der zur Parametrierung verwendete Güteindex $J(\cdot)$ die Regelgüte eines Reglerparametervektors \mathbf{p}_r für alle Streckenparametervektoren berücksichtigen. Von *Skogestad u. a., 2005* wurde daher vorgeschlagen, den über die N_{MW} möglichen Streckenparametervektoren gebildeten Mittelwert

$$J_{\text{MW}} = \frac{1}{N_{\text{MW}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{MW}}} J(\Delta_i, \mathbf{p}_r) \quad (7.10)$$

als Güteindex für den Reglerparametervektor \mathbf{p}_r zu verwenden, um eine gleich gewichtete Quantifizierung der Regelgüte über alle Streckenparametervektoren zu erhalten. Ein Index nach (7.10) wäre nach Satz 4.2 für einen konvexen Index $J(\cdot)$ ebenfalls konvex. Jedoch beinhaltet das Intervall $[\Delta_{\text{min}}, \Delta_{\text{max}}]$ eine überabzählbare Menge an Streckenparametervektoren, was zur Folge hat, dass die Anzahl N_{MW} gegen unendlich geht und die Bestimmung von (7.10) somit in finiter Zeit unmöglich ist.

Von *Könings u. a., 2013* wurde deshalb ein Verfahren entwickelt, das eine Approximation des Index (7.10) durch eine finite Anzahl von Streckenparametervektoren mit vorgebar Genauigkeit und Konfidenz erlaubt. Hierzu wird ein randomisierter Algorithmus verwendet, ähnlich dem von *Vidyasagar, 2001* vorgeschlagenen, um aus der überabzählbaren Menge der möglichen Streckenparametervektoren eine finite Stichprobe zu ziehen, anhand derer (7.10) durch eine endliche Summe angenähert werden kann.

Der Güteindex (7.10) für einen Reglerparametervektor wird hierbei als die Summe

$$\hat{J} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J(\Delta_i, \mathbf{p}_r) \quad (7.11)$$

über die Stichprobe Δ_i von Streckenparametervektoren approximiert. Die Anzahl N der zu bestimmenden Elemente der sowohl unabhängig als auch identisch verteilten Stichprobe aus dem Streckenparameterintervall ergibt sich dann gemäß *Tempo u. a., 1997* zu

$$N \geq \frac{\ln\left(\frac{2}{\delta}\right) (b-a)^2}{2\epsilon^2}. \quad (7.12)$$

Hierbei kennzeichnet $1-\delta$, $\delta \in (0, 1)$ wie aus (7.13) ersichtlich die minimale Wahrscheinlichkeit $P(\cdot)$, mit der die Differenz zwischen dem angenäherten Güteindex (7.11) und dem nicht bestimmbar Index (7.10) kleiner als der Fehler $\epsilon \in (0, 1)$ ist.

$$P\left(|\hat{J}(\Delta_1, \dots, \Delta_N, \mathbf{p}_r) - J_{\text{MW}}(\Delta, \mathbf{p}_r)| < \epsilon\right) \geq 1 - \delta \quad (7.13)$$

Die Werte b und a geben die Ober- beziehungsweise Untergrenze des Indexwertes über die Stichprobe der Streckenparametervektoren an. Entsprechend kann durch geeignete Wahl der Parameter δ und ϵ erreicht werden, dass \hat{J} gemäß (7.11) den in finiter Zeit nicht bestimmbar Güteindex (7.10) mit der gewählten Genauigkeit und Konfidenz approximiert.

Sofern gezeigt werden kann, dass für die betrachtete Regler-Strecken-Kombination die Menge \mathbb{P}_{stab} unabhängig von den Streckenparametern konvex ist und die Schnittmenge von Mengen \mathbb{P}_{stab} für verschiedene Streckenparametervektoren nicht leer ist¹, kann mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren eine robuste Reglerparametrierung anhand des Güteindex (7.11) vorgenommen werden.

Hierzu kann aus Satz 4.2 und der Annahme, dass die Menge \mathbb{P}_{stab} unabhängig von den Streckenparametern konvex ist, geschlossen werden, dass der Index (7.11) als Summe über konvexe Indizes $J(\cdot)$ ebenfalls konvex ist. Entsprechend können die global güteoptimalen Reglerparameter \mathbf{p}_r^* gefunden werden als

$$\mathbf{p}_r^* = \arg \min_{\mathbf{p}_r} \hat{J}(\Delta_i, \mathbf{p}_r) \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.14)$$

Ein so mit \mathbf{p}_r^* parametrierter Regler ist gleichgewichtet güteoptimal für alle N gewähl-

¹Dies wurde von *Könings u. a., 2013* beispielhaft für die in Beispiel 5.4 betrachtete Kombination von PI-Regler und integrierender Strecke gezeigt.

ten Streckenparameter in der Stichprobe Δ_i und garantiert Stabilität des geschlossenen Kreises für Δ_{uF} , sofern 7.11 den Index 7.10 ausreichend genau approximiert, beziehungsweise Δ_{uF} in der Stichprobe enthalten ist.

Die Verwendung eines Index gemäß (7.11) in dem in dieser Arbeit gezeigten Verfahren ermöglicht demnach die global güteoptimale Parametrierung eines PID-Reglers für eine Strecke, deren Parameter nur in einem Intervall bekannt sind. Vor der Parametrierung muss hierzu einmalig die unabhängige und identisch verteilte Stichprobe $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ aus dem Intervall $[\Delta_{\text{min}}, \Delta_{\text{max}}]$ gezogen werden mit N gemäß (7.12). Der Index (7.11) kann dabei aus einem beliebigen konvexen Index $J(\cdot)$ gebildet werden. Zur Parametrierung können die Algorithmen und Vorgehen, welche in Kapitel 6 und 7 beschrieben wurden, unter Verwendung des Index (7.11) benutzt werden.

8 Anwendungsbeispiel

In diesem Kapitel wird die Anwendung des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens zur Parametrierung eines sollwertgewichteten PI-Reglers für die Füllhöhenregelung eines Rührkesselreaktors gezeigt. Rührkesselreaktoren werden genutzt, um die für eine chemische Reaktion optimalen Bedingungen in Temperatur, Stoffmenge und Druck bereitzustellen. Weiterhin können Rührkesselreaktoren zum Mischen und Begasen von Flüssigkeiten verwendet werden und sind in der Prozessindustrie entsprechend häufig verwendete Anlagen.

Darüber hinaus steht die hier betrachtete Füllhöhenregelstrecke des Rührkesselreaktors prototypisch für die häufig auftretende Klasse von Strecken mit integrierendem Verhalten, die wegen ihrer grenzstabilen Eigenschaft stets besonderer Beachtung bedürfen. Aus diesen Gründen werden Rührkesselreaktoren in der regelungstechnischen Literatur wie beispielsweise von *Thornhill u. a., 2008* oftmals als Anwendungsbeispiel und Bezugspunkt zum Vergleich von Regelungsverfahren und Parametrierungen verwendet.

Nach einer kurzen Beschreibung des betrachteten Rührkesselreaktors wird in diesem Kapitel ein Modell der Regelstrecke hergeleitet und die Problemformulierung der Reglerparametrierung präzisiert. Im Anschluss wird das vorgestellte Parametrierungsverfahren in der Simulation unter Einbezug von Beschränkungen in Mess- und Stellgröße sowie Sensorrauschen erprobt und die auftretenden Effekte kurz erläutert. Weiterhin werden die Ergebnisse der Anwendung des Verfahrens zur Parametrierung des sollwertgewichteten PI-Füllhöhenreglers an der realen Anlage präsentiert.

8.1 Systembeschreibung des Rührkesselreaktors

Bei dem hier betrachteten Rührkesselreaktor handelt es sich um eine Demonstrator-Anlage RT682 der Firma G.U.N.T. Gerätebau GmbH im Labormaßstab. Der Aufbau der Anlage kann dem RI-Schema in Abbildung 8.1 entnommen werden. Als Produkt und Edukt dient in dieser Anlage Wasser, das mit konstanter Temperatur aus dem Vorratstank entnommen wird und aus dem Kessel wieder dorthin abfließt. Zur Temperaturregelung im Rührkessel steht neben der elektrischen Heizung im Heizmantel auch das 3-Wege-Ventil V3 zur Verfügung, das den Anteil an vorgewärmt einfließendem Wasser bestimmt.

Die für die hier betrachtete Füllhöhenregelstrecke relevanten Komponenten der Anlage sind im reduzierten RI-Schema der Abbildung 8.2 dargestellt. Hierbei wird das pneumatische

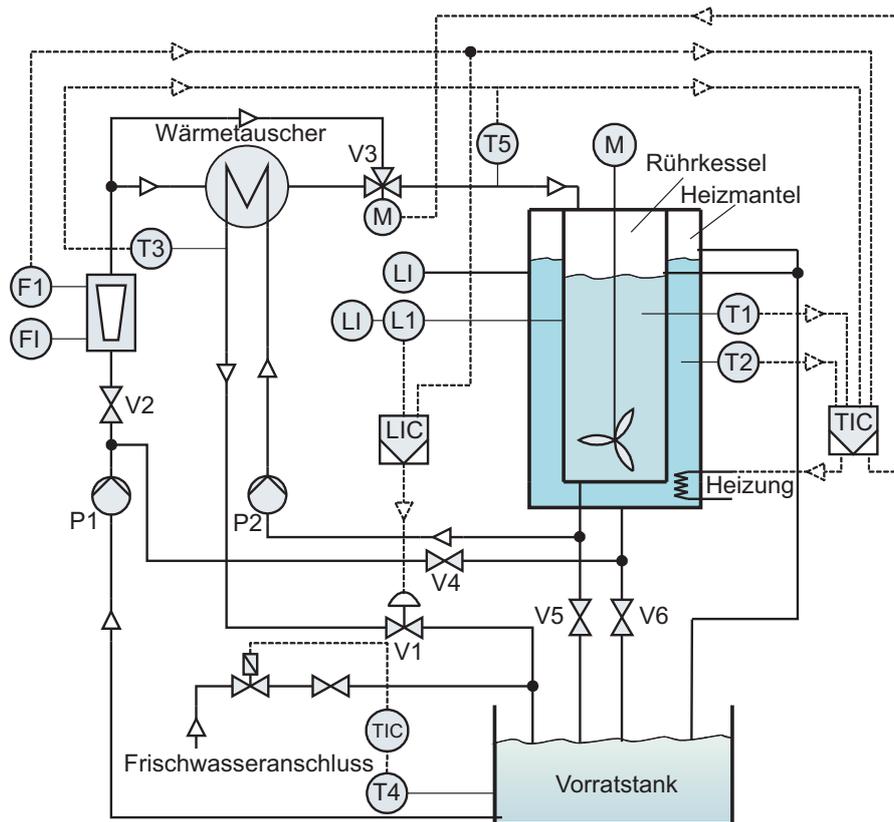


Abbildung 8.1: RI-Schema des betrachteten Rührkesselreaktors aus *Haghani u. a., 2012*

tische Ventil V1 als Aktor verwendet, um den Volumenfluss \dot{V}_{aus} durch die kontinuierlich fördernde Pumpe P2 zu manipulieren. Das Ventil V2 ist als Handventil ausgelegt und ermöglicht das Einstellen des Volumenflusses \dot{V}_{ein} in den Kessel. Der Volumenfluss \dot{V}_{ein} bestimmt zusammen mit der Füllhöhe den Arbeitspunkt der Anlage. Die Ventile V4, V5 und V6 in Abbildung 8.1 dienen dem manuellen Befüllen und Entleeren von Kessel und Heizmantel für Wartungszwecke und sind im normalen Betrieb geschlossen. Die Füllhöhe des Tanks sowie der konstante Volumenfluss in den Tank können in der Anlage direkt messtechnisch erfasst werden. Der Volumenfluss aus dem Tank kann über eine Kennlinie aus der vom Ventil V1 gestellten Position ermittelt werden.

8.2 Mathematisches Modell der Füllhöhen-Regelstrecke

Ein detailliertes Modell der gesamten Rührkesselreaktor-Anlage wurde von *Kamcheu, 2011* hergeleitet und verifiziert. In diesem Abschnitt wird die Modellierung der Füllhöhendynamik hergeleitet, um eine simulative Erprobung des Parametrierungs-Verfahrens

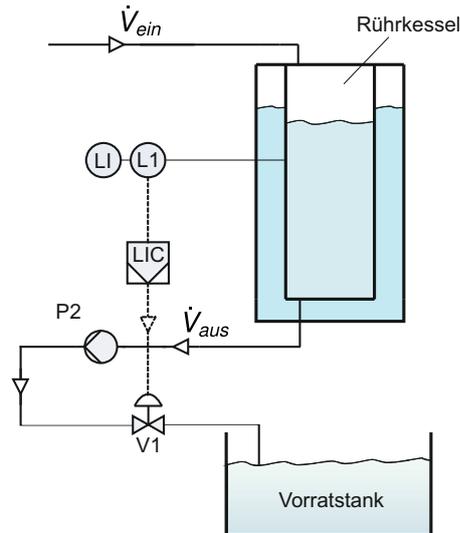


Abbildung 8.2: RI-Schema der Füllhöhenregelstrecke

zu ermöglichen.

Die Füllhöhe l , $[l] = \text{cm}$ des zylindrischen Kessels berechnet sich aus dem Wasservolumen V , $[V] = \text{l}$ im Kessel sowie der Grundfläche des Kessels A , $[A] = \text{m}^2$. Mit den in den Kessel zu- und abfließenden Volumenströmen \dot{V}_{ein} , $[\dot{V}_{\text{ein}}] = \text{l/h}$ und \dot{V}_{aus} , $[\dot{V}_{\text{aus}}] = \text{l/h}$ berechnet sich die Füllhöhe $l(t)$ als Funktion der Zeit t , $[t] = \text{sec}$ entsprechend zu

$$l(t) = \frac{1}{36 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{A} \int_0^t (\dot{V}_{\text{ein}} - \dot{V}_{\text{aus}}(\tau)) \, d\tau + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{A} V(t=0). \quad (8.1)$$

Aus (8.1) kann das integrierende Verhalten der Strecke abgelesen werden. Der Volumenfluss $-\dot{V}_{\text{aus}}(t)$ stellt dabei die durch den Aktor V1 aufgeprägte Stellgröße der Strecke dar. Der im Arbeitspunkt konstante Volumenfluss \dot{V}_{ein} kann als eine Störung am Streckeneingang aufgefasst werden, sodass sich der Streckeneingang zu $\tilde{u} = \dot{V}_{\text{ein}} - \dot{V}_{\text{aus}}(t)$ ergibt. Des Weiteren ist an der Anlage eine Totzeit am Streckenausgang von $T_t = 0,5 \text{ sec}$ implementiert, um eine Buslaufzeit zwischen Anlage und Regler nachzustellen, wie sie in großtechnischen Systemen oftmals auftritt.

Die nominale Grundfläche des Kessels ist aus Konstruktionszeichnungen bekannt und beträgt $A = 0,031 \text{ m}^2$. Im Kessel befindet sich weiterhin ein Rührwerk sowie Rohrleitungen zum Überlaufschutz, die jeweils ein unbekanntes Volumen einnehmen. Diese Volumenverringerng des Tanks kann als Verringerung der nominalen Fläche auf die effektive Fläche $A_{\text{eff}} \approx 0,95 \cdot A$ des Tanks modelliert werden.

Weiterhin besitzt das Ventil V1 einen unterlagerten Positionsregler, der die Ventilposition und somit den Volumenfluss \dot{V}_{aus} auf den vorgegebenen Sollwert regelt. Die Dynamik dieses Regelkreises wird hier als wesentlich schneller als die der Füllhöhenregelstrecke angenommen und deshalb bei der Modellierung vernachlässigt.

Die Übertragungsfunktion der Füllhöhenregelstrecke kann somit geschrieben werden zu

$$G_s = \frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{c}{s} \cdot e^{-s \cdot T_t} \quad (8.2)$$

mit der Volumenflussdifferenz $\tilde{u}(t) = \dot{V}_{\text{ein}} - \dot{V}_{\text{aus}}(t)$ als Eingangsgröße, der Füllhöhe $y(t) = l(t)$ als Ausgangsgröße und dem Integrationsbeiwert $c = \frac{1}{36 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{A_{\text{eff}}}$.

8.3 Problemformulierung

Der Volumenfluss \dot{V}_{ein} in den Kessel und die Füllhöhe l definieren den Arbeitspunkt des betrachteten Rührkesselreaktors. Im Betrieb werden der Anlage verschiedene Stoffmengen im Kessel und somit verschiedene Sollfüllstände l_{soll} wie auch verschiedene Volumenflüsse \dot{V}_{ein} vorgegeben, um die Erzeugung unterschiedlicher Produkte beziehungsweise Produktqualitäten nachzustellen. Entsprechend muss die verwendete Regelungsstruktur gutes Stör- und Führungsverhalten gewährleisten, weshalb ein sollwertgewichteter PI-Regler, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, zur Füllhöhenregelung verwendet wird.

Der geschlossenen Füllhöhenregelkreis mit sollwertgewichtetem PI-Regler kann wie in Abbildung 8.3 dargestellt werden und soll hier entsprechend des in Abschnitt 7.2 angegebenen Verfahrens parametrisiert werden.

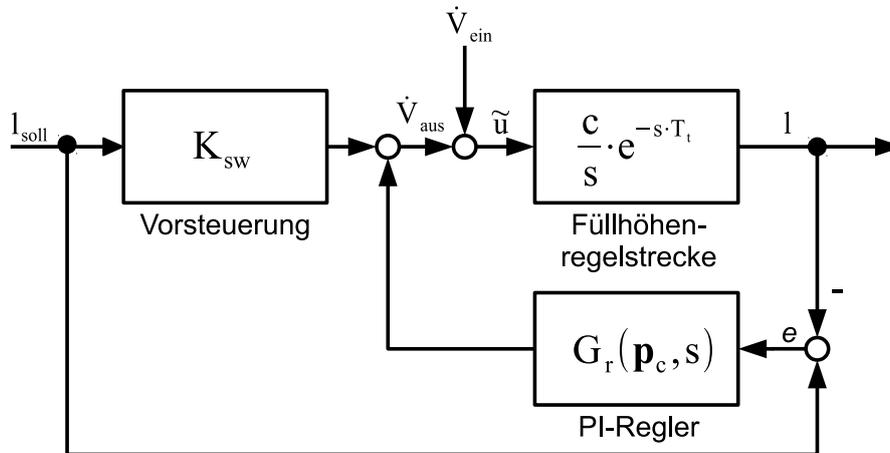


Abbildung 8.3: Füllhöhenregelstrecke mit sollwertgewichtetem PI-Regler

Anwendung des Verfahrens zur global güteoptimalen Parametrierung

Das in Abschnitt 7.2 dieser Arbeit angegebene Verfahren zur global güteoptimalen Parametrierung kann für den betrachteten sollwertgewichteten PI-Füllhöhenregler wie folgt verwendet werden.

1. Formulierung des Parametrierungsziels anhand konvexer Güteindizes

Die Ziele der Parametrierung können wie folgt angegeben werden:

- **PI-Parametrierung**

Ein gutes Störverhalten sei durch einen möglichst geringen Regelfehler beziehungsweise eine kleine Regelfehlerfläche nach dem Auftritt der Störung gekennzeichnet, wobei die Regelfehlerfläche durch den IAE-Index (2.9) quantifiziert wird.

- **Vorsteuerungs-Parametrierung**

Ein gutes Führungsverhalten sei durch ein minimales Überschwingen (2.8) der Füllhöhe nach einer Sollwertänderung beschrieben, um ein Leer- oder Überlaufen des Tanks zu vermeiden.

Als konvexe Güteindizes werden entsprechend der IAE zur PI-Parametrierung und die Überschwingweite der Messgröße zur Vorsteuerungs-Parametrierung verwendet.

Bemerkung 8.1. Die Messgröße y wurde in den Konvexitätsnachweisen des Kapitels 4 nicht betrachtet, jedoch lässt sich aus

$$G_{yw} = G_s \cdot \frac{G_r + K_{sw}}{1 + G_s G_r} \quad (8.3)$$

erkennen, dass auch hier der Vorsteuerungsparameter $K_{sw} \in \mathbb{K}$ affin in das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion vom angeregten Eingang w auf das vom Index bewertete Signal y eingeht. Entsprechend kann äquivalent zu den Abschnitten 4.4 und 4.5 die Konvexität der Definitionsmenge des Parametrierungsproblems auf die Konvexität der Parametermenge \mathbb{K} zurück geführt werden.

2. Wahl der Anregung zur Bestimmung der Güteindizewerte

Zur Bestimmung der Indizewerte wird der jeweilige Eingang des geschlossenen Kreises mit den Sprungfunktionen

$$d_{\text{stim}} = d_{\text{stat}} - \sigma(t) \cdot 200 \text{ l/h} \quad w_{\text{stim}} = w_{\text{stat}} + \sigma(t) \cdot 2 \text{ cm} \quad (8.4)$$

angeregt, wobei d_{stat} und w_{stat} die Stationärwerte der Systemgrößen $d(t)$ und $l(t)$ im betrachteten Arbeitspunkt der Anlage bezeichnen.

3. Bestimmung der Mengen \mathbb{K} und \mathbb{P}_{stab} und Prüfung auf Konvexität

Die im Verfahren vorgesehene Prüfung der Menge \mathbb{P}_{stab} auf Konvexität ist hier nicht notwendig, da in Beispiel 5.4 bereits gezeigt wurde, dass die Menge \mathbb{P}_{stab} für einen PI-Regler mit einer Strecke gemäß (8.2) stets konvex ist. Die Vorsteuerungs-Parametrierung wird hier über die konvexe Menge der reellen Zahlen durchgeführt, entsprechend gilt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

4. Wahl der Initialparameter und Schrittweiten für Algorithmus 2 und 3

Die Menge \mathbb{P}_{stab} wird in Abschnitt 8.4 für das nominale Streckenmodell bestimmt,

um stabilisierende Initialparameter und die Schrittweite des Algorithmus 3 zu bestimmen. Die Initialparameter und Schrittweiten der Algorithmen 3 und 2 für die Simulation und reale Anwendung sind in den jeweiligen Abschnitten dieses Kapitels angegeben.

5. Parametrierung nach Versuchsplanung anhand der Algorithmen 2 und 3

Entsprechend der in Abschnitt 7.1 angegebenen Versuchsplanung ergeben sich die Schritte zur Parametrierung der Regelungsstruktur in Abbildung 8.3 wie folgt:

- a) Parametrierung des PI-Reglers auf gutes Störverhalten, ausgedrückt durch minimalen IAE nach Störanregung, anhand von Algorithmus 3,
- b) Parametrierung des Vorsteuerungs-Parameters auf gutes Führungsverhalten, ausgedrückt durch minimale Überschwingweite der Messgröße nach Sollwertanregung, anhand von Algorithmus 2.

In den folgenden Abschnitten wird die Anwendung des in dieser Arbeit vorgestellten Parametrierungs-Verfahrens in Simulation und realer Anwendung gezeigt. Um die in Kapitel 4 und 5 nicht betrachteten Effekte von Aktorsättigung, Füllhöhenbegrenzung und Messwerttauschen zu untersuchen, wird das nominale Streckenmodell (8.2) schrittweise um diese Effekte erweitert und anhand der Simulation deren Einfluss auf die betrachteten Parametrierungsprobleme gezeigt. Im Anschluss werden die Ergebnisse der Anwendung des Parametrierungs-Verfahrens an der realen Füllstandregelstrecke präsentiert und erörtert.

8.4 Ergebnisse aus der Simulation

Um den Ablauf des vorgestellten Verfahrens sowie den Einfluss von Messrauschen und Begrenzungen in der Mess- und Stellgröße auf die Indizeverläufe darstellen zu können, wurden Simulationen anhand des in Abschnitt 8.2 hergeleiteten Streckenmodells mit der Übertragungsfunktion

$$G_s = \frac{1}{36 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{0,95 \cdot 0,031} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0,5} \quad (8.5)$$

vorgenommen. Zur Berechnung der Sprungantworten des geschlossenen Kreises beziehungsweise der daraus resultierenden Indexwerte wurde der geschlossene Kreis im MATLAB/Simulink Softwaresystem der Firma The MathWorks, Inc. in Version R2011b implementiert und simuliert.

Zur numerischen Simulation wurde die kontinuierliche Übertragungsfunktion der Strecke nach dem eulerschen Polygonzugverfahren mit einer kleinen Abtastzeit von $T_{abt} = 0,01 \text{ sec}$ diskretisiert, um ein quasi-kontinuierliches Verhalten anzunähern. Der Regler wurde, wie in Abschnitt 7.4, anhand der bilinearen Transformation ebenfalls mit einer

Abtastzeit von $T_{\text{abt}} = 0,01$ sec diskretisiert.

Weiterhin wurden die Parametrierungs-Algorithmen 2 und 3 in der MATLAB-eigenen Programmiersprache implementiert, um die Verstellung der Reglerparameter im simulierten Regelkreis sowie die Auswertung der Signale zu ermöglichen.

Untersuchungen am nominalen Modell

Abbildung 8.4 zeigt die Menge der stabilisierenden PI-Reglerparameter für die Strecke (8.5), welche wie bereits in Beispiel 5.4 gezeigt unabhängig von den Streckenparameter-Werten konvex ist. Die Initialparameter und Schrittweiten für Algorithmus 3 können

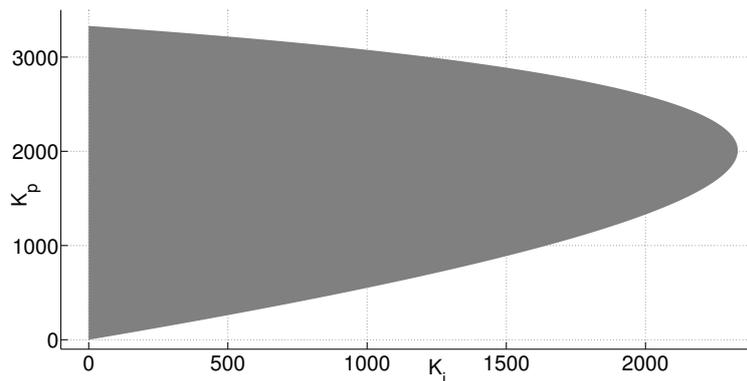


Abbildung 8.4: \mathbb{P}_{stab} für PI-Regler mit Strecke nach (8.5)

anhand der gefundenen Menge \mathbb{P}_{stab} wie in Tabelle 8.1 angegeben bestimmt werden.

Tabelle 8.1: Parameter der Algorithmen 2 und 3

Parameter	Initialwert	Schrittweite
K_p	500	500
K_i	150	150
K_{sw}	0	500

Um die aus der Simulation gewonnenen Verläufe der Güteindizes über die Regler- beziehungsweise Vorsteuerungs-Parameter zu visualisieren, wurden die Parameter gemäß Tabelle 8.2 gerastert und die Indexwerte an den jeweiligen Parameterwerten bestimmt. Als stationäre Eingangssignale wurden hier beispielhaft $d_{\text{stat}} = 4001/\text{h}$ und $w_{\text{stat}} = 20$ cm verwendet.

Abbildung 8.5 zeigt den konvexen Verlauf des IAE über die Menge \mathbb{P}_{stab} für die Strecke (8.5). Weiterhin ist der Verlauf von Algorithmus 3 mit den Parametern gemäß Tabelle 8.1 gezeigt. Abbildung 8.6 zeigt den konvexen Verlauf der Überschwingweite der Messgröße $y(t)$ über den Vorsteuerungs-Parameter mit den IAE-optimalen PI-Parametern $K_p^* = 1900$ und $K_i^* = 930$ sowie den Verlauf von Algorithmus 2 mit Parametern gemäß

Tabelle 8.2: Schrittweiten in den Regler- bzw. Vorsteuerungs-Parametern zur Simulation der Indexverläufe in Abbildung 8.5 und 8.6

ΔK_p	20
ΔK_i	10
ΔK_{sw}	100

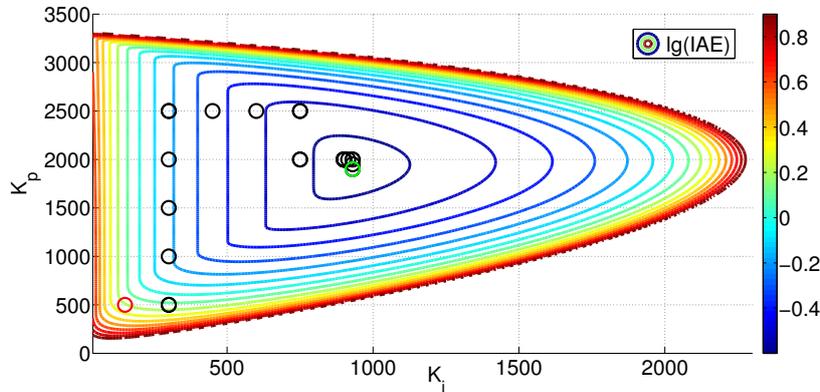


Abbildung 8.5: logarithmischer Verlauf des IAE-Index und des Algorithmus 3 über stabilisierende PI-Parameter

Tabelle 8.1. Hierbei kennzeichnet das rote Kreissymbol \circ die Initialparameter und das grüne Kreissymbol die als optimal gefundenen Parameter. Die schwarzen Kreissymbole zeigen die Iterationsschritte der Algorithmen 3 beziehungsweise 2, zu denen ein Indexwert bestimmt wurde. Um ein genaueres Auffinden der global optimalen Parameter zu ermöglichen, wurden die Algorithmen nach dem Erkennen des erstmaligen Konvergierens mit einem Zehntel der initialen Schrittweite erneut gestartet. Als Initialwert der Parameter wurden hierbei die aus dem vorherigen Lauf als optimal gefundenen Parameter verwendet.

Tabelle 8.3 zeigt die von den Algorithmen nach 30 beziehungsweise 10 Schritten als optimal gefundenen Parameter sowie die damit erreichten minimalen Indexwerte.

Tabelle 8.3: global optimale Regler- bzw. Vorsteuerungs-Parameter und zugehörige Indexwerte

optimale Parameter	Indexwert
$K_p^* = 1900 \quad K_i^* = 930$	$IAE = 0.2353$
$K_{sw}^* = -1900$	$USW = 22.0005$

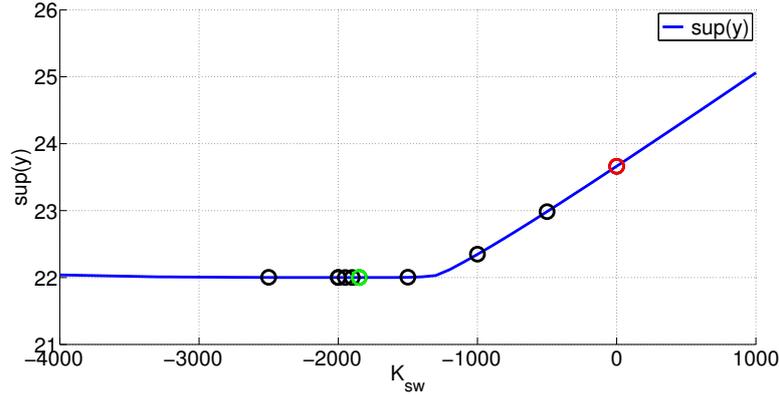


Abbildung 8.6: Verlauf der Überschwingweite der Messgröße und des Algorithmus 2 über den Vorsteuerungsparameter mit $K_p = 1900$ und $K_i = 930$

Beschränkungen in Mess- und Stellgröße

In der realen Anlage unterliegt die Füllhöhe des Kessels $l(t)$ sowie die Volumenflüsse $\dot{V}_{\text{ein}}(t)$ und $\dot{V}_{\text{aus}}(t)$ durch die Ventile V1 respektive V2 physikalischen Grenzen, die in Tabelle 8.4 angegeben sind. Um den Einfluss dieser Beschränkungen in der Mess- und

Tabelle 8.4: physikalisch begrenzte Signalwertebereiche in der realen Anlage

Größe	Wertebereich
l	$[0, 43]$ cm
\dot{V}_{aus}	$[0, 1440]$ l/h
\dot{V}_{ein}	$[50, 640]$ l/h

Stellgröße auf den Verlauf der Indexwerte als Funktionen der Regler- und Vorsteuerungsparameter zu zeigen, wurde das Streckenmodell (8.5) um die Beschränkungen in den Signalen gemäß Tabelle 8.4 erweitert.

Die Abbildungen 8.7 und 8.9 zeigen den Verlauf der Indizes für das Streckenmodell mit Beschränkungen in Mess- und Stellgröße wie in den Abbildungen 8.5 und 8.6. Es ist zu erkennen, dass für den gewählten Arbeitspunkt $d_{\text{stat}} = 400$ l/h und $w_{\text{stat}} = 20$ cm der Verlauf des IAE-Index über der Menge \mathbb{P}_{stab} nicht von dem in Abbildung 8.5 gezeigten Verlauf abweicht, da für den Fall der gewählten Störanregung keine der Begrenzungen erreicht wird. Weiterhin ist aus Abbildung 8.7 ersichtlich, dass die Begrenzung der Stellgröße den Bereich der finiten IAE-Werte über die Menge \mathbb{P}_{stab} hinaus in Richtung großer K_p -Werte erweitert. Jedoch liegen die Werte des IAE-Index außerhalb der Menge \mathbb{P}_{stab} deutlich über denen in der Menge. Sofern der Parametrierungs-Algorithmus 3, wie in Abbildung 8.7 gezeigt, mit Initialparametern aus \mathbb{P}_{stab} gestartet wurde, ist somit stets davon auszugehen, dass dieser auch auf das globale Minimum in \mathbb{P}_{stab} konvergiert.

Aus dem Vergleich der Abbildungen 8.9 und 8.6 ist ein deutlicher Unterschied im Verlauf der Überschwingweite als Funktion des Vorsteuerungs-Parameters zu erkennen, da der Indexverlauf in diesem Fall nicht mehr konvex, sondern quasikonvex/unimodal ist. Dies

ist darin begründet, dass für jeden Wert des Vorsteuerungs-Parameters die Begrenzung der Stellgröße erreicht wurde. Aus Abbildung 8.9 ist ebenfalls zu erkennen, dass auch das Minimum des unimodalen Verlaufs der Überschwingweite von Algorithmus 2 gefunden werden kann. In Tabelle 8.5 sind die von Algorithmus 2 und 3 als global güteoptimal gefundenen Parameter angegeben, die sich nicht von denen in Tabelle 8.3 unterscheiden.

Zur Untersuchung des Einflusses der Stellgrößenbegrenzung auf die PI-Parametrierung zeigt Abbildung 8.8 den IAE Verlauf wie in Abbildung 8.7, jedoch abweichend mit $d_{\text{stat}} = 2501/\text{h}$. Durch den geringeren Massenfluss in den Tank erreicht die Stellgröße für die Mehrzahl der in Abbildung 8.8 gezeigten Reglerparameter die Begrenzung. Jedoch kann auch für diesen Fall erkannt werden, dass der IAE als Funktion der PI-Parameter weiterhin eine unimodale Funktion ist, deren globales Minimum anhand von Algorithmus 3 gefunden werden kann. Zudem zeigt Abbildung 8.10 den Verlauf der Überschwingweite als Funktion des Vorsteuerungs-Parameters, dessen unimodaler Verlauf aufgrund der unterschiedlichen PI-Parameter von dem in Abbildung 8.9 abweicht. Die Abbildun-

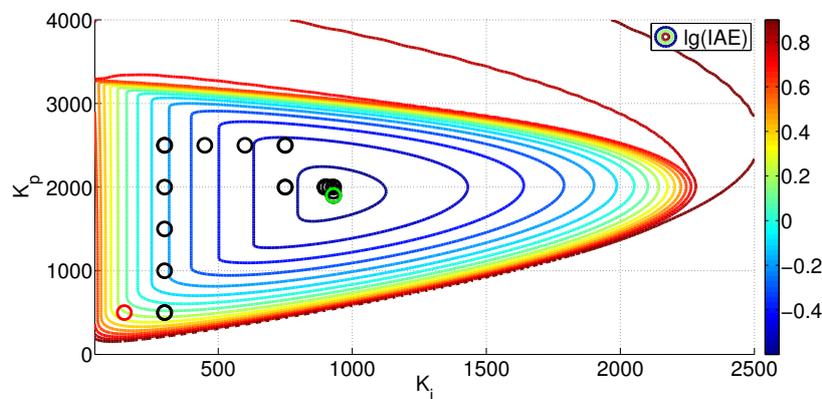


Abbildung 8.7: logarithmischer Verlauf des IAE-Index und des Algorithmus 3 über stabilisierende PI-Parameter

gen 8.8 und 8.10 zeigen, dass auch für einen unvorteilhaft gewählten Arbeitspunkt der Anlage die Verläufe der Indexfunktionen weiterhin unimodal sind. Es kann weiterhin gefolgert werden, dass sich das vorgestellte Verfahren beziehungsweise die Algorithmen zur automatisierten Parameterierung auch für Strecken mit Begrenzungen in der Mess- und Stellgröße eignen. Dies ist darin begründet, dass die Indexverläufe, wie auch schon von *Garpinger, 2009* beschrieben, für diesen Fall quasikonvexe Funktionen darstellen, deren globales Minimum von den in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen ebenfalls gefunden werden kann. Jedoch sollte für eine solche Strecke eine geeignete Anregung beziehungsweise ein geeigneter Arbeitspunkt zur Parametrierung gewählt werden, um eine zu starke Beeinflussung der Indexverläufe durch die Begrenzungen zu vermeiden.

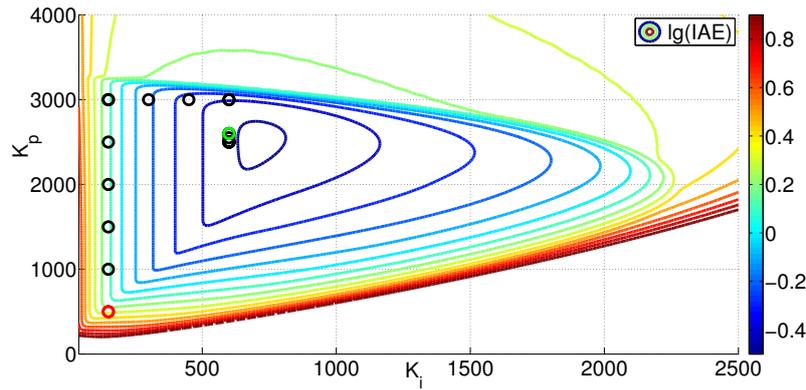


Abbildung 8.8: logarithmischer Verlauf des IAE-Index und des Algorithmus 3 über stabilisierende PI-Parameter mit $d_{\text{stat}} = 2501/h$

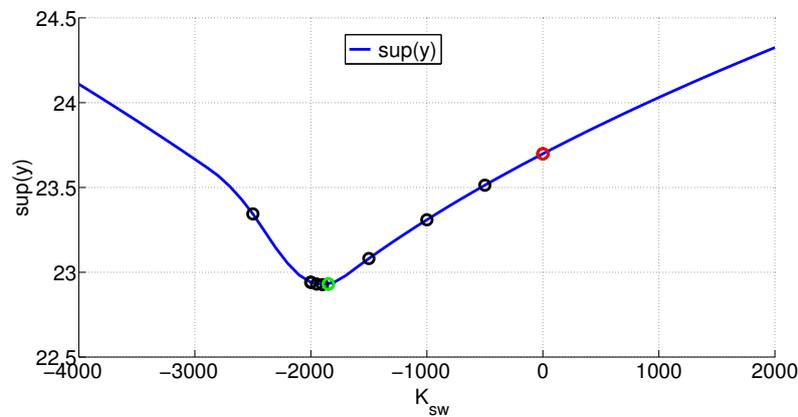


Abbildung 8.9: Verlauf der Überschwingweite der Messgröße und des Algorithmus 2 über den Vorsteuerparameter mit $d_{\text{stat}} = 4001/h$, $K_p = 1900$ und $K_i = 930$

Sensorrauschen

Der im realen System verbaute Sensor liefert eine verrauschte Messgrößen der Füllhöhe l , die, wie bereits in Abschnitt 7.3 beschrieben, einen stochastischen Verlauf der Indexwerte zur Folge hat. Um den Einfluss von Sensorrauschen auf der Messgröße getrennt von anderen auftretenden Effekten untersuchen zu können, wird die Ausgangsgröße y des Streckenmodells (8.5) um ein mittelwertfreies additives Rauschen erweitert. Das Sensorrauschen der Anlage wird hier durch ein gefiltertes weißes Rauschen¹ nachgebildet, wobei ein Tiefpassfilter mit der Übertragungsfunktion $\frac{a \cdot 0,2}{0,1 s + 1}$ und dem Gewichtungsfaktor a verwendet wird.

Die Abbildungen 8.11 - 8.14 zeigen die Index-Verläufe wie in den Abbildungen 8.5 - 8.6 für das Modell mit unterschiedlich gewichtetem, additivem Sensorrauschen. Die verwen-

¹Erzeugt durch einen *band-limited white noise* Block in Simulink mit einer Rauschleistung von 0,1.

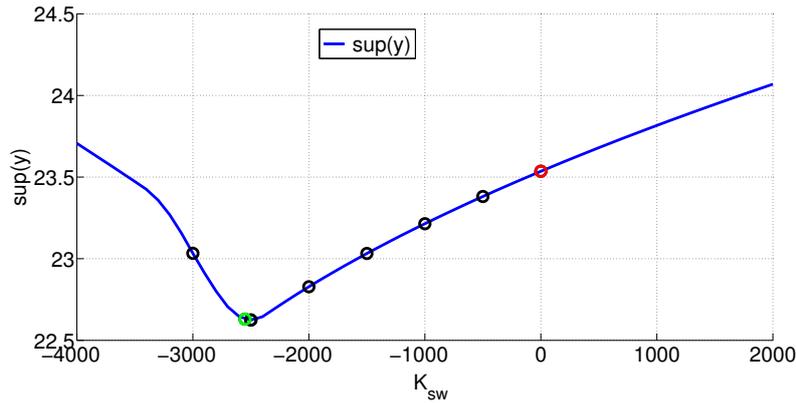


Abbildung 8.10: Verlauf der Überschwingweite der Messgröße und des Algorithmus 2 über den Vorsteuerungsparameter mit $d_{\text{stat}} = 2501/\text{h}$ und $K_p = 2500$ und $K_i = 700$

Tabelle 8.5: global optimale Regler- bzw. Vorsteuerungs-Parameter und zugehörige Indexwerte

optimale Parameter	Indexwert
$K_p^* = 1900$ $K_i^* = 930$	$IAE = 0,2353$
$K_{sw}^* = -1900$	$USW = 22,9269$

deten Parameter sowie Ergebnisse der Algorithmen 2 und 3 können den Tabellen 8.6, 8.7 und 8.8 entnommen werden.

Tabelle 8.6: Parameter der Algorithmen 2 und 3

Parameter	Initialwert	Schrittweite
K_p	2500	600
K_i	1400	200
K_{sw}	1000	500

Wie bereits in Abschnitt 7.3 dargelegt, ist aus den Abbildungen zu erkennen, dass die Indexverläufe durch das Sensorrauschen eine stochastische Komponente erhalten. Weiterhin ist aus dem Vergleich der Abbildungen 8.11 und 8.13 zu erkennen, dass ein stärkeres Rauschen einen stärker stochastischen Verlauf der Indexwerte zur Folge hat. Dieser Effekt ist durch den integrierenden Charakter des Index im Verlauf des IAE besonders ausgeprägt.

Dies kann für den bereits beschriebenen Fall, dass keine klare Zuordnung des jeweiligen Indexwertes zu Parameterwerten mehr möglich ist, zu Konvergenzproblemen der vorgestellten Algorithmen führen. Aus den Abbildungen 8.5 und 8.6 ist zu erkennen, dass dies insbesondere bei flachen Indexverläufen, wie sie oftmals um das globale Optimum vorkommen, oder bei starkem Sensorrauschen auftritt. In diesen Fällen kann, wie in

Tabelle 8.7: global optimale Regler- bzw. Vorsteuerungs-Parameter und zugehörige Indexwerte für $a = 0, 1$

optimale Parameter	Indexwert
$K_p^* = 1300 \quad K_i^* = 600$	$IAE = 1,8746$
$K_{sw}^* = -1500$	$USW = 22,0602$

Tabelle 8.8: global optimale Regler- bzw. Vorsteuerungs-Parameter und zugehörige Indexwerte für $a = 1$

optimale Parameter	Indexwert
$K_p^* = 1300 \quad K_i^* = 800$	$IAE = 16,0086$
$K_{sw}^* = -1000$	$USW = 22,5390$

Abschnitt 7.3 beschrieben, durch die Wahl einer ausreichend großen Schrittweite oder der Verwendung eines Filters eine eindeutige Zuordnung des jeweiligen Indexwertes zu den vom Algorithmus gewählten Parametern und somit dessen Konvergenz sichergestellt werden.

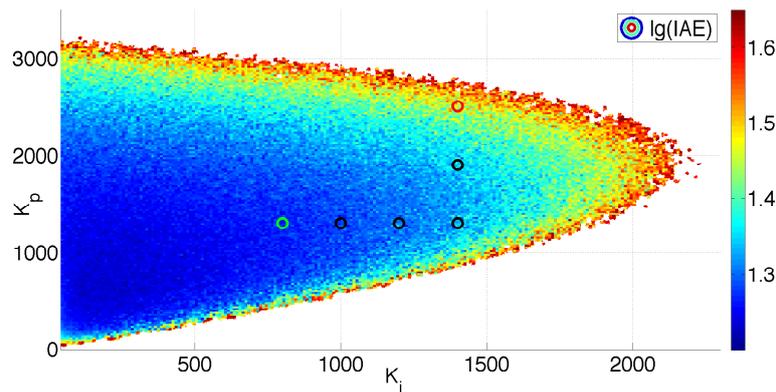


Abbildung 8.11: Verlauf des IAE-Index und des Algorithmus 3 über stabilisierende PI-Parameter mit additivem Sensorrauschen und $a = 1$

Gleichzeitiges Auftreten von Beschränkungen und Sensorrauschen

In diesem Abschnitt wird das gemeinsame Auftreten sämtlicher in den vorangegangenen Unterabschnitten beschriebener Effekte betrachtet, um das Verhalten der realen Anlage in der Simulation anzunähern.

Aus den Abbildungen 8.15 und 8.16 ist ersichtlich, dass das gleichzeitige Auftreten von Begrenzungen und Sensorrauschen zur Folge hat, dass die durch die einzelnen Effekte hervorgerufenen Änderungen in den Sensorverläufen gleichzeitig auftreten. So zeigt Abbildung 8.15, dass der Verlauf der finiten IAE Werte auch hier in den Bereich großer

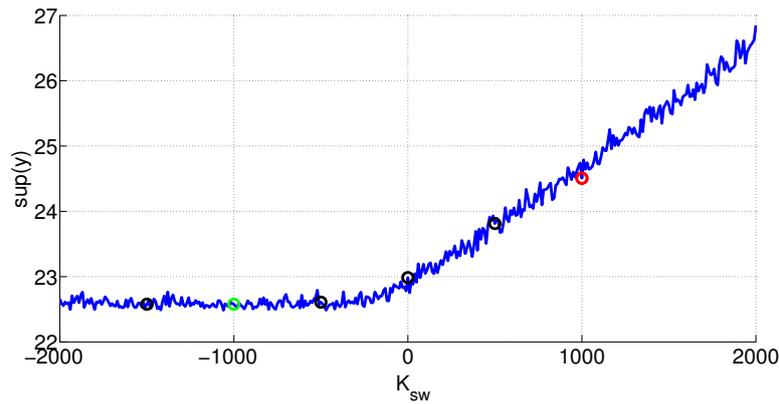


Abbildung 8.12: Verlauf der Überschwingweite der Messgröße und des Algorithmus 2 über den Vorsteuerungsparameter mit $K_p = 1300$ und $K_i = 800$ und $a = 1$

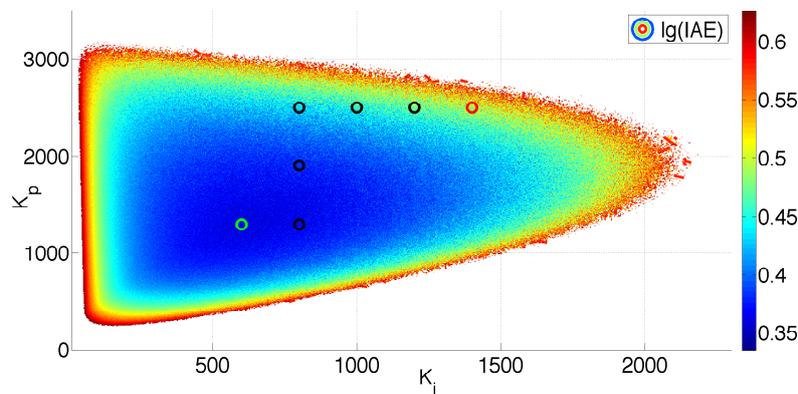


Abbildung 8.13: Verlauf des IAE-Index und des Algorithmus 3 über stabilisierende PI-Parameter mit additivem Sensorrauschen und $a = 0,1$

K_p ausgedehnt wird und der Indexverlauf gleichzeitig eine durch das Sensorrauschen bedingte stochastische Komponente erhält. Der Indexverlauf in Abbildung 8.16 zeigt ebenfalls sowohl den durch die Stellgrößenbegrenzung hervorgerufenen Wiederanstieg des Indexwertes bei negativen Parameterwerten als auch die durch das Sensorrauschen bedingte stochastische Komponente des Indexverlaufes. Auch bei gleichzeitiger Betrachtung von Begrenzungen in Mess- und Stellsignal sowie dem Sensorrauschen zeigen die Indexverläufe in Abbildung 8.15 und 8.16 quasikonvexes Verhalten mit einer stochastischen Komponente und die Algorithmen 2 und 3 sind anhand der in Tabelle 8.9 angegebenen Parameter in der Lage, die globalen Optima zu approximieren. Sofern eine geeignete Schrittweite der Algorithmen gewählt wird, scheint die Anwendung des vorgestellten Verfahrens somit trotz der an der realen Strecke vorkommenden Begrenzungen und Rauscheinflüsse vielversprechend und wird deshalb im folgenden Abschnitt untersucht.

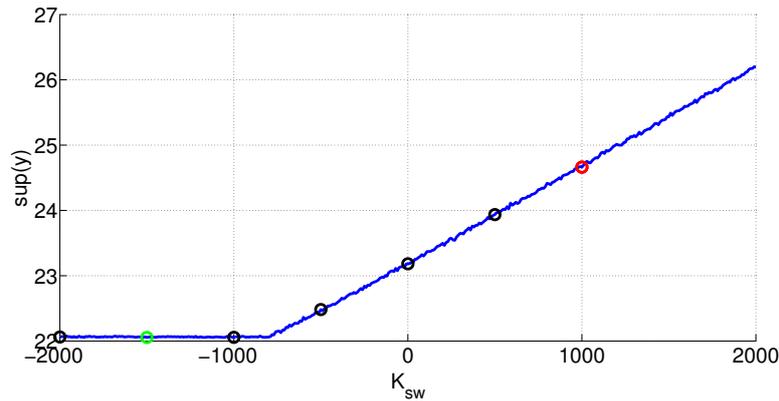


Abbildung 8.14: Verlauf der Überschwingweite der Messgröße und des Algorithmus 2 über den Vorsteuerungsparameter mit $K_p = 1300$ und $K_i = 600$ und $a = 0,1$

Tabelle 8.9: Parameter der Algorithmen 2 und 3

Parameter	Initialwert	Schrittweite
K_p	2500	600
K_i	1400	200
K_{sw}	1000	500

8.5 Anwendung am realen System

Zur Erprobung des in dieser Arbeit vorgestellten Parametrierungs-Verfahrens an der realen Füllstands-Regelstrecke wurde diese anhand eines dSPACE DS1103 control boards² und der dSPACE ControlDesk Software² in Version 3.6 an ein Computer-System mit einer Installation des MATLAB/Simulink Softwaresystems der Firma The MathWorks, Inc. in Version R2011b angeschlossen. Das DS1103 control board diente in diesem Aufbau zur Ausführung der in Simulink implementierten Regler in Echtzeit sowie zur Messwerterfassung und Stellgrößenausgabe auf die Anlage. Die ControlDesk Software bietet Zugriff auf die Regler- und Vorsteuerungs-Parameter, die Anregungen der Strecke und die gemessenen Signale während der Laufzeit. Weiterhin existiert über die ControlDesk Automation Schnittstelle² die Möglichkeit, diese Zugriffe per Script in der Program-

² siehe dspace.de

Tabelle 8.10: global optimale Regler- bzw. Vorsteuerungs-Parameter und zugehörige Indexwerte

optimale Parameter	Indexwert
$K_p^* = 1300$ $K_i^* = 600$	$IAE = 1,9279$
$K_{sw}^* = -1500$	$USW = 22,9422$

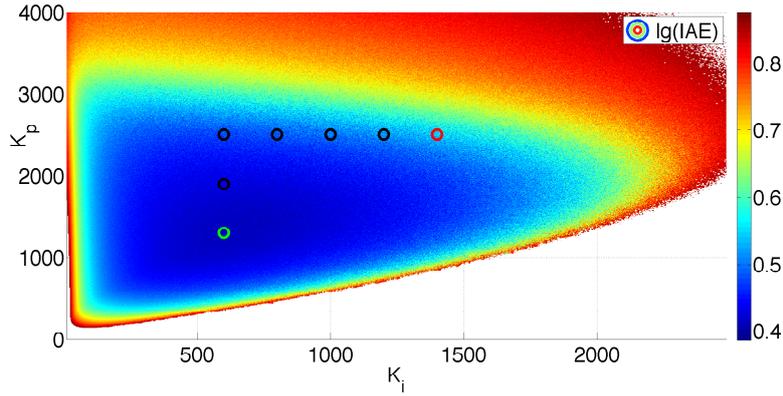


Abbildung 8.15: Verlauf des IAE-Index und des Algorithmus 3 über stabilisierende PI-Parameter mit additivem Sensorrauschen, $a = 0,1$ und den Begrenzungen in Tabelle 8.4.

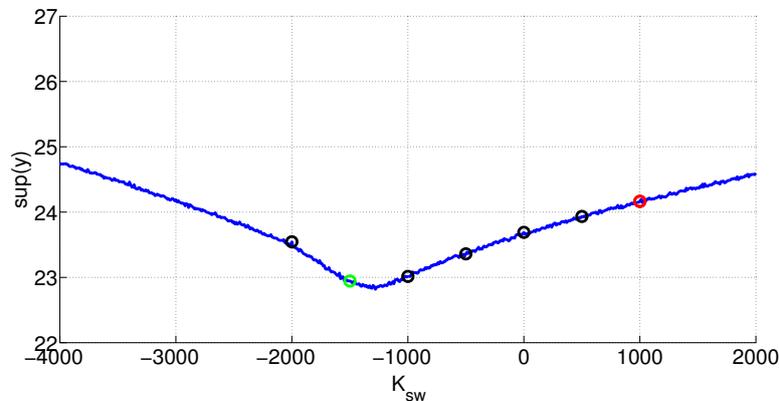


Abbildung 8.16: Verlauf der Überschwingweite der Messgröße und des Algorithmus 2 über den Vorsteuerungsparameter mit $K_p = 1300$ und $K_i = 600$, $a = 0,1$ und den Begrenzungen in Tabelle 8.4.

miersprache Python zu automatisieren sowie die Messwerte zu verarbeiten und somit die Algorithmen 4, 3 und 2 zu implementieren. Der PI-Regler wurde hier wie in Kapitel 7.4 diskret mit einer Abtastzeit von $T_{abt} = 0,01 \text{ sec}$ implementiert, die Abtastzeit zur Messwernerfassung und Stellgrößenabgabe betrug ebenfalls $T_{abt} = 0,01 \text{ sec}$. Eine detaillierte Beschreibung zur Implementierung der Regelungsstruktur sowie der Parametrierungsalgorithmen in der Matlab/Simulink beziehungsweise dSPACE/Python Software-Umgebung findet sich bei *Shang, 2013*. Zur automatisierten Parametrierung des sollwertgewichteten PI-Reglers wurde das in Abschnitt 8.3 vorgestellte Verfahren verwendet.

Parameter und Anregungen

Als Initialparameter der Regelungsstruktur und Schrittweiten in Algorithmus 3 wurden die in Tabelle 8.11 angegebenen Werte gewählt. Zur Erzeugung der Indexwerte

Tabelle 8.11: Initialparameter und Schrittweiten zur Parametrierung

Parameter	Initialparameter	Schrittweite
K_p	100	100
K_i	10	25
K_{sw}	1000	250

wurden die Stör- und Stellgröße entsprechend (8.4) angeregt, mit $d_{stat} = 4001/h$ und $w_{stat} = 20$ cm.

Der zur PI-Parametrierung verwendete IAE-Index (2.9) wurde über die Zeit $T_{IAE} = 125$ sec berechnet. Um ein geeignetes Abbruchkriterium für die PI-Parametrierung zu finden, wurde der IAE Index-Wert über mittelwertfreies Füllhöhensensor-Rauschen zu $IAE_{rausch} \approx 13$ bestimmt. Entsprechend wurde als Abbruchkriterium das Unterschreiten des Grenzwertes $IAE_{lim} = 14$ verwendet. Das mittelwertfreie additive Messrauschen des in der Anlage verbauten Füllhöhensensor erreicht maximale Amplituden von $\hat{y}_{rausch} = 0,5$ cm. Entsprechend kann ein maximaler Signalpegel von $y_{ÜSW} = 22,5$ cm nach der Sollwertanregung als überschwingfreies Verhalten betrachtet werden. Hier wurde das Unterschreiten eines maximalen Überschwingens der Ausgangsgröße von $y_{ÜSWlim} = 22,55$ cm als Abbruchkriterium für die Vorsteuerungs-Parametrierung verwendet.

Verläufe und Ergebnisse der Parametrierungen

Die Abbildungen 8.17 und 8.20 zeigen den Verlauf der Parametrierung am realen System anhand der Algorithmen 2 und 3 für PI- und Vorsteuerungs-Parameter. Die Parametrierungen ergeben die in Tabelle 8.12 angegebenen optimalen Parameter für den PI-Regler beziehungsweise die Vorsteuerung.

Tabelle 8.12: optimale Regler- bzw. Sollwertgewicht-Parameter und zugehörige Indexwerte

optimale Parameter	Indexwert
$K_p^* = 1000 \quad K_i^* = 85$	$IAE = 13,73$
$K_{sw}^* = -500$	$sup(y) = 22,48$

Aus Abbildung 8.17 ist zu erkennen, dass Algorithmus 3 für die PI-Parametrierung nach 12 Schritten den zu erreichenden IAE-Wert IAE_{lim} unterschreitet.

In den Abbildungen 8.18 und 8.19 sind die Störsprungantworten des geschlossenen Kreises mit den initialen sowie den so gefundenen optimalen PI-Parametern gezeigt. Wie in Abschnitt 8.3 gefordert und durch die Wahl des Abbruchkriteriums ausgedrückt, erzeugt der optimal parametrierte Regler nur einen geringen Ausschlag im Regelfehler $e(t)$ nach

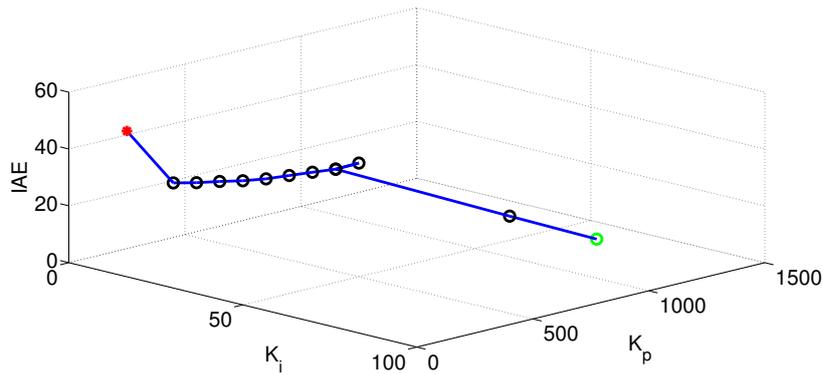


Abbildung 8.17: Verlauf von Algorithmus 3 zur PI-Parametrierung

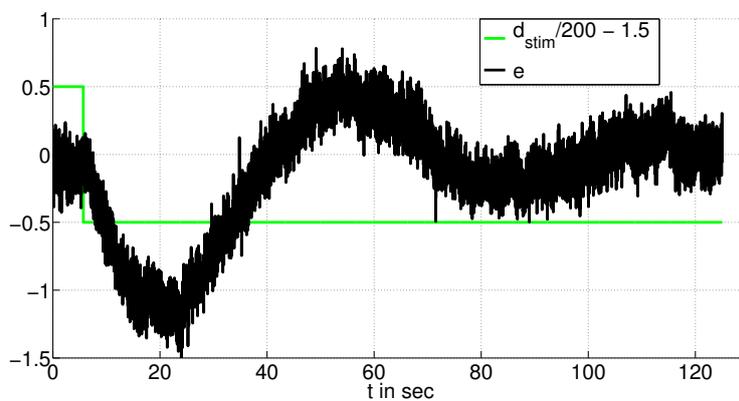


Abbildung 8.18: Störsprungantwort mit initialen PI-Parametern

der Störanregung. Abbildung 8.20 zeigt den Verlauf einer Vorsteuerungs-Parametrierung am realen System anhand von Algorithmus 2, mit den zuvor als optimal gefundenen PI-Parametern. Der Algorithmus unterschreitet die maximale Überschwingweite $y_{ÜSWlim}$ nach 8 Schritten. In den Abbildungen 8.21 und 8.22 sind die Sollsprungantworten des geschlossenen Kreises mit den initialen sowie den optimalen Vorsteuerungs-Parametern gezeigt. Es ist zu erkennen, dass das ursprünglich große Überschwingen in der Regelgröße durch die Parametrierung der Vorsteuerung erfolgreich minimiert werden konnte.

Das hier vorgestellte Anwendungsbeispiel belegt die Verwendbarkeit des in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Verfahrens zur automatisierten, güteoptimalen Parametrierung sollwertgewichteter PID-Regler in der regelungstechnischen Praxis. Trotz der in der realen Anlage vorhandenen Begrenzungen in der Mess- und Stellgröße sowie einem starken Rauschanteil im Signal des realen Füllhöehensensors konnten die güteoptimalen PI- sowie der Vorsteuerungs-Parameter anhand des Verfahrens bestimmt werden.

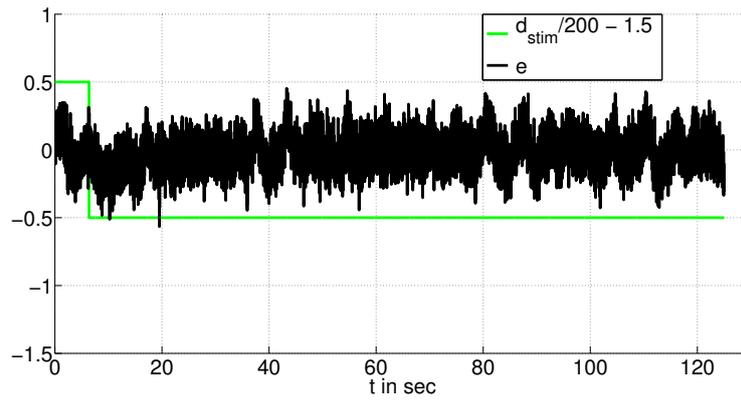


Abbildung 8.19: Störsprungantwort mit optimalen PI-Parametern

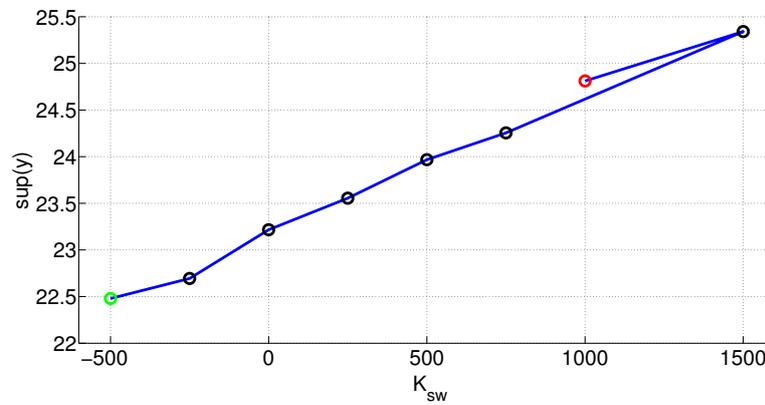


Abbildung 8.20: Verlauf von Algorithmus 3 zur Vorsteuerungs-Parametrierung

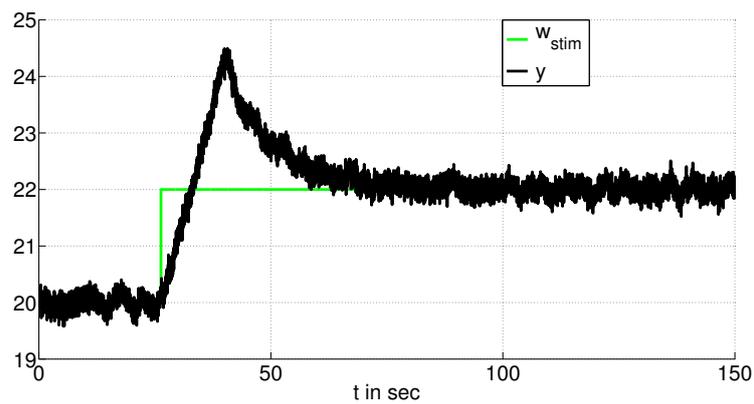


Abbildung 8.21: Sollsprungantwort mit initialem Vorsteuerungs-Parameter

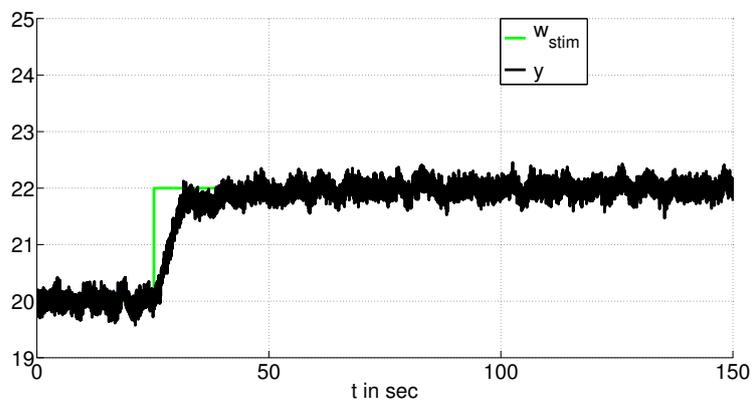


Abbildung 8.22: Sollsprungantwort mit optimalem Vorsteuerungs-Parameter

9 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur automatisierten, güteoptimalen Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern für linear zeitinvariante Strecken entwickelt. Hierzu wurde erläutert, wie sich die Güte eines Regelkreises anhand von Regelgüteindizes quantifizieren lässt und es wurde gezeigt, wie sich hiermit die güteoptimale Parametrierung eines sollwertgewichteten PID-Reglers durch zwei nacheinander zu lösende Minimierungsprobleme formulieren lässt. Weiterhin wurden existierende Verfahren zur güteoptimalen Parametrierung von PID-Reglern vorgestellt und deren Unzulänglichkeiten aufgezeigt.

Im Hauptteil der Arbeit wurde hergeleitet, unter welchen Bedingungen die bei der Parametrierung auftretenden Minimierungsprobleme konvex sind und somit lokal güteoptimale Parameter auch global güteoptimal sind. Hierzu wurde am Beispiel des integrierten absoluten Regelfehlers demonstriert, wie die Konvexität eines Güteindex als Funktion der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises bewiesen werden kann. Es wurde weiterhin gezeigt, wie sich die Definitionsmengen der Regelgüteindizes als Mengen von Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises für die betrachteten Parametrierungsprobleme ergeben. Zudem wurde hergeleitet, dass die notwendige Konvexität dieser Definitionsmengen auf die Konvexität der Parameter-Mengen, über welche die PID- beziehungsweise Vorsteuerungs-Parametrierung durchgeführt wird, zurückgeführt werden kann.

Für die PID-Parametrierung wurde aufgezeigt, wie die Menge aller stabilisierender PID-Parameter für totzeitbehaftete und totzeitfreie SISO-LZI Strecken bestimmt werden kann, um hierüber die Parametrierung durchzuführen. Da die Konvexität dieser Menge für die Konvexität der betrachteten Parametrierungsprobleme notwendig ist, wurden zudem visuelle und analytische Verfahren zur Überprüfung der Konvexität dieser Menge für PID-Regler entwickelt. Weiterhin wurde demonstriert, wie eventuell auftretende nichtkonvexe Mengen von stabilisierenden PID-Parametern durch konvexe Teilmengen approximiert werden können.

Zur Lösung der entstehenden konvexen Parametrierungsprobleme wurden in der vorliegenden Arbeit iterative Algorithmen mit fester Schrittweite vorgeschlagen, die die Konvexität der betrachteten Probleme ausnutzen. Weiterhin erzeugen diese Algorithmen einfach nachvollziehbare Parametrierungsverläufe und erlauben dem Anwender durch die Wahl der Schrittweite einen Kompromiss zwischen den notwendigen Systemanregungen und der Genauigkeit, mit der die global güteoptimalen Reglerparameter approximiert werden.

Basierend auf den gewonnenen Erkenntnissen wurde ein Verfahren zur automatisierten, güteoptimalen Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern entwickelt. Das Verfahren umfasst die Definition der zu optimierenden Regelgüte durch konvexe Indizes, die Bestimmung einer konvexen PID-Parametermenge sowie eine Versuchsplanung und die Anwendung der vorgestellten Algorithmen und wurde als ein systematisches Vorgehen zur Parametrierung angegeben.

Das vorgestellte Verfahren eignet sich zur Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern in Simulation und Praxis und garantiert die Konvergenz des jeweils verwendeten Algorithmus auf die global güteoptimalen Reglerparameter.

Um die Anforderungen im praktischen Einsatz zu berücksichtigen, wurde die Anwendung des Verfahrens zur Parametrierung von diskret implementierten Reglern simulativ untersucht. Weiterhin wurden Erweiterungen des Verfahrens zur Messwertaufbereitung bei verrauschten Messsignalen und zur Anwendung für Strecken mit ungewissen Parametern gezeigt.

Zudem wurde die erfolgreiche Anwendung des Verfahrens zur Parametrierung eines sollwertgewichteten PI-Reglers für die Füllhöhenregelung eines Rührkesselreaktors in Simulation und realer Anwendung demonstriert.

In der vorliegenden Arbeit wurde erstmals untersucht, wie das in der regelungstechnischen Praxis oftmals auftretende Problem einer güteoptimalen Parametrierung von sollwertgewichteten PID-Reglern in Form zweier konvexer Minimierungsprobleme formuliert und gelöst werden kann. Weiterhin wurde aus diesen Erkenntnissen ein Verfahren zur effizienten automatisierten Parametrierung entwickelt.

Selbstverständlich konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht sämtliche Aspekte der praktischen PID-Parametrierung auch theoretisch berücksichtigt werden. So wurden hier beispielsweise die Effekte von Begrenzungen in der Mess- und Stellgröße sowie der Einfluss von Sensorrauschen auf die konvexen Indexverläufe lediglich simulativ untersucht. Hierbei scheint beispielsweise die Begrenzung der Stellgröße dazu zu führen, dass ursprünglich konvexe Parametrierungsprobleme quasikonvexes Verhalten zeigen. Um den Zusammenhang zwischen einer Stellgrößenbegrenzung und der Quasikonvexität der Parametrierungsprobleme zu beschreiben, sind daher noch weitere theoretische Untersuchungen, die über den Umfang dieser Arbeit hinausgehen, notwendig.

Zudem wurde in der vorliegenden Arbeit am Beispiel des PI-Reglers mit integrierender Strecke mit Totzeiten $T_t \geq 0$ gezeigt, dass sich für diese Kombination aus Regler und Strecke stets konvexe Mengen von stabilisierenden PI-Parametern unabhängig von den Streckenparameterwerten ergeben. Demnach sind Parametrierungsprobleme für diese Kombination aus Regler und Strecke stets konvex, sofern konvexe Indizes zur Beschreibung der Regelgüte verwendet werden.

In der praktischen Anwendung ist die Ermittlung der Streckenstruktur aus physikalischen Überlegungen oft einfach möglich, die exakte Bestimmung der Streckenparameter jedoch aufwändig oder sogar unmöglich und eine streckenparameterunabhängige Aussage über die Konvexität der betrachteten Parametrierungsprobleme demnach von hohem Wert. Entsprechend wäre es interessant, im Rahmen weiterer Forschungsaktivitäten die

Existenz von Beweisen der Konvexität der Menge der stabilisierenden PID-Parametern unabhängig von den Streckenparameterwerten für weitere Kombinationen aus Strecken und PID-Reglern zu untersuchen, da dies das Treffen einer Aussage zur Konvexität des jeweils betrachteten Parametrierungsproblems durch den Anwender wesentlich vereinfachen würde.

Literatur

- Ackermann, J. (2002). *Robust Control: The Parameter Space Approach*. London: Springer.
- Alt, W. (2004). *Numerische Verfahren der konvexen, nichtglatten Optimierung: eine anwendungsorientierte Einführung*. 1. Aufl. Stuttgart; Leipzig; Wiesbaden: Teubner.
- Åström, K. J. und T. Hägglund (1995). *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. 2 Sub. Durham NC: ISA: The Instrumentation, Systems, und Automation Society.
- Åström, K. J. und B. Wittenmark (1997). *Computer Controlled Systems - Theory and Design*. 3. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- Åström, K. J. und T. Hägglund (2001). „The future of PID control“. In: *Control Engineering Practice* 9.11, S. 1163–1175.
- (2006). *Advanced PID control*. Durham NC: International Society of Automation.
- Bajcinca, N. (2001). „The method of singular frequencies for robust design in an affine parameter space“. In: *Proceeding of the 9th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Dubrovnik, Kroatien.
- (2013). „Methods for robust PID control“. In: *ANASH 2009*. verfügbar auf <http://www.albshkenca.org/index.php/ANASH/>.
- Bajcinca, N., R. Koeppel und J. Ackermann (2002). „Design of robust stable master-slave systems with uncertain dynamics and time-delay“. In: *Proceedings of the 15th IFAC World Congress 2002*. Barcelona, Spanien, S. 885–885.
- Blum, C. und A. Roli (2003). „Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison“. In: *ACM Computing Surveys* 35.3, S. 268–308.
- Boyd, S. P., V. Balakrishnan, C. Barratt, N. Khraishi, X. Li, D. Meyer und S. Norman (1988). „A new CAD method and associated architectures for linear controllers“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 33.3, S. 268–283.
- Boyd, S. P. und C. H. Barratt (1991). *Linear Controller Design: Limits of Performance (Prentice Hall Information and System Sciences Series)*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- Boyd, S. P. und L. Vandenberghe (2004). *Convex optimization*. Cambridge UK; New York: Cambridge University Press.
- Ding, S. X. (2013). *Model-based fault diagnosis techniques: design schemes, algorithms and tools*. 2nd ed. Advances in industrial control. New York: Springer.
- Doetsch, G. (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- El’sgol’ts, L. E. und S. B. Norikin (1973). *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. New York: Academic Press.

- Esch, J., S. X. Ding, C. Kirchner, D. Leineweber und M. Schultalbers (2011). „Ein Verfahren zur güteindexbasierten Selbsteinstellung einer Regelungsstruktur“. In: *5. ASIM Workshop Wismar*. Hochschule Wismar.
- Esch, J., T. Könings und S. X. Ding (2013a). „A Convex Optimisation Based Approach to PI-Controller Tuning For Time Invariant Integrator And Low Order Lag Plus Delay Plants“. In: *Proceedings of the 2013 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC 2013)*. Hyderabad, Indien.
- Esch, J., S. X. Ding, N. Weinhold und M. Schultalbers (2013b). „Control Performance Index Minimal Tuning of Set-Point Weighted PID-Controllers for LTI Plants Based on Convex Optimisation“. In: *Proceedings of the 21st Mediterranean Conference on Control and Automation*. Platania-Chania, Kreta, Griechenland.
- Esch, J., T. Könings und S. X. Ding (2013c). „Optimal Performance Tuning of a PI-Controller for an Integrator Plant with Uncertain Parameters as a Convex Optimisation Problem“. In: *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Florenz, Italien.
- Garpinger, O. (2009). „Design of Robust PID Controllers with Constrained Control Signal Activity“. Lizentiatarbeit. Lund Schweden: Department of Automatic Control, Lund University, Sweden.
- Garpinger, O. und T. Hägglund (2008). „A Software Tool for Robust PID Design“. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea, S. 6416–6421.
- Hägglund, T. und K. J. Åström (2002). „Revisiting The Ziegler-Nichols Tuning Rules For Pi Control“. en. In: *Asian Journal of Control* 4.4, S. 364–380.
- Haghani, A., S. X. Ding, J. Esch und H. Hao (2012). „Data-driven quality monitoring and fault detection for multimode nonlinear processes“. In: *Proceedings of the 51st IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. Maui, HI, USA, S. 1239–1244.
- Hjalmarsson, H. (2002). „Iterative feedback tuning—an overview“. In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 16.5, S. 373–395.
- Ho, M.-T., A. Datta und S. Bhattacharyya (1996). „A new approach to feedback stabilization“. In: *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996*. Bd. 4. Kobe, Japan, 4643–4648 vol.4.
- (1997). „A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers“. In: Bd. 6. American Autom. Control Council, S. 3922–3928.
- Hohenbichler, N. (2009a). „All stabilizing PID controllers for time delay systems“. In: *Automatica* 45.11, S. 2678–2684.
- (2009b). „Robuster Reglerentwurf auf Grundlage der Menge aller stabilisierenden PID-Regler“. Dissertation. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Horowitz, I. M. (1963). *Synthesis of feedback systems*. London: Academic Press Inc.
- Jelali, M. (2010). „Control System Performance Monitoring: Theory and Applications“. Habilitationsschrift. Duisburg: Universität Duisburg Essen.
- Kamcheu, F. (2011). „Modellbildung einer Rührkesselreaktoranlage“. Diplomarbeit. Duisburg: Fachgebiet Automatisierungstechnik und komplexe Systeme der Universität Duisburg-Essen.

- Killingsworth, N. und M. Krstic (2006). „PID tuning using extremum seeking: online, model-free performance optimization“. In: *IEEE Control Systems Magazine* 26.1, S. 70–79.
- Kim, T.-H., I. Maruta und T. Sugie (2008). „Robust PID controller tuning based on the constrained particle swarm optimization“. In: *Automatica* 44.4, S. 1104–1110.
- Könings, T., J. Esch, C. Kandler und S. X. Ding (2013). „Robust, Optimal PI-Controller Tuning for Integrator Plus Delay Plants With Varying Parameters Based on Randomised Algorithms“. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Control and Fault Tolerant Systems (SysTol'13)*. Nizza, Frankreich.
- Lampe, B. P. und Y. N. Rosenwasser (1997). *Digitale Regelung in kontinuierlicher Zeit*. Stuttgart: B.G. Teubner.
- Leva, A., C. Cox und A. Ruano (2002). *Hands-on PID autotuning: a guide to better utilisation*. IFAC professional brief.
- Liu, C. und C. Traas (1997). „On convexity of planar curves and its application in CAGD“. In: *Computer aided geometric design* 14.7, S. 653–669.
- Lunze, J. (2006). *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Nelder, J. A. und R. Mead (1965). „A Simplex Method for Function Minimization“. In: *The Computer Journal* 7.4, S. 308–313.
- O’Dwyer, A. (2009). *Handbook of PI and PID controller tuning rules*. 3rd ed. London; Hackensack NJ: Imperial College Press; Distributed by World Scientific Pub.
- Oppenheim, A. V., R. W. Schaffer und J. R. Buck (2004). *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. München; Boston [u.a.]: Pearson Studium.
- Parks, P. C. (1993). *Stability theory*. Prentice Hall International series in systems and control engineering. New York: Prentice Hall.
- Shang, J. (2013). *Umsetzung von Verfahren zum automatisierten PI-Regler-Tuning an einer Rührkesselreaktoranlage*. Bachelorarbeit. Universität Duisburg-Essen, Fachgebiet Automatisierungstechnik und komplexe Systeme.
- Silva, G. J., A. Datta und S. P. Bhattacharyya (2005). *PID controllers for time-delay systems*. Control engineering. Boston: Birkhäuser.
- Silva, G. J., A. Datta und S. P. Bhattacharyya (2001). „PI stabilization of first-order systems with time delay“. In: *Automatica* 37.12, S. 2025–2031.
- Skogestad, S. und I. Postlethwaite (2005). *Multivariable feedback control : analysis and design*. 2nd ed. Hoboken NJ: John Wiley.
- Tan, N. (2005). „Computation of stabilizing PI and PID controllers for processes with time delay“. In: *ISA Transactions* 44.2, S. 213–223.
- Tan, N., I. Kaya, C. Yeroğlu und D. P. Atherton (2006). „Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus“. In: *Energy Conversion and Management* 47.18-19, S. 3045–3058.
- Tempo, R., E. W. Bai und F. Dabbene (1997). „Probabilistic robustness analysis: Explicit bounds for the minimum number of samples“. In: *Systems & Control Letters* 30.5, S. 237–242.
- Thornhill, N, S Patwardhan und S Shah (2008). „A continuous stirred tank heater simulation model with applications“. In: *Journal of Process Control* 18.3-4, S. 347–360.

- Vidyasagar, M. (2001). „Randomized algorithms for robust controller synthesis using statistical learning theory“. In: *Automatica* 37.10, S. 1515–1528.
- Vilanova, R. und A. Visioli (2012). *PID control in the third millennium: lessons learned and new approaches*. London; New York: Springer.
- Visioli, A. (2001). „Optimal tuning of PID controllers for integral and unstable processes“. In: *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* 148.2, S. 180–184.
- Visioli, A. (2005). „Assessment of tuning of PI controllers for self-regulating processes“. In: *Proceedings of 16th IFAC World Congress*. Prag, Tschechien, S. 1615–1615.
- (2010). *Practical PID Control (Advances in Industrial Control)*. Softcover reprint of hardcover 1st ed. 2006. London: Springer.
- Xu, H., A. Datta und S. Bhattacharyya (2003). „PID stabilization of LTI plants with time-delay“. In: *42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Proceedings*. Bd. 4. Maui, HI, USA, 4038–4043 vol.4.
- Yang, G. (2010). „Methoden zur effizienten Selbsteinstellung und ressourcenschonenden Residuengenerierung für Regelungssysteme von Verbrennungsmotoren am Beispiel des Hochdruck-Kraftstoffsystems“. Dissertation. Duisburg: Universität Duisburg-Essen.
- Yang, G., T. Jeinsch, S. Ding, N. Weinhold und M. Schultalbers (2009). „A Performance Indices Based Self-Tuning Approach to the Calibration of the 2DOF Structured Control Loops in SI-Engines“. In: *Proceedings of the European Control Conference 2009*. Budapest, Ungarn.
- Yu, C.-C. (2006). *Autotuning of PID controllers : a relay feedback approach*. 2nd ed. London: Springer.
- Zhou, K., J. C. Doyle und K Glover (1996). *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- Ziegler, J. G. und N. B. Nichols (1942). „Optimum settings for automatic controllers“. In: *Transactions of the A.S.M.E.* S. 759–768.