Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro

Ceneida Fernández
Pere Ivars
Universidad de Alicante

El pensamiento relacional implica considerar las expresiones aritméticas y ecuaciones en su totalidad, y utilizar las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas para relacionar o transformar las expresiones aritméticas. En este trabajo, describimos algunas características de las actividades que pueden ayudar a crear oportunidades en las aulas de educación primaria para desarrollar el pensamiento relacional y el papel del maestro para generar dichas oportunidades.

PALABRAS CLAVE
- DISEÑO DE ACTIVIDADES
- PENSAMIENTO RELACIONAL
- TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA
- EDUCACIÓN PRIMARIA

La aritmética a veces suele identificarse con procedimientos sin enfatizar las operaciones y sus propiedades. Por ejemplo, una actividad representativa en aritmética puede ser:

Completar la siguiente expresión:

43 + 7 = ____ + 15

Algunas posibles respuestas de estudiantes de educación primaria a esta actividad son:

Alumno 1

43 + 7 = 50

Alumno 2

Primero hago la operación 43 + 7 = 50. Después le resto 15: 50 – 15 = 35

Alumno 3

Como sé que 15 son 8 más que 7, entonces el número que me falta tiene que ser 8 menos que 43; por tanto, 35.

Cada respuesta refleja características diferentes. El alumno 1 no ve el signo igual como equivalencia (lo que hay a la izquierda del signo igual tiene que ser igual a lo que hay a la derecha) sino como el resultado de una operación (refleja una visión operacional del signo igual). El alumno 2 resuelve la expresión numérica paso a paso. En primer lugar, realiza las operaciones de la izquierda de la igualdad y luego decide qué operación realizar para saber lo que le falta a la derecha de la igualdad. El alumno 3 identifica relaciones entre ambas partes de la igualdad y utiliza la propiedad de las operaciones aritméticas de compensar los sumandos en una suma para que no varíe el resultado. En el cuadro 1 se observan las características de la respuesta del alumno 3.

La aritmética suele identificarse con procedimientos sin enfatizar las operaciones y sus propiedades

La respuesta del alumno 3 muestra características de una manera particular de pensar viendo las expresiones numéricas en su totalidad y estableciendo relaciones entre los números, las operaciones y sus propiedades.

Respuesta a la actividad	Posibles expresiones para representar el pensamiento de los niños	Propiedades de los números y operaciones que están en la base del pensamiento de los niños
Como sé que 15 son 8 más que 7,	15 = 8 + 7	Análisis aritmético del número (descomposición del número)
entonces el número que me falta tiene que ser 8 menos que 43, por tanto 35.	43 + 7 = (43 – 8) + (7 + 8)	Propiedad de compensa los sumandos en una suma: $a + b = (a + k) + (b + k)$

Cuadro 1. Características de la respuesta del alumno 3 a la actividad 43 + 7 = ____ + 15

CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO RELACIONAL

El pensamiento relacional implica tener una visión relacional del signo igual (lo que implica comprenderlo como un signo que indica un equilibrio entre la parte derecha e izquierda) y centrarse en las relaciones entre las operaciones aritméticas y sus propiedades fundamentales, en lugar de únicamente en el cálculo. El uso del pensamiento relacional implica considerar las expresiones aritméticas y ecuaciones en su totalidad y no como procedimientos que han de realizarse paso a paso, usar las propiedades fundamentales de las operaciones para relacionar o transformar cantidades y expresiones, y recomponer números y expresiones (Carpenter, Foef y Levi, 2003). Esta caracterización del pensamiento relacional en educación primaria conlleva desafíos para los maestros al tener que pensar en cómo generar oportunidades para que los estudiantes se impliquen en su desarrollo cuando aprenden aritmética.

Por ejemplo, veamos la siguiente actividad:

Di si es verdadera o falsa la siguiente expresión:

$$38 + 27 = 27 + 38$$

El pensamiento relacional implica tener una visión relacional del signo igual, entendido como equilibrio

El uso de la propiedad conmutativa de la suma ($a + b = b + a$) permite decir que la expresión es verdadera, sin necesidad de realizar ningún cálculo.

Veamos otra actividad:

Completa la siguiente expresión:

$$759 + 468 = \_\_\_ + 464$$

La consideración de la expresión aritmética en su totalidad y el uso de la propiedad que compensa los sumandos en una suma ($a + b = (a + k) + (b - k)$) permite comparar 468 y 464 e indicar que la parte derecha del signo igual tiene 4 menos, entonces para que se dé la igualdad hay que compensar con 4 más el sumando que falta, por tanto, el resultado es 759 + 4 = 763 (véase cuadro 2).

Respuesta	Posibles expresiones para representar el pensamiento de los niños	Propiedades de los números y operaciones que están en la base del pensamiento de los niños
Como 464 son 4 menos que 468,	468 = 464 + 4	Comparación de 464 y 468 (descomposición del número).
entonces el número son 4 unidades más que 759, es decir 763.	759 + 468 = (759 + 4) + (468 – 4)	Propiedad de compensa los sumandos en una suma: ($a + b = (a + k) + (b - k)$).

Cuadro 2. Respuesta que muestra características del pensamiento relacional en la actividad 759 + 468 = ___ + 464

EL PAPEL DEL MAESTRO

Los maestros juegan un papel fundamental en apoyar el desarrollo del pensamiento relacional, por ejemplo, centrando las discusiones sobre:

- La comprensión de la conducta de las operaciones.
- La generalización y la justificación de las relaciones estructurales identificadas.
- El uso de la notación con sentido.

Por eso es necesario que cuestionen a los estudiantes para que establezcan la conexión entre su respuesta, las expresiones que representan su pensamiento y las relaciones entre las operaciones aritméticas y sus propiedades (tal y como está reflejado en los cuadros 2 y 3).

Por ejemplo, la resolución de la expresión aritmética anterior (cuadro 2) permite crear oportunidades para discutir con los estudiantes si este tipo de relaciones es generalizable y si es verdad para otras operaciones. La discusión puede centrarse en determinar qué relaciones es posible establecer para el caso de una resta y, por tanto, discutir casos particulares en los que se pueda usar la propiedad $(a + k) - (b + k) = a - b$; $(a - k) - (b - k) = a - b$. Por ejemplo, veamos la siguiente actividad:

Indica (sin realizar los cálculos) si es verdadera o falsa la siguiente expresión:

$$52 - 17 = 46 - 11$$

En el cuadro 3 se observa la respuesta.

Estas actividades pueden completarse con actividades en las que hay que generar diferentes soluciones para que se cumpla la igualdad (Mason, Stephens y Watson, 2009), como la siguiente:

Escribe tres posibilidades diferentes para que se cumpla la igualdad:

$$398 + \_\_\_\_\_ = 405 + \_\_\_\_\_$$

Esta actividad permite plantear la discusión con los estudiantes sobre la equivalencia entre las diferentes respuestas y el uso de relaciones estructurales: para que la igualdad en una ecuación aritmética de una suma no cambie, hay que sumar (restar) la misma cantidad a las dos partes de la igualdad (véase cuadro 4, en la página siguiente).

También con la resolución de ecuaciones aritméticas. Por ejemplo, en la siguiente actividad:

Encontrar n, en la ecuación $55 - 27 = 48 - n$

En esta actividad, la visión estructural de la ecuación aritmética, junto con el uso de la propiedad $(a - k) - (b - k) = a - b$, permite resolverla (véase cuadro 5, en la página siguiente).

Respuesta	Posibles expresiones para representar el pensamiento de los niños	Propiedades de los números y operaciones que están en la base del pensamiento de los niños
Sí que es verdadera porque 46 son menos que 52 y 11 son 6 menos que 17.	$52 - 17 = (52 - 6) - (17 - 6)$	Propiedad que compensa los términos en una resta: $a - b = (a - k) - (b - k)$

Cuadro 3. Respuesta que muestra características del pensamiento relacional en la actividad $52 - 17 = 46 - 11$

Respuesta	Posibles expresiones para representar el pensamiento de los niños	Propiedades de los números y operaciones que están en la base del pensamiento de los niños
Como 405 son 7 más que 398, entonces el término que falta de la derecha tendrá siempre 7 unidades menos que el que ponga a la izquierda: 398 + **8** = 405 + **1** 398 + **9** = 405 + **2**	$405 = 398 + 7$ $398 + b = (398 + 7) + (b - 7)$ $398 + (b + k) = (398 + 7) + (b - 7 + k)$	Propiedad que compensa los sumandos en una suma: $a + b = (a + k) + (b - k)$ y propiedad: una igualdad no cambia si se suma la misma cantidad a las dos partes de la igualdad: $a + b = c + d$ $a + (b + k) = (c + k) + d$

Cuadro 4. Respuesta que muestra características del pensamiento relacional en la actividad 398 + _____ = 405 + _____

Respuesta	Posibles expresiones para representar el pensamiento de los niños	Propiedades de los números y operaciones que están en la base del pensamiento de los niños
Si 48 son 7 menos que 55, entonces n es 7 menos que 27, por tanto, vale 20.	$55 - 7 = 48$ $55 - 27 = (55 - 7) - (27 - 7)$	Propiedad que compensa los términos en una resta: $a - b = (a - k) - (b - k)$

Cuadro 5. Respuesta que muestra características del pensamiento relacional en la actividad $55 - 27 = 48 - n$

De la misma forma, en la actividad siguiente se puede utilizar una aproximación estructural y la propiedad $(a + k) - (b + k) = a - b$ de la sustracción para su resolución:

Encontrar n, en la ecuación $27 - 9 = n - 11$ (véase cuadro 6).

El cuadro 7 muestra algunas actividades que pueden ser usadas para potenciar el desarrollo del pensamiento relacional haciendo uso de las propiedades de las operaciones aritméticas.

Por último, destacaremos que, aunque solo se han propuesto ejemplos para algunas propiedades de la suma y la resta, estas ideas se pueden

Respuesta	Posibles expresiones para representar el pensamiento de los niños	Propiedades de los números y operaciones que están en la base del pensamiento de los niños
Si 11 son más que 9, entonces n es más que 27, por tanto, vale 29.	$11 = 9 + 2$ $(27 + 2) - (9 + 2) = 29 - 11$	Propiedad que compensa los términos en una resta: $(a + k) - (b + k) = a - b$

Cuadro 6. Respuesta que muestra características del pensamiento relacional en la actividad $27 - 9 = n - 11$

Actividades	Propiedades
• ¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad? $38 + 47 = 47 + 38$ • Calcula el sumando que falta: $12 + 7 = \_\_ + 12$	$a + b = b + c$
• ¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad? $52 + 17 = 46 + 11$ • Calcula el sumando que falta: $759 + 468 = \_\_ + 464$ • Calcula el valor n: $55 + 7 = 48 + n$	$a + b = (a + k) + (b - k)$
• ¿Es verdadera o falsa la siguiente igualdad? $52 - 17 = 46 - 11$ • Calcula el término que falta $52 - 19 = 43 - \_\_$ • Calcula el valor de n $55 - 7 = 48 - n$	$a - b = (a - k) - (b - k)$
Calcula el valor de n: $27 - 9 = n - 11$	$(a + k) - (b + k) = a - b$

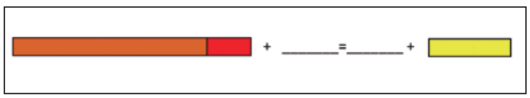
Cuadro 7. Tipos de actividades y propiedades implícitas

extender al resto de propiedades de estas operaciones y a las de la multiplicación y de la división.

USO DE RECURSOS

En la organización de una secuencia de actividades para crear oportunidades que desarrollen el pensamiento relacional, el uso de material concreto como las regletas Cuisenaire o las balanzas numéricas puede ser de utilidad. Estos recursos didácticos pueden facilitar la comprensión del signo igual como relación de equivalencia.

Así, por ejemplo, en la actividad 12 + __ = __ + 5, el 12 vendría representado por el «tren» compuesto por una regleta marrón y una regleta roja y el 5 por la regleta de color amarillo.



Para resolver la actividad, un alumno tendría que buscar regletas que, añadidas al tren marrón-rojo y a la regleta amarilla, formaran trenes de la misma longitud. A partir de una solución, podría encontrar diferentes resultados. Por ejemplo, la regleta blanca que representa al 1 en la parte izquierda del signo igual y la regleta marrón que representa al 8 en la parte derecha del signo igual.

La discusión en el aula sobre el comportamiento de las operaciones haciendo anotaciones de lo realizado con las regletas puede ayudar a los alumnos a generalizar y a justificar las relaciones estructurales identificadas y así constituir las bases para el desarrollo de la igualdad como una equivalencia.

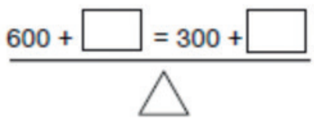
12 + **1** = **8** + 5
12 + **2** = **9** + 5
12 + **3** = **10** + 5
…/…

Propiedad. Al sumar la misma cantidad a la derecha e izquierda de una igualdad, la igualdad no cambia

Del mismo modo, se podría utilizar la balanza para dar respuesta a la siguiente actividad:

Escribe cinco posibilidades diferentes para que se cumpla la igualdad:

600 + __ = 300 + ___.



Se procedería de la misma forma que antes para generar un patrón a partir de las anotaciones realizadas y que permita generalizar las relaciones estructurales identificadas.

DOMINIO DE LAS FRACCIONES

El pensamiento relacional también puede potenciarse en el dominio de las fracciones (Empson y Levi, 2011). Cuando los estudiantes usan el pensamiento relacional para resolver problemas de operaciones con fracciones, incrementan su comprensión sobre las fracciones y de las propiedades de las operaciones.

Por ejemplo, en el problema:

Se necesitan 5/8 de bote de pintura para pintar medio muro. ¿Cuántos muros se pueden pintar con 5 botes y 5/8?

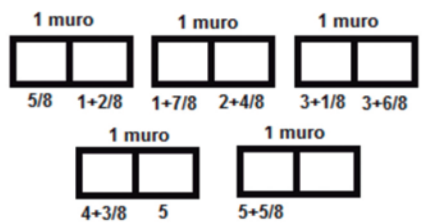
Este se puede entender como ¿cuántas veces cabe 5/8 en 5 + 5/8?

$$\square\, x\, \frac{5}{8} = 5 + \frac{5}{8}$$

A continuación, mostramos tres posibles respuestas:

- *Respuesta 1.* Respuesta no relacional:

Por un lado iba sumando los botes de pintura y por otra parte los muros que podía pintar con esa pintura. Cada vez que pintaba medio muro había gastado 5/8 de bote de pintura más y los iba sumando. Cuando había gastado los 5 y 5/8 de bote ya no podía pintar ningún muro más y conté los muros que había podido pintar. Me salieron 4 muros y medio.



- *Respuesta 2.* Respuesta no relacional: 5 + 5/8 : 5/8 = 45/8 : 5/8 = 9. Por tanto, podemos pintar 4 muros y medio.
- *Respuesta 3.* Respuesta que refleja características del pensamiento relacional (véase el cuadro 8).

Respuesta	Posibles expresiones para representar el pensamiento de los niños	Propiedades de los números y operaciones que están en la base del pensamiento de los niños
Si necesito 5/8 de bote para pintar ½ de muro, con 8 veces 5/8 botes de pinturas podré pintar 4 muros.	8 veces 5/8 = 8 × 5/8 = 5 botes de pintura son	Fracciones unitarias y unidad 5/8 es 5 veces 1/8, 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8. 8 veces 5/8 son 40/8.
8 veces 5/8 son 5 botes de pintura.	8 veces ½ muro = 4 muros.	
Con 5 botes podré pintar 4 muros.		40 veces 1/8 es 5 unidades (8/8 + 8/8 + 8/8 + 8/8 + 8/8).
Como tengo 5/8 de bote más, podré pintar medio muro más, en total 4 muros y medio.	5 botes + 5/8 de bote = 4 muros + ½ m.	8 veces ½ es 4 (muros) si $a = b$ y $c = d$ Entonces $a + c = b + d$

Cuadro 8. Respuesta que muestra características del pensamiento relacional en la actividadxxxxx

LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

Los currículos tradicionales abordan en primer lugar la aritmética y posteriormente el álgebra, dando lugar a una transición en la que los estudiantes deben pasar de contextos puramente aritméticos, basados en la realización de operaciones con números concretos, a un contexto centrado en las relaciones y apoyado en la notación algebraica. Esta manera de introducir la aritmética no ayuda a que los estudiantes desarrollen habilidades para reconocer y usar estructuras matemáticas, y dificulta el aprendizaje del álgebra (Castro y Molina, 2007; Kieran, 1992). Esta dificultad está enraizada en el reto que supone para el alumnado transformar su forma de pensar, centrada durante años en hacer cálculos sobre números concretos, a un pensamiento basado en relaciones.

Algunas dificultades y errores en el aprendizaje del algebra que pueden tener sus raíces en la falta de desarrollo del pensamiento relacional pueden ser las siguientes (Epson y Levi, 2011; Kieran, 2007):

- Considerar las expresiones como enunciados incompletos y, en consecuencia, no aceptar que una expresión no pueda cerrarse, es decir, no aceptar como solución expresiones tales como $39x - 4$ (lo que se conoce como rechazo a la falta de clausura) y simplificarlas: $39x - 4 = 35x$.
- No saber determinar cuándo las expresiones se pueden simplificar y cuándo no. Por ejemplo, no son conscientes que la igualdad $a + a + a \times 2$ no se puede simplificar como $3a \times 2$.
- No aplicar correctamente las propiedades, por ejemplo, en la expresión $4\ (x + y)$ concluir que $4\ (x + y) = 4x + y$ (dificultades con la propiedad distributiva), o en la expresión $8x - (8 - 4x) = 4x - 8$ en lugar de $12x - 8$ (apli-

Los estudios muestran que el pensamiento relacional elimina las barreras entre aritmética y álgebra

cación incorrecta de las propiedades asociativa y conmutativa en la resta).

Los estudios muestran que el pensamiento relacional facilita esta transición, eliminando las barreras que existen entre la aritmética y el álgebra. ◂

Referencias bibliográficas

CARPENTER, T.P.; FOEF, M.; LEVI, L. (2003): *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic & algebra in elementary School.* Portsmouth. Heinemann.

CASTRO, E.; MOLINA, M. (2007): «Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica». *Educación Matemática*, núm. 19(2), pp. 67-94.

EMPSON, S.; LEVI, L. (2011): *Extending Children's Mathematics. Fractions and Decimals*. Portsmouth. Heinemann.

KIERAN, C. (2007): «The learning and teaching of school algebra», en LESTER Jr. F. (ed.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC. IAP-NCTM, pp. 390-419.

MASON, J.; STEPHENS, M.; WATSON, A. (2009): «Appreciating mathematical structure for all». *Mathematics Education Research Journal,* núm. 21(2), pp. 10-32.

Direcciones de contacto

Ceneida Fernández

Pere Ivars

Universidad de Alicante

ceneida.fernandez@ua.es

pere.ivars@ua.es

Este artículo fue solicitado por UNO: REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en enero de 2016 y aceptado en abril de 2016 para su publicación.