

博士論文

計測解析と数値シミュレーションによる  
閉鎖性水域の地形変動に関する研究

平成 29 年 3 月

陈 娜日苏

岡山大学大学院  
環境生命科学研究科

# 目次

<b>第1章 緒論</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景と目的	1
1.2 研究概要	1
1.3 兎島湖について	2
<b>第2章 測位一測深計測</b>	<b>4</b>
2.1 GPS	4
2.1.1 概要	4
2.1.2 測位原理	4
2.1.3 RTK-GPS	7
2.1.4 まとめ	8
2.2 音響測深装置	9
2.2.1 概要	9
2.2.2 計測原理	9
2.3 方位計	10
2.3.1 概要	10
2.4 傾斜系	10
2.4.1 概要	10
2.5 計測システムの説明	10
2.5.1 システム原理の説明	10
2.6 RTK – GPS 基準局の説明	11
2.7 ネットワーク型 RTK – GPS	16
<b>第3章 地球楕円体と等角投影</b>	<b>18</b>
3.1 経度・緯度	18
3.2 高さ	18
3.3 地球モデル	19
3.4 地球楕円体のパラメータ	19
3.5 測量に使う座標系	21
3.5.1 化成緯度	21
3.5.2 空間デカルト座標系	21
3.5.3 測地学座標系	23
3.5.4 地心座標系	23
3.6 直截口	23
3.7 平均曲率半径	24

3.8	子午線曲率半径	27
3.9	卯酉線曲率半径	28
3.10	経緯度から平面直角座標への変換	28
3.10.1	子午線弧長	29
3.10.2	ガウス-クリューゲル (Gauss-Krüger) の平面座標 $(x, y)$	31
3.10.3	平面直角座標 $(X, Y)$	34
3.10.4	本研究における平面直角座標への変換	34
<b>第4章</b>	<b>児島湖の水底地形データの更新</b>	<b>35</b>
4.1	三角形有限要素メッシュと節点データ	35
4.2	測位・測深結果	36
4.2.1	2016年06月03日	37
4.2.2	2016年06月06日	37
4.2.3	2016年06月20日	37
4.2.4	2016年06月27日	37
4.2.5	2016年07月04日	37
4.2.6	2016年07月22日	43
4.2.7	2016年12月15日	43
4.2.8	2016年12月19日	43
4.2.9	2016年12月28日	43
4.3	2014年の計測結果	48
4.4	2015年の計測結果	52
4.5	2016年の計測結果	56
4.6	まとめ	60
<b>第5章</b>	<b>児島湖に発生する流れと地形変動のシミュレーション</b>	<b>61</b>
5.1	概要	61
5.2	流れの支配方程式	61
5.3	地形変動の支配方程式	72
5.4	支配方程式の空間離散化	74
5.4.1	偏導関数近似	74
5.5	常微分方程式の数値解	76
5.5.1	ルンゲ・クッタ法	76
5.5.2	アダムス・バッシュフォース法	77
5.5.3	アダムス・ムルトン法	78
5.5.4	PECEモードのアダムス・バッシュフォース・ムルトン予測子・修正子	78
5.6	流れの初期条件とパラメータの値	79
5.6.1	児島湖の水位データの前処理	84
5.6.2	児島湖のゲート開放時刻と閉鎖時刻の設定	86
5.7	地形変動シミュレーションの条件	93
5.8	流れと地形変化のシミュレーション結果	93
5.9	まとめ	102

第 6 章	児島湖の地形変動の数値シミュレーション結果	103
6.0.1	2015 年の数値シミュレーション結果	103
6.1	まとめ	117
第 7 章	計測解析および数値シミュレーションによる水底地形変動についての考察	118
7.1	概要	118
7.2	計測解析による水底地形データの変化について	118
7.2.1	ゲート付近の領域の要素分割	118
7.2.2	水底地形の更新	121
7.3	数値シミュレーションによる水底地形データの変化について	124
7.4	計測解析と数値シミュレーションによる水底地形変化の比較	126
7.5	まとめ	129
第 8 章	結論	130
第 9 章	今後の課題と展望	131
	謝辞	132
	参考文献	132

# 第1章 緒論

## 1.1 研究背景と目的

人間周囲の環境には、自然環境，社会環境がある。自然環境は私たちの周りを取り囲んでいる様々な自然要素をまとめ合わせた人間の生存や生産の外部条件である。社会環境は人間が自然環境のもとで長い時間をかけて意識的な社会労働で創造した人工環境である。人間は自分の生存のためだけではなく自らを環境に適応させ，生存の質を高めるために自らの労働で自然環境を変えてきた。その人間の活動とともに現在いろいろな環境問題が起きている。

近年，環境意識の高まりとともに，我々の生活に接する河川及び沿岸水域の環境動態に注目が集まっている。特に生活を営む人々と水系との関わり方に加え，水系における流動に起因する輸送現象が水質や生態系へ大きな影響を及ぼしている。このため，河川，湖沼，沿岸，水域，海洋などの水域における流動を正確に再現し，人間活動が水域に及ぼす影響の予想を行うことが重要である。そのためには様々な地質プロセス(浸食，運搬，堆積，突発事象)と水の流動の実態を把握する必要があり，環境影響評価等による信頼性の高い将来予測とコンピュータによる信頼性のある水循環システムシミュレーションモデルが求められる。

本研究では，閉鎖性水域の地底形状に着目し，地形変動を解析する手法について考察を行った。また，その適用例に関する考察も行った。閉鎖性水域の地形を計測解析および計算解析によって調査する。計測結果と解析結果を比較して，河川環境における地形変動の基本的なプロセスを理解し予測することを目指している。

## 1.2 研究概要

閉鎖性水域の水質を左右する要因の一つに水の流れがある。この流れを解析する手法の一つには数値シミュレーションがある。数値シミュレーションには，水深や流入-流出量など計算の対象となる領域に関するデータが必要である [1]。特に，よりの確な流れの数値解析を行うためには，最新の水底地形データを導入することが必要となる。一方，三次元の水底地形データを作成するためには，水深データと位置データと計測時の時刻データが必要となる。時刻-水深データは音響測深機から得られる，時刻-位置データはGPS(Global Positioning System：全地球測位システム)から得られる。GPSから出力される位置の情報は経緯度と楕円体高で与えられるので，経緯度データを平面直角座標に変換する必要がある。その結果得られた位置データを水深データと時刻で同期することで三次元の水底地形データが得られ，データの更新を行う時に，三次元水底地形データを新たに解析に導入し，既存の三次元水底地形データの更新が可能となる。

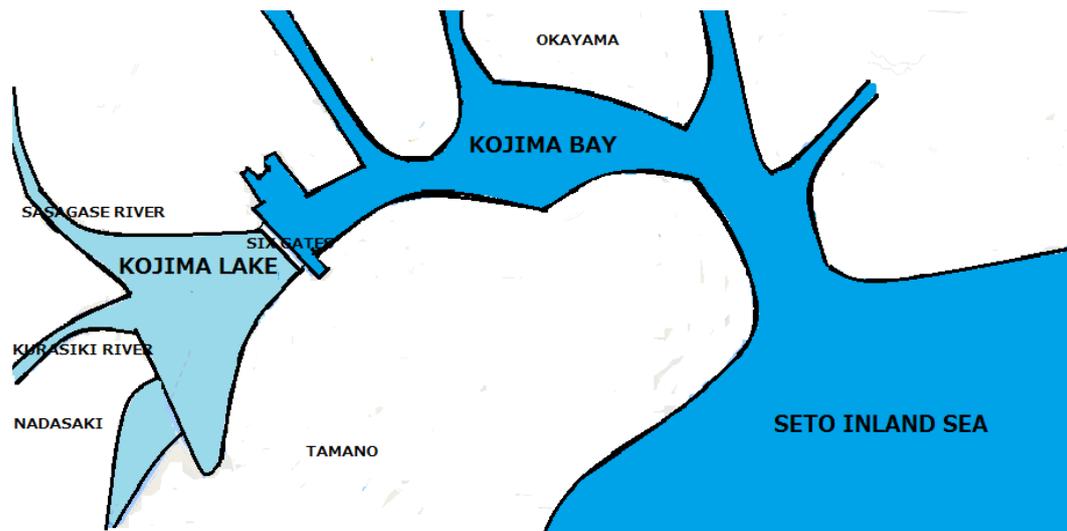


図 1.1: 児島湖 [27]

一般に、河川や湖沼あるいは沿岸水域では、流れと土砂の堆積や洗堀は、航路や港湾の機能や、あるいは灌漑用水の水質など物理的、化学的側面においてに大きな影響を与える。河口周辺部の地形変化においては、河川の流出土砂の堆積、波による土砂の押込みや沿岸漂砂による砂洲の形成などの複合作用からより複雑なものとなる。特に河川の流出土砂は、海域において拡散及び沈降し、沈降した砂はさらに底部断力によって再浮上する。この浮遊砂の沈降や掃流砂層から浮流砂層への浮上は、浮遊砂濃度や水深変化に直接影響を与え河口地形変化の大きな原因となる。

本研究では、岡山県の南部に位置する児島湖で発生した流れと湖底の相互作用に関して湖底地形の測定結果を用いて数値的に解析した。河川の流入とゲートからの流出により発生する流れと、その流れにより生ずる地形変化の数値シミュレーションを行った。また、計測結果と比較することにより数値結果を検証した。計測結果と数値結果の間に妥当な一致が見られた。特に、2015年、2016年における児島湖全体の平均堆積量はそれぞれ5 cm、8 cmであることを示す数値結果が得られた。一方、2016年の計測結果は、計測を実施した水域における平均堆積量は9 cmであることを示した。

### 1.3 児島湖について

岡山平野からの干拓地の造成が進むにつれて水不足や塩害が深刻となり、また、高潮による浸水被害も甚大であった。灌漑用水の供給や塩害の防止などの目的で児島湾の一部を締切堤防で締め切ることにより児島湖が建設された淡水人工湖である（図 1.1 を参照）。

児島湖には、笹ヶ瀬川、倉敷川、鴨川の3つの二級河川が流入し、これら3つの河川が児島湖の主な水の供給源であり、その流域は岡山市、倉敷市、玉野市、総社市、早島町および吉備中央町の6市町にわたっている。現在、児島湖の水位は径間24mのゲート6門から成る新樋門により調整されている。灌漑期の場合にはAP<sup>1</sup>(児島湾飽浦港平均水面潮

<sup>1</sup>AP=TP(東京湾平均水面潮位)+1.333m

位)+80cm, 非灌漑期には +50cm を超えると, 干潮時等適切な時間帯にゲートが開放され, 児島湖から児島湾への排水が行われる [19]。

児島湖は閉鎖性水域であり, 富栄養化や汚濁が進行しやすい特性を持つ。特に近年は流域の都市化や生活様式の変化などによって, 生活排水や工場排水などが負荷となっている児島湖の水質は, 緩やかな改善の傾向にあるが依然環境基準を上回っている。近年, ヘドロ等の堆積による水質悪化を改善するために浚渫によるヘドロの除去が行われた [19]。

## 第2章 測位一測深計測

本章では三次元水底地形データを作成するために行った計測について説明する。まず、計測に用いた機器について説明する。三次元水底地形データを作成するために、水深データと位置データと計測時の時刻データが必要である。時刻－水深データは音響測深機から得られる、時刻－位置データは GPS(Global Positioning System：全地球測位システム) から得られる。

### 2.1 GPS

#### 2.1.1 概要

全地球測位システムあるいは汎地球測位システムとも呼ばれるグローバル・ポジショニング・システム (Global Positioning System: GPS, 以下 GPS とする) は, 人工衛星を利用した, 地球規模で, 正確な位置, 速度および時間を連続的に解析するための全天候型, 宇宙配備の航法システムを利用した測位システムである。また, W. Wooden[3] によると, 「GPS は, 米国国防総省 (Department of Defence:DoD) が地球上ならびにその近辺どこでも, 共通の基準系に基づく正確な位置と速度と時間を連続的に決定したいという軍の要望を満たすために開発した全天候型, 宇宙配備の航法システムである。」と定義されている。GPS から供給される位置情報は, 準拠楕円体の緯度, 経度および高さである。GPS で採用している準拠楕円体は, WGS84 である。

#### 2.1.2 測位原理

GPS は, GPS 衛星から発信されるシグナルを解析することにより測位を行う。GPS 受信機側では, 軌道傾斜角度 55 度の 6 つの軌道面があり, 各軌道面 4 機, 合計 24 個の衛星から発信される情報を解析することに位置情報を計算するには, 三つの衛星が捕捉できればよいが, GPS 衛星で使用している時計と GPS 受信機で使用している時計の精度差によって生じる時間誤差があるので, 4 つの衛星を使って, 時間誤差分を相殺するような測位が行われる。GPS 衛星で使用している時計の振動子はセシウムおよびルビジウムであり, GPS 受信機で使用している時計の振動子は, GPS 衛星に比べ誤差の大きい低廉なものである [3]。

実際の位置を求める方法は, 坂井氏の著書 [4] によると次のように説明されている。衛星  $i$  と受信機との距離を  $r_i$  [m] とする。 $r_i$  は正確な距離を表すものではないことから, 擬似距離と呼ばれる。擬似距離は, 正確な距離  $\rho_i$  [m] に受信機の時計の進み  $\delta$  [s] による

誤差が加わって測定されるもので、これらの関係は

$$r_i = \rho_i + c\delta = \rho_i + s, \quad (s = c\delta) \quad (2.1)$$

と表わされる。ここで、 $c$ は光速であり、 $s$ は、受信機の時計の進みを距離に換算したものである。受信機の時計が進んでいると、距離信号が到着する瞬間に本来よりも進んだ時刻が観測されるため、見かけ上余分な時間がかかったことになり、距離の測定結果が長めになる。

衛星の位置を既知とし、擬似距離が測定されたときに受信機の位置を求めるため、衛星  $i$  と受信機との正確な距離  $\rho_i$  は、受信機位置を  $(x, y, z)$ 、衛星  $i$  の位置を  $(x_i, y_i, z_i)$  とし、

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \quad (2.2)$$

と表す。ただし、距離の単位をメートルとする。擬似距離は、式 (2.1) で表されるので、受信機位置を求めるためには、連立方程式、

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} + s \\ r_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2} + s \\ r_3 = \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2} + s \\ \vdots \\ r_N = \sqrt{(x_N - x)^2 + (y_N - y)^2 + (z_N - z)^2} + s \end{cases} \quad (2.3)$$

を、 $x, y, z, s$  について解けばよい。

三次元の位置を決めるには未知数は、最低3個である。しかし、式 (2.3) では受信機の時計誤差  $s$  も未知数としているので、未知数は4個となり、これを解くためには最低4つの方程式が必要となる。したがって、4機以上の衛星を使用して擬似距離を測定する必要がある。

連立方程式 (2.3) のそれぞれの式は、二乗すると球面を表す式となる。幾何学的には、受信機位置  $x, y, z$  はこれらの球面の交点として求めることができる。正しく距離が測定されていれば4つの球面は1点で交わるはずであるが、擬似距離は受信機クロック誤差  $s = c\delta$  だけ長く測定されるので、1点では交わらない。このため、球面が1点で交わるように  $s$  を変化させて球の大きさを調整すると、そのときの交点として受信機の位置が求められる。5機以上の衛星を使用する場合は1点では交わらないので、受信機位置  $x, y, z$  と各球面との距離の二乗和が最も小さくなるように  $s$  を調整する。式 (2.3) は非線形の連立方程式であるので、通常は適当な初期値のまわりで線形化を行い、逐次近似法により近似解を得る。以下に、手順を示す。

手順 (1)  $x, y, z, s$  について、適当な初期値  $x^0, y^0, z^0, s^0$  を用意する。

手順 (2)  $x^0, y^0, z^0, s^0$  としたときに擬似距離として測定されるべき値を計算する。

$$\begin{cases} r_1^0 = \sqrt{(x_1 - x^0)^2 + (y_1 - y^0)^2 + (z_1 - z^0)^2} + s^0 \\ r_2^0 = \sqrt{(x_2 - x^0)^2 + (y_2 - y^0)^2 + (z_2 - z^0)^2} + s^0 \\ r_3^0 = \sqrt{(x_3 - x^0)^2 + (y_3 - y^0)^2 + (z_3 - z^0)^2} + s^0 \\ \vdots \\ r_N^0 = \sqrt{(x_N - x^0)^2 + (y_N - y^0)^2 + (z_N - z^0)^2} + s^0 \end{cases} \quad (2.4)$$

手順 (3) 実際に測定された擬似距離  $r_i$  に対して、残差  $\Delta r_i = r_i - r_i^0$  を求める。

手順 (4)  $x^0, y^0, z^0, s^0$  をこの残差に相当する分だけ修正すれば、正しい解が得られる。このためには、 $r_i$  の偏導関数

$$\begin{cases} \frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{-(x_i - x)}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + s} = \frac{-(x_i - x)}{r_i} \\ \frac{\partial r_i}{\partial y} = \frac{-(y_i - y)}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + s} = \frac{-(y_i - y)}{r_i} \\ \frac{\partial r_i}{\partial z} = \frac{-(z_i - z)}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + s} = \frac{-(z_i - z)}{r_i} \\ \frac{\partial r_i}{\partial s} = 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

を用いる。ここで、式 (2.3) より、 $r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + s$  である。 $x^0, y^0, z^0, s^0$  の変化量を  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$  とすると、

$$\begin{cases} \Delta r_1 = \frac{\partial r_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial r_1}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial r_1}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial r_1}{\partial s} \Delta s \\ \Delta r_2 = \frac{\partial r_2}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial r_2}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial r_2}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial r_2}{\partial s} \Delta s \\ \vdots \\ \Delta r_N = \frac{\partial r_N}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial r_N}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial r_N}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial r_N}{\partial s} \Delta s \end{cases} \quad (2.6)$$

という連立方程式が得られる。 $r_i$  は既知なので、この連立方程式を  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$  について解けばよい。

手順 (5) 得られた  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$  により、初期値を更新する。

$$\begin{cases} x^1 = x^0 + \Delta x \\ y^1 = y^0 + \Delta y \\ z^1 = z^0 + \Delta z \\ s^1 = s^0 + \Delta s \end{cases} \quad (2.7)$$

手順 (6) 初期値を  $x_1, y_1, z_1, s_1$  に更新し、手順 (2) に戻る。以上の手順を  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$  が十分に小さくなるまで繰り返す。

この手順で解を求めることができる。通常は数回程度の繰り返しで正しい解に収束するので、 $x^0 = y^0 = z^0 = s^0 = 0$  から始めてもかまわない。

以上の解法で、もっとも手間がかかるのは、手順(4)の部分の方程式を解くことである。まず、取り扱いを簡単にするために、方程式を行列により表現する。ベクトル  $\Delta\vec{x} = [\Delta x \Delta y \Delta z \Delta s]^T$ ,  $\Delta\vec{r} = [\Delta r_1 \Delta r_2 \cdots \Delta r_N]^T$ , ( $T$  は転置を表す。) を利用すると、手順(4)の方程式は、

$$G\Delta\vec{x} = \Delta\vec{r} \quad (2.8)$$

と書くことができる。ここで、 $G$  は観測行列で、

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial y} & \frac{\partial r_1}{\partial z} & \frac{\partial r_1}{\partial s} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} & \frac{\partial r_2}{\partial y} & \frac{\partial r_2}{\partial z} & \frac{\partial r_2}{\partial s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_N}{\partial x} & \frac{\partial r_N}{\partial y} & \frac{\partial r_N}{\partial z} & \frac{\partial r_N}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(x_1 - x)}{r_1} & \frac{-(y_1 - y)}{r_1} & \frac{-(z_1 - z)}{r_1} & 1 \\ \frac{-(x_2 - x)}{r_2} & \frac{-(y_2 - y)}{r_2} & \frac{-(z_2 - z)}{r_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-(x_N - x)}{r_N} & \frac{-(y_N - y)}{r_N} & \frac{-(z_N - z)}{r_N} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

である。式(2.8)の連立方程式の解は、方程式が4つ ( $G$  が4行4列の正方行列の場合) であれば、 $G$  の逆行列を求めることで得られる。

$$\Delta\vec{x} = G^{-1}\Delta\vec{r} \quad (2.10)$$

方程式が5つ以上ある ( $G$  が5行以上ある) 場合は未知数よりも方程式のほうが多いことになる。このような場合には、最小二乗法により解を得るのが一般的で、

$$\Delta\vec{x} = (G^T \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot \Delta\vec{r} \quad (2.11)$$

として更新量を求める。この測位方式は、1台の受信機のみで単独測位が行われることから単独測位方式と呼ばれる。

### 2.1.3 RTK-GPS

リアルタイムキネマティック GPS (RTK-GPS:Real Time Kinematic GPS) は、坂井氏の著書 [4] によると次のような測位方式である。一般に、測位方法は、単独測位と干渉測位の二つの方法に分けられる。単独測位は1台の受信機を用いて行う測位方法である。単独測位に対し、搬送波の短い波長を利用して精密測位を行う干渉測位方法と呼ばれる測位方法がある。この方法を用いれば、数 mm~数 cm 程度の測位精度が得られる。干渉測位方式は、位置を測定したい観測局と既知点の地点に設置する基準局を用意する。それぞれの受信機は、到着する測距離信号の搬送波の位相を数え、エポック時刻に測定値として記録する。ここで、エポック時刻とは、干渉測位でのデータ所得時のことである [5]。また、位相は、電磁波が1周期の間に変化する山と谷のどの部分かを表す量で、単位は角度である。この計測では、数時間分程度の間データの収録を行い、収録終了後に両受信機の観測データを比較して測位点の座標を計算する。ところが、搬送波位相が観測値のため位相の測定により得られた距離  $r$  は、真の距離  $\rho$  に対して波長を  $\lambda$  とすると、

$$r = \rho + N\lambda \quad (2.12)$$

となり、 $N\lambda$ だけ誤差を含んでいる。ここで、 $N$ は、整数アンビギュイティと呼ばれる不確定要素である。また、GPSの場合、波長は $\lambda(= c/f = c/L1 = 299792458/(1575.42 \times 10^6)) = 19.03 \text{ cm}$ となる。

しかし、整数値アンビギュイティによるバイアス成分は時間によらず一定であることを利用して、除去することを考える。ある時刻 $t_1$ における位相の観測値を $\phi(t_1)$ 、真の距離 $\rho(t_1)$ とすると、

$$\phi(t_1) = \frac{\rho(t_1)}{\lambda} + N \quad (2.13)$$

となるが、他の時刻 $t_2$ の観測値は、

$$\phi(t_2) = \frac{\rho(t_2)}{\lambda} + N \quad (2.14)$$

となる。ここで、式(2.13)および式(2.14)は他の誤差成分を考慮していない。また、両方の式に、 $N$ が含まれる。このような関係を利用して、長時間のデータ観測と処理を行うことで、 $N$ を正確に推定し、精密な測定値を得る。この時、精密に搬送波位相を測定しても、軌道・クロック誤差や大気遅延誤差に影響されては、精密な搬送波位相の測定が、台無しになるので、干渉測位方式では、基準局とのディファレンシャル処理により、このような誤差要因を取り除くことが前提となる。一度 $N$ を決定してしまえば、その後は、整数アンビギュイティによる不確定性の問題はなくなるので、観測局の移動が可能となる。このことを利用する方式がキネマティックGPS(Kinematic GPS)である。最初に整数アンビギュイティによる不確定性を除去するために数十分間の観測を行えば、後は移動しながら観測点の座標を求めることができる。

固定点で行う干渉測位は、キネマティックGPSに対して、スタティックGPS(Static GPS)等と呼ばれることがある。スタティック測位とキネマティック測位のエポック間隔は、スタティック測位では通常15秒または30秒に、キネマティック測位では1秒～数秒に設定されている[5]。キネマティックGPSをさらに進めて、移動体でも搬送波位相による測位が可能となっている。これは、リアルタイムキネマティックGPS(Real-Time Kinematic GPS:RTK-GPS, 以下、RTK-GPSとする)と呼ばれる方式である。観測局が移動中であっても、リアルタイムに整数アンビギュイティによる不確定性を除去し、精密測位が可能である。リアルタイムキネマティック方式では、移動中の観測局に基準局のデータを伝送するため通常無線データリンクと組み合わせて使用される。

## 2.1.4 まとめ

本研究では、基準局はMS 750 (Trimble)(図2.4)を用いて、移動局に対して搬送波位相データや基準局座標データを送信するため無線送信機を備え、移動局はSPS 750 (Trimble)(図2.6)を用いた。また、基準局から移動局への通信には無線送信機と無線受信機を用いた(図2.4と図2.6)。RTK-GPSを用いて、経緯度および楕円体高からなる移動局アンテナ楕円体座標を計測し、経緯度で表される楕円体座標は、ガウス-クリューゲル(Gauss-Krüger)投影法を用いて平面直角座標に変換される。

## 2.2 音響測深装置

### 2.2.1 概要

深淺測量と呼ばれる測深は、船の直下の海底の深さを測ることである [6]。初期の測深は、錘をつけた紐を垂らして、海底に当たった感触で、紐の長さを深さとした錘測である。しかし、この方法では、流れにより水中の紐にたわみが生じるため、必ずしも直下の海底に鉛直に届かないから、測深値誤差が生じる [6]。さらに、深海測深作業で使う長い索には、大型のウインチが必要であり、それと搭載する船も大型のものが必要となるので、今日では、特殊な科学観測を行う船以外はこのような設備を装備することはない [6]。このようなことから、音波による非接触測深が行われている。

### 2.2.2 計測原理

音波による測深原理は、放射した音波が定速で直進し、目標に当たり、その反射波が戻るまでの往復時間を計り、伝搬速度を乗じて深さを求めるものである [6]。音波における音波の伝搬速度を  $V$  [m/s] とすると、 $V$  は、

$$V = 1339 + 4.59C - 0.044C^2 + 1.31S + 0.0182D \quad [\text{m/s}] \quad (2.15)$$

となる [7]。ここで、 $C$  は水温 [°C]、 $S$  は塩分 [%]、 $D$  は深さ [m] である。音波の水中における伝搬速度は、式 (2.15) より、塩分、温度、深さなどによって多少異なるが、約 1500m/s である [8]。音波を放射してから反射波を受信した瞬間までの時間  $t$  を測れば、水深  $D$  [m] は、音響測深機が、船底に取り付けられているとすると、

$$D = \frac{1}{2}Vt + d \quad (2.16)$$

となる [7]。ここで、 $d$  [m] は船の喫水である。

小山氏らの著書 [9] によれば、音波の水中伝搬特性として、次のような伝搬減衰と伝搬速度の変化を考慮する必要がある。波動の減衰は周波数によって決まり、周波数の高いほど減衰が大きい。したがって、遠距離を探知したい場合は、低い周波数を用いる。しかし、測深の目的は、広い範囲を調べるだけでなく、海底の起伏をできるだけ正確に測ることも重要である。そのためには、音波の直進性を高め、しかも放射ビーム幅を狭くする必要があるので、高周波数を用いるほうがよい。しかし、伝播損失をみれば近距離にしか使えない。このように、周波数の選択は広い観点から行うべきである。一般の測深用周波数は 10kHz ~ 200kHz あたりが選ばれている。200kHz の可測深度はせいぜい 400 m であり、10,000 m のような深海測深では、減衰の少ない 10kHz あたりが用いられる。音波を海底下の地層内まで浸透させて行う地層探査には、減衰の少ない音波領域の 10kHz より低い周波数を用いる [6]。

音波伝搬速度は、主として、水温、塩分および水深 (密度) により変化し、これらの増加とともに音速は速くなっていく。海の表面近くでは水温が最も変化しやすいので、伝搬距離の短い浅海等の測深作業では、ロープで吊した反射体までの長さ、音響測深値と比較して、測深値を修正する簡単な方法が採用されている。用いる反射体には、砂袋を入れ

た竹の棒などを使ったので、バー・チェック (bar check) と呼ぶが、現在は音響レフレクタを用いる [6]。本研究で用いた音響測深装置 (PDR-1200, 千本電気株式会社, 図 2.7) は、超音波方式を用いた。

## 2.3 方位計

### 2.3.1 概要

田口氏らの著書 [6] によると、航海学における方位とは、「基準点 (真北) から時計回りに測った角度」のことであり、コンパスは、「水平面における角度測定 of 基準」の呼称である。

方位基準の取り方により、次の二つのコンパスがある。一つは、方位基準を地球磁場に磁気コンパスであり、もう一つは、方位基準を回転体 (コマ) の軸が示す方向 (真方向) にとるジャイロ・コンパスである。本研究では KVH  $\text{\textcircled{R}}C100^{TM}$  Compass Engine., KVH Industries, inc (磁気コンパス) を用いた。

## 2.4 傾斜系

### 2.4.1 概要

重力方向に吊るした重りや液面と、傾いた物質間の偏差を検出し、出力する装置であり、用いる検出方法により、振子型傾斜計、液面傾斜計などに分類される [21]。

## 2.5 計測システムの説明

本研究で用いた各装置 (RTK-GPS, 音響測深機など) からなる、計測システムの模式図を図 2.1 に示す。また、計測システムの構成を表 2.1 に示す。総重量は、音響測深機の送受波器の重量が 5.0 kg であり、これに方位計、傾斜計、GPS アンテナおよび取り付け金具等の付属品が取り付けられる (図 2.5)。

実際の測位・測深時は、波浪や方向転換などの影響により船体に傾きが生じる。この傾きは、測位・測深データの誤差となるので取り除く必要がある。そこで、船体の傾きによる誤差を取り除くために傾斜計である 2 軸傾斜計 (MD900-T Digital & Analog clinometer. APPLIED GEOMECHANICS) および方位計である電子コンパスを導入した。2 軸傾斜計は、船体のロール角およびピッチ角の検出に利用し、電子コンパスは、ヨー角の検出に利用する。2 軸傾斜計および電子コンパスは、取り付け台座を介して取り付けられる。

### 2.5.1 システム原理の説明

本研究における計測には RTK-GPS および音響測深機が用いられた。それらの機器が船体に固定され、各センサから送信される計測値はシリアルポートを介して PC に収録される。GPS から得られる情報は測位データであり、音響測深機から得られる情報は、測

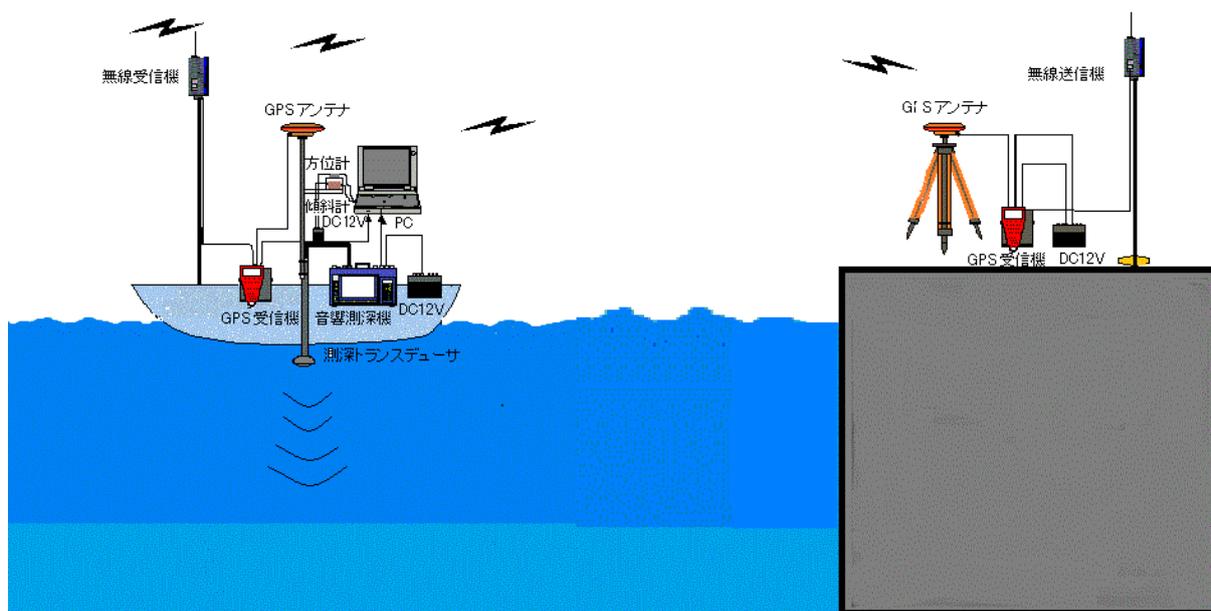


図 2.1: 計測システム

深データである。それら二つのデータセットから三次元水底地形データを作成するため適切な処理が必要となる。そこで、GPS 以外の装置から出力されるデータには、パソコンのシステム時刻が付加される。GPS から得られる時刻と位置データを、音響測深機、コンパス、傾斜計などから得られるデータと、パソコンから得られる時刻データをもとに、時刻で同期をとることにより、三次元水底地形データが得られる。

計測では、RTK-GPS 基準局は地上の定点に設置され、RTK-GPS 移動局と測深機、コンパスおよび傾斜計は船体に設置された。RTK-GPS 移動局アンテナは船体に固定されたポールの上端に取り付けられ、水面下となるポールの下端には音響測深機送受波器が取り付けられた。RTK-GPS による測位データと音響測深機による測深データは、目的とする水域を航行しながら収録される。

また、船体の傾きによる誤差を補正するために 2 軸傾斜計および電子コンパスから得られる補正データもパソコン時刻とともに収録し、GPS および音響測深機から得られるデータとともに時刻で結合させることにより、測位・測深データの補正を行う。

## 2.6 RTK – GPS 基準局の説明

計測には水圏環境計測実習船 OKAYAMA 1 を用いた (図 2.2)。測深実験において、RTK-GPS 基準局を見島湾中央管理事務所の管理棟西側に設置して計測を行った (図 2.3)。基準局に用いた MS 750 (Trimble) を図 2.4 に示す。基準局の諸元を表 2.2 に示す。移動局に用いた SPS 750 (Trimble) を図 2.6 に示す。



図 2.2: 計測に用いるボード OKAYAMA 1, 平成 28 年 6 月 20 日



図 2.3: 児島湾中央管理事務所の管理棟西側に設置基準局, 平成 28 年 6 月 20。2016 年 11 月からは電子基準局を用いて測位-測深計測を行った [20]。

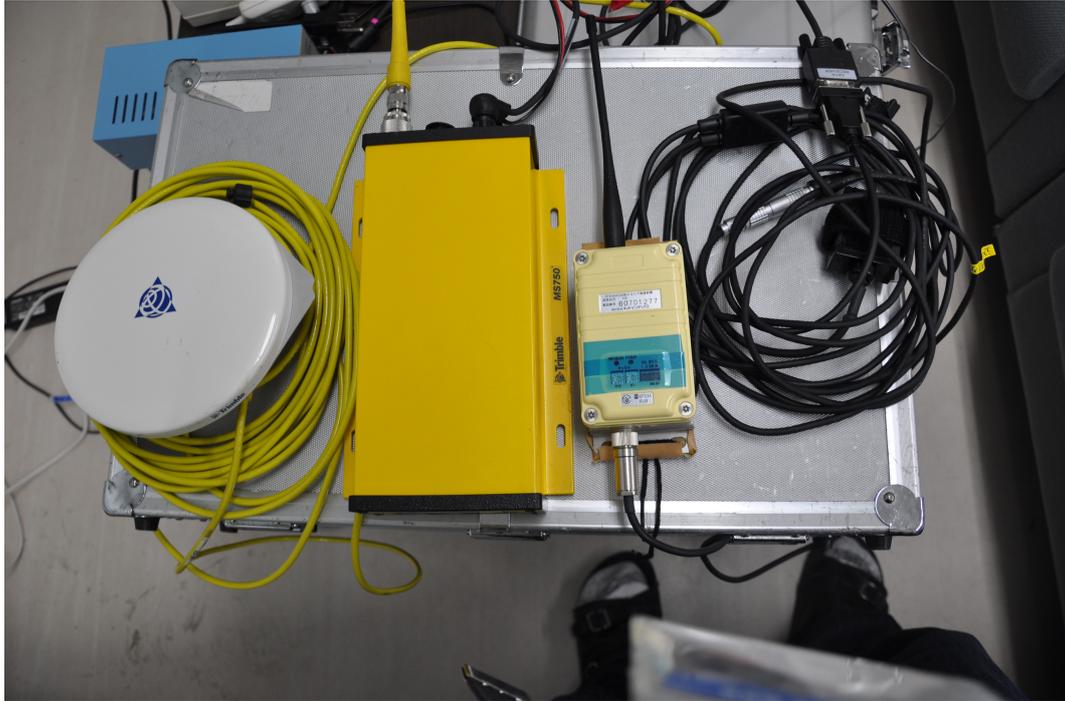


図 2.4: 基準局に用いた MS 750 (Trimble)



図 2.5: 方位計, 傾斜系および RTK-GPS アンテナ 平成 28 年 6 月 20 日

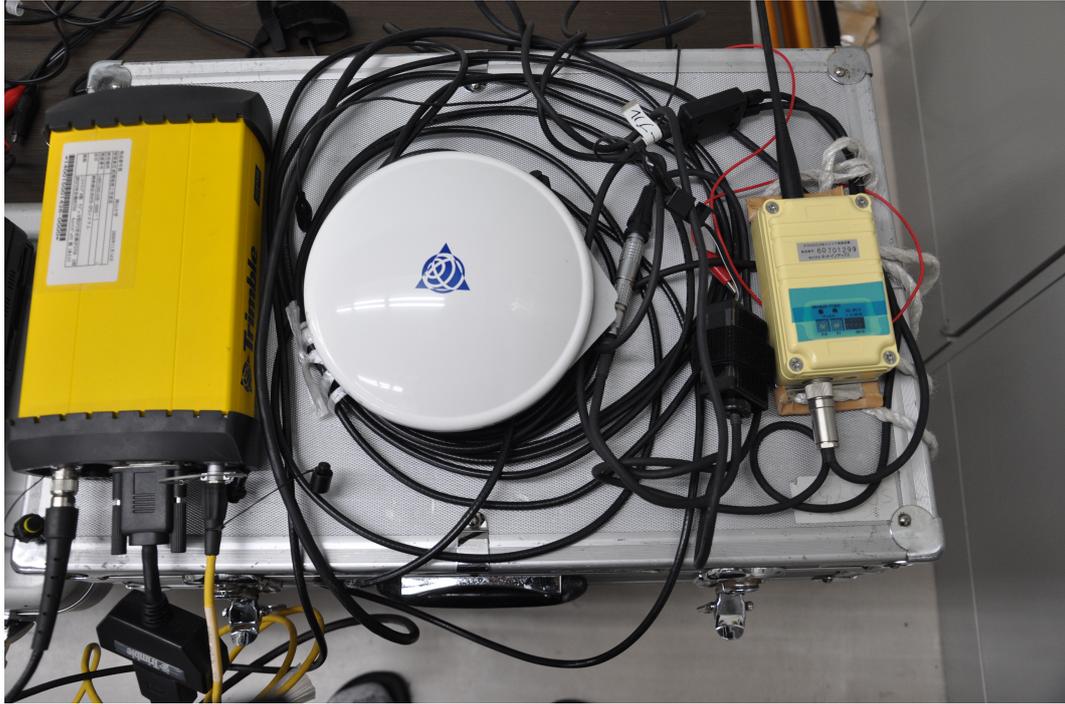


図 2.6: 移動局に用いた SPS 750 (Trimble)



図 2.7: 音響測深機 PDR-1200

表 2.1: 移動局および測深システムの構成

名称	寸法 [mm]	材質
GPS ユニット : SPS750, Trimble	145(W)×51(H)×195(D)	
GPS アンテナ	155(D)×108(H)	
無線受信機 : IFR300CA 型小エリア無線装置, 株式会社 ネットインデックス	155(D)×108(H)	
測深機 (本体) : PDR-1200, 千本電気機株式会社	390×310×170	
測深機 (送受波器)	Ø135×54	
同上装備金具		ステンレス
測深機 (パイプ)	Ø34×1100	
ステンレスパイプ (芯)	25(D)×82(H)	ステンレス
木材 (船体固定用)		木
クランプ (パイプと木材固定用)		
PC(データ記録用)		
傾斜計 : MD900TW , APPLIED GEOMECHANICS INCORPORATED	120×80×60	アルミニウム
方位計 : KVH C100 Compass Engine : KVH Industries, I n c .	120×73×53	
その他 (ケーブル, ワイヤ類等)		

表 2.2: 設定した基準局の情報

名称	設定値
緯度	34°35'10.1609"
経度	133°57'20.4082"
WGS84 ハイト	39.063[m]
アンテナ高	1.08[m]
GPS ユニット	MS750, Trimble
無線受信機 : IFX301CB 型 小エリア無線装置, 株式 会社 ネットインデックス	

## 2.7 ネットワーク型 RTK – GPS

RTK-GPS は高精度であるが、使用にあって制約事項の一つとして基準局と移動局との距離 (基線長) の問題がある。つまり基準局と移動局との距離は無線機による通信が可能なものであることが必要となり、そのために広範囲な測位を行うには利用が困難になる。一般的には基線長は 10km 以内であることが必要といわれている [20]。

その問題を解決するためにネットワーク型 RTK-GPS 測量方式が提案される。ネットワーク型 RTK-GPS 測量の方式は、3 点以上の電子基準点の観測データなどを利用するもので、基準局と移動局の距離に関係なく、RTK-GPS 測量と同等の測位精度実現するものである。ネットワーク型 RTK-GPS 測量の方式は、VRS(Virtual Reference Station, 仮想基準点) 方式、FKP(Flachen Korrektur Parameter, 面補正パラメータ) 方式があり、本研究では、2016 年 11 月から VRS(Virtual Reference Station, 仮想基準点) 方式を用いた。ネットワーク型の高精度位置情報サービスを利用することが前提となる。

VRS(Virtual Reference Station, 仮想基準点) 方式は、GPS 測量機の機能によって、VRS 方式とサーバ型 VRS 方式に区分される。GPS 測量機で解析計算を行う VRS は、移動局からその概略位置情報を通信装置により、位置情報サービス事業者 (以下は「配信事業者」という。) に送信し、配信事業者では、移動局周辺 3 点以上の基準局 (電子基準点) での観測値を利用して、概略位置に仮想点を作り、この位置における補正值や観測されるであろう位相データ等 (以下「補正データ」という。) を計算する。移動局側は、通信装置により配信事業者からこの補正データ等を受け仮想点との RTK-GPS 測量を行って、移動局の情報と補正データ等を解析処理し位置を求める方式である。サーバ型 VRS 方式の GPS 測量機を用いる方式は、VRS 配信事業者で得られた補正データと、移動局から送られてくる観測データにより、解析処理事業者内のサーバで RTK-GPS 測量計算を行って、移動局の位置を求め、移動局に結果を返信する方式である [20]。

つまり、VRS 方式は、複数の実在基準点で観測されたデータを基に、基準点間における相対誤差モデルを生成する。この誤差モデルを基に、仮想的に決めた場所での RTK 受信機で観測されると推測できるデータを生成する方法である。仮想基準点方式の概念図は図 2.8 に表す。

使用手順としては、先ずパソコンにより移動局から概略位置情報を位置情報サービス事業者 (配信事業者) に送信し、配信事業者において移動局周辺の電子基準点の観測量から概略位置に仮想基準点を作り、この地点の補正情報や位相データなどを計算して移動局に送り返す。こうして送り返された補正情報や位相データなどを基に測量を行って位置座標を求めるという複雑な処理を行う。

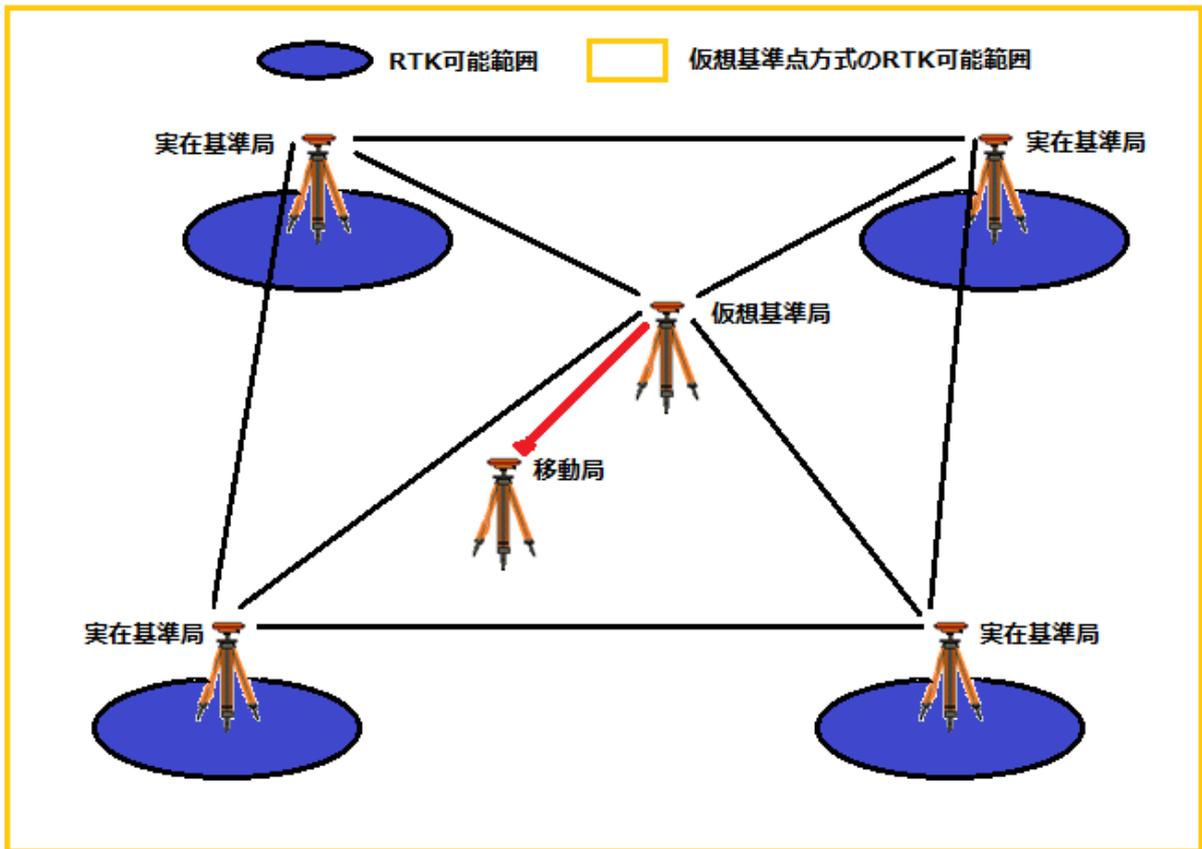


図 2.8: 仮想基準点方式の概念図

## 第3章 地球楕円体と等角投影

地球上のある点を表すのに直交座標を用いて表す方法がある一方で、地球を理想的な回転楕円体と考え、経度、緯度および高さを用いて表す方法がある。本章では、経緯度および楕円体高からなる楕円体座標と直交座標系の関係について考察する [4, 15]。

### 3.1 経度・緯度

測地学では、地表面上の点の位置は、測地緯度、測地経度および測地高度によって表される。測地高度は、地上の点から基準になる回転楕円体面におろした法線の長さであり、測地緯度は、この法線の延長と、楕円体の赤道面とのなす角度、測地経度は、その法線と子午線を含む子午面の、楕円体の零 (あるいは本初) 子午面から東向きにはかった角度である [15]。

### 3.2 高さ

地球表面の7割は海洋で覆われており、測地学では世界の海面の平均位置にもっとも近い「重力の等ポテンシャル面」を「ジオイド」と定め、これを地球の形状としている。日本のジオイドは水準原点の直下、政令で定める深さの地点を通る重力の等ポテンシャル面であると定義されている [12]。

日本では、「GRS80 楕円体」を回転楕円体として採用しており、この楕円体からの「ジオイド」までの高さを「ジオイド高」といい、この高さは基準となる楕円体によって変わる [12, 13]。

任意の点の高さとは、その点から準拠楕円体へ下ろした垂線の長さである。標高というのは、ジオイド面からの差を水準測量により求めたものである。水準測量で求めた水平面は準拠楕円体の接面とは一致しておらず、でこぼこした形になっている。準拠楕円体からジオイドまでの高さをジオイド高と言う。ジオイド高を  $N$  とすると、楕円体高 ( $h$ ) と標高 ( $H$ ) の関係は図 3.1 のように示すことができる。

高さの式

$$\text{楕円体高 } h = \text{標高 } H + \text{ジオイド高 } N \quad (3.1)$$

は、楕円体とジオイドの関係を表している。この式は近似式であるが、実用上はすべての場合に十分な精度である。角度  $\epsilon$  は、わずかに湾曲した鉛直線と楕円体の法線との角度である鉛直線偏差を表している。この角度は、ほとんどの場合 30 秒を越えることはない、無視できる大きさである [14]。

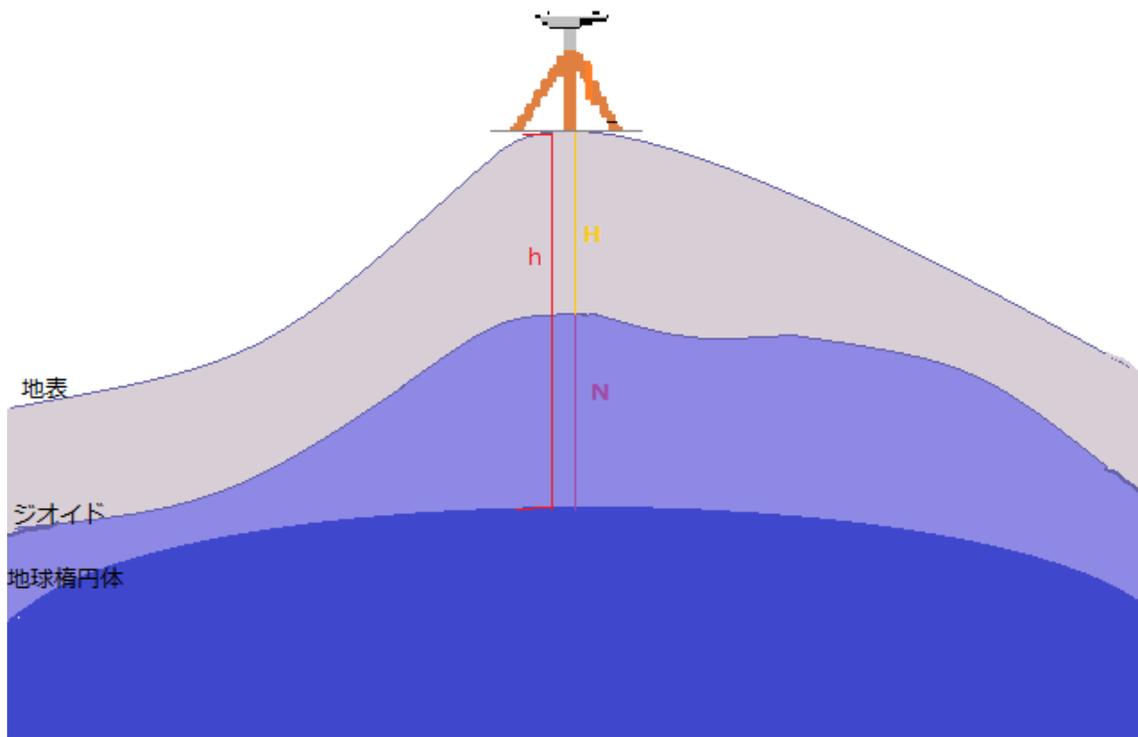


図 3.1: 標高とジオイド高 [4]

表 3.1: 楕円体の違い

	GRS80	WGS84
長半径 ( $a$ ) [m]	6378137.0	6378137.0
扁平率 $f = (a - b)/a$	1/298.257222101	1/298.257223563
短半径 ( $b$ ) [m]	6356752.31415	6356752.31425

### 3.3 地球モデル

測量に用いられる準拠楕円体は、GRS80(Geodetic Reference System 1980:測地規準系 1980)であり、GPSの測地系はWGS84(World Geodetic System;世界測地系 1984)であるが、表 3.1のように、WGS84の短半径が、GRS80の短半径に対し約0.11mm大きくなるだけなので、実質的にはWGS84とGRS80は同じものとして取り扱われる [11, 5]。

### 3.4 地球楕円体のパラメータ

図 3.2 に中心  $O$ 、回転軸  $NS$ 、赤道面  $EAE'$  の回転楕円体を示す。 $OA = OE = a$  で楕円体の半長軸、 $ON = b$  で半短軸を表す。

楕円の扁平率は、

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (3.2)$$

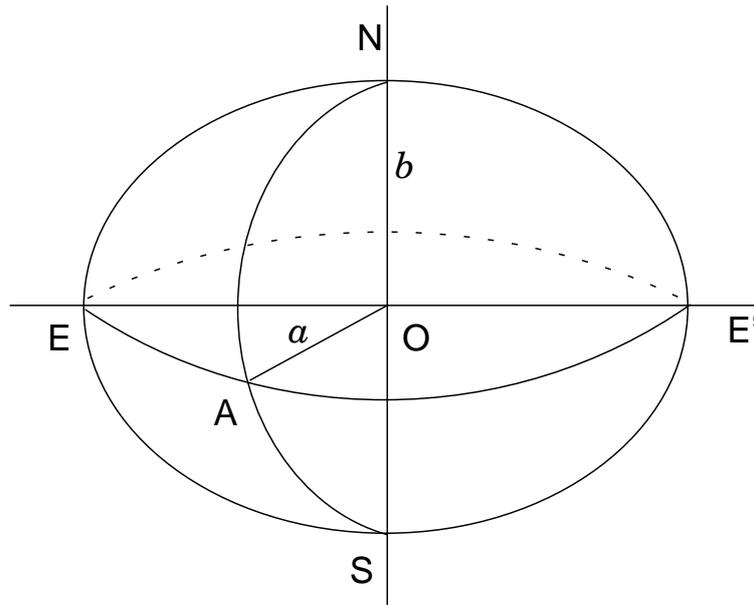


図 3.2: 地球楕円体

で定義される。子午楕円の第1離心率  $e$  は,

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (3.3)$$

第2離心率  $e'$  は,

$$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \quad (3.4)$$

である。第1離心率  $e$  の2乗は,

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (3.5)$$

となり、第2離心率  $e'$  の2乗は,

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1, \quad \frac{a^2}{b^2} = 1 + e'^2 \quad (3.6)$$

となる。したがって,

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad (3.7)$$

同様にして

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (3.8)$$

が得られる。

また、式(3.5)より

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (3.9)$$

したがって、

$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2} \quad (3.10)$$

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (3.11)$$

が得られる。

GRS80 楕円体に関する数値は、

$$a = 6378137.0[\text{m}]$$

$$b = 6356752.31425[\text{m}]$$

$$f = 1/298.257223563$$

$$e^2 = 6.69437999013 \cdot 10^{-3}$$

$$e'^2 = 6.73949674226 \cdot 10^{-3}$$

となる。

## 3.5 測量に使う座標系

### 3.5.1 化成緯度

測地学では、化成緯度  $u$  によった座標系を用いる場合がある (図 3.3)。化成緯度は、赤道面  $EE'$  と、赤道で作った球の半径  $OP_1$  とがなす角である。点  $P_1$  は  $P$  を通る楕円体の短軸に平行な直線  $P_1P_2$  がその球面と交わる点である。この座標の第 2 の座標は測地経度  $\lambda$  である。

### 3.5.2 空間デカルト座標系

測地学の理論的扱いでは、空間デカルト座標系  $X, Y, Z$  もまた用いられる (図 3.4)。ここで、通常、 $Z$  軸は楕円体の短軸に沿ってとられ、 $X$  軸は赤道面と零子午面の交線に、そして  $Y$  軸は  $X$  軸から東方にとる。

また、経度  $\lambda$  の子午楕円の直交座標系  $x, y$  を用いることもある。この場合、点の位置は  $x, y, \lambda$  によって表すことができる。

測地緯度  $\varphi$  によって子午楕円の  $x, y$  座標を表す式を求めるため、 $P$  を通る子午楕円を考える (図 3.5)。この楕円の式を、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.12)$$

と書く。

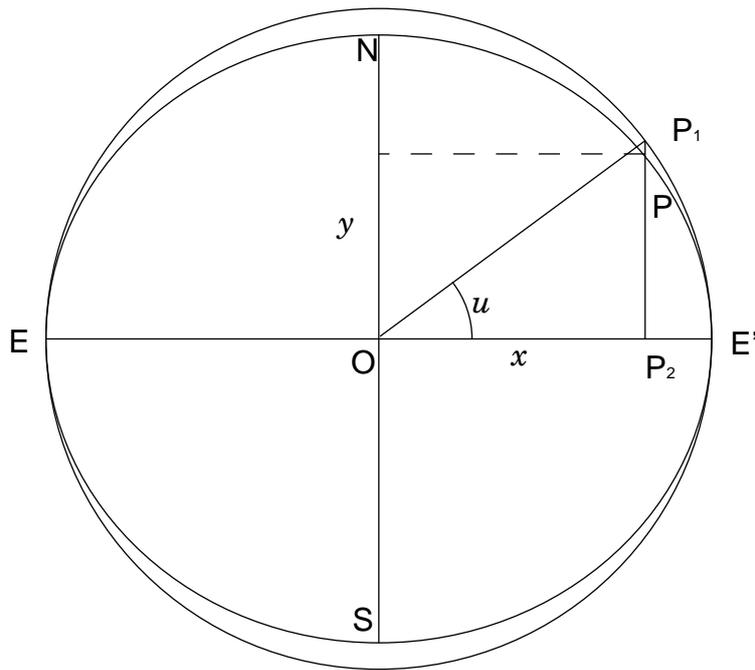


図 3.3: 化成緯度

図 3.5 において、楕円の接線が  $x$  軸となす角の正接は  $\frac{dy}{dx}$  に等しいので、

$$\frac{dy}{dx} = \tan(90^\circ + \varphi) = -\cot \varphi \quad (3.13)$$

測地緯度  $\varphi$  を  $x$ ,  $y$  を用いて表すと、

$$\tan \varphi = -\frac{a^2 y}{b^2 x} \quad (3.14)$$

式 (3.14) の逆の式、すなわち  $x$ ,  $y$  を測地緯度  $\varphi$  の関数として表す式は、

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.15)$$

および

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.16)$$

となる。式 (3.15) と式 (3.16) は測地緯度  $\varphi$  によって子午楕円の  $x, y$  座標を表す式である。

ここで、

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (3.17)$$

とおくと、式 (3.15) と式 (3.16) はそれぞれ、

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W}, \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W} \quad (3.18)$$

となる。

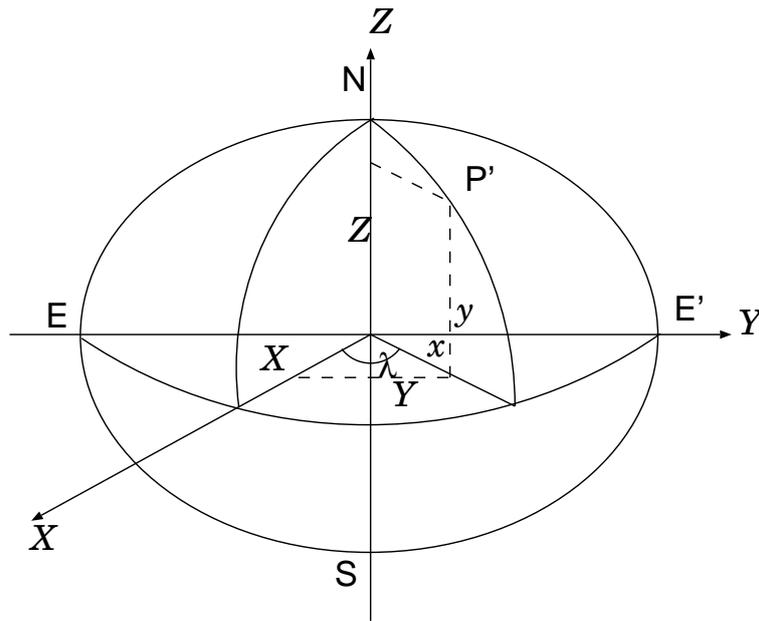


図 3.4: 空間デカルト座標系

### 3.5.3 測地学座標系

測地学においては、地理学的座標系、あるいは測地座標系が最も一般に用いられる。この座標系では、点の位置が楕円体面上の2つの極座標、すなわち緯度 $\varphi$ と経度 $\lambda$ によって表される(図3.6)。緯度 $\varphi = \angle nP_1P_2$ は、与えられた点Pにおける楕円体への法線 $P_1n$ を赤道面EAE'とのなす角である。また、経度 $\lambda$ は零子午面NASと、与えられた点Pを通る子午面NPSとのなす角によって与えられる。零子午面は零(グリニッジ)天文子午面に平行にとられる[15]。

### 3.5.4 地心座標系

楕円体への法線の代わりに、動径OPをとり、緯度をこの動径と赤道面のなす角 $\Phi$ によって定義する場合がある(図3.7)。 $\Phi, \lambda$ を地心座標系という。

## 3.6 直截口

曲面上の与えられた点で、その曲面への法線を含む任意の平面で曲面を切って得られる交わりの曲線を、その点における曲面の直截口という[15]。

このとき曲面上の任意の点で、この曲面への法線を含む平面のうち、それらの平面による直截口に対して、その曲率が最大値と最小値をとるところの互いに垂直な二つの平面が存在する。これらの方向に対する直截口の曲率を $1/M$ ,  $1/N$ とすれば、任意の方向の直截口の曲率 $1/R_A$ はオイラー(Euler)の公式

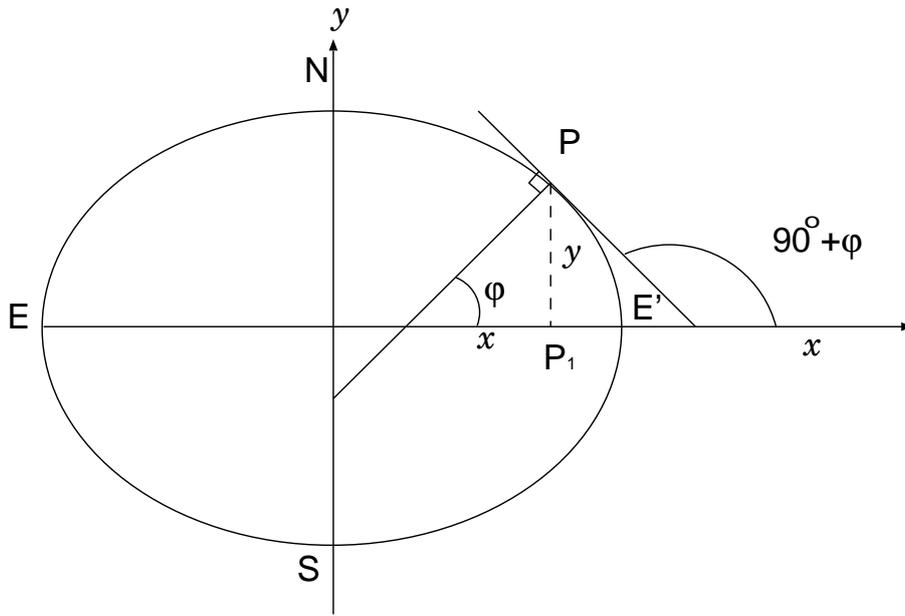


図 3.5: 子午楕円

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N} \quad (3.19)$$

によって表される。ただし  $A$  は、その直截口の接線が、曲率  $1/M$  を与える方向となす角である [15]。曲率半径  $M$ ,  $N$  は、考えている点におけ主曲率半径と呼ばれ、この点の接平面においてこれに対応する 2 つの方向を主曲率方向という [15]。

回転楕円体の場合には、主曲率方向は、子午線方向と卯酉線方向になる。これは子午線に関する曲面の対称性から明らかである。

### 3.7 平均曲率半径

測地学ではしばしば平均曲率半径が使われる。いま、オイラーの公式 (3.19) を

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} \quad (3.20)$$

の形で書く、平均曲率半径  $R$  は

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_A dA = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} dA \quad (3.21)$$

によって計算される [15]。これはすべての  $A$  のすべての方向に対する  $R_A$  の平均値を計算することに相当する。この式の積分を実行するために、積分記号下の式の分子と分母を

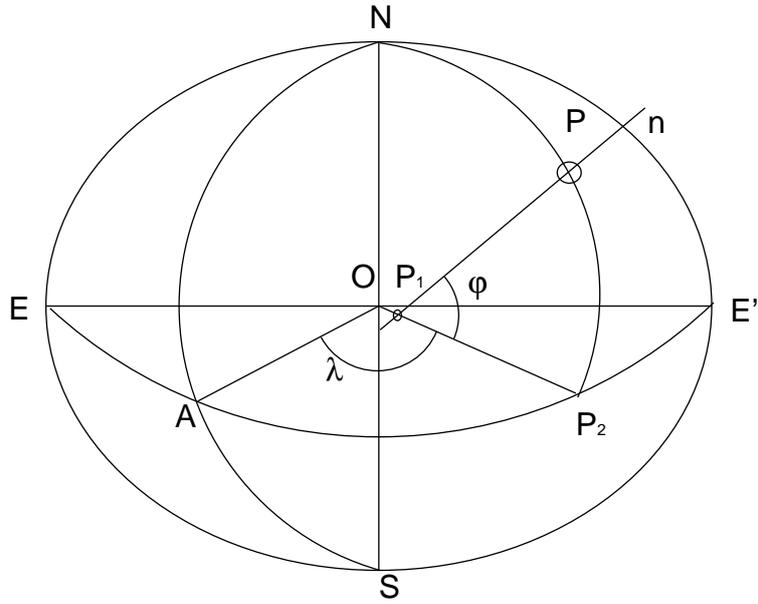


図 3.6: 測地座標系

$N \cos^2 A$  で割り,

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{M}{\cos^2 A}}{1 + \frac{M}{N} \tan^2 A} dA \\
 &= \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\frac{M}{N} \frac{dA}{\cos^2 A}}}{1 + \left( \sqrt{\frac{M}{N}} \tan A \right)^2}
 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$t = \sqrt{\frac{M}{N}} \tan A$$

と置くと,

$$\frac{dt}{dA} = \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{1}{\cos^2 A}$$

となり, 積分範囲は, 表 3.2 のようになる。よって積分変数を変換すると,

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \left[ \tan^{-1} t \right]_0^{\infty} = \sqrt{MN} \quad (3.22)$$

が得られる [15]。すなわち, 平均曲率半径は二つの主曲率半径の幾何平均に等しい。

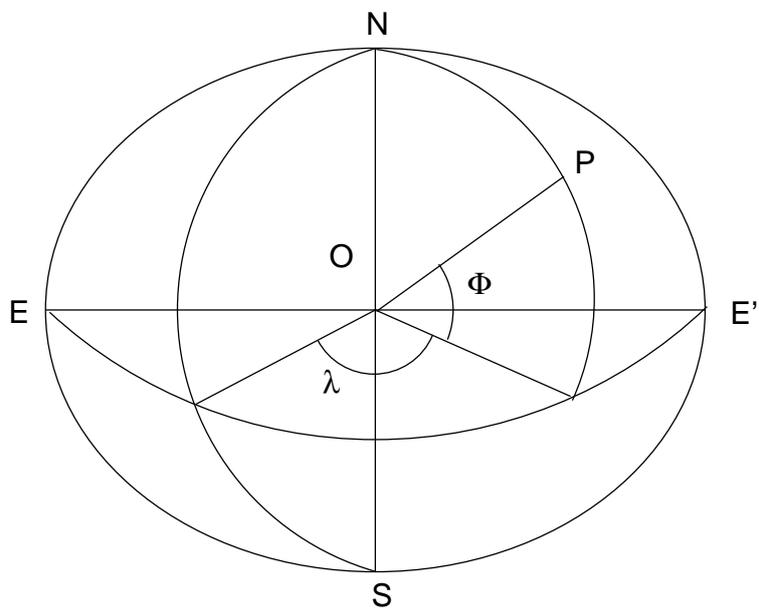


图 3.7: 地心坐标系

表 3.2: 积分范围

$A$	$t$
$0$	$0$
$\frac{\pi}{2}$	$\infty$

### 3.8 子午線曲率半径

回転楕円体の場合には主曲率方向は、子午線方向と卯酉線方向になる。

子午線方向の直截口の子午線曲率半径  $M$  を求めてみる。平面曲線の曲率半径は、

$$M = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \quad (3.23)$$

によって与えられる。

これを子午楕円に適用すると ( $d^2y/dx^2 < 0$  であるから),

$$M = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (3.24)$$

となる。ところが、式 (3.13) より

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \varphi \quad (3.25)$$

であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} \quad (3.26)$$

となる。また、式 (3.15) を微分することにより

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a(1 - e^2) \sin \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$$

より、 $d^2y/dx^2$  は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2) \sin^3 \varphi} \quad (3.27)$$

となる。 $dy/dx$  と  $d^2y/dx^2$  の値を式 (3.24) に代入して、

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (3.28)$$

が得られる。

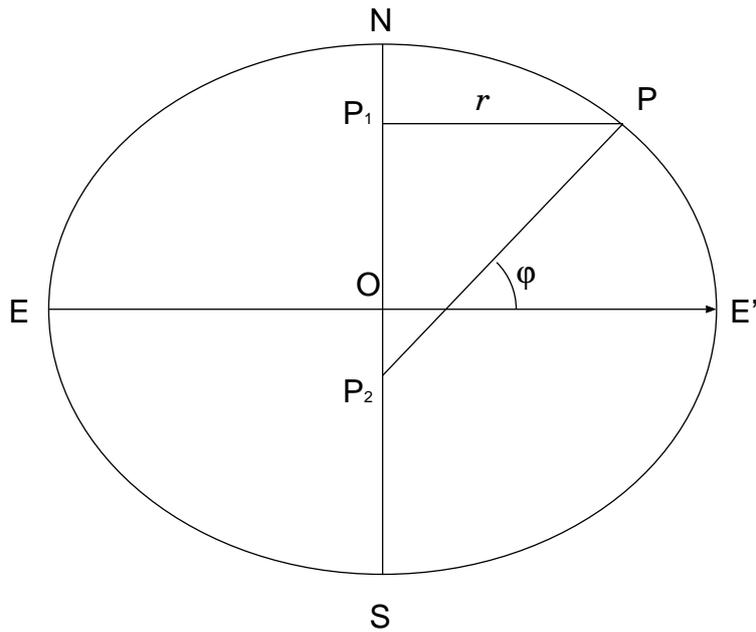


図 3.8: ムニエーの定理

### 3.9 卯酉線曲率半径

もう一つの主曲率半径, 卯酉線方向の直截口の曲率半径  $N$  は, ムニエーの定理を用いて求める。ムニエーの定理<sup>1</sup>を点  $P$  における平行圏と卯酉線に適用すれば (図 3.8),  $\angle P_1PP_2 = \varphi$  であるから, 平行圏の半径を  $r$  とするとムニエーの定理は,

$$r = x = N \cos \varphi \quad (3.29)$$

の形に書くことができる。したがって (3.15) を用いて,

$$N = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.30)$$

を得る。図 3.8 において,

$$PP_2 = \frac{r}{\cos \varphi} = N \quad (3.31)$$

である。この式から線分  $PP_2$  の長さは卯酉線曲率半径に等しいことがわかる。

### 3.10 経緯度から平面直角座標への変換

GPS から得られる位置情報は, 経度, 緯度および高さの情報である。しかし, このままでは解析に利用できない。そこで, ある基準点からの, 位置情報に変換する必要がある。

<sup>1</sup>曲面上の任意の曲線の与えられた 1 点における曲率半径は, その点において, その曲線と同じ接線をもつ直截口の曲率半径に, 曲面の法線の手法線となす角の余弦を掛けた値に等しい。

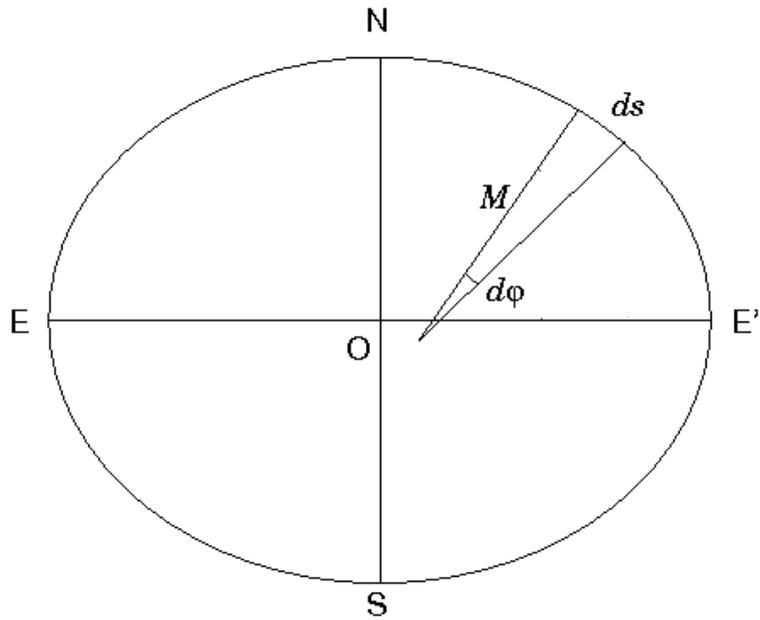


図 3.9: 子午楕円の弧の微分

変換は、まず、ガウス-クリューゲルの座標  $(x, y)$  へ変換し、次に、平面直角座標  $(X, Y)$  へ変換する。その際、子午線弧長が必要になる。経緯度から平面直角座標への変換方法は次のようになる [3, 15]。ここで、 $x$  および  $X$  は、NS(緯度) 方向の長さを表し、 $y$  および  $Y$  は、EW(経度) 方向の長さを表す。

### 3.10.1 子午線弧長

子午楕円の弧の微分  $ds$  を、半径 (子午線曲率半径)  $M$  の円と考え、 $d\varphi$  の円弧の長さと考えると、図 3.9 より、

$$ds = Md\varphi \quad (3.32)$$

によって表すことができる。ここで、 $M$  は子午線曲率半径であり、式 (3.28) より

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

したがって、

$$ds = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

となり、緯度が  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の点の間の子午線弧長は、

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi \quad (3.33)$$

によって表される。この積分は楕円積分と呼ばれるもので、初等関数の形で積分できないため、積分記号下の  $\frac{1}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$  を級数に展開すると、 $W$  は式 (3.17) なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^3} &= (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2!} \frac{3 \cdot 5}{2^2} e^4 \sin^4 \varphi + \frac{1}{3!} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3} e^6 \sin^6 \varphi \\ &\quad + \frac{1}{4!} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^4} e^8 \sin^8 \varphi + \frac{1}{5!} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^5} e^{10} \sin^{10} \varphi + \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

となり、正弦のベキと倍角を余弦で置き換え、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} \\ A_2 &= \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72765}{65536} e^{10} \\ A_3 &= \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10395}{16384} e^{10} \\ A_4 &= \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31185}{131072} e^{10} \\ A_5 &= \frac{315}{16384} e^8 + \frac{3465}{65536} e^{10} \\ A_6 &= \frac{693}{131072} e^{10} \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

と置くと、結局積分 (3.33) は

$$\begin{aligned} s &= a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (A_1 - A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 4\varphi - A_4 \cos 6\varphi + A_5 \cos 8\varphi \\ &\quad - A_6 \cos 10\varphi + \dots) d\varphi \\ &= a(1 - e^2) \int_0^{\varphi_2} (A_1 - A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 4\varphi - A_4 \cos 6\varphi + A_5 \cos 8\varphi \\ &\quad - A_6 \cos 10\varphi + \dots) d\varphi \\ &\quad - a(1 - e^2) \int_0^{\varphi_1} (A_1 - A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 4\varphi - A_4 \cos 6\varphi + A_5 \cos 8\varphi \\ &\quad - A_6 \cos 10\varphi + \dots) d\varphi \end{aligned} \quad (3.36)$$

の形に書くことができる。式 (3.36) を積分して、

$$s = a(1 - e^2) \left[ (A_1(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{A_2}{2}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \frac{A_3}{4}(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \dots) \right] \quad (3.37)$$

を得る。

$$s = B - B_0 \quad (3.38)$$

の形に書き換え,

$$\begin{aligned}
B &= a(1 - e^2) \int_0^{\varphi_2} (A_1 - A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 4\varphi - A_4 \cos 6\varphi \\
&\quad + A_5 \cos 8\varphi - A_6 \cos 10\varphi + \dots) d\varphi \\
&= a(1 - e^2) \left\{ A_1 \varphi_2 - \frac{A_2}{2} \sin 2\varphi_2 + \frac{A_3}{4} \sin 4\varphi_2 - \frac{A_4}{6} \sin 6\varphi_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_5}{8} \sin 8\varphi_2 - \frac{A_6}{10} \sin 10\varphi_2 + \dots \right\} \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= a(1 - e^2) \int_0^{\varphi_1} (A_1 - A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 4\varphi - A_4 \cos 6\varphi \\
&\quad + A_5 \cos 8\varphi - A_6 \cos 10\varphi + \dots) d\varphi \\
&= a(1 - e^2) \left\{ A_1 \varphi_1 - \frac{A_2}{2} \sin 2\varphi_1 + \frac{A_3}{4} \sin 4\varphi_1 - \frac{A_4}{6} \sin 6\varphi_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_5}{8} \sin 8\varphi_1 - \frac{A_6}{10} \sin 10\varphi_1 + \dots \right\} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

ここで,  $B$  は計測点の子午線弧長であり,  $B_0$  は基準点の子午線弧長である。

### 3.10.2 ガウス-クリューゲル (Gauss-Krüger) の平面座標 $(x, y)$

平面座標は楕円体座標から, 数学の等角写像理論のみに基づいて導かれる。

ある零子午線 (経度 =  $\lambda_0$ ) の両側に, 北極から南極に至る細長い筐の葉状の帯を考え, この帯の中の任意の点の座標を  $(\lambda, \varphi)$  とする。

$$l = \lambda - \lambda_0 \tag{3.41}$$

とおき,  $\lambda$  の代わりに  $l$  を使う。楕円体上の任意の点  $(l, \varphi)$  から微小距離  $dS$  だけ離れた点の座標を  $(l + dl, \varphi + d\varphi)$  とする。この2点に対応する平面上の点の座標をそれぞれ  $(x, y)$ ,  $(x + dx, y + dy)$  とし, 平面上におけるこの2点間の微小距離を  $ds$  とする。2つの微小距離の比を  $m$  とすれば,  $m$  は膨縮率である。緯度  $\varphi$  における卯酉線曲率半径を  $N$ , 子午線曲率半径を  $M$  とすれば,

$$\begin{aligned}
m^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi \cdot dl^2} \\
&= \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cos^2 \varphi \left( \frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2 + dl^2 \right)} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

である。ここで,

$$\frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi = dq \tag{3.43}$$

とおき，楕円体座標  $(\varphi, l)$  を平面座標  $(q, l)$  に変換したと考えると，

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{dS^2} &= \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + dl^2)} \\ \frac{dq^2 + dl^2}{dS^2} &= \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi}, \quad (\because ds^2 = dx^2 + dy^2) \end{aligned} \quad (3.44)$$

であるから，楕円体面上の点  $(\varphi, l)$  の近傍における微小距離と，それに対応する  $(q, l)$  平面上の微小距離の比は， $d\varphi, dl$  のいかんにかかわらず一定である。したがって，互いに対応する楕円体上の微小図形と  $(q, l)$  平面上の微小図形は相似形である。

次に， $(q, l)$  を  $(x, y)$  に変換することを考えると，楕円体座標  $(\varphi, l)$  と平面座標  $(q, l)$  は等角条件を満たしているので， $(q, l)$  座標と  $(x, y)$  座標の間でも等角条件が成立するものである。等角投影であるための条件として，

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial y}{\partial l} \quad (3.45)$$

か，または，

$$\frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial l} \quad (3.46)$$

の関係が得られる。

複素平面上の1点は複素数  $x + iy$  を表す。今，複素平面上の任意の点  $x + iy$  は任意の関数  $f(x + iy)$  によって，複素平面上の他の1点  $x' + iy'$  に移る複素写像変換

$$x + iy = f(q + il) \quad (3.47)$$

を考えれば，複素平面上の一点  $q + il$  は他の点  $x + iy$  に移る。このとき  $f$  が正則な関数であれば，式 (3.46) が成立する。式 (3.46) は複素関数に自然に備わっている性質であってコーシー-リーマン (Cauchy-Riemann) の微分方程式として知られるものである。逆に関数  $f$  が正則でありさえすれば，式 (3.45) の関係で結ばれる  $(q, l)$  座標と  $(x, y)$  座標の間には必ず等角条件が成立する。 $f(q + il)$  は， $l$  がそれほど大きくないとして  $l$  の冪級数で展開すると，

$$f(q + il) = f(q) + \frac{1}{1!} il \frac{df(q)}{dq} + \frac{1}{2!} (il)^2 \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{1}{3!} (il)^3 \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \dots \quad (3.48)$$

と書ける。ここで，平面座標の原点は零子午線と赤道との交点，

$$f(q) = B \quad (3.49)$$

であるとする。 $B$  は赤道から緯度  $\varphi$  へ至る子午線弧長である。式 (3.47) の左辺と式 (3.48) の右辺につき実数部と虚数部をそれぞれ等しいとおけば，

$$x = B - \frac{l^2}{2} \frac{d^2 B}{dq^2} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4 B}{dq^4} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6 B}{dq^6} + \frac{l^8}{40320} \frac{d^8 B}{dq^8} + \dots \quad (3.50)$$

$$y = l \frac{dB}{dq} - \frac{l^3}{6} \frac{d^3 B}{dq^3} + \frac{l^5}{120} \frac{d^5 B}{dq^5} - \frac{l^7}{5040} \frac{d^7 B}{dq^7} + \dots \quad (3.51)$$

となる。式 (3.43) に注意すれば,

$$\frac{dB}{dq} = \frac{dB}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dq} = M \cdot \frac{N \cos \varphi}{M} = N \cos \varphi, \quad (3.52)$$

となる。ここで,  $B = \int_0^\varphi M d\varphi$  である。

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad (3.53)$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi, \quad (3.54)$$

$$V^2 = 1 + \eta^2, \quad (3.55)$$

卯酉線曲率半径

$$N = c/V, \quad (3.56)$$

および子午線曲率半径

$$M = N/V^2 = c/V^3 \quad (3.57)$$

より, 式 (3.54) から式 (3.57) に注意すれば,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{dq^2} &= \frac{d}{dq} \frac{dB}{dq} = \frac{d}{dq} N \cos \varphi \\ &= -N \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.58)$$

である。同様な計算を 8 次微分まで行って, それらを式 (3.50), 式 (3.51) に代入すると, ガウス-クリューゲルの等角投影座標  $(x, y)$  として

$$\begin{aligned} x &= B + \frac{Nl^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{Nl^4}{24} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ &\quad + \frac{Nl^6}{720} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) \\ &\quad + \frac{Nl^8}{40320} \sin \varphi \cos^7 \varphi (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} y &= Nl \cos \varphi + \frac{Nl^3}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \\ &\quad + \frac{Nl^5}{120} \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \\ &\quad + \frac{Nl^7}{5040} \cos^7 \varphi (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) \end{aligned} \quad (3.60)$$

が得られる。ここに,  $t$  は, 式 (3.61),  $\eta^2$  は式 (3.54) である。

$$t = \tan \varphi \quad (3.61)$$

### 3.10.3 平面直角座標 ( $X, Y$ )

日本における、平面直角座標系とは、北方領土を除く我が国の国土を 19 の座標系に分け、それぞれに原点を設定し、それらの原点を基準としてそれぞれの範囲について、ガウス・クリューゲル図法を適用して測量・地図成果を作成するものである。平面直角座標系は 19 座標系や公共座標系とも呼ばれている [3]。

ガウス・クリューゲルの平面座標 ( $x, y$ ) をそのまま使っている国は少ない [12]。理由は 2 つある。1 つは原点が赤道線上にあるため赤道から離れている場所では  $x$  が大きすぎて不便であること。もう 1 つは、膨縮率  $m$  が零子午線 ( $x$  軸) 上では 1 つであるが、零子午線から離れるにつれて増大する。零子午線上では  $m$  をわざと 1 より小さくしておき、零子午線から東西へ適当に離れた場所で  $m$  が 1 になるようにしておくことと便利である。実際に使われている平面直交座標 ( $X, Y$ ) は、

$$\begin{aligned} X &= m_0 k(x - B_0) + X_0 \\ Y &= m_0 k y + Y_0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

である。ここに  $m_0$  は零子午線縮率、 $B_0$  は赤道から平面座標系の原点緯度までの子午線弧長、 $X_0, Y_0$  は多くは負の座標値を避けるために加える加定数、 $k$  は平面標高係数

$$k = 1 + h_0/r_0 \quad (3.63)$$

で、 $r_0$  は式 (3.22) によって得られる原点の平均曲率半径

$$r_0 = \sqrt{M_0 N_0} \quad (3.64)$$

であり、 $h_0$  は楕円体面からの座標平面の高さである。

わが国の法令による平面直交座標系では、

$$\begin{aligned} m_0 &= 0.9999 \\ X_0 &= 0 \\ Y_0 &= 0 \\ k &= 1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

である。

### 3.10.4 本研究における平面直角座標への変換

平面直角座標へ変換を行うための基準点は、平面直角座標系 (公共座標系, 19 座標系) の系番号 V(5) を用いた。座標系原点の経緯度は、東経, 134 度 20 分 0 秒 0000, 北緯, 36 度 0 分 0 秒 0000 であり、兵庫県, 鳥取県および岡山県の基準点である [3]。

経緯度から平面直角座標へ変換するには、式 (3.38), 式 (3.39), 式 (3.40), 式 (3.59), 式 (3.60) および式 (3.62) を用いて、計測により、GPS から得られた経緯度を平面直角座標へ変換する。

## 第4章 児島湖の水底地形データの更新

児島湖の三次元水底地形を作成するためには、水深データと位置データと計測時の時刻データが必要である。時刻－水深データは音響測深機から得られる、時刻－位置データはGPS(Global Positioning System：全地球測位システム)から得られる。GPSから出力される位置の情報は経緯度およびジオイド高と標高で与えられるので、楕円体座標の経緯度成分を平面直角座標に変換する必要がある。その結果、得られる移動局アンテナの直交座標系での位置を表す結果を計測データとして、水深データと時刻で同期することで三次元の水底地形データが得られる。データの更新を行う時に、三次元水底地形データを新たに解析に導入し、既存の三次元水底地形データの更新が可能となる。

ここでは、測深実験によって収録したデータに基づく、三角形要素の節点における深さを推定する。

### 4.1 三角形有限要素メッシュと節点データ

計算機により数値的に処理するときには離散化が必要となり、そのため対象となる領域の分割が行われる。その時に代表的な領域の分割方法として、三角形要素による分割がある。対象となる領域を小領域（要素）に分割し、各小領域における地形を比較的単純な関数で表す。代表的な近似法として最小二乗法がある。

最小二乗法は測定で得られた数値の組を1次関数など特定の関数を用いて近似するとき、想定する関数が測定値に対してよい近似となるように、残差の二乗和を最小とするような係数を決定する方法、あるいはそのような方法によって近似を行うことである。ここではその平面の方程式をどのように定めるかを考察する。

水底地形データを推定するために、計測した水深データに基づいて、 $E$ を頂点が $V_1(X_1, Y_1), V_2(X_2, Y_2), V_3(X_3, Y_3)$ からなる三角形要素とする。 $z_1, z_2, \dots, z_n$ は、 $E$ に含まれる計測より得られた三次元水底地形データである。水底地形は、各々の三角形要素で式4.1で近似できるとする。 $a, b$ および $c$ は最小二乗法によって導かれる。

$$z = ax + by + c \quad (4.1)$$

近似平面に対する残差の2乗総和 $Q$ は

$$Q(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \{z_i - (ax_i + by_i + c)\}^2 \quad (4.2)$$

となる。 $Q$ を最小とするパラメータ $a, b, c$ を求める。その時、式(4.2)をパラメータ $a,$

$b, c$  についてそれぞれ偏微分すると 0 になるので,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n x_i \{z_i - (ax_i + by_i + c)\} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n y_i \{z_i - (ax_i + by_i + c)\} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial c} &= \sum_{i=1}^n \{z_i - (ax_i + by_i + c)\} = 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

より, 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned}a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i y_i + c \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i y_i + b \sum_{i=1}^n y_i^2 + c \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + nc &= \sum_{i=1}^n z_i\end{aligned}\tag{4.4}$$

が得られる。 $V(x_0, y_0)$  を有限要素メッシュの節点であり,  $V$  を三角要素  $E_1, E_2, \dots, E_m$  の頂点とする。また,  $k$  番目の要素の水底地形が線形関数  $z = a_k x + b_k y + c_k$  で表されるとする。また,  $Z_0$  は,  $V$  における更新後の水深であり, 領域  $E_1, E_2, \dots, E_m$  に関する  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の加重平均として,

$$Z_0 = \frac{\sum_{i=1}^i z_i A_i}{\sum_{i=1}^m A_i}\tag{4.5}$$

によって得られるとする。ここで,  $z_i = a_i x_0 + b_i y_0 + c_i$  であり,  $A_i$  は,  $E_i$  の面積である。式 (4.4) を計算する際に, 計測データのほかに更新前の三角形要素  $E$  の頂点  $V_1(X_1, Y_1), V_2(X_2, Y_2), V_3(X_3, Y_3)$  を計算に加えて計算を行う。そして, 各節点の新しく得られた水深データと前回の水深データの差の二乗をすべて加算し, 正の平方根を取った値が指定した値より小さくあなるまで, 三角形要素  $E$  の頂点  $V_1(X_1, Y_1), V_2(X_2, Y_2), V_3(X_3, Y_3)$  における水深値  $Z_1, Z_2, Z_3$  を新たに計算された値と置き換えながら, 反復計算を行い, 水深を決定する。また, 生成した三次元水底地形データの水深が, 10m を超えると, 更新処理のデータとして採用しない。

## 4.2 測位・測深結果

測位・測深計測は, 2014 年には, 1 月 30 日, 2 月 6 日, 3 月 28 日, 4 月 3 日, 4 月 11 日, 5 月 2 日に 6 回, 2015 年には, 10 月 8 日, 10 月 28 日に 2 回, 2016 年には, 6 月 3 日, 6 月 6 日, 6 月 20 日, 6 月 27 日, 7 月 4 日, 7 月 22 日, 11 月 17 日, 12 月 15 日, 12 月 19 日, 12 月 28 日に 10 回実施した。

ここでは, 2016 年 6 月 3 日, 6 月 6 日, 6 月 20 日, 6 月 27 日, 7 月 4 日, 7 月 22 日, 12 月 15 日, 12 月 19 日, 12 月 28 日に測位・測深システムを用いた計測を実施した計測結果を示す。

#### 4.2.1 2016年06月03日

図 4.1(a) に 2016 年 06 月 03 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.1(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.1(b) に示す。

図 4.1(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.1(d) に示す。

図 4.1(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。

#### 4.2.2 2016年06月06日

図 4.2(a) に 2016 年 06 月 06 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.2(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.2(b) に示す。

図 4.2(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.2(d) に示す。

図 4.2(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。

#### 4.2.3 2016年06月20日

図 4.3(a) に 2016 年 06 月 20 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.3(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.3(b) に示す。

図 4.3(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.3(d) に示す。

図 4.3(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。

#### 4.2.4 2016年06月27日

図 4.3(a) に 2016 年 06 月 27 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.4(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.4(b) に示す。

図 4.4(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.4(d) に示す。

図 4.4(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。

#### 4.2.5 2016年07月04日

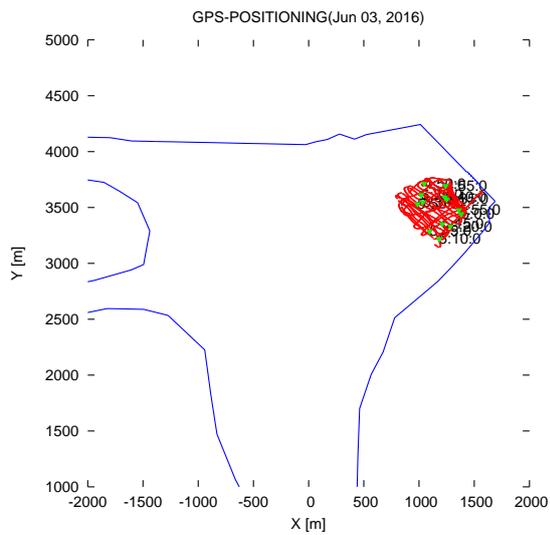
図 4.5(a) に 2016 年 07 月 04 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.5(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.5(b) に示す。

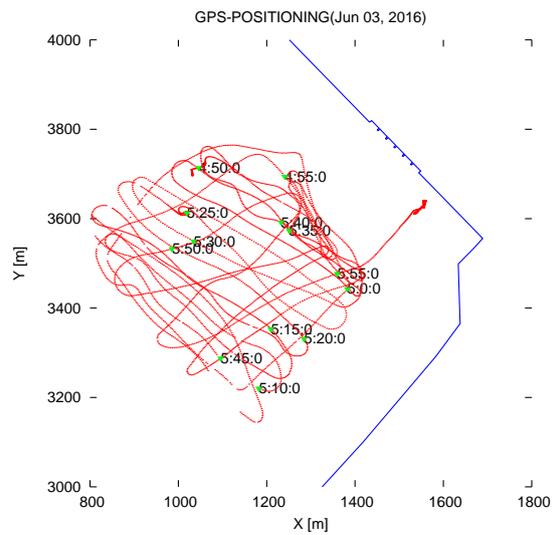
図 4.5(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.5(d) に示す。

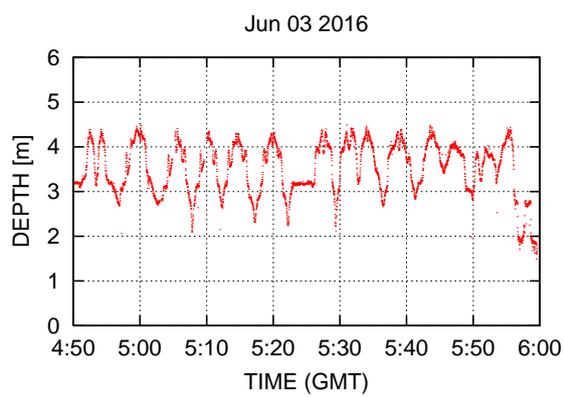
図 4.5(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。



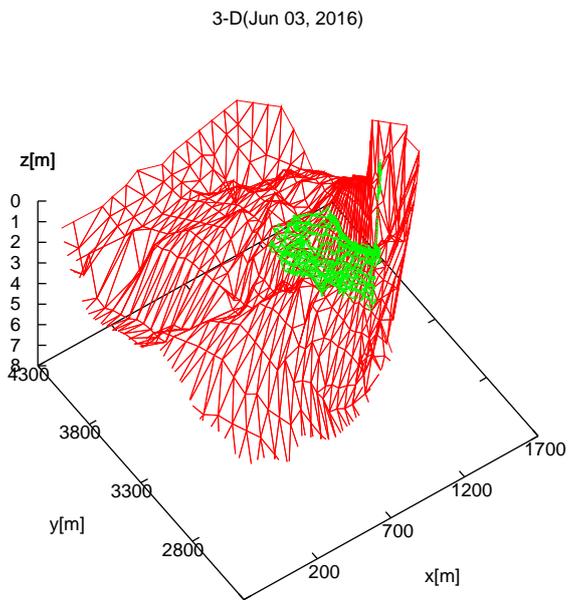
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡

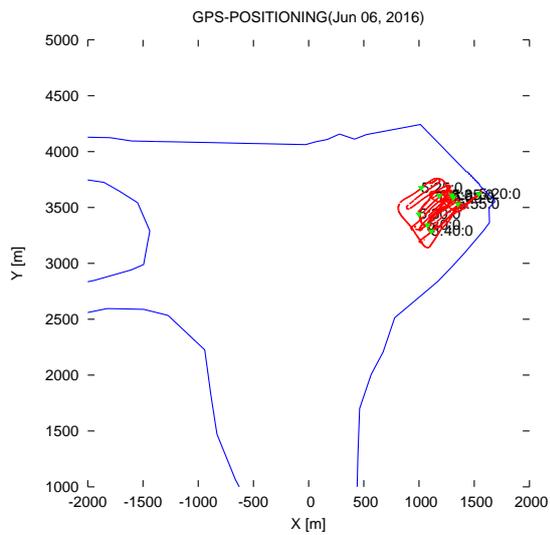


(c) 時間-水深データ

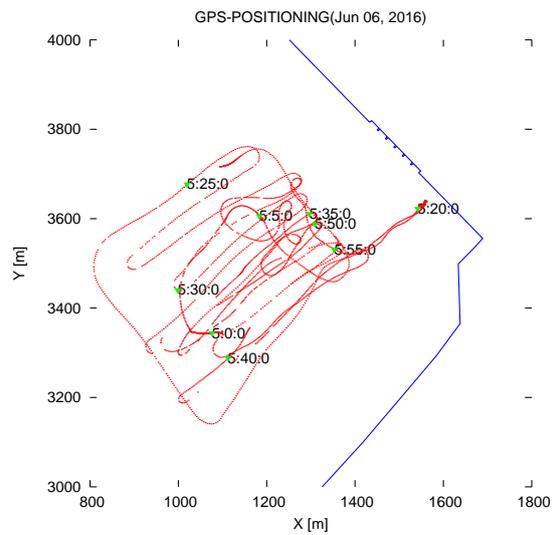


(d) 測位測深結果

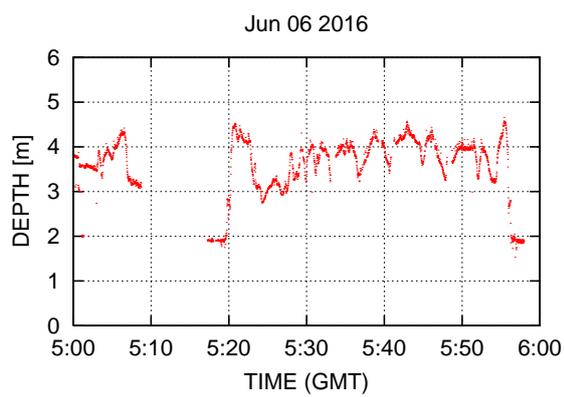
図 4.1: 2016 年 06 月 03 日の計測結果 [27]



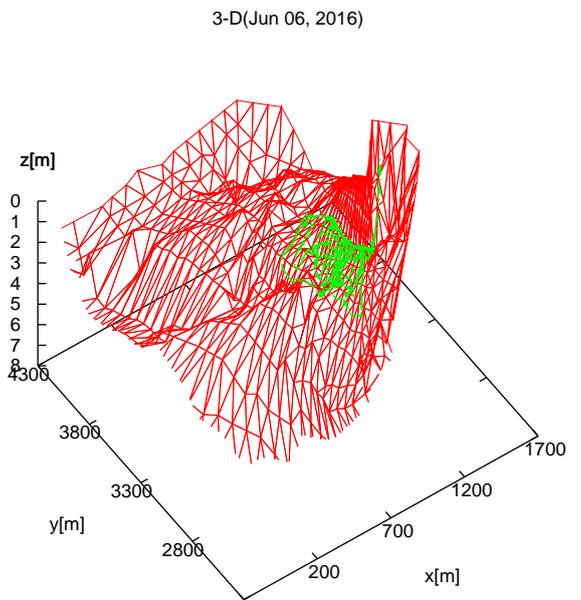
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡

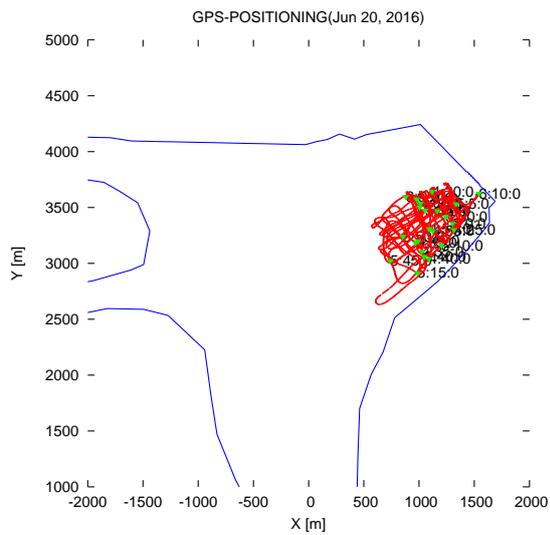


(c) 時間-水深データ

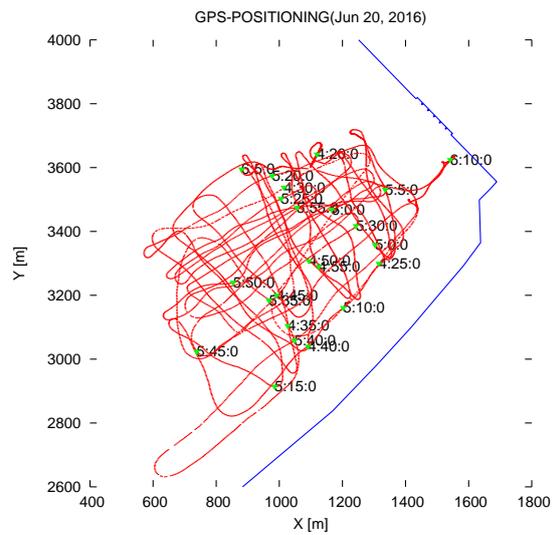


(d) 測位測深結果

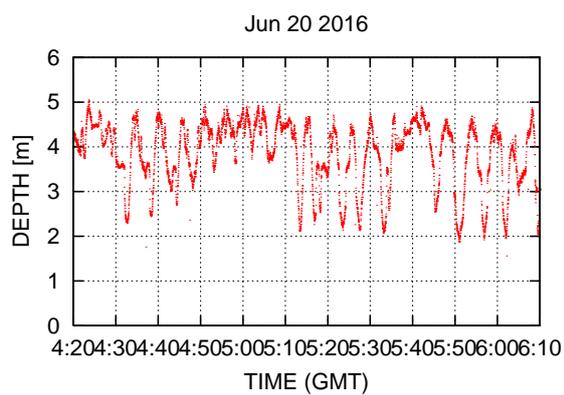
図 4.2: 2016 年 06 月 06 日の計測結果 [27]



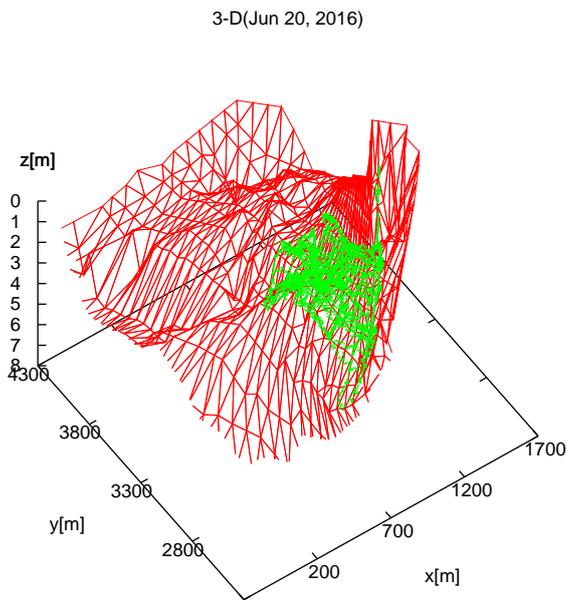
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡

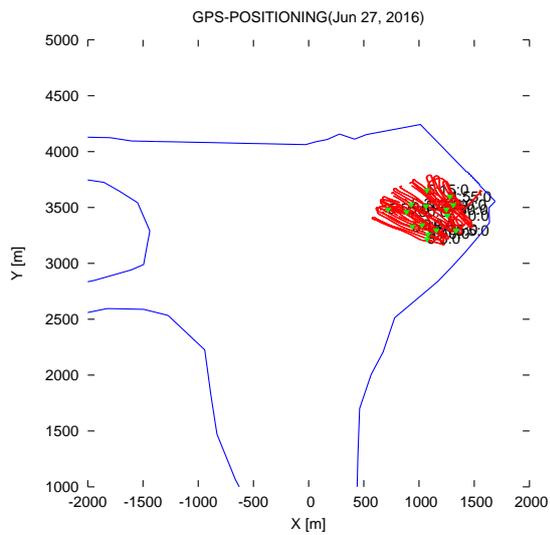


(c) 時間-水深データ

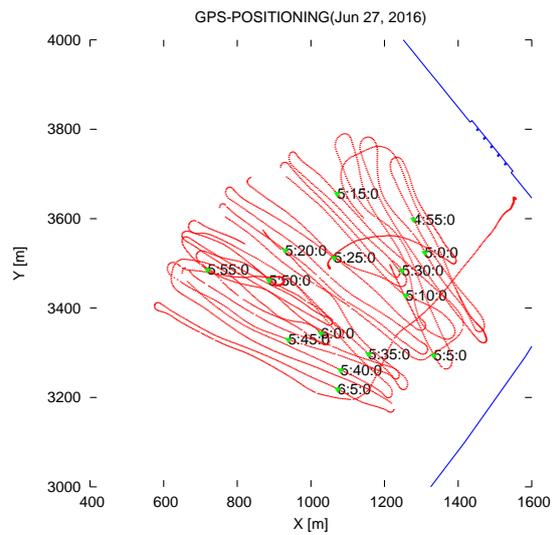


(d) 測位測深結果

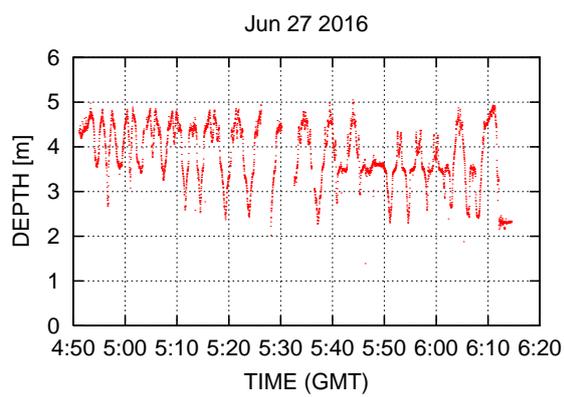
図 4.3: 2016 年 06 月 20 日の計測結果 [27]



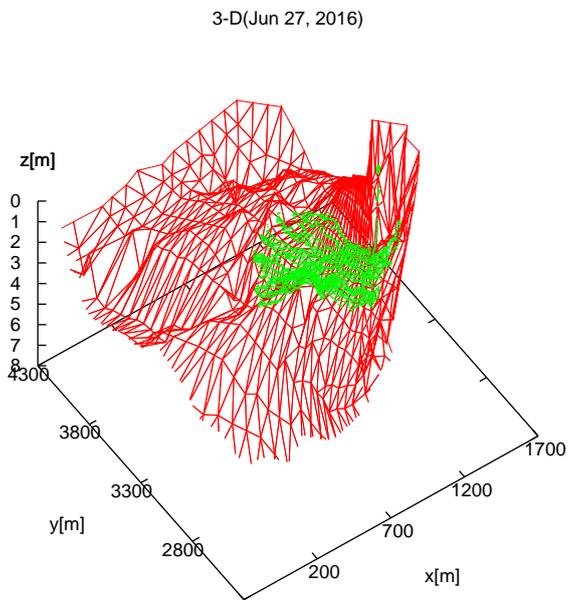
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡

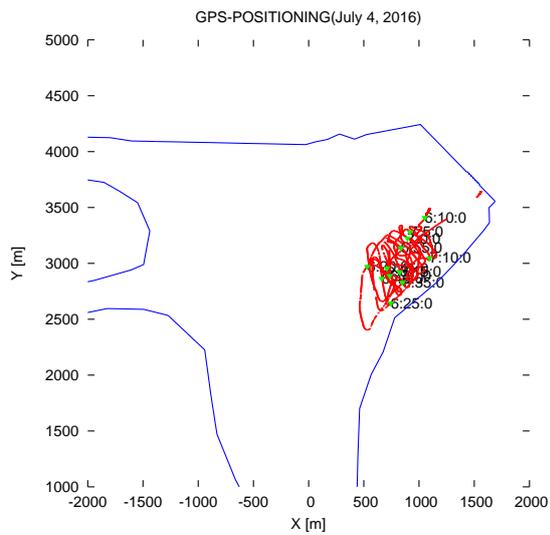


(c) 時間-水深データ

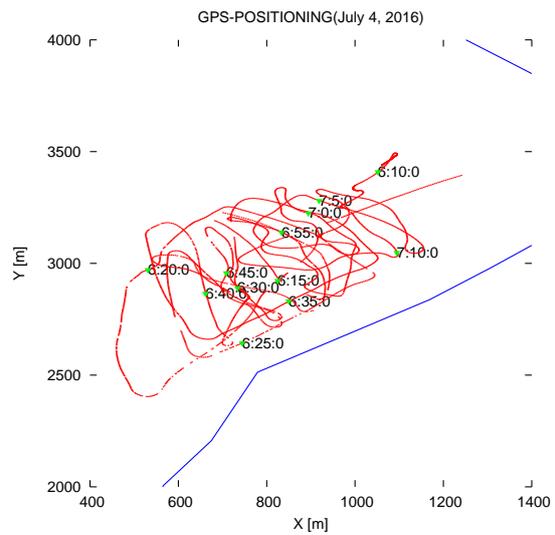


(d) 測位測深結果

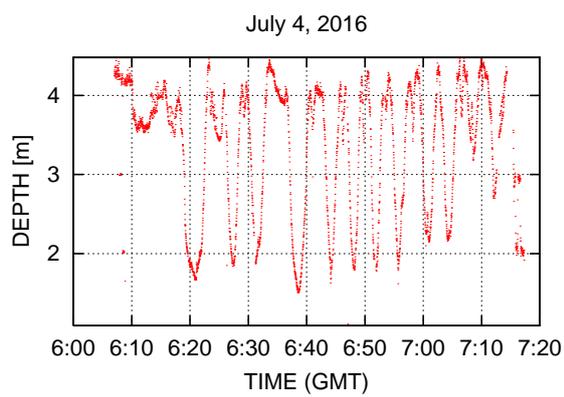
図 4.4: 2016 年 06 月 27 日の計測結果 [27]



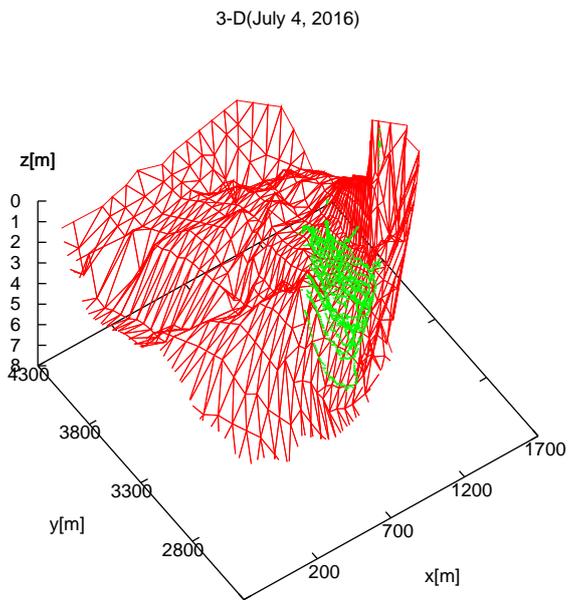
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡



(c) 時間-水深データ



(d) 測位測深結果

図 4.5: 2016 年 07 月 04 日の計測結果 [27]

#### 4.2.6 2016年07月22日

図 4.6(a) に 2016 年 07 月 22 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.6(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.6(b) に示す。

図 4.6(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.6(d) に示す。

図 4.6(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。

#### 4.2.7 2016年12月15日

図 4.7(a) に 2016 年 12 月 15 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.7(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.7(b) に示す。

図 4.7(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.7(d) に示す。

図 4.7(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。

#### 4.2.8 2016年12月19日

図 4.8(a) に 2016 年 12 月 19 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.8(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.8(b) に示す。

図 4.8(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.8(d) に示す。

図 4.8(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。

#### 4.2.9 2016年12月28日

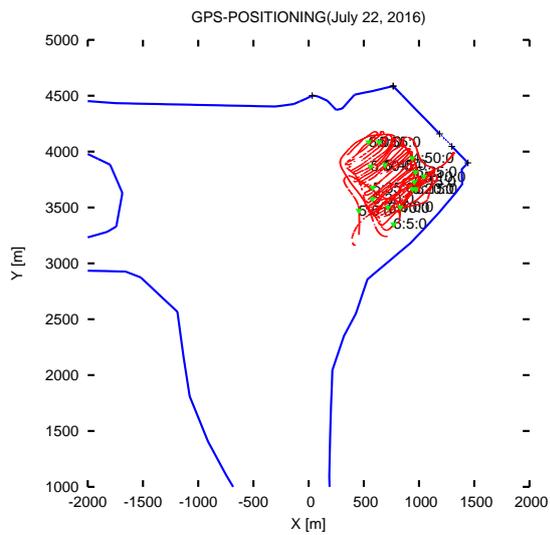
図 4.9(a) に 2016 年 12 月 28 日に計測を行った時の航跡を示す。

図 4.9(a) のゲート付近の航跡を拡大した図を図 4.9(b) に示す。

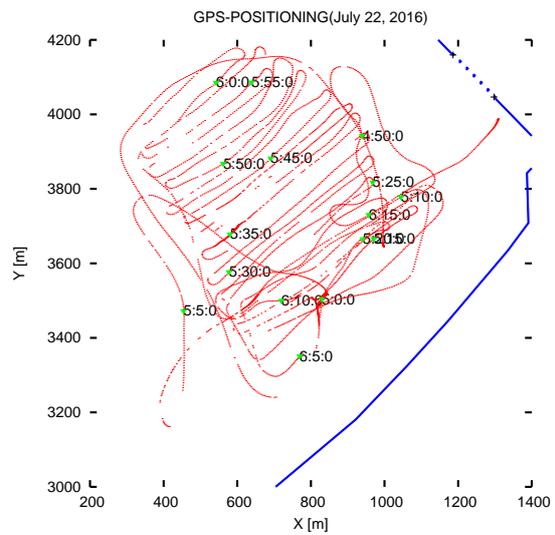
図 4.9(c) は、時間と共に変化する水深を示す。

航跡を三次元で表示した図を図 4.9(d) に示す。

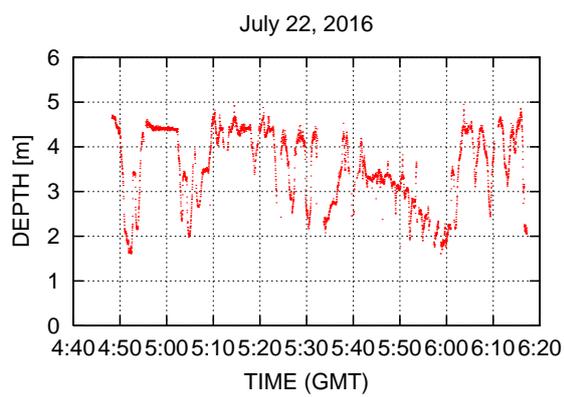
図 4.9(a), (b) において、赤い線は航跡を示す。緑の点は 5 分ごとの位置を示す。



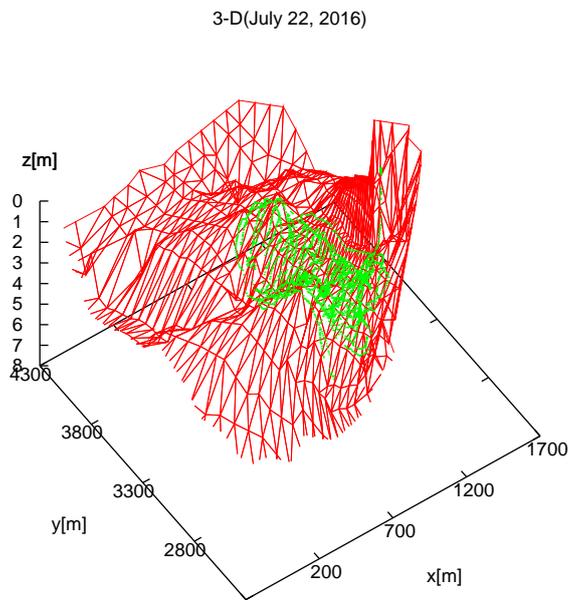
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡

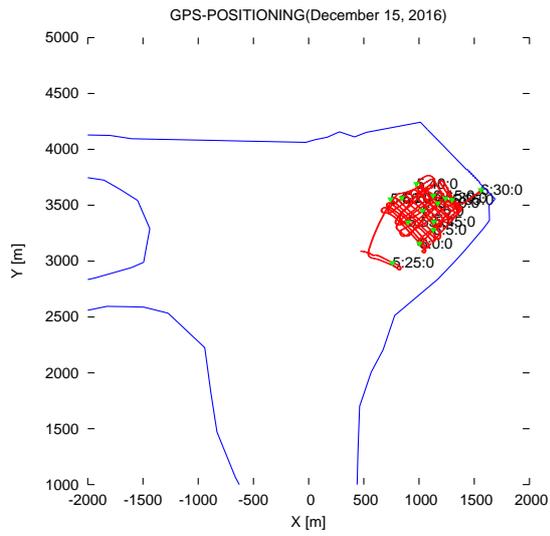


(c) 時間-水深データ

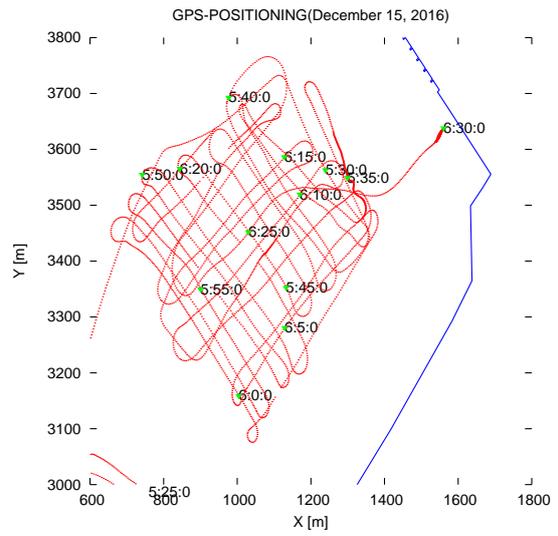


(d) 測位測深結果

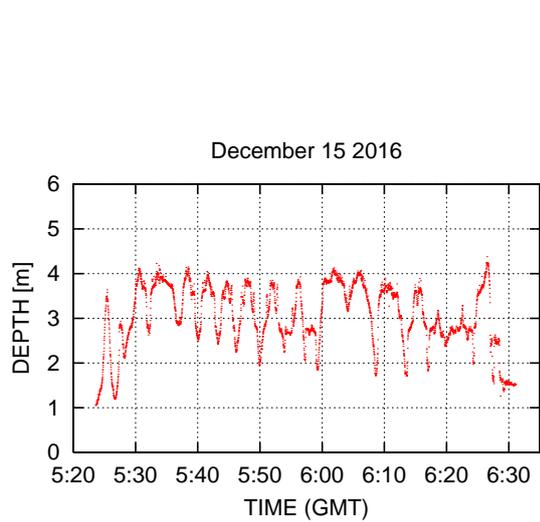
図 4.6: 2016 年 07 月 22 日の計測結果 [27]



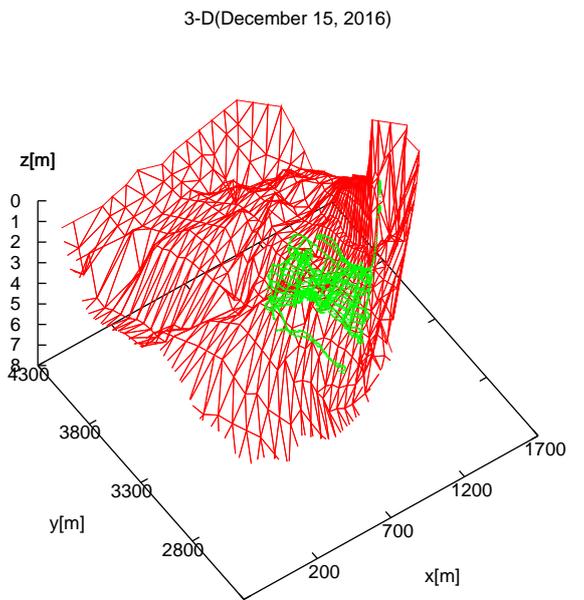
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡

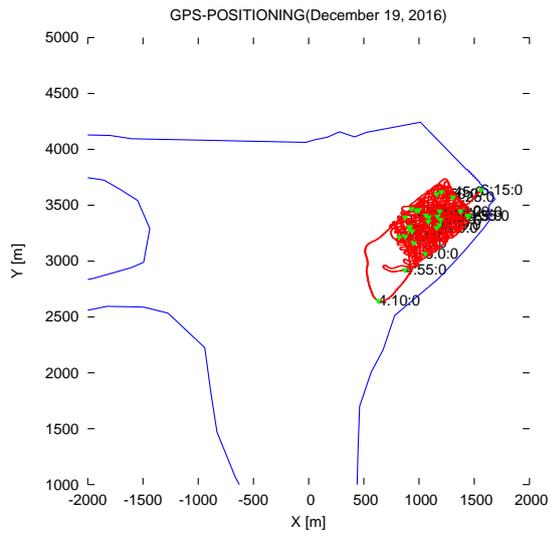


(c) 時間-水深データ

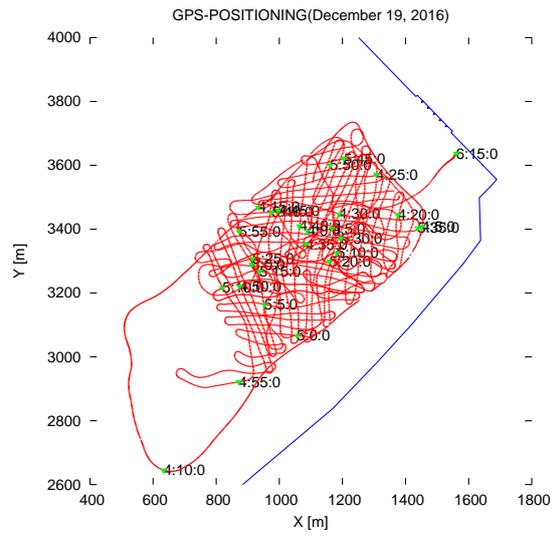


(d) 測位測深結果

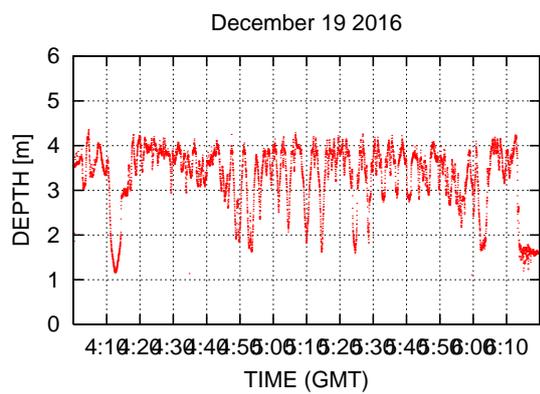
図 4.7: 2016 年 12 月 15 日の計測結果



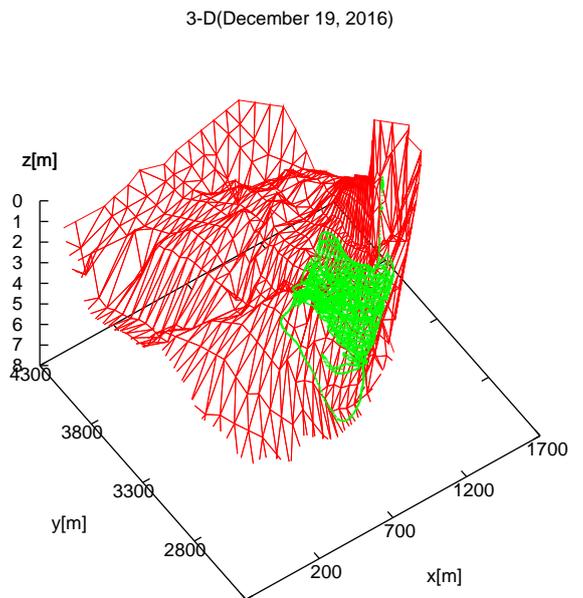
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡

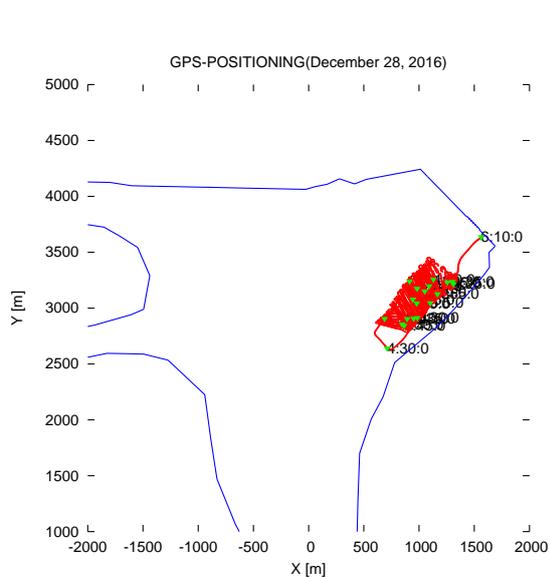


(c) 時間-水深データ

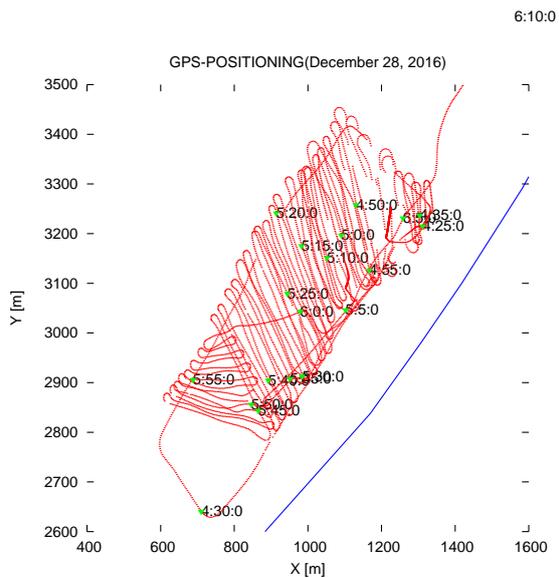


(d) 測位測深結果

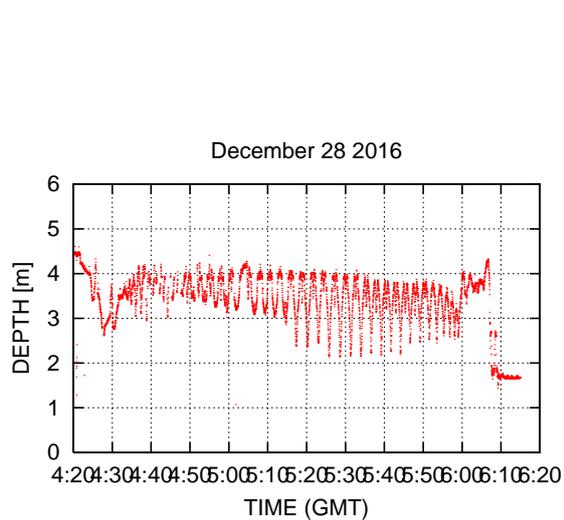
図 4.8: 2016 年 12 月 19 日の計測結果



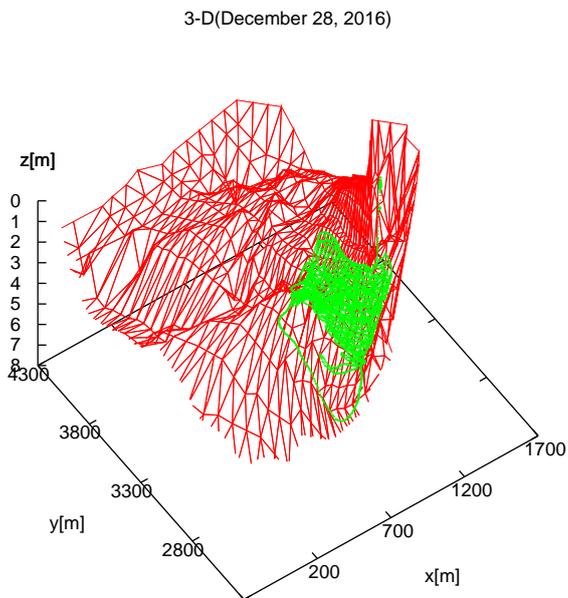
(a) 航跡全体表示



(b) ゲート付近の航跡



(c) 時間-水深データ



(d) 測位測深結果

図 4.9: 2016 年 12 月 28 日の計測結果

### 4.3 2014年の計測結果

本節では、2013年11月13日に行った計測データを基にして、2014年1月30日、2月6日、3月28日、4月3日、4月11日、5月2日に6回の計測データを用いて水底地形データを更新する。図4.10は2014年に実施した測位・測深実験のゲート付近の航跡である。図4.11は2013年11月13日の測深データによる更新前の水底地形である。図4.12は2014年の計測データを用いて更新した更新後の水底地形である。図4.13は2013年11月13日の測深データによる更新前の水底地形(図4.11)と2014年1月30日、2月6日、3月28日、4月3日、4月11日、5月2日に6回の計測データによる更新後水底地形(4.12)を重ねた図を示し、色の違いで変化を示す。ゲート付近での変化が見られる。図4.14と図4.15は更新前水深データ(2013年のデータ)と更新後水深データ(2014年のデータ)の差を示す。横軸は節点を示し、縦軸は変化量を示す。

年間平均堆積量については  $S_m$  を式

$$S_m = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{3}(d_{i1} + d_{i2} + d_{i3})\Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i} \quad (4.6)$$

により計算する。ここで、 $d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}$  は  $i$  番目の要素における各節点の水深の変化量であり、 $\Delta_i$  は  $i$  番目の要素の面積である。また、 $n$  は総要素数である。

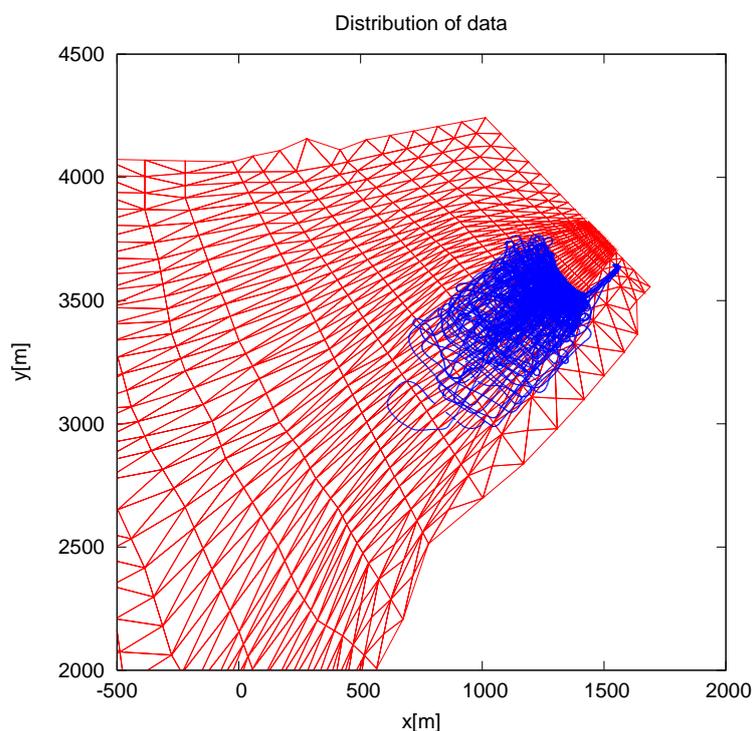
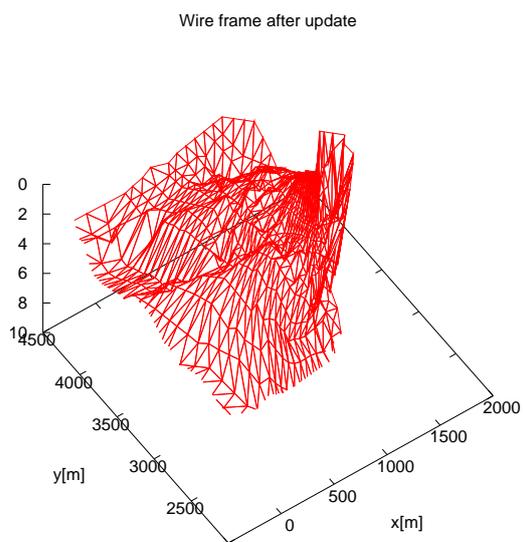
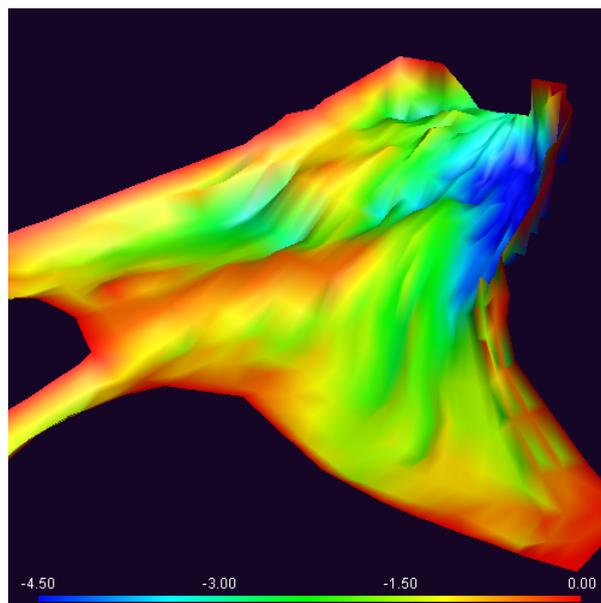


図 4.10: 2014年ゲート付近の航跡

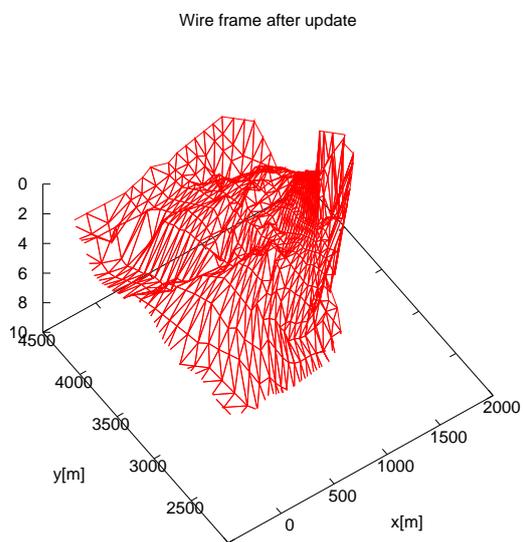


(a) メッシュ表示

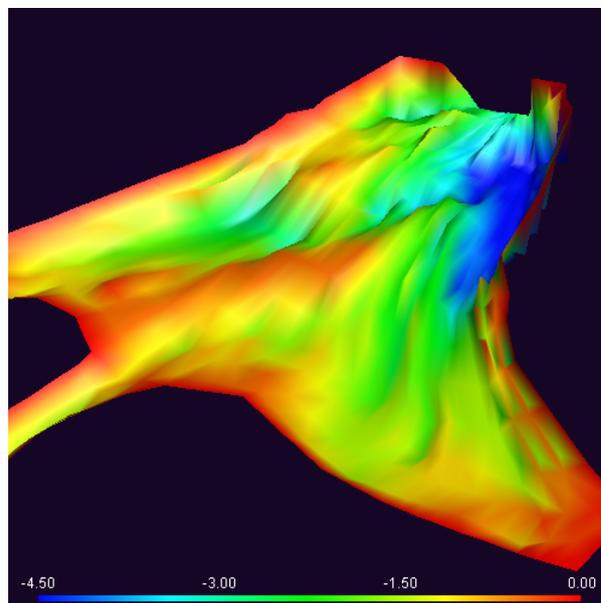


(b) カラー表示

図 4.11: 2013 年 11 月 13 日の測深データによる更新前の水底地形



(a) メッシュ表示



(b) カラー表示

図 4.12: 2014 年 1 月 30 日, 2 月 6 日, 3 月 28 日, 4 月 3 日, 4 月 11 日, 5 月 2 日に 6 回の計測データによる更新後水底地形

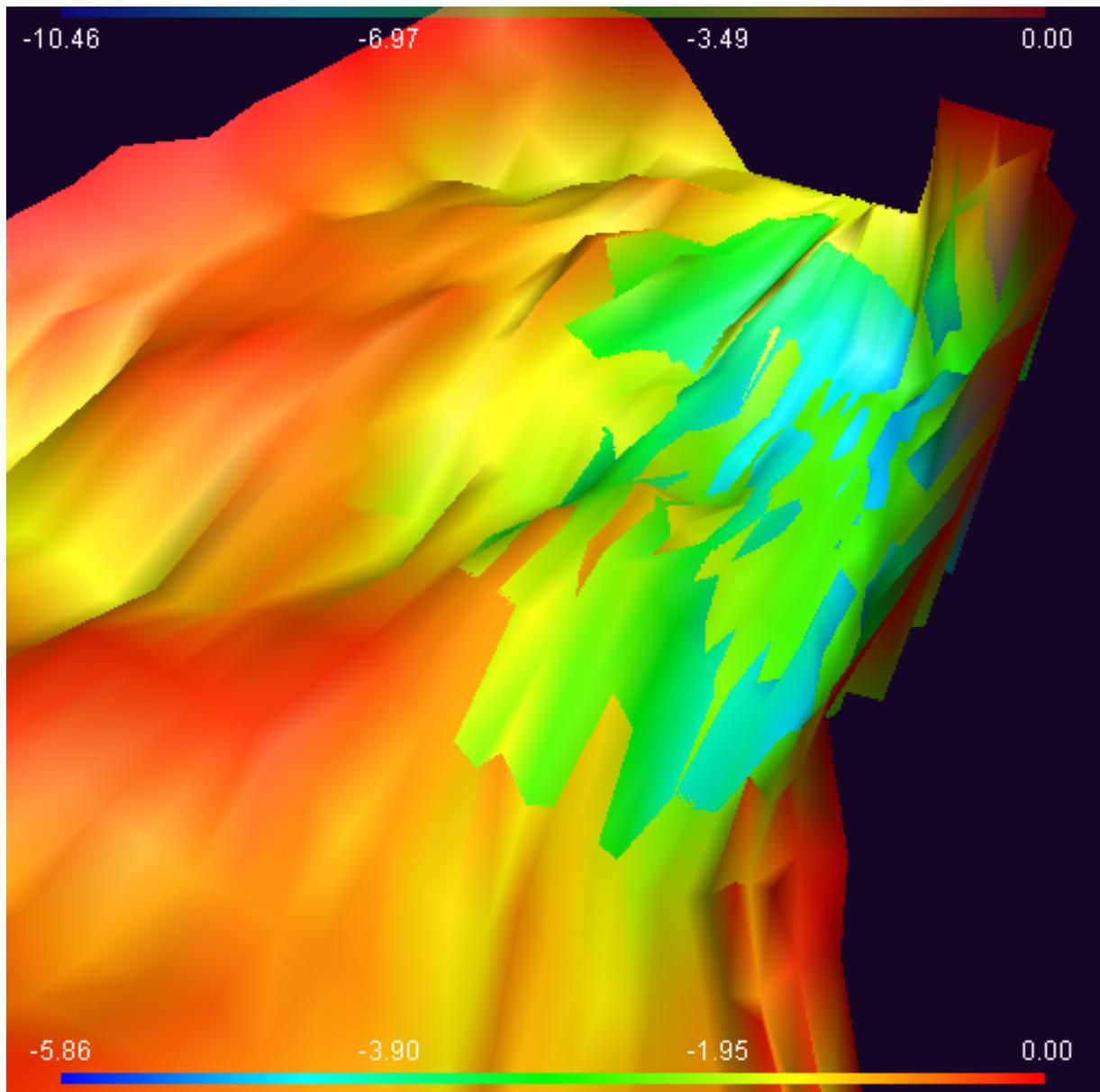


図 4.13: 2013 年 11 月 13 日の測深データによる更新前の水底地形と 2014 年 1 月 30 日, 2 月 6 日, 3 月 28 日, 4 月 3 日, 4 月 11 日, 5 月 2 日に 6 回の計測データによる更新後水底地形の重なり

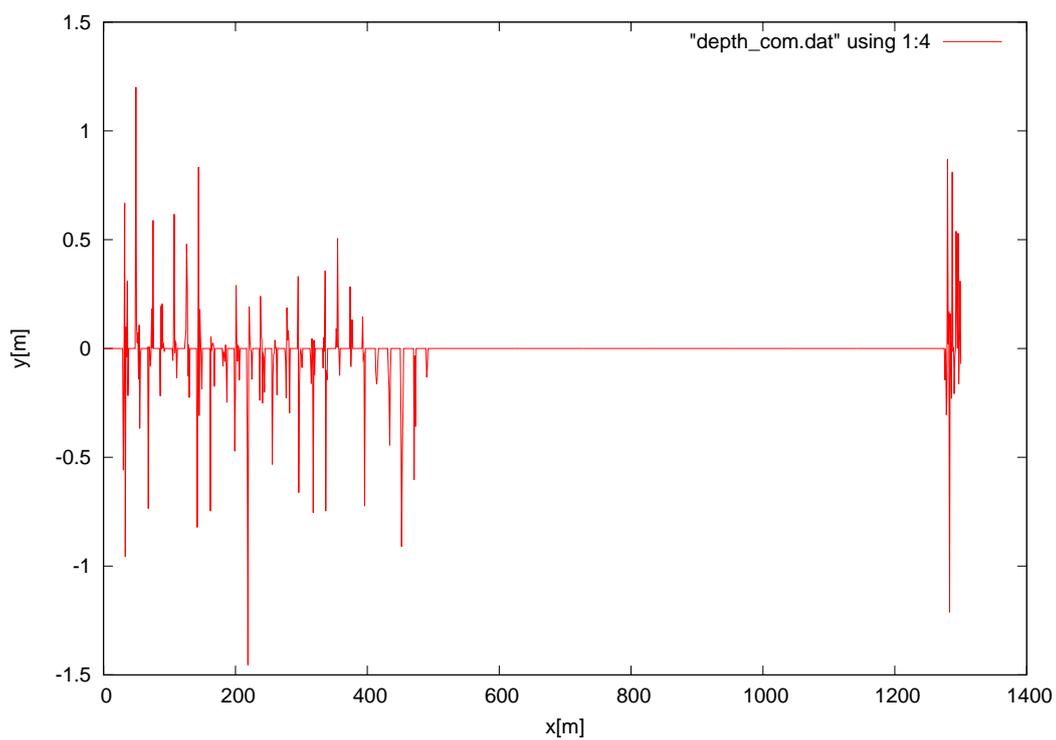


図 4.14: 2013 年から 2014 年までの期間での更新前後の水深差

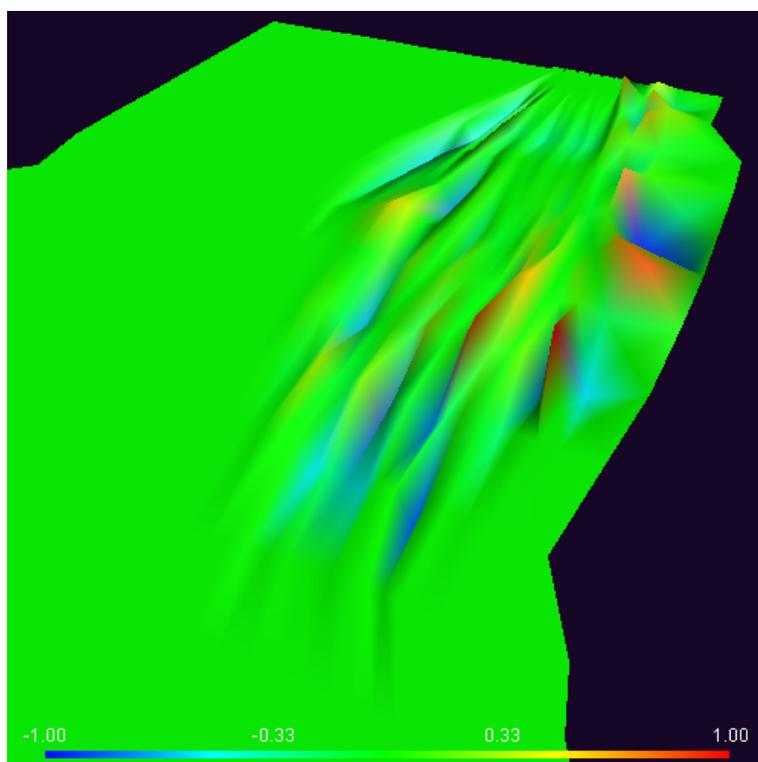


図 4.15: 2013 年から 2014 年までの期間での更新前後の水深差

## 4.4 2015年の計測結果

本節では、2014年に行った6回計測データを基にして、2015年に行った2回計測データを用いて水底地形データを更新する。図4.16は2015年に実施した測位・測深実験のゲート付近の航跡を示す。図4.17は2014年に行った6回計測データを用いた更新前の水底地形を示す。図4.18は2015年の計測データを用いて更新した更新後の水底地形を示す。図4.19は2014年に行った6回計測データを用いた更新前の地形と2015年に行った2回計測データを用いた更新後の地形の重なった図を示し、色の違いで変化を示す。ゲート付近での変化が見られる。図4.20と図4.21は更新前水深データ(2014年のデータ)と更新後水深データ(2015年のデータ)の差を示し、横軸は節点を示し、縦軸は変化量を示す。

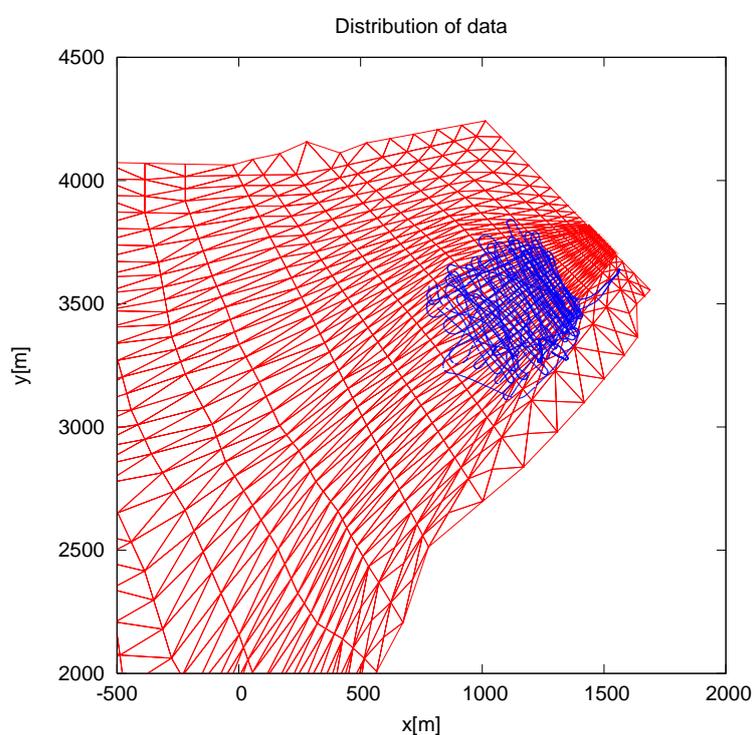
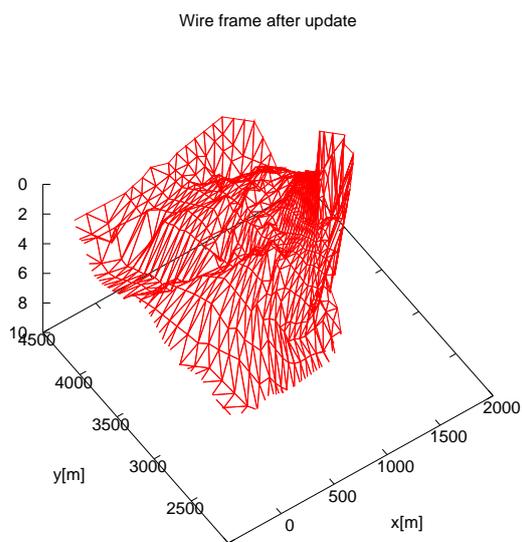
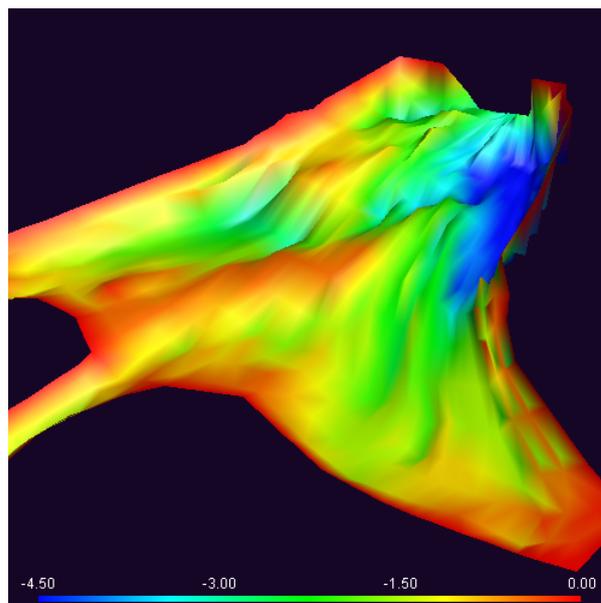


図 4.16: 2015年ゲート付近の航跡

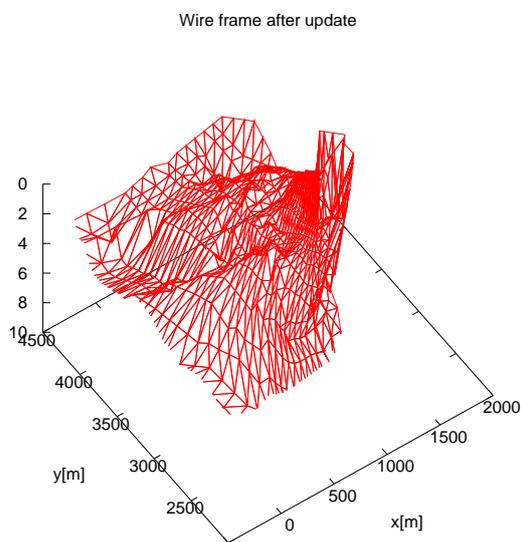


(a) メッシュ表示

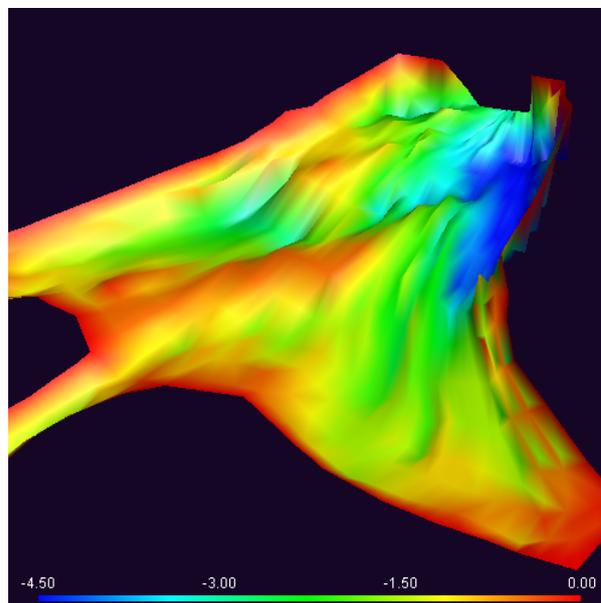


(b) カラー表示

図 4.17: 2014 年に行った 6 回計測データを用いた更新前の水底地形



(a) メッシュ表示



(b) カラー表示

図 4.18: 2015 年の計測データを用いて更新した更新後の水底地形

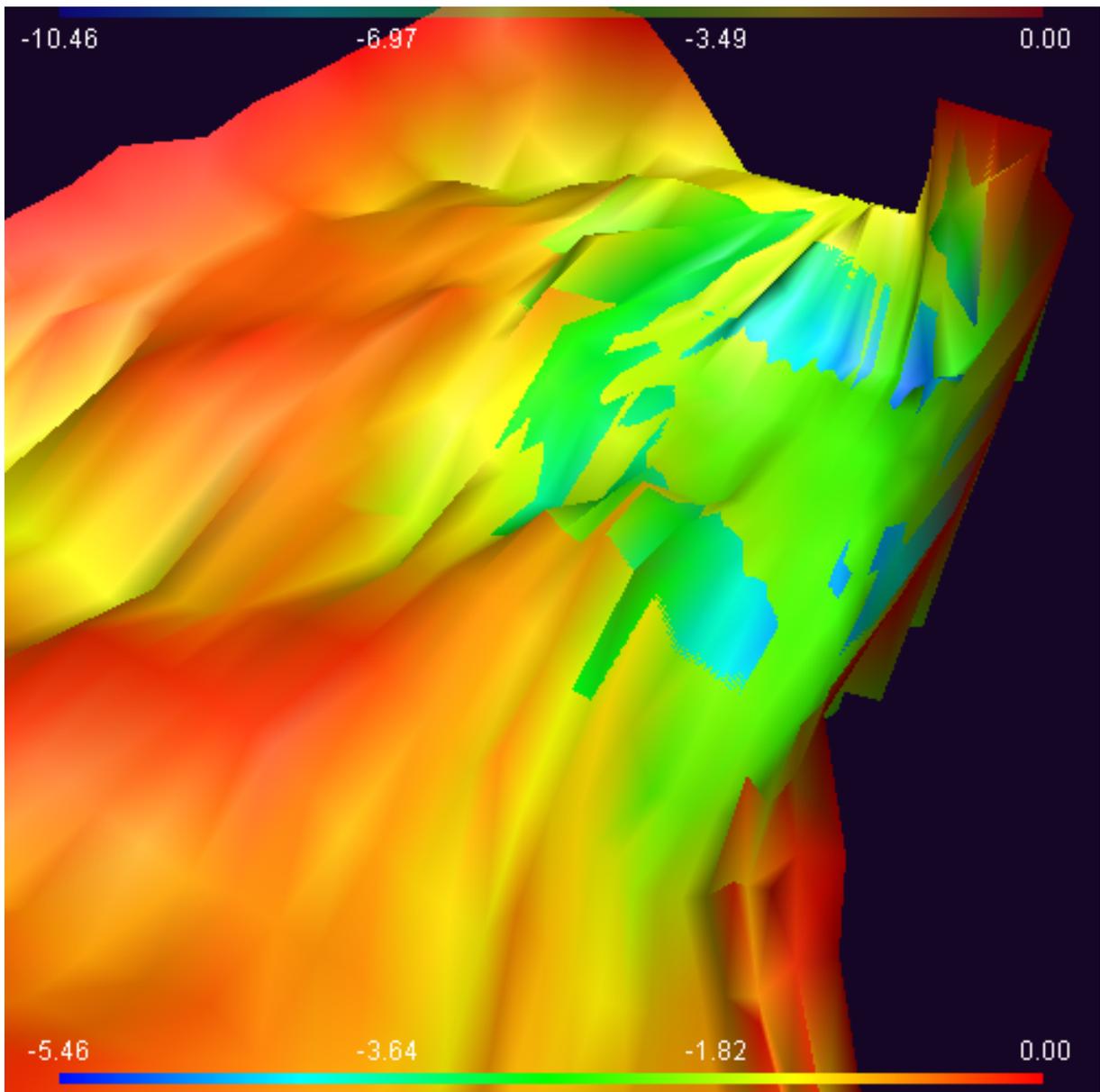


図 4.19: 2014 年に行った 6 回計測データを用いた更新前の地形と 2015 年に行った 2 回計測データを用いた更新後の地形の重なり

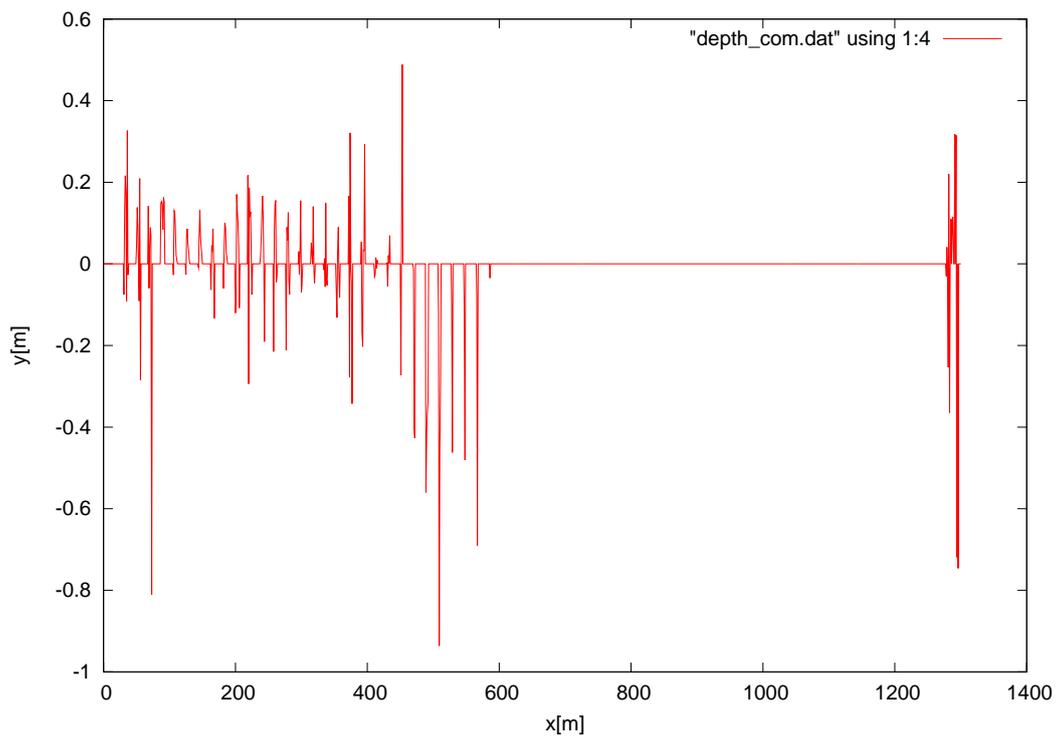


図 4.20: 2013 年から 2014 年までの期間での更新前後の水深差

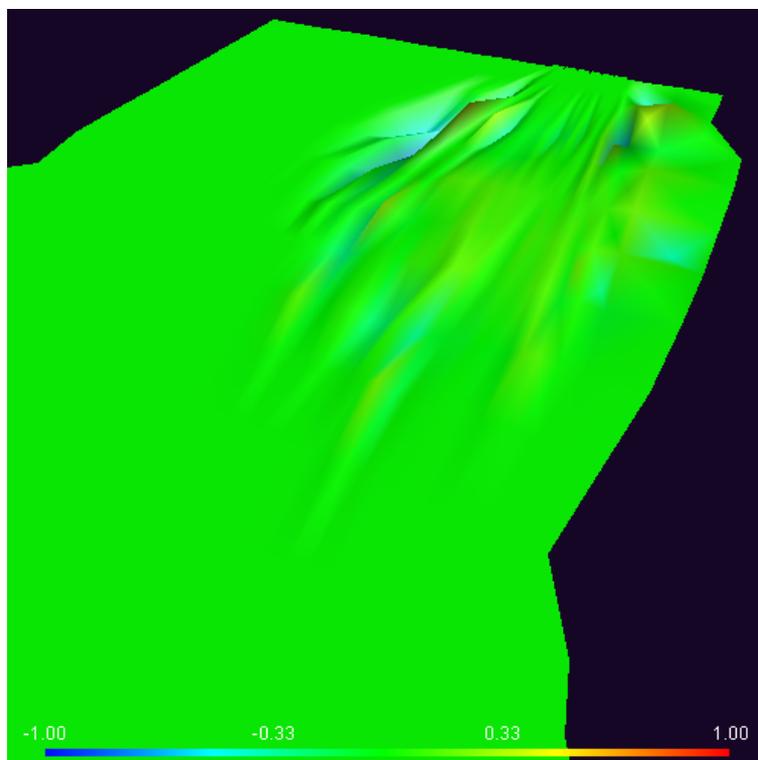


図 4.21: 2014 年から 2015 年までの期間での更新前後の水深差

## 4.5 2016年の計測結果

本節では、2015年に行った2回計測データを基にして、2016年6月及び7月に行った6回計測データを用いて水底地形データを更新する。図4.22は2015年に実施した測位・測深実験のゲート付近の航跡である。図4.23は2015年2回計測データを用いた更新前の水底地形である。図4.24は2015年2回計測データを基にして、2016年の計測データを用いて更新した更新後の水底地形である。図4.25は2015年2回計測データを用いた更新前の地形と2016年の計測データを用いて更新した更新後の水底地形重なった図を示し、色で変化量を示す。図からゲート不付近での変化が見られる。図4.26と図4.27は更新前水深データ(2015年のデータ)と更新後水深データ(2016年のデータ)の差を示し、横軸は節点を示し、縦軸は変化量を示す。

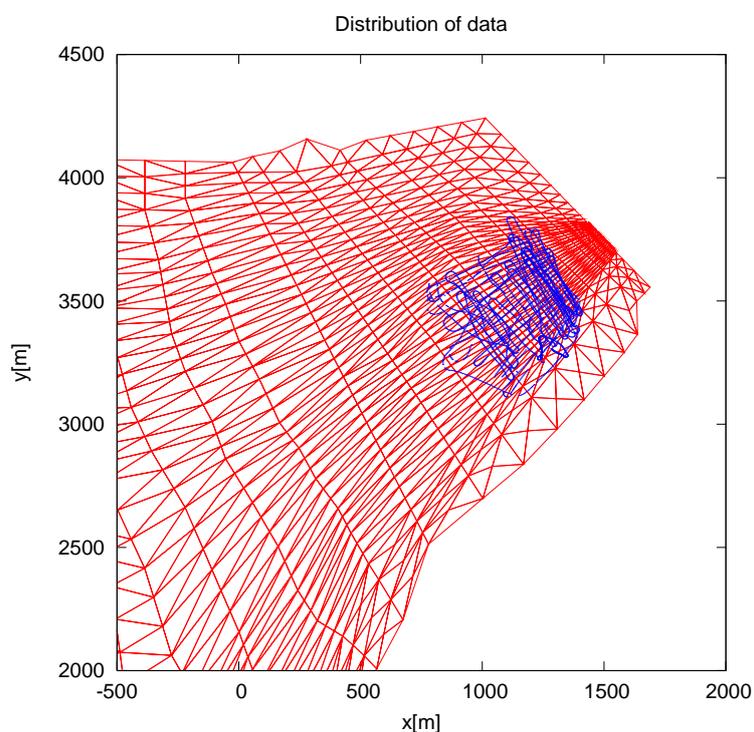
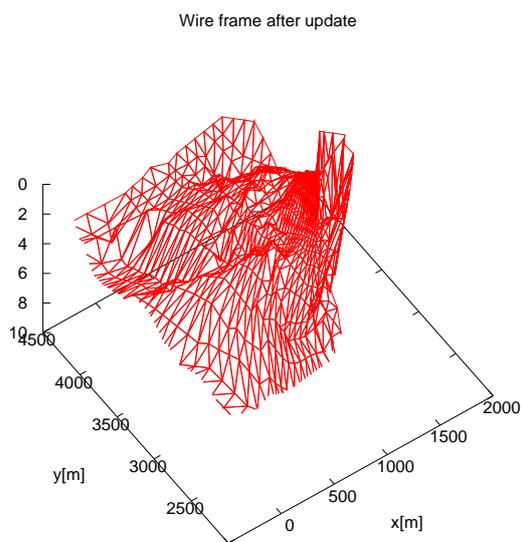
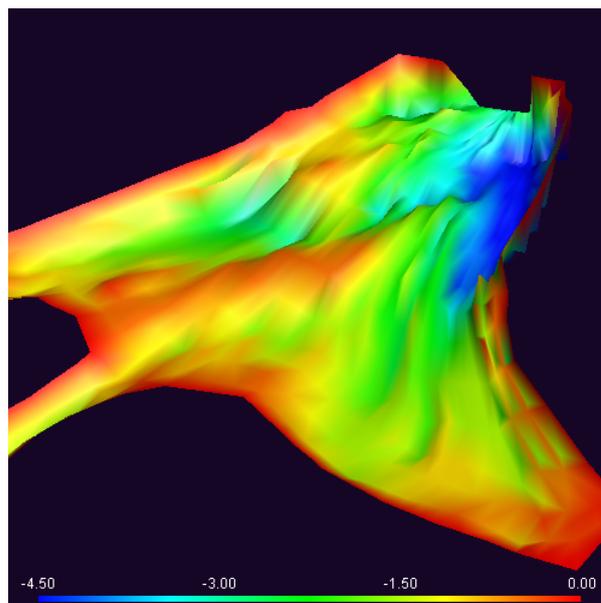


図 4.22: 2016年ゲート付近の航跡

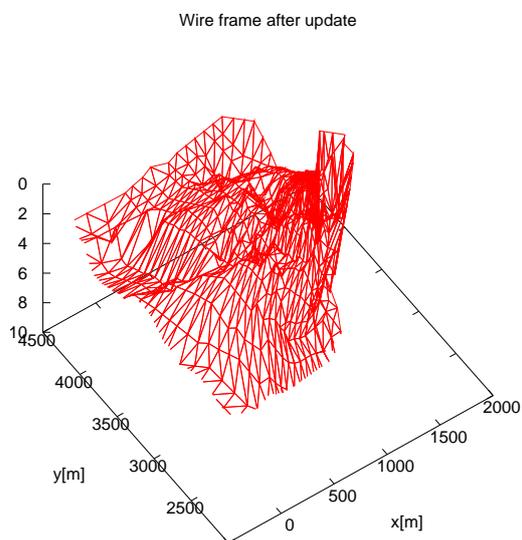


(a) メッシュ表示

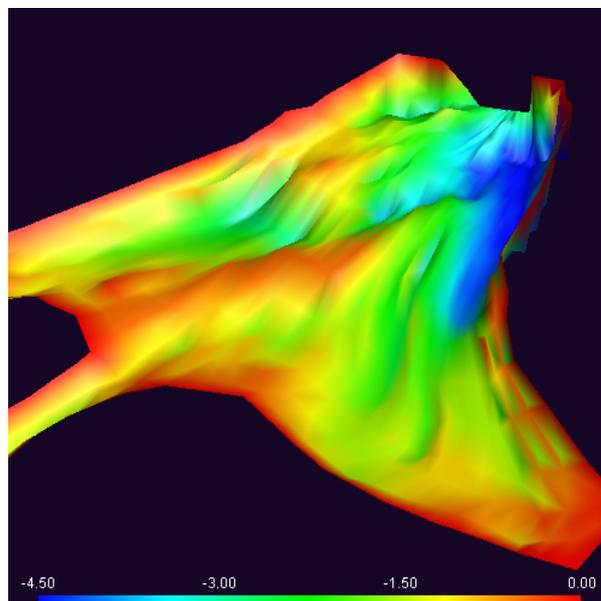


(b) カラー表示

図 4.23: 2015 年 2 回計測データを用いた更新前の水底地形



(a) メッシュ表示



(b) カラー表示

図 4.24: 2015 年 2 回計測データを基にして、2016 年の計測データを用いて更新した更新後の水底地形

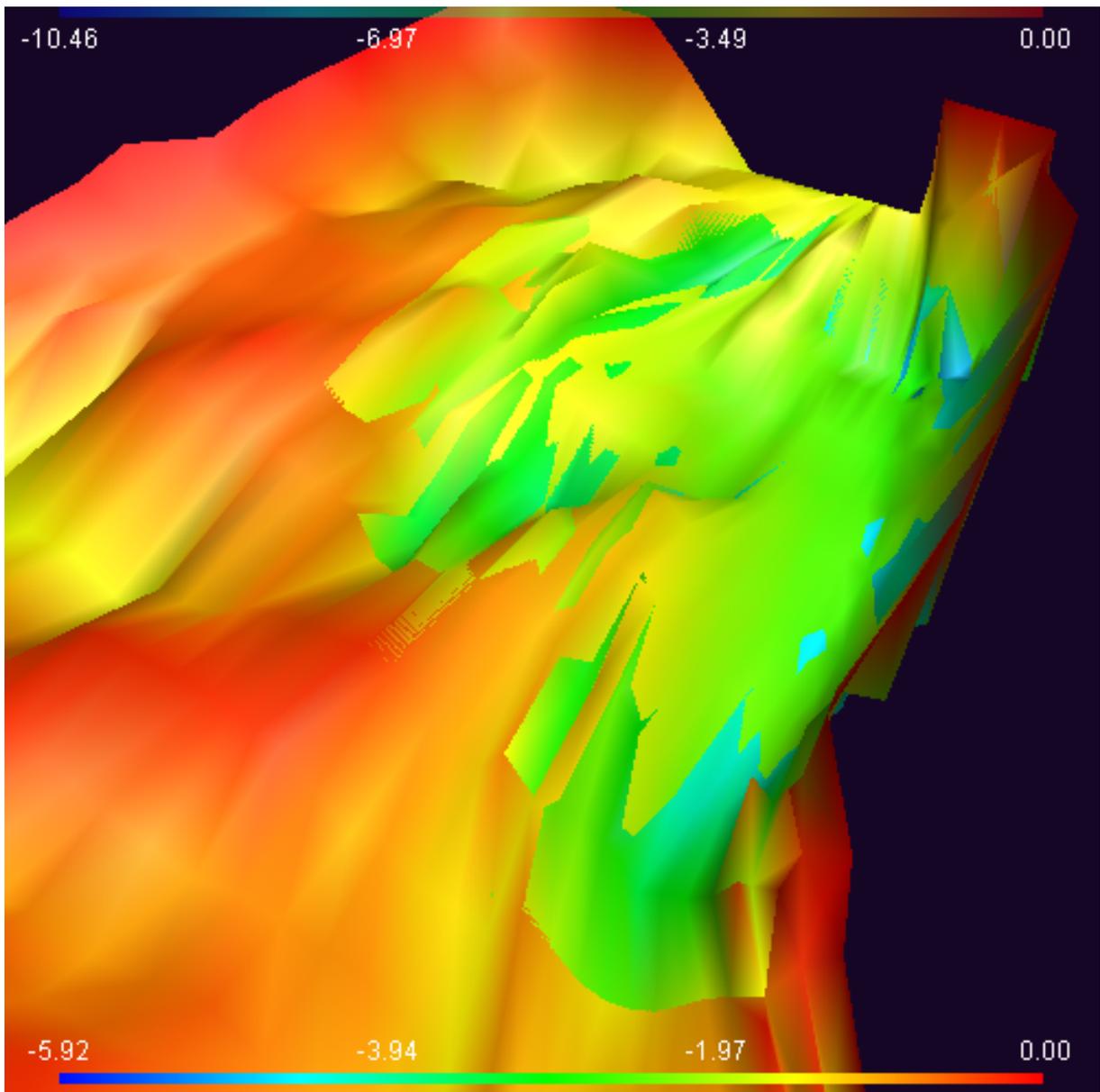


図 4.25: 2015 年 2 回計測データを用いた更新前の地形と 2016 年の計測データを用いて更新した更新後の水底地形の重なり

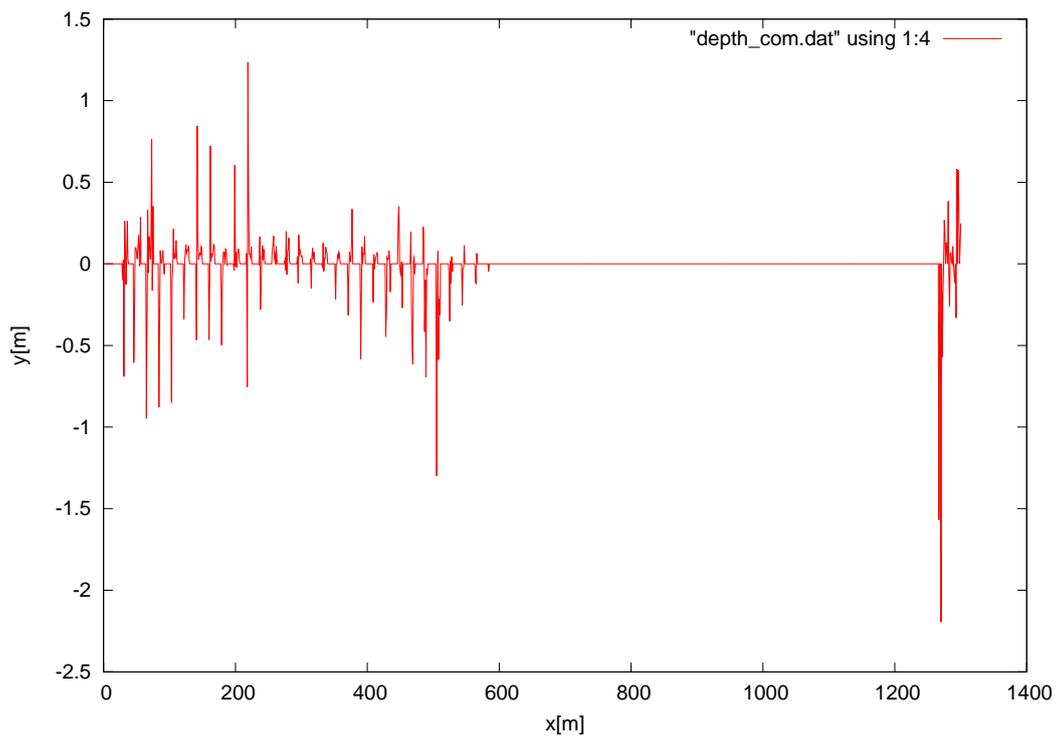


図 4.26: 2015 年から 2016 年までの期間での更新前後の水深差

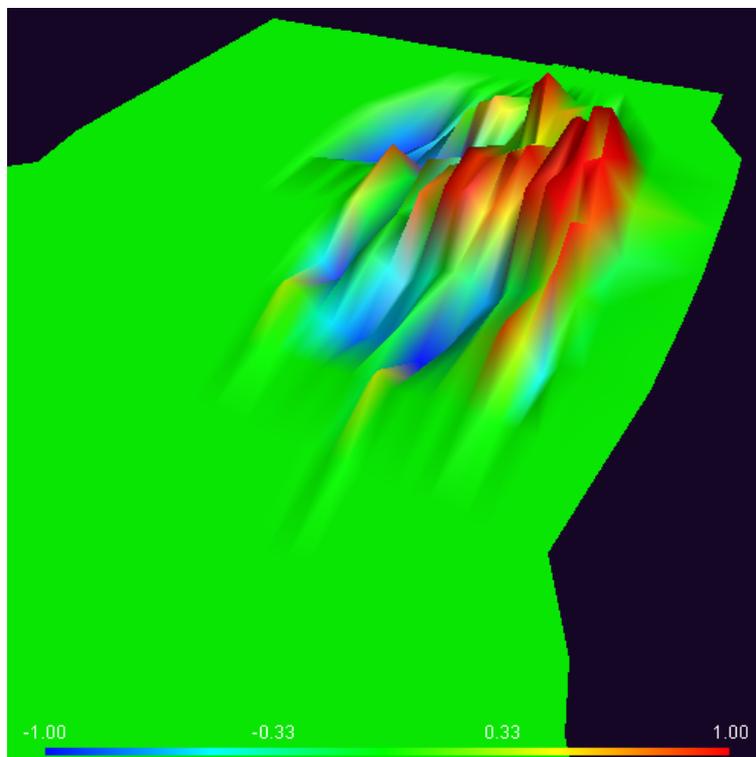


図 4.27: 2015 年から 2016 年までの期間での更新前後の水深差

## 4.6 まとめ

本章では、水域での流体解析やシミュレーションを行うために必要となる水底地形データ収録のための計測および、計測結果の数値処理を行う方法について考察を行った。計測には RTK-GPS および音響測深機からの測位-測深結果に、コンパスと傾斜計による補正を導入することで、精度が良い三次元水底地形データの計測と有限要素メッシュ上のデータ更新について研究を行った。

図 4.13, 図 4.19, 図 4.25, 図 4.25 より時間経過にともなう児島湖の水底地形の更新前と更新後の顕著な変化が見られる。特に、ゲート付近での大きな変化が見られた。これらの堆積および堆積物の移動による水底地形データの変化から、定期的な、水底地形の計測が必要なことがわかる。また、湖から放流される水の流れの解析には、正確な水底地形データが必要であり、今後も計測と更新作業を継続したい。

# 第5章 児島湖に発生する流れと地形変動のシミュレーション

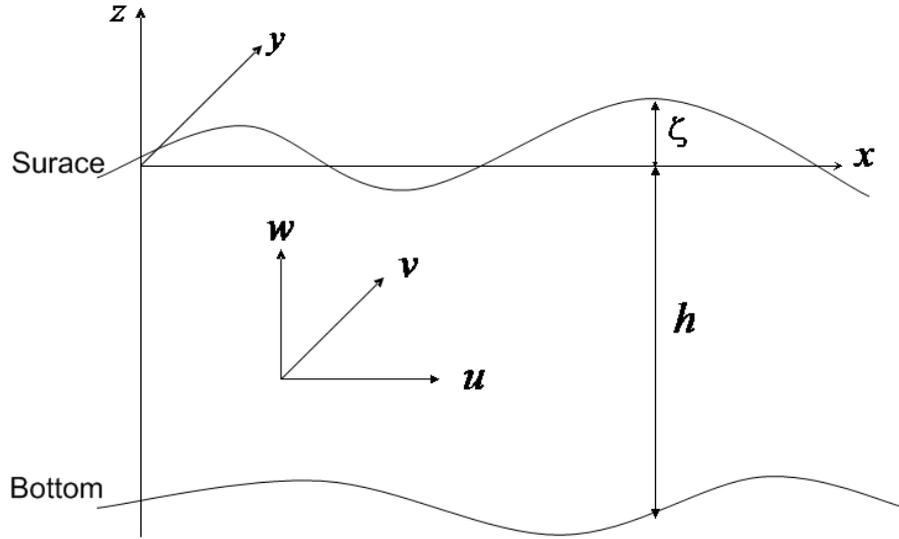
## 5.1 概要

有限要素法は数値解析手法の一つであり、解析的に解くことが難しい微分方程式の近似解を数値的に得る方法である。特に、偏微分方程式の解となる関数の定義域が多くの微小な要素で構成される有限要素メッシュで離散化されることから、複雑な境界条件や解析対象の多様性への適合性に優れている。つまり、複雑な形状・性質を持つ領域を小部分に分割することで近似し、全体の挙動を予測しようとするものである。有限要素法は、このような領域に対する柔軟性を利点とし、構造力学や流体力学などの様々な分野で利用されている。

## 5.2 流れの支配方程式

一般に、流体は非圧縮性流体 (*incompressible fluid*) と圧縮性流体 (*compressible fluid*) に区別される。一方、圧縮性流体とは、圧力 (*pressure*) が上がると、容積 (*volume*) が減少して、その結果、密度 (*density*) が上昇する流体である。逆に、圧力が下がると、容積が増大して、その結果、密度が減少する。圧縮性流体力学は、気体力学 (*gas dynamics*) と関係が深い。流れの速度 (対流速度: *convective velocity*) がある程度以上に大きくなったときには、圧縮性を考慮して考える必要がある。また、圧縮性流で最も大事なパラメータはマッハ数 (*Mach number*) である。圧縮性流の速度を考えると、常に音速 (*sound speed*) が基準となり、音速に比べて流れの速度がどれくらい大きいか、あるいは、どのくらい小さいかで諸量の性質が決定される [30]。

水中を伝わる音の速さは 1500 [m/s] であり、本研究で対象とする流れの速さは 10 [m/s] までなので音速に比較し十分遅い流れと言える。このときの流体は非圧縮性であると仮定する。対象とする水の流れの起こっている領域が湖沼内であることから、地球の大きさに比べて局所的であるので、地球表面の曲率を考慮する必要なく、地表面を平面として扱うことにする [23]。ここで、最も適切であろうと考えられるナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式を適用する。三次元直交座標系 ( $x, y, z$ ) を用いることとし、それぞれ  $x$  軸を東向き、 $y$  軸を北向きにとる。 $z$  軸を鉛直方向に上向きにとり、 $xy$  の平面は平均水面となる。そこで、 $h(x, y, t)$  を平均水面から水底までの水深 [m] とする。 $\zeta(x, y, t)$  は水位で、平均水面から水面までの鉛直変位とする (図 5.1)。全水深を  $H = h + \zeta$  とおく。流体の密度  $\rho(1000)$  [kg/m<sup>3</sup>] を一定とし、 $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)$  および  $w(x, y, z, t)$  をそれぞれ  $x$  軸、 $y$  軸および  $z$  軸方向の流速成分 [m/s]、 $p$  を圧力 [Pa] とすると、流体の運動はナビエ・



浅海波の座標系

図 5.1: 浅水長波の座標系

ストークス (*Navier – Stokes*) 運動方程式とオイラー (*Euler*) の連続の方程式により記述される [23]。つまり,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - fv - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + fu - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + g = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

で与えられる。児島湖に発生した流れに対する方程式 (5.1), (5.2), (5.3) および (5.4) を有限要素法により解析する。ここで, 式

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{yy} = -p + \mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{zz} &= -p + \mu \frac{\partial w}{\partial z}, \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

の  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  は粘性による応力テンソルの成分を表す [32]。ただし,  $t$  は時間を,  $g$  は重力加速度をそれぞれ表す。ここで,  $f$  はコリオリの因子と呼ばれ, 地球の自転により地球上の水平運動  $(u, v)$  に対し直角  $(v, -u)$  に動く力の比例定数である。  $\mu$  は流体の粘性係数  $[Pa \cdot s]$  である。複雑な地形の効果を考慮するため, 式 (5.1) - (5.4) を水深方向に積分し, 水面と水底での境界条件および水平方向の平均流速を導入し, また離散化する。以下では, 図 5.1 を参照して浅水長波流れの支配方程式の導出を行う [23, 24]。まず, 連続方程式の成り立つ条件を考える。直方体

$$R = \{(x, y, z) | x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1, z_0 \leq z \leq z_1\} \quad (5.6)$$

における物質の総質量は積分

$$\iiint_R \rho dx dy dz \quad (5.7)$$

であり, その変化速度

$$\frac{d}{dt} \iiint_R \rho dx dy dz = \iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (5.8)$$

は,  $R$  における単位時間当たりの質量の増加量と減少量の差と等しい。平面  $x = x_0$  を通過して単位時間当たりに  $R$  に流入する流体の質量は

$$\int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \rho(x_0, y, z, t) u(x_0, y, z, t) dy dz \quad (5.9)$$

であり, 平面  $x = x_1$  を通過して単位時間当たりに  $R$  から流出する物質の質量は

$$\int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \rho(x_1, y, z, t) u(x_1, y, z, t) dy dz \quad (5.10)$$

で与えられる。したがって  $x$  軸に垂直な平面に通過する流体の質量の増加量と減少量の差は

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \rho(x_0, y, z, t) u(x_0, y, z, t) dy dz - \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \rho(x_1, y, z, t) u(x_1, y, z, t) dy dz \\ = - \iiint_R \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz \end{aligned} \quad (5.11)$$

となる。同様に  $y$  軸と  $z$  軸に垂直な平面に通過する流体の質量の増加量と減少量の差は, それぞれ

$$- \iiint_R \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz, - \iiint_R \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz \quad (5.12)$$

となる。これら増加量と減少量の差の総和が  $R$  内の総質量の変化速度に等しいので,

$$\iiint_R \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dx dy dz = 0 \quad (5.13)$$

となる。ただし

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \quad (5.14)$$

とする。この式が任意の直方体  $R$  に対して成り立つ。したがって

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.15)$$

となる。この質量保存則から導かれる偏微分方程式は連続の方程式と呼ばれる。

この式は、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \quad (5.16)$$

とすると、

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.17)$$

と表すことができる。非圧縮性の流れ (密度が一定な流れ) では、連続の方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.18)$$

となる [18]。つまり、式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.19)$$

が成り立つ。したがって、式 (5.5)、式 (5.1) および式 (5.2) より

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.22)$$

が得られる。ただし、ここで、粘性による応力テンソルの対角成分をあらためて

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tau_{yy} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (5.23)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (5.24)$$

とする [23]。

更に、運動方程式を考える。一般に、圧力に対する流体静力学方程式により、垂直の加速が重力と比較して微小であるとする、運動方程式 (5.22) の垂直成分は以下の式のように近似される [30]。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho g = 0 \quad (5.25)$$

この式の両辺を  $z$  から水面まで積分することにより

$$p = p_a + \rho g(\zeta - z) \quad (5.26)$$

が導かれる。ここで、 $p_a$  を水面での大気圧とする。 $p_a$  と  $\rho$  は一定の定数であると仮定すると、方程式 (5.26) から

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (5.28)$$

が導かれる。また、これらの方程式 (5.27) および (5.28) を方程式 (5.20) と (5.21) に適用すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - fv + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (5.30)$$

が得られる。

水面における境界条件を考える。 $x(t), y(t), z(t)$  を流体粒子の時刻  $t$  における座標とする。もしも、この粒子が水面にあるならば  $z(t) = \zeta(x(t), y(t), t)$  が成り立つ。あるいは、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= w|_{z=\zeta}, \\ \frac{dz}{dt} &= \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

が成り立つ。一方、式  $u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$  より、

$$w|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (5.32)$$

で表される。したがって、自由表面条件 (5.32)、式 (5.19)、(5.29) および (5.30) からなる四つの方程式の四つの変数  $u, v, w, \zeta$  が導かれる。

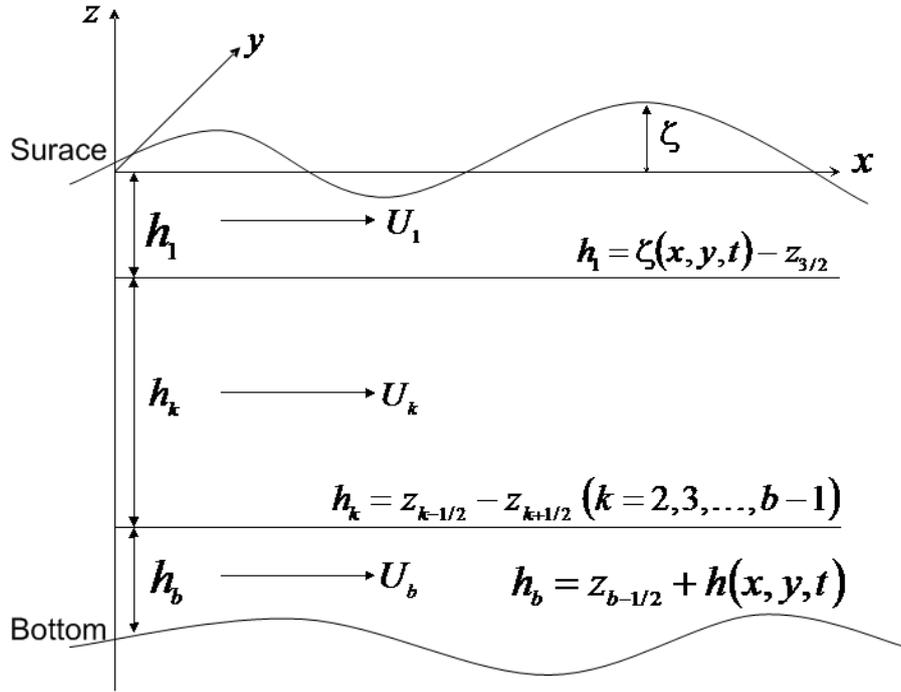


図 5.2: 層の分割

図 5.2 ように最上層から順に  $b$  個の層に分割し,  $k = 1, 2, \dots, b$  とする。ここで,  $k, b$  は整数であり,  $k$  は層番号である。 $b$  は低層の層番号である。層の数は水平面上の位置の深さによって異なる。しかし, 最下層の厚みは底の地形図  $x, y$  平面に応じて変わる。

$k$  層に対して, 質量と運動量の支配方程式は積分される。まず, 連続の方程式を考える。連続の方程式 (5.19) の両辺を  $z$  で  $z_{k+1/2}$  から  $z_{k-1/2}$  までの積分をすると,

$$\int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = w_{z_{k-1/2}} - w_{z_{k+1/2}} + \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = 0 \quad (5.33)$$

となる。したがって

$$w_{z_{k-1/2}} = w_{z_{k+1/2}} - \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \quad (5.34)$$

となる。微分と積分を交換すると, 上式は

$$w_{z_{k-1/2}} = w_{z_{k+1/2}} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} v dz \right) \quad (5.35)$$

となる。第  $k$  層の水平速度を積分しその平均を取ったものをそれぞれ  $U_k(x, y, t), V_k(x, y, t)$  とする。

$$U_k \approx \frac{1}{h_k} \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} u dz \quad (5.36)$$

$$V_k \approx \frac{1}{h_k} \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k-\frac{1}{2}}} v dz \quad (5.37)$$

が得られる。ここでは、

$$H_1 = \zeta - z_{\frac{3}{2}}, H_b(x, y, z) = z_{b-\frac{1}{2}} - h(x, y, z, t) \quad (5.38)$$

となる。方程式 (5.36) および (5.37) より、方程式 (5.35) は

$$w_{z_{k-\frac{1}{2}}} = w_{z_{k+\frac{1}{2}}} - \left\{ \frac{\partial(H_k U_k)}{\partial x} + \frac{\partial(H_k V_k)}{\partial y} \right\} \quad (5.39)$$

となる。各層ごとの質量保存則により、境界面  $z_{k-\frac{1}{2}}$  の鉛直流速  $w$  は、

$$w_{z_{l-\frac{1}{2}}} = - \sum_{k=l}^b \left\{ \frac{\partial(H_k U_k)}{\partial x} + \frac{\partial(H_k V_k)}{\partial y} \right\} \quad (5.40)$$

となる。連続の方程式 (5.32) より、最上層では

$$\frac{d\zeta}{dt} = - \sum_{k=1}^b \left\{ \frac{\partial(H_k U_k)}{\partial x} + \frac{\partial(H_k V_k)}{\partial y} \right\} \quad (5.41)$$

と表せる。

更に、運動方程式について考える。 $k$  層に対して、運動量の支配方程式を考える。運動方程式 (5.29) および (5.30) に対して、運動方程式の  $xy$  成分両辺各項を  $z_{k+\frac{1}{2}}$  から  $z_{k-\frac{1}{2}}$  ままで積分するために

$$\langle \rangle = \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k-\frac{1}{2}}} (\ ) dz \quad (5.42)$$

とすると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle uu \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial y} + (uw)_{z_{k-\frac{1}{2}}} - (uw)_{z_{k+\frac{1}{2}}} \\ & - f \langle v \rangle + g \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \left( \left\langle \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right\rangle + (\tau_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{xz} - \tau_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{xz}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle vv \rangle}{\partial y} + (vw)_{z_{k-\frac{1}{2}}} - (vw)_{z_{k+\frac{1}{2}}} \\ & - f \langle u \rangle + g \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \left( \left\langle \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right\rangle + (\tau_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{yz} - \tau_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{yz}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} U_k & \approx \frac{1}{H_k} \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k-\frac{1}{2}}} u dz, \\ U_k U_k & \approx \frac{1}{H_k} \langle u_k \rangle \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k-\frac{1}{2}}} u dz \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
V_k &\approx \frac{1}{H_k} \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k-\frac{1}{2}}} v dz, \\
V_k V_k &\approx \frac{1}{H_k} \langle v_k \rangle \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k-\frac{1}{2}}} v dz.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

であり、次の近似式を導入する [31]。

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right\rangle &\approx \frac{\partial \langle \tau_{xx} \rangle}{\partial x}, \\
\left\langle \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right\rangle &\approx \frac{\partial \langle \tau_{yx} \rangle}{\partial x}, \\
\left\langle \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right\rangle &\approx \frac{\partial \langle \tau_{xy} \rangle}{\partial y}, \\
\left\langle \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right\rangle &\approx \frac{\partial \langle \tau_{yy} \rangle}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

式 (5.43) および (5.44) の水平運動量項は次のようにあらためて粘性による応力テンソルの成分で表すことができる [31]。

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= A_h \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xy} = A_h \frac{\partial u}{\partial y}, \\
\tau_{yx} &= A_h \frac{\partial v}{\partial x}, \tau_{yy} = A_h \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$A_h$  は渦動粘性を表す定数であり、 $A_h = \mu$  である [39, 23]。式 (5.47) および式 (5.48) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \tau_{xx} \rangle}{\partial x} &= A_h \frac{\partial^2 (U_k H_k)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \langle \tau_{yy} \rangle}{\partial y} = A_h \frac{\partial^2 (V_k H_k)}{\partial y^2}, \\
\frac{\partial \langle \tau_{xy} \rangle}{\partial y} &= A_h \frac{\partial^2 (U_k H_k)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \langle \tau_{yx} \rangle}{\partial x} = A_h \frac{\partial^2 (V_k H_k)}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

となり、式 (5.45)、式 (5.46) および式 (5.49) より、式 (5.43) および (5.44) は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (H_k U_k)}{\partial t} + \frac{\partial (H_k U_k U_k)}{\partial x} + \frac{\partial (H_k U_k V_k)}{\partial y} + (uw)_{z_{k-\frac{1}{2}}} - (uw)_{z_{k+\frac{1}{2}}} + g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial x} - f H_k V_k \\
- \frac{1}{\rho} (\tau_{xz})_{z_{k-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\rho} (\tau_{xz})_{z_{k+\frac{1}{2}}} - \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 (U_k H_k)}{\partial x^2} - \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 (U_k H_k)}{\partial y^2} = 0,
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (H_k V_k)}{\partial t} + \frac{\partial (H_k V_k U_k)}{\partial x} + \frac{\partial (H_k V_k V_k)}{\partial y} + (uw)_{z_{k-\frac{1}{2}}} - (uw)_{z_{k+\frac{1}{2}}} + g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial y} + f H_k U_k \\
- \frac{1}{\rho} (\tau_{yz})_{z_{k-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\rho} (\tau_{yz})_{z_{k+\frac{1}{2}}} - \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 (V_k H_k)}{\partial y^2} - \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 (V_k H_k)}{\partial x^2} = 0,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

となる。

コリオリの因子  $f = 2\omega_E \sin\phi$  で与えられる。  $\omega_E (= 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/sec})$  は地球自転の角速度であり、  $\phi$  は緯度とする、通常は  $f$  の水域内での変化は非常に小さいとして、ここではゼロとする [39, 23]。また、

$$(uw)_{z_{k-\frac{1}{2}}} - (uw)_{z_{k+\frac{1}{2}}} = - \sum_{k=l}^b \left\{ \frac{\partial(H_k U_k)}{\partial x} + \frac{\partial(H_k V_k)}{\partial y} \right\} (U_{z_{k-\frac{1}{2}}} - U_{z_{k+\frac{1}{2}}}) \quad (5.52)$$

であり、運動方程式に関しては、層間で作用する力を考慮する必要がある。水平速度成分の垂直勾配に起因するせん断応力項は  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  である。ここでは、層間のせん断応力について考慮する [23]。

層間では、

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \rho \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} (U_{k-1} - U_k) \\ \tau_{yz} &= \rho \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} (V_{k-1} - V_k) \\ (\Delta V)_{k-1} &= \sqrt{(U_{k-1} - U_k)^2 + (V_{k-1} - V_k)^2} \end{aligned} \quad (5.53)$$

底層では、

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \rho \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} U_b \\ \tau_{yz} &= \rho \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} V_b \\ (\Delta V)_{k-1} &= \sqrt{(U_b)^2 + (V_b)^2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

とする。したがって、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} (\tau_{xz})_{z_{k-\frac{1}{2}}} &= -\gamma^2 (\Delta V)_{k-1} (U_{k-1} - U_k), \quad \frac{1}{\rho} (\tau_{xz})_{z_{k+\frac{1}{2}}} = -\gamma^2 (\Delta V)_k (U_k - U_{k-1}), \\ -\frac{1}{\rho} (\tau_{yz})_{z_{k-\frac{1}{2}}} &= -\gamma^2 (\Delta V)_{k-1} (V_{k-1} - V_k), \quad \frac{1}{\rho} (\tau_{yz})_{z_{k+\frac{1}{2}}} = -\gamma^2 (\Delta V)_k (V_k - V_{k-1}). \end{aligned} \quad (5.55)$$

また、  $M_k$  および  $N_k$  は  $x$  と  $y$  方向の単位幅当たりの流量

$$M_k = H_k U_k, N_k = H_k V_k \quad (5.56)$$

である。式 (5.52)、式 (5.55) および式 (5.56) より式 (5.50) および (5.51) は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial M_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_k^2}{H_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{M_k N_k}{H_k} \right) \\ &- \sum_{l=k}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{M_{k-1}}{H_{k-1}} + \frac{M_k}{H_k}}{2} + \sum_{l=k+1}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{M_k}{H_k} + \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}}}{2} \\ &+ g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \gamma^2 (\Delta V)_k \left( \frac{M_k}{H_k} - \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right) - \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} \left( \frac{M_{k-1}}{H_{k-1}} - \frac{M_k}{H_k} \right) \\ &- \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 M_k}{\partial x^2} - \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 M_k}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{N_k^2}{H_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{N_k M_k}{H_k} \right) \\
& - \sum_{l=k}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{N_{k-1}}{H_{k-1}} + \frac{N_k}{H_k}}{2} + \sum_{l=k+1}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{N_k}{H_k} + \frac{N_{k+1}}{H_{k+1}}}{2} \\
& + g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma^2 (\Delta V)_k \left( \frac{N_k}{H_k} - \frac{N_{k+1}}{H_{k+1}} \right) - \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} \left( \frac{N_{k-1}}{H_{k-1}} - \frac{N_k}{H_k} \right) \\
& - \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} - \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{5.58}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
(\Delta V)_{k-1} &= \sqrt{(U_{k-1} - U_k^2) + (V_{k-1} - V_k^2)} \\
&= \sqrt{\left( \frac{M_{k-1}}{H_{k-1}} - \frac{M_k}{H_k} \right)^2 + \left( \frac{N_{k-1}}{H_{k-1}} - \frac{N_k}{H_k} \right)^2}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

である。式 (5.57) および式 (5.58) の項

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_k^2}{H_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_k N_k}{H_k} \right) &= \frac{\partial M_k}{\partial t} + \frac{M_k}{H_k} \frac{\partial M_k}{\partial x} + \frac{N_k}{H_k} \frac{\partial M_k}{\partial y} \\
&= \frac{\partial M_k}{\partial t} + U_k \frac{\partial M_k}{\partial x} + V_k \frac{\partial M_k}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{N_k^2}{H_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{N_k M_k}{H_k} \right) &= \frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{M_k}{H_k} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{N_k}{H_k} \frac{\partial N_k}{\partial y} \\
&= \frac{\partial N_k}{\partial t} + U_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + V_k \frac{\partial N_k}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.61}$$

となり, また第  $k$  層では式

$$\frac{dx}{dt} = U_k, \quad \frac{dy}{dt} = V_k \tag{5.62}$$

が成り立つことより,

$$\frac{\partial M_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_k^2}{H_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M_k N_k}{H_k} \right) \approx \frac{\partial M_k}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial M_k}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial M_k}{\partial y} = \frac{dM_k}{dt} \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{N_k^2}{H_k} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{N_k M_k}{H_k} \right) \approx \frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{dN_k}{dt} \tag{5.64}$$

となり，式 (5.57) および式 (5.58) により，

$$\begin{aligned}
\frac{dM_k}{dt} &= \sum_{l=k}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{M_{k-1}}{H_{k-1}} + \frac{M_k}{H_k}}{2} \\
&\quad - \sum_{l=k+1}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{M_k}{H_k} + \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}}}{2} - gH_k \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
&\quad - \gamma^2 (\Delta V)_k \left( \frac{M_k}{H_k} - \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right) + \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} \left( \frac{M_{k-1}}{H_{k-1}} - \frac{M_k}{H_k} \right) \\
&\quad + \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 M_k}{\partial x^2} + \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 M_k}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

および

$$\begin{aligned}
\frac{dN_k}{dt} &= \sum_{l=k}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{N_{k-1}}{H_{k-1}} + \frac{N_k}{H_k}}{2} \\
&\quad - \sum_{l=k+1}^b \left( \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \right) \frac{\frac{N_k}{H_k} + \frac{N_{k+1}}{H_{k+1}}}{2} - gH_k \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\
&\quad - \gamma^2 (\Delta V)_k \left( \frac{N_k}{H_k} - \frac{N_{k+1}}{H_{k+1}} \right) + \gamma^2 (\Delta V)_{k-1} \left( \frac{N_{k-1}}{H_{k-1}} - \frac{N_k}{H_k} \right) \\
&\quad + \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} + \frac{A_h}{\rho} \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

となる。

$\gamma^2$  は水底摩擦係数で底面の粗度に依存するが，通常  $10^{-10}$  程度の値である。ここでは，底面摩擦係数  $\gamma^2$  は，式 (5.67) であるが，通常は Hansen が潮流観測から求めた  $\gamma^2 = 0.0026$  の (一定) 値が用いられている [23]。

$$\gamma^2 = \frac{gn^2}{h^{1/3}} \tag{5.67}$$

ここで， $g$  は重力加速度， $n$  はマニング係数， $h$  は水深である。 $n^2$  は式 (5.67) から以下の式で計算可能である。

$$n^2 = \frac{h^{1/3} \gamma^2}{g} \tag{5.68}$$

または，水底摩擦係数を層ごとに値を変える方法 (関数) について考える。

$$\begin{aligned}
\gamma_{func}^2 &= 0.0026 \times \frac{\{L_{now\_layer} \times (h[i] + \zeta[i]) / L_{div\_layer}\}^2}{(h[i] + \zeta[i])^2} \\
&= 0.0026 \left( \frac{L_{now\_layer}}{L_{div\_layer}} \right)^2
\end{aligned} \tag{5.69}$$

( $h[i] + \zeta[i]$ )<sup>2</sup> の部分が相殺される ( $h[i] + \zeta[i]$  が負またはゼロの場合は， $\gamma^2 = 0$  とする。 )。

ここで、 $i$  は節点番号である。また、“now\_layer” は、現在着目している層が何層目になるかの数であり、“div\_layer” は、層の分割数である。トップレイヤが“1”，ボトムレイヤが“div\_layer” であり、

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 (\Delta V)_k \left( \frac{M_k}{h_k} - \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right) \\
&= \gamma \sqrt{\left( \frac{M_k}{H_k} - \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right)^2 + \left( \frac{N_k}{H_k} - \frac{N_{k+1}}{H_{k+1}} \right)^2} \gamma \left( \frac{M_k}{H_k} - \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right) \\
&= \sqrt{\gamma^2 \left\{ \left( \frac{M_k}{H_k} - \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right)^2 + \left( \frac{N_k}{H_k} - \frac{N_{k+1}}{H_{k+1}} \right)^2 \right\}} \left( \gamma^k \frac{M_k}{H_k} - \gamma_{k+1} \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right) \\
&= \sqrt{\gamma_k^2 \left( \frac{M_k}{H_k} \right)^2 - 2\gamma_k \frac{M_k}{H_k} \gamma_{k+1} \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} + \gamma_{k+1}^2 \left( \frac{M_{k+1}}{H_{k+1}} \right)^2} \dots \quad (5.70)
\end{aligned}$$

を適用する。

### 5.3 地形変動の支配方程式

児島湖流域の河川は概ね低地を流下している。また、児島湖の水位は潮位に合わせたゲートの開閉により調節される。この時児島湖にはゲートに向かう流れが発生する。河川流量の少ない時や、満潮時に下流部の流れが止まるなど、流況は緩慢である。こうした児島湖のゲートが開放した時の流れによって生じる水流の挙動及びそれに伴う地形変化を解析する必要がある。児島湖の湖底には、河川からの流出土砂の堆積、波による土砂の押し込みや上流漂砂による砂州の形成などが複合して作用するので、その地形は極めて複雑なものとなる。本計算では、波による浮遊砂を考慮しない。

児島湖の地形変動シミュレーションを行うため、掃流砂と浮遊砂の影響を考慮する。本研究では、児島湖のゲート開閉による流れで発生する児島湖の湖底の底質の巻き上げや沈降などを考慮するため、地形変化を掃流砂と底質の浮遊、沈降フラックスの収支から求めた。

本研究では、水深変化に寄与する浮遊砂評価に対して、次の方法によって検討を行った。掃流砂量  $q_b$  による河床変動 2 次元連続式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \left[ -Q_s + \left( \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) \right] \quad (5.71)$$

と表される [25]。ここで、 $t$  は時間、 $\lambda$  は空隙率、添字  $x, y$  は、それぞれ  $x, y$  方向の成分を表す。浮遊砂の平均鉛直フラックスに寄与する砂の浮上と沈降 flux の差  $Q_s$  をゼロとする。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \left[ \left( \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) \right] \quad (5.72)$$

となる [36]。掃流状態における漂砂量に対しては

$$\begin{aligned} q_{bx} &= \frac{e_b \cdot \bar{\tau}_x \cdot U}{\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g} \\ q_{by} &= \frac{e_b \cdot \bar{\tau}_y \cdot V}{\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g} \end{aligned} \quad (5.73)$$

とする。ここでは、 $e_b$  は掃流砂の移動に関する効率、 $\rho_s$  は底質の密度、 $\rho$  は密度、 $g$  は動力加速度、 $U(x, y, t)$  および  $V(x, y, t)$  は  $xy$  軸方向の流速である、 $\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y$  は

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_x &= \frac{\rho \cdot f_w \cdot F_b \cdot U}{\pi}, \\ \bar{\tau}_y &= \frac{\rho \cdot f_w \cdot F_b \cdot V}{\pi} \end{aligned} \quad (5.74)$$

であり、

$$F_b^2 = \frac{1}{2} \hat{u}_w^2 + \frac{2}{\pi} \hat{u}_w + \frac{(U^2 + V^2)}{4} \quad (5.75)$$

である。

式 (5.71) の右辺に式 (5.73) と式 (5.74) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} &= \frac{\partial e_b \cdot \bar{\tau}_x \cdot U / [\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g]}{\partial x} \\ &= \frac{e_b \cdot \rho \cdot f_w}{\pi [\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g]} \cdot \frac{\partial \{F_b \cdot U^2\}}{\partial x} \\ &= \frac{e_b \cdot \rho \cdot f_w}{\pi [\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g]} \cdot \frac{\partial \{F_b \cdot U^2\}}{\partial x} \\ &= \frac{e_b \cdot \rho \cdot f_w}{\pi [\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g]} \cdot \frac{1}{2} \left[ 2U(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial x} + U^3(U^2 + V^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{by}}{\partial y} &= \frac{\partial e_b \cdot \bar{\tau}_y \cdot V / \tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g}{\partial y} \\ &= \frac{e_b \cdot \rho \cdot f_w}{\pi [\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g]} \cdot \frac{\partial \{F_b \cdot V^2\}}{\partial y} \\ &= \frac{e_b \cdot \rho \cdot f_w}{\pi [\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g]} \cdot \frac{\partial \{F_b \cdot V^2\}}{\partial y} \\ &= \frac{e_b \cdot \rho \cdot f_w}{\pi [\tan \phi \cdot (\rho_s - \rho)g]} \cdot \frac{1}{2} \left[ 2V(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial V}{\partial y} + V^3(U^2 + V^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial V}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (5.77)$$

となる。ここでは、 $f_w$  は底面摩擦係数、 $\hat{u}_w$  は底部最大速度である。

## 5.4 支配方程式の空間離散化

### 5.4.1 偏導関数近似

数値シミュレーションの空間方向の離散化に対しては、有限要素法を適用する。2次元問題の有限要素解析のための代表的な要素に3節点の線形三角形要素 (linear triangular element) がある [30]。\$P\_i(x\_i, y\_i), P\_j(x\_j, y\_j), P\_k(x\_k, y\_k)\$ を頂点とする三角形要素 \$e\$ に着目する。この要素が占める三角形小領域を \$\Omega\_e\$ で表す。

$$\phi_i(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} = \frac{x_j y_k - y_j x_k - (x y_k - x_k y) + x y_j - x_j y}{x_j y_k - y_j x_k - (x_i y_k - x_k y_i) + x_i y_j - x_j y_i} \quad (5.78)$$

$$\phi_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \end{vmatrix}} = \frac{x_k y_i - y_k x_i - (x y_i - x_i y) + x y_k - x_k y}{x_k y_i - y_k x_i - (x_j y_i - x_i y_j) + x_j y_k - x_k y_j} \quad (5.79)$$

$$\phi_k(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix}} = \frac{x_i y_j - y_i x_j - (x y_j - x_j y) + x y_i - x_i y}{x_i y_j - y_j x_i - (x_k y_j - x_j y_k) + x_k y_i - x_i y_k} \quad (5.80)$$

とすると、条件

$$\phi_l(x_m, y_m) = \delta_{lm} \quad (l = i, j, k, m = i, j, k) \quad (5.81)$$

が満たされる。このとき関数 \$f(x, y)\$ に対し \$f\_i(x\_i, y\_i), f\_j(x\_j, y\_j), f\_k(x\_k, y\_k)\$ とすると、\$f(x, y)\$ は要素 \$e\$ 上で近似的に

$$f(x, y) \approx f_i \phi_i(x, y) + f_j \phi_j(x, y) + f_k \phi_k(x, y) \quad (5.82)$$

と表される。このとき \$f(x, y)\$ の偏導関数 \$f\_x(x, y)\$ と \$f\_y(x, y)\$ に対し、それぞれ近似式

$$f_x(x, y) \approx f_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + f_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + f_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \quad (5.83)$$

および

$$f_y(x, y) \approx f_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + f_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + f_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \quad (5.84)$$

が成り立つ。

次に偏導関数の節点での近似値について考察する。前述の偏導関数近似は、ある要素内で成り立つものである。

$$f_x(x, y) \approx (f_x)_e \quad (5.85)$$

および

$$f_y(x, y) \approx (f_y)_e \quad (5.86)$$

が成り立つ。ただし

$$(f_x)_e = f_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + f_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + f_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \quad (5.87)$$

および

$$(f_y)_e = f_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + f_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + f_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \quad (5.88)$$

である。 $f_x$ と $f_y$ の節点 $n$ での近似値は、それぞれ節点 $n$ を頂点の一つとして持つ要素 $e_1, e_2, \dots, e_m$ における $(f_x)_{e_1}, (f_x)_{e_2}, \dots, (f_x)_{e_m}$ および $(f_y)_{e_1}, (f_y)_{e_2}, \dots, (f_y)_{e_m}$ の平均値とする。すなわち、節点 $n$ で $(f_x)_n$ と $(f_y)_n$ の近似値は

$$(f_x)_n = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (f_x)_{e_l} \quad (5.89)$$

および

$$(f_y)_n = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (f_y)_{e_l} \quad (5.90)$$

と表される。ここで、 $m$ は節点 $n$ を頂点の一つとする要素の数である。1階偏導関数の近似式から2階偏導関数の近似式が導かれる。すなわち、要素 $e$ 上では

$$f_x(x, y) = (f_x)_i \phi_i(x, y) + (f_x)_j \phi_j(x, y) + (f_x)_k \phi_k(x, y) \quad (5.91)$$

および

$$f_y(x, y) = (f_y)_i \phi_i(x, y) + (f_y)_j \phi_j(x, y) + (f_y)_k \phi_k(x, y) \quad (5.92)$$

と表される。ただし、 $(f_x)_i, (f_x)_j, (f_x)_k$ をそれぞれ前述の方法で得られた頂点 $P_i(x_i, y_i), P_j(x_j, y_j), P_k(x_k, y_k)$ での $f(x, y)$ の近似値とする。このとき

$$f_{xx}(x, y) \approx (f_x)_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + (f_x)_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + (f_x)_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \quad (5.93)$$

および

$$f_{yy}(x, y) \approx (f_y)_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + (f_y)_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + (f_y)_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \quad (5.94)$$

が導かれる。または、節点  $n$  で  $(f_{xx})_n$  と  $(f_{yy})_n$  の近似値は

$$(f_{xx})_n = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (f_{xx})_{e_l} \quad (5.95)$$

および

$$(f_{yy})_n = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (f_{yy})_{e_l} \quad (5.96)$$

となる。

## 5.5 常微分方程式の数値解

流れの支配方程式の空間的離散化を適用することにより、常微分方程式系が導かれる。この系に ODE ソルバーを適用することによりシミュレーションが可能となる。よく使われる ODE ソルバーのなかにアダムス法がある。一般に、線形  $k$  多段法の第 1 特性多項式 (the first characteristic polynomial)  $\rho(\zeta)$  が  $\rho(\zeta) = \zeta^k - \zeta^{k-1}$  と表されるものはアダムス法と呼ばれる。また、陽的 (explicit) アダムス法はアダムス・バツシュフォース法と呼ばれ、陰的 (implicit) アダムス法はアダムス・ムルトン法と呼ばれる [35]。

### 5.5.1 ルンゲ・クッタ法

常微分方程式の初期値問題を

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \quad (5.97)$$

で与える。ただし  $f(t, y)$  を  $a \leq t \leq b, y \in R$  で定義された 2 変数関数である。区間  $[a, b]$  を一定の問題  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$  に分割し、関数値  $y(t_i)$  の近似値を  $Y_i$  とすると次の式で  $Y_i$  から  $Y_{i+1}$  を計算する方法は 4 段階のルンゲ・クッタ法と呼ばれる。

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0 \\ Y_{i+1} &= Y_i + h\Phi(x_i, Y_i) \\ \Phi(x_i, Y_i) &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (5.98)$$

ただし

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, Y_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f\left(x_i + h, Y_i + hk_3\right) \end{aligned} \quad (5.99)$$

である。関数  $\Phi(t, Y)$  について,

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i) + O(h^5) \quad (5.100)$$

が成り立つ。これは、ルンゲ・クッタ法が4次の精度を持つことを示している [22]。

### 5.5.2 アダムス・バッシュフォース法

次数4のルンゲ・クッタ法では、1ステップ進むのに4回の関数計算を必要とし、さらに高次の1段階法の適用は困難である。そのため、ルンゲ・クッタ法からの値を用いて、多段階法のアダムス法を用いる [22]。

まず、式 (5.97) の両辺を積分すると、

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y) dt \quad (5.101)$$

となる。式 (5.101) の  $[t_i, t_{i+1}]$  における  $f(t, y)$  を3次のラグランジュ補間多項式で近似すると、

$$\begin{aligned} f(t, y) &= P_3(t) \\ &= \left( \frac{t - t_{i-2}}{t_{i-3} - t_{i-2}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_{i-1}}{t_{i-3} - t_{i-1}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_i}{t_{i-3} - t_i} \right) \cdot f_{i-3} \\ &\quad + \left( \frac{t - t_{i-3}}{t_{i-2} - t_{i-3}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_{i-1}}{t_{i-2} - t_{i-1}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_i}{t_{i-2} - t_i} \right) \cdot f_{i-2} \\ &\quad + \left( \frac{t - t_{i-3}}{t_{i-1} - t_{i-3}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_{i-2}}{t_{i-1} - t_{i-2}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_i}{t_{i-1} - t_i} \right) \cdot f_{i-1} \\ &\quad + \left( \frac{t - t_{i-3}}{t_i - t_{i-3}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_{i-2}}{t_i - t_{i-2}} \right) \cdot \left( \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) \cdot f_i \end{aligned} \quad (5.102)$$

ただし、 $f_i = f(t_i, y_i)$  である。このとき、 $t_i = a + ih$  より、

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_3(t) dt &= -\frac{f_{i-3}}{6h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_i) dt \\ &\quad + -\frac{f_{i-2}}{2h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-3})(t - t_{i-1})(t - t_i) dt \\ &\quad + -\frac{f_{i-1}}{2h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_i) dt \\ &\quad + -\frac{f_i}{6h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_{i-1}) dt \\ &= h \left( -\frac{9}{24} f_{i-3} + \frac{37}{24} f_{i-2} - \frac{59}{24} f_{i-1} + \frac{55}{24} f_i \right) \end{aligned} \quad (5.103)$$

となる。したがって、

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{24}(-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i) \quad (5.104)$$

が得られる。このよに  $k$  次多項式  $P_k(t)$  を用いて

$$Y_{i+1} = Y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t) dt \quad (5.105)$$

として式 (5.97) の解を求める方法を 4 段アダムス・バッシュフォース法という [22]。

### 5.5.3 アダムス・ムルトン法

アダムス・バッシュフォース法では、 $[t, t_{i+1}]$  における  $f$  の値を補外しているため、精度が落ちる可能性がある。そのため、アダムス・ムルトン法を適用することより、すべて補間で処理することになるので、精度を向上させる。今度は、 $t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}$  での補間多項式  $P_3(t)$  を使うことにすると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_3(t) dt &= -\frac{f_{i-2}}{6h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-1})(t - t_i)(t - t_{i+1}) dt \\ &\quad + -\frac{f_{i-1}}{2h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-2})(t - t_i)(t - t_{i+1}) dt \\ &\quad + -\frac{f_i}{2h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) dt \\ &\quad + -\frac{f_{i+1}}{6h^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_i) dt \\ &= h \left( \frac{1}{24} f_{i-2} - \frac{5}{24} f_{i-1} + \frac{19}{24} f_i + \frac{9}{24} f_{i+1} \right) \end{aligned} \quad (5.106)$$

これより、4 段のアダムス・ムルトン法

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1}) \quad (5.107)$$

が得られる。

### 5.5.4 PECE モードのアダムス・バッシュフォース・ムルトン予測子・修正子

陽的解法であるアダムス・バッシュフォース法を使って次のステップで解の近似値を予測し、その値を用いて陰的解法であるアダムス・ムルトン法で修正する。このような手法を予測子修正子法という。ここでは、予測子および修正子を用いて PECE モードという手法を適用した。PECE とは、陽公式を用いて予測 (*Predict*)、それを使った関数値の計算 (*Evaluate*)、陰公式を用いての修正 (*Correct*)、それを使った関数値の計算 (*Evaluate*) という計算流れを表している [35]。また最初の 3 ステップにはルンゲ・クッタ法 (The Runge-Kutta method) を適用した。

## 5.6 流れの初期条件とパラメータの値

連続方程式 (5.41), 運動方程式 (5.65), (5.66) および河床変動2次元連続式 (5.72) からなる偏微分方程式系を数値的に解くためには, 適切な初期条件, 境界条件およびパラメータの値が必要である。本研究では, 密度と重力加速度の値を  $\rho = 1000$  [kg/m<sup>3</sup>],  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] とした。渦動粘性係数は  $A_h = C_6 L^{\frac{4}{3}}$  [cm<sup>2</sup>/s] と表される。ただし, 定数  $C_6$  は 0.01~0.09 [cm<sup>2</sup>/s] であり, また  $L$  は水域の水平長 (3 ~ 10<sup>9</sup> cm) である [39, 40]。そこで, 本研究では,  $C_6 = 10^{-6}$  [m<sup>2</sup>/s],  $L = 1000$  [m] とする。すなわち,  $A_h = 0.01$  とする。全節点の初期値として  $M_k = 0$  および  $N_k = 0$  を設定する。ここで,  $k$  は  $k = 1, 2, 3, \dots, b$  で,  $b$  は層の総数である。

図 5.3 ように節点数が 1300 個で, 要素数が 2340 個の三角形要素分割を用いた。節点の中で境界節点が 258 個ある。節点の分布を図 5.4 および図 5.5 に示す。ここで, 境界条件を適用するために境界節点を表 5.1 ように 7 種に分類する。境界上の節点の状態を 0 から 6 の整数で表す。これを状態番号と呼ぶことにする。状態番号が 0 の場合, 速度はゼロとする。状態番号が 1 の場合, 速度はゼロで, 水位条件が課される。状態番号が 2 の場合, 水位条件のみが課される。同様に, 状態番号が 3 の場合, 速度はゼロで, 水位条件が課される。状態番号が 4 の場合, 水位条件のみが課される。状態番号が 5 の場合, 速度はゼロで, 水位条件が課される。状態番号が 6 の場合, 水位条件のみが課される。ゲート閉鎖時は児島湖ゲート上の状態番号をすべて 0 にする。また, ゲート開放時は児島湖ゲート上の状態番号を表 5.1 に示したように 3 と 4 とする (図 5.9)。

表 5.1: 児島湖の境界節点種類

種類	表示	個数	参考図番号
0	児島湖内部の節点	220	5.6
1	倉敷川外側の節点	2	5.7
2	倉敷川内側の節点	5	5.7
3	ゲート上の外側の節点	12	5.9
4	ゲート上の内側の節点	12	5.9
5	笹ヶ瀬川外側の節点	2	5.8
6	笹ヶ瀬川内側の節点	5	5.8

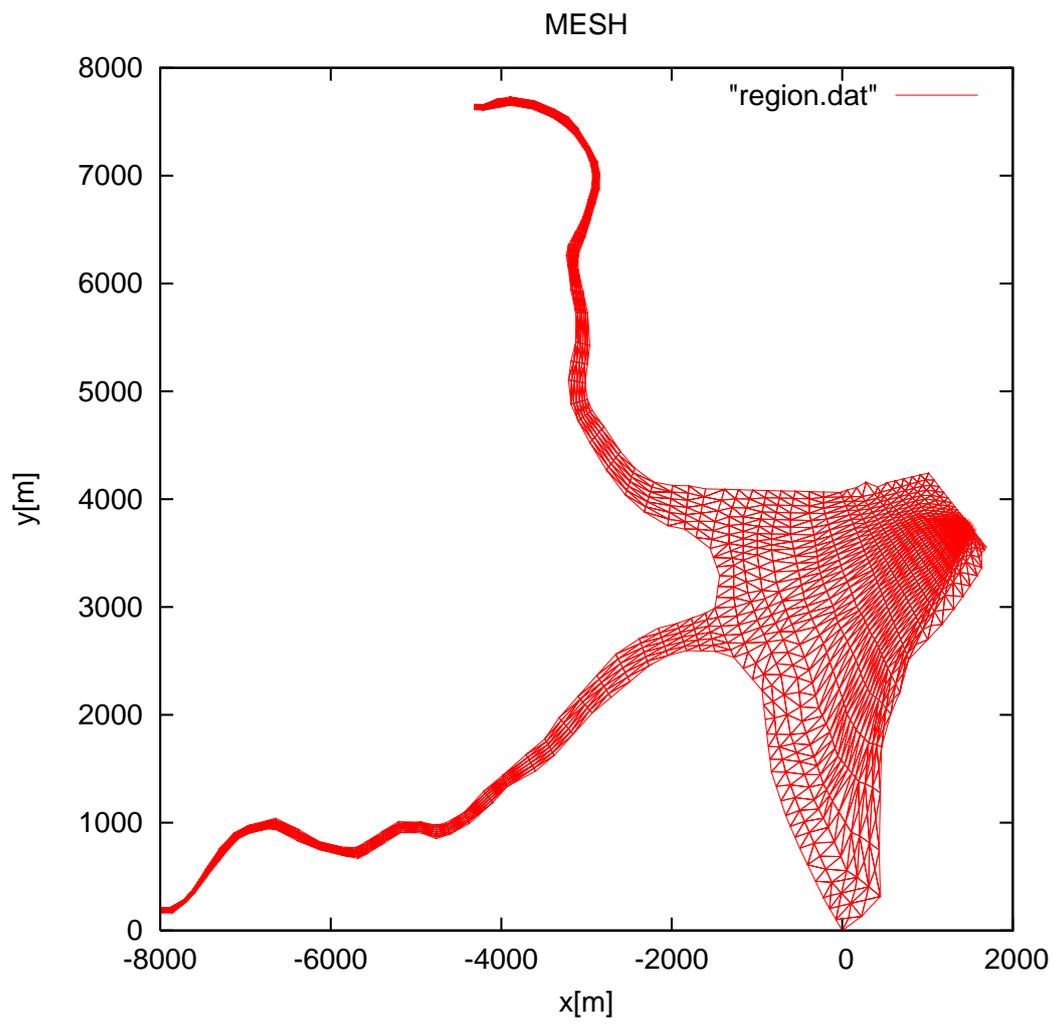


図 5.3: 児島湖全体領域の有限要素メッシュ図 [38]

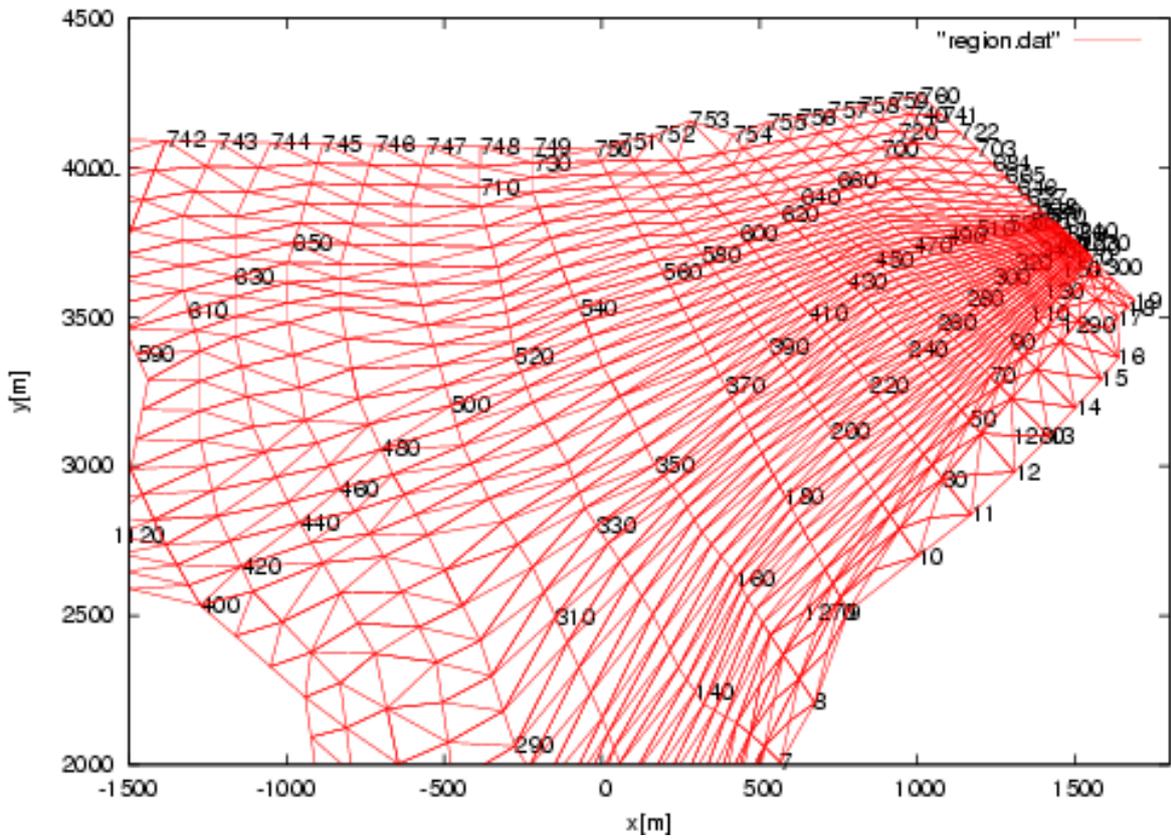
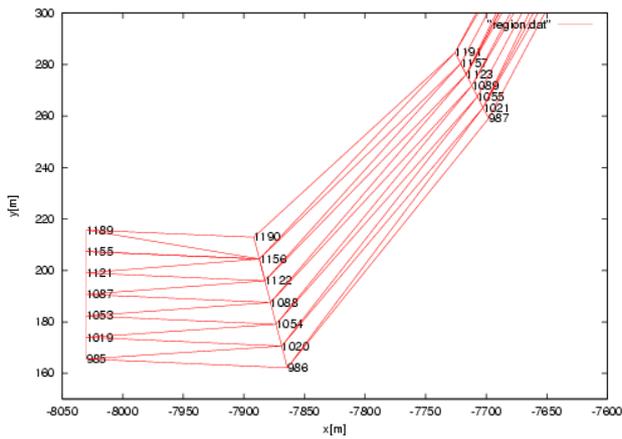
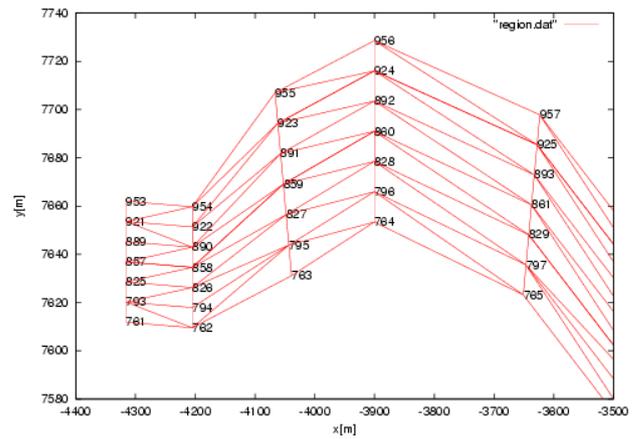


図 5.4: 児島湖ゲート付近での節点分布



(a) 倉敷川流入境界での節点分布



(b) 笹ヶ瀬川流入境界での節点分布

図 5.5: 節点分布

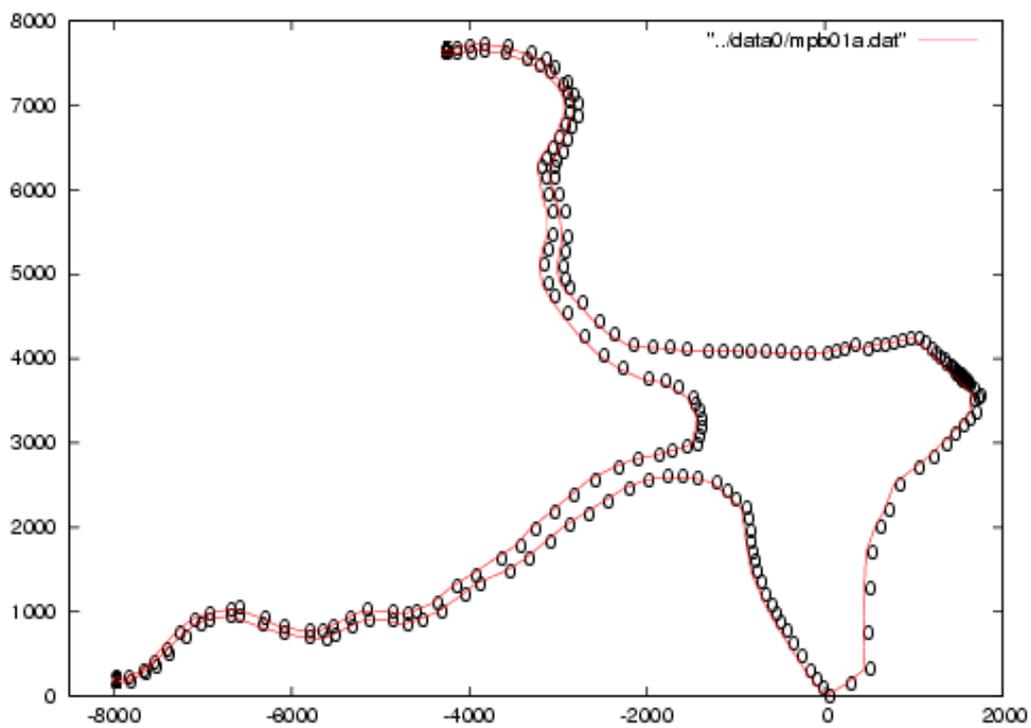


図 5.6: 児島湖全体

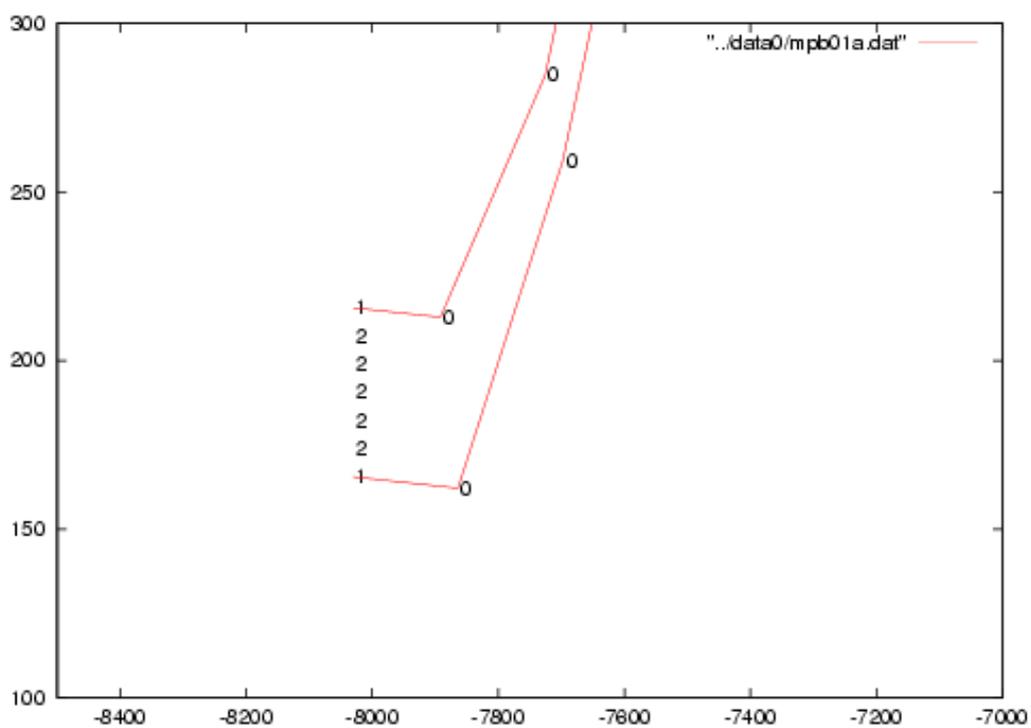


図 5.7: 倉敷川流入部における節点の状態, 1: 速度 0, 水位, 2: 水位

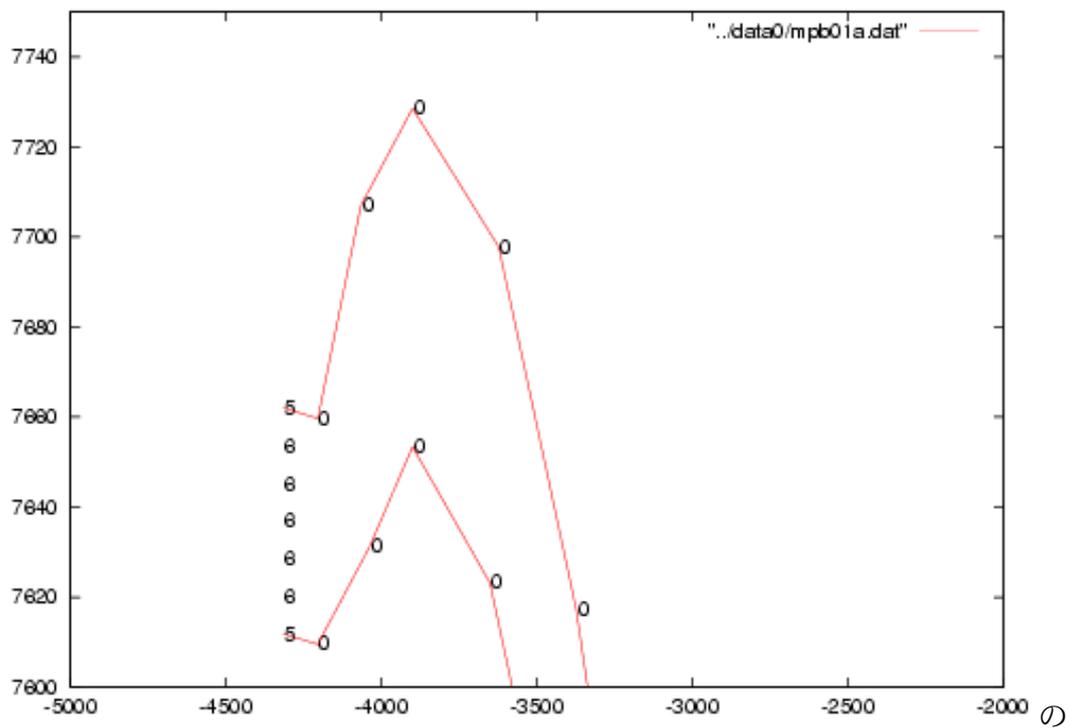


図 5.8: 笹ヶ瀬川流入部における節点の状態, 5 : 速度 0, 水位, 6 : 水位

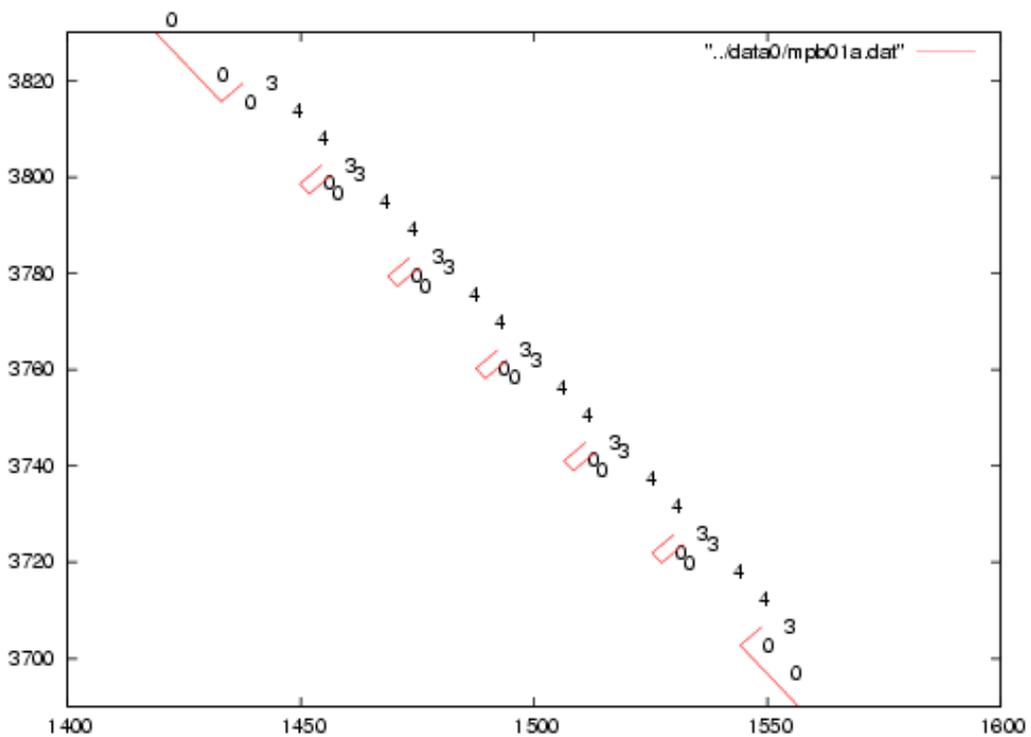


図 5.9: ゲート付近流出部における節点の状態, 3 : 速度 0, 水位, 4 : 水位

## 5.6.1 児島湖の水位データの前処理

### 外れ値の判定

児島湖の水位データに図 5.10 ように欠則データがあるので、線形補間する方針で、データを確認すると、外れ値があるので、外れ値を欠則データとして扱う。以下の方法で外れ値を判定した。図 5.11 は図 5.10 データを図に書き出したものである。

$$\tau_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (5.108)$$

ここで、 $x_i, \mu$  および  $\sigma$  は、それぞれ、計測値、平均および不偏標準偏差である。以下の式を用いて、外れ値を判定する。

$$\mu - 2\sigma < \tau_i < \mu + 2\sigma \quad (5.109)$$

式 5.109 を満たさなければ外れ値とした。

36485	2012/1/26 13:22	0.52	2.28	95.38	95.38	95.38
36486	2012/1/26 13:23	0.53	2.28	95.38	95.38	95.38
36487	2012/1/26 13:24	0.52	2.27	69.69	69.69	69.69
36488	2012/1/26 13:25	0.53	2.27	-0.94	-0.94	-0.94
36489	2012/1/26 13:26	0.52	2.27	-0.07	-0.07	-0.07
36490	2012/1/26 13:27	0.53	2.27	外れ値 1.03	1.03	1.03
36491	2012/1/26 13:28	0.53	2.26	1.87	1.87	1.87
36492	2012/1/26 13:29	0.52	2.26	1.87	1.87	1.87
36493	2012/1/26 13:30	0.52	2.26	1.87	1.87	1.87
36494	2012/1/26 13:34	0.52	2.25	-	-	-
36495	2012/1/26 13:35	0.52	2.25	-	-	-
36496	2012/1/26 13:36	0.53	2.24	0.56	0.59	0.56
36497	2012/1/26 13:37	0.52	2.24	-	-	-
36498	2012/1/26 13:38	0.52	2.24	-	-	-
36499	2012/1/26 13:39	0.52	2.23	-	欠則データ	-
36500	2012/1/26 13:40	0.52	2.23	-	-	-
36501	2012/1/26 13:41	0.53	2.23	-	-	-
36502	2012/1/26 13:42	0.53	2.23	-	-	-
36503	2012/1/26 13:43	0.52	2.22	-	-	-
36504	2012/1/26 13:44	0.52	2.22	0.56	0.6	0.57
36505	2012/1/26 13:45	0.52	2.22	0.56	0.59	0.57
36506	2012/1/26 13:46	0.52	2.21	0.56	0.59	0.56
36507	2012/1/26 13:47	0.53	2.21	0.56	0.59	0.56
36508	2012/1/26 13:48	0.53	2.21	0.56	0.59	0.56
36509	2012/1/26 13:49	0.53	2.2	0.56	0.59	0.56
36510	2012/1/26 13:50	0.53	2.2	0.56	0.59	0.56
◀ ◀						
日時	内水位 (A.P.m)	外潮位 (A.P.m)	倉敷川水 位 (A.P.m)	笹ヶ瀬川 水位 (A.P.m)	七区5号 樋門 位置湖内	

図 5.10: 2012 年 1 月 26 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位データ

## 欠則データの補間

補間とは間を補うという意味があるが、数学では、数字と数字の間の値の近似値を求める事を指す線形補間では、数字と数字の間が直線的であると考えて、近似値を算出する。

図 5.11 ように 2 点  $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$  が既知であるとき、 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  の任意の点  $x$  に対する  $f(x)$  の値を、2 点を結ぶ 1 次関数の値で近似する。すなわち

$$f(x) = y_i + (y_{i+1} - y_i)(x - x_i)/(x_{i+1} - x_i) \quad (5.110)$$

になる。図 5.12 は線形補間の結果を示す。

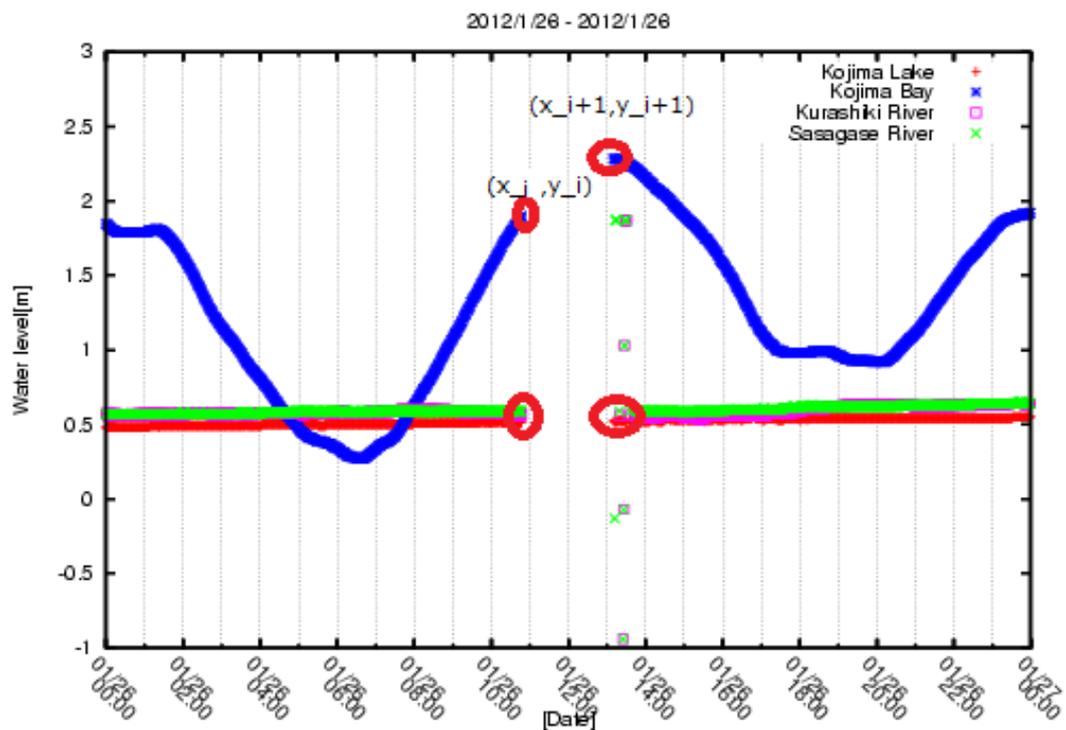


図 5.11: 2012 年 1 月 26 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化

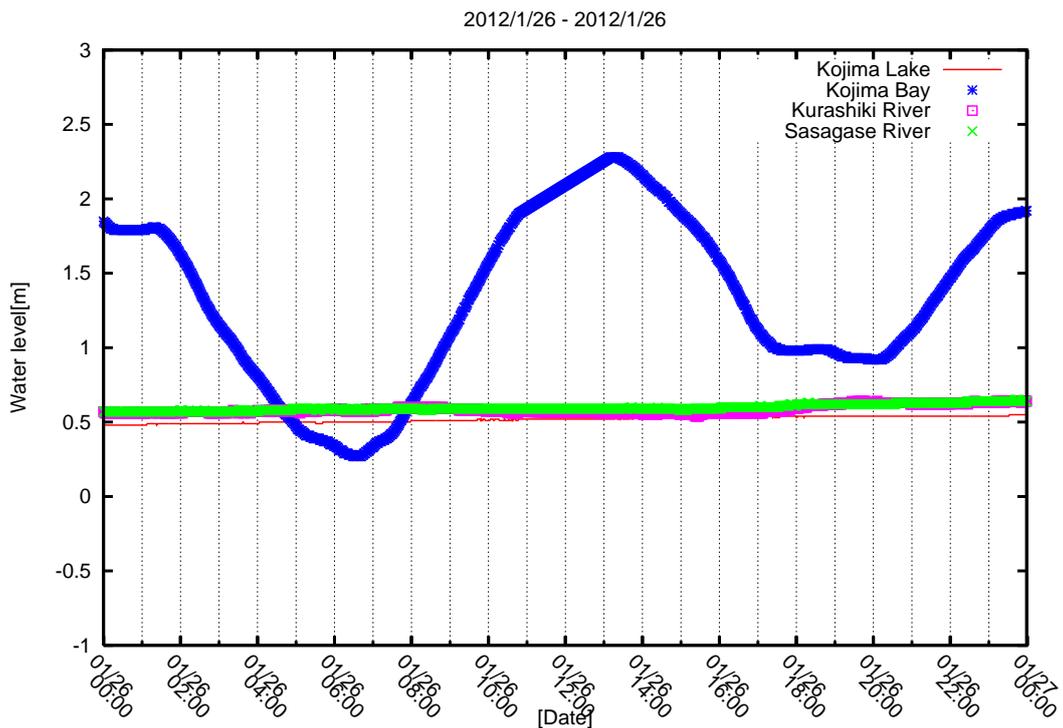


図 5.12: 2012 年 1 月 26 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化

### 5.6.2 児島湖のゲート開放時刻と閉鎖時刻の設定

本研究では，2015 年 1 月～12 月および 2016 年 1 月～12 月までの期間に対し流れと地形変動に関するシミュレーションを行った。児島湖のゲート開放時刻は児島湖の水位が下がり始めの時刻をとし，ゲート閉鎖時刻は児島湖の水位が上がり始めの時刻，または，児島湖の水位と児島湾の水位の交差した時刻をとした(図 5.13, 図 5.15)。児島湖のゲートが 6:05 から 7:48 まで開放されたとして，児島湖の流れが数値的に解析された(図 5.13)。図 5.17～図 5.18 は数値シミュレーションに用いた 2015 年の 1 月から 12 月までの児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化を月ごとに表した図である。また，図 5.19～図 5.20 は数値シミュレーションに用いた 2016 年の 1 月から 12 月までの児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化を月ごとに表した図である。

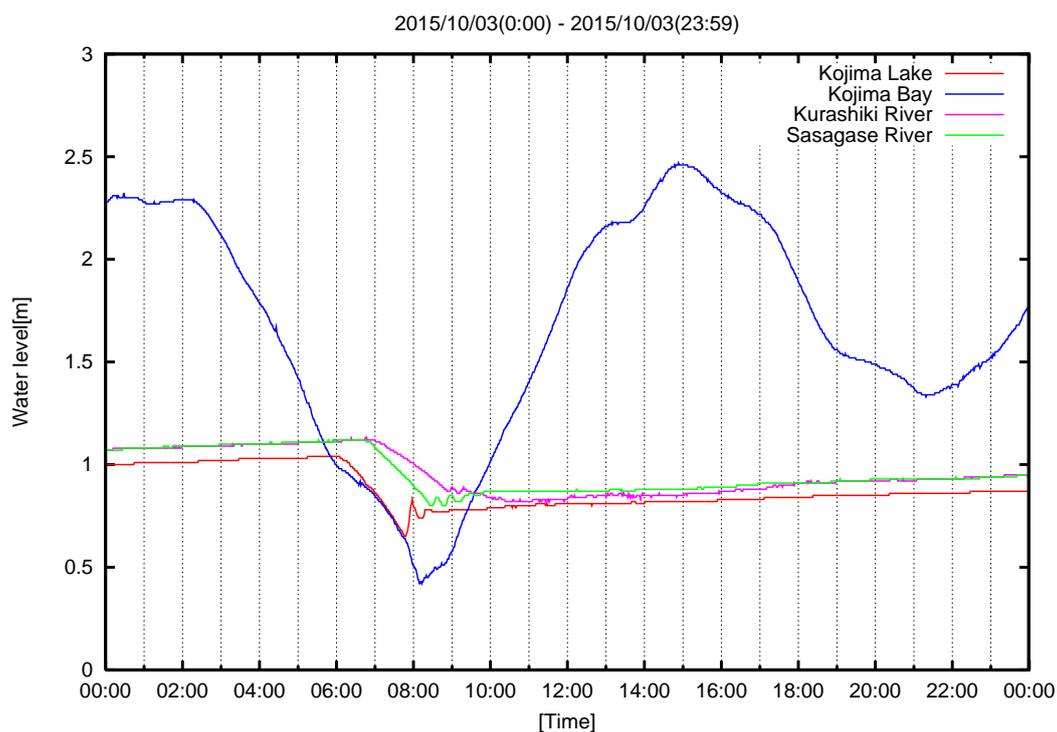


図 5.13: 2015 年 10 月 3 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化

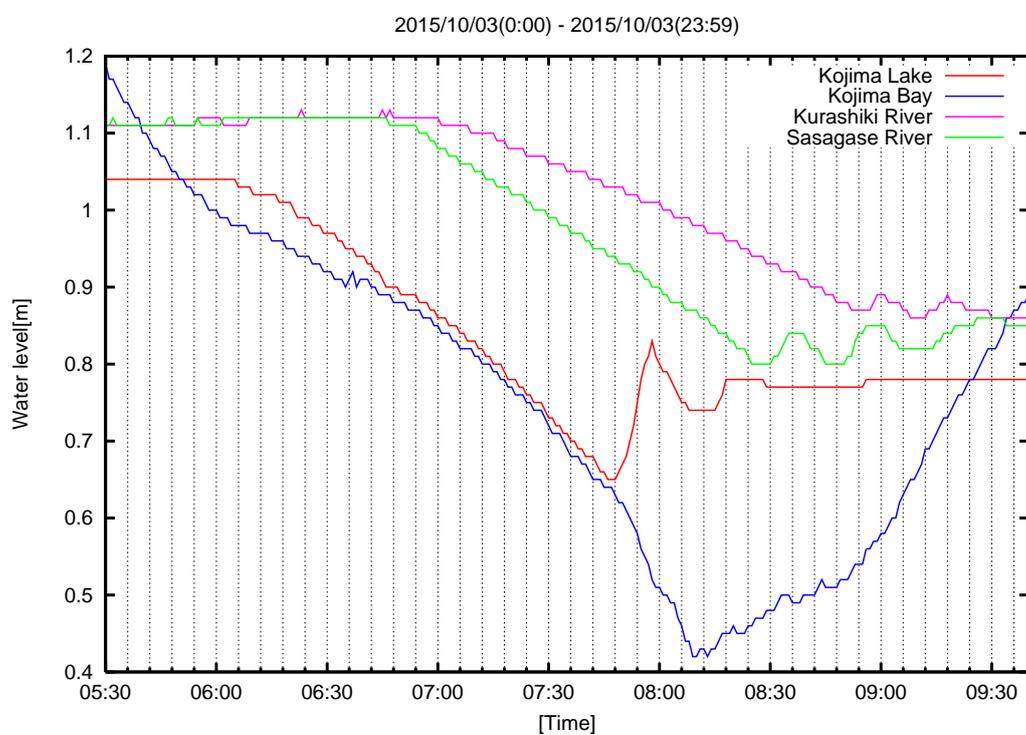


図 5.14: 2015 年 10 月 3 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化 (拡大)

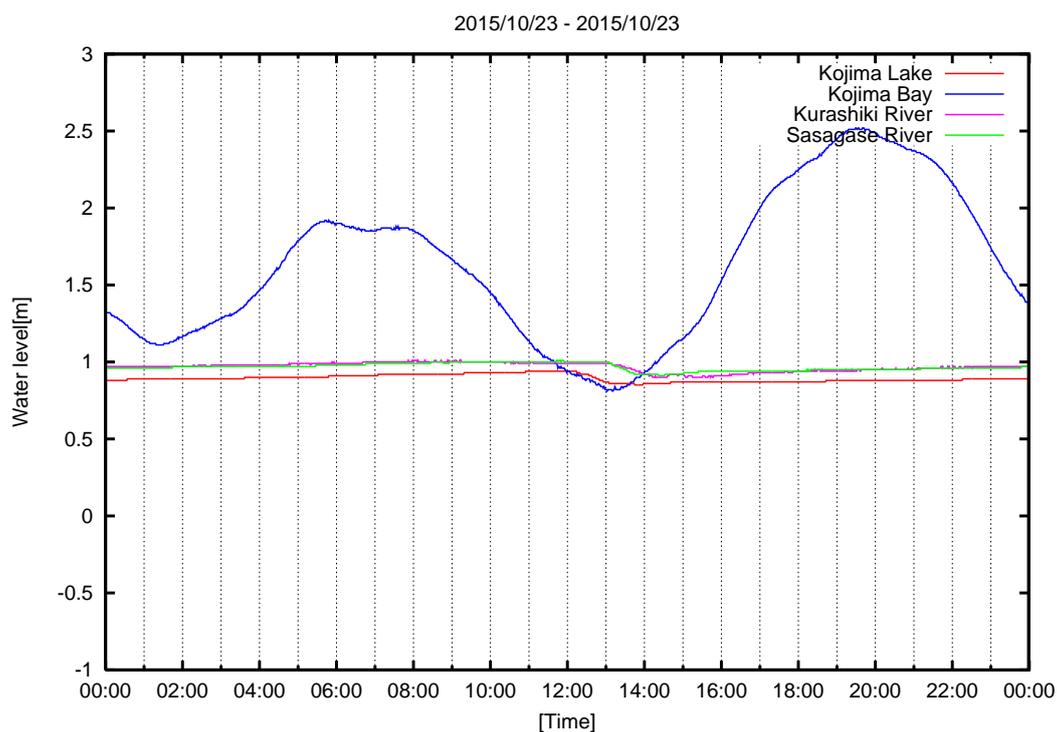


図 5.15: 2015 年 10 月 23 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化

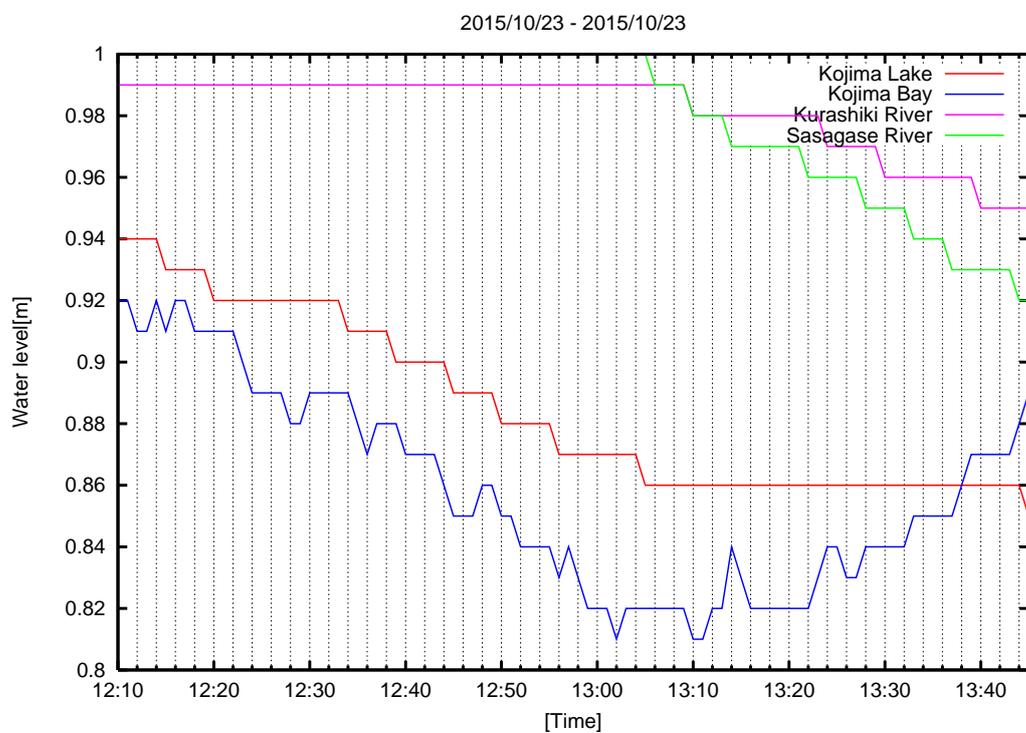
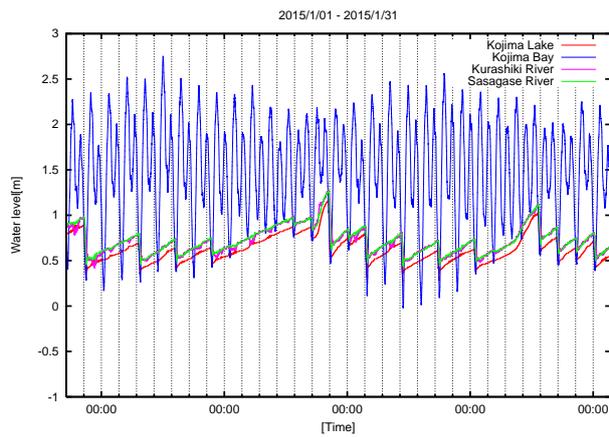
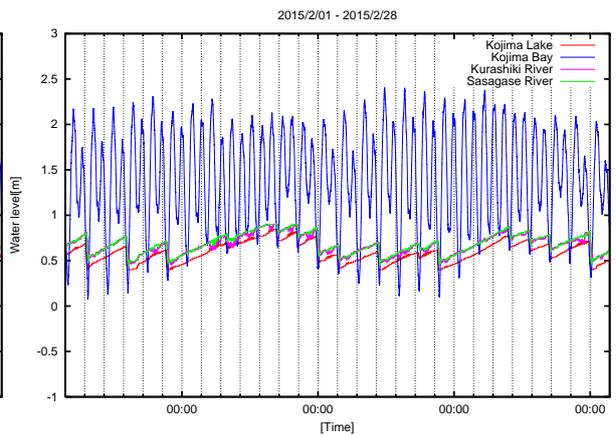


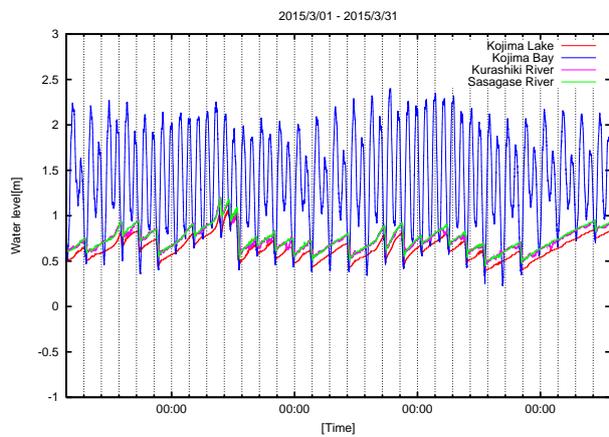
図 5.16: 2015 年 10 月 23 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化 (拡大)



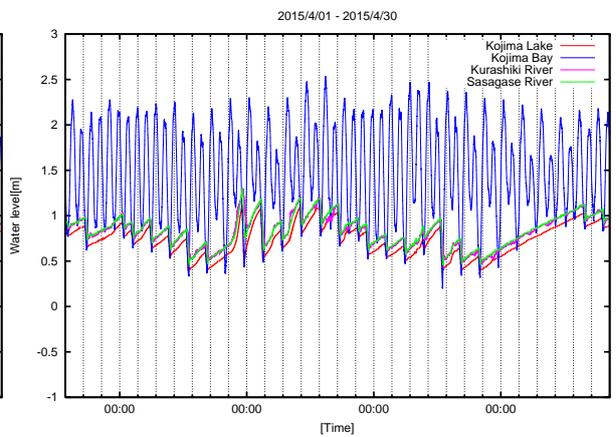
(a) 1月の水位変化



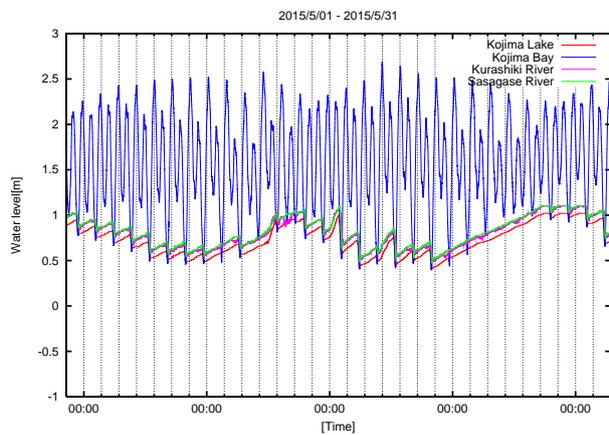
(b) 2月の水位変化



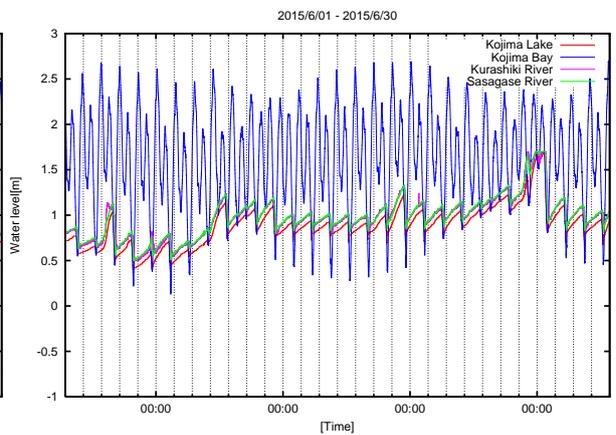
(c) 3月の水位変化



(d) 4月の水位変化

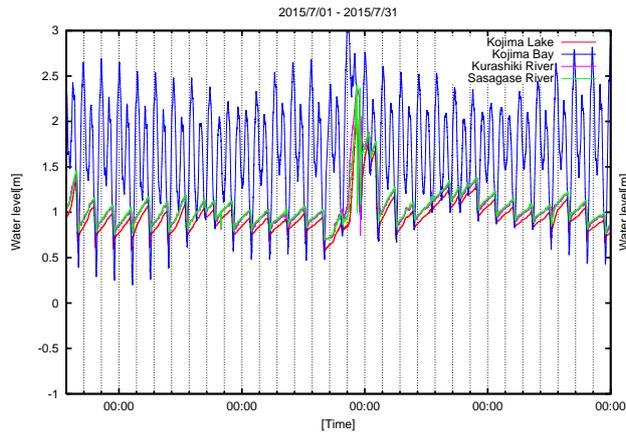


(e) 5月の水位変化

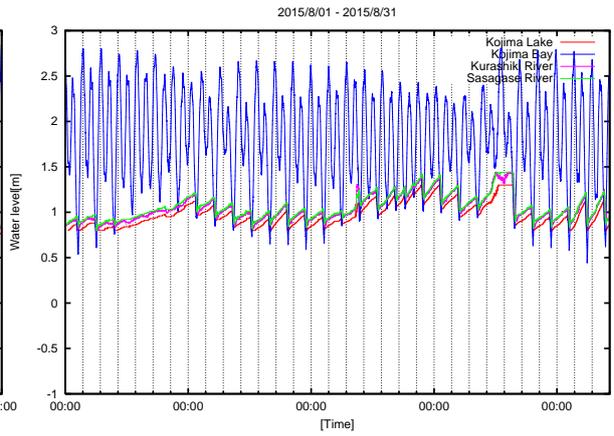


(f) 6月の水位変化

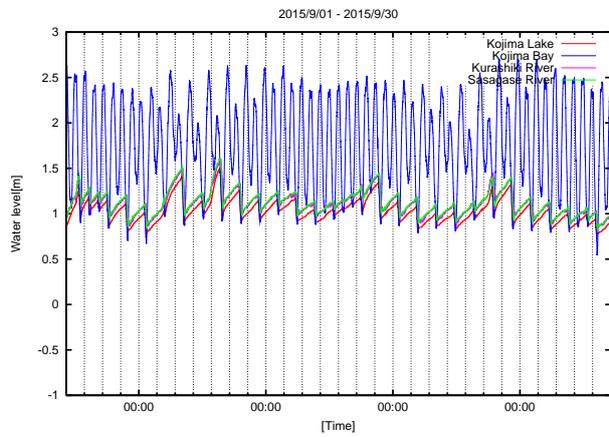
図 5.17: 2015年の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化(1月～6月)



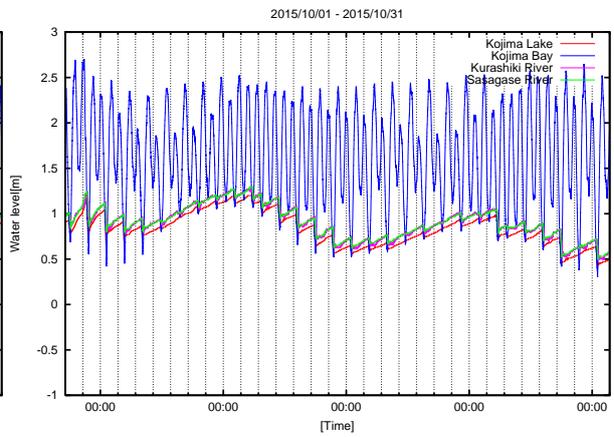
(a) 7月の水位変化



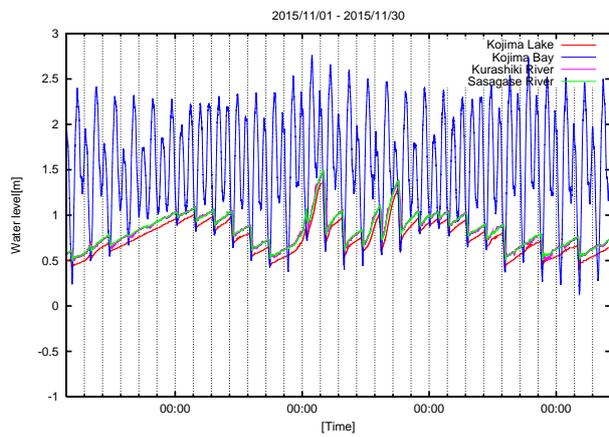
(b) 8月の水位変化



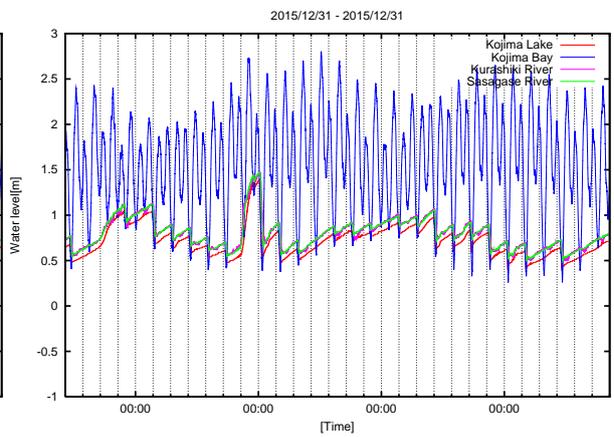
(c) 9月の水位変化



(d) 10月の水位変化

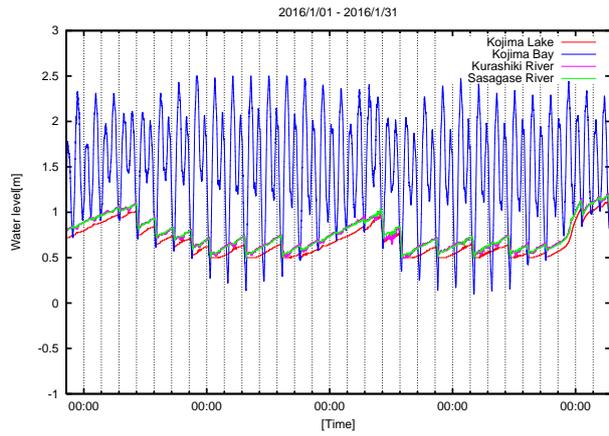


(e) 11月の水位変化

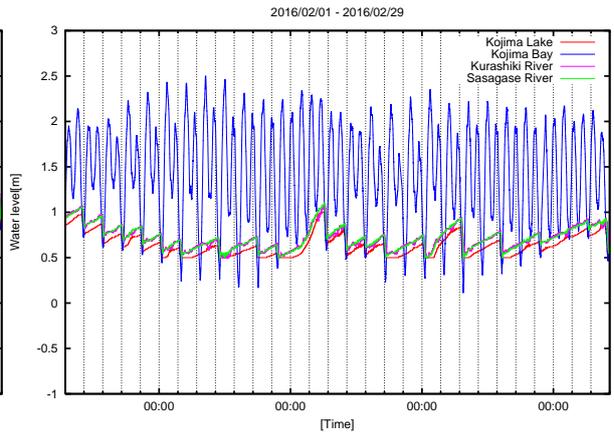


(f) 12月の水位変化

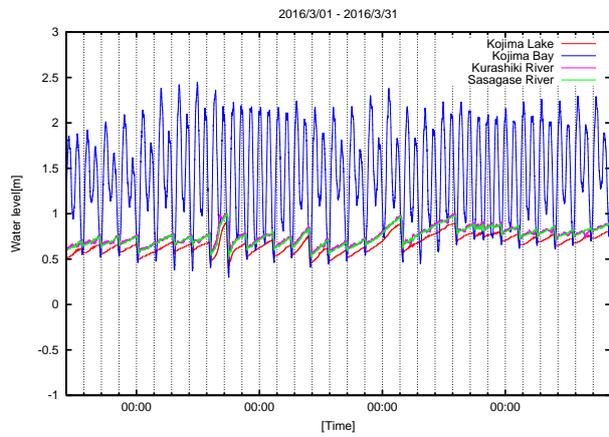
図 5.18: 2015年の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化(7月～12月)



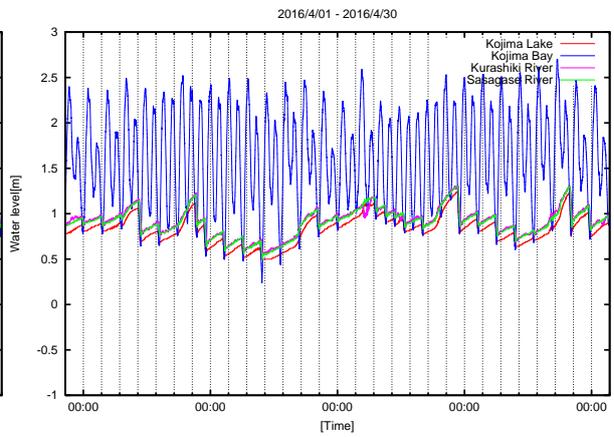
(a) 1月の水位変化



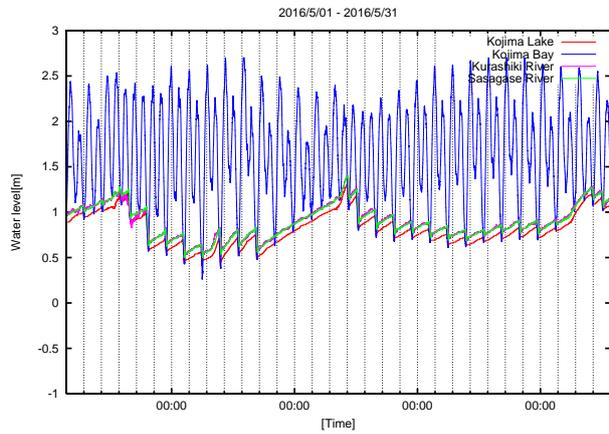
(b) 2月の水位変化



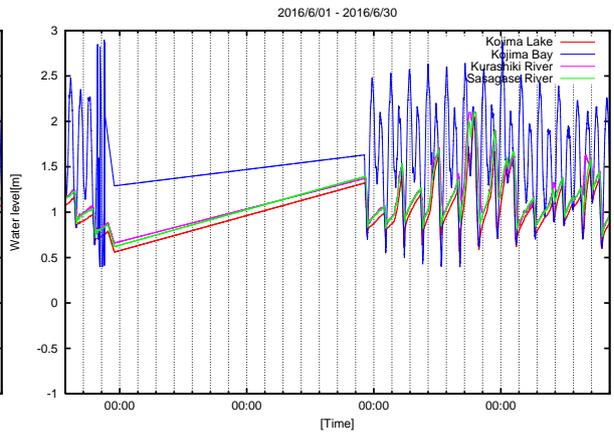
(c) 3月の水位変化



(d) 4月の水位変化

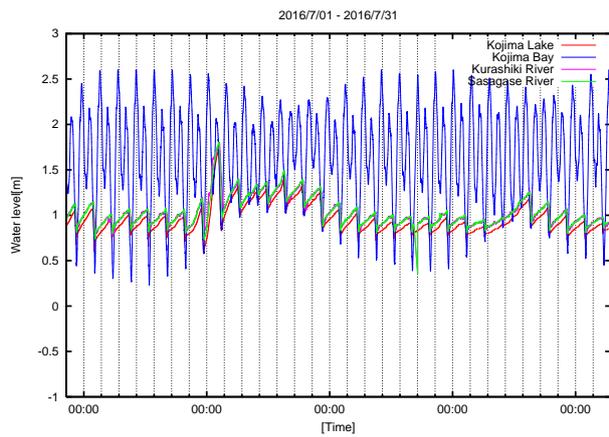


(e) 5月の水位変化

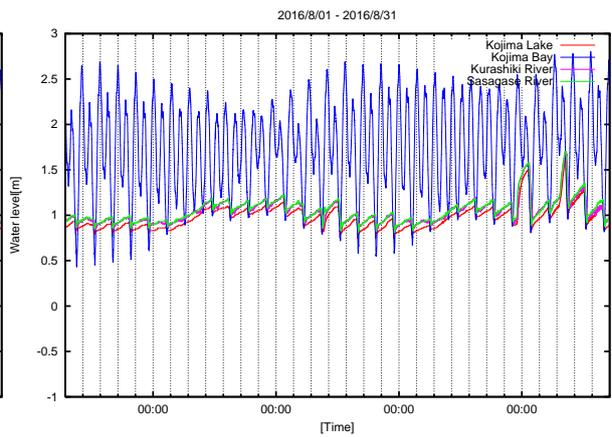


(f) 6月の水位変化

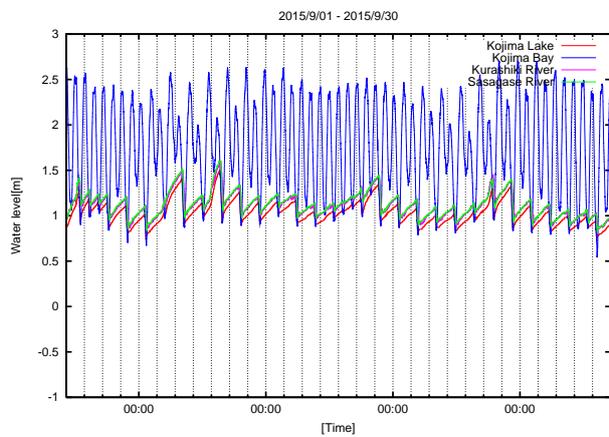
図 5.19: 2016 年の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化 (1 月～6 月)



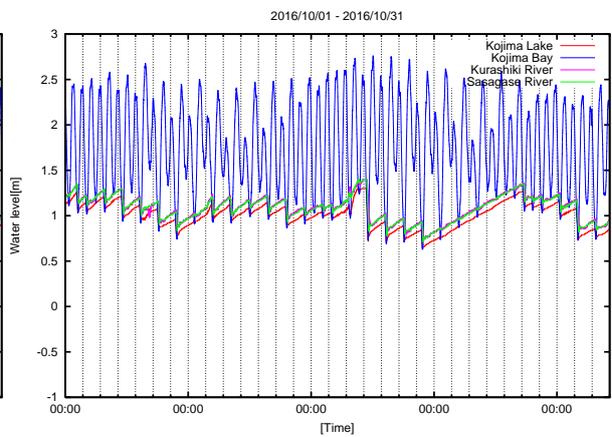
(a) 7月の水位変化



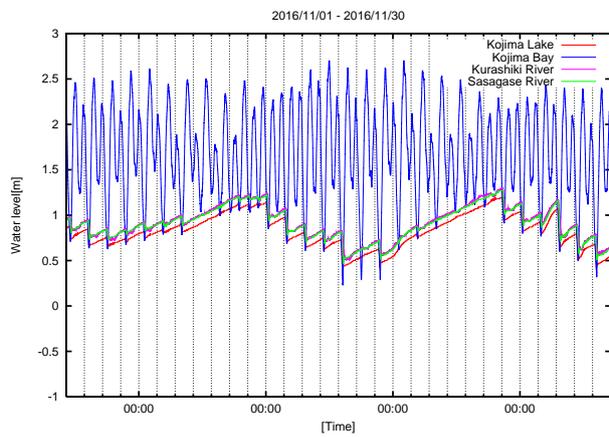
(b) 8月の水位変化



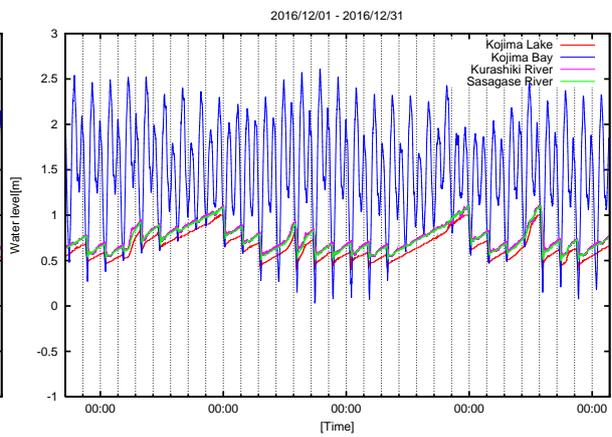
(c) 9月の水位変化



(d) 10月の水位変化



(e) 11月の水位変化



(f) 12月の水位変化

図 5.20: 2016年の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化（7月～12月）

## 5.7 地形変動シミュレーションの条件

掃流砂の移動に関する効率である  $e_b = 0.12$ ,  $\rho$  は水の密度を表す。ここで,  $\rho = 1000 [kg/m^3]$ ,  $g = 9.81 [m/s^2]$ , 底面における接線応力と法線応力の比である  $\tan\phi = 0.63$ , 砂の比重  $\rho_s = 2.65$ , 空隙率である  $\lambda = 0.4$ , 底面摩擦係数  $f_w = 0.02$ , 砂の粒径  $d = 0.25 \text{ mm}$  とした [25, 41]。

## 5.8 流れと地形変化のシミュレーション結果

世界第2位の人造淡水湖「児島湖」は1959年に誕生し、径間24 mのゲート6門から成る締切堤防は水量の確保、防災機能および親水空間の整備などの役割がある [19]。そのため、以下では児島湖ゲート付近の流れを主に議論した。灌漑期の場合にはAP1(児島湾飽浦港平均水面潮位)+80cm, 非灌漑期には+50cmを超えると、干潮時等適切な時間帯にゲートが開放され、児島湖から児島湾への排水が行われるため、児島湖のゲート付近の地形は複雑であり、その変化や汚濁物質の拡散現象を解析するためには流れの精度の良い数値解析が必要である。

流れのシミュレーションは、図5.3の有限要素メッシュを適用し、児島湖を図5.2のように3層の場合について行った。図5.23–5.29は2016年06月19日のデータを用いたシミュレーション結果を表示したものである。ここでは、児島湖のゲートが図5.21のように13:13から16:07まで開放されたとした [26]。図5.22は図5.21の拡大したものである。図5.23はシミュレーション開始後、49800秒の表層、中層および底層の平均速度ベクトルを表示している。同様に、図5.24は51600秒、図5.25は53400秒、図5.26は55200秒、図5.27は57000秒、図5.28は58200秒、図5.29は58800秒の表層、中層および底層の平均速度ベクトルを表示している。

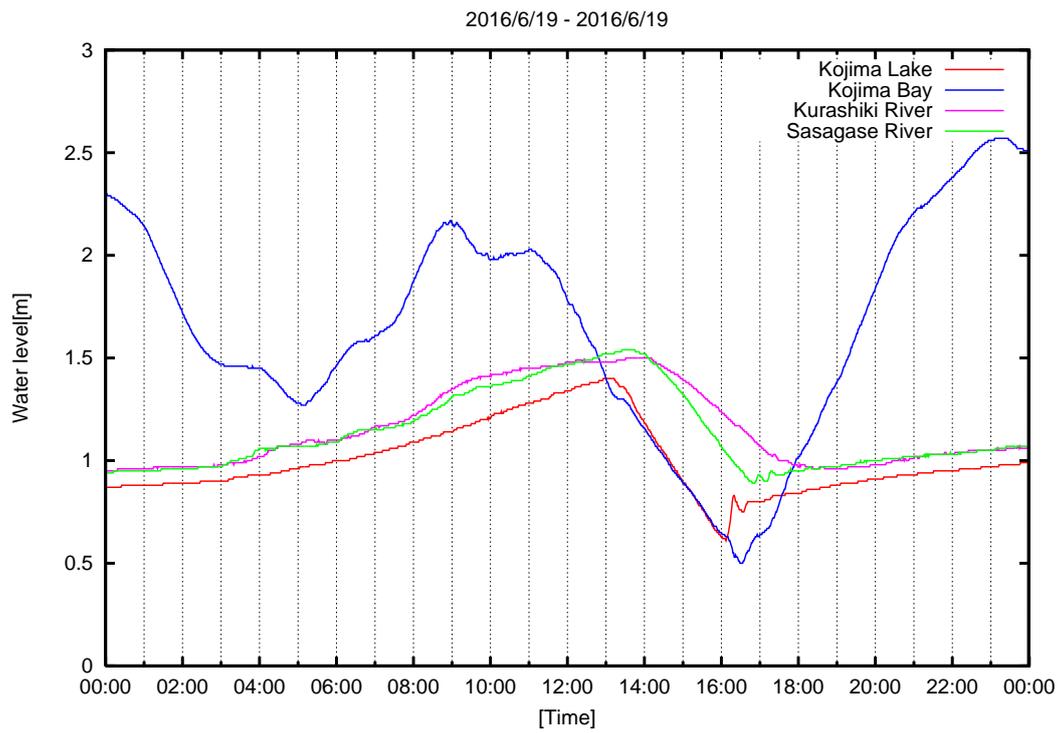


図 5.21: 2016 年 06 月 19 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化

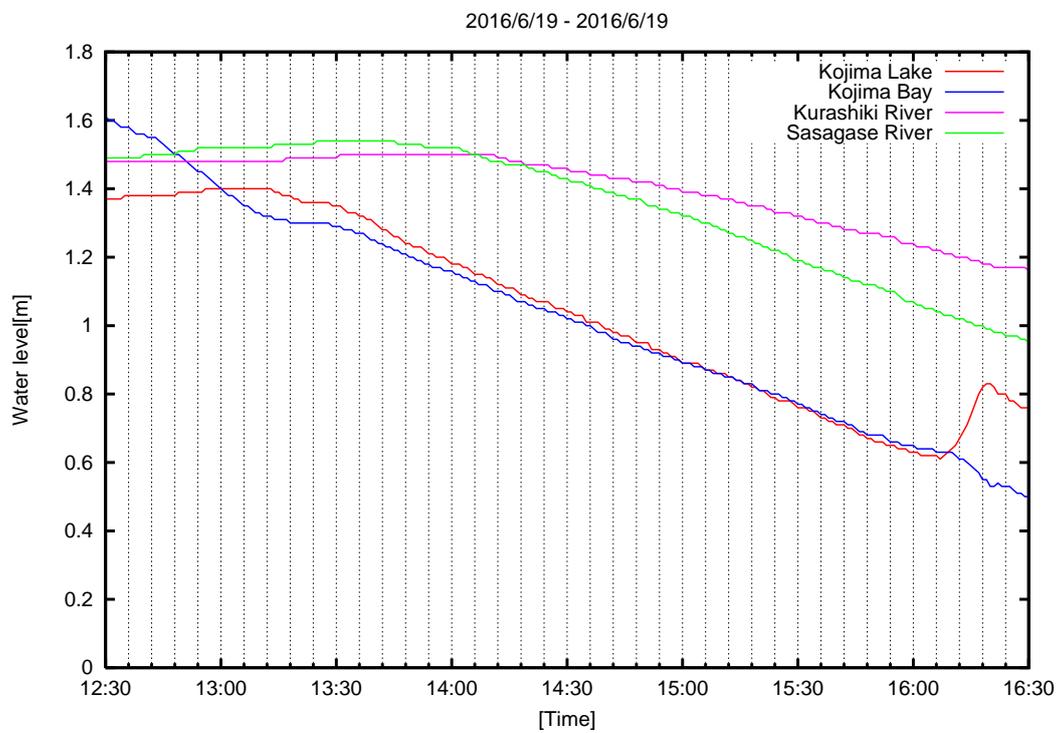


図 5.22: 2016 年 06 月 19 日の児島湖，児島湾，笹ヶ瀬川および倉敷川の水位変化

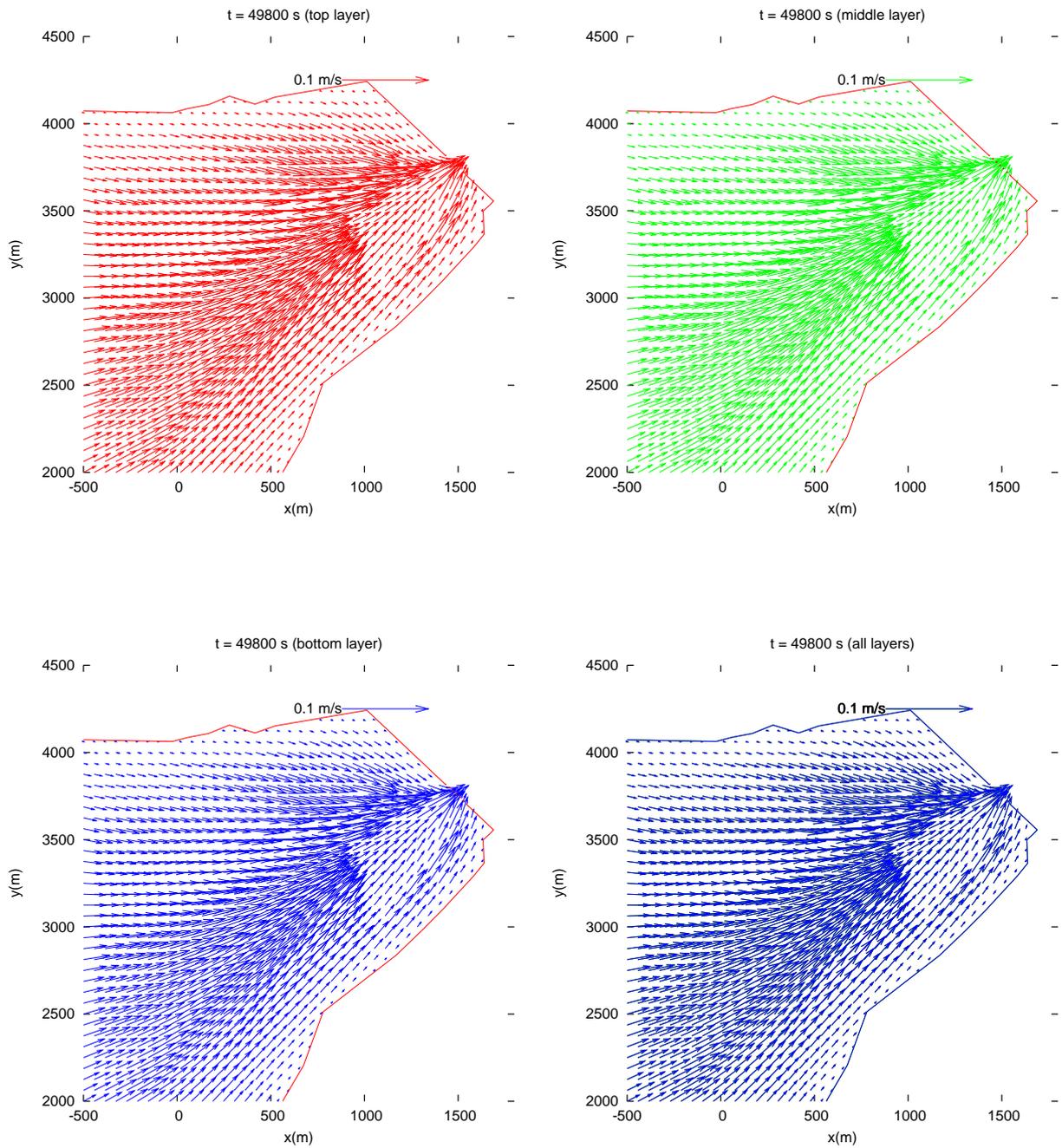


図 5.23: 児島湖のゲート開放後,  $t=49800$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布

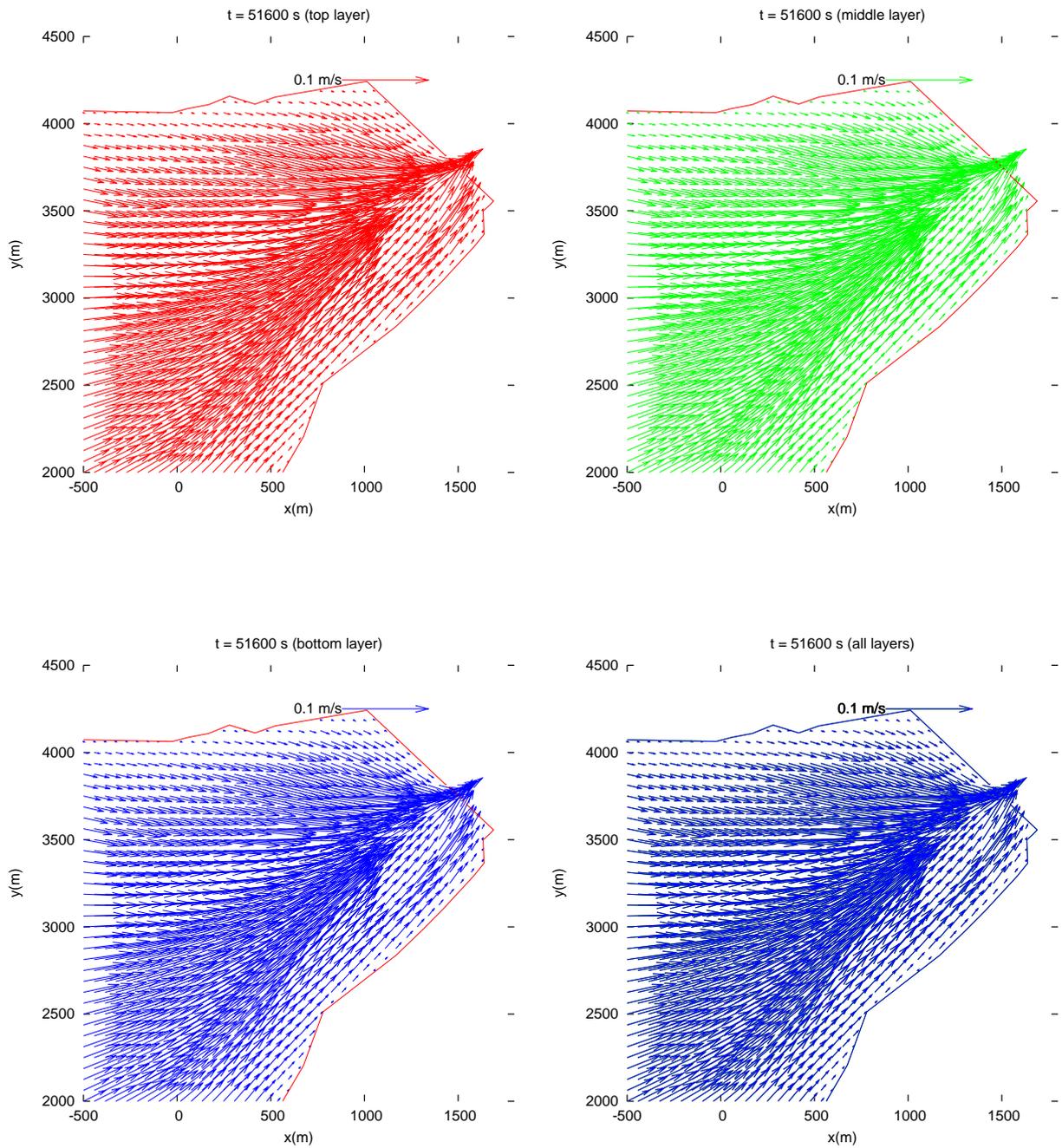


図 5.24: 児島湖のゲート開放後,  $t=51600$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布

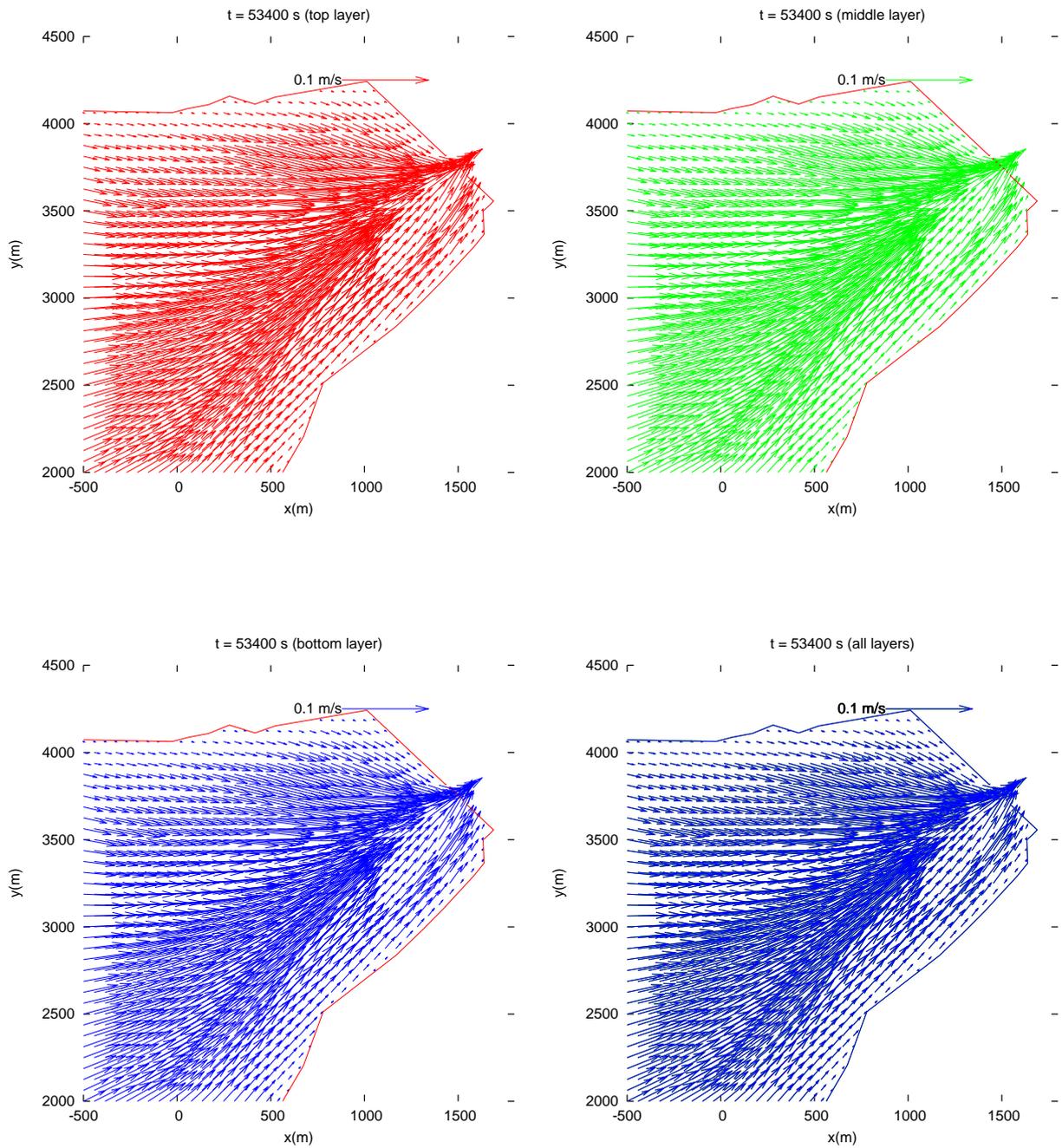


図 5.25: 児島湖のゲート開放後,  $t=53400$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布

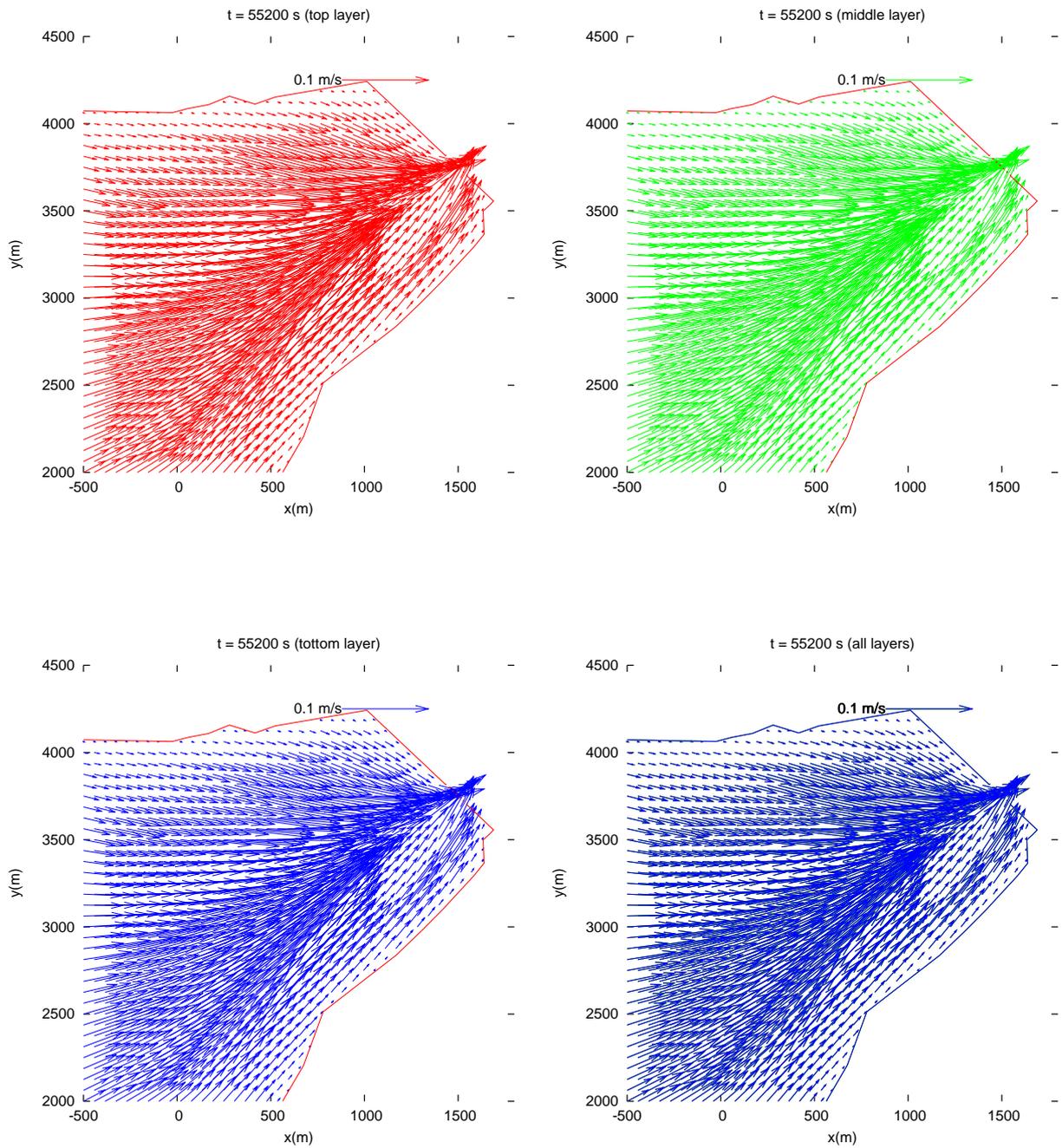


図 5.26: 児島湖のゲート開放後,  $t=55200$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布

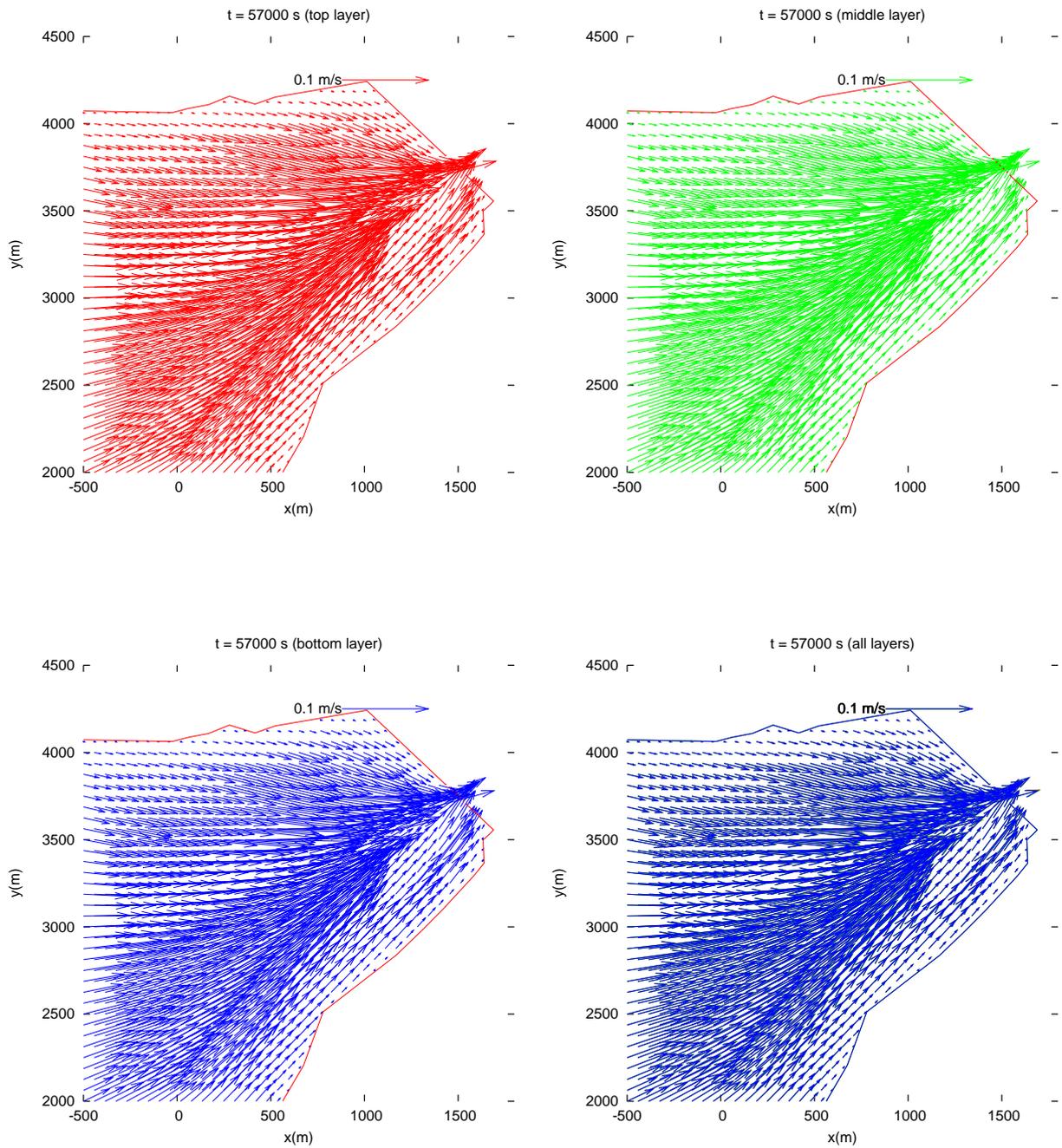


図 5.27: 児島湖のゲート開放後,  $t=57000$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布

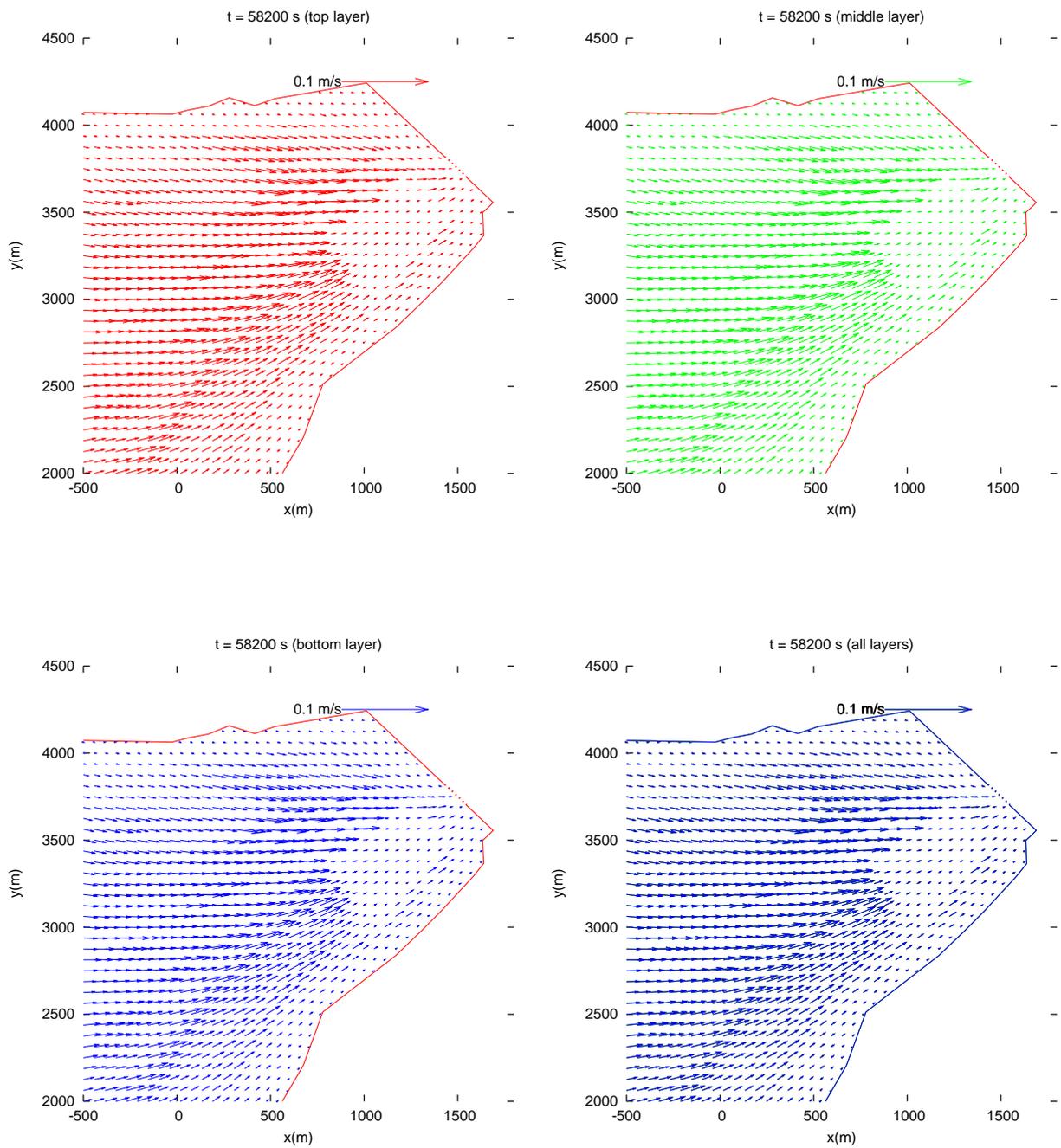


図 5.28: 児島湖のゲート開放後,  $t=58200$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布

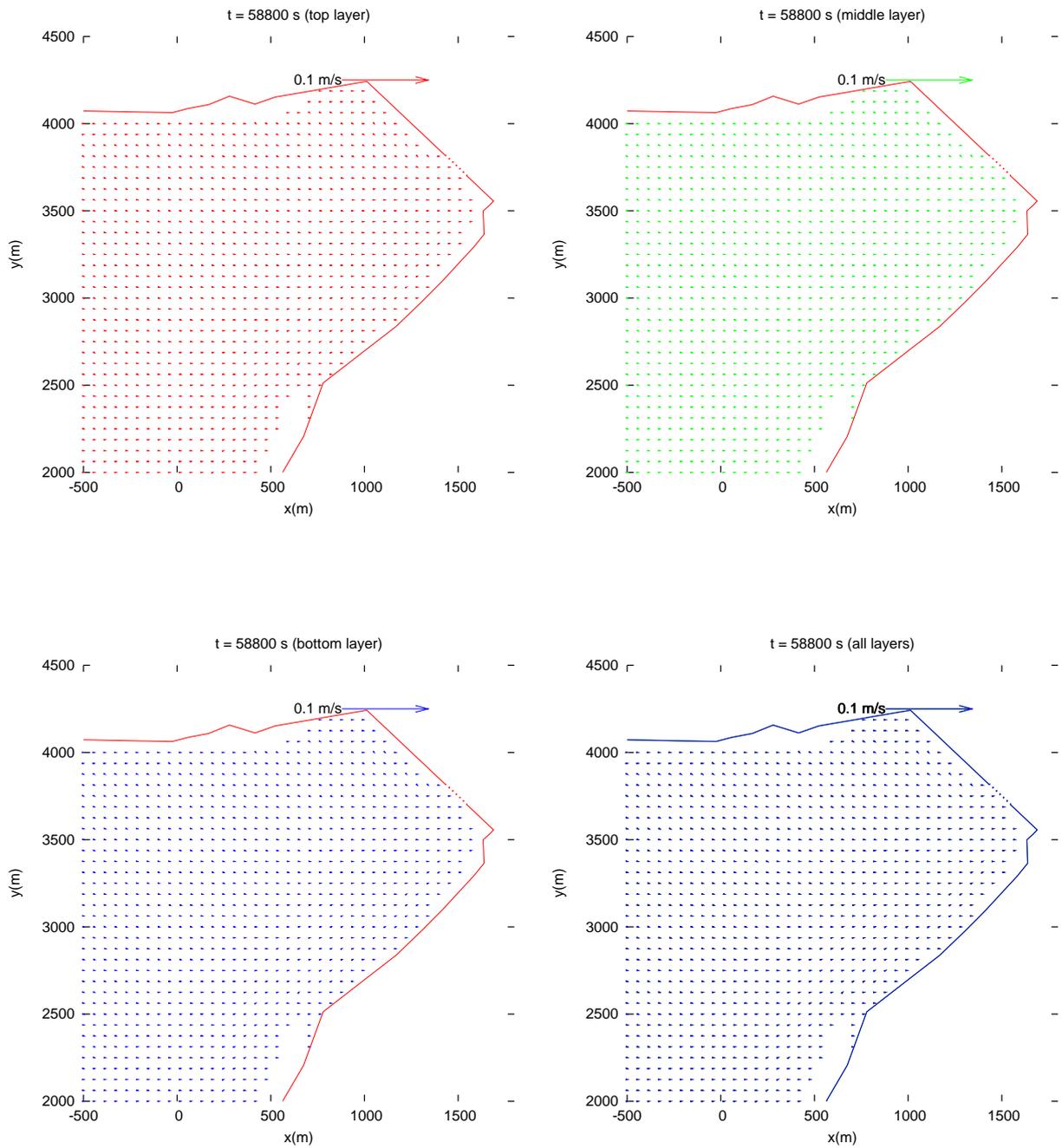


図 5.29: 児島湖のゲート開放後,  $t=58800$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布

## 5.9 まとめ

本研究では、流れのシミュレーションを行うため、流れの方程式を数値的に解いた。水の速度を計算し、児島湖の流れの動きを解析するためには、流体力学の支配方程式である運動方程式および連続の方程式に多層有限要素法を適用した。安定した流れのシミュレーションを高精度かつ高速に行うため、次数4のアダムス・バッシュフォース・ムルトン予測子修正子法（PECEモード）とルンゲ・クッタ法を用いた。均速度ベクトルの時間 $t$ による変化と層毎による変化を図5.23–5.29にそれぞれ示した。図5.30は57000秒の表層、中層および底層の平均速度ベクトルの重なったものであり、図より、表層（赤矢印）、中間層（緑矢印）および底層（ブルー矢印）の平均流速ベクトル（矢印の長さは流速の速さを、向きは流速の向きをそれぞれ表す）が順に大きくなっていることが見られる。

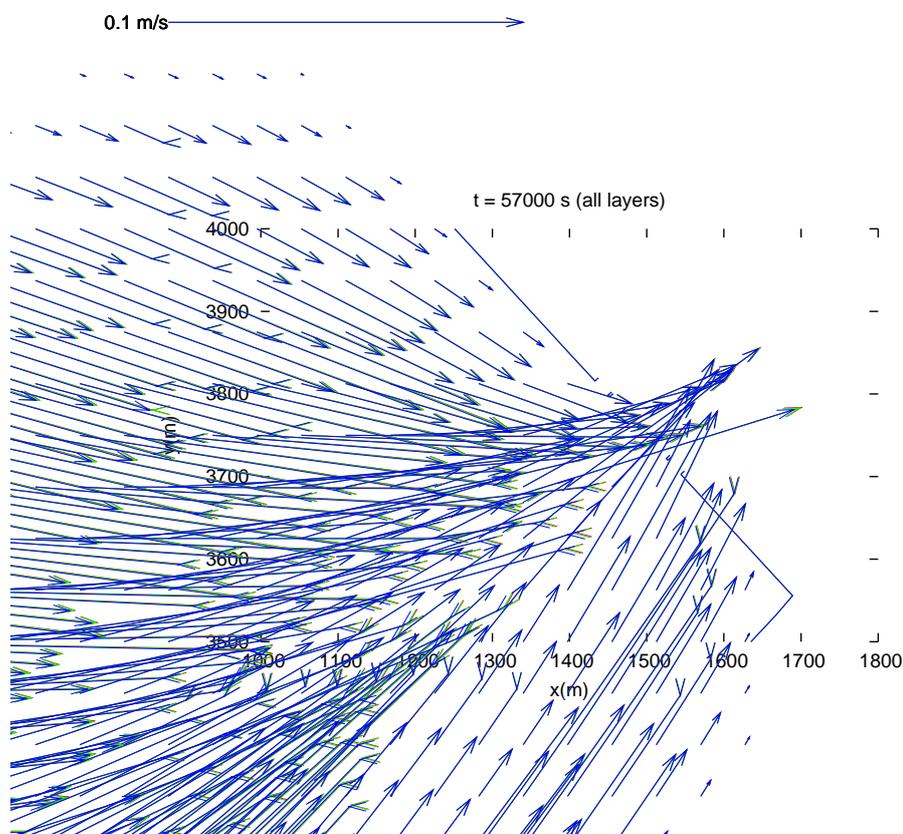


図 5.30: 児島湖のゲート開放後， $t=57000$  秒後のゲート付近における速度ベクトルの分布の拡大

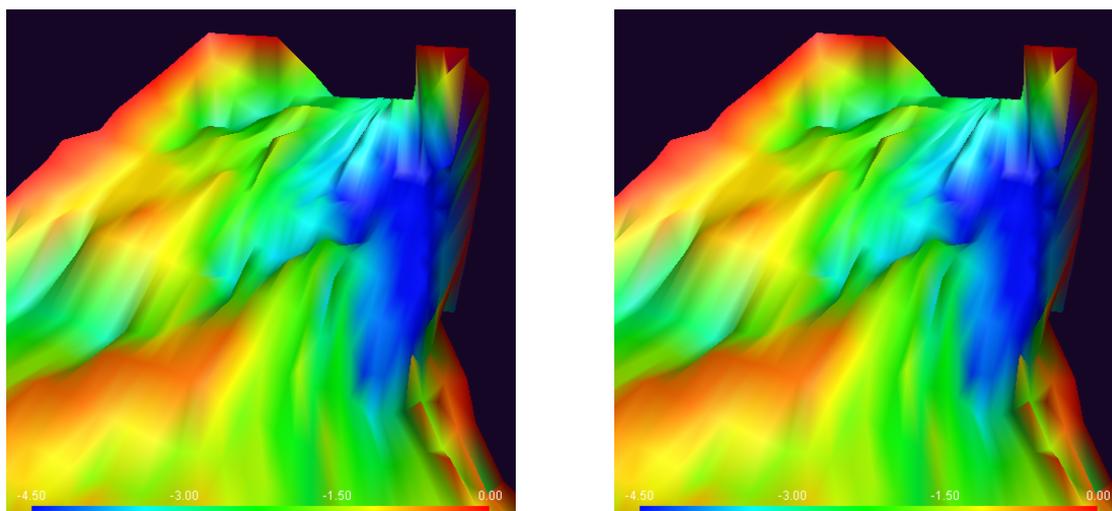
# 第6章 児島湖の地形変動の数値シミュレーション結果

## 6.0.1 2015年の数値シミュレーション結果

河川流路における河床高の変化は、流砂量の不均衡によって生じるものであり、掃流砂による河床高の時間変化は式(5.71)の流砂の連続式により求める。考察では時間とともに変化する地形変化を考察する。

### 2015年01月01日から02日までの1日間の地形変化シミュレーション

ここでは、2014年の水深データを基にして2015年01月01日から02日までの1日間の水位データを用いて数値シミュレーションを行った。図6.1の(a)は2014年の水深データを用いた更新前の地形である。図6.1の(b)は2015年01月01日から02日までの1日間の水位データを用いて更新した更新後の地形である。図6.2は、2015年01月01日から02日までの1日間の堆積量である。ここで、横軸は節点番号であり、縦軸は変化量([m])を表す。堆積量は非常に小さいことが見られる。図6.3は、2015年01月01日から02日までの1日間の堆積量のカラー表示である。プラス方向は水深が浅くなったことを示し、マイナス方向は水深が深くなったことを示す。



(a) 更新前の地形

(b) 更新後の地形

図 6.1: 2015年01月01日から02日までの期間における地形変化

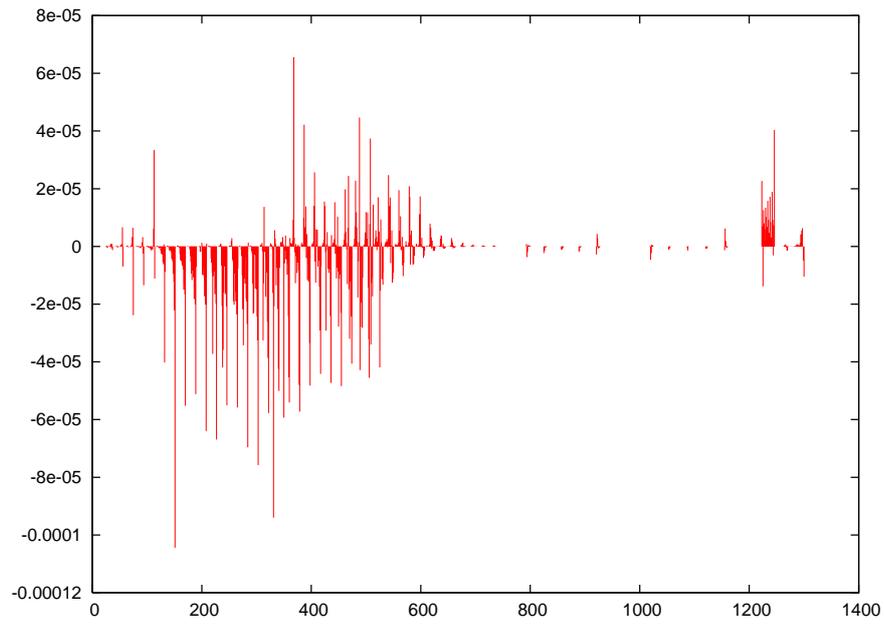


図 6.2: 2015 年 01 月 01 日から 02 日までの期間における堆積量

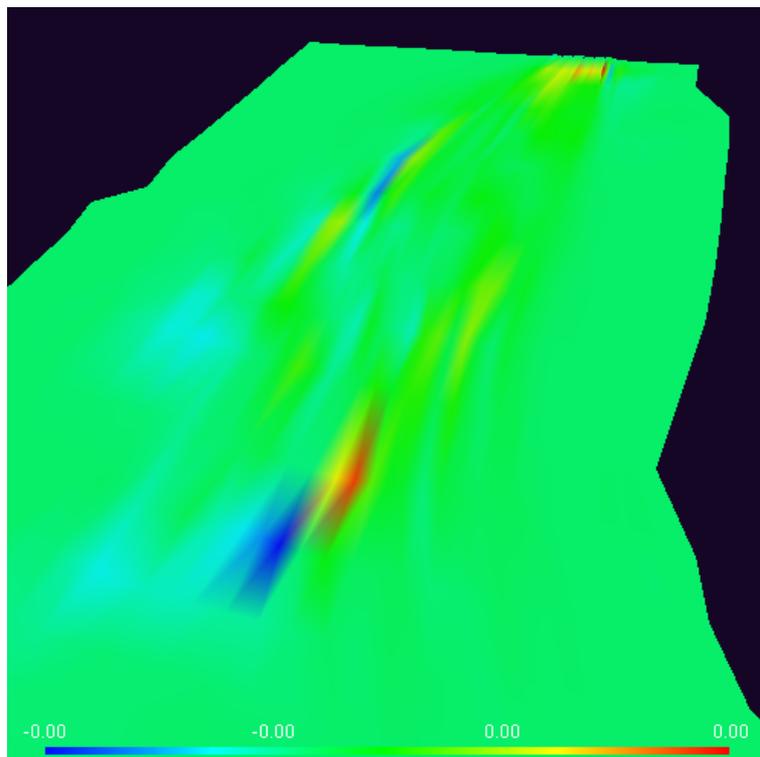
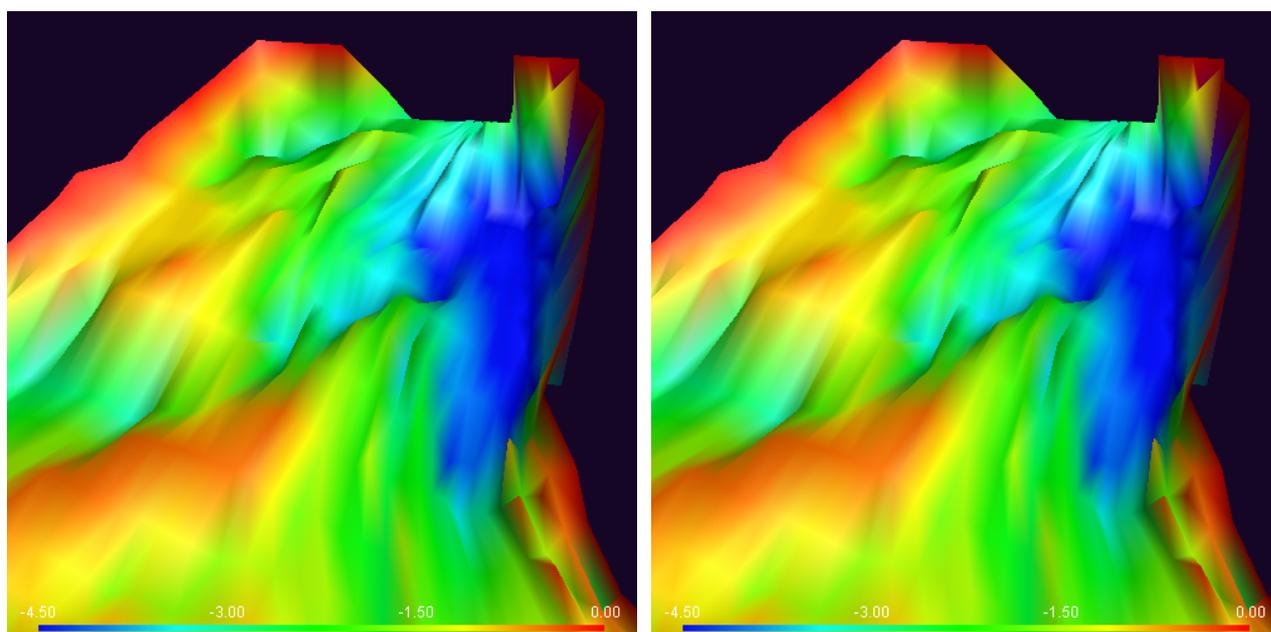


図 6.3: 2015 年 01 月 01 日から 02 日までの期間における堆積量

## 2015年01月01日から07日までの1週間の地形変化シミュレーション

2014年の水深データを基にして2015年01月01日から07日までの1週間の水位データを用いて数値シミュレーションを行った。図6.4の(a)2014年の水深データ水位データを用いた更新前の地形である。図6.4の(b)は2015年01月01日から07日までの1週間の水位データを用いて更新した更新後の地形である。図6.5は、2015年10月01日から07日までの1週間の堆積量である。ここで、横軸は節点番号であり、縦軸は変化量([m])を表す。一週間の堆積量は1日の堆積量に比較して増加したことが見られる。図6.6は、2015年10月01日から07日までの1週間の堆積量のカラー表示である。プラス方向は水深が浅くなったことを示し、マイナス方向は水深が深くなったことを示す。



(a) 更新前の地形

(b) 更新後の地形

図 6.4: 2015年01月01日から07日までの期間における地形変化

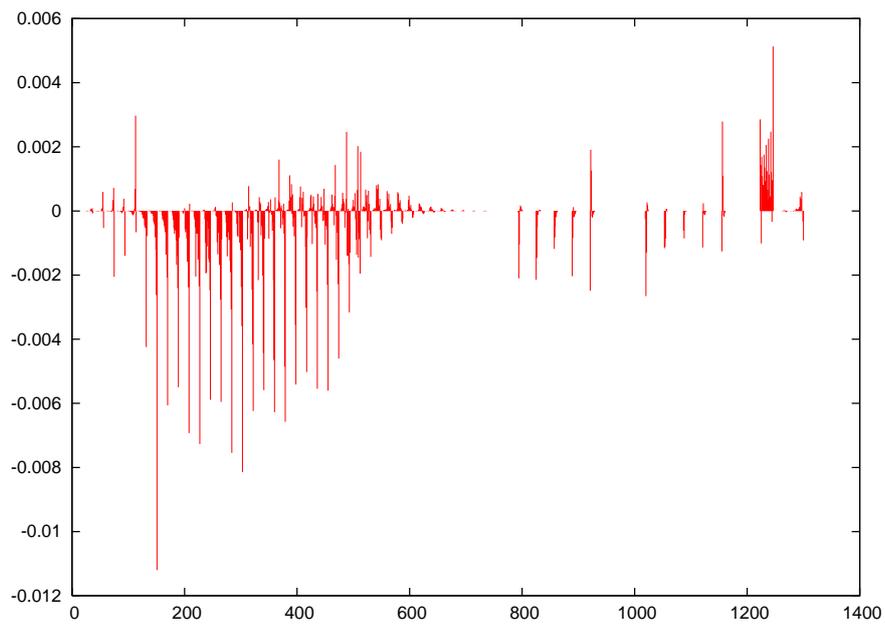


図 6.5: 2015 年 01 月 01 日から 07 日までの期間における堆積量

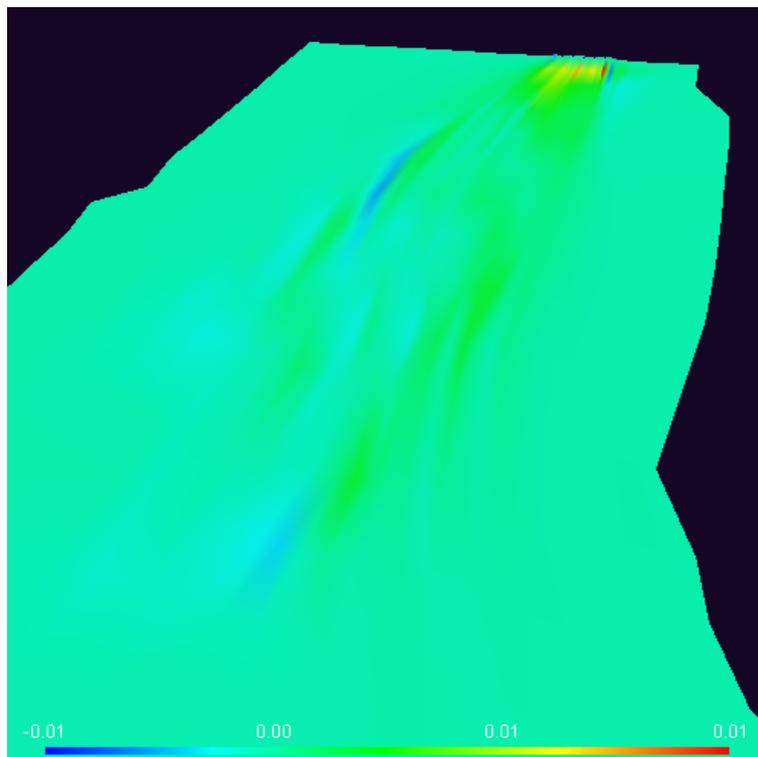
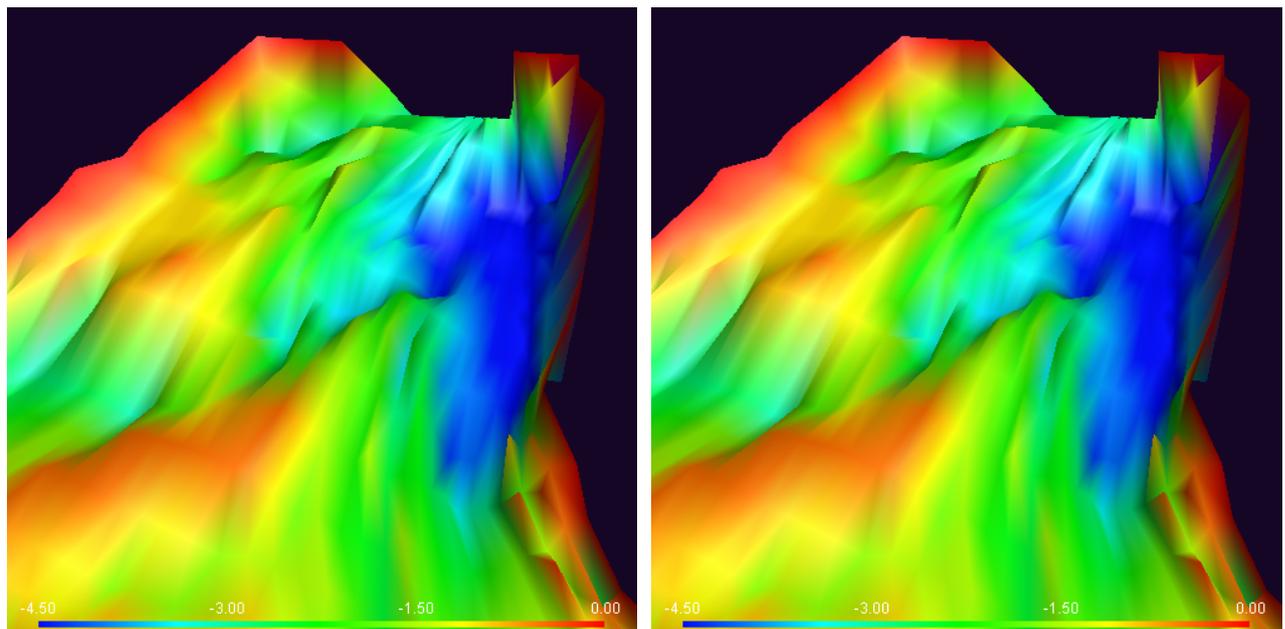


図 6.6: 2015 年 01 月 01 日から 07 日までの期間における堆積量

## 2015年01月1日から31日までの1ヶ月間の地形変化シミュレーション

2014年の水深データを基にして2015年01月1日から31日までの水位データを用いて数値シミュレーションを行った。図6.7の(a)は2014年の水深データを用いた更新前の地形である。図6.7の(b)は2015年01月01日から31日までの1ヶ月間の水位データを用いて更新した更新後の地形である。図6.8は、2015年10月01日から31日までの1ヶ月間の堆積量である。ここで、横軸は節点番号であり、縦軸は変化量([m])を表す。図6.9は、2015年10月01日から31日までの1ヶ月間の堆積量のカラー表示である。ラス方向は水深が浅くなったことを示し、マイナス方向は水深が深くなったことを示す。



(a) 更新前の地形

(b) 更新後の地形

図 6.7: 2015年01月1日から31日までの期間における地形変化

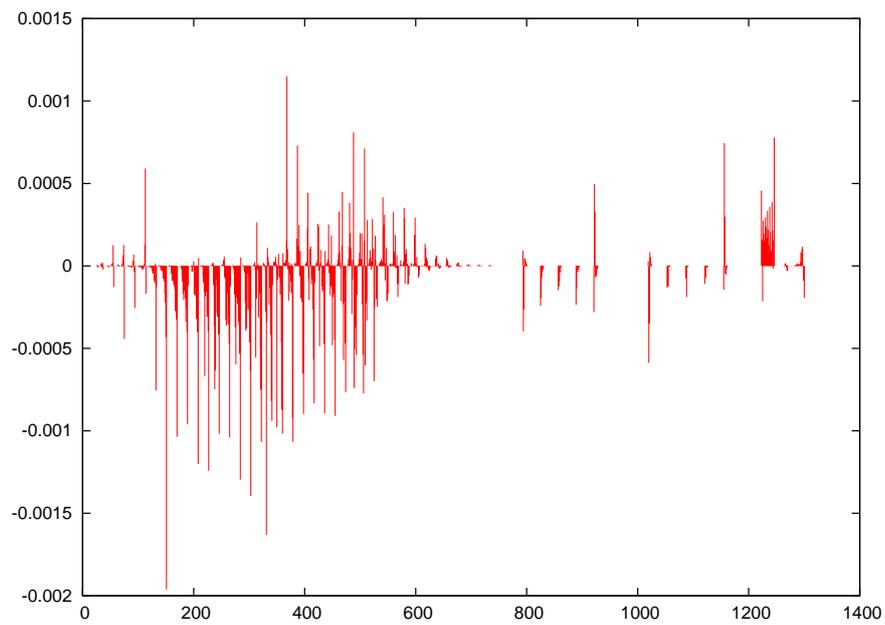


図 6.8: 2015 年 01 月 1 日から 31 日までのまでの期間における堆積量

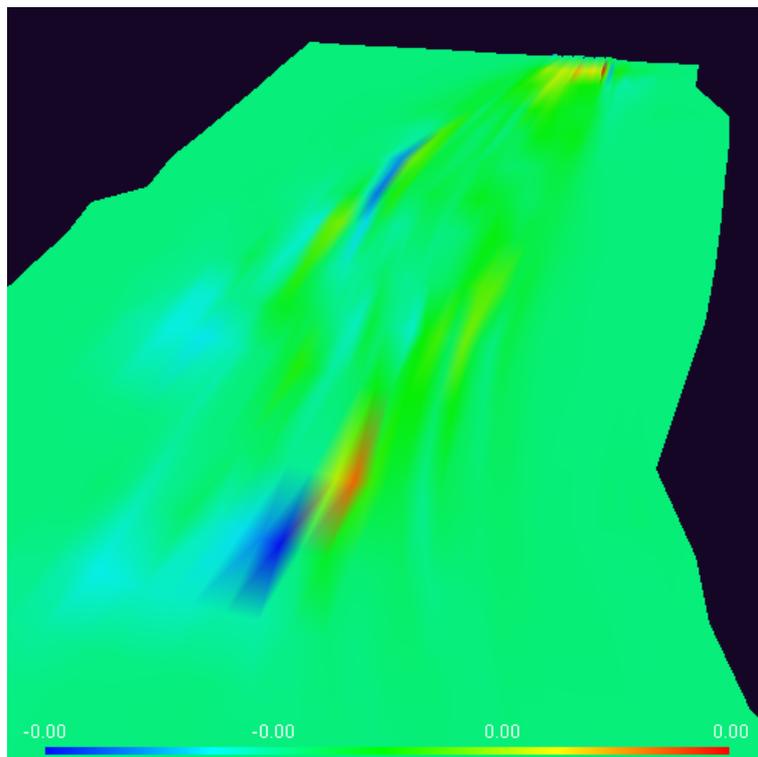
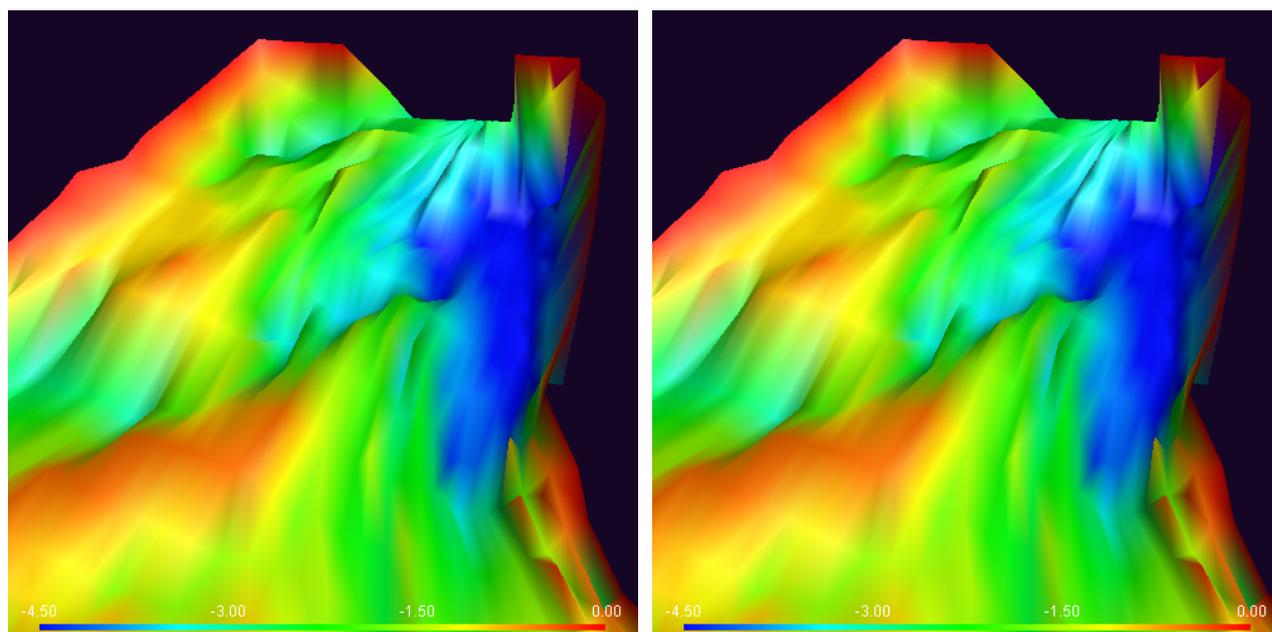


図 6.9: 2015 年 01 月 1 日から 31 日までのまでの期間における堆積量

## 2015年01月から03月までの三ヶ月間の地形変化シミュレーション

2014年の水深データを基にして2015年01月から03月の水位データを用いて数値シミュレーションを行った。図6.10の(a)は2014年の水深データを用いた更新前の地形である。図6.10の(b)は2015年01月から03月までの水位データを用いて更新した更新後の地形である。図6.11は、2015年01月から03月までの三ヶ月間の堆積量を示す。ここで、横軸は節点番号であり、縦軸は変化量([m])を表す。図6.12は、2015年01月から03月までの三ヶ月間の堆積量のカラー表示である。プラス方向は水深が浅くなったことを示し、マイナス方向は水深が深くなったことを示す。



(a) 更新前の地形

(b) 更新後の地形

図 6.10: 2015年01月から03月までの期間における地形変化

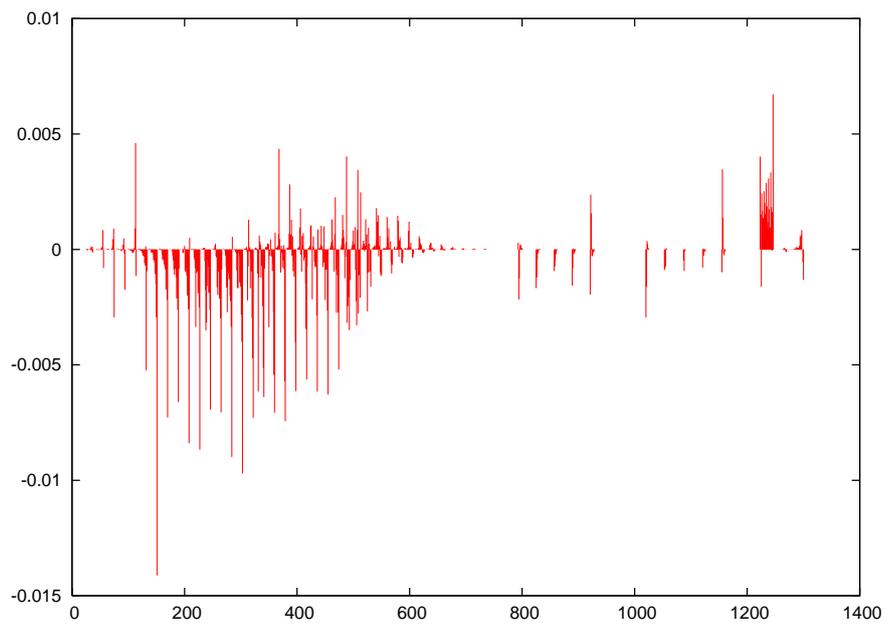


図 6.11: 2015 年 01 月から 03 月までの期間における堆積量

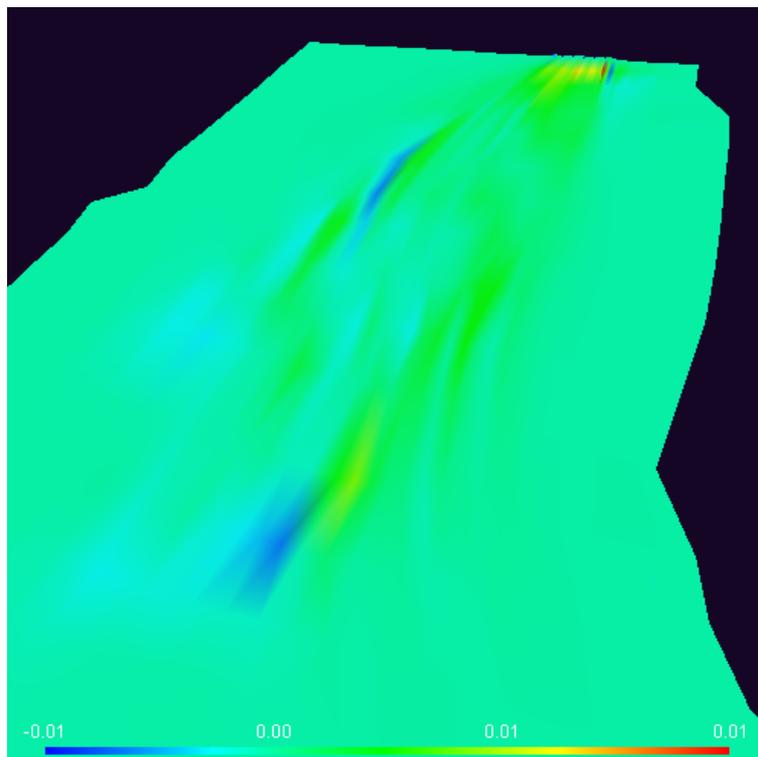
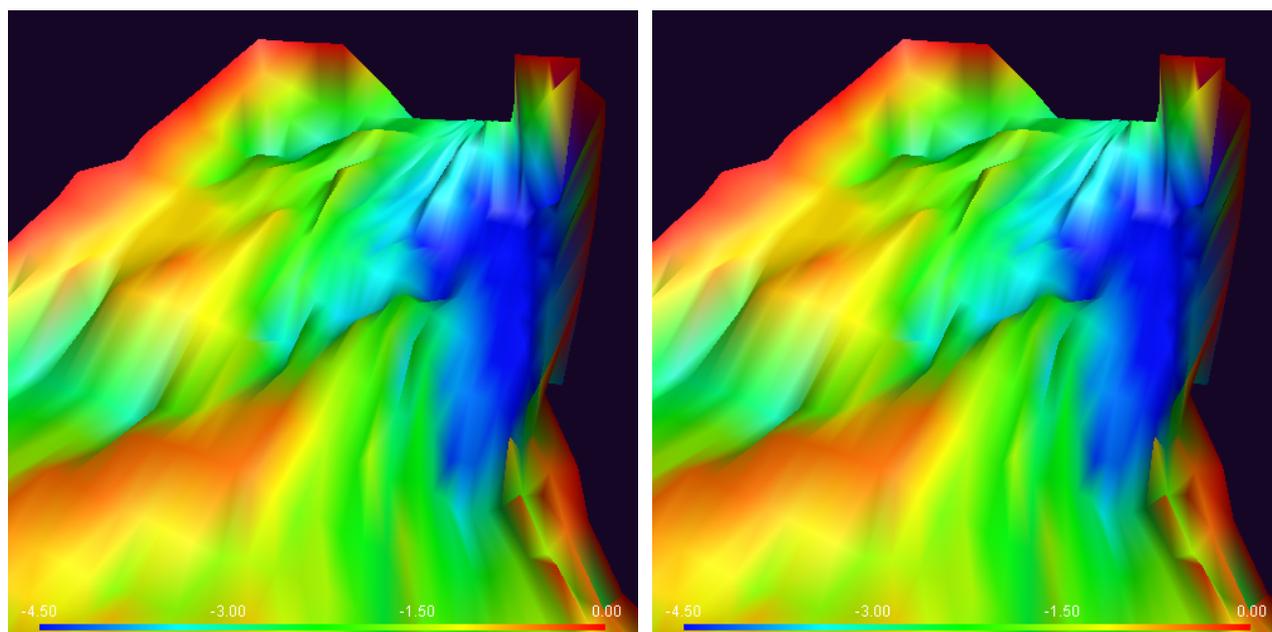


図 6.12: 2015 年 01 月から 03 月までの期間における堆積量

## 2015年01月から06月までの六ヶ月間の地形変化シミュレーション

2014年の水深データを基にして2015年01月から06月までの六ヶ月間の水位データを用いて数値シミュレーションを行った。図6.13の(a)は2014年の水深データを用いた更新前の地形である。図6.13の(b)は2015年01月から06月までの六ヶ月間の水位データを用いて更新した更新後の地形である。図6.14は、2015年01月から06月までの六ヶ月間の堆積量を示す。ここで、横軸は節点番号であり、縦軸は変化量([m])を表す。図6.15は、2015年01月から06月までの六ヶ月間の堆積量のカラー表示である。プラス方向は水深が浅くなったことを示し、マイナス方向は水深が深くなったことを示す。



(a) 更新前の地形

(b) 更新後の地形

図 6.13: 2015年01月から06月までの期間における地形変化

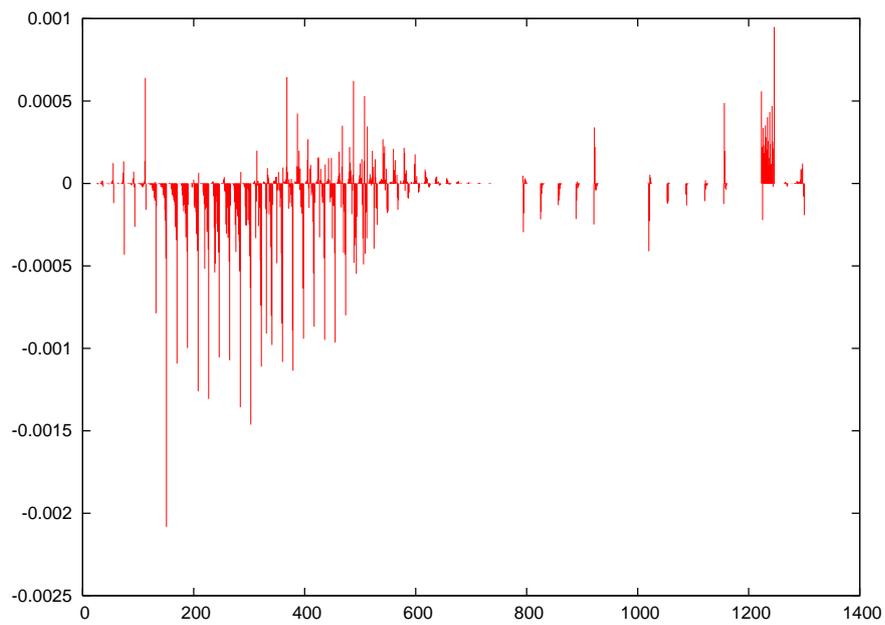


図 6.14: 2015 年 01 月から 06 月までの期間における堆積量

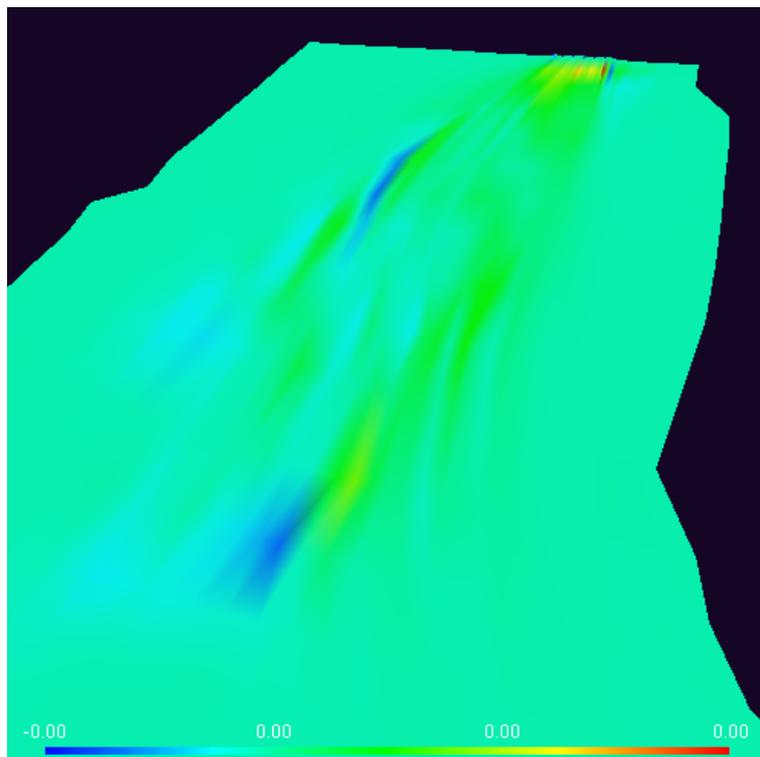
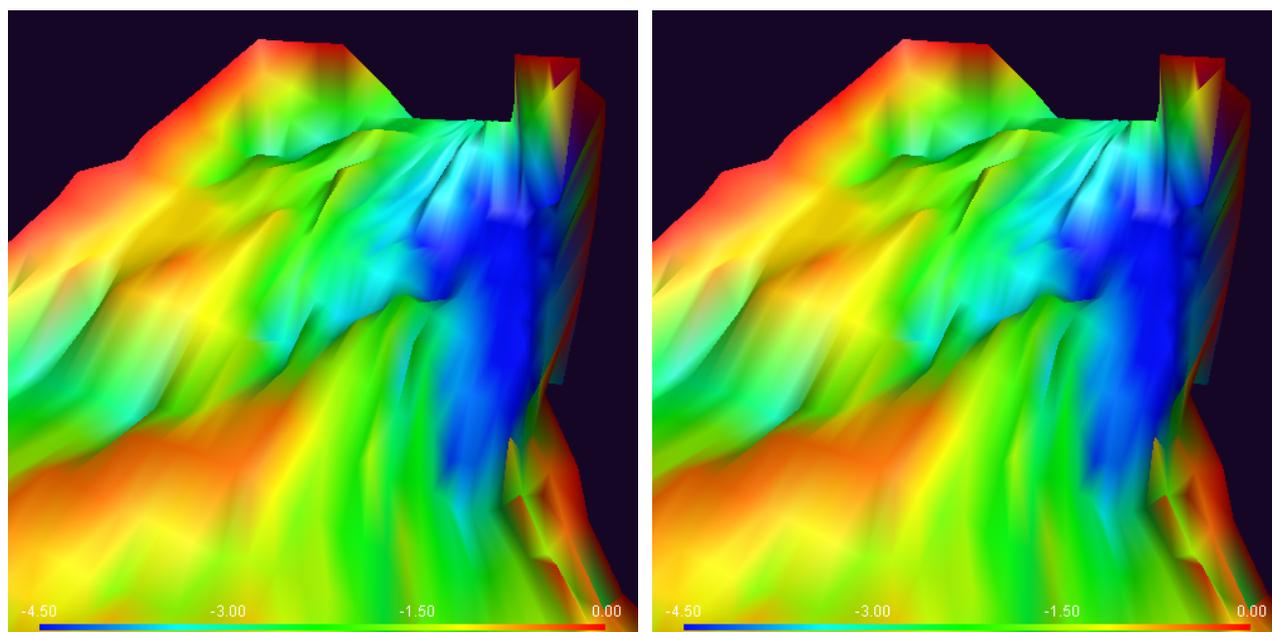


図 6.15: 2015 年 01 月から 06 月までの期間における堆積量

## 2015年01月から09月までの九ヶ月間の地形変化シミュレーション

2014年の水深データを基にして2015年01月から09月までの九ヶ月間の水位データを用いて数値シミュレーションを行った。図6.16の(a)は2014年の水深データを用いた更新前の地形である。図6.16の(b)は2015年01月から09月までの九ヶ月間の水位データを用いて更新した更新後の地形である。図6.17は、2015年01月から09月までの九ヶ月間の堆積量を示す。ここで、横軸は節点番号であり、縦軸は変化量([m])を表す。図6.18は、2015年01月から09月までの九ヶ月間の堆積量のカラー表示である。プラス方向は水深が浅くなったことを示し、マイナス方向は水深が深くなったことを示す。



(a) 更新前の地形

(b) 更新後の地形

図 6.16: 2015年01月から09月までの期間における地形変化

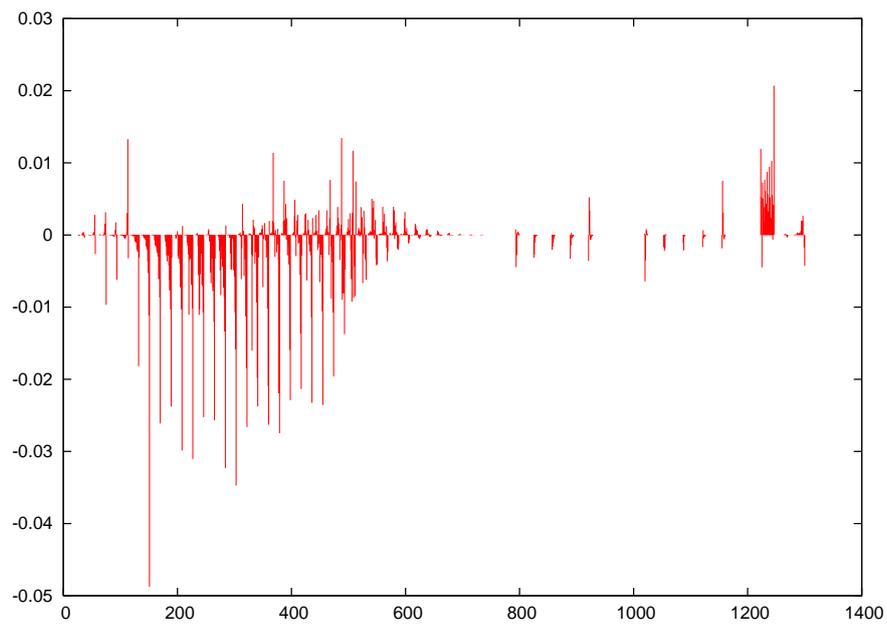


図 6.17: 2015 年 01 月から 09 月までの期間における堆積量

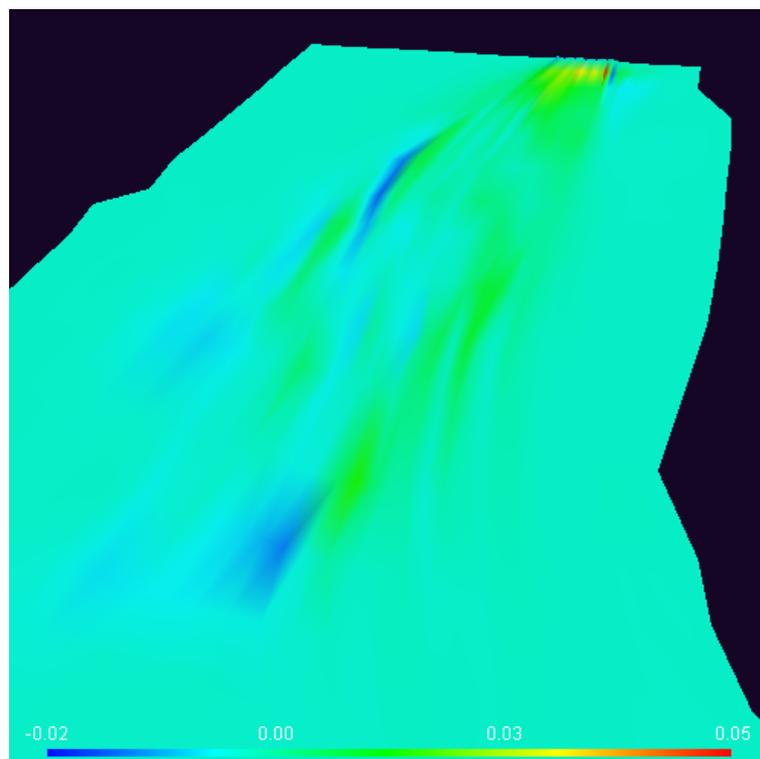
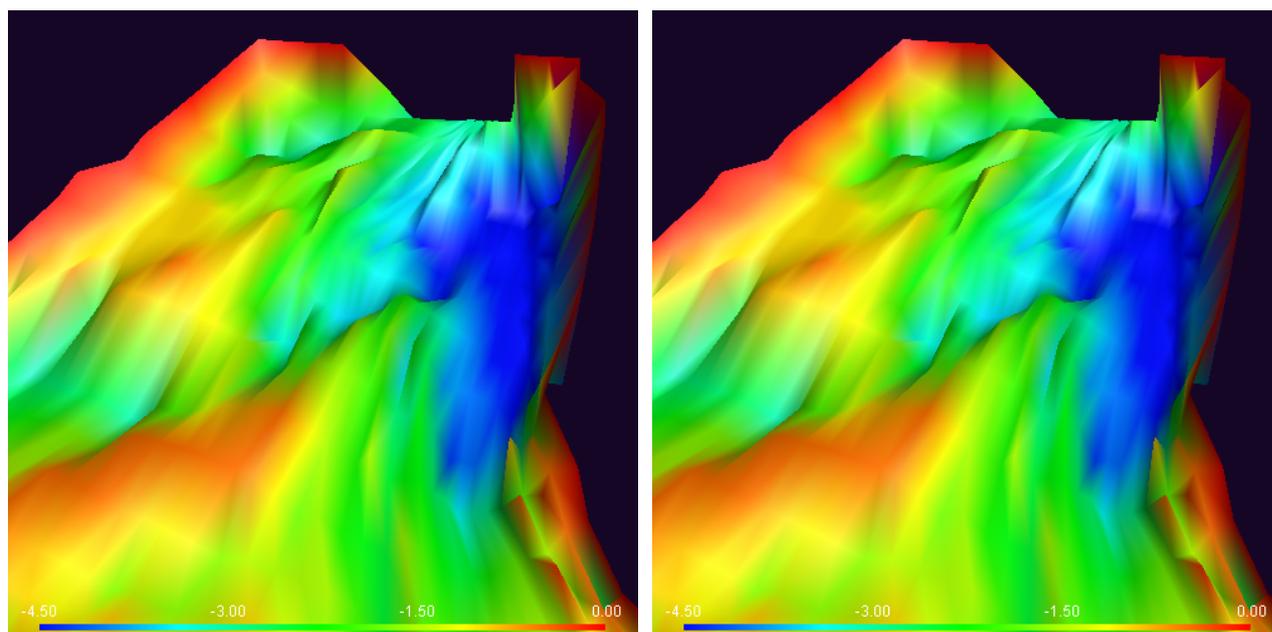


図 6.18: 2015 年 01 月から 09 月までの期間における堆積量

## 2015年01月から12月までの一年間の地形変化シミュレーション

2014年の水深データを基にして2015年01月から12月までの一年間の水位データを用いて数値シミュレーションを行った。図6.19の(a)は2014年の水深データを用いた更新前の地形である。図6.19の(b)は2015年01月から12月までの一年間の水位データを用いて更新した更新後の地形である。図6.20は、2015年01月から12月までの一年間の堆積量を表す。ここで、横軸は節点番号であり、縦軸は変化量([m])を表す。図6.21は、2015年01月から12月までの一年間の堆積量のカラー表示である。プラス方向は水深が浅くなったことを示し、マイナス方向は水深が深くなったことを示す。



(a) 更新前の地形

(b) 更新後の地形

図 6.19: 2015年01月から12月までの期間における地形変化

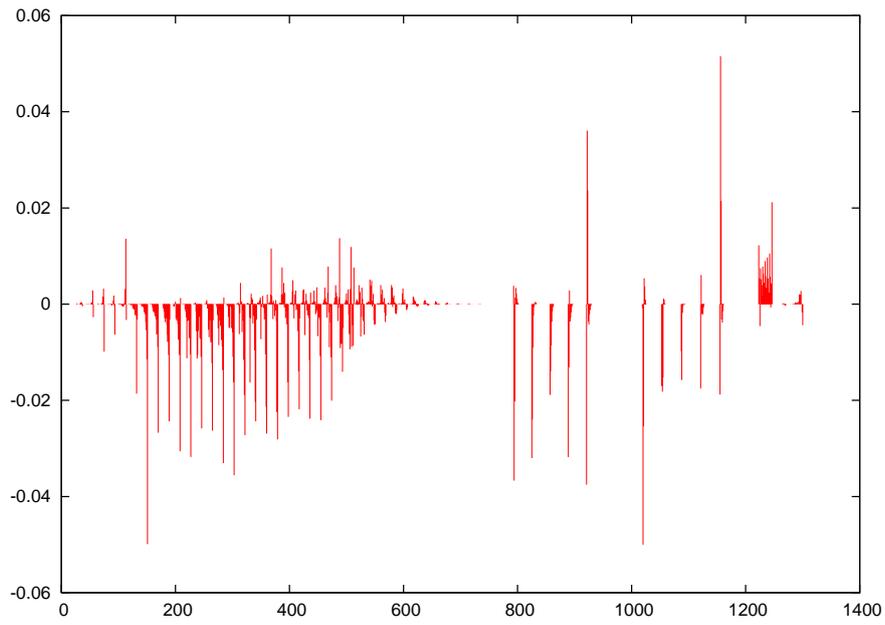


図 6.20: 2015 年 01 月から 12 月までの期間における堆積量

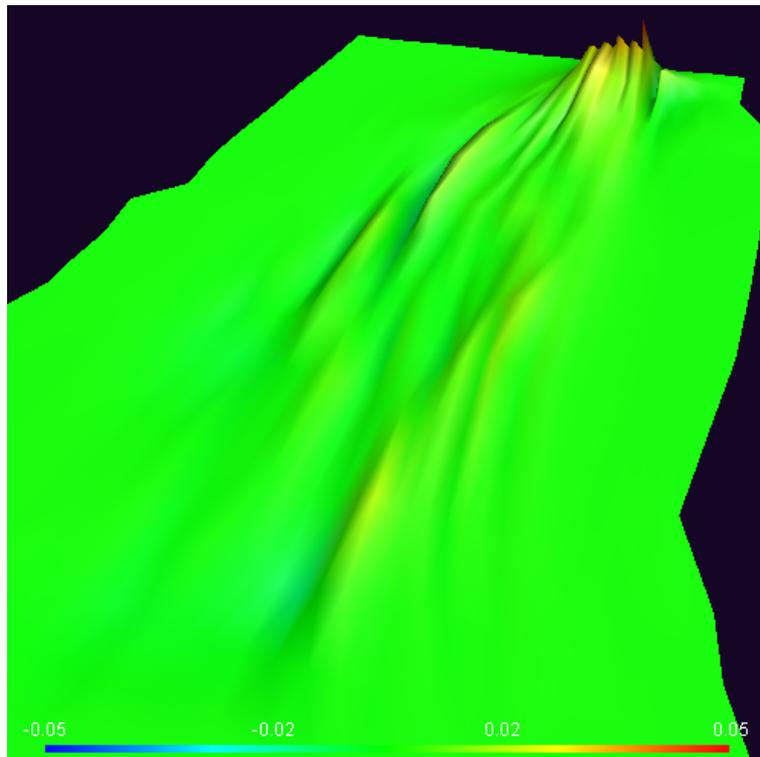


図 6.21: 2015 年 01 月から 12 月までの期間における堆積量

## 6.1 まとめ

本研究では、2015年1月から12月までの1年間の水位データを用いて、児島湖のゲートが開放した時の流れによって生じる水流の挙動及びそれに伴う地形変化を2次元河床変動モデルについて数値シミュレーションを行った。児島湖の水底地形の更新前と更新後の顕著な変化が見られ、特に、ゲート付近での大きな変化が見られた(6.21)。図6.22は2015年1月から12月までの1年間の水位データを用いて1日、1週間、2週間、3週間、1ヶ月、3ヶ月、6ヶ月、9ヶ月および1年間の数値シミュレーションによる水底地形の変化量を示す。ここで、横軸は時刻を示し、縦軸は変化量を示す。図から、2015年6月後の期間では顕著な地形変化が見られ、最大堆積量は約5[cm]である。これは、梅雨時期による堆積および堆積物の移動による地形変化と考えられる。年間の水底地形の変化傾向より、定期的な水底地形の計測が必要となる。

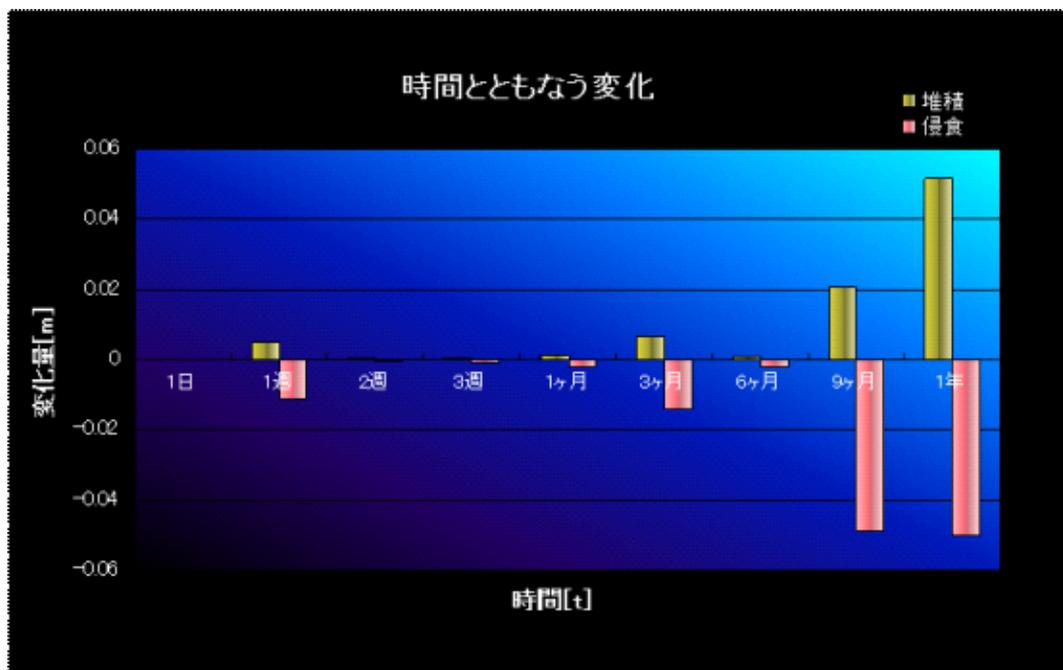


図 6.22: 水底地形の時間とともになう変化量

# 第7章 計測解析および数値シミュレーションによる水底地形変動についての考察

## 7.1 概要

本章では、児島湖の地形変動を計測予測方法と解析予測方法より予測し、その結果を比較する。計測解析法には、RTK-GPS から得られた測位データをガウス・クリューゲル投影法によって直交座標に変換し、音響測深機から得られた測深データと時刻データと同期して得られた三次元地形データを用いて地形を更新した。数値シミュレーション法には、河流による河川の侵食、堆積といった作用は、河床にある土砂が移動することによって引き起こされる地形変動を土砂輸送の支配方程式を用いて児島湖のゲートが開放した時の流れによって生じるゲート周辺の水流の挙動及びそれに伴う地形変化を解析した。

## 7.2 計測解析による水底地形データの変化について

ここでは、時間経過にともなう児島湖の水底地形データの変化についての考察のために2014年および2015年の計測データを基にして、2016年に計測した計測データを用いて水底地形を更新した。

### 7.2.1 ゲート付近の領域の要素分割

児島湖のゲート付近の計測点が多いところから4点を取り、それらを結んでできる四角形領域を三角形要素により要素割を行った。

まず、四角形の各辺等分して、長方形要素を作り、次に、その小長方形を2分割にして、三角形要素にする。分割で得られる2個の三角形ABDとBCDはその対角線を入れ換えてできる2個の三角形ABCとACDに比べてより正三角形に近い。すなわち、三角分割を行えられた節点に対して等角条件を満たすように三角形が生成されることになる(図7.1)。対角線の短い方を選んで分割を行った[18]。

図7.2はゲート付近の計測点の多いところから選んだ4点で定まる四角形領域を示す。緑の点は航跡であり、計測データは2016年6回計測データである。四角形領域と等角条件によるゲート付近領域の三角形要素分割を図7.3に示し、図7.4に三角形要素の節点分布を示す。

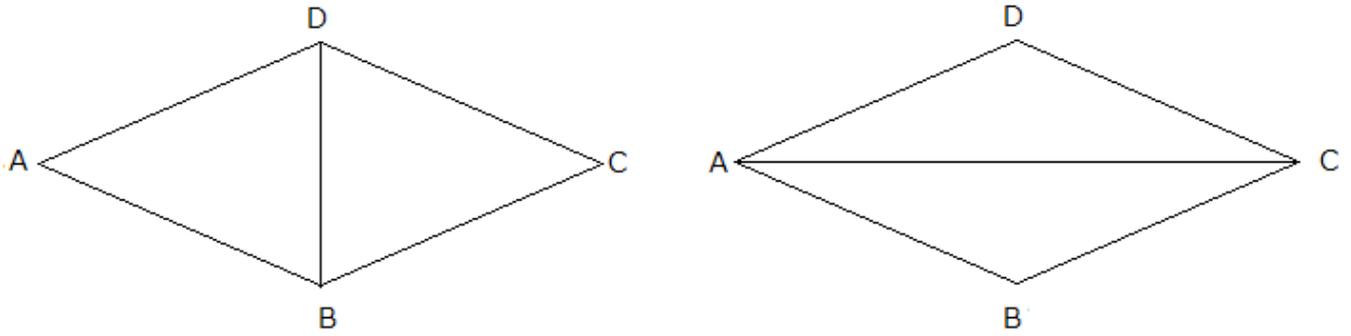


图 7.1: 等角条件

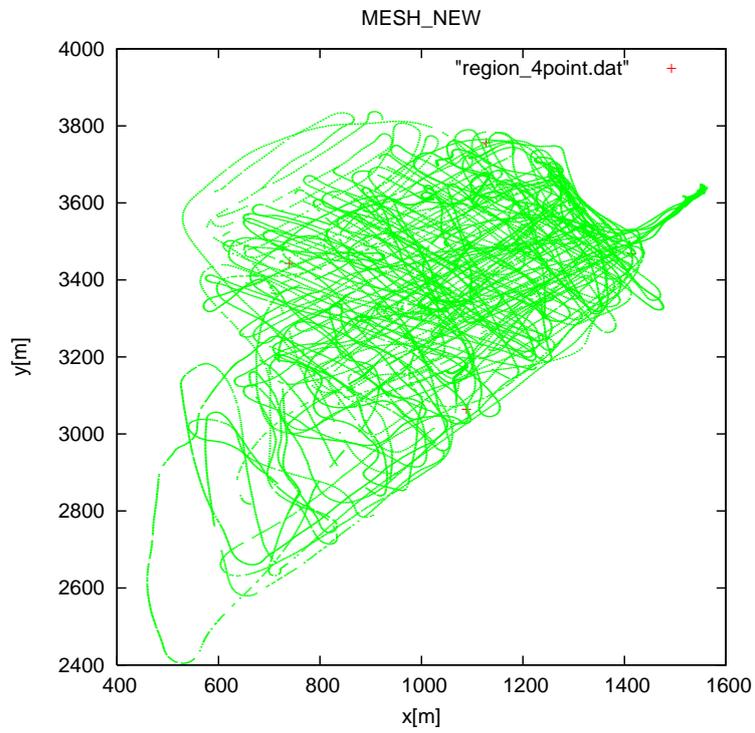


图 7.2: 分割对象领域

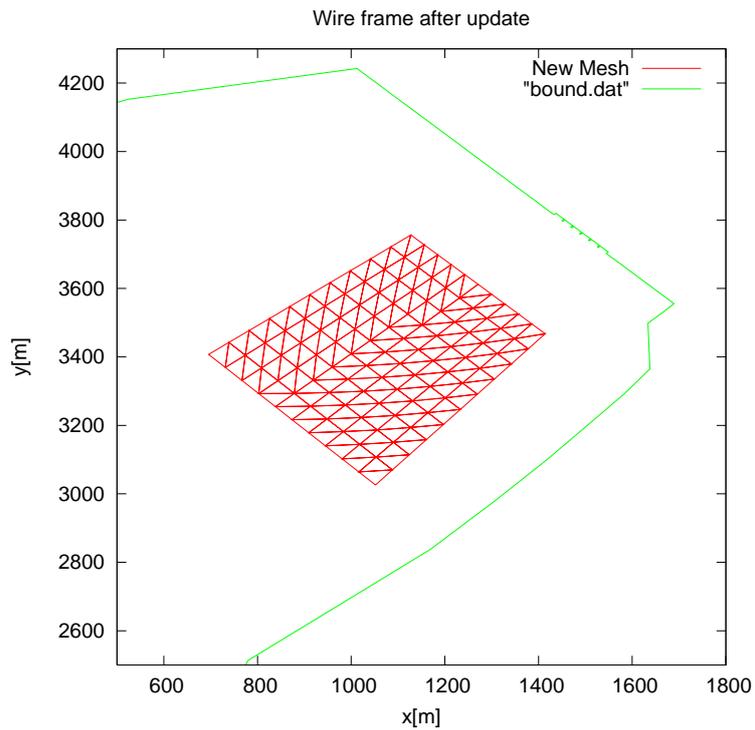


図 7.3: ゲート付近領域の三角形要素分割

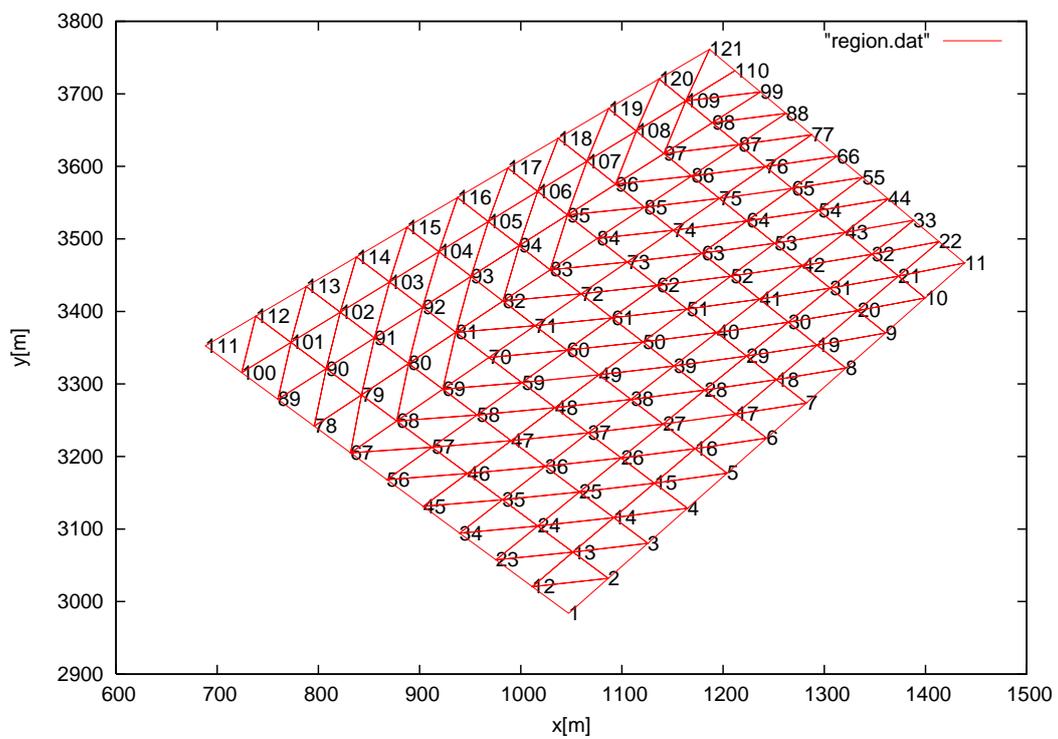
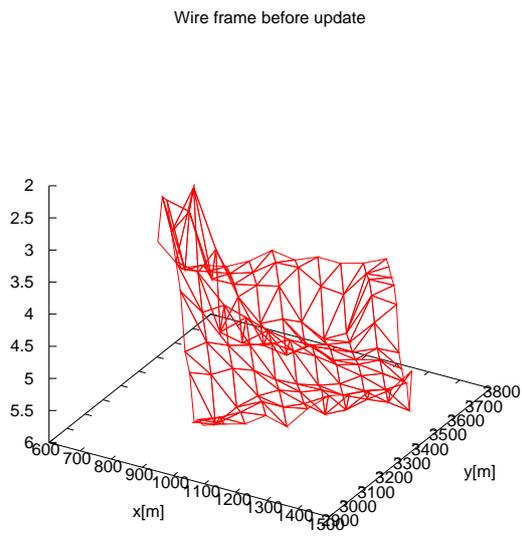


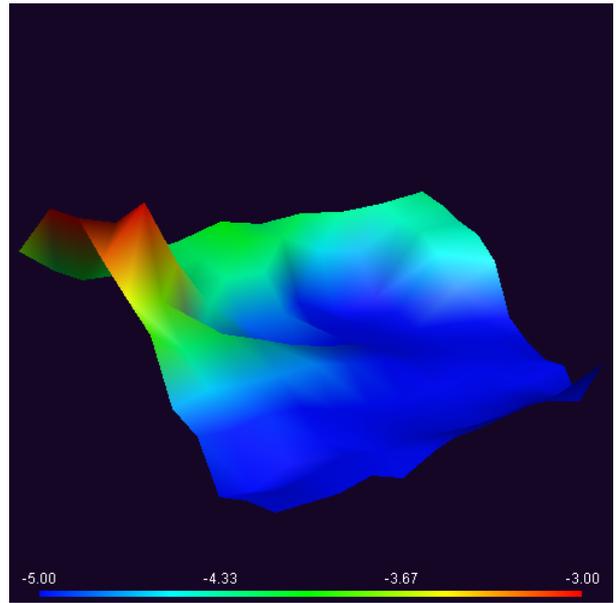
図 7.4: 三角形要素の節点分布

## 7.2.2 水底地形の更新

図7.5は2014年および2015年の計測データを用いた更新前の水底地形のメッシュ表示とカラー表示であり、図7.6は2014年および2015年の年計測データを基にして、2016年の6月3日、6月6日、6月20日、6月27日、7月4日、7月22日、11月17日、12月15日、12月19日、12月28日の10回の計測データを用いた更新後の水底地形のメッシュ表示とカラー表示である。図7.7は更新前後の水深差を示す。横軸は節点番号を示し、縦軸は水深変化を示す。図7.8は水底地形の変化量を示す。マイナス方向は水深の深くなったことを示し、プラス方向は水深の浅くなったことを示す。年間平均堆積量は0.0903 mである。

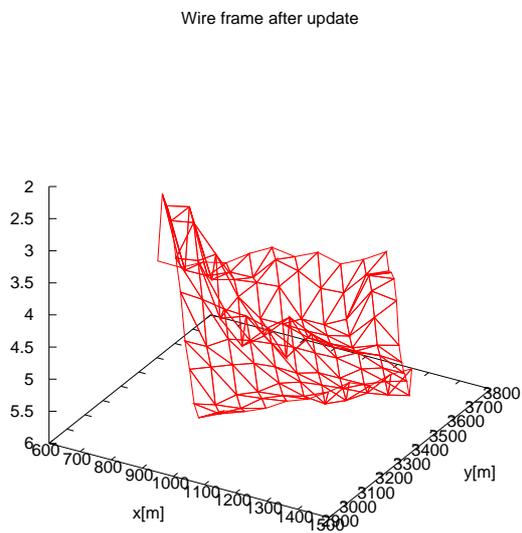


(a) メッシュ表示

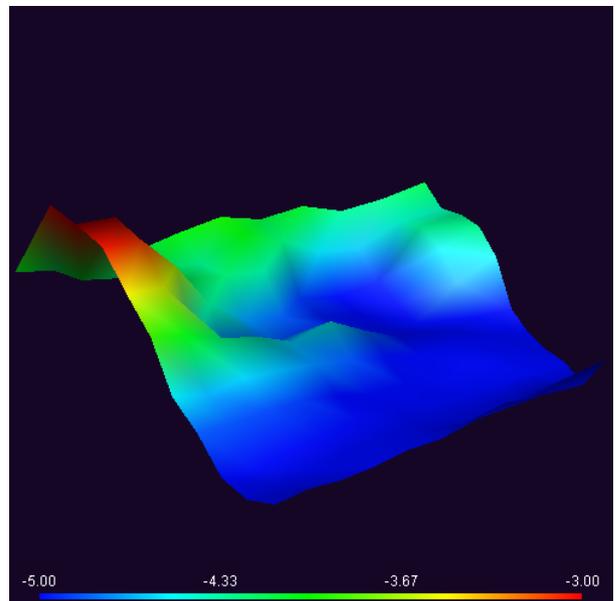


(b) カラー表示

図 7.5: 2014 年および 2015 年の計測データを用いた更新前の水底地形



(a) メッシュ表示



(b) カラー表示

図 7.6: 2014 年および 2015 の年計測データを基にして、2016 年の 6 月 3 日、6 月 6 日、6 月 20 日、6 月 27 日、7 月 4 日、7 月 22 日、11 月 17 日、12 月 15 日、12 月 19 日、12 月 28 日の 10 回の計測データを用いた更新後の水底地形

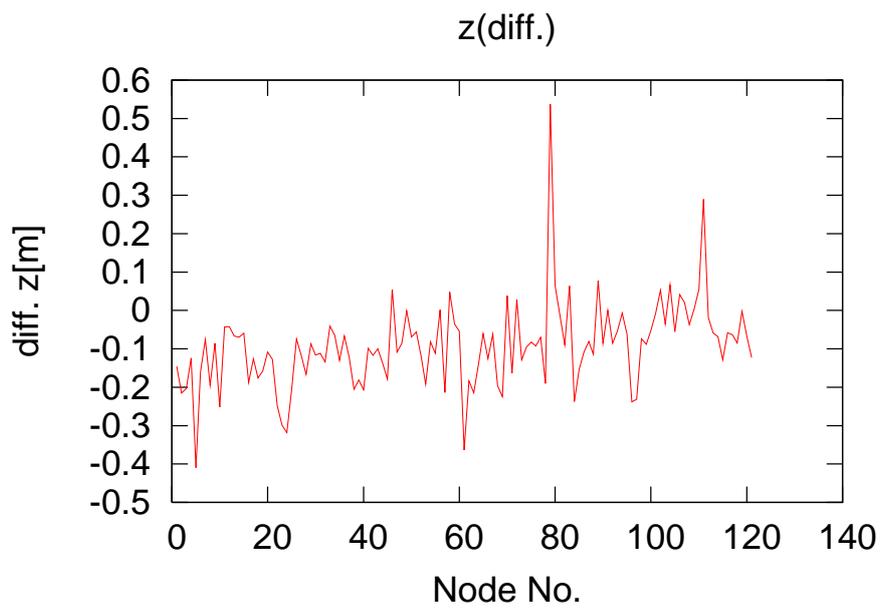


図 7.7: 2014 年および 2015 から 2016 年までの水深の変化

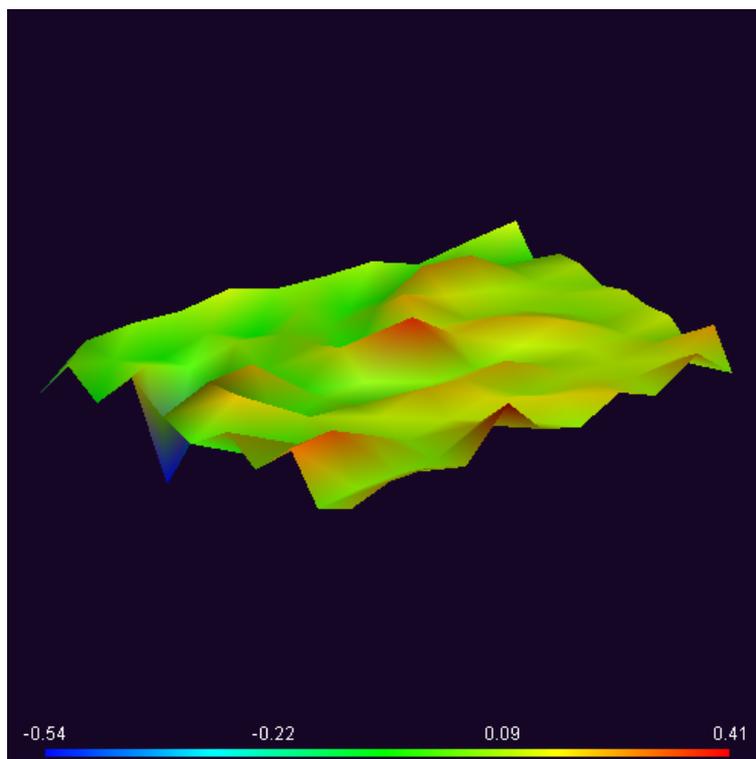
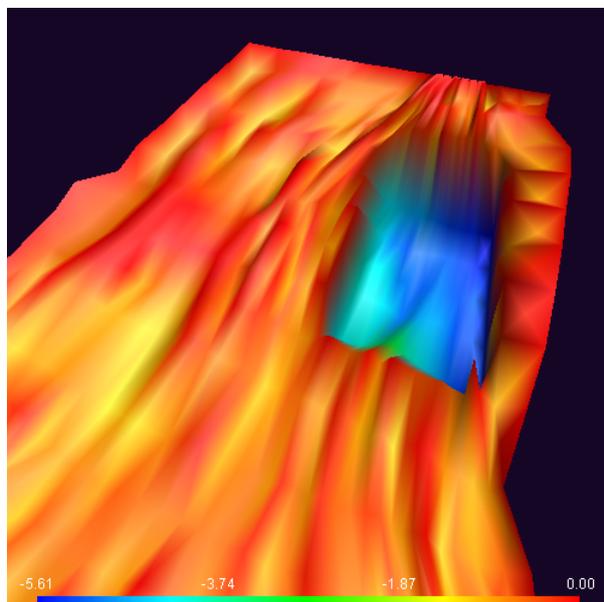


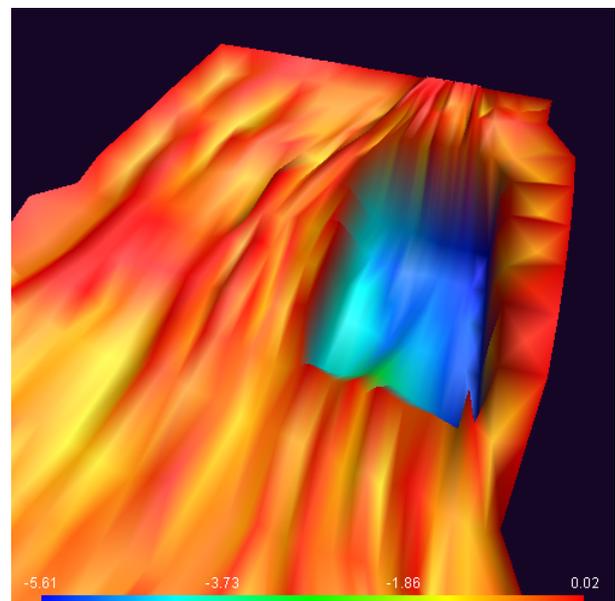
図 7.8: 2014 年および 2015 から 2016 年までの堆積量

### 7.3 数値シミュレーションによる水底地形データの変化について

ここでは，時間経過にともなう児島湖の水底地形データの変化についての考察するために，2014年および2015年の計測データを基にして，2016年1月から12月までの水位データを用いて地形データを更新した結果を示す。図7.9の(a)は2014年および2015年計測データを用いた更新前の水底地形を示し，図7.9の(b)は2014年および2015年の計測データを基にして，2016年1月から12月までの期間での水位データを用いた更新後の水底地形を示す。図7.10は2014年および2015年から2016年12月までの期間での堆積量を示す。マイナス方向は水深の深くなったことを示し，プラス方向は水深の浅くなったことを示す。図7.11は2014年および2015年から2016年12月までの期間での堆積量を示し，横軸は節点，縦軸は変化量を示す。



(a) 2014年および2015年計測データを用いた更新前の水底地形



(b) 2014年および2015年の計測データを基にして，2016年1月から12月までの期間での水位データを用いた更新後の水底地形

図 7.9: 2014年および2015年から2016年12月までの期間での水底地形

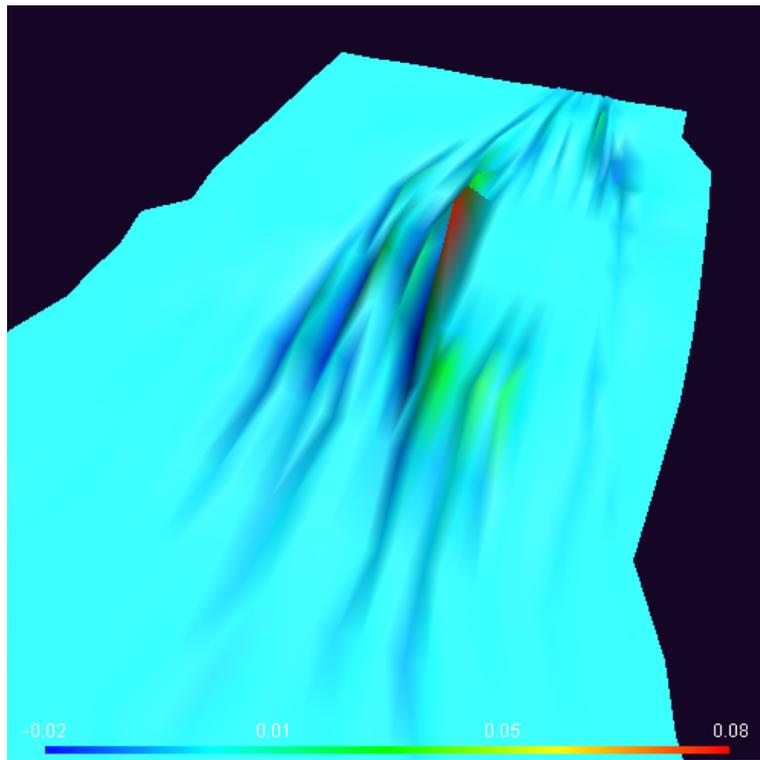


図 7.10: 2014 年および 2015 年から 2016 年 12 月までの期間での堆積量

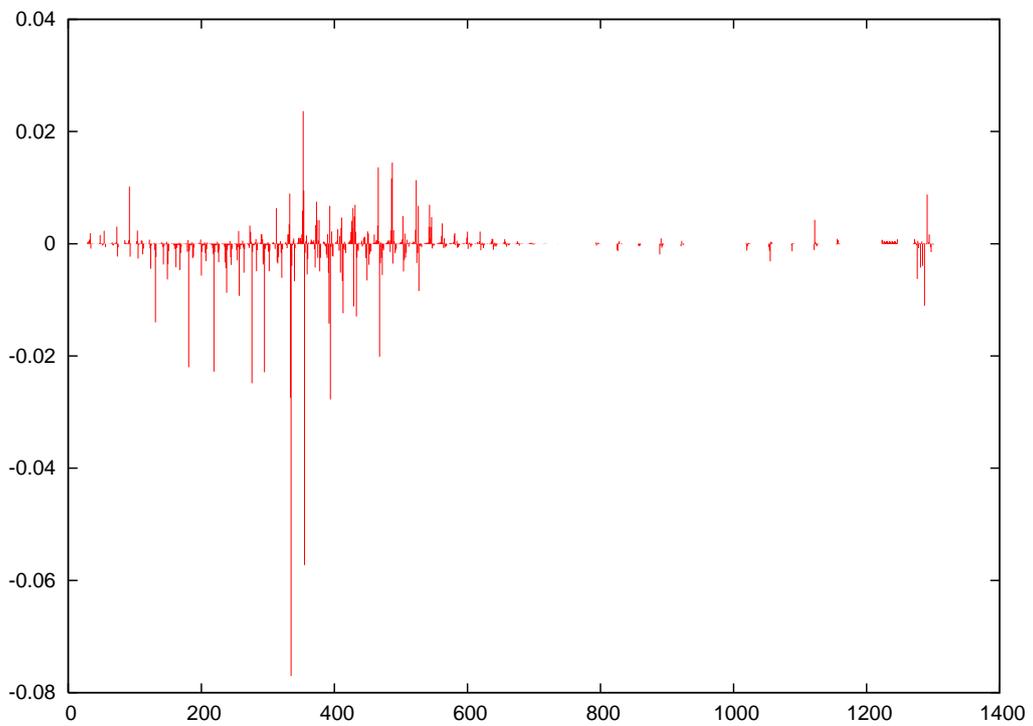


図 7.11: 2014 年および 2015 年から 2016 年 12 月までの期間での堆積量

## 7.4 計測解析と数値シミュレーションによる水底地形変化の比較

計測解析および数値シミュレーションによる児島湖でのある領域の水底地形変化を比較するために、比較対象領域を作成する。この領域を小領域とする(7.12)。数値シミュレーションに用いる地形データ中の比較対象とする領域の初期水深(地形データ)は、以下の方法で作成する。小領域の三角形要素ごとに、三つの節点から構成される平面の方程式を求める。児島湖全体の節点の $x$ ,  $y$ 座標が小領域のどの三角形要素に入るかを決定する。児島湖全体の節点の $x$ ,  $y$ が、小領域のどこかの三角形要素に入る場合は、該当する三角形要素を構成する節点から得られた平面の方程式から線形近似する(図7.12)。児島湖全体の要素分割の節点が、小領域のどこにも入らない場合は、水深データを変更しない。2014年および2015年の計測データを用いて小領域の地形データを更新する。この地形データをもとに、新たに計測した計測データによる更新した地形データと数値シミュレーションより得られた地形データと比較する。ここでは、計測解析法では7.2.2項の計測解析結果を用いた。数値シミュレーションでは7.3項の数値シミュレーション結果を用いた。

図7.12は2014年および2015年の計測データを基にして、2016年1月から12月までの水位データを用いた数値シミュレーションによる水底地形の更新後のメッシュを示し、赤メッシュは比較対象とするメッシュを示す。図7.13は計測解析と数値シミュレーションによる比較対象とする更新後のメッシュを示す。赤メッシュは2014年および2015年の計測データを基にして、2016年1月から12月までの水位データを用いた数値シミュレーションによる水底地形の更新後のメッシュを示し、緑メッシュは2014年および2015年の計測データを基にして、2016年の10回計測データを用いた計測解析による水底地形の更新後のメッシュを示す。ここで、比較容易のために、計測解析および数値シミュレーションによる児島湖ゲート付近での水底地形の更新後のメッシュの共通領域を比較する(図7.14, 図7.15)。図7.16は計測解析および数値シミュレーションによる児島湖の更新前後の水深変化を示す。赤線は数値シミュレーションによる更新前後の水深差を示し、緑線は計測解析による更新前後の水深差をそれぞれ示す。横軸は節点、縦軸は変化量を示す。図から計測解析および数値シミュレーションによる児島湖の水底地形変化の傾向が見られる。

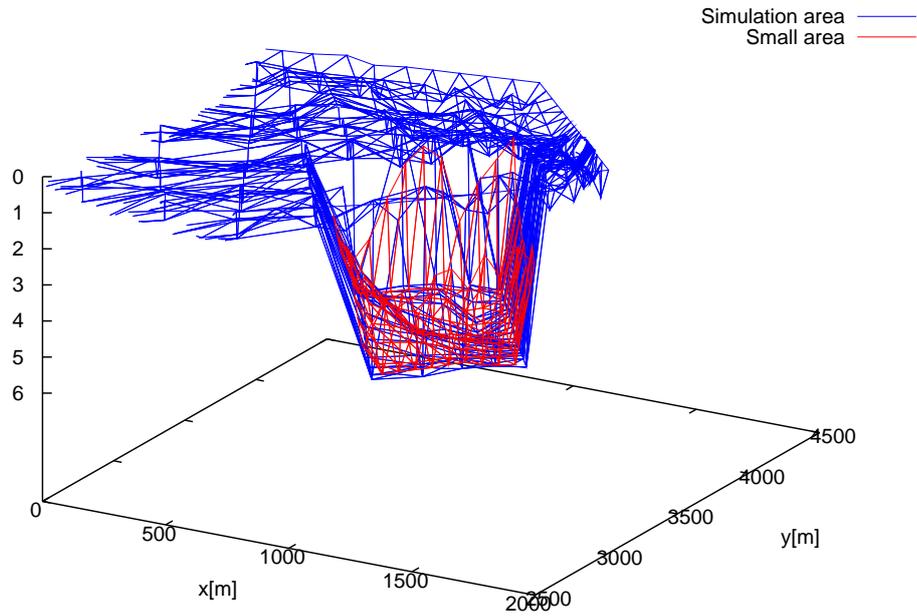


図 7.12: 2014 年および 2015 年の計測データを基にして, 2016 年 1 月から 12 月までの水位データを用いた数値シミュレーションによる水底地形の更新後のメッシュ

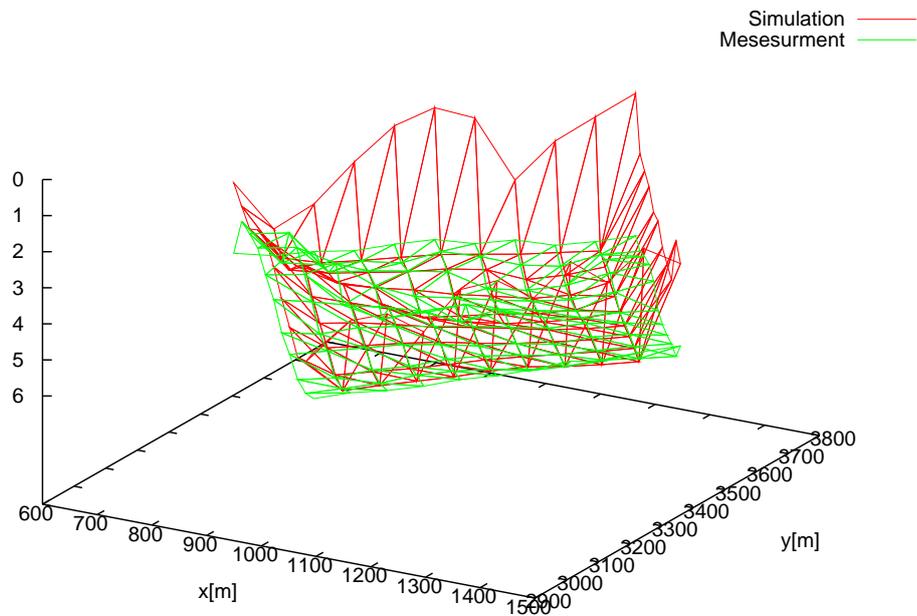


図 7.13: 計測解析と数値シミュレーションによる比較対象とする更新後のメッシュ

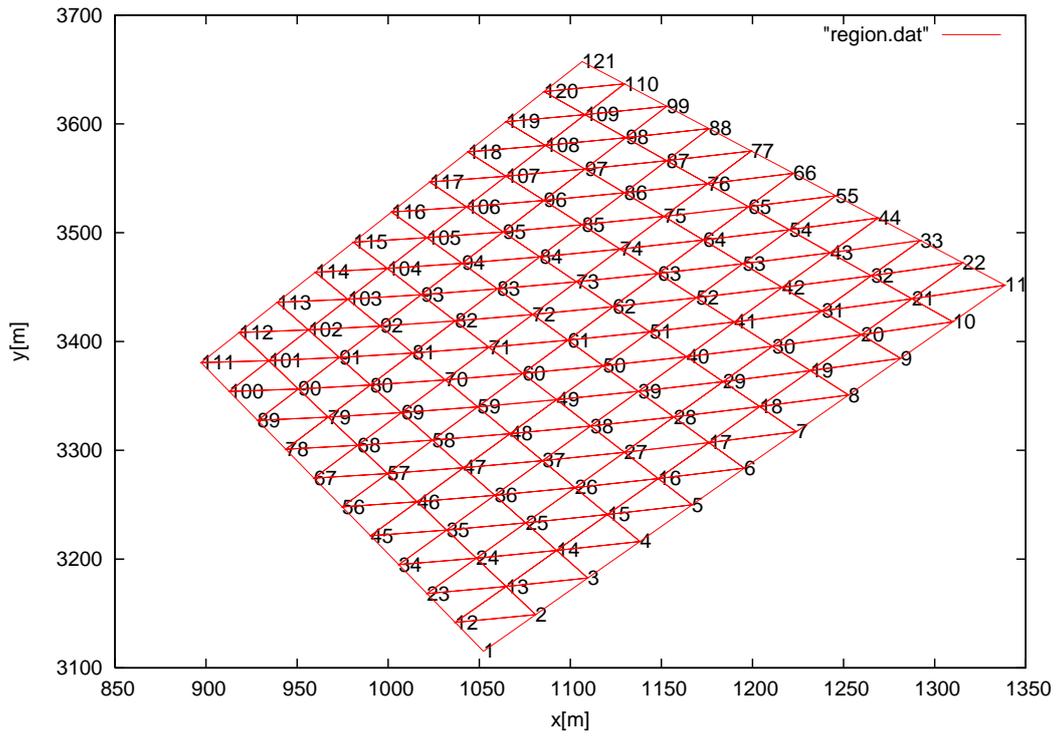


図 7.14: 三角形要素の節点分布

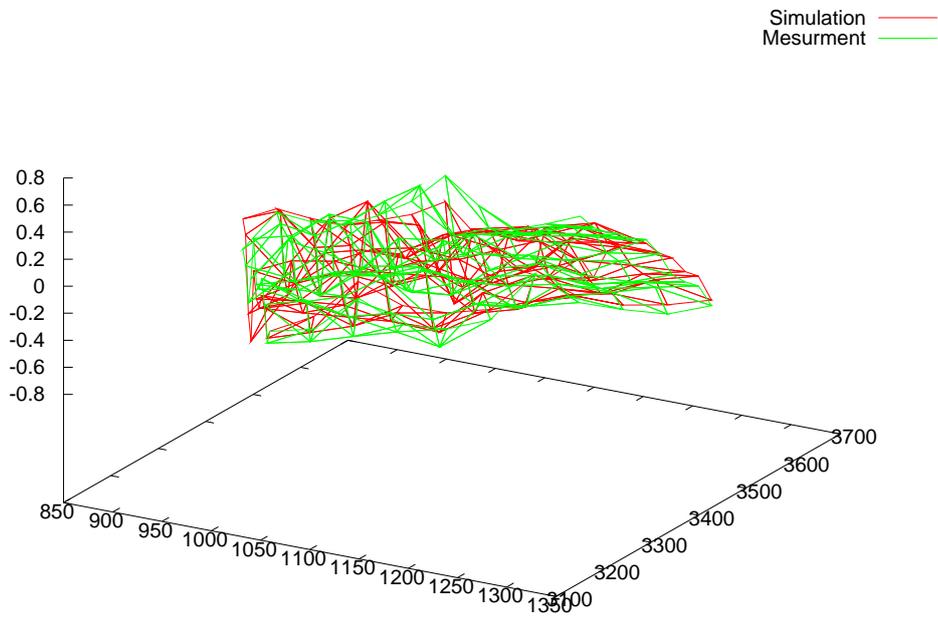


図 7.15: 2014 年および 2015 年から 2016 年 1 月から 12 月までの期間での水底地形の変化

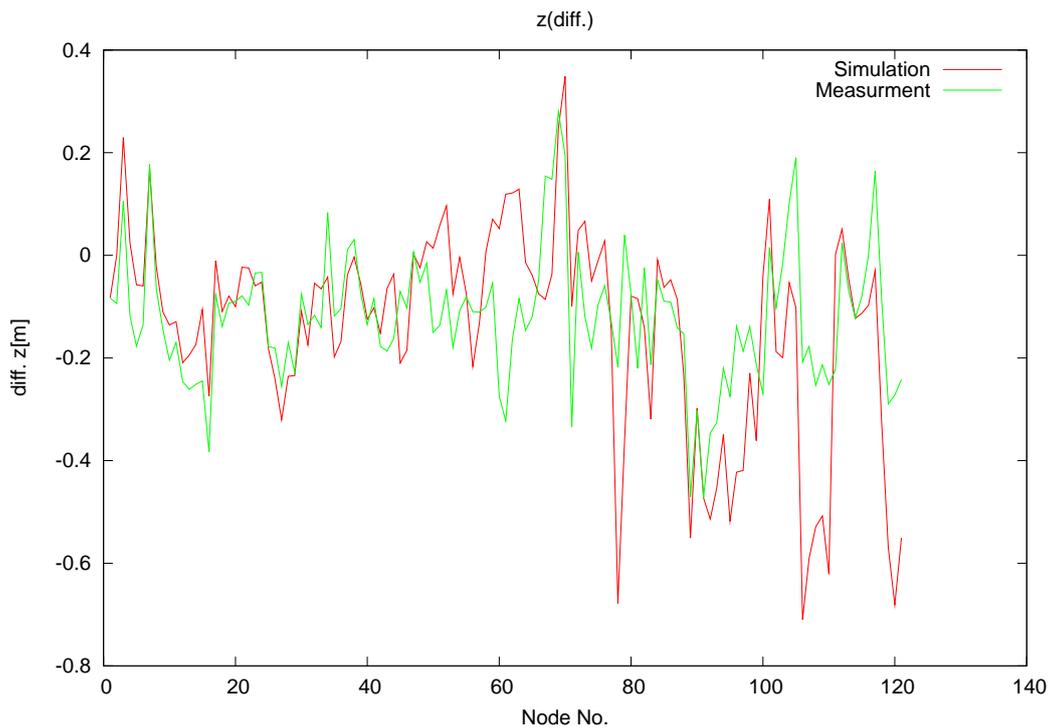


図 7.16: 2014 年および 2015 年から 2016 年 1 月から 12 月までの期間での水底地形の変化

## 7.5 まとめ

本研究では、ゲートからの排水により発生する流れに起因する児島湖の地形変化を解析するために、計測解析および数値シミュレーションを適用した。図 7.8 および図 7.10 よりゲート付近での顕著な水底地形データの変化が見られた。ゲート付近での滑らかに更新されてる様子が分かった。これらの堆積および堆積物の移動による水底地形データの変化は、定期的な水底地形情報が必要となることを示している。節点番号 1~40, 節点番号 70~90, 節点番号 100~120 までの計測解析および数値シミュレーションによる結果が同様な傾向を示している (図 7.16)。

## 第8章 結論

本研究では、閉鎖性水域の地形変動に対し計測解析と数値シミュレーションを適用した。また、数値シミュレーションの妥当性を比較するために計測結果と数値結果を比較した。計測解析には RTK-GPS から得られた測位データをガウス・クリューゲル投影法によって直交座標に変換し、音響測深機から得られた測深データと結合させることにより三次元地形データを作成し、地形の更新を行った。船体の傾きによる誤差を補正するために2軸傾斜計および電子コンパスから得られる補正情報もパソコン時刻とともに収録し、GPS および音響測深機から得られるデータとともに時刻で同期を取ることで、測位・測深データの補正を行った。計測解析を用いた2014年（児島湖全体領域平均堆積量4.5 cm）、2015年（児島湖全体領域平均堆積量4.9 cm）、2016年（児島湖全体領域平均堆積量3.6 cm）年の水底地形の更新結果より、児島湖ゲート付近での顕著な変化が見られた。2016年10回計測データを用いた計測解析では、児島湖ゲート付近での年間平均堆積量は9 cmであった。これは、定期的な地形の更新が必要であることを示している。

児島湖で発生する流れと地形変動のシミュレーションには、運動方程式と連続の方程式から導かれる偏微分方程式系を鉛直方向には複数のレベルに分割し、水平方向には三角形要素に分割された。また河床変動2次元連続方程式には最下層での流速が適用された。偏微分方程式系に有限要素メッシュ上での空間離散化を適用することにより各節点での解の値を未知変数とする常微分方程式系が導かれ、この常微分方程式系に4段のアダムス・バツシュフォース・ムルトン法 (PECE モード) を適用した [35]。また最初の3ステップにはルンゲ・クッタ法 (The Runge-Kutta method) を適用した。

数値シミュレーションに用いた2015年（年間堆積量は5 cm）、2016年（年間堆積量は8 cm）の水底地形の更新結果より、児島湖ゲート付近での大きな変化が見られた。また、比較対象となる小領域での、2016年10回計測データを用いた計測解析年間平均堆積量は12.2 cmであり、2016年1月から12月までの数値シミュレーション解析年間平均堆積量は12.9 cmであった。さらに、計測解析及び数値シミュレーションによる水底地形の更新結果を比較し、数値シミュレーションによる解析結果が妥当なものであることを検証した。

## 第9章 今後の課題と展望

地形データの更新から得られた成果を用いて、定期的測位-測深を実施し、時間経過による湖底地形変化を把握し、適切な浚渫の実施計画を立案することで、国と自治体の予算報行の効率化に貢献できると考える。または、地形変動の計算では、有限要素メッシュを改良し、地形変動に影響する多様な条件を考慮し、精度良い地形データ予測することも今後の課題と展望である。

# 謝辞

本研究を遂行するにあたり，終始適切な助言を賜り，また丁寧に指導して下さった岡山大学大学院環境生命科学研究科 渡辺雅二教授に感謝します。計測の実施及び分析にあたり，同じ研究室の山本和弘さん，青香さんに心より感謝いたします。

児島湾締切堤防事務所，岡山県備前県民局および岡山大学工学部創造工学センター工作センター部門の方々にご協力をいただきました。児島湖の地形情報は，©株式会社昭文社デジタルソリューション（旧日本コンピュータグラフィック株式会社）および©株式会社昭文社の地図を参考にしたものを用いました。本研究は，一部財団法人ウエスコ学術振興財団により支援を受けました。

## 参考文献

- [1] 渡辺 雅二, 山本 和弘, 何 イブン, 陳 ナリソ, 補正をともなう RTK - GPS 測位と超音波測深に基づく水域の水底地形に関する考察, 日本流体力学会, 2012
- [2] 西原主計, 山藤和男, 松田康広共著, 「計測システム工学の基礎 [第3版]」, 森北出版株式会社, 2012
- [3] B. ホフマン-ウェレンホフ, H. リヒテネガー, J. コリンズ 著, 西修二郎 訳, 「GPS 理論と応用」, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005
- [4] 坂井丈泰 著, 「GPS 技術入門」, 東京電機大学出版局, 2003
- [5] 佐田達典 著「GPS 測量技術」オーム社, 2003
- [6] 田口一夫, 田畑雅洋 共著, 海洋計測工学概論 (改訂版), 成山堂書店, 2005
- [7] 飯島幸人, 林 尚吾 共著, 航海技術シリーズ第2巻 航海計測, 成山堂書店, 1986
- [8] 米澤弓雄 著, 航海計器シリーズ1 基礎航海計器 (改訂版), 成山堂書店, 1995
- [9] 元吉誠三 監修, 小山健夫, 藤野正隆, 前田久明 著, 改訂版 船体と海洋構造物の運動, 成山堂書店, 1997
- [10] 「平面直角座標への換算 Web サイト (国土地理院)」  
<http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/bl2xyf.html>
- [11] 財団法人 日本地図センター, 編集・発行「新版 地図と測量の Q&A」, 2005
- [12] 原田健久 著, 「測量計算法 行列最小二乗法から網平均まで」, 鹿島出版会, 2004
- [13] 土屋淳, 辻宏道 著, 「新・GPS 測量の基礎」, 日本測量協会, 2002
- [14] 岡田 清 監修, 森 忠次 編者, 岡本 厚, 小泉俊夫, 星 仰, 細野武庸 著, 「ニューパラダイムテキストブック 測量学」, 山海堂, 2001
- [15] 大野重保 著, 「測地学の方法」, 東洋書店, 1987
- [16] ITS 情報通信システム推進会議 著, 「図解 これでわかった GPS [第2版] ユビキタス情報通信時代の位置情報」, 森北出版株式会社, 2005
- [17] 飯村友三郎, 中根勝見, 箱岩英一著, 「公共測量教程 TS・GPS による基準点測量 [改訂版]」, 東洋書店, 2005

- [18] 谷口健男 著,「FEMのための要素自働分割」, 森北出版株式会社, 2006
- [19] Kojima Lake Handbook, Okayama Prefecture, March, 2015, in Japanese. [http://www.pref.okayama.jp/uploaded/life/338830\\_1628724\\_misc.pdf](http://www.pref.okayama.jp/uploaded/life/338830_1628724_misc.pdf)
- [20] 国土交通省国土地理院, ネットワーク型RTK-GPSを利用する公共測量作業マニュアル(案), 平成17年6月
- [21] 多摩川精密機械株式会社 編, 坂本修, 新井昭文, 山崎喜一郎, 熊谷秀夫, 塩沢龍雄, 三村道彦, 古田美直 共著, ジャイロ活用技術入門-その原理・機能・応用のポイントを詳述-, 工業調査会, 2002(2006)
- [22] 皆本 晃弥 著,「C言語による数値計算入門」株式会社サイエンス, 2005
- [23] 二之 宮弘, 大西 和榮 著,「パソコンによる水環境流れ解析」朝倉書店
- [24] Society of fluid mechanics numerical, Study committee for finite element method, Japan, The flow simulation by finite element method, Springer-Verlag Tokyo, JAPAN, 1998.
- [25] Sawaraki Toru, Li Zongfan, Proceedings of the Japanese conference on Coastal Engineering. Vol. 31 (1984) P 411-415. <http://doi.org/10.2208/proce1970.31.411>
- [26] Narisu Chen, Kazuhiro Yamamoto, Yuki Katayama, Masaji Watanabe, Numerical simulation of flow generated in a closed water areas AIP Conference Proceedings 1707, 050004 (2016); doi: 10.1063/1.4940836, Proceedings of The 7th SEAMS UGM International Conference on Mathematics and Its Applications 2015.
- [27] Narisu Chen, Qing Xiang, Kazuhiro Yamamoto, Masaji Watanabe, Study on change of topography in closed water area with positioning data and depth data, Submitted to TelsaTech 2016.
- [28] Narisu Chen, Kazuhiro Yamamoto, Masaji Watanabe, Numerical study on change of bottom topography data in a Closed Water Area, Submitted to CMEE 2016.
- [29] Narisu Chen, Experimental and analytical study on bottom topographical data in closed water area, Master's thesis, Graduate School of Environmental and Life Science Okayama University, 2014.
- [30] 日本数値流体力学有限要素法研究委員会 編,「有限要素法による流れのシミュレーション」, 森北出版株式会社, 1998年11月9日。
- [31] Jan J. Leendertse, Richard C. Alexander, Shiao-Kung Liu, A three-dimensional model for estuaries and costal seas: Volume I, Principles of computation, R-1417-OWRR, December 1973.

- [32] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The Finite Element Method, Volume 3, Fluid Dynamics, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000 (First published in 1967 by McGraw-Hill).
- [33] R. G. Dean and R. A. Dalrymple, Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists, Advanced Series on Ocean Engineering - Volume 2, World Scientific, Singapore, 1991.
- [34] John Noye, Robert L. May and Michael D. Teubner, Three-Dimensional Numerical Model of Tides in Spencer Gulf, Ocean Management, 6 (1981) 137-147 Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam Printed in The Netherlands.
- [35] J. D. Lambert, Computational Method in Ordinary Differential Equations, JOHN WILEY & SONS, CHICHESTER, 1973.
- [36] Masataka Yamaguchi and Yo-ichi Nishioka, NUMERICAL SIMULATION ON THE CHANGE OF BOTTOM TOPOGRAPHY BY THE PRESENCE OF COASTAL STRUCTURES
- [37] Jan J. Leendertse, Shiao-Kung Liu, A three-dimensional model for estuaries and costal seas: Volume II, Aspects of computation, R-1764-OWRT, June 1975.
- [38] Masaji Watanabe, Ying Liu and Ming Jun Wang, Computational Analysis of Currents Generated in Kojima Lake Based on Updated Topographical Data. 岡山大学環境理工学部研究報告, 第10巻, (平成17年2月)
- [39] 岩佐義朗 編著,「湖沼工学」, 山海堂株式会社, 平成2年3月31日。
- [40] 玉井信行 著,「密度流の水理」, 情報堂出版, 1980年3月10日。
- [41] 泉正寿 国際航業株式会社 正会員, 泉宮尊司 新潟大学 正会員, 浮遊砂の移流拡散を考慮した海岸構造物周辺の地形変化予測に関する研究, 海洋開発論文集, 第24巻, 2008年7月。