Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Sandra Maria Reis dos Santos

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino das Funções no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

**Sandra Maria
Reis dos Santos**

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino das Funções no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro , e da Doutora Dina Fernanda da Costa Seabra, Professora Adjunta da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda.

o júri / the jury

presidente / president	Professora Doutora Paula Cristina Roque da Silva Rama Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro
vogais / examiners committee	Professor Doutor Rui Miguel Soares Pereira Professor Auxiliar, Universidade do Minho
	Professora Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos / acknowledgements

Agradeço do fundo do coração à Doutora Paula Carvalho e à Doutora Dina Seabra, pela amabilidade, incentivo, disponibilidade, ajuda e apoio prestado para a realização deste mestrado, pois a preciosa ajuda de ambas permitiu a sua realização e concretização.

Ao Doutor João Pedro Cruz, um agradecimento especial pois foi fundamental na resolução de alguns problemas de programação do código envolvido na construção dos exercícios.

Aos meus pais, Célia e Fernando, pelo amor que me dão e pela educação que me proporcionaram e valores transmitidos.

Aos meus queridos filhos, Jorge e Célia, pois foram eles o grande incentivo para eu fazer este mestrado e por fim ao meu marido, José Rosado, que também a ele lhe devo um muito obrigada por todo o apoio e auxílio prestado.

Deixo, também, aqui expresso o meu reconhecimento a todos os familiares e amigos que, embora não nomeados, me incentivaram e apoiaram nesta fase da minha vida.

Bem hajam.

Palavras Chave

Função, função afim, função quadrática, gráfico, Megua, Sage Mathematics, recursos digitais, ensino, matemática, questões de escolha múltipla, exercícios parametrizados

Resumo

Pretendemos com este trabalho a criação, no MEGUA, de exercícios parametrizados de escolha múltipla, com a respetiva resolução pormenorizada, referentes ao estudo das funções afins e quadráticas, ao nível do 3.º Ciclo do Ensino Básico. Estes exercícios foram construídos de acordo com o novo Programa de Matemática e as Metas Curriculares constituindo um auxiliar dos alunos no seu estudo autónomo e, do professor na utilização como uma atividade de aplicação e consolidação dos conteúdos bem como de avaliação diagnóstica, formativa ou sumativa dos alunos.

Keywords Function, affine function, quadratic function, graphic, Megua, Sage Mathematics, digital resources, teaching, mathematics, multiple choice exercise, parameterized exercises

Abstract With this work, done using the MEGUA system, a series of parameterized exercises with multiple choice options and their respective resolution was created. These exercises are related with concepts such as affine and quadratic functions, taught at the third cycle of the basic education in accordance with the curricular goals and the new math program. The main objectives are twofold: help the students in an autonomous study of functions and in the classroom and support the teaching of functions such as an application/consolidation activities and the diagnostic, formative or summative evaluation.

Conteúdo

CAPÍTULO 1

Introdução

Vivemos numa época de rápido desenvolvimento das tecnologias, com o fácil acesso a calculadoras, telemóveis, computadores, possibilitando a utilização de diversos tipos de *software*. Esse progresso tem provocado mudanças na organização da nossa vida e do nosso trabalho, em particular na educação desde 1991.

Na implementação de novos programas de Matemática incentiva-se o uso das novas tecnologias. A sua utilização, no ensino da Matemática, pode favorecer o desenvolvimento de competências, bem como de atitudes mais positivas em relação à disciplina [15].

O computador tem constituído uma ferramenta fundamental nas tecnologias de informação e comunicação (TIC), podendo auxiliar na construção do conhecimento com potencialidades no processo de ensino/aprendizagem, permitindo a redução do tempo de aprendizagem, tornando eficaz o processo de aquisição de conhecimentos e de competências, propiciando a interatividade e a aprendizagem individualizada.

O ensino da disciplina de Matemática sempre esteve associado a muitas dificuldades, enfrentadas tanto pelos alunos, quanto pelos professores, sendo uma disciplina com elevados índices de insucesso no nosso país. A influência da tecnologia no ensino deverá contribuir para a alteração de práticas, métodos e estratégias pedagógicas utilizados pelos professores, de forma a fomentar ambientes de aprendizagem motivadores e exigentes. Assim, o professor deve ter o papel de estruturar e proporcionar situações e experiências diversificadas em que a aprendizagem possa ser feita de forma ativa, significativa e construída pelo próprio aluno, apelando para o desenvolvimento da sua autonomia.

Tendo em conta as características individuais de cada aluno e consequentemente diferentes modos de aprender, a utilização de diversas estratégias poderá auxiliar os alunos na construção das suas aprendizagens. Desta forma, operacionalizando o saber com o saber fazer e o saber estar, podemos proporcionar aos alunos ferramentas que auxiliam a aprendizagem motivando-os para o saber e para o estudo da disciplina.

Segundo [10], os ambientes de aprendizagem que integram (e não apenas acrescentam) as tecnologias nas atividades curriculares podem potenciar a aprendizagem dos alunos e também contribuir para aspetos relacionados com a literacia tecnológica dos alunos e professores, a motivação ou a criação de redes de relações.

De acordo com as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática [14], o professor na avaliação da compreensão matemática dos alunos deve utilizar uma diversidade de métodos de avaliação, adaptando-os ao nível de desenvolvimento, maturidade matemática e contexto cultural do aluno, harmonizando-os com aquilo que é ensinado, com os métodos de ensino e com a predisposição dos alunos em relação à disciplina.

Este trabalho é integrado num projeto mais vasto do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro [24, 22] que visa a criação de uma base de dados de exercícios parametrizados. Este projeto fornece aos estudantes a possibilidade de responder a questões relativas aos assuntos em estudo, tendo como *feedback* imediato uma de duas coisas (ou ambas): a perceção da evolução do seu desempenho, o que permite autoavaliar os seus conhecimentos; o acesso a uma resposta detalhada de resolução do problema, estando, neste caso, o produto a ser usado como ferramenta de aprendizagem.

Para a criação dos exercícios foram consultados diversos manuais do Ensino Básico, nomeadamente [3, 4, 5, 11, 12, 13] assim como o Caderno de Apoio às Metas Curriculares do 3.º Ciclo [1].

A aplicação destes exercícios como momentos de avaliação formativa no processo de ensino/aprendizagem proporcionará um *feedback* permitindo ajudar a melhorar as aprendizagens dos alunos e consequentemente a motivação e autoestima, nomeadamente através de processos de autorregulação, de autoavaliação e de autocontrolo. Permite que os alunos, em cada momento, tomem consciência do estádio em que se encontram relativamente ao critério ou critérios previamente definidos e que desenvolvam qualquer tipo de ação destinada a ultrapassar eventuais dificuldades, regulando o seu processo de aprendizagem com autonomia adquirindo estratégias de aprendizagem cada vez mais eficazes [6].

A parametrização dos exercícios permite o treino de procedimentos padronizados, como por exemplo algoritmos e regras de cálculo, sendo estes essenciais ao trabalho matemático. Permite também a memorização e compreensão de conceitos, facilitando a posterior resolução de problemas que envolvem a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimento, factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais [9].

O facto de estes exercícios possibilitarem, por parte do aluno, a visualização da respetiva resolução pormenorizada, proporcionam a autocorreção e promovem situações de autoavaliação regulada das aprendizagens, revisão e estudo conduzindo à aprendizagem de conceitos matemáticos o que possibilita o domínio de um conjunto de técnicas e memorização de procedimentos e definições ajudando-os desta forma a construir o conhecimento e a colmatar a falha de pré-requisitos.

Este trabalho, contribui, neste ponto de vista, para o projeto num tópico específico: Funções, em particular a função afim e a função quadrática no âmbito do que é estudado no

3.º Ciclo do Ensino Básico [9].

Assim, esta dissertação apresenta-se organizada em quatro capítulos.

No capítulo 1 apresentamos uma introdução a esta dissertação.

O capítulo 2 inicia-se com uma breve resenha histórica sobre a noção de função e posteriormente são dadas algumas definições e propriedades relativas às funções visadas neste trabalho.

No capítulo 3 apresentamos o processo de construção de um exercício no MEGUA. Posteriormente fazemos uma apresentação de todos os exercícios criados e um enquadramento dos mesmos de acordo com o Programa de Matemática/Metas Curriculares do 3.º Ciclo do Ensino Básico. Nos exercícios que se destacam pelo código envolvido na sua construção, fazemos a explicação de alguns procedimentos utilizados para a criação dos mesmos.

No capítulo 4 apresentamos algumas considerações referentes a esta dissertação.

Por fim no Apêndice, constam alguns exercícios, selecionados dos exercícios criados, onde apresentamos o código completo de construção. No CD apresenta-se uma listagem dos exercícios criados com a respetiva programação.

CAPÍTULO 2

Funções

2.1 Introdução

O estudo das funções é muito importante na matemática relacionando-se com a álgebra e com a geometria analítica.

A noção de função sofreu uma grande evolução ao longo dos séculos, sendo que a introdução do método analítico na definição de função (séc.XVI, séc. XVII) veio revolucionar a Matemática [21].

Desde a antiguidade até à idade média, os matemáticos tinham um conceito bastante vago de função [20].

Nicolau Oresme (1323-1328) foi precursor da geometria analítica, tendo-se antecipado a Descartes na teoria das coordenadas pois foi ele quem utilizou pela primeira vez um gráfico para representar numa direção o tempo e na outra a velocidade de um móvel. Possivelmente, devido ao pouco desenvolvimento das técnicas algébricas e geométricas da altura, Oresme não foi mais longe neste estudo, sendo necessário esperar mais de 200 anos por Viète, Descartes e Fermat, que retomaram e desenvolveram ensaios nessas áreas [20].

Nos finais do século XVI, princípios do século XVII, com os trabalhos de Kepler no âmbito do movimento dos planetas e de Galileu sobre a queda dos corpos, a matemática começou a ser aplicada com sucesso ao estudo dos movimentos [20].

O método analítico de definir funções foi introduzido por Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650) sendo que o pensamento funcional, ou seja, a capacidade de pensar em termos de relações e por meio de relações, tornou-se predominante no trabalho criativo dos matemáticos [20].

Newton (1642 - 1727) aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos "relatia quantias" para designar variável dependente, e "genit" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais [21].

Leibniz (1646 - 1716) parece ter sido o primeiro a utilizar o termo “função” no manuscrito Latino “Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibu”. A palavra “função” foi adoptada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Johann Bernoulli (1667 - 1748) [21].

Leonhard Euler (1707 - 1783), foi o primeiro a adotar a expressão $f(x)$ para o valor da função [20].

No século XIX, em 1837, o matemático Dirichlet (1805 - 1859) definiu função como uma correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis, tal como hoje é definida.

O desenvolvimento da matemática no século XX e a sua intervenção cada vez maior nas outras ciências conduziram à generalização do conceito de função ao caso de variáveis cujos valores pertencem a um conjunto qualquer de objetos.

Segundo Sebastião e Silva foi esta generalização do conceito de função que levou à criação da Análise Moderna, que compreende ramos como a lógica, a teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia geral, entre outros [20].

2.2 DEFINIÇÕES E OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Como sabemos, o conceito de função estabelece relações com vários outros conceitos matemáticos sendo essencial para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de fenómenos naturais, económicos ou sociais. Assim sendo, iremos dar o conceito de função recordando o conceito de relação entre dois conjuntos e posteriormente apresentaremos alguns conceitos importantes para o estudo das funções. Para tal, baseámo-nos em [2], [7] e [8].

Definição 2.1 *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. O produto cartesiano de A por B, é o conjunto*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

No caso particular em que $B = A$, o produto cartesiano $A \times A$ chama-se quadrado cartesiano de A e designa-se usualmente por A^2.

Definição 2.2 *Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se relação binária de A para B, a qualquer subconjunto R de $A \times B$. Seja $R \subseteq A \times B$ e x e y elementos de A e B, respetivamente. Diz-se que x está na relação R com y e escreve-se xRy, se $(x, y) \in R$.*

Nota 2.1 *Se $B = A$, diz-se que se trata de uma relação binária em A.*

Definição 2.3 *Sendo R uma relação binária de A para B, o domínio de R é o conjunto de todos os elementos $x \in A$ para os quais existe pelo menos um $y \in B$ tal que xRy, ou seja,*

$$D_R = \{x \in A : (x, y) \in R \textit{ para algum } y \in B\}.$$

O contradomínio de R é o conjunto dos $y \in B$ para os quais existe pelo menos um $x \in A$ tal que xRy, ou seja,

$$CD_R = \{y \in B : (x, y) \in R \textit{ para algum } x \in A\}.$$

Definição 2.4 *Uma aplicação de A em B, ou função definida no conjunto A e com valores no conjunto B, é qualquer relação binária f de A para B que verifica as condições:*

(i) o domínio de f é o conjunto A;

(i) quaisquer que sejam x, y e z pertencentes a A, se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

Para indicar que f é uma aplicação de A em B escreve-se $f : A \longrightarrow B$. O conjunto B designa-se por conjunto de chegada. Aos elementos x de A chamamos objetos e a $f(x)$ imagem de x por f ou transformado de x por f. O contradomínio da função é um subconjunto do conjunto B, podendo coincidir, ou não, com este e denota-se por CD_f, D'_f ou $f(A)$.

Definição 2.5 *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função de A em B.*

(i) *Se $CD_f = B$, a aplicação é **sobrejetiva**, simbolicamente:*

$$\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y. \tag{2.1}$$

(ii) *Se a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, a aplicação é **injetiva**, simbolicamente:*

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \tag{2.2}$$

(iii) *Quando se verifica (2.1) e (2.2) a aplicação $f : A \longrightarrow B$ diz-se bijetiva. Uma função bijetiva também se chama correspondência biunívoca.*

Um referencial no plano, ou sistema de referência, consiste num par $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ onde O é um ponto fixo e os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ formam uma base[1] fixa de $\mathbb{R}^2$. Se os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ são ortogonais o sistema de referência diz-se ortogonal e se $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ diz-se *normado*. Um sistema de referência *ortogonal* e normado diz-se *ortonormado*.

Os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ definem a direção de duas retas às quais se chama *eixos coordenados* que se intersectam no ponto O denominado *a origem do referencial*.

Num referencial ortonormado no plano, normalmente designado por Oxy, as componentes dos vetores da base são $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$, o eixo horizontal designa-se por eixo dos xx

[1]Os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ são linearmente independentes e todo o ponto de $\mathbb{R}^2$ escreve-se como combinação linear de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

ou eixo das abcissas e o eixo vertical designa-se por eixo dos yy ou eixo das ordenadas. Assim, cada ponto do plano fica perfeitamente definido por um par de números reais (x, y), as suas coordenadas.

Uma função diz-se real se o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e diz-se de variável real se o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$; consequentemente uma função real de variável real é uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$.

Observação 2.1 *Como o conjunto dos números reais não é ainda do conhecimento dos alunos do 7.º ano de escolaridade, fala-se em* função numérica *em vez de função real e de* variável numérica *em vez de variável real.*

A representação de uma função [16] pode ser feita através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências; e graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos.

Definição 2.6 *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e a função $f : A \longrightarrow B$. O gráfico da função f é o conjunto*

$$G = \{(x, y) \in A \times B \, : \, x \in A, \, y = f(x)\}.$$

Exemplo 2.1 *Na Figura 2.1 temos o gráfico de uma função f definida de $A = \{-5, -2, 3, 5\}$ em $\mathbb{Q}$.*

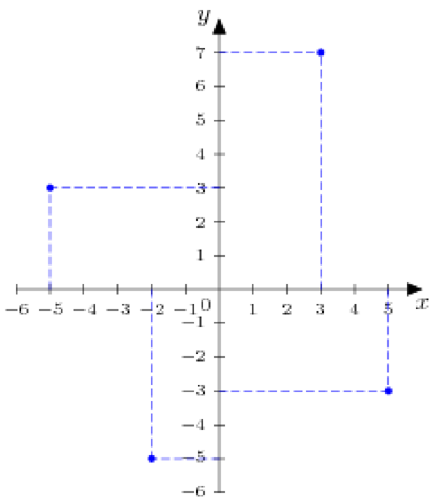


Figura 2.1: Gráfico da função $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$

A variação é um dos aspetos importantes do conceito de função. O estudo da monotonia de uma função consiste em determinar os subconjuntos do seu domínio onde ela é crescente ou decrescente.

Definição 2.7 *Seja f uma função real de variável real de domínio D e $A \subset D$.*

(i) *f é crescente, em sentido lato, no conjunto A quando, para quaisquer valores $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

(ii) *f é decrescente, em sentido lato, no conjunto A quando, para quaisquer valores $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Observação 2.2

(i) *A função f é constante no conjunto $A \subset D$ quando, para quaisquer valores $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) = f(x_2)$.*

(ii) *A função f é crescente em sentido estrito (ou estritamente crescente), no conjunto $A \subset D$ quando, para quaisquer valores $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$. Analogamente se define função decrescente em sentido estrito.*

Definição 2.8 *Seja f uma função real de variável real de domínio D e $x_1 \in D$.*

(i) *Diz-se que f tem um máximo relativo ou local em x_1, se existir um intervalo aberto E de centro x_1 tal que $f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in E \cap D$. Neste caso, x_1 é um maximizante relativo de f e o valor de $f(x_1)$ é um máximo relativo.*

(ii) *Diz-se que f tem um mínimo relativo ou local em x_1, se existir um intervalo aberto E de centro x_1 tal que $f(x) \geq f(x_1)$, para todo $x \in E \cap D$. Neste caso, x_1 é um minimizante relativo de f e o valor de $f(x_1)$ é um mínimo relativo.*

(iii) *Os extremos relativos são chamados extremos absolutos se as condições $f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in E \cap D$ e $f(x) \geq f(x_1)$, para todo $x \in E \cap D$, apresentadas em (i) e (ii), respetivamente, são válidas para todos os valores de D.*

Definição 2.9 *Seja f uma função real de variável real de domínio D. Diz-se que $x_1 \in D$ é um zero de f se e só se $f(x_1) = 0$.*

Dadas duas ou mais funções reais de variável real podemos obter novas funções à custa das operações adição (algébrica) e multiplicação de números reais.

Definição 2.10 *Sejam f e g duas funções reais de variável real.*

(i) *A função soma das duas funções é a função de domínio $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;*

(ii) *A função produto das duas funções é a função de domínio* $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$ *definida por* $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$*;*

(iii) *Sendo* $\lambda \in \mathbb{R}$*, o produto de* λ *por* f *é a função cujo domínio é* $D_{\lambda f} = D_f$ *e definida por* $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$*;*

(iv) *Se* $n \in \mathbb{N}$*, a potência de expoente* n *de* f *é a função cujo domínio é* $D_{f^n} = D_f$ *e definida por* $f^n(x) = (f(x))^n$*.*

Observe-se que (iii) pode ser vista como um caso particular de (ii) e (iv) como uma extensão de (ii). Além disso a diferença de duas funções é a função $f - g = f + (-1)g$ que se obtém à custa de (i) e (iii).

Salientamos que ao nível do 3.º Ciclo do Ensino Básico, as operações com funções são efetuadas com funções numéricas de variável numérica (de domínio finito e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$) sendo que o quociente de funções não é abordado.

2.3 FUNÇÃO AFIM

A função afim assume grande importância ao nível do Ensino Básico pois modela várias situações simples da vida real, tais como, o cálculo de percentagens; a relação entre a distância percorrida por um móvel e o tempo gasto a percorrê-la a uma velocidade constante; o custo de um dado produto em função da sua quantidade; o consumo de combustível de um automóvel em função dos quilómetros percorridos.

Em geometria, uma função afim entre dois espaços é a composição de uma transformação linear com uma translação. As funções afins são precisamente as funções que transformam retas em retas.

Definição 2.11 *Uma função real de variável real,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, diz-se uma função linear se é definida por* $f(x) = ax$*, sendo* $a \in \mathbb{R}$*.*

Da definição resulta que o gráfico de uma função linear definida por $f(x) = ax$,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = ax\},$$

é uma reta que contém o ponto $(0, 0)$.

Observação 2.3 *A função definida na Definição 2.11 é uma aplicação linear* [2]*.*

[2] Num contexto mais geral, diz-se que uma função $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear se para quaisquer vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tem $L(x + y) = L(x) + L(y)$ e, para todo o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e todo o escalar λ se tem $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

Definição 2.12 *Uma função real de variável real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se uma função afim se é definida por $f(x) = ax + b$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$.*

Da definição conclui-se que o gráfico de uma função afim definida por $f(x) = ax + b$,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y = ax + b\},$$

é uma reta cujo declive é a e contém o ponto $(0, b)$.

Observação 2.4 *A função definida na Definição 2.12 é uma aplicação afim* [3].

Se, na definição anterior, $b = 0$ e $a \neq 0$, a função é da forma $f(x) = ax$, donde se deduz que toda a função linear é afim. Se $a = 0$, a função é uma função constante.

Os parâmetros a e b têm influência na representação gráfica de uma função afim pois de acordo com a Definição 2.7 conforme o valor de a, a função pode ser crescente (se $a > 0$), decrescente (se $a < 0$) ou constante (se $a = 0$).

Exemplo 2.2 *Considere-se as funções f, g e h definidas do seguinte modo:*

$$f(x) = x - 5 \ , \ g(x) = -x \ e \ h(x) = -5$$

A função g é linear e a função h é constante ($a = 0$). Podemos observar no gráfico da Figura 2.2 que a função f é crescente ($a = 1 > 0$) e a função g é decrescente ($a = -1 < 0$).

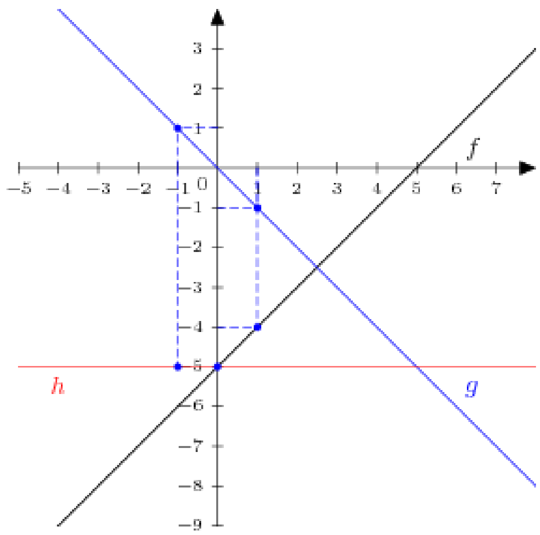


Figura 2.2

[3]Diz-se que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é afim se existe uma função linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e um vetor $b \in \mathbb{R}^n$ tais que $A(x) = L(x) + b$, para todo o $x \in \mathbb{R}^n$.

O parâmetro a é de grande importância para o estudo da variação de uma função afim podendo ser determinado conhecidas as coordenadas de dois pontos de abcissas distintas do gráfico da função.

Definição 2.13 *Sejam f uma função afim, tal que $f(x) = ax + b$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do gráfico de f. Como o gráfico de f é uma reta o seu declive ou coeficiente angular é dado por: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.*

Observe-se que uma reta qualquer pode ser interpretada como imagem, por meio de uma translação, de uma reta que passa pela origem, ou seja, a reta de equação $y = ax + b$, $a, b \neq 0$ resulta de efetuar a translação associada ao vetor $(0, b)$ da reta $y = ax$, $a \neq 0$. Todas estas retas são paralelas e diz-se que têm a mesma direção pois o valor de a é o mesmo.

2.4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

No 3.º Ciclo do Ensino Básico, mais propriamente no 9.º ano de escolaridade, é estudada a função quadrática dada pela expressão $y = ax^2$, com $a \neq 0$.

As funções quadráticas são representadas graficamente por curvas designadas por parábolas, que pertencem à família das cónicas e que modelam situações da vida corrente, tais como o estudo da queda dos corpos, do lançamento de projéteis, das órbitas dos planetas, etc, desempenhando um papel importante em vários domínios da Física, como a Astronomia, a Economia, a Engenharia e em muitas outras situações.

As superfícies parabólicas, geradas pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo, têm muitas aplicações tais como as antenas parabólicas, as de radar, fornos solares, faróis de navegação e de automóveis, os radiotelescópios, abóbadas de catedrais, etc. Esta profusão de aplicações resulta das capacidades geométricas destas curvas, como qualidades óticas, acústicas ou mecânicas.

Assim, seguidamente iremos definir função quadrática e apresentaremos algumas características deste tipo de funções.

Definição 2.14 *Uma função real de variável real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se uma função quadrática se é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.*

O gráfico de uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = ax^2 + bx + c\},$$

é uma parábola de diretriz paralela ao eixo das abcissas.

Se, na Definição 2.14, $b = 0$, $c = 0$ e $a \neq 0$, a função é da forma $y = ax^2$, sendo que esta família de parábolas fornece “gráficos tipo” para uma função quadrática, já que o gráfico de uma qualquer função quadrática pode ser obtido por uma translação de um dos "gráficos tipo".

As funções desta família têm o vértice (ponto em que a função atinge o seu extremo) na origem do referencial e o eixo de simetria é o eixo Oy.

Numa função quadrática, o sinal de a indica-nos o sentido da concavidade do gráfico da função, isto é, se a > 0 a concavidade da parábola está virada para cima e se a < 0, a concavidade da parábola está virada para baixo e quanto maior for o valor absoluto de a, menor é a abertura da parábola.

É de referir que no 3.º Ciclo é dada a noção de que o vértice da parábola é o ponto de máximo ou de mínimo da parábola, isto é, se a concavidade da parábola está virada para cima, o vértice é um ponto onde ocorre o mínimo e se a concavidade da parábola está virada para baixo, o vértice é um ponto onde ocorre o máximo.

Relembra-se que para determinar os zeros de uma função quadrática, determinamos as soluções da equação do segundo grau que a define e para tal podemos utilizar a fórmula resolvente.

Sem calcular os zeros de uma função quadrática podemos prever o seu número, pois este é dependente do sinal do binómio discriminante ($\triangle = b^2 - 4ac$).

Conforme o binómio discriminante seja positivo, negativo ou nulo, a equação $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$ tem duas raízes reais distintas, não tem raízes reais ou tem uma raiz real, respetivamente.

O gráfico de uma função quadrática pode intersetar ou não o eixo das abcissas, ou seja, uma função quadrática pode ter ou não zeros.

Para determinar as soluções de uma equação do 2.º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ podemos também relacionar o gráfico da função quadrática $y = ax^2$, $a \neq 0$ com o gráfico da função afim $y = -bx - c$ determinando as abcissas dos pontos de interseção da parábola de equação $y = ax^2$, $a \neq 0$ com a reta de equação $y = -bx - c$. Esta metodologia é indicada nas Metas Curriculares do 3.º Ciclo do Ensino Básico [9].

CAPÍTULO 3

Apresentação dos Exercícios

3.1 introdução

Neste capítulo vamos fazer uma descrição do método subjacente à construção de um exercício parametrizado.

Um exercício parametrizado é uma classe de exercícios com os mesmos objetivos pedagógicos, sobre os mesmos conceitos matemáticos que gera automaticamente um vasto conjunto de exercícios concretos.

Neste trabalho o formato de cada exercício é fixo e compõe-se de três partes:

- o enunciado do problema, que pode ser um texto, uma figura, uma tabela, um gráfico ou qualquer combinação destas;
- quatro respostas, escolhidas arbitrariamente de um conjunto de respostas possíveis das quais apenas uma é verdadeira;
- uma resolução completa e detalhada da questão que constitui *feedback* imediato no caso do aluno responder de modo errado ou pretender consultar a resolução sem responder à questão; além disso, esta resolução constitui um material de apoio ao estudo autónomo.

Na Figura 3.1 apresenta-se uma concretização de um exercício parametrizado, onde consta o enunciado e as quatro opções de escolha múltipla. Caso o aluno acerte, é informado que escolhe una resposta correta e pode continuar. Se o aluno assinala como verdadeira uma afirmação falsa, vê a resolução detalhada da questão.

A resolução do exercício pode ver-se na Figura 3.2.

Considera as funções f e g definidas por

$$f(x) = -2\,x - 2 \quad e \quad g(x) = ax + b$$

Sabe-se que os gráficos das funções f e g são retas paralelas e que o ponto $(-4, 4)$ pertence ao gráfico de g.

A expressão analítica da função g é:

$$g(x) = 2\,x + 12$$

$$g(x) = -2\,x + 4$$

$$g(x) = -2\,x - 4$$

$$g(x) = -2\,x - 12$$

Ver a resolução (sem responder à questão)

Submeter

Figura 3.1: Exemplo de uma concretização de um exercício

Resolução:

Como os gráficos das funções f e g são retas paralelas, têm o mesmo declive o que permite concluir que a expressão analítica da função g é da forma $g(x) = -2x + b$.

Por outro lado, o facto do ponto $(-4, 4)$ pertencer ao gráfico de g, permite concluir que

$$g(-4) = 4 \Leftrightarrow -2 \times (-4) + b = 4 \Leftrightarrow 8 + b = 4 \Leftrightarrow b = 4 - 8 \Leftrightarrow b = -4.$$

Assim, a expressão analítica da função g é $g(x) = -2\,x - 4$.

(megua-1219)

Figura 3.2: Resolução do exercício concretizado

3.2 A CONSTRUÇÃO DE UM EXERCÍCIO

Para construir um exercício usa-se o *Notebook* do *Sage Mathematics*, criando-se uma *worksheet*, e o pacote MEGUA [22](*Mathematics Exercises Generation Universidade Aveiro*), biblioteca de *software* de utilização livre (*open-source*) que funciona sobre a plataforma de computação algébrica *Sage Mathematics* (*Software for Algebra and Geometry Experimentation*).

O *Sage Mathematics* é um *software* matemático gratuito e *open-source* que engloba e utiliza pacotes pré-existentes como *Maxima* (cálculo algébrico), *GAP* (álgebra computacional discreta), *Pari/GP*(teoria dos números) [25].

Na Tabela 3.1 consta a estrutura de um exercício completo. A sua criação é efetuada com o preenchimento de diversos campos, sumário, catalogação, palavras chaves e escrita de código de acordo com o campo em questão, enunciado ou resolução

Tabela 3.1: Estrutura de um exercício no MEGUA

```
meg.save( r”’
%summary Texto Secção; Texto Subsecção; texto Subsubsecção
SIACUAstart
level=1; slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(c1,p1),(c2,p2), ... ]
SIACUAend
%problem (Enunciado do exercício)
%answer
%(Opções de Escolha múltipla)
<multiplechoice>
<choice> opção correta </choice>
<choice> opção errada 1 </choice>
<choice> opção errada 2 </choice>
<choice> opção errada 3 </choice>
</multiplechoice>
%(Resolução detalhada do exercício)
class nome do exercício (Exercise):
def make_random(s):
#Definição das variáveis e parâmetros
def solve(s):
#Definição das funções e programação
”’)
```

O exercício inicia com o campo *summary*, onde são colocadas as secções e subsecções para identificação do exercício.

No campo seguinte, entre *SIACUAstart* e *SIACUAend*, indica-se a lista dos conceitos que são testados com este exercício em $concepts = [(c1, p1), (c2, p2), ...]$ onde $c1$ e $c2$,..., são os códigos dos conceitos e $p1$ e $p2$,..., é o peso que cada conceito tem, sendo que a soma de todos os pesos é 1.

Segue-se o enunciado do exercício. O enunciado é escrito usando LaTeX e alguns comandos básicos de *HTML*. Pode conter parâmetros, variáveis e tabelas criadas em *HTML*, gráficos feitos em LaTeX e diagramas de setas (referidos como figuras).

As opções de escolha múltipla, criadas com recurso aos comandos *multiplechoice* e *choice*, são construídas de modo a haver uma opção correta (a primeira) e três ou mais erradas. As opções erradas são denominadas distratores [23] na medida em que se aproximam dos erros habituais dos alunos e servem para que o professor possa diagnosticar quais as competências que o aluno não atingiu.

O erro, enquanto fenómeno inerente à aprendizagem, apresenta-se como uma fonte rica de informação, na medida em que permite ao professor formular hipóteses explicativas do raciocínio do aluno e orientá-lo para que seja capaz de identificar e corrigir o erro [19].

No campo seguinte efetua-se a resolução detalhada do exercício.

Por vezes, pode ser necessária uma decisão de escolha de valores, texto, gráficos ou figuras a apresentar. Esta escolha é feita com recurso aos comandos *showone escolha* e *thisone*, sendo definida uma variável *escolha* com um determinado valor inteiro no campo *class*. Este valor começa em 0 e devem ser definidos tantos valores quantas as escolhas pretendidas. Essa escolha é depois efetuada por ordem crescente com o uso do comando *thisone*, o qual executa apenas o código delimitado entre o *thisone* e o */thisone*, consoante o valor de *escolha* seja 0,1,2,3,...,.

Depois de finalizado o exercício, este pode ser visualizado num ficheiro do tipo *HTML*, gerado automaticamente de acordo com uma determinada chave, isto é, de acordo com uma escolha aleatória dos parâmetros gerados.

Após a criação do exercício este é enviado para o SIACUA [24](Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador, Universidade de Aveiro). A Tabela 3.2 mostra o código usado para fazer a interface com o SIACUA, página Web que é visível ao utilizador. Nesta célula define-se o identificador do exercício, a chave (ekey) ou o conjunto de chaves a enviar, o curso e o responsável por este processo de envio.

Tabela 3.2: Código para fazer a interface com o SIACUA

meg.siacua(exname=“ número do aluno_nome do exercício”,ekeys=[a,b,c,d,e,...], sendpost=True, course= “matbas”, usernamesiacua=“código”)

O SIACUA é sistema de aprendizagem aberto em que o utilizador tem acesso ao seu progresso, com questões tipo verdadeiro/falso do PmatE (Projeto Matemática Ensino) e questões de escolha múltipla do Projeto MEGUA. O SIACUA implementa um modelo Bayesiano do utilizador que inclui um mapa conceptual do assunto em estudo. O progresso num determinado tópico em questão é visualizado através de umas barras de progresso que aumentam ou diminuem consoante evidência de conhecimento (ou desconhecimento) por parte do estudante. Na Figura 3.3 mostra-se uma imagem desta aplicação.

Cada barra representa uma probabilidade: o “belief” na rede Bayesiana associada ao utilizador, correspondente ao respetivo tópico, com base nas evidências fornecidas. Um dado

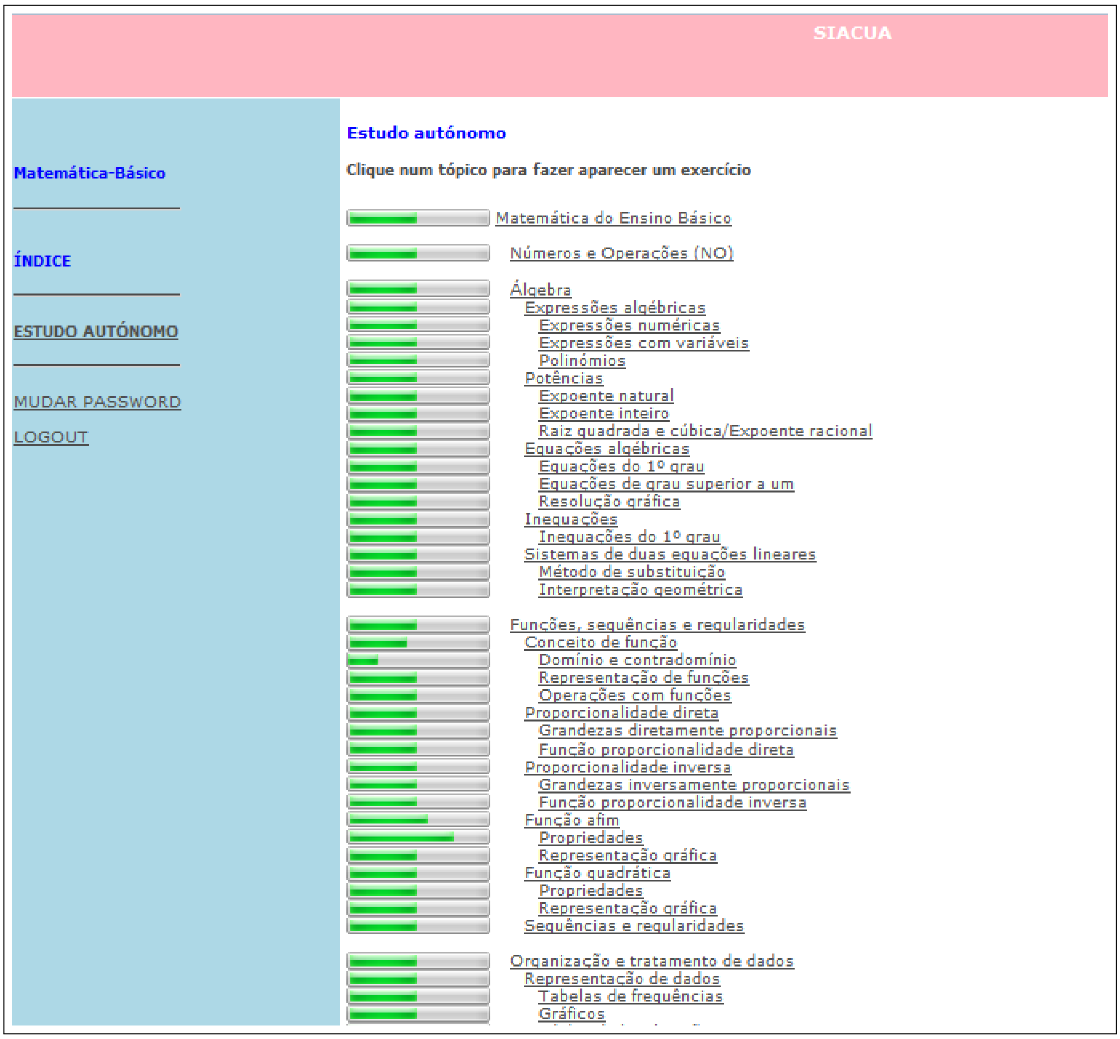


Figura 3.3: Barras de progresso no SIACUA em Matemática do Ensino Básico

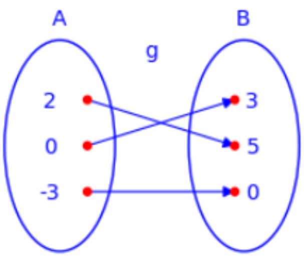
valor representado por uma barra significa que, com as evidências fornecidas, a probabilidade de o utilizador entender o tópico correspondente é igual a esse valor (inicialmente, antes de qualquer evidência, a probabilidade é 0,5) [24].

Nos exercícios criados devido à diversidade de apresentação de enunciados e consequentemente da adequação da resolução dos mesmos de acordo com os enunciados e com os procedimentos de cálculo, a utilização dos comandos *showone* e *thisone* foi frequente. Também nas opções de escolha múltipla verificou-se necessidade de utilizar estes comandos.

No exemplo que se segue apresentam-se duas concretizações do mesmo exercício onde se pode observar que o objetivo do exercício é o mesmo mas o enunciado é diferente pelo que a resolução gerada está de acordo com a opção correta gerada no enunciado.

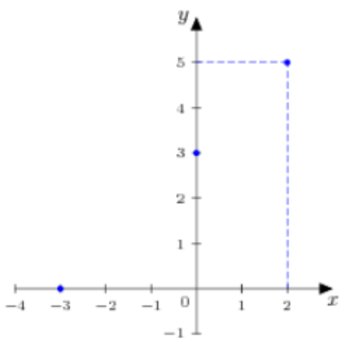
Exemplo 3.1 *Nas figuras 3.4 e 3.5 apresentamos duas concretizações de um exercício e suas resoluções.*

Considera a função g representada pelo diagrama de setas:



Outra representação da função g é:

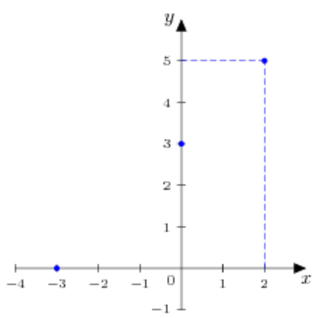
x	$\mathbf{0}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{3}$
$g(x)$	$-\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$



$$G_g = \left\{(0,-3);(3,0);(5,2)\right\}$$

$$g(x) = -3\,x$$

A opção correta é:

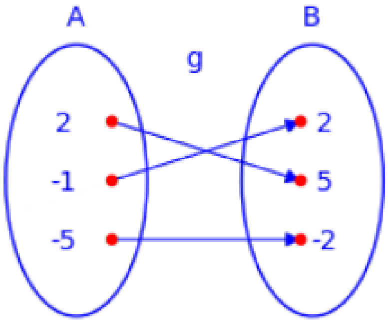


porque -3, 0 e 2 são os objetos da função e, $g(-3)=0$, $g(0)=3$ e $g(2)=5$ as respetivas imagens.

Deste modo, os pontos $(-3,0)$,$(0,3)$,$(2,5)$ são pontos do gráfico da função g.

Figura 3.4

Considera a função g representada pelo diagrama de setas:



Outra representação da função g é:

$$G_g = \{(-2,-5);(2,-1);(5,2)\}$$

---

x	-5	-1	2
$g(x)$	-2	2	5

$$g(x) = -5\,x - 2$$

---

x	-2	5	2
$g(x)$	-5	2	-1

A opção correta é:

x	-5	-1	2
$g(x)$	-2	2	5

porque -5 , -1 e 2 são os objetos da função e
$g(-5) = -2$, $g(-1) = 2$ e $g(2) = 5$ as respetivas imagens.

Figura 3.5

3.3 APRESENTAÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Segundo o programa de Matemática [9] para o Ensino Básico, no 3.º ciclo os domínios de conteúdos são os seguintes: Números e Operações (NO), Geometria e Medida (GM), Funções, Sequências e Sucessões (FSS), Álgebra (ALG) e Organização e Tratamento de Dados (OTD).

Os exercícios criados neste trabalho são referentes a parte do domínio de conteúdo FSS, nomeadamente sobre o conceito de função, operações com funções, função afim e função quadrática. Os exercícios foram criados tendo em conta a maioria dos descritores constantes nas Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico [9].

Seguidamente apresentamos uma descrição dos exercícios criados agrupados de acordo com os seus conteúdos.

3.3.1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

De acordo com os conteúdos [9]:

- Função ou aplicação f de A em B; domínio e contradomínio; igualdade de funções;
- Pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente;
- Funções numéricas;
- Gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano;

foi criado um conjunto de exercícios, dos quais apresentamos alguns exemplos pormenorizados e a descrição sumária dos restantes. Não colocámos o código de construção de todos os exercícios em virtude de se usarem técnicas semelhantes para a elaboração dos mesmos.

EXERCÍCIO: E97I30_DEF_FUNCAO_01

Neste exercício apresentam-se duas correspondências através de diagramas de setas e pretende-se que o aluno identifique a correspondência que representa uma função.

No código foram criadas quatro correspondências, que foram combinadas de forma a que apareça no enunciado do exercício uma correspondência que seja função e outra que não o seja. Para a definição de parâmetros referentes aos elementos dos diagramas de setas foram usados comandos específicos do *Sage* que permitem a geração aleatória de valores pré-definidos. Para cada diagrama de setas definimos uma variável, composta pelos elementos do conjunto de partida, do conjunto de chegada e das correspondências dos respetivos elementos, construindo-se os diagramas usando a componente gráfica do *Sage*.

Nas opções de escolha múltipla, a opção correta e uma das opções erradas têm cada uma delas quatro hipóteses de apresentação do enunciado, tendo sido utilizado o comando *showone* para o efeito. Assim é possível escolher qual a opção correta/errada a apresentar de acordo com o enunciado apresentado. O mesmo se verificou na construção do código da resolução do exercício uma vez que, a resposta dada terá de apresentar a correspondência que representa uma função dada no enunciado gerado.

- Código do enunciado do exercício

```
%problem Identificar funções representadas através de diagramasde setas.
Nas figuras seguintes encontram-se representadas duas correspondências.
<showone escolha>
<thisone>fig1 $\quad $ fig2</thisone>
<thisone>fig1 $\quad$  fig3</thisone>
<thisone>fig2 $\quad$  fig4</thisone>
<thisone>fig3 $\quad$  fig4</thisone>
</showone>
<multiplechoice>
<choice> <showone escolha>
<thisone> A correspondência $A \rightarrow B$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $A \rightarrow B$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $G \rightarrow H$ é uma função.</thisone>
<thisone> A correspondência $G \rightarrow H$ é uma função.</thisone>
</showone> </choice>
<choice> <showone escolha>
<thisone> A correspondência $C \rightarrow D$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $E \rightarrow F$ é uma função.</thisone>
<thisone> A correspondência $C \rightarrow D$ é uma função.</thisone>
<thisone> A correspondência $E \rightarrow F$ é uma função.</thisone>
</showone> </choice>
<choice> Ambas as correspondências representam funções. </choice>
<choice> Nenhuma das correspondências representa uma função.</choice>
</multiplechoice>
```

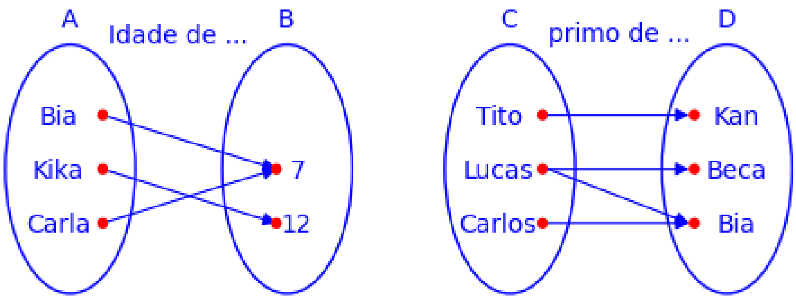
- Código da resolução do exercício

```
A correspondência que representa uma função é:
<showone escolha>
<thisone> fig1 </thisone>
<thisone>fig1</thisone>
<thisone>fig4</thisone>
<thisone>fig4</left>
</thisone> </showone>
porque a correspondência é unívoca, ou seja, a cada elemento do conjunto
```

`de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.`

Na figura 3.6 apresentamos uma concretização do exercício bem como a sua resolução.

Nas figuras seguintes encontram-se representadas duas correspondências.



Escolhe a opção correta.

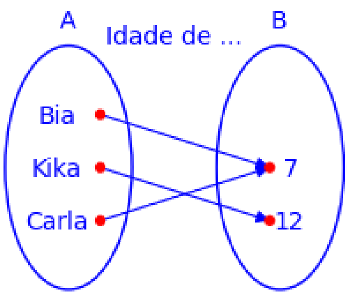
Ambas as correspondências representam funções.

Nenhuma das correspondências representa uma função.

A correspondência $C \to D$ é uma função.

A correspondência $A \to B$ é uma função.

A correspondência que representa uma função é:



porque a correspondência é unívoca, ou seja, a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

Figura 3.6

EXERCÍCIO: E97I30_DEF_FUNCAO_07

Neste exercício pretende-se que o aluno identifique correspondências que são funções, sendo usadas diferentes representações para as correspondências, nomeadamente tabelas e gráficos.

A diferença deste exercício face ao anterior está no tipo de representação, no domínio e no conjunto de chegada que, neste exercício, são subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

Na figura 3.7 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

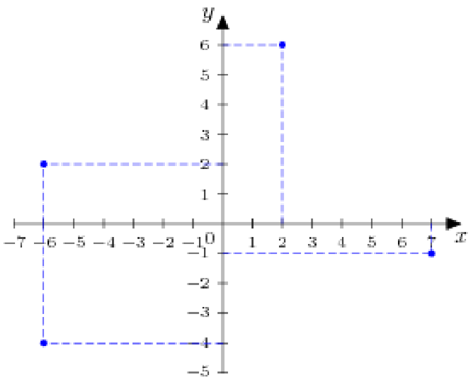
Na figura seguinte apresentam-se as correspondências I e II:

I

x	-6	-2	2	7
y	2	-4	6	-1

e

II



Escolhe a opção correta.

Nenhuma das correspondências representa uma função.

Ambas as correspondências representam funções.

A correspondência I representa uma função e a correspondência II não representa uma função.

A correspondência I não representa uma função e a correspondência II representa uma função.

A correspondência que representa uma função é:

x	-6	-2	2	7
y	2	-4	6	-1

porque a cada valor da variável x corresponde um e um só valor da variável y.

Figura 3.7

EXERCÍCIO: E97I30_DEF_FUNCAO_EXPRE_05

Neste exercício apresenta-se o gráfico cartesiano de uma função afim. Pretende-se que o aluno, a partir dos pontos do gráfico, identifique a expressão algébrica dessa função. Os parâmetros, são os elementos do domínio, $o1, o2, ...$, gerados aleatoriamente usando o comando *ur.iunif(valor_inicial,valor_final)*, bem como os valores de a e b que definem a função afim.

- Código do enunciado do exercício

```
%problem  Identificar a expressão algébrica de uma função afim dados
pontos do gráfico cartesiano dessa função.
Seja $A=\Big\{o1,o2,o3,o4\Big\}$ e $f$ uma função de $A$ em $\mathbb{Q}$.
Sabendo que  o gráfico de $f$  é o conjunto,
$$G_f=\Big\{(o1,f_o1),(o2,f_o2),(o3,f_o3),(o4,f_o4)\Big\},$$
conclui-se que a expressão de $f$, na forma $ax+b$, é:
<multiplechoice>
<choice> $$f(x)=f1$$</choice>
<choice>$$f(x)=re2$$ </choice>
<choice> $$f(x)=re3$$</choice>
<choice> $$f(x)=re4$$</choice>
</multiplechoice>
```

- Código da resolução do exercício

```
Apresentamos dois processos para resolver o exercício.
Um processo consiste em usar as expressões indicadas e identificar
a que satisfaz a função usando para isso a noção de objeto e imagem.
Assim conclui-se que a função $\,f\,$ na forma $\,ax+b\,$ é $\,
f(x)=f1\,$ uma vez que
$f(o1)= a1 \times o1 sgn_b1 mod_b1 \Leftrightarrow f(o1)=f_o1$,
$f(o2)= a1 \times o2 sgn_b1 mod_b1 \Leftrightarrow f(o2)=f_o2$,
$f(o3)= a1 \times o3 sgn_b1 mod_b1 \Leftrightarrow f(o3)=f_o3$,
$f(o4)= a1 \times o4 sgn_b1 mod_b1 \Leftrightarrow f(o4)=f_o4$.
O outro processo recorre à noção de sequência numérica uma
vez que os objetos são consecutivos.
Assim pretende-se identificar uma relação entre o objeto e
a respetiva imagem.
Observa-se que $\,f_o1\,$,$\,f_o2\,$,$\,f_o3\,$,$\,f_o4\,$
 são as imagens dos objetos consecutivos
 $\,o1\,$,$\,o2\,$,$\,o3\,$ e $\,o4\,$.
Assim o coeficiente $\,a\,$ de $\,x\,$ da função $\,f\,$ é
dado por $a=f(o2)-f(o1)$
Como $\,f(o2)=f_o2\,$ e $\,f(o1)=f_o1\,$ tem-se que
```

```
<showone escolha> <thisone 0> $a=f_o2-f_o1$ </thisone>
<thisone 1>$a=f_o2-(f_o1)\Leftrightarrow a=f_o2+mod_f_o1$
 </thisone> </showone>
e deste modo $\,a=a1$. Logo a função $\,f\,$ é dada por:
<showone coeficientex>
<thisone 0-coeficiente de x é diferente de 1> $\,f(x)=a1x+b$. </thisone>
<thisone 1 -coeficente x é 1>$\,f(x)=x+b$.</thisone> </showone>
Substituindo, por exemplo, o valor $\,o1\,$ do domínio da função
na expressão algébrica tem-se:
$f(o1)= a1 \times o1 +b\,$ logo $\,f(o1)= prod_o1 +b$
Como  $f(o1)=f_o1\,$, tem-se que $b=b1$.
Verifica-se o mesmo para os restantes valores do domínio.
Concluindo-se que a função $\,f\,$ na forma $\,ax+b\,$ é $\,f1\,$.
```

Nas figuras 3.8 e 3.9 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Seja $A = \{4, 5, 6, 7\}$ e f uma função de A em $\mathbb{Q}$. Sabendo que o gráfico de f é o conjunto,

$$G_f = \{(4,12), (5,16), (6,20), (7,24)\},$$

conclui-se que a expressão de f, na forma $ax+b$, é:

$$f(x) = -4\,x$$

$$f(x) = 4\,x - 4$$

$$f(x) = 4\,x$$

$$f(x) = 4\,x + 4$$

Figura 3.8

Apresentamos dois processos para resolver o exercício.

Um processo consiste em usar as expressões indicadas e identificar a que satisfaz a função usando para isso a noção de objeto e imagem.

Assim conclui-se que a função f na forma $ax + b$ é $f(x) = 4\,x - 4$ uma vez que

$f(4) = 4 \times 4 - 4 \Leftrightarrow f(4) = 12$,

$f(5) = 4 \times 5 - 4 \Leftrightarrow f(5) = 16$,

$f(6) = 4 \times 6 - 4 \Leftrightarrow f(6) = 20$,

$f(7) = 4 \times 7 - 4 \Leftrightarrow f(7) = 24$.

O outro processo recorre à noção de sequência numérica uma vez que os objetos são consecutivos.

Assim pretende-se identificar uma relação entre o objeto e a respetiva imagem.

Observa-se que $12 , 16 , 20 , 24$ são as imagens dos objetos consecutivos $4 , 5 , 6$ e 7 .

Assim o coeficiente a de x da função f é dado por $a = f(5) - f(4)$

Como $f(5) = 16$ e $f(4) = 12$ tem-se que $a = 16 - 12$ e deste modo $a = 4$.

Logo a função f é dada por: $f(x) = 4x + b$.

Substituindo, por exemplo, o valor 4 do domínio da função na expressão algébrica tem-se:

$f(4) = 4 \times 4 + b$ logo $f(4) = 16 + b$

Como $f(4) = 12$, tem-se que $b = -4$.

Verifica-se o mesmo para os restantes valores do domínio.

Concluindo-se que a função f na forma $ax + b$ é $4\,x - 4$.

Figura 3.9

EXERCÍCIO: E97I30_DEF_FUNCAO_D_CD_06

Neste exercício apresenta-se uma função usando diferentes representações (gráfico, diagrama de setas e tabelas) e pretende-se que o aluno identifique o domínio e o contradomínio da função.

Dado que existem três possibilidades diferentes de apresentar o enunciado do exercício a escolha é feita usando os comandos *showone* e *thisone*. Os parâmetros do exercício são as coordenadas dos pontos. De notar ainda que os elementos do domínio e do contradomínio aparecem ordenados por ordem crescente.

- Código do enunciado do exercício

```
%problem  Identificar o domínio e o contradomínio de uma função
definida por um gráfico, tabela ou diagrama sagital.
```

```
 Considera a função definida do seguinte modo:
<showone escolha>
<thisone>
<latex 100%>
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=units,y=units]
XAXIS
YAXIS
\draw[shift={(xcenterf,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt)
node[below] {};
\draw  (0,rtop) node (yaxis) [left] {$y$} (rright,0) node (xaxis)
 [below] {$x$};
\clip (rleft,rbottom) rectangle (rright,rtop);
\fill[blue] (x1,y1) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x1,0) -- (x1,y1); );
\draw[densely dashed,blue] (0,y1) -- (x1,y1);
\fill[blue] (x2,y2) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x2,0) -- (x2,y2);
\draw[densely dashed,blue] (0,y2) -- (x2,y2);
\fill[blue] (x3,y3) circle (0.5mm) node[above right] {};
\fill[blue] (x4,y4) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x4,0) -- (x4,y4);
\draw[densely dashed,blue] (0,y4) -- (x4,y4);
\fill[blue] (x5,y5) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x5,0) -- (x5,y5);
\draw[densely dashed,blue] (0,y5) -- (x5,y5);
\fill[blue] (x6,y6) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x6,0) -- (x6,y6);
\draw[densely dashed,blue] (0,y6) -- (x6,y6);
\node[below left] at (0,0) {\footnotesize $0$};
\end{tikzpicture}
</latex>
</thisone>
<thisone>fig1</thisone>
<thisone>
<table border="1" cellspacing="0" align="center">
<tr>
<td style="background-color:cyan" ALIGN=MIDDLE Width=30> $x$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $x1$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $x2$ </td>
```

```
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $x3$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $x4$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $x5$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $x6$ </td>
</tr>
<tr>
<td style="background-color:cyan" ALIGN=MIDDLE Width=30>$y$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $y1$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $y3$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $y2$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $y4$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $y5$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $y6$ </td>
</tr>
</table>
</thisone>
</showone>
O domínio, $D$, e o contradomínio, $D\;'$, da função são,
respetivamente,

<multiplechoice>
<choice>$D= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\} \quad$ e $\quad
D\;'= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\}$</choice>
<choice>$D= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\} \quad$ e $\quad
D\;'= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\}$</choice>
<choice>$D= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\} \quad$ e $\quad
D\;'= \{y6,y2,y4,y5,y1\}$</choice>
<choice>$D= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\} \quad$ e $\quad
D\;'= \{x1,x4,x2,x6,x5\}$</choice>
</multiplechoice>
O domínio da função é o conjunto dos objetos, ou seja,
 $D= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\}$.
O contradomínio é o conjunto das imagens, ou seja,
 $D\;'= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\}$.
```

- Código da resolução do exercício

```
<multiplechoice>
<choice> $D= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\} \quad$ e $\quad
D\;'= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\}$ </choice>
<choice>  $D= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\} \quad$ e $\quad
```

```
 D\;'= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\}$ </choice>
<choice> $D= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\} \quad$ e $\quad
 D\;'= \{y6,y2,y4,y5,y1\}$</choice>
<choice>  $D= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\} \quad$ e $\quad
 D\;'= \{x1,x4,x2,x6,x5\}$</choice>
</multiplechoice>
O domínio da função é o conjunto dos objetos,
 ou seja, $D= \{x1,x4,x3,x2,x6,x5\}$.
O contradomínio é o conjunto das imagens,
 ou seja, $ D\;'= \{y6,y2,y4,y5,y3,y1\}$.
```

Na figura 3.10 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera a função definida do seguinte modo:

x	-7	1	0	-4	12	6
y	11	7	-5	-3	2	-8

O domínio, D, e o contradomínio, $D\,'$, da função são, respetivamente,

$D = \{-7, -4, 0, 1, 6, 12\} \quad$ e $\quad D\,' = \{-8, -5, -3, 2, 11\}$

$D = \{-8, -5, -3, 2, 7, 11\} \quad$ e $\quad D\,' = \{-7, -4, 1, 6, 12\}$

$D = \{-8, -5, -3, 2, 7, 11\} \quad$ e $\quad D\,' = \{-7, -4, 0, 1, 6, 12\}$

$D = \{-7, -4, 0, 1, 6, 12\} \quad$ e $\quad D\,' = \{-8, -5, -3, 2, 7, 11\}$

O domínio da função é o conjunto dos objetos, ou seja, $D = \{-7, -4, 0, 1, 6, 12\}$.

O contradomínio é o conjunto das imagens, ou seja, $D\,' = \{-8, -5, -3, 2, 7, 11\}$.

Figura 3.10

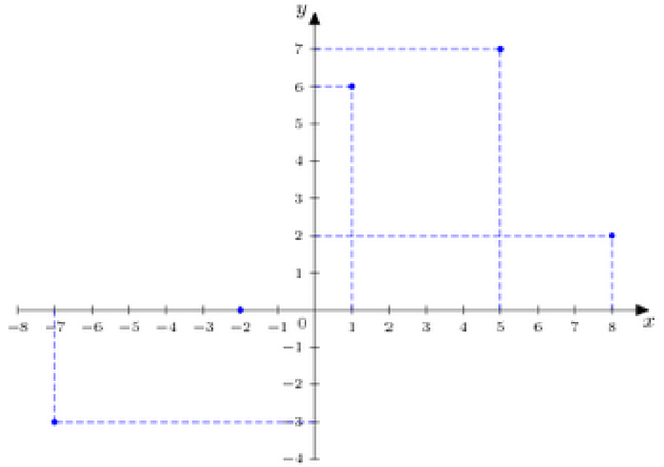
EXERCÍCIO: E97I30_DEF_FUNCAO_08

Dado o gráfico de uma função numérica de variável numérica, pretende-se que o aluno identifique as coordenadas de um ponto do gráfico, objetos e imagens da função.

Os parâmetros neste exercício são os valores das abcissas e das ordenadas dos pontos do gráfico. Na construção do código da resolução do exercício, para garantir que a resolução estivesse de acordo com a opção correta apresentada, usamos os comandos *showone* e *thisone*, usando a mesma variável que foi usada na escolha múltipla.

Na figura 3.11 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera o gráfico da função g



Identifica a opção correta.

O ponto $(2, 8)$ pertence ao gráfico de g.

A imagem de 5 é 7.

O ponto $(6, 1)$ pertence ao gráfico de g.

O ponto $(-3, -7)$ pertence ao gráfico de g.

A opção correta é "A imagem de 5 é 7", pois o par ordenado $(5, g(5)) = (5, 7)$ é um ponto do gráfico de g.

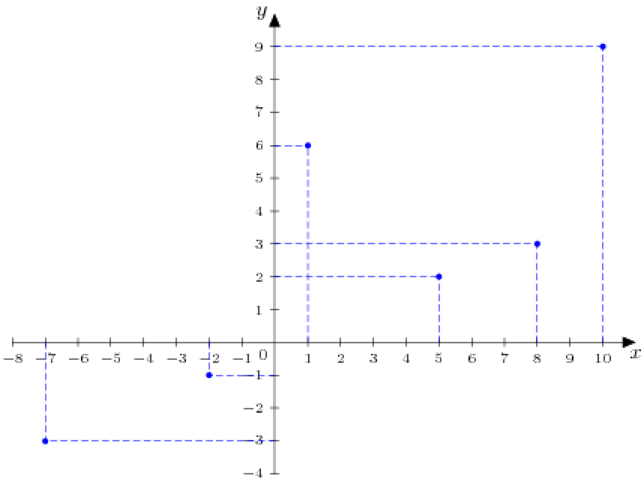
Figura 3.11

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICO_CARTESIANO_02

Neste exercício é dado o gráfico de uma função numérica de variável numérica e pretende-se que o aluno identifique o conjunto de pontos que o define.

Na figura 3.12 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera a seguinte representação da função f:



O gráfico de f é:

$$G_f = \{(-3,-7); (-1,-2); (6,1); (2,5); (3,8); (9,10)\}$$

$$G_f = \{(-2,-1); (1,6); (5,2); (8,3); (10,9)\}$$

$$G_f = \{(-7,-3); (-2,-1); (1,6); (5,2); (8,3); (10,9)\}$$

$$G_f = \{(-3,-7); (-1,-2); (6,1); (2,5); (3,8)\}$$

O gráfico cartesiano de uma função f é o conjunto G_f constituído pelos pontos do plano cuja ordenada é a imagem, por f, da abcissa.

Neste caso, o gráfico de f é

$$G_f = \{(-7,-3); (-2,-1); (1,6); (5,2); (8,3); (10,9)\}.$$

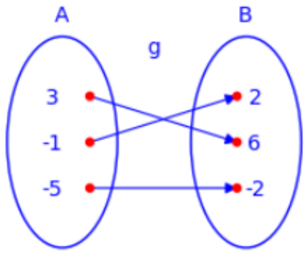
Figura 3.12

E97I30_DEF_FUNCAO_REPRES_04

Apresenta-se uma função usando um diagrama de setas e pretende-se que o aluno identifique outra representação da função: tabela, gráfico representado num referencial cartesiano, conjunto de pontos que define o gráfico, expressão algébrica.

Na figura 3.13 apresentamos uma concretização do exercício e na figura 3.14 a sua resolução.

Considera a função g representada pelo diagrama de setas:



Outra representação da função g é:

$$G_g = \{(-2,-5);(2,-1);(6,3)\}$$

$$g(x) = -5\,x - 2$$

---

x	-2	6	2
$g(x)$	-5	3	-1

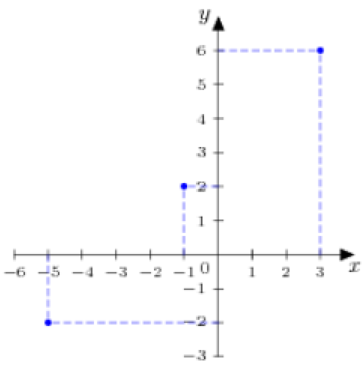
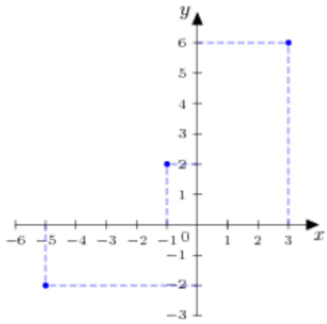


Figura 3.13

A opção correta é:



porque -5 , -1 e 3 são os objetos da função e, $g(-5) = -2$, $g(-1) = 2$ e $g(3) = 6$ as respetivas imagens.

Deste modo, os pontos $(-5, -2)$,$(-1, 2)$,$(3, 6)$ são pontos do gráfico da função g.

Figura 3.14

3.3.2 OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Relativamente aos seguintes conteúdos :

- Adição, subtração e multiplicação de funções numéricas e com o mesmo domínio; exponenciação de expoente natural de funções numéricas;
- Operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos;
- Funções constantes, lineares e afins; formas canónicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canónica;

foi criado um conjunto de exercícios, dos quais apresentamos alguns exemplos pormenorizados e a descrição sumária dos restantes. Não colocámos o código de construção de todos os exercícios em virtude de se usarem técnicas semelhantes para a elaboração dos mesmos.

EXERCÍCIO: E97I30_ADICAOFNUMERICA_005

São dadas duas funções de domínio finito sendo uma representada pela expressão algébrica e a outra na forma de uma tabela, gráfico ou diagrama de seta.

Como existem três possibilidades diferentes de apresentar o enunciado do exercício a escolha é feita usando os comandos *showone* e *thisone*.

Pretende-se que o aluno calcule a imagem de uma função que se obtém pelo produto de uma constante e adições algébricas de outras funções.

A escolha da adição/subtração é feita de forma aleatória, através de uma variável, *s.op1 = choice([r'+', r'-'])*, que assume o valor '+' ou '−'.

Na resolução do exercício verificam-se duas possibilidades:

(i) O produto da constante pelo coeficiente de x da função f, após substituição do valor de x, é inteiro;

(ii) O produto da constante pelo coeficiente de x da função f, após substituição do valor de x, é fracionário.

Observação 3.1 *Em (ii) estamos perante a adição (algébrica) definida pela variável op1 de um valor fracionário com um valor inteiro, o que requer efetuar a redução ao mesmo denominador.*

Para tal foram definidas variáveis no código com base no seguinte raciocínio.
Dados os números inteiros não nulos, a, b, c, e d pretende-se efetuar o cálculo de:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}. \tag{3.1}$$

Fazendo $z = m.m.c.(b, d)$, $r = \dfrac{z}{b}$ e $s = \dfrac{z}{d}$, vem

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times r}{b\times r}+\frac{c\times s}{d\times s}=\frac{a\times r}{b\times \frac{z}{b}}+\frac{c\times s}{d\times \frac{z}{d}}=\frac{a\times r}{z}+\frac{c\times s}{z}=\frac{a\times r+c\times s}{z}$$

- Código do enunciado do exercício

  Neste exercício usam-se diferentes representações da função g. Isto é feito com a utilização de uma variável *escolha_rep_g* que tem valores 0, 1, 2 (aleatoriamente) gerando uma tabela, um diagrama e um gráfico, respetivamente.

```
%problem  Efetuar a soma e a diferença de duas funções numéricas de domínio
finito e o produto de uma constante por uma função numérica


Seja $A=\Big\{o1,o2,o3\Big\}$.
Considera as funções $f$ e $g$ de $A$ em $ \mathbb{Q}$ tais que:
<showone escolha_rep_g>
```

<thisone 0 - escolhe a tabela para g(x)>

```
<center>
<table border="0">
<td> <td> $\displaystyle f(x)=f1 \quad \text{ e } \quad $  </td> </td>
<td> <table border="1" cellspacing="0" align="center"><tr>
```

```
<td style="background-color:cyan" ALIGN=MIDDLE Width=30> $x$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $o1$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $o2$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $o3$ </td></tr>
<tr><td style="background-color:cyan" ALIGN=MIDDLE Width=30> $g(x)$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $g_o1$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $g_o2$ </td>
<td ALIGN=MIDDLE Width=30> $g_o3$ </td></tr></table></td>
</table>
</center>
</thisone> </tr>
```

<thisone 1 - escolhe o diagrama para g(x)>

```
<center> <table border="0"><td>
<td>$\displaystyle f(x)=f1 \quad \text{ e } \quad $ </td> </td>
<td> fig1
</td></table> </center>
</thisone>
```

<thisone 2 - escolhe o gráfico de g>

```
<center> <table border="0">
<td><td>$\displaystyle f(x)=f1 \quad \text{ e } \quad $</td> </td>
<td> <latex 100%>
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=units,y=units]
XAXIS  YAXIS
\draw[shift={(xcenterf,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt)
 node[below] {};
\draw  (0,rtop) node (yaxis) [left] {$y$} (rright,0) node
 (xaxis) [below] {$x$};
\clip (rleft,rbottom) rectangle (rright,rtop);
\fill[blue] (o1,g_o1) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (o1,0) -- (o1,g_o1);
\draw[densely dashed,blue] (0,g_o1) -- (o1,g_o1);
\fill[blue] (o2,g_o2) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (o2,0) -- (o2,g_o2);
\draw[densely dashed,blue] (0,g_o2) -- (o2,g_o2);
\fill[blue] (o3,g_o3) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (o3,0) -- (o3,g_o3);
\draw[densely dashed,blue] (0,g_o3) -- (o3,g_o3);
\node[below left] at (0,0) {\footnotesize $0$};
```

```
 \end{tikzpicture} </latex></td> </table> </center>
</thisone> </showone>

Indica a opção correta.
<multiplechoice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=rc1  $$   </choice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=re2   $$  </choice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=re3  $$ </choice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=re4   $$  </choice>
</multiplechoice>
```

- Código da resolução do exercício

  Aqui tem-se em atenção os casos diferentes do ponto de vista didático, da adição algébrica de inteiros ou fracionários. Usa-se o que foi exposto na Observação 3.1, uma vez que se pretendem resoluções detalhadas.

```
Pretende-se calcular $(f2 op1 g)(o1)$.
Como
<showone escolha1>

<thisone 0 se a1 tem denominador diferente de 1>
$$(f2 op1 g)(o1)= f2(o1)op1 g(o1)= c1 \left(a1\times o1@() sgn_b1 mod_b1 \right)
op1 g_o1@()=c1 \left(prod_a1_o1 sgn_b1 mod_b1 \right) op1 g_o1@()= prod_c1_a1_o1
sgn_prod_c1_b1 mod_prod_c1_b1 op1 g_o1@()=prod_c1_a1_o1 sgn_soma_b1_g_o1
mod_soma_b1_g_o1$$

reduzindo ao mesmo denominador vem
$$ prod_c1_a1_o1 sgn_soma_b1_g_o1 mod_soma_b1_g_o1=sgn_prod_c1_a1_o1
\frac{num_prod_a1_o1}{mmc_prod_a1_o1_soma_b1_g_o1} sgn_soma_b1_g_o1
\frac{num_soma_b1_g_o1}{mmc_prod_a1_o1_soma_b1_g_o1}=rc1$$ o que permite
concluir que
</thisone>

<thisone 1 se a1 tem denominador 1 >
$$(f2 op1 g)(o1)= c1 f(o1)op1 g(o1)=c1 \left(a1\times o1@() sgn_b1 mod_b1 \right)
op1 g_o1@()= c1 \left(prod_a1_o1 sgn_b1 mod_b1 \right) op1 g_o1@()=prod_c1_a1_o1
sgn_prod_c1_b1 mod_prod_c1_b1 op1 g_o1@()= prod_c1_f_o1 op1 g_o1@()=rc1,$$
conclui-se que
</thisone>  </showone>
$$(f2 op1 g)(o1)=rc1.$$
```

Na figura 3.15 apresentamos uma concretização do exercício e respetiva resolução.

Seja $A = \{-2, 2, 6\}$. Considera as funções f e g de A em $\mathbb{Q}$ tais que:

$$f(x) = \frac{1}{5}\,x + 1 \quad \text{e}$$

x	-2	2	6
$g(x)$	2	-2	-6

Indica a opção correta.

$$(4\,f + g)(-2) = \frac{2}{5}$$

$$(4\,f + g)(-2) = \frac{38}{5}$$

$$(4\,f + g)(-2) = \frac{22}{5}$$

$$(4\,f + g)(-2) = -\frac{18}{5}$$

Pretende-se calcular $(4\,f + g)(-2)$.

Como

$$(4\,f + g)(-2) = 4\,f(-2) + g(-2) = 4\left(\frac{1}{5} \times (-2) + 1\right) + 2 = 4\left(-\frac{2}{5} + 1\right) + 2 = -\frac{8}{5} + 4 + 2 = -\frac{8}{5} + 6$$

reduzindo ao mesmo denominador vem

$$-\frac{8}{5} + 6 = -\frac{8}{5} + \frac{30}{5} = \frac{22}{5}$$

o que permite concluir que

$$(4\,f + g)(-2) = \frac{22}{5}\,.$$

Figura 3.15

EXERCÍCIO: E97I30_ADICAOFCONTRADOMI_007

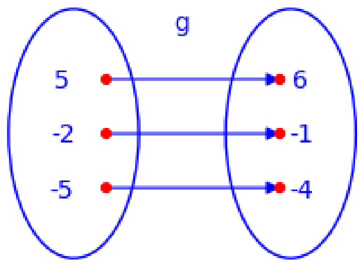
Neste exercício são dadas duas funções de domínio finito em que uma delas é representada através da sua expressão algébrica e a outra por uma tabela, por um diagrama de setas ou por um gráfico. Pretende-se que o aluno determine o contradomínio da função soma ou diferença das duas funções.

Na figura 3.16 apresenta-se uma concretização do exercício. Nesta concretização a função g é dada por diagramas de setas e pretende-se determinar o contradomínio da função diferença.

Seja $A = \{-5, -2, 5\}$.

Considera as funções f e g de A em $\mathbb{Q}$ tais que:

$f(x) = -3\,x - 3$ e



O contradomínio, D', da função $f - g$ é:

$D'(f-g) = \{8, 2, -12\}$

$D'(f-g) = \{-22, -10, 18\}$

$D'(f-g) = \{16, 4, -24\}$

$D'(f-g) = \{7, 1, -13\}$

Figura 3.16

A resolução da mesma concretização do exercício encontra-se na figura 3.16.

Como

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)-g(x)$
-5	$-3\times(-5)-3=15-3=12$	-4	$12-(-4)=16$
-2	$-3\times(-2)-3=6-3=3$	-1	$3-(-1)=4$
5	$-3\times 5-3=-15-3=-18$	6	$-18-6=-24$

conclui-se que o contradomínio da função $f-g$ é o conjunto $D\,'$ tal que

$$D\,'(f-g)=\{16,4,-24\}.$$

Figura 3.17

- Código do enunciado do exercício

  No enunciado e na resolução deste exercício são usadas técnicas semelhantes às utilizadas noutros exercícios.

  Destaca-se apenas que nas opções de escolha múltipla, existem várias escolhas com base nos comandos *showone* e *thisone*, embora a variável de teste seja diferente em cada caso. Esta escolha deveu-se ao facto de que, tanto no cálculo dos valores da opção correta, como dos valores das opções erradas existiam situações em que, ao gerar o exercício, havia elementos do contradomínio iguais. Assim, aquando da apresentação das diversas situações, evita-se que apareçam valores repetidos.

```
<choice><showone certa>
<thisone> $$ D\;'(f op1 g) =\{rc1,rc2,rc3\}. $$  </thisone>
<thisone>$$ D\;'(f op1 g) =\{rc2,rc3\}. $$ </thisone>
<thisone> $$ D\;'(f op1 g) =\{rc1,rc2\}. $$  </thisone>
<thisone> $$ D\;'(f op1 g) =\{rc1,rc3\}. $$ </thisone>
<thisone> $$ D\;'(f op1 g) =\{rc1\}.  $$  </thisone>
</showone>  </choice>
```

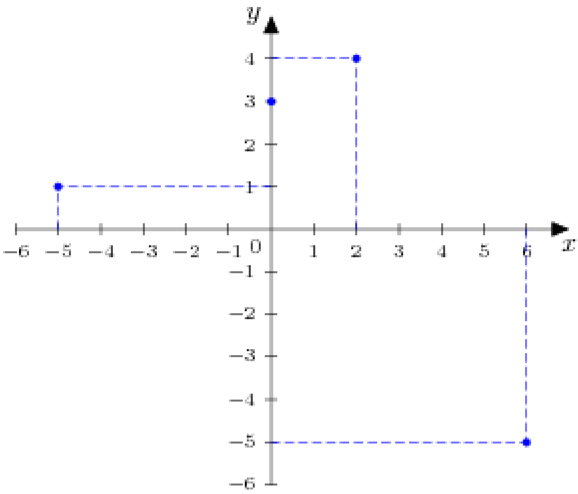
EXERCÍCIO: E97I30_POTENCIAFNUMERICA_008

Neste exercício apresenta-se uma função f numérica de variável numérica através do seu gráfico ou do conjunto de pontos que o definem, tabela ou diagrama de setas e pretende-se que o aluno determine o conjunto de pontos do gráfico de f^2.

Neste exercício não são apresentados os códigos do enunciado nem da resolução, uma vez as técnicas usadas na sua construção são semelhantes às usadas em exercícios anteriores.

Na figura 3.18 encontra-se uma concretização do enunciado do exercício.

Considera a função f definida da seguinte forma:



O gráfico da função f^2 é o conjunto

$$G_{f^2} = \{(25,1);(0,9);(4,16);(36,25)\}$$

$$G_{f^2} = \{(-5,2);(0,6);(2,8);(6,-10)\}$$

$$G_{f^2} = \{(-5,1);(0,9);(2,16);(6,25)\}$$

$$G_{f^2} = \{(-10,2);(0,6);(4,8);(12,-10)\}$$

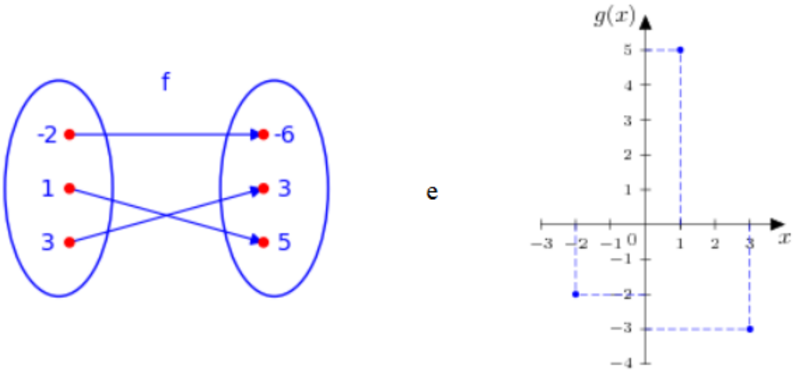
Figura 3.18

EXERCÍCIO: E97I30_MULTIPLICACAOFNUMERICA_009

São dadas duas funções de domínio finito em que uma delas é representada usando um diagrama de setas e a outra através de um gráfico ou de uma tabela. Pretende-se que o aluno use os conceitos de objeto e imagem e saiba determinar a função produto das duas funções dadas.

Na figura 3.19 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera as funções definidas do seguinte modo:



Indica a opção correta.

$$(f \times g)(3) = -9$$

$$(f \times g)(3) = 6$$

$$(f \times g)(3) = 9$$

$$(f \times g)(3) = 0$$

Pretende-se calcular $(f \times g)(3)$.

Como $(f \times g)(3) = f(3) \times g(3) = 3 \times (-3) = -9$, conclui-se que

$$(f \times g)(3) = -9.$$

Figura 3.19

EXERCÍCIO: E97I30__ADICAOF__001

São dadas as expressões algébricas de duas funções afins e pretende-se que o aluno adicione as duas funções e apresente a função soma.

As funções são do tipo $y = ax + b$, os parâmetros são os valores de a e de b sendo estes números racionais diferentes de zero.

A apresentação da resolução do problema compreende um conjunto de passos que variam de acordo com várias situações: sinais dos coeficientes de x e dos termos independentes, presença de valores racionais nos coeficientes de x e nos termos independentes com denominadores diferentes entre si, ou a presença de números inteiros em alguns ou todos estes parâmetros.

Nas figuras 3.20 e 3.21 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera as funções f e g, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

$$f(x) = x + 4 \quad \text{e} \quad g(x) = -5\,x + \frac{3}{2}\,.$$

A função $f + g$ é dada por:

$$(f+g)(x) = 6\,x + \frac{11}{2}$$

$$(f+g)(x) = -4\,x + \frac{5}{2}$$

$$(f+g)(x) = 6\,x + \frac{5}{2}$$

$$(f+g)(x) = -4\,x + \frac{11}{2}$$

Figura 3.20

Seja

$$f(x) = x + 4 \quad \text{e} \quad g(x) = -5\,x + \frac{3}{2}\,.$$

Como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

obtém-se

$$(f+g)(x) = (x+4) + \left(-5\,x + \frac{3}{2}\right).$$

Desembaraçando de parênteses,

$$(f+g)(x) = x + 4 - 5\,x + \frac{3}{2}$$

e, aplicando a propriedade comutativa da adição vem

$$(f+g)(x) = x - 5\,x + 4 + \frac{3}{2}\,.$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica obtém-se

$$(f+g)(x) = (1-5)x + 4 + \frac{3}{2}\,.$$

e, reduzindo ao mesmo denominador,

$$(f+g)(x) = -4x + \frac{8}{2} + \frac{3}{2}$$

Efetuando os cálculos resulta

$$(f+g)(x) = -4\,x + \frac{11}{2}\,.$$

Figura 3.21

Assim, na resolução do exercício, após a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos quatro possibilidades que estão relacionadas com a existência ou não de valores fracionários nos coeficientes em x e nos termos independentes.

EXERCÍCIO: E97I30_SUBTRACAOF_002

Este exercício é idêntico ao anterior, pretendendo-se neste caso que o aluno efetue a subtração de duas funções afins e simplifique a expressão obtida. Deste modo apresentamos uma concretização do mesmo e respetiva resolução.

Nas figuras 3.22 e 3.23 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considere as funções f e g, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

$$f(x) = -\frac{2}{3}\,x + \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 1.$$

A função $f - g$ na forma canónica é dada por:

$$(f-g)(x) = -\frac{5}{3}\,x - \frac{1}{4}$$

$$(f-g)(x) = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{4}$$

$$(f-g)(x) = -\frac{5}{3}\,x + \frac{7}{4}$$

$$(f-g)(x) = \frac{1}{3}\,x + \frac{7}{4}$$

Figura 3.22

Seja

$$f(x) = -\frac{2}{3}\,x + \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 1.$$

Como

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

vem

$$(f - g)(x) = \left(-\frac{2}{3}\,x + \frac{3}{4}\right) - (x - 1).$$

Desembaraçando os parênteses resulta

$$(f - g)(x) = -\frac{2}{3}\,x + \frac{3}{4} - x + 1$$

e, aplicando, a propriedade comutativa da adição,

$$(f - g)(x) = -\frac{2}{3}\,x - x + \frac{3}{4} + 1.$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica,

$$(f - g)(x) = \left(-\frac{2}{3} - 1\right)x + \frac{3}{4} + 1.$$

Reduzindo ao mesmo denominador,

$$(f - g)(x) = \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right)x + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}.$$

Efetuando os cálculos conclui-se que

$$(f - g)(x) = -\frac{5}{3}\,x + \frac{7}{4}.$$

Figura 3.23

EXERCÍCIO: E97I30_PRODUTOCONSTF_003

Neste exercício é dada a expressão algébrica de uma função afim e uma constante racional diferente de zero. Pretende-se que o aluno efetue o produto dessa constante pela função. Como os procedimentos utilizados na construção deste exercício são semelhantes a exercícios anteriores, apresentamos apenas uma concretização do mesmo e respetiva resolução.

Na figura 3.24 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera a função f, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definida por $f(x) = -\frac{1}{2}\ x - \frac{4}{5}$

O produto de f pela constante $-\frac{1}{2}$ é:

$$-\frac{1}{2} \times f(x) = \frac{1}{4}\ x + \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{2} \times f(x) = -\frac{1}{4}\ x + \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{2} \times f(x) = \frac{1}{4}\ x - \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{2} \times f(x) = \frac{1}{4}\ x - \frac{4}{5}$$

Seja $f(x) = -\frac{1}{2}\ x - \frac{4}{5}$.

Multiplicando a constante $-\frac{1}{2}$ por $f(x)$ vem

$$-\frac{1}{2} \times f(x) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\ x - \frac{4}{5}\right)$$

e, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica obtém-se

$$-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right).$$

Efetuando os cálculos,

$$\frac{1}{4}\ x + \frac{2}{5}$$

Conclui-se então que

$$-\frac{1}{2} \times f(x) = \frac{1}{4}\ x + \frac{2}{5}.$$

Figura 3.24

EXERCÍCIO: E97I30_CANONICAF_004

Neste exercício é dada uma expressão algébrica de uma função e pretende-se que o aluno a reduza à forma canónica.

A expressão está escrita na seguinte forma:

$$a1x + m1 \times (a2x + b2) + m2$$

onde $a1, m1, a2, b2, m2$ são os parâmetros definidos como números racionais diferentes de zero.

Nas figuras 3.25 e 3.26 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera a função f, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definida por:

$$f(x) = -\frac{2}{5}\,x - 2\left(-\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

A expressão da função f escrita na forma canónica é:

$$f(x) = \frac{3}{5}\,x + 1$$

$$f(x) = -\frac{7}{5}\,x + 1$$

$$f(x) = \frac{3}{5}\,x - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{7}{5}\,x - \frac{1}{2}$$

Figura 3.25

Considera

$$f(x) = -\frac{2}{5}\,x - 2\left(-\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica obtém-se:

$$f(x) = -\frac{2}{5}\,x - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{5}\,x + x - 1 + \frac{1}{2}$$

Usando novamente a propriedade distributiva,

$$f(x) = \left(-\frac{2}{5} + 1\right)x - 1 + \frac{1}{2}$$

e, reduzindo ao mesmo denominador,vem

$$f(x) = \left(-\frac{2}{5} + \frac{5}{5}\right)x - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}\,x - \frac{1}{2}\,.$$

Assim, a forma canónica da função f é

$$f(x) = \frac{3}{5}\,x - \frac{1}{2}\,.$$

Figura 3.26

EXERCÍCIO: E97I30_AFIMCONSTLINEAR_006

Neste exercício são dadas duas funções afins, sendo uma do tipo $y = ax + b$ e a outra do tipo $y = c$, sendo os parâmetros a, b e c números racionais diferentes de zero.

Pretende-se que o aluno identifique a função resultante (afim não linear, linear ou constante) da adição algébrica e da multiplicação das funções dadas.

Nas opções de escolha múltipla é apresentada uma de várias soluções corretas (e erradas) de uma forma aleatória, com base numa variável *s.escolha* que depois é usada em conjunto com a função *showone* na escolha múltipla.

Isto leva a que na apresentação da resolução, seja escolhida a resolução de acordo com a resposta certa apresentada. Tal é concretizado com a utilização da mesma variável *s.escolha* numa sequência de *showone* na mesma ordem que foi usada para apresentação das possíveis soluções.

Nas figuras 3.27 e 3.28 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera as funções g e h, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, tais que:

$$g(x) = 2x + 7 \quad \text{e} \quad h(x) = -9$$

Assinala a opção correta.

$g - h$ é uma função constante.

$g \times h$ é uma função linear.

$g + h$ é uma função afim.

$g - h$ é uma função linear.

Figura 3.27

Vamos calcular $(g + h)(x)$.

Como

$$(g + h)(x) = g(x) + h(x) = (2x + 7) + (-9) = 2x + 7 - 9 = 2x - 2,$$

conclui-se que a função $g + h$ é do tipo $ax + b$, logo é uma função afim.

Figura 3.28

3.3.3 FUNÇÃO AFIM

Relativamente aos seguintes conteúdos :

- Equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim;
- Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical;
- Relação entre declive e paralelismo;
- Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas;
- Equação de reta vertical;

- Problemas envolvendo equações de retas;

foi criado um conjunto de exercícios, dos quais apresentamos alguns exemplos pormenorizados e a descrição sumária dos restantes. Não colocámos o código de construção de todos os exercícios em virtude de se usarem técnicas semelhantes para a elaboração dos mesmos.

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_AFIM_2

Neste exercício é dado o gráfico de uma função afim e pretende-se identificar a ordenada na origem desta função.

- Código do enunciado do exercício

```
%PROBLEM Identificar a ordenada na origem no gráfico de uma função afim.
Na figura está representada graficamente a função $g$.
<latex 100%> \begin{tikzpicture}
[line cap=round,line join=round,>= triangle 45,x=units,y=units]
XAXIS YAXIS
\draw[shift={(xcenterf,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt)
 node[below] {};
\draw  (0,rtop) node (yaxis) [left] {$y$} (rright,0)
node (xaxis) [below] {$x$};
\clip (rleft,rbottom) rectangle (rright,rtop);
\draw[smooth,samples=100,domain=rleft@f{f}:rright@f{f}]
 plot(\x,{(a1*\x)+b1});
\fill[blue] (x1_aux,y1_aux) circle (0.5mm)  node[above right] {};
\fill[blue] (x2_aux,y2_aux) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x2_aux,0) -- (x2_aux,y2_aux);
\draw[densely dashed,blue] (0,y2_aux) -- (x2_aux,y2_aux);
\fill[blue] (x3_aux,y3_aux) circle (0.5mm) node[above right] {};
\node[below left] at (0,0) {\footnotesize $0$};
\end{tikzpicture} </latex>
Qual é o valor da ordenada na origem?
<multiplechoice>
<choice> $$ rc1  $$</choice>
<choice> $$ re2  $$</choice>
<choice> $$ re3  $$</choice>
<choice> $$ re4  $$</choice>
</multiplechoice>
```

- Código da resolução do exercício

```
A ordenada na origem é a ordenada do ponto de interseção da reta com o
eixo das ordenadas, ou seja, é a imagem do objeto $x1$.
O ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas é $(x1,y1)$, logo
a ordenada na origem é $y1$.
```

Nas figuras 3.29 e 3.30 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

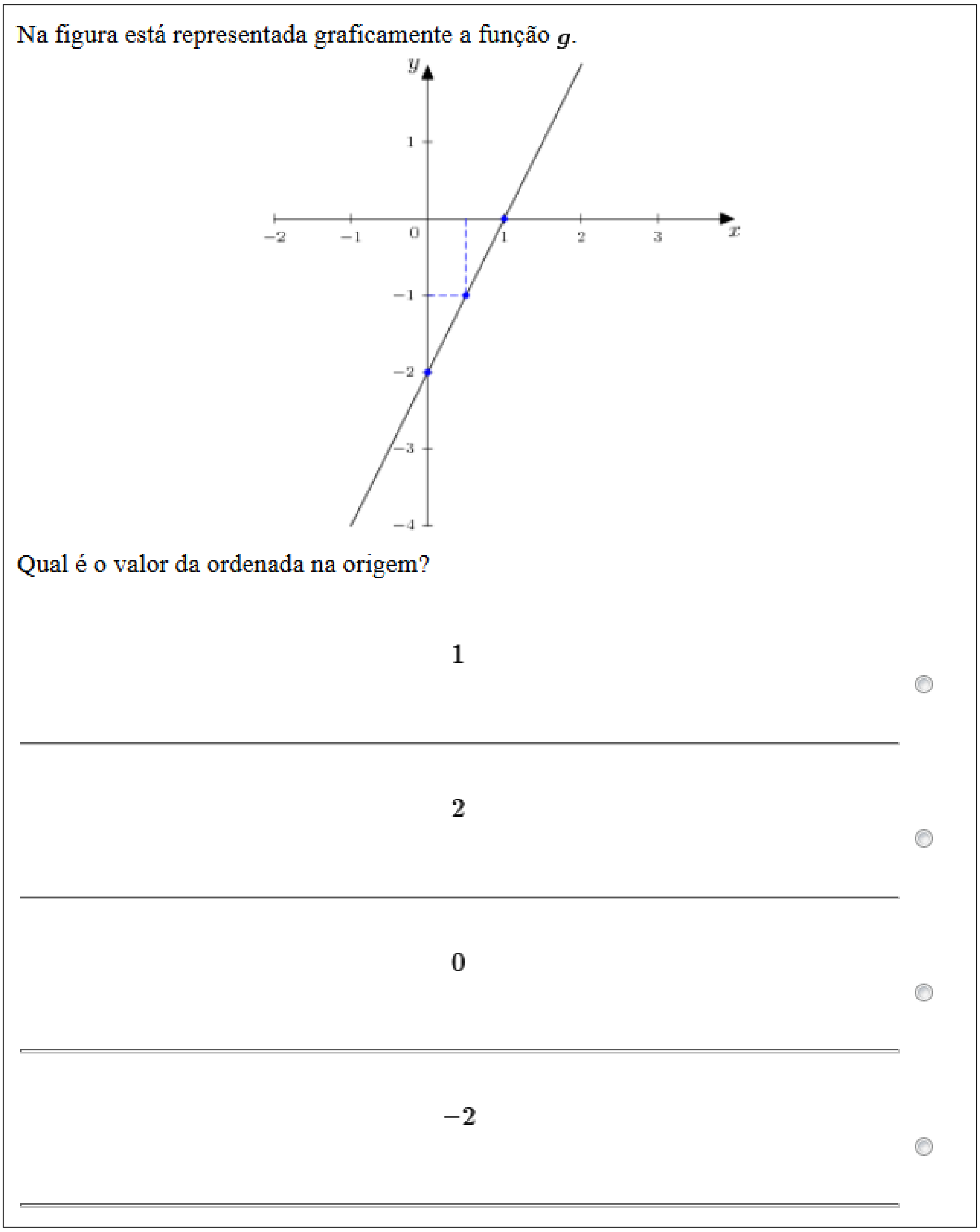


Figura 3.29

A ordenada na origem é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas, ou seja, é a imagem do objeto $\mathbf{0}$.

O ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas é $(\mathbf{0}, -\mathbf{2})$, logo a ordenada na origem é $-\mathbf{2}$.

Figura 3.30

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_AFIM_COORDENADAS_3

Dada a expressão algébrica de uma função afim do tipo $y = ax + b$, onde a e b são valores inteiros não nulos, pretende-se que o aluno determine as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.

Nas figuras 3.31 e 3.32 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Considera a função f definida por $f(x) = -4x + 5$ e designa por A e B os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos Ox e Oy, respetivamente.

Escolhe a opção correta.

$$A = \left(\frac{4}{5}, 0\right) \quad \text{e} \quad B = (0, 5)$$

$$A = \left(\frac{5}{4}, 0\right) \quad \text{e} \quad B = (0, 5)$$

$$A = \left(-\frac{5}{4}, 0\right) \quad \text{e} \quad B = (0, 5)$$

$$A = (0, 5) \quad \text{e} \quad B = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

Figura 3.31

▶ O ponto de interseção do gráfico da função com o eixo Ox tem ordenada zero, ou seja, $f(x) = 0$.

Resolvendo a equação $-4x + 5 = 0$ vem

$$-4x + 5 = 0 \Leftrightarrow -4x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Assim $A = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$.

▶ Para obter o ponto de interseção do gráfico da função com o eixo Oy determina-se a ordenada do ponto de abcissa 0, ou seja $f(0)$.

Como $f(0) = -4 \times 0 + 5 = 5$, conclui-se que $B = (0, 5)$.

Figura 3.32

Exercício: E97I30_Graficos_Afim_Paralela_4

Neste exercício é dada a expressão algébrica de uma função afim, f, do tipo $y = ax + b$, onde a e b são valores inteiros não nulos. Pretende-se que o aluno determine a equação da reta paralela ao gráfico de f, dada a ordenada na origem (diferente da definida para a função f).

Na resolução deste exercício o aluno deve identificar a como o valor do declive, b como a ordenada na origem e usar o resultado que refere que retas paralelas têm o mesmo declives.

Uma vez que este exercício é um caso particular do exercício seguinte, E97I30_Graficos_Afim_Paralela_5, não é apresentada concretização.

Exercício: E97I30_Graficos_Afim_Paralela_5

Como foi referido anteriormente, este exercício é um caso geral do anterior. É dada uma função afim do tipo $y = ax + b$, onde a e b são valores inteiros e $a \neq 0$, e pretende-se determinar a expressão analítica de outra função afim cujo gráfico seja uma reta paralela ao gráfico da função dada e que passa num dado ponto.

Na figura 3.33 é apresentada uma concretização do exercício e respetiva resolução.

Considera as funções f e g definidas por

$$f(x) = 2\,x - 4 \quad \text{e} \quad g(x) = ax + b$$

Sabe-se que os gráficos das funções f e g são retas paralelas e que o ponto $(-2, 1)$ pertence ao gráfico de g.

A expressão analítica da função g é:

$$g(x) = -2\,x - 3$$

$$g(x) = 2\,x - 4$$

$$g(x) = 2\,x$$

$$g(x) = 2\,x + 5$$

Como os gráficos das funções f e g são retas paralelas, têm o mesmo declive o que permite concluir que a expressão analítica da função g é da forma $g(x) = 2x + b$.

Por outro lado, o facto do ponto $(-2, 1)$ pertencer ao gráfico de g, permite concluir que

$$g(-2) = 1 \Leftrightarrow 2 \times (-2) + b = 1 \Leftrightarrow -4 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 + 4 \Leftrightarrow b = 5.$$

Assim, a expressão analítica da função g é $g(x) = 2\,x + 5$.

Figura 3.33

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_AFIM_6

Neste exercício pretende-se que o aluno determine a ordenada na origem de uma função afim dado um ponto pertencente ao gráfico da função e o declive da reta.

Nas figuras 3.34 e 3.35 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

O valor de k para o qual o ponto $(-4,5)$ pertence ao gráfico da função h definida pela expressão $h(x) = -3x + k$ é:

$k = -19$

$k = -7$

$k = 17$

$k = 11$

Figura 3.34

Como o ponto $(-4,5)$ pertence ao gráfico de h tem-se:

$$h(-4) = 5 \Leftrightarrow -3 \times (-4) + k = 5 \Leftrightarrow 12 + k = 5 \Leftrightarrow k = 5 - 12 \Leftrightarrow k = -7.$$

Conclui-se que $k = -7$

Figura 3.35

EXERCÍCIO: E97I30__GRAFICOS__AFIM__LINEAR__7

Dado um ponto do gráfico de uma função linear pretende-se que o aluno determine a expressão algébrica da função. Na figura 3.36 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

A expressão algébrica da função linear cujo gráfico passa no ponto $(-8, 2)$ é:

$$y = 10x$$

$$y = \frac{1}{4}x$$

$$y = -4x$$

$$y = -\frac{1}{4}x$$

A função linear é do tipo $y = ax$. Como o ponto $(-8, 2)$ pertence ao gráfico da função, vem

$$2 = a \times (-8) \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = a.$$

Conclui-se assim que a expressão algébrica da função é

$$y = -\frac{1}{4}x.$$

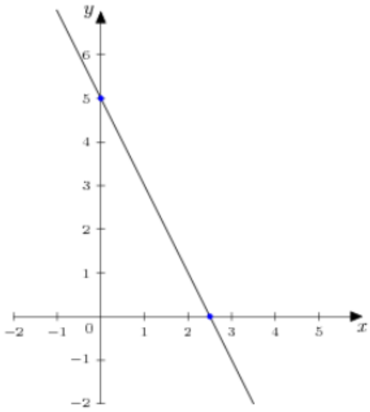
Figura 3.36

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_AFIM_TRANSLACAO_9

É dado o gráfico de uma função afim, f, do tipo $y = ax + b$, onde a e b são valores inteiros não nulos. Pretende-se que o aluno identifique coordenadas dos pontos do gráfico da função afim g com $g(x) = f(x) + k$ $(k \neq 0)$. Neste exercício o aluno pode usar o conhecimento de que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + k$ $(k \neq 0)$ se obtém do gráfico da função f por translação de vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e extremidade de coordenadas $(0, k)$.

Na figura 3.37 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Na figura está representado o gráfico da função f.



O gráfico da função g com $g(x) = f(x) - 3$:

interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 2)$

tem como ordenada na origem -3

interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 8)$

tem como ordenada na origem 5

Como $g(x) = f(x) - 3$, o gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f através de uma translação segundo o vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e extremidade no ponto de coordenadas $(0, -3)$.

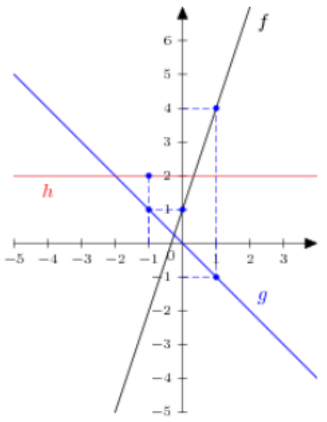
Como a ordenada na origem da função f é 5, conclui-se que a ordenada na origem da função g é $b = 5 - 3 = 2$, ou seja, o gráfico da função g interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 2)$.

Figura 3.37

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_AFIM_EXPRE_10

Neste exercício apresentam-se graficamente três funções: uma função afim não linear e não constante, uma função linear e uma função constante. Pretende-se que o aluno identifique a expressão algébrica de cada função. Na figura 3.38 apresentamos uma concretização do exercício e a respetiva resolução.

Na figura estão representadas graficamente as funções f, g e h.



Escolhe a opção correta.

$$f(x) = 2, \quad g(x) = -x \quad \text{e} \quad h(x) = 3x + 1$$

$$f(x) = -x, \quad g(x) = 3x + 1 \quad \text{e} \quad h(x) = 2$$

$$f(x) = 3x + 1, \quad g(x) = -x \quad \text{e} \quad h(x) = 2$$

$$f(x) = 3x + 1, \quad g(x) = 2 \quad \text{e} \quad h(x) = -x$$

► Como o gráfico de f é uma reta que não passa na origem do referencial, f é uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$ com $a, b \neq 0$.

Observa-se que $b = 1$ pois é a ordenada na origem da função, ou seja, é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy.

Uma vez que o ponto $(1, 4)$ pertence ao gráfico de f vem,

$$f(1) = 4 \Leftrightarrow a \times 1 + 1 = 4 \Leftrightarrow a = 3,$$

o que permite concluir que $f(x) = 3x + 1$.

► A expressão algébrica da função g é $g(x) = -x$ pois é uma função linear (o gráfico é uma reta que passa na origem do referencial), ou seja, do tipo $g(x) = ax$ com $a \neq 0$.

Como $g(1) = -1$ vem $a = \dfrac{-1}{1} = -1$.

► A expressão algébrica da função h é $h(x) = 2$.

Como o gráfico de h é uma reta paralela ao eixo Ox, h é uma função constante, ou seja, $h(x) = b$.

Como $h(0) = 2$ tem-se que $b = 2$.

Figura 3.38

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_AFIM_DECLIVE_1

Neste exercício são dadas as coordenadas de dois pontos com abcissas distintas e pretende-se que o aluno determine o declive da reta, não vertical, que passa por esse dois pontos.

Os parâmetros, neste caso, são as coordenadas dos pontos.

Na resolução deste exercício o aluno deve usar a fórmula do declive de uma reta que passa por dois pontos.

Nas figuras 3.39 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

O declive da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-2, 5)$ e $(-3, -1)$ é:

$$-6$$

$$6$$

$$\frac{5}{6}$$

$$-\frac{5}{6}$$

Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), o declive da reta que contém esses pontos é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como os pontos têm de coordenadas $(-2, 5)$ e $(-3, -1)$, o declive é

$$m = \frac{-1-5}{-3-(-2)} = \frac{-6}{-3+2} = 6$$

Figura 3.39

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_RVERTICAL_8

Neste exercício é dado um ponto de uma reta vertical e pretende-se que o aluno identifique a equação dessa reta.

Na figura 3.40 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

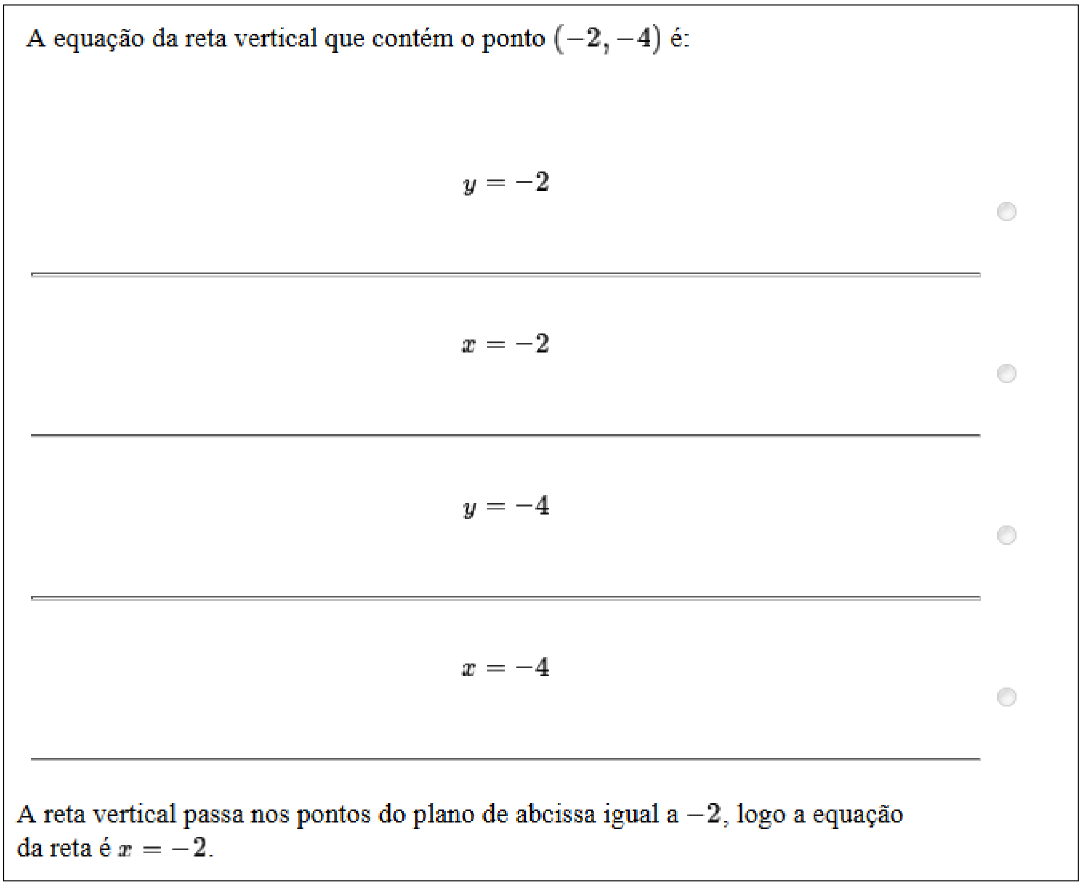


Figura 3.40

3.3.4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Relativamente aos seguintes conteúdos :

- Funções da família $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$;
- Conjunto-solução da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ como interseção da parábola de equação $y = ax^2$ com a reta de equação $y = -bx - c$;

foi criado um conjunto de exercícios, dos quais apresentamos alguns exemplos pormenorizados e a descrição sumária dos restantes. Não colocámos o código de construção de todos os exercícios em virtude de se usarem técnicas semelhantes para a elaboração dos mesmos.

EXERCÍCIO: E97I30__PARABOLA__AFIM__0001

Neste exercício estão representadas graficamente, no mesmo referencial cartesiano, duas funções e os pontos de interseção dos gráficos das funções. Uma das funções é quadrática do tipo $y = ax^2$ com $a \neq 0$ e a outra é afim do tipo $y = -bx - c$. Pretende-se que o aluno identifique graficamente o conjunto solução da equação: $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Pretende-se que os valores das coordenadas dos pontos de interseção sejam fáceis de identificar, tendo-se escolhido a, x_1 e x_2 para parâmetros, sendo assim possível controlar esse valores e gerar b e c à custa deles.

Como $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2$, basta escolher $b = -(ax_1 + ax_2)$ e $c = ax_1x_2$. Assim, definiram-se os valores de b e c com o seguinte código:

```
s.b1=-s.a1*s.x1-s.a1*s.x2 e  s.c1=s.a1*s.x1*s.x2
```

- Código do enunciado do exercício

```
%PROBLEM Determinar graficamente o conjunto-solução de uma equação
 da forma $\,ax^2+bx+c=0\,$, com $a\neq 0$.
Na figura estão representadas a função quadrática $\,f\,$ definida por
$\,f(x)=f1\,$ e a função afim $\,g\,$ definida por $\,g(x)=g1\,$.
<latex 100%> \begin{tikzpicture}[line cap=round,
line join=round,>=triangle 45,x=units,y=units]
XAXIS YAXIS
\draw  (0,rtop) node (yaxis) [left] {$y$} (rright,0)
 node (xaxis) [below] {$x$};
\clip (rleft,rbottom) rectangle (rright,rtop);
\draw[red, smooth,samples=20,domain=rleft@f{f}:rright@f{f}]
plot(\x,{(-(b1)*\x)-(c1)});
\draw[blue, smooth,samples=20,domain=rleft@f{f}:rright@f{f}]
plot(\x,{((a1)*\x*\x)});
\fill[blue] (x1,y1) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x1,0) -- (x1,y1);
\draw[densely dashed,blue] (0,y1) -- (x1,y1);
\fill[blue] (x2,y2) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x2,0) -- (x2,y2);
\draw[densely dashed,blue] (0,y2) -- (x2,y2);
\node[below left] at (0,0) {\footnotesize $0$};
\end{tikzpicture} </latex>
Identifica o conjunto solução da equação $\,f1 sgn_b1 g2=0\,$.
<multiplechoice>
<choice> $$\big\{x1,x2\big\}.$$ </choice>
<choice> $$\big\{y1,y2\big\}.$$ </choice>
<choice> $$\big\{\quad \big\}.$$ </choice>
```

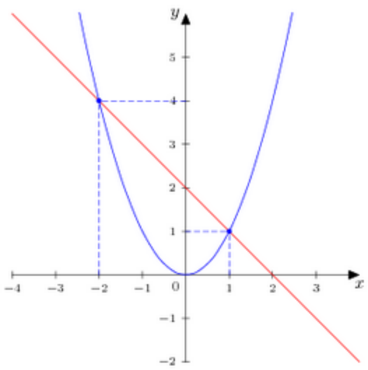
```
<choice> $$\big\{re41,re42\big\}.$$ </choice>
</multiplechoice>
```

- Código da resolução do exercício

```
Graficamente o conjunto solução de uma equação da forma
$\,ax^2+bx+c=0\,$, com $a\neq 0$, é o conjunto das abcissas
dos pontos de interseção da parábola de equação $\,y=ax^2\,$,
com a reta de equação$\,y=-bx-c\,$.Como neste caso,
$$\,f1 sgn_b1 g2=0\,\Leftrightarrow f1=g1$$
e os gráficos de $f$ e $g$ intersetam-se nos pontos de abcissa
$\,x=x1\,$ e $\,x=x2\,$, o conjunto solução da equação dada é
$$\big\{x1,x2\big\}.$$
```

Nas figuras 3.41 e 3.42 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Na figura estão representadas a função quadrática f definida por $f(x) = x^2$ e a função afim g definida por $g(x) = -x + 2$.



Identifica o conjunto solução da equação $x^2 + x - 2 = 0$.

$\{-2, 1\}$.

$\{4, 1\}$.

$\{-1, 2\}$.

$\{\ \}$.

Figura 3.41

Graficamente o conjunto solução de uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é o conjunto das abcissas dos pontos de interseção da parábola de equação $y = ax^2$, com a reta de equação $y = -bx - c$.

Como neste caso,

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -x + 2$$

e os gráficos de f e g intersetam-se nos pontos de abcissa $x = -2$ e $x = 1$, o conjunto solução da equação dada é

$$\{-2, 1\}.$$

Figura 3.42

EXERCÍCIO: E97I30_PARABOLA_AFIM_0002

Neste exercício são dados, no mesmo referencial cartesiano, os gráficos de duas funções f e g com f do tipo $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$ e g do tipo $g(x) = -bx - c$.

Pretende-se que o aluno determine as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

No exercício anterior, E97I30_Parabola_afim_0001, identificaram-se, graficamente, as abcissas dos pontos de interseção da parábola com a reta.

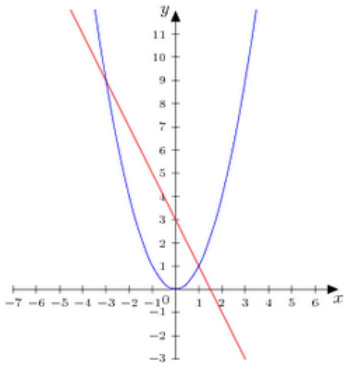
Neste exercício isso não é feito pelo que, o aluno deve resolver analiticamente a equação $ax^2 = -bx - c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$. Na resolução desta equação aplica-se a fórmula resolvente quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a lei do anulamento do produto quando $c = 0$ e a raiz quadrada quando $b = 0$. Estas três situações, no código de resolução, foram resolvidas usando os comandos *showone* e *thisone*.

```
<showone escolha>
<thisone>Resolvendo a equação utilizando a fórmula resolvente, vem:
$$f1 sgn_b1 g2=0\,\Leftrightarrow x=\displaystyle \frac{simet_b1 \pm
\sqrt{b1_pot-prod_4_a1_c1@()}}{prod_2_a1}\Leftrightarrow
x=\displaystyle \frac{simet_b1 \pm \sqrt{ radicando}}{prod_2_a1}
\Leftrightarrow x=\displaystyle \frac{simet_b1 \pm raiz}{prod_2_a1}
\Leftrightarrow x=\displaystyle \frac{simet_b1 - raiz}{prod_2_a1}
\vee x=\displaystyle \frac{simet_b1 + raiz}{prod_2_a1}
\Leftrightarrow x=x1\vee x=x2.$$ </thisone>
<thisone>Esta equação do segundo grau é incompleta ($c=0$). Nestas condições,
aplicando a lei do anulamento do produto vem  $$\,f1 sgn_b1 g2=0
\Leftrightarrow x(f11)=0\Leftrightarrow x=0 \vee f11=0.$$
Como $$f11=0\Leftrightarrow a10=simet_b1\Leftrightarrow  x=l_a_zero1,$$
vem $$\,f1 sgn_b1 g2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=l_a_zero1.$$</thisone>
```

```
<thisone>Como $$\,f10=0 \Leftrightarrow  x^2=div_sim_c1_a1
\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{div_sim_c1_a1}
\Leftrightarrow x=x1\vee x=x2.$$</thisone></showone>
```

Na figura 3.43 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Na figura estão representadas a função quadrática f definida por $f(x) = x^2$ e a função g definida por $g(x) = -2x + 3$.



Identifica as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

$y = -3; \quad y = 1.$

$x = -3; \quad x = 1.$

$x = 0; \quad x = -1.$

$x = 18; \quad x = 1.$

Considera duas funções f e g definidas por $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$ e $g(x) = -bx - c$.

Os pontos de interseção dos gráficos de f e g têm por abcissa as soluções da equação $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$.

Neste caso,

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Resolvendo a equação utilizando a fórmula resolvente, vem:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-12)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 - 4}{2} \vee x = \frac{-2 + 4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1.$$

Assim, as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos são -3 e 1.

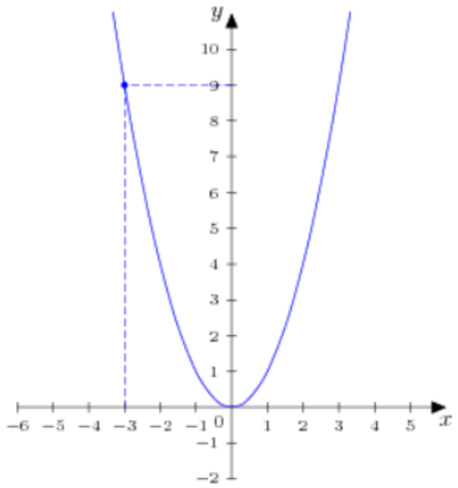
Figura 3.43

EXERCÍCIO: E97I30_PARABOLA_0002

Dado o gráfico de uma função do tipo $y = ax^2$ com $a \neq 0$ pretende-se que o aluno interprete a influência do parâmetro a no gráfico da função quadrática e determine esse valor dado um ponto do gráfico.

Na figura 3.44 apresentamos uma concretização do exercício e a sua resolução.

Na figura apresenta-se o gráfico da função f definida por $f(x) = ax^2$.



Escolhe a opção correta.

- $a > 0$ e a concavidade da parábola é voltada para cima.
- $a < 0$ e a concavidade da parábola é voltada para cima.
- $a = -\dfrac{3}{2}$
- $a > 0$ e a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Como o ponto de coordenadas $(-3, 9)$ pertence ao gráfico da função quadrática, $f(x) = ax^2$, tem-se

$$f(-3) = 9 \Leftrightarrow a \times (-3)^2 = 9 \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{9} \Leftrightarrow a = 1.$$

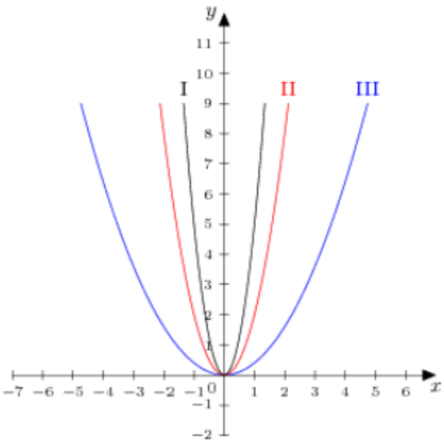
Assim, a opção correta é "$a > 0$ e a concavidade da parábola é voltada para cima."

Figura 3.44

EXERCÍCIOS: E97I30_PARABOLA_0003 E E97I30_PARABOLA_0004

Nestes exercícios são dadas as expressões algébricas de três funções quadrática do tipo $y = ax^2$, com $a < 0$ em E97I30_Parabola_0003 e $a > 0$ em E97I30_Parabola_0004. Pretende-se que o aluno interprete a influência do parâmetro a no gráfico da função quadrática, identificando cada curva com a respetiva expressão algébrica da função. Uma vez que os exercícios são semelhantes, apresenta-se na figura 3.45 uma concretização do exercício e a sua resolução no caso em que $a > 0$.

No referencial da figura estão representadas as funções quadráticas f, g, h definidas por $f(x) = \frac{2}{5}\,x^2$, $g(x) = 2\,x^2$ e $h(x) = 5\,x^2$.



Escolhe a opção correta.

A curva II é o gráfico da função h.

A curva II é o gráfico da função g.

A curva I é o gráfico da função f.

A curva I é o gráfico da função g.

O gráfico de uma função quadrática, $y = ax^2$, é uma parábola cuja "abertura" depende do valor de a. Quando o valor de a é positivo, a abertura da parábola diminui à medida que o valor de a aumenta.

Neste caso, em todas as funções, o valor de a é positivo: $a = \frac{2}{5}$ na função f, $a = 2$ na função g e $a = 5$ na função h.

Como $\frac{2}{5} < 2 < 5$ conclui-se que a opção correta é: A curva II é o gráfico da função g.

Figura 3.45

CAPÍTULO 4

Considerações finais

A realização deste trabalho teve como objetivo a criação de recursos digitais para os alunos utilizarem no estudo autónomo da disciplina de Matemática.

Estes exercícios constituem, também, um recurso a ser utilizado pelos professores, por exemplo, em contexto de sala de aula, para aplicação dos conhecimentos ou num contexto de avaliação diagnóstica, formativa ou sumativa dos alunos.

Através da avaliação diagnóstica, o professor poderá implementar estratégias de diferenciação pedagógica e como tal de superação de eventuais dificuldades dos alunos com a utilização destes exercícios, podendo estes ser adaptados às características de cada aluno modificando apenas alguns parâmetros, se necessário, de forma a simplificar os exercícios ou torná-los mais complexos.

Num contexto de avaliação formativa e posteriormente sumativa, permite ao professor, ao aluno e ao encarregado de educação obter informação sobre o desenvolvimento da aprendizagem, com vista ao ajustamento de processos e estratégias.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico [9], ”os resultados dos processos avaliativos (de caráter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação do ensino, de modo a que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo, assim, para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de aprendizagem.”

Estamos convictos de que a criação e utilização destes exercícios permite diversas vantagens que de acordo com os autores do projeto Megua [17], estas são descritas como os ”5R’s”.

Assim do lado do aluno temos ”Resolver, Recuperar, Recordar, Recusar e Reconhecer”:

- ”Resolver” pois o aluno pode resolver um ou mais exercícios sobre o mesmo assunto e do mesmo tipo, podendo comparar a sua resolução com a resolução proposta;

- ”Recuperar” na medida em que permite ao aluno a recuperação de alguns pré-requisitos de uma determinada unidade curricular ajudando-o assim a ultrapassar a falta de alguns conhecimentos de base;
- ”Recordar” pois o aluno ao consultar a resolução recorda vários conceitos, fórmulas e procedimentos.;
- ”Recusar” na medida em que como a resolução está construída de acordo com o perfil do aluno proporciona-lhe motivação para o trabalho, recusando a desistência das metas a que se propôs;
- ”Reconhecer” pois o aluno ao resolver testes de autoavaliação criados no MEGUA fica a saber o nível de conhecimentos que adquiriu bem como as dificuldades que tem sobre determinado tema podendo assim pedir apoio ao professor.

Do lado do professor temos ”Reutilizar, Reciclar, Reduzir, Repensar e Recriar”:

- ”Reutilizar”, na medida em que o professor pode utilizar o mesmo material, eventualmente com diferentes parâmetros, por exemplo, na elaboração de testes, questões aula e fichas de trabalho;
- ”Reciclar” pois alterando alguns parâmetros e fazendo algumas adaptações de forma a que um dado exercício passe a ser um problema de aplicação numa dada área científica ou tecnológica;
- ”Reduzir”, pois permite ao professor despender menos tempo na construção de material didático e de avaliação bem como proporciona a redução do número de ficheiros digitais ou documentos em papel, em virtude dos exercícios estarem agrupados numa base de dados catalogada, uniforme e pesquisável;
- ”Repensar” na medida em que o material digital é mais apelativo aos alunos e o facto de automatizar certos procedimentos liberta o professor de algumas tarefas, permitindo-lhe repensar noutro tipo de iniciativas que promovam uma aprendizagem efetiva dos seus alunos;
- ”Recriar” pois na construção de novos exercícios podemos aproveitar exercícios já construídos, podendo simplifica-los ou recriar novos.

A utilização destes exercícios parametrizados por parte dos alunos permite-lhe em diferentes etapas do seu estudo, resolver novos exercícios do mesmo tipo ou de tipos diferentes, e sempre com a respetiva resolução detalhada, podendo utilizar esta ferramenta em qualquer lado bastando ter um computador, telemóvel ou *tablet* com ligação à *internet*. Consideramos assim que este material desenvolvido é motivador e acessível aos nossos alunos.

Estas vantagens não existem ao nível dos manuais existentes no mercado, para treino dos alunos. Ao nível da *internet* e outros materiais em formato digital ainda existem poucos desenvolvidos neste âmbito, sendo que alguns deles, tais como o Projeto Matemática Ensino[18], da Universidade de Aveiro, são usados para treino dos alunos em competições ou avaliação.

Quanto a nós professores, poderemos reinventar uma nova forma de preparar material de apoio usando as novas tecnologias de informação e comunicação no ensino da matemática.

Esta base de dados de exercícios não se considera terminada na medida em que muitos outros exercícios poderão ser criados, num futuro próximo, e até modificados e/ou melhorados alguns já existentes, que com o uso quer por parte dos alunos quer da nossa parte poderão surgir sugestões e novas abordagens dos mesmos.

Estamos a divulgar a base de dados criada de forma a ser utilizada pelos alunos, do agrupamento de escolas onde nos encontramos a lecionar, e pelos professores. Alguns dos nossos alunos já tiveram a oportunidade de aceder a esta base de dados e realizado alguns exercícios, tendo considerado a mesma de muita utilidade e de grande interesse.

Este trabalho requereu muita dedicação e esforço na medida em que teve de ser feita uma aprendizagem de raiz das linguagens de programação utilizadas, o que não foi fácil, pois a nossa formação ao nível de programação era inexistente. Deste modo, a construção dos exercícios revelou-se uma tarefa árdua pois a cada novo tipo de exercício pressuponha procedimentos diferentes do código a utilizar. Também na construção dos exercícios tivemos de refletir, contemplar e testar diversas possibilidades existentes de resposta e resolução dos mesmos, tendo sido um projeto muito desafiante.

Consideramos que esta tarefa foi bastante enriquecedora e motivadora tendo sido desde sempre um objetivo a concretizar pois a nível profissional e pessoal sentimos a necessidade e o prazer de construir materiais didáticos digitais de apoio ao ensino/aprendizagem dos nossos alunos de modo a favorecer o sucesso e incentivar e estimular o gosto pela disciplina.

Finalizamos com uma frase que segundo [26] foi proferida por Albert Einstein: *"A tarefa essencial do professor é despertar a alegria de trabalhar e de conhecer"*.

CAPÍTULO 5

*

Bibliografia

[1] Bivar, António; Grosso, Carlos; Oliveira, Filipe; Timóteo Maria. *Caderno de Apoio 3.º Ciclo. Metas Curriculares do Ensino Básico* - *Matemática*, 2013.

[2] Cardoso, Domingos; Szymansky, Jerzy; Rostami, Mohammad. *Matemática Discreta*, Ed Escolar Editora, pp 19-22, 2009.

[3] Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda. *Novo Espaço, Matemática 7º Ano*, Parte 1, Ed. Porto Editora, 2013.

[4] Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda. *Novo Espaço, Matemática 8º Ano*, Parte 1, Ed. Porto Editora, 2013.

[5] Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda. *Novo Espaço, Matemática 9º Ano*, Parte 1, Ed. Porto Editora, 2012.

[6] Ferreira, Carlos Alberto. *A Avaliação formativa vivida pelos professores do 1.º ciclo do ensino básico.* Revista Portuguesa de Pedagogia. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Ano 40-3, 2006, pp.71-94.

[7] Ferreira, Jaime Campos. *Elementos de Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos.* Departamento de Matemática. Instituto Superior Téecnico, 2001.

[8] Ferreira, Jaime Campos. *Introducão à Análise Matemática*, Ed. Fundacão Calouste Gulbenkian 3.ª Edicão, 1990.

[9] Ministério da Educacão e Ciência. *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*, 2013.

[10] Miranda, Guilhermina Lobato. *Limites e possibilidades das TIC na educação.* Sísifo Revista de Ciências da Educação, 03, pp. 41-50, 2007.

[11] Neves, Maria A.; Silva, A.; Raposo, Maria J.; Silva, Jorge. *Matemática 7º Ano*, Parte 1, Ed. Porto Editora, 2013.

[12] Neves, Maria A.; Silva, A.; Raposo, Maria J.; Silva, Jorge. *Matemática 8º Ano*, Parte 1, Ed. Porto Editora, 2011.

[13] Neves, Maria A.; Silva, A.; Raposo, Maria J.; Silva, Jorge. *Matemática 9º Ano*, Parte 1, Ed. Porto Editora, 2012.

[14] NCTM, *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE, 1994.

[15] Ponte, J. P., & Canavarro, P. *Matemática e novas tecnologias.* Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

[16] Ponte, João; Branco, Neusa; Matos, Ana. *Álgebra no Ensino Básico.* Ministério da Educação, 2009.

[17] Seabra, Dina; Oliveira, Paula; Cruz, Pedro. *Megua e os cinco R's, Base de dados de exercícios parametrizados*, TICAMES, First Workshop on Information and Communication Technology in Higher Education: Learning Mathematics, Lisboa, 2013.

[18] Seabra, Dina; Oliveira, Paula; Cruz, Pedro. *Crie o seu arquivo de exercícios resolvidos parametrizados.* Gazeta da Matemática,170:2933, 2013.

[19] Semana, S. & Santos, L. *Estratégias de avaliação na regulação das aprendizagens em Matemática.* XXSIEM (CD-ROM). Lisboa: APM, 2009.

[20] Teixeira, Paula; Precatado, Adelina; Albuquerque, Carlos; Antunes, Conceição; Nápoles, Susana. *Funções.* Ministério da Educacão, Departamento do Ensino Secundário, 1997.

[21] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/hist.htm

[22] http://www.megua.org/

[23] http://www.portalavaliacao.caedufjf.net/pagina-exemplo/item/

[24] http://siacua.web.ua.pt/

[25] http://www.sagemath.org/pt/

[26] http://www.mundinhodacrianca.net/2014/01/diversas-frases-sobre-educacao.html

CAPÍTULO 6

Apêndice

Neste capítulo apresentamos o código completo usado na construção de alguns exercícios criados no MEGUA. Assim, apresentamos um exercício referente ao conceito de função, às operações com funções, função afim e função quadrática.

Exercício: E97I30_Def_funcao_01

```
from megua.all import *
meg = MegBookWeb('/home/nbuser/mp2013web.sqlite')

meg.siacua(exname="E97I30_Def_funcao_01",
ekeys=[2,4,5,7,10,11,14,15],sendpost=True,course="matbas",
usernamesiacua="f791")

meg.save(r'''
%SUMMARY Definição de Função
Palavras chave: Definição de Função, correspondência unívoca
SIACUAstart
level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(5312,1)]
SIACUAend
%problem  Identificar funções representadas através de diagramas de setas
Nas figuras seguintes encontram-se representadas duas correspondências.
<center>
<p>
<showone escolha>
<thisone>
```

```
<left>fig1 $\quad $ fig2</left>
</thisone>
<thisone>
<left>fig1 $\quad$  fig3</left>
</thisone>
<thisone>
<left>fig2 $\quad$  fig4</left>
</thisone>
<thisone>
<left>fig3 $\quad$  fig4</left>
</thisone>
</showone>
<p>
</center>
Escolhe a opção correta.
<multiplechoice>
<choice>
<showone escolha>
<thisone> A correspondência $A \rightarrow B$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $A \rightarrow B$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $G \rightarrow H$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $G \rightarrow H$ é uma função.</thisone>
</showone>
</choice>
<choice>
<showone escolha>
<thisone>A correspondência $C \rightarrow D$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $E \rightarrow F$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $C \rightarrow D$ é uma função.</thisone>
<thisone>A correspondência $E \rightarrow F$ é uma função.</thisone>
</showone>
</choice>
<choice> Ambas as correspondências representam funções. </choice>
<choice> Nenhuma das correspondências representa uma função.</choice>
</multiplechoice>
A correspondência que representa uma função é:
<center>
<p>
<showone escolha>
<thisone>
```

```
<left>fig1</left>
</thisone>
<thisone>
<left>fig1</left>
</thisone>
<thisone>
<left>fig4</left>
</thisone>
<thisone>
<left>fig4</left>
</thisone>
</showone>
<p>
</center>
porque a correspondência é unívoca, ou seja, a cada elemento do
conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto
de chegada.
class E97I30_Def_funcao_01(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        y=var('y')
       #valores do conjunto de partida do 1.º diagrama:
        s.a11= choice(["Ana","Rute","Carla"])
        s.a12= choice(["Marta","Kika","Bruna"])
        s.a13= choice(["Bia","Maia","Joana"])

       #valores do conjunto de chegada do 1.º diagrama:
        s.b11= ur.iunif(10,13)
        s.b12= ur.iunif(6,9)
        s.b13= ur.iunif(14,17)

      #valores do conjunto de partida do 2.º diagrama:
        s.a21= choice(["Rui","Carlos","Tiago"])
        s.a22= choice(["Lucas","Jorge","Pedro"])
        s.a23= choice(["Ruca","Joca","Tito"])

      #valores do conjunto de chegada do 2.º diagrama:
        s.b21= choice(["Tina","Micas","Bia"])
        s.b22= choice(["Ju","Lili","Beca"])
        s.b23= choice(["Kan","Zeca","Mimi"])
```

```
    #valores do conjunto de partida do 3.º diagrama:
      s.a31 = ur.iunif(100,120)
      s.a32  = ur.iunif(130,150)
      s.a33 = ur.iunif(160,170)
      s.a34  = ur.iunif(171,180)

    #valores do conjunto de chegada
      s.b31 =  choice(["Dina","Eva","Rui"])
      s.b32  = choice(["Jorge","Leo","Zita"])
      s.b33 =  choice(["Nelo","Zeca","Ana"])

    #valores do conjunto de partida do 4.º diagrama:
      s.a41 = ur.iunif(2,4)
      s.a42  = ur.iunif(8,10)
      s.a43 = ur.iunif(5,7)

     #valores do conjunto de chegada
      s.b41 = ur.iunif(1,4)*s.a42
      s.b42  = ur.iunif(1,3)*s.a41*s.a43
      s.b43 = ur.iunif_nonset(-2,2,[0])

      s.escolha=ur.iunif(0,3)

  def solve(s):

### primeiro diagrama sagital
      dominios1 = s.dominios1([s.a11,s.a12,s.a13],[s.b11,s.b12],
      [(s.a11,s.b12),(s.a12,s.b11),(s.a13,s.b12)])
      s.fig1 = s.sage_graphic( dominios1, "fig1", dimx=6, dimy=6)

### segundo diagrama sagital
      dominios2 = s.dominios2([s.a21,s.a22,s.a23],[s.b21,s.b22,s.b23],
      [(s.a21,s.b21),(s.a22,s.b21),(s.a22,s.b22),(s.a23,s.b23)])
      s.fig2 = s.sage_graphic( dominios2, "fig2", dimx=6, dimy=6)

### terceiro diagrama sagital
      dominios3 = s.dominios3([s.a31,s.a32,s.a33,s.a34],
      [s.b31,s.b32,s.b33],[(s.a31,s.b31),(s.a32,s.b32),(s.a33,s.b33)])
      s.fig3 = s.sage_graphic( dominios3, "fig3", dimx=6, dimy=6)
```

```
### quarto diagrama sagital
      dominios4 = s.dominios4([s.a41,s.a42,s.a43],[s.b41,s.b42,s.b43],
      [(s.a41,s.b42),(s.a42,s.b41),(s.a43,s.b42)])
      s.fig4 = s.sage_graphic( dominios4, "fig4", dimx=6, dimy=6)

### primeiro diagrama sagital
  def dominios1(s,namesx,namesy, pairs):
      g = Graphics()
      #Draw the ellipses
      g += ellipse( (1,2), 1.2, 2.3, axes=False )
      g += ellipse( (5,2), 1.2, 2.3) #, axes=False )

      #Text (common)
      g += text("A", (1,2+2+0.8))
      g += text("Idade de ...", (3,2+2+0.5))
      g += text("B", (5,2+2+0.8))

      #Red dots inside ellipses
      #only the same number in namesx and namesy.
      circle_size = 0.08
      fill_color = 'red'
      for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
          g += circle( (1.6,i+1), circle_size, fill=True,
           facecolor=fill_color,
           edgecolor=fill_color )
      for i in range(len(namesy)):  #second ellipse
          g += circle( (4.8,i+1), circle_size, fill=True,
           facecolor=fill_color,
           edgecolor=fill_color )

      #Text inside ellipses
      for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
          g += text( namesx[i], (0.8,i+1))
      for i in range(len(namesy)):  #first ellipse
          g += text( namesy[i], (5.2,i+1))

      #Arrows
      for p in pairs:
          #find index of p in namesx
```

```
        a = namesx.index(p[0]) + 1
        #find index of p in namesx
        b = namesy.index(p[1]) + 1
        #Draw arrow
        g += arrow( (1.6,a), (4.8,b), arrowsize=3, width=0.8)
    return g

### segundo diagrama sagital
  def dominios2(s,namesx,namesy, pairs):
    g = Graphics()

    #Draw the ellipses
    g += ellipse( (1,2), 1.2, 2.3, axes=False )
    g += ellipse( (5,2), 1.2, 2.3), #axes=False )

    #Text (common)
    g += text("C", (1,2+2+0.8))
    g += text("primo de ...", (3,2+2+0.5))
    g += text("D", (5,2+2+0.8))

    #Red dots inside ellipses
    #only the same number in namesx and namesy.
    circle_size = 0.08
    fill_color = 'red'
    for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
        g += circle( (1.6,i+1), circle_size, fill=True,
         facecolor=fill_color,
         edgecolor=fill_color )
    for i in range(len(namesy)):  #second ellipse
        g += circle( (4.4,i+1), circle_size, fill=True,
         facecolor=fill_color,
         edgecolor=fill_color )

    #Text inside ellipses
    for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
        g += text( namesx[i], (0.8,i+1))
    for i in range(len(namesy)):  #first ellipse
        g += text( namesy[i], (5.2,i+1))

    #Arrows
```

```
        for p in pairs:
            #find index of p in namesx
            a = namesx.index(p[0]) + 1
            #find index of p in namesx
            b = namesy.index(p[1]) + 1
            #Draw arrow
            g += arrow( (1.7,a), (4.3,b), arrowsize=3, width=0.8)
        return g

### terceiro diagrama sagital
    def dominios3(s,namesx,namesy, pairs):
        g = Graphics()
        #Draw the ellipses
        g += ellipse( (1,2), 1.2, 2.3, axes=False )
        g += ellipse( (5,2), 1.2, 2.3) #, axes=False )

        #Text (common)
        g += text("E", (1,2+2+0.8))
        g += text(u"altura (cm) \n de ... ", (3,2+2+0.5))
        g += text("F", (5,2+2+0.8))

        #Red dots inside ellipses
        #only the same number in namesx and namesy.
        circle_size = 0.08
        fill_color = 'red'
        for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
            g += circle( (1.5,i+0.8), circle_size, fill=True, facecolor=fill_color,
             edgecolor=fill_color )
        for i in range(len(namesy)):  #second ellipse
            g += circle( (4.5,i+1), circle_size, fill=True,
             facecolor=fill_color,
             edgecolor=fill_color )

        #Text inside ellipses
        #only the same number in namesx and namesy.
        for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
            g += text( namesx[i], (0.8,i+0.8))
        for i in range(len(namesy)):  #first ellipse
            g += text( namesy[i], (5.2,i+1))
```

```
    #Arrows
    for p in pairs:
        #find index of p in namesx
        a = namesx.index(p[0]) + 0.8
        #find index of p in namesx
        b = namesy.index(p[1]) + 1
        #Draw arrow
        g += arrow( (1.5,a), (4.5,b), arrowsize=3, width=0.8)
    return g

 ### quarto diagrama sagital
def dominios4(s,namesx,namesy, pairs):
    g = Graphics()

    #Draw the ellipses
    g += ellipse( (1,2), 1.2, 2.3, axes=False )
    g += ellipse( (5,2), 1.2, 2.3) #, axes=False )

    #Text (common)
    g += text("G", (1,2+2+0.8))
    g += text("divisor de ...", (3,2+2+0.5))
    g += text("H", (5,2+2+0.8))

    #Red dots inside ellipses
    #only the same number in namesx and namesy.
    circle_size = 0.08
    fill_color = 'red'
    for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
        g += circle( (1.2,i+1), circle_size, fill=True,
         facecolor=fill_color,
         edgecolor=fill_color )
    for i in range(len(namesy)):  #second ellipse
        g += circle( (4.8,i+1), circle_size, fill=True,
         facecolor=fill_color,
         edgecolor=fill_color )

    #Text inside ellipses
    for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
        g += text( namesx[i], (0.8,i+1))
    for i in range(len(namesy)):  #first ellipse
```

```
            g += text( namesy[i], (5.3,i+1))

        #Arrows
        for p in pairs:
            #find index of p in namesx
            a = namesx.index(p[0]) + 1
            #find index of p in namesx
            b = namesy.index(p[1]) + 1
            #Draw arrow
            g += arrow( (1.2,a),(4.8,b), arrowsize=3, width=0.8)
        return g
''')
```

EXERCÍCIO: E97I30_ADICAOFNUMERICA_005

```
 meg.save( r'''
 %summary Operações com funções;

 Palavras chave: funções numéricas, adição, subtração, multiplicação

 SIACUAstart
 level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
 concepts = [(5313, 0.5),(5341, 0.5)]
 SIACUAend

%problem  Efetuar a soma e a diferença de duas funções numéricas
de domínio finito e o produto de uma constante por uma função numérica

Seja $A=\Big\{o1,o2,o3\Big\}$.

Considera as funções $f$ e $g$ de $A$ em $ \mathbb{Q}$ tais que:
 <p>
 <showone escolha_rep_g>
 <thisone 0 - escolhe a tabela para g(x)>
 <p>
 <center>
 <table border="0">
 <td>
 <td> $\displaystyle f(x)=f1 \quad \text{ e } \quad $</td>
```

```
</td>
<td>
<table border="1" cellspacing="0" align="center">
<tr>
  <td style="background-color:cyan" ALIGN=MIDDLE Width=30>$x$</td>
  <td ALIGN=MIDDLE Width=30> $o1$ </td>
  <td ALIGN=MIDDLE Width=30> $o2$ </td>
  <td ALIGN=MIDDLE Width=30> $o3$ </td>
</tr>
<tr>
  <td style="background-color:cyan" ALIGN=MIDDLE Width=30>$g(x)$</td>
  <td ALIGN=MIDDLE Width=30> $g_o1$ </td>
  <td ALIGN=MIDDLE Width=30> $g_o2$ </td>
  <td ALIGN=MIDDLE Width=30> $g_o3$ </td>
</tr>
</table>
</td>
</table>
</center>
</thisone>
</tr>
<thisone 1 - escolhe o diagrama para g(x)>
<center>
<table border="0">
<td>
<td>$\displaystyle f(x)=f1 \quad \text{ e } \quad $ </td>
</td>
<td> fig1</td>
</table>
</center>
</thisone>
<thisone 2 - escolhe o gráfico de g>
<center>
<table border="0">
<td>
<td>$\displaystyle f(x)=f1 \quad \text{ e } \quad $</td>
</td>
<td>
<latex 100%>
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle
```

```
 45,x=units,y=units]
XAXIS
YAXIS
\draw[shift={(xcenterf,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt)
 node[below] {};
%legenda dos eixos:
\draw  (0,rtop) node (yaxis) [left] {$y$} (rright,0) node
 (xaxis) [below] {$x$};
%\clip(rleft@f{f}:rright@f{f}) rectangle (rbottom@f{f}:rtop@f{f});
\clip (rleft,rbottom) rectangle (rright,rtop);
\fill[blue] (o1,g_o1) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (o1,0) -- (o1,g_o1);
\draw[densely dashed,blue] (0,g_o1) -- (o1,g_o1);
\fill[blue] (o2,g_o2) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (o2,0) -- (o2,g_o2);
\draw[densely dashed,blue] (0,g_o2) -- (o2,g_o2);
\fill[blue] (o3,g_o3) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (o3,0) -- (o3,g_o3);
\draw[densely dashed,blue] (0,g_o3) -- (o3,g_o3);
%origem do referencial:
\node[below left] at (0,0) {\footnotesize $0$};
\end{tikzpicture}
</latex>
</td>
</table>
</center>
</thisone>
</showone>
<p>
Indica a opção correta.
<p>
<multiplechoice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=rc1  $$   </choice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=re2   $$  </choice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=re3  $$ </choice>
<choice> $$ (f2 op1 g)(o1)=re4   $$  </choice>
</multiplechoice>
Pretende-se calcular $(f2 op1 g)(o1)$.
<p>
Como
```

```
 <showone escolha1>
 <thisone 0 se a1 tem denominador diferente de 1>
$$(f2 op1 g)(o1)= f2(o1)op1 g(o1)= c1 \left(a1\times o1@()sgn_b1
mod_b1 \right) op1 g_o1@()=c1 \left(prod_a1_o1 sgn_b1 mod_b1 \right)
op1 g_o1@()=prod_c1_a1_o1 sgn_prod_c1_b1 mod_prod_c1_b1 op1 g_o1@()=
prod_c1_a1_o1 sgn_soma_b1_g_o1 mod_soma_b1_g_o1$$
reduzindo ao mesmo denominador vem
$$ prod_c1_a1_o1 sgn_soma_b1_g_o1 mod_soma_b1_g_o1=sgn_prod_c1_a1_o1
\frac{num_prod_a1_o1}{mmc_prod_a1_o1_soma_b1_g_o1} sgn_soma_b1_g_o1
\frac{num_soma_b1_g_o1}{mmc_prod_a1_o1_soma_b1_g_o1}=rc1$$ o que
 permite concluir que
</thisone>
<thisone 1 se a1 tem denominador 1 >
$$(f2 op1 g)(o1)= c1 f(o1)op1 g(o1)=c1 \left(a1\times o1@() sgn_b1
mod_b1 \right) op1 g_o1@()= c1 \left(prod_a1_o1 sgn_b1 mod_b1 \right)
op1 g_o1@()=prod_c1_a1_o1 sgn_prod_c1_b1 mod_prod_c1_b1 op1
g_o1@()= prod_c1_f_o1 op1 g_o1@()=rc1,$$
conclui-se que
</thisone>
</showone>
$$(f2 op1 g)(o1)=rc1.$$

 class E97I30_AdicaoFnumerica_005(Exercise):
     def make_random(s):
         x=var('x')
         y=var('y')
         f=var('f')

         #parâmetros
         s.a01 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
         s.b1  = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
         s.a2  =ur.iunif_nonset(-2,2,[0])
         s.c1  = ur.iunif_nonset(-3,4,[0,1,-1])
         s.c2  = ur.iunif(1,5)
         s.a1  = s.a01/s.c2
         s.op1 = choice([r'+', r'-'])

      s.escolha_rep_g=choice([0,1,2])

         # objetos da função g
```

```
    s.o1 = ur.iunif(-5,-2)
    s.o2  = ur.iunif_nonset(-1,2,[0])
    s.o3  = ur.iunif(3,6)

def solve(s):

    #lista de funçoes
    s.f1 = s.a1* x +s.b1
    s.f2=s.c1*f

    s.g_o1=s.a2*s.o1
    s.g_o2=s.a2*s.o2
    s.g_o3=s.a2*s.o3

    s.f_o1=s.a1*s.o1+s.b1
    s.f_o2=s.a1*s.o2+s.b1
    s.f_o3=s.a1*s.o3+s.b1

    s.prod_c1_b1=s.c1*s.b1
    s.mod_prod_c1_b1=abs(s.prod_c1_b1)

    s.mod_b1=abs(s.b1)
    s.mod_g_o1=abs(s.g_o1)

    s.prod_a1_o1=s.a1*s.o1
    s.prod_c1_a1_o1=s.c1*s.prod_a1_o1
    s.f_o1=s.a1*s.o1+s.b1
    s.prod_c1_f_o1=s.c1*s.f_o1

    s.soma_b1_g_o1=eval(str(s.prod_c1_b1) + s.op1 +str(s.g_o1))
    s.soma_re2=eval(str(s.prod_c1_b1) + s.op1 + str(s.g_o1))
    s.soma_re3=eval(str(-s.prod_c1_b1) + s.op1 + str(s.g_o1))
    s.soma_re4=eval(str(s.prod_c1_b1) + s.op1 + str(-s.g_o1))

    s.mod_soma_b1_g_o1=abs(s.soma_b1_g_o1)
    #s.mod_prod_a1_o1=abs(s.prod_a1_o1)
    s.mod_prod_c1_a1_o1=abs(s.prod_c1_a1_o1)
    s.mod_soma_b1_g_o1=abs(s.soma_b1_g_o1)

    #respostas
```

```
  s.rc1=s.prod_c1_a1_o1+s.soma_b1_g_o1
  s.re2=-s.prod_c1_a1_o1+s.soma_re2
  s.re3=s.prod_c1_a1_o1+s.soma_re3
  s.re4=s.prod_c1_a1_o1+s.soma_re4

 # Cálculo e Teste dos Sinais
  if s.b1>0:
     s.sgn_b1='+'
  else:
     s.sgn_b1='-'

  if s.g_o1>0:
     s.sgn_g_o1='+'
  else:
     s.sgn_g_o1='-'

  if s.soma_b1_g_o1>0:
     s.sgn_soma_b1_g_o1='+'
  else:
     s.sgn_soma_b1_g_o1='-'

  if s.prod_c1_a1_o1>0:
     s.sgn_prod_c1_a1_o1=' '
  else:
     s.sgn_prod_c1_a1_o1='-'

  if s.prod_c1_b1>0:
      s.sgn_prod_c1_b1='+'
  else:
      s.sgn_prod_c1_b1='-'

#-----------------------------------------------------
#Cálculo dos denominadores
#-----------------------------------------------------

#denominadores dos coeficientes
  s.den_prod_a1_o1=denominator(s.prod_c1_a1_o1)
  s.den_soma_b1_g_o1=denominator(s.soma_b1_g_o1)

# numeradores dos termos
```

```
    s.mod_num_prod_a1_o1=numerator(s.mod_prod_c1_a1_o1)
    s.mod_num_soma_b1_g_o1=numerator(s.mod_soma_b1_g_o1)

  # Cálculo do mínimo múltipo comum
    s.mmc_prod_a1_o1_soma_b1_g_o1=lcm(s.den_prod_a1_o1,
    s.den_soma_b1_g_o1)

  # Cálculo do multiplicador
    s.mul_prod_a1_o1=s.mmc_prod_a1_o1_soma_b1_g_o1/denominator
    (s.prod_c1_a1_o1)
    s.mul_soma_b1_g_o1=s.mmc_prod_a1_o1_soma_b1_g_o1/denominator
    (s.soma_b1_g_o1)

  #  Cálculo do numerador das frações
    s.num_prod_a1_o1=s.mul_prod_a1_o1*s.mod_num_prod_a1_o1
    s.num_soma_b1_g_o1=s.mul_soma_b1_g_o1*s.mod_num_soma_b1_g_o1

  #----------------------------------------------------
  # TESTE DOS DENOMINADORES
  # --------------------------------------------------
  # teste do denominador da primeira opção (verdadeira)
  # Se nenhum denominador for 1
    s.escolha1 =0

  # Se denominador de  prod_a1_o1 for 1
    if (s.den_prod_a1_o1 == 1):
        s.escolha1=1

#DESENHO DO GRÁFICO (INÍCIO)
        # Intersection with ox (where m=a1)
        # y = mx+b <=> y/m = x + b/m <=> x = y/m - b/m; y=0 temos x = -b/m
        s.xcenterf=1

        #view rectangle   (nrs. inteiros)

        #valor máximo do eixo Oy
        s.rtop    = max(s.g_o1,s.g_o2,s.g_o3,2) +1 #  Para o eixo dos
        y ter valores positivos e assim cruzar o eixo dos Ox

        #Valor mínimo do eixo Oy
```

```
        s.rbottom = min(s.g_o1,s.g_o2,s.g_o3) - 1

        #Valor mínimo do eixo Ox
        s.rleft   = min(s.o1,s.o2,s.o3) - 1

        #Valor máximo do eixo Oy
        s.rright  = max(s.o1,s.o2,s.o3) + 1

        s.rxdelta = s.rright - s.rleft
        s.rydelta = s.rtop   - s.rbottom

        print "Rectangle=",s.rleft,s.rright,s.rbottom,s.rtop

        #Units (x,y): objectivo 100pt
        s.size = 200 #pt
        s.delta = max( s.rxdelta, s.rydelta )
        s.units = str(1.0*s.size/s.delta) + 'pt'
        s.units = str(1.0*s.size/s.delta) + 'pt'

        print "Units=",s.units

        #para retirar os dois zeros que coloca na intereseção dos eixos
        s.XAXIS = tikz_axis(s.rleft,s.rright,axis=
        'x',points=None,originlabels=False)
        s.YAXIS = tikz_axis(s.rbottom,s.rtop,axis=
        'y',points=None,originlabels=False)
        #DESENHO DO GRÁFICO (FIM)

###  diagrama sagital
        dominios1 = s.dominios1([s.o1,s.o2,s.o3],[s.g_o1,s.g_o2,s.g_o3],
        [(s.o1,s.g_o1),
        (s.o2,s.g_o2),(s.o3,s.g_o3)])
        s.fig1 = s.sage_graphic( dominios1, "fig1", dimx=6, dimy=6)

  ###  diagrama sagital
    def dominios1(s,namesx,namesy, pairs):
        g = Graphics()

        #Draw the ellipses
        g += ellipse( (1,2), 1.2, 2.3, axes=False )
```

```
        g += ellipse( (5,2), 1.2, 2.3) #, axes=False)

        #Text (common)
        #g += text("A", (1,2+2+0.8))
        g += text("g", (3,2+2+0.001))
        #g += text("B", (5,2+2+0.8))

        #Red dots inside ellipses
        #only the same number in namesx and namesy.
        circle_size = 0.08
        fill_color = 'red'
        for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
            g += circle( (1.6,i+1), circle_size, fill=True,
             facecolor=fill_color,edgecolor=fill_color )
        for i in range(len(namesy)):  #second ellipse
            g += circle( (4.8,i+1), circle_size, fill=True,
             facecolor=fill_color,edgecolor=fill_color )

        #Text inside ellipses
        for i in range(len(namesx)):  #first ellipse
            g += text( namesx[i], (0.8,i+1))
        for i in range(len(namesy)):  #first ellipse
            g += text( namesy[i], (5.4,i+1))

        #Arrows
        for p in pairs:
            #find index of p in namesx
            a = namesx.index(p[0]) + 1
            #find index of p in namesx
            b = namesy.index(p[1]) + 1
            #Draw arrow
            g += arrow( (1.6,a), (4.8,b), arrowsize=3, width=0.8)
        return g
''')
```

EXERCÍCIO: E97I30_GRAFICOS_AFIM_2

```
from megua.all import *
meg = MegBookWeb('/home/nbuser/mp2013web.sqlite')
```

```
meg.siacua(exname="E97I30_Graficos_Afim_2",
ekeys=[0,1,3,4,8,11,16,20,21,25],sendpost=True,course="matbas",
usernamesiacua="f791")

meg.save(r'''

%SUMMARY Gráficos de funções afins;

Palavras chave: funções afins, gráfico, ordenada na origem

SIACUAstart
level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(5341, 0.5),(5342, 0.5)]
SIACUAend

%PROBLEM Identificar a ordenada na origem no gráfico de uma
 função afim

Na figura está representada graficamente a função $g$.
<center>
<latex 100%>
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=units,y=units]
XAXIS
YAXIS
\draw[shift={(xcenterf,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt)
 node[below] {};
%legenda dos eixos:
\draw  (0,rtop) node (yaxis) [left] {$y$} (rright,0) node (xaxis)
 [below] {$x$};\clip (rleft,rbottom) rectangle (rright,rtop);
\draw[smooth,samples=100,domain=rleft@f{f}:rright@f{f}]
plot(\x,{(a1*\x)+b1});
\fill[blue] (x1_aux,y1_aux) circle (0.5mm) node[above right] {};
\fill[blue] (x2_aux,y2_aux) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x2_aux,0) -- (x2_aux,y2_aux);
\draw[densely dashed,blue] (0,y2_aux) -- (x2_aux,y2_aux);
\fill[blue] (x3_aux,y3_aux) circle (0.5mm) node[above right] {};
%origem do referencial:
\node[below left] at (0,0) {\footnotesize $0$};
```

```
\end{tikzpicture}
</latex>
</center>
Qual é o valor da ordenada na origem?
<multiplechoice>
<choice> $$ rc1  $$ </choice>
<choice> $$ re2  $$ </choice>
<choice> $$ re3  $$ </choice>
<choice> $$ re4  $$ </choice>
</multiplechoice>
A ordenada na origem é a ordenada do ponto de interseção
da reta com o eixo das ordenadas, ou seja, é a imagem do objeto $x1$.
<p>
O ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas é
$(x1,y1)$, logo a ordenada na origem é $y1$.

class E97I30_Graficos_Afim_2(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        #Parâmetros da equação da reta:
        s.a1=ur.iunif_nonset(-4,4,[-1,0,1]) #declive
        s.b1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.x1=0
        s.y3=0

    def solve(s):

        s.y1=s.a1*s.x1+s.b1

#DESENHO DO GRÁFICO (INÍCIO)
        # Intersection with ox (where m=a1)
        # y = mx+b <=> y/m = x + b/m <=> x = y/m - b/m;
         y=0 temos x = -b/m
        s.xcenter = -s.b1/s.a1
        s.xcenterf = s.xcenter.n()
        if s.xcenter < 0:
            s.xcenterint = floor(-s.b1/s.a1) - 1
        else:
            s.xcenterint = ceil(-s.b1/s.a1) + 1
```

```
#view rectangle   (nrs. inteiros)

#valor máximo do eixo Oy
s.rtop    = max(0,s.b1) +2

#Valor mínimo do eixo Oy
s.rbottom = min(0,s.b1) - 2

#Valor mínimo do eixo Ox
s.rleft   = min(0,s.xcenterint) - 2

#Valor máximo do eixo Ox
s.rright  = max(0,s.xcenterint) + 2


#Para os pontos não saírem fora da janela do gráfico,
 definimos o y2(variável dependente) entre o valor mínimo
 e o valor máximo do eixo Oy:

s.y2=ur.iunif_nonset(s.rbottom+2, s.rtop-2, [0])

##Resolvendo a equação y2=a1*x2+b1 em ordem a x2:
s.x2=(s.y2-s.b1)/s.a1

#Para o ponto (x2,y2) não pertencer ao eixo Ox (ou) Oy:
if((s.x2==0) | (s.y2==0)):
    s.y2=s.y1+1    #pois o y1 está no eixo Oy
    s.x2=(s.y2-s.b1)/s.a1

# Quando y3=0, resolver a equação 0=a1*x3+b1 em ordem a x3:
s.x3=-s.b1/s.a1

# multiplicar por 1.0
s.x1_aux=s.x1*1.0
s.y1_aux=s.y1*1.0
s.x2_aux=s.x2*1.0
s.y2_aux=s.y2*1.0
s.x3_aux=s.x3*1.0
s.y3_aux=s.y3*1.0
```

```
        s.rxdelta = s.rright - s.rleft
        s.rydelta = s.rtop   - s.rbottom

        print "Rectangle=",s.rleft,s.rright,s.rbottom,s.rtop

        #Units (x,y): objectivo 100pt
        s.size = 200 #pt
        s.delta = max( s.rxdelta, s.rydelta )
        s.units = str(1.0*s.size/s.delta) + 'pt'
        s.units = str(1.0*s.size/s.delta) + 'pt'

        print "Units=",s.units

        s.XAXIS = tikz_axis(s.rleft,s.rright,axis='x',points=None,
        originlabels=False)
        s.YAXIS = tikz_axis(s.rbottom,s.rtop,axis='y',points=None,
        originlabels=False)
        #DESENHO DO GRÁFICO (FIM)

        #Respostas
        s.rc1=s.y1
        s.re2=-s.y1/s.x3
        s.re3=0
        s.re4=s.x3
''')
```

EXERCÍCIO: E97I30_PARABOLA_AFIM_0001

```
from megua.all import *
meg = MegBookWeb('/home/nbuser/mp2013web.sqlite')

meg.siacua(exname="E97I30_parabola_afim_0001",
ekeys=[0,2,8,10,11,16,17,18,21,37],sendpost=True,
course="matbas",usernamesiacua="f791")

meg.save(r'''
%SUMMARY Função quadrática;

Palavras chave:Função quadrática, função afim,
 zeros de uma função quadrática, equação do 2.º grau
```

```
SIACUAstart
level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts =[(5351,0.50),(5352,0.50)]
SIACUAend

%PROBLEM Determinar graficamente o conjunto solução de
uma equação da forma $\,ax^2+bx+c=0\,$, com $a\neq 0$.

Na figura estão representadas a função quadrática $\,f\,$
definida por $\,f(x)=f1\,$ e a função afim $\,g\,$ definida
 por $\,g(x)=g1\,$.
<p>
<center>
<latex 100%>
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,
>=triangle 45,x=units,y=units]
XAXIS
YAXIS
%legenda dos eixos:
\draw  (0,rtop) node (yaxis) [left] {$y$} (rright,0)
 node (xaxis) [below] {$x$};
\clip (rleft,rbottom) rectangle (rright,rtop);
\draw[red, smooth,samples=20,domain=rleft@f{f}:rright@f{f}]
plot(\x,{(-(b1)*\x)-(c1)});
\draw[blue, smooth,samples=20,domain=rleft@f{f}:rright@f{f}]
plot(\x,{((a1)*\x*\x)});
\fill[blue] (x1,y1) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x1,0) -- (x1,y1);
\draw[densely dashed,blue] (0,y1) -- (x1,y1);
\fill[blue] (x2,y2) circle (0.5mm) node[above right] {};
\draw[densely dashed,blue] (x2,0) -- (x2,y2);
\draw[densely dashed,blue] (0,y2) -- (x2,y2);
%origem do referencial:
\node[below left] at (0,0) {\footnotesize $0$};
\end{tikzpicture}
</latex>
</center>
<p>
Identifica o conjunto solução da equação $\,f1 sgn_b1 g2=0\,$.
```

```
<multiplechoice>
<choice>  $$\big\{x1,x2\big\}.$$ </choice>
<choice> $$\big\{y1,y2\big\}.$$  </choice>
<choice>  $$\big\{\quad \big\}.$$ </choice>
<choice> $$\big\{re41,re42\big\}.$$ </choice>
</multiplechoice>
Graficamente o conjunto solução de uma equação da forma $\,ax^2+bx+c=0\,$,
com $a\neq 0$, é o conjunto das abcissas dos pontos de interseção da
parábola de equação $\,y=ax^2\,$, com a reta de equação$\,y=-bx-c\,$.
<p>
Como neste caso,$$\,f1 sgn_b1 g2=0\,\Leftrightarrow f1=g1$$ e os gráficos
de $f$ e $g$ intersetam-se nos pontos de abcissa $\,x=x1\,$ e $\,x=x2\,$,
o conjunto-solução da equação dada é $$\big\{x1,x2\big\}.$$

class E97I30_parabola_afim_0001(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        #zeros da função f:
        s.x1=ur.iunif(-3,0)
        s.x2=ur.iunif(1,3)

        #coeficiente da função y=ax^2
        s.a1=ur.iunif_nonset(-2,2,[0])

        # x1 e x2 não podem ser iguais em valor absoluto, porque
         a última opção errada ficaria igual à correta
        if(s.x2==abs(s.x1)):
            s.x1=s.x1*2
        # caso x1=0 e x2=1 e a1=1 a opção errada2 ficaria igual à
         correta, logo o x2 tem que ser diferente de 1:
        if((s.x1==0) & (s.x2==1) & s.a1==1):
            s.x2=s.x2*2

        #ordenadas dos pontos de interseção de y=ax^2 e y=-bx-c
        s.y1=s.a1*s.x1^2
        s.y2=s.a1*s.x2^2

        # declive e ordenada na origem da reta y=-bx-c
        s.b1=-s.a1*s.x1-s.a1*s.x2
```

```
    s.c1=s.a1*s.x1*s.x2

def solve(s):
    s.f1=s.a1*x^2
    s.g1=-s.b1*x-s.c1
    s.mod_b1=abs(s.b1)
    s.g2=s.mod_b1*x+s.c1

    if (s.b1<0):
        s.sgn_b1='-'
    else:
        s.sgn_b1='+'

    #Respostas
    s.re41=-s.x2
    s.re42=-s.x1

    #DESENHO DO GRÁFICO (INÍCIO)
    s.xcenter = 0
    s.xcenterf = s.xcenter.n()
    #if s.xcenter < 0:
        #s.xcenterint = floor(-s.c1/s.b1) - 1
   # else:
        #s.xcenterint = ceil(-s.c1/s.b1) + 1

    #view rectangle   (nrs. inteiros)

    #valor máximo do eixo Oy
    s.rtop    = max(0,s.y1,s.y2) +2

    #Valor mínimo do eixo Oy
    s.rbottom = min(0,s.y1,s.y2) - 2

    #Valor mínimo do eixo Ox
    s.rleft   = min(0,s.x1,s.x2) - 2

    #Valor máximo do eixo Ox
    s.rright  = max(0,s.x1,s.x2) + 2

    #Para a parábola não aparecer cortada de um dos lados.
```

```
        # No caso do valor absoluto do mínimo do eixo Ox ser menor
         que o valor máximo do eixo Ox, então este mínimo passa a
         ser igual ao simétrico do máximo.
        s.rleft=-max(s.rright,abs(s.rleft))
        #No caso do valor máximo do eixo Ox ser menor que o absoluto
        do valor mínimo do eixo Ox, então este passa a ser igual ao
        simétrico do mínimo.
        s.rright=max(s.rright,abs(s.rleft))

        s.rxdelta = s.rright - s.rleft
        s.rydelta = s.rtop   - s.rbottom

        print "Rectangle=",s.rleft,s.rright,s.rbottom,s.rtop

        #Units (x,y): objectivo 100pt
        s.size = 200 #pt
        s.delta = max( s.rxdelta, s.rydelta )
        s.units = str(1.0*s.size/s.delta) + 'pt'
        s.units = str(1.0*s.size/s.delta) + 'pt'

        print "Units=",s.units

        #para retirar os dois zeros que coloca na
         interseção dos eixos
        s.XAXIS = tikz_axis(s.rleft,s.rright,axis='x',points=None,
        originlabels=False)
        s.YAXIS = tikz_axis(s.rbottom,s.rtop,axis='y',points=None,
        originlabels=False)
        #DESENHO DO GRÁFICO (FIM)
''')
```

Estes anexos só estão disponíveis para consulta através do CD-ROM.
Queira por favor dirigir-se ao balcão de atendimento da Biblioteca.