

SEGUNDA EDICIÓN

TEORÍA DE MÁQUINAS



ALEJO AVELLO

Tecnun – Universidad de Navarra

TEORÍA DE MÁQUINAS

ALEJO AVELLO ITURRIAGAGOITIA

TECNUN – UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEGUNDA EDICIÓN

ENERO 2014

TEORÍA DE MÁQUINAS

Copyright ©2014 by Alejo Avello, Tecnun (Universidad de Navarra)
ISBN 978-84-8081-250-4

Este trabajo está licenciado bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>.



Es usted libre para:

Compartir – copiar, distribuir y transmitir el trabajo

Reutilizar – adaptar el trabajo

Bajo las siguientes condiciones:



Atribución – Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciante (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o que apoyan el uso que hace de su obra).



No Comercial – No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la Misma Licencia – Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Índice general

1	Análisis estructural de mecanismos	1
1.1	Introducción	1
1.2	Terminología de los mecanismos	2
1.3	Clasificación de los elementos y pares	5
1.4	Ley de Grashoff	6
1.5	Criterio de Grübler	10
1.5.1	Criterio de Grübler en el plano	10
1.5.2	Criterio de Grübler en el espacio	13
1.6	Problemas	15
2	Cinemática del sólido rígido	23
2.1	Rotaciones entre sistemas de referencia	23
2.2	Parametrización de las rotaciones	27
2.2.1	Ángulos de Euler XYZ en ejes fijos	27
2.2.2	Ángulos de Euler ZYX en ejes seguidores	30
2.2.3	Rotación alrededor de un eje	32
2.2.4	Parámetros de Euler	34
2.3	Análisis de velocidades y aceleraciones	34
2.3.1	Derivación en distintos sistemas de referencia	34
2.3.2	Velocidad angular y aceleración angular	36
2.3.3	Campos de velocidad y aceleración del sólido rígido	38
2.3.4	Movimiento de arrastre y relativo de un punto	39
2.3.5	Movimiento de arrastre y relativo para la velocidad y aceleración angular	42
2.3.6	Relación de los ángulos de Euler con la velocidad angular	45
2.3.7	Eje instantáneo de rotación y deslizamiento	45
2.3.8	Cinemática de la rodadura plana	49
2.3.9	Movimiento relativo de tres cuerpos en el plano	51

2.4	Problemas	53
2.5	Apéndice	57
3	Dinámica del sólido rígido	59
3.1	Dinámica de la partícula	59
3.2	Dinámica del sólido rígido	60
3.2.1	Ecuaciones de Newton	60
3.2.2	Ecuaciones de Euler	61
3.2.3	Ecuaciones diferenciales del movimiento	64
3.2.4	Principio de D'Alembert	65
3.2.5	Teorema de los trabajos virtuales	69
3.3	Problemas	72
4	Análisis cinemático por métodos numéricos	113
4.1	Introducción	113
4.2	Coordenadas independientes	115
4.3	Coordenadas dependientes	116
4.3.1	Coordenadas relativas dependientes	116
4.3.2	Coordenadas de punto de referencia	117
4.3.3	Coordenadas naturales	119
4.4	Coordenadas naturales en el plano	121
4.4.1	Restricciones de sólido rígido	122
4.4.2	Restricciones de par cinemático	123
4.4.3	Coordenadas relativas	125
4.5	Ejemplo de modelización con coordenadas naturales	128
4.6	Problemas cinemáticos	130
4.6.1	Problema de posición	130
4.6.2	Problema de velocidad	133
4.6.3	Problema de aceleración	133
4.7	Mecanismos sobredeterminados	137
4.8	Determinación numérica del número de grados de libertad	138
4.9	Empleo de Matlab para resolver los problemas cinemáticos	139
4.10	Problemas	144
5	Análisis dinámico por métodos numéricos	151
5.1	Introducción	151
5.2	Fuerzas de inercia de un elemento	152
5.3	Fuerzas de inercia de un mecanismo	155
5.4	Fuerzas exteriores puntuales	160
5.5	Fuerzas introducidas por los actuadores	161

5.6	Ensamblado del vector de fuerzas generalizadas	162
5.7	Ecuaciones del movimiento en coordenadas independientes	163
5.8	Integración numérica de las ecuaciones del movimiento . .	170
5.8.1	Reducción del orden de las ecuaciones diferenciales del movimiento	170
5.8.2	Métodos de integración explícitos e implícitos	171
5.9	Cambio de coordenadas independientes	172
5.10	Ecuaciones del movimiento en coordenadas dependientes .	173
5.11	Interpretación física de los multiplicadores de Lagrange . .	176
5.12	Cálculo de las reacciones	178
5.12.1	Reacciones de sólido rígido	178
5.12.2	Reacciones en la articulación	179
5.12.3	Reacciones en la deslizadera articulada	180
5.12.4	Reacciones en la deslizadera rígida	181
5.12.5	Reacciones de coordenada relativa	182
5.12.6	Esfuerzos motores	182
5.13	Problema dinámico inverso	183
5.14	Problemas	184

6 Levas 191

6.1	Descripción general	191
6.2	Criterios y variables de diseño de las levas	192
6.3	Análisis de velocidad de las levas	195
6.4	Especificación del diagrama de desplazamiento	198
6.4.1	Diagrama de desplazamiento parabólico	198
6.4.2	Diagrama de desplazamiento cúbico	200
6.4.3	Diagrama de desplazamiento armónico	200
6.4.4	Diagrama de desplazamiento cicloidal	202
6.4.5	Comparación entre diagramas de desplazamiento . .	202
6.5	Obtención del perfil de leva	204
6.5.1	Obtención del perfil de leva con seguidor puntual . .	204
6.5.2	Obtención del perfil de leva con seguidor de forma general	205
6.5.3	Obtención del perfil de leva con seguidor de rodillo .	207
6.5.4	Obtención del perfil de leva con seguidor de plano .	208
6.6	Factores que influyen en el ángulo de presión	208
6.7	Limitaciones en el diámetro de los rodillos	211

7	Engranajes cilíndricos rectos	215
7.1	Clasificación de los engranajes	215
7.2	Ley general de engrane. Perfiles conjugados	216
7.3	Engranajes de evolvente	219
7.4	Nomenclatura y estandarización	224
7.5	Generación de engranajes	226
7.5.1	Generación por cremallera	228
7.5.2	Generación por piñón	231
7.6	Arco de conducción y relación de contacto	232
7.7	Cálculo del espesor del diente	235
7.8	Engranajes corregidos	237
7.8.1	Limitaciones de los engranajes normales	237
7.8.2	Corrección e interferencia de tallado	238
7.8.3	Distancia de funcionamiento de engranajes corregidos	238
7.9	Relación de velocidades y número de dientes	242
7.10	Problemas	243
8	Engranajes helicoidales	245
8.1	Concepto y transmisión de esfuerzos	245
8.2	Generación de un diente helicoidal	247
8.3	Relación de contacto	252
9	Trenes de engranajes	255
9.1	Introducción	255
9.2	Trenes ordinarios	255
9.3	Trenes planetarios	257
9.4	Diferenciales	261
9.5	Problemas	263
10	Equilibrado de rotores	273
10.1	Concepto de equilibrado	273
10.2	Teoría del equilibrado de rotores	274
10.3	Método experimental de equilibrado estático	277
10.4	Método experimental de equilibrado dinámico	278
10.5	Normalización del equilibrado de los rotores	282
10.6	Problemas	283
11	Vibraciones en sistemas con un grado de libertad	285
11.1	Introducción e historia	285
11.2	Conceptos previos	287

11.3	Vibraciones libres	290
11.3.1	Vibraciones libres no amortiguadas	290
11.3.2	Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso	292
11.4	Respuesta a las excitaciones armónicas	294
11.4.1	Respuesta a las excitaciones armónicas en un sistema amortiguado	295
11.4.2	Excitación a la frecuencia de resonancia en sistemas no amortiguados	299
11.4.3	Fenómeno de golpeteo	301
11.4.4	Diagrama de Argand	302
11.5	Medida del amortiguamiento relativo	303
11.5.1	Rozamiento viscoso	304
11.5.2	Rozamiento seco o de Coulomb	304
11.5.3	Rozamiento estructural o con histéresis	304
11.5.4	Métodos para determinar experimentalmente el amortiguamiento	305
11.6	Aislamiento de vibraciones: transmisibilidad	308
11.6.1	Aislamiento de la estructura afectada por las vibraciones de una máquina	308
11.6.2	Aislamiento de la máquina cuando vibra la estructura	310
11.7	Respuesta a excitaciones impulso, escalón y rampa	312
11.8	Respuesta a la excitación de tipo general: método de la integral de convolución	317
11.9	Linealización de las ecuaciones del movimiento	320
11.10	Problemas	324

12 Vibraciones en sistemas con varios grados de libertad 335

12.1	Matrices de rigidez, inercia y amortiguamiento	335
12.2	Vibraciones libres de sistemas sin amortiguamiento	336
12.2.1	Frecuencias naturales	337
12.2.2	Modos de vibración	338
12.2.3	Propiedades de los modos de vibración	338
12.2.4	Transformación modal	341
12.2.5	Modos de vibración normalizados	344
12.2.6	Modos de sólido rígido	345
12.3	Sistemas con amortiguamiento viscoso	347
12.3.1	Amortiguamiento proporcional	347
12.3.2	Amortiguamiento viscoso general: coordenadas modales complejas	349
12.3.3	Amortiguamiento viscoso general: integración numérica	352

12.4 Problemas	353
13 Soluciones a los problemas	359

Capítulo 1

Análisis estructural de mecanismos

1.1. Introducción

Al diseñar un mecanismo para realizar una determinada tarea, se suelen seguir los siguientes pasos: en primer lugar, se realiza un diseño conceptual en el que se escoge el tipo de máquina o mecanismo que se va a utilizar. Aquí se seleccionará, por ejemplo, un mecanismo de barras articuladas, un sistema de levas, un tren de engranajes, una transmisión por correa o cualquier combinación de otros elementos existentes para la transmisión del movimiento. Quizá sea ésta la parte del diseño más difícil, puesto que no hay reglas fijas, sino que se basa principalmente en la experiencia y el ingenio.

Una vez decidida la forma general de la máquina, se realiza un *análisis cinemático* para determinar si los desplazamientos, velocidades y aceleraciones son los adecuados para la tarea. Mediante el análisis cinemático el diseñador comprobará, por ejemplo, si el mecanismo traza correctamente la trayectoria para la que fue diseñado o si la relación de velocidades entre la entrada y la salida es la correcta.

La *síntesis o diseño cinemático* está relacionada con el análisis cinemático recién visto, y consiste en determinar las dimensiones del mecanismo que realiza de forma óptima la tarea para la que se ha diseñado. Un ejemplo típico de síntesis óptima consiste en obtener las longitudes de las cuatro barras de un cuadrilátero articulado para que éste genere una trayectoria rectilínea en un punto del acoplador.

Finalmente, antes de dibujar los planos y mandar construir el mecanis-

mo, es necesario realizar un análisis resistente de las piezas que lo componen. Si el mecanismo funciona a bajas velocidades, las fuerzas de inercia son despreciables frente al resto de las fuerzas actuantes. Entonces, suele ser suficiente con un *análisis estático*, que determina las reacciones en los apoyos mediante las ecuaciones de la estática. A partir de estas reacciones, la Resistencia de Materiales permite dimensionar adecuadamente la sección de los elementos y las dimensiones de los apoyos. Si la máquina funciona a altas velocidades el análisis estático no es suficiente, puesto que las fuerzas de inercia modifican significativamente las reacciones en los apoyos. En este caso, es necesario llevar a cabo un *análisis dinámico*, que tiene en cuenta las fuerzas de inercia y calcula las reacciones en los apoyos de forma exacta.

En este capítulo introduciremos algunos conceptos fundamentales de la Teoría de Máquinas. Comenzaremos por la nomenclatura y la clasificación de los elementos y pares, para continuar con el análisis estructural propiamente dicho. Veremos dos leyes fundamentales de la síntesis cinemática, como son la ley de Grashoff y el criterio de Grübler. La ley de Grashoff establece el tipo de movimiento del cuadrilátero articulado atendiendo a la longitud de sus elementos, mientras que el criterio de Grübler predice, por medio de una sencilla fórmula, el número de grados de libertad de un mecanismo.

1.2. Terminología de los mecanismos

Una *máquina* es una combinación de cuerpos dispuestos de tal forma que producen un trabajo. Actualmente el concepto de máquina connota la capacidad para transmitir niveles de fuerza/momento considerables como ocurre, por ejemplo, con el motor de un automóvil. Cuando la fuerza/momento involucrados son pequeños, la principal función del dispositivo es transmitir o modificar el movimiento; entonces, en lugar de hablar de máquinas se suele hablar de *mecanismos*, como por ejemplo en un reloj. En cualquier caso, la frontera entre máquinas y mecanismos es difusa, por lo que los utilizaremos como términos intercambiables.

Los mecanismos están compuestos por *elementos*. Todos los elementos de un mecanismo tienen posibilidad de movimiento excepto uno, denominado *elemento fijo*. Los elementos están compuestos por partículas materiales, que se desplazan relativamente unas con respecto de otras cuando el elemento se encuentra bajo la acción de fuerzas exteriores. Sin embargo, estos desplazamientos suelen ser tan pequeños que no se comete un error significativo al despreciarlos, por lo que habitualmente se considera que

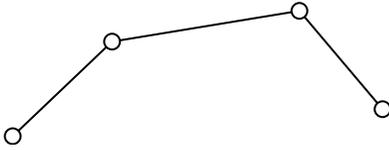


Figura 1.1: Cadena abierta.

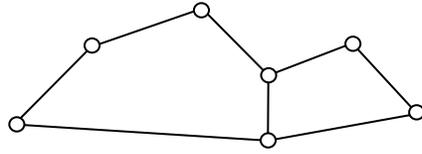


Figura 1.2: Cadena cerrada.

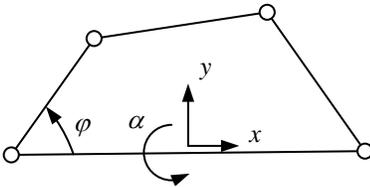


Figura 1.3: Cadena de cuatro barras.

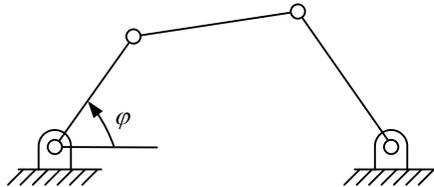


Figura 1.4: Cuadrilátero articulado.

los elementos son *sólidos rígidos*. Los elementos se clasifican en *binarios*, *ternarios*, etc., en función del número de conexiones que tengan con otros elementos. Por ejemplo, un elemento con tres conexiones se denominará ternario.

Las uniones entre elementos se denominan *pares cinemáticos*. Los pares cinemáticos permiten algunos movimientos relativos entre elementos e impiden otros. Por ejemplo, la bisagra de una puerta es un par cinemático que permite la rotación de la puerta respecto al eje vertical e impide los demás movimientos. Los pares también se clasifican en *binarios*, *ternarios*, etc., en función del número de elementos que confluyan en el par. En un par binario confluyen dos elementos, en uno ternario, confluyen tres elementos, etc.

Se denomina *cadena cinemática* a un conjunto de elementos móviles unidos mediante pares cinemáticos. Por definición, en una cadena cinemática no existe elemento fijo. La cadena cinemática es una generalización del concepto de mecanismo, de manera que un mecanismo se puede definir como una cadena cinemática en la que uno cualquiera de sus elementos se ha hecho fijo. Las cadenas cinemáticas pueden ser abiertas, como en la figura 1.1, o cerradas, como en la figura 1.2.

Se denomina *movilidad* (M) de una cadena cinemática al número de parámetros que es necesario utilizar para definir completamente su posición. Un concepto análogo a éste, pero referido a los mecanismos, es el de *número de grados de libertad* (G).

Por ejemplo, la movilidad de la cadena cinemática de cuatro barras articuladas, mostrada en la figura 1.3, es $M = 4$. Fijando uno de sus elementos,

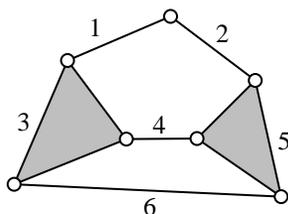


Figura 1.5: Cadena de Stephenson.

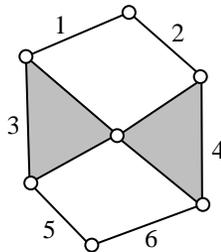


Figura 1.6: Cadena de Watt.

se obtiene el cuadrilátero articulado (figura 1.4), que tiene $G = 1$.

La acción de fijar un elemento equivale a restarle 3 grados de libertad a la movilidad de la cadena (recuérdese que un elemento tiene tres grados de libertad en el plano y seis en el espacio). Esta relación

$$G = M - 3 \quad (1.1)$$

entre el número de grados de libertad G del mecanismo y la movilidad M de su cadena cinemática es general, pues el mecanismo siempre se obtiene fijando uno de los elementos de la cadena. En el caso espacial,

$$G = M - 6 \quad (1.2)$$

De una misma cadena cinemática pueden obtenerse distintos mecanismos fijando cada elemento que la compone. Se denominan *inversiones* a cada uno de los mecanismos diferentes que se obtienen de una misma cadena cinemática. Se llama *número de inversiones* al número de mecanismos *estructuralmente* diferentes que se pueden obtener de una misma cadena cinemática.

La cadena cinemática de cuatro barras mostrada en la figura 1.3 tiene una única inversión ya que, sea cual sea la barra que se fije, el mecanismo resultante es un cuadrilátero articulado. Indudablemente, si en lugar de fijar la barra inferior fijásemos la barra superior, el cuadrilátero articulado que obtendríamos no sería el mostrado en la figura 1.4, sino otro geoméricamente distinto. Sin embargo, todos los cuadriláteros articulados son estructuralmente iguales, pues todos ellos tienen en común que el elemento fijo está unido a dos elementos binarios que, a su vez, están unidos entre sí por otro elemento binario.

Son especialmente importantes, por la cantidad de mecanismos prácticos a que dan lugar, las cadenas cinemáticas de Stephenson y Watt, mostradas en la figura 1.5 y 1.6, respectivamente. Ambas cadenas cinemáticas tienen movilidad $M = 4$.

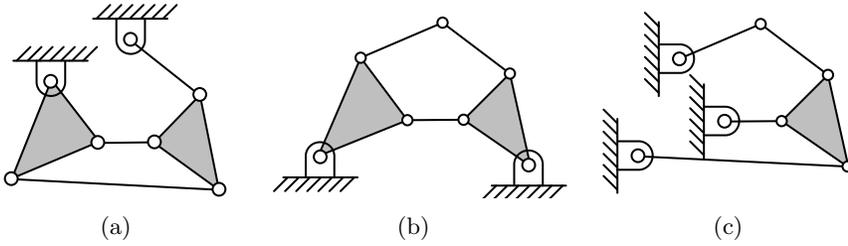


Figura 1.7: Inversiones de la cadena de Stephenson.

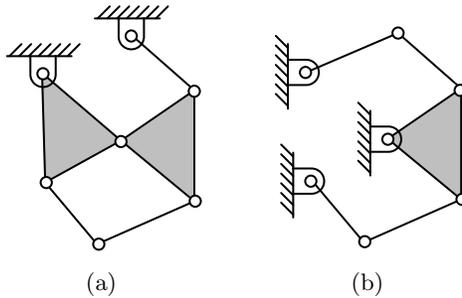


Figura 1.8: Inversiones de la cadena de Watt.

La cadena de Stephenson da origen a tres inversiones distintas: la primera de ellas se obtiene fijando los elementos 1 o 2 (figura 1.7(a)), la segunda fijando los elementos 4 o 6 (figura 1.7(b)) y la tercera fijando los elementos 3 o 5 (figura 1.7(c)).

Por su parte, la cadena de Watt da origen a dos inversiones distintas: la primera, mostrada en la figura 1.8(a), se obtiene fijando los elementos 1, 2, 5 o 6; la segunda, mostrada en la figura 1.8(b), resulta de fijar los elementos 3 o 4.

1.3. Clasificación de los elementos y pares

Atendiendo a su movimiento, un elemento se denomina *manivela* si da vueltas completas respecto de un eje fijo, *balancín* si oscila respecto de un eje fijo y *biela* si tiene un movimiento general.

Los pares cinemáticos se denominan de clase I, II, III, etc., en función del número de grados de libertad que permitan en el movimiento relativo entre los dos elementos que une. Un par de clase I permite un solo grado de libertad, un par de clase II permite dos grados de libertad, etc. Las figuras

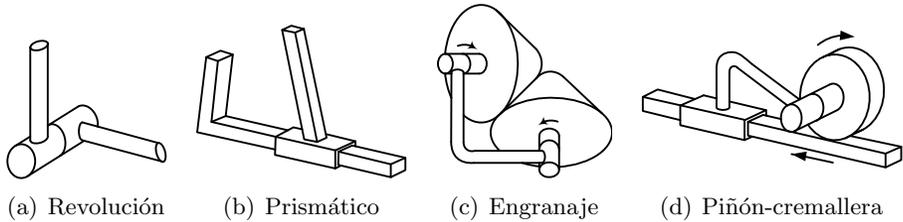


Figura 1.9: Pares de clase I.

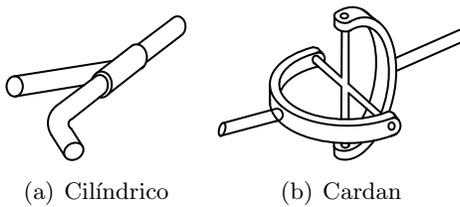


Figura 1.10: Pares de clase II.



Figura 1.11: Par Esférico (Clase III)

1.9-1.11 muestran algunos de los pares más comunes de clase I, II, y III.

1.4. Ley de Grashoff

El cuadrilátero articulado es uno de los mecanismos más utilizados, por su sencillez de construcción, versatilidad y por la facilidad de su diseño. El cuadrilátero articulado tiene tres comportamientos cinemáticos posibles: doble manivela, manivela-balancín y doble balancín. En un cuadrilátero articulado de doble manivela, las dos barras articuladas al elemento fijo se comportan como manivelas, es decir, dan revoluciones completas. En uno de manivela-balancín, uno de los elementos da revoluciones completas mientras el otro oscila entre dos posiciones extremas. Por último, en un cuadrilátero de doble balancín, los dos elementos oscilan entre posiciones extremas.

Sean a, b, c, d las cuatro longitudes de los elementos de una cadena cinemática de cuatro barras, ordenadas de forma que $a < b < c < d$. Con estas cuatro barras se pueden formar tres cadenas cinemáticas distintas, representadas en la figura 1.12, que denominaremos configuraciones I, II y III, respectivamente.

Con objeto de estudiar las condiciones geométricas que se deben dar

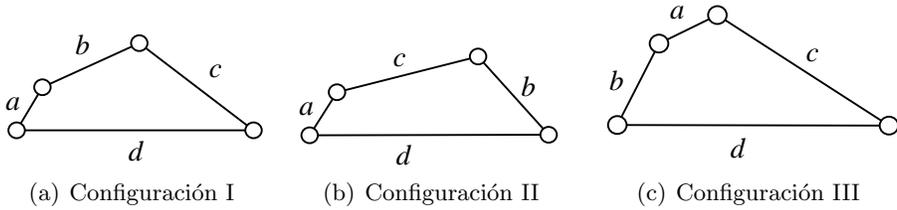


Figura 1.12: Configuraciones de la cadena de cuatro barras.

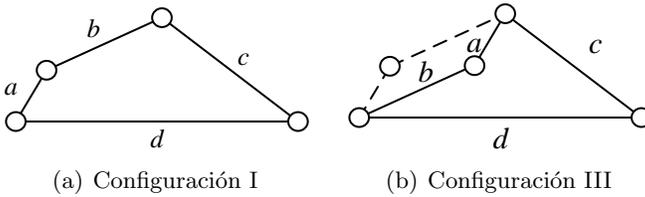


Figura 1.13: Equivalencia de las configuraciones I y III.

para que una barra sea manivela o balancín, es necesario determinar cuándo una barra puede dar vueltas completas con respecto a otra. En primer lugar, demostraremos que si una barra es capaz de dar vueltas completas con respecto a otra en una de las tres configuraciones, también puede dar vueltas completas en las otras dos.

Supongamos que la barra a puede dar vueltas completas con respecto a la barra b en la configuración de la figura 1.13(a). A partir de este cuadrilátero construimos el de la figura 1.13(b), cambiando el orden de las barras a y b . Se puede ver que las barras a y b de los dos cuadriláteros son paralelas siempre que las barras c y d también lo sean. Por tanto, si la barra c gira con respecto de la barra d la misma cantidad en los dos cuadriláteros, ambos mantendrán sus barras a y b paralelas.

De aquí se concluye que si en la figura 1.13(a) las barras a y b dan vueltas completas, una con respecto a la otra, también darán vueltas completas en la figura 1.13(b), puesto que ambas se mantienen paralelas a las anteriores en todo momento. Esto demuestra que si la barra a da vueltas completas con respecto a la barra b en la configuración I, también lo hace en la configuración III. Este razonamiento puede extenderse para demostrar la misma propiedad con la configuración II. En resumidas cuentas, basta con estudiar una cualquiera de las tres configuraciones, pues los resultados son automáticamente válidos para las otras dos.

Para que la barra a pueda dar vueltas completas con respecto a la barra

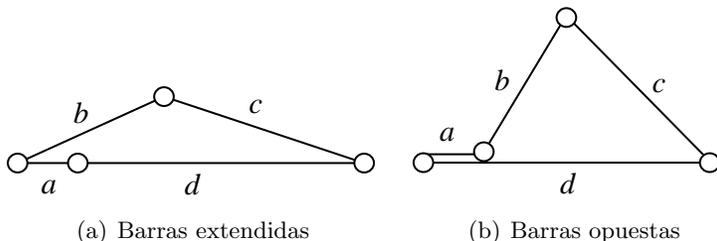


Figura 1.14: Posiciones límite.

d en la figura 1.13(a), es necesario que se puedan alcanzar las dos posiciones extremas de la figura 1.14, en que las dos barras a y d se encuentran alineadas.

De la figura 1.14(a) podemos escribir la ecuación

$$b + c > a + d \quad (1.3)$$

y de la figura 1.14(b)

$$d - a > c - b \quad (1.4)$$

La ecuación 1.3 expresa la propiedad de todo triángulo que establece que la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la del tercero. Por su parte, la ecuación 1.4 expresa la propiedad que establece que la diferencia de las longitudes de dos lados es menor que la del tercero. La ecuación 1.4 se puede escribir también como

$$b + d > a + c \quad (1.5)$$

Las desigualdades 1.3 y 1.5 se han obtenido estudiando la condición de que la barra a dé vueltas completas con respecto a la d . Un razonamiento análogo se puede seguir con el resto de las combinaciones entre barras, para obtener fácilmente la siguiente tabla de desigualdades:

<i>Barras</i>	<i>Desigualdad I</i>	<i>Desigualdad II</i>
a y d	$b + c > a + d$ (iii)	$b + d > a + c$ (i)
a y c	$b + d > a + c$ (i)	$b + c > a + d$ (iii)
a y b	$c + d > a + b$ (i)	$b + c > a + d$ (iii)
b y d	$a + c > b + d$ (ii)	$a + d > b + c$ (iv)
b y c	$a + d > b + c$ (iv)	$a + c > b + d$ (ii)
c y d	$a + b > c + d$ (ii)	$a + d > b + c$ (iv)

Observando esta tabla se ve que únicamente aparecen cuatro tipos de desigualdades diferentes, catalogadas como *i*, *ii*, *iii* y *iv*. Las desigualdades *i* son las que se cumplen *automáticamente*, como por ejemplo que la suma de las dos barras más largas es mayor que la de las dos barras más cortas. Las desigualdades de tipo *ii* son *imposibles*, como que la suma de las dos barras más cortas es mayor que la de las dos más largas. Por último, aparecen las desigualdades *iii* y *iv*, una opuesta de la otra, que pueden cumplirse o no. A la desigualdad *iii* se le conoce con el nombre de *desigualdad de Grashoff*.

De la tabla anterior se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1. La única barra que puede dar vueltas completas con respecto a las demás es la pequeña. Para probarlo, basta con ver que cuando la barra *a* no aparece en la primera columna siempre se da una condición imposible.
2. Si la barra pequeña puede dar vueltas completas con respecto de otra barra, también puede dar vueltas completas con respecto a todas las demás. En efecto, para que la barra *a* pueda dar vueltas completas es necesario que se satisfaga la desigualdad de Grashoff y, entonces, se satisfacen también las condiciones necesarias para que la barra *a* dé vueltas completas con respecto a las barras *b*, *c* y *d*. Si se satisface la desigualdad de Grashoff, el movimiento del cuadrilátero es
 - Doble manivela (figura 1.15(a)) si el elemento *a* es el fijo (entonces las dos barras contiguas al fijo dan vueltas completas, por lo que son manivelas).
 - Manivela-balancín (figura 1.15(b)) si el elemento *a* es contiguo al fijo.
 - Doble balancín (figura 1.15(c)) si el elemento *a* es opuesto al fijo.
3. Si no se cumple la desigualdad de Grashoff, el cuadrilátero es de doble balancín.

El caso límite en que se satisface la igualdad $b + c = a + d$, corresponde a un cuadrilátero que pasa por posiciones singulares. La figura 1.16 muestra el cuadrilátero en una posición singular, cuando las cuatro barras se encuentran alineadas. En esta posición, el cuadrilátero pasa a tener instantáneamente dos grados de libertad en lugar de uno, como sería normal. Por ello, los extremos de las barras *a* y *c* pueden ir hacia arriba o hacia abajo independientemente el uno del otro.

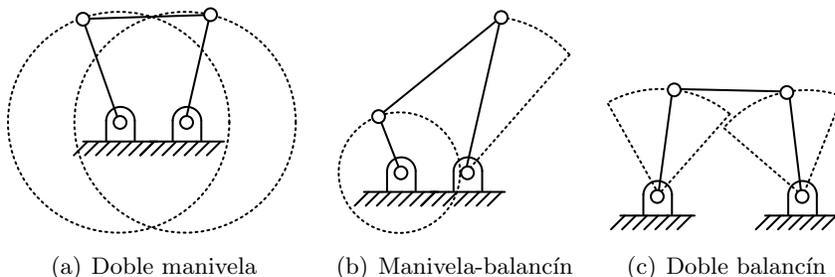


Figura 1.15: Movimientos del cuadrilátero articulado

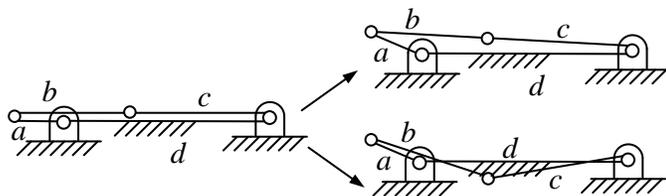


Figura 1.16: Posición singular con dos posibles caminos.

1.5. Criterio de Grübler

El criterio de Grübler sirve para determinar el número de grados de libertad de un mecanismo a partir del número de elementos y pares que lo componen. A continuación, veremos por separado el criterio de Grübler para mecanismos planos y tridimensionales.

1.5.1. Criterio de Grübler en el plano

Un conjunto de N elementos libres (sin pares) tiene $3N$ grados de libertad en el plano, pues cada elemento libre tiene 3 grados de libertad. Al fijar un elemento quedan $3(N - 1)$ grados de libertad, correspondientes a los $N - 1$ elementos móviles que quedan. Para formar un mecanismo, unimos a continuación los elementos mediante pares cinemáticos. Cada nuevo par cinemático restringe posibilidades de movimiento de los elementos: por ejemplo, un par de clase I restringe dos grados de libertad, pues permite un único movimiento. Análogamente, un par de clase II restringe un grado de libertad, pues permite dos movimientos. Por tanto, el número de grados de libertad G se obtiene restando los grados de libertad restringidos por los pares a los $3(N - 1)$ grados de libertad que tenían los elementos flotantes,

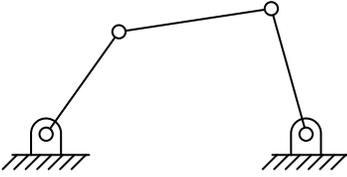


Figura 1.17

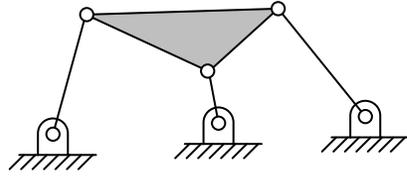


Figura 1.18

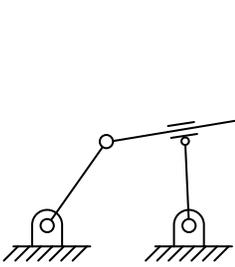


Figura 1.19

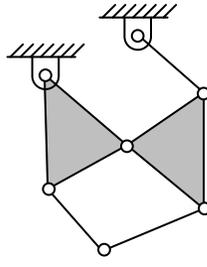


Figura 1.20

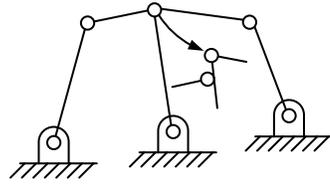


Figura 1.21

es decir

$$G = 3(N - 1) - 2p_I - p_{II} \quad (1.6)$$

donde p_I y p_{II} son los números de pares de clase I y II, respectivamente. Veamos, a continuación, algunos ejemplos que muestran el uso y las limitaciones del criterio de Grübler.

Ejemplo 1.1 El cuadrilátero articulado de la figura 1.17 tiene $N = 4$ y $p_I = 4$, luego el número de grados de libertad es

$$G = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 4 = 1$$

Ejemplo 1.2 Si al acoplador del ejemplo anterior le damos forma triangular y añadimos una barra adicional articulada al elemento fijo, como se muestra en la figura 1.18, tenemos $N = 5$ y $p_I = 6$, luego

$$G = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 0$$

es decir, no se trata de un mecanismo, sino de una estructura sin capacidad de movimiento.

Ejemplo 1.3 En el cuadrilátero de la figura 1.19 tenemos $N = 4$, $p_I = 3$ y $p_{II} = 1$, luego

$$G = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2$$

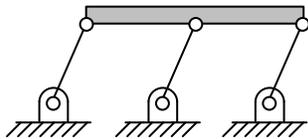


Figura 1.22

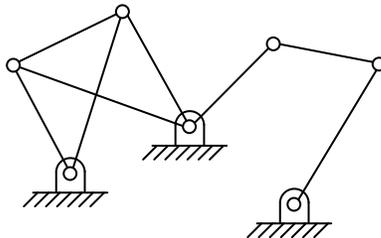


Figura 1.23

Ejemplo 1.4 En el mecanismo de la figura 1.20, proveniente de la cadena cinemática de Watt, se tiene $N = 6$, $p_I = 7$, luego

$$G = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 1$$

Ejemplo 1.5 En el mecanismo de la figura 1.21 tenemos $N = 6$ y $p_I = 7$, por lo que

$$G = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 1$$

En este mecanismo hay que tener en cuenta que un par ternario debe ser considerado como dos pares binarios, ya que una articulación en la que confluyen tres barras es equivalente a dos articulaciones con dos barras cada una, según se indica en la figura.

Los ejemplos vistos hasta ahora prueban que el criterio de Grübler es una buena herramienta para conocer el número de grados de libertad en muchos mecanismos. Sin embargo, debido a sus limitaciones debe ser utilizado con precaución. Veamos a continuación dos ejemplos que muestran dichas limitaciones.

Ejemplo 1.6 En el mecanismo de la figura 1.22, tenemos $G = 5$ y $p_I = 6$, por lo que

$$G = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 0$$

A pesar de que el resultado indica que el mecanismo no debería moverse, es evidente que se moverá pues se trata de un cuadrilátero articulado normal con barras redundantes. El fallo del criterio de Grübler se debe a que éste sólo tiene en cuenta las características estructurales (número de elementos y de pares), pero no contempla las dimensiones y características geométricas. Este mecanismo es estructuralmente idéntico al de la figura 1.18 que, como se vio, no tiene movilidad. Sin embargo, debido a su

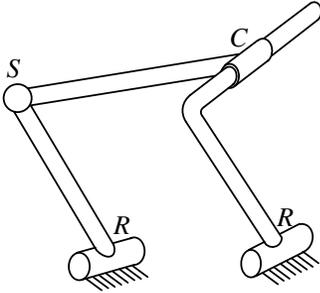


Figura 1.24: Mecanismo RSCR.

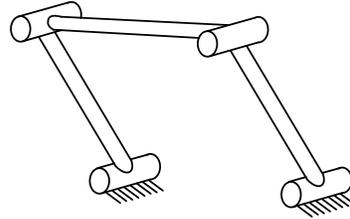


Figura 1.25: Cuadrilátero plano.

geometría particular de tres barras paralelas con orígenes alineados, este mecanismo si puede moverse.

Ejemplo 1.7 *Otra limitación del criterio de Grübler se puede ver en la figura 1.23. En ella, el recuento de elementos y pares da como resultado $N = 9$ y $p_I = 12$, por lo que*

$$G = 3 \cdot (9 - 1) - 2 \cdot 12 = 0$$

Sin embargo, se aprecia que la parte derecha del mecanismo es un cuadrilátero articulado con un grado de libertad. La causa del fallo del criterio de Grübler hay que buscarla aquí en que una parte del mecanismo constituye una estructura hiperestática de grado 1, sin posibilidad de movimiento, mientras que la otra es un mecanismo. Como el criterio de Grübler aplica la fórmula a su conjunto, en lugar de a cada parte, las conclusiones que se deducen son falsas. El lector puede concluir fácilmente que, al aplicar el criterio de Grübler independientemente a la parte de la izquierda y de la derecha, se obtiene, respectivamente, $G = -1$ y $G = 1$.

1.5.2. Criterio de Grübler en el espacio

En el caso tridimensional el criterio de Grübler adopta una forma análoga a la del plano, que en este caso es

$$G = 6 \cdot (N - 1) - 5 \cdot p_I - 4 \cdot p_{II} - 3 \cdot p_{III} \quad (1.7)$$

Ejemplo 1.8 *La figura 1.24 muestra un mecanismo RSCR, denominado así por los tipos de par que posee: revolución (Revolutive), esférico (Spherical), cilíndrico (Cylindrical) y revolución. En este caso, el recuento da $N = 4$,*

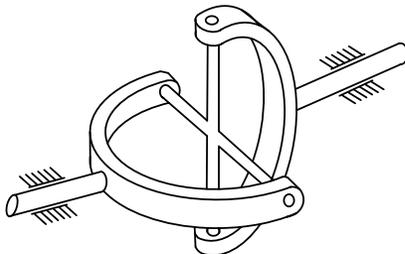


Figura 1.26: Junta universal o de Cardan.

$p_I = 2$ (los dos pares de revolución), $p_{II} = 1$ (el par cilíndrico) y $p_{III} = 1$ (el par esférico). Aplicando la fórmula, se obtiene

$$G = 6 \cdot (4 - 1) - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$$

En el caso tridimensional, las limitaciones del criterio de Grübler son más numerosas, pues se multiplican los casos de configuraciones especiales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.9 Cuando el cuadrilátero articulado plano se considera como tridimensional el criterio de Grübler nos proporciona un resultado erróneo. En efecto, tal y como se ve en la figura 1.25, en el cuadrilátero se tiene $N = 4$ y $p_I = 4$, por lo que

$$G = 6 \cdot (4 - 1) - 5 \cdot 4 = -2$$

El error se debe, en este caso, a que el cuadrilátero articulado plano es una configuración geométrica especial dentro de una familia de mecanismos que no tienen movilidad. En este caso particular, el mecanismo se mueve porque los cuatro ejes son paralelos.

Ejemplo 1.10 Otra excepción al criterio de Grübler es la junta Universal o de Cardan, mostrada en la figura 1.26. En este caso, $N = 4$ y $p_I = 4$, por lo que el criterio de Grübler da $G = -2$, cuando el valor correcto es $G = 1$. Este mecanismo pertenece a los denominados mecanismos esféricos, que se caracterizan por tener cuatro pares de revolución cuyos ejes se cortan en un mismo punto. Todos los mecanismos esféricos tienen un grado de libertad.

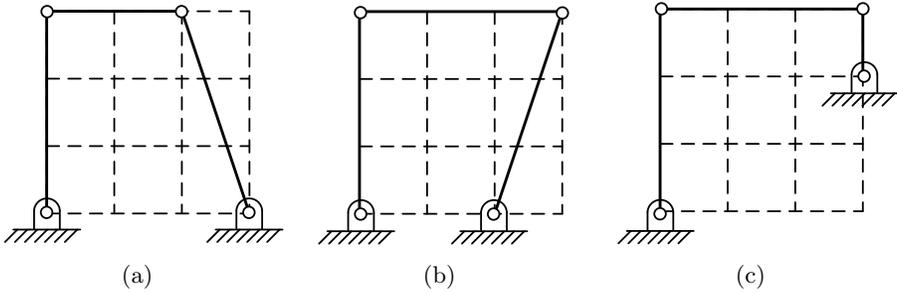


Figura 1.27

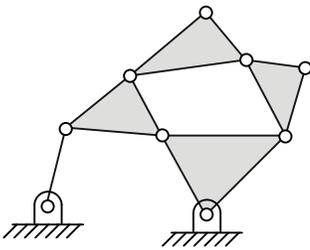


Figura 1.28

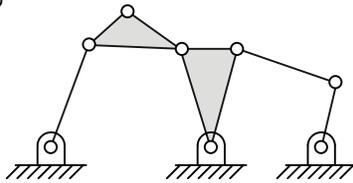


Figura 1.29

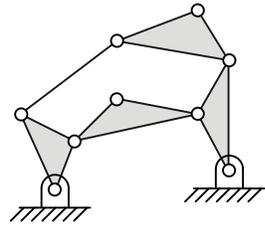


Figura 1.30

1.6. Problemas

Prob. 1.1 Empleando la ley de Grashoff ($b + c > a + d$) razonar si los mecanismos de la figura 1.27 se comportan como doble manivela, manivela-balancín o doble balancín.

Prob. 1.2 Indicar de qué cadena cinemática proceden los mecanismos de las figuras 1.28-1.32.

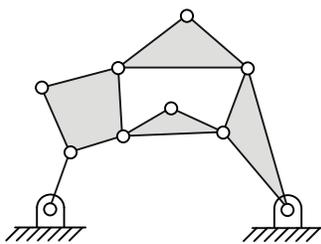


Figura 1.31

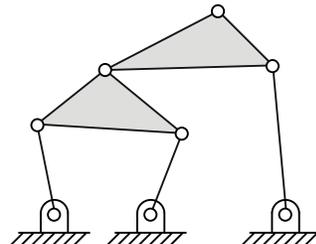


Figura 1.32

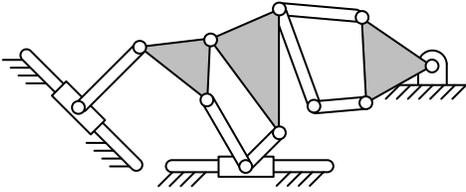


Figura 1.33

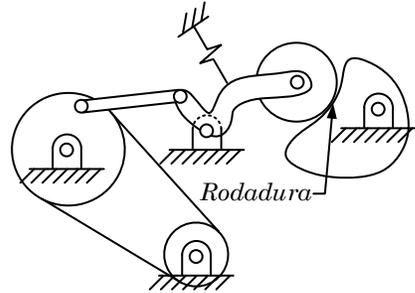


Figura 1.34

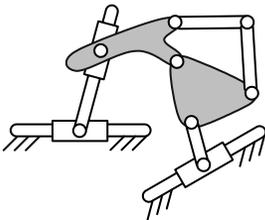


Figura 1.35

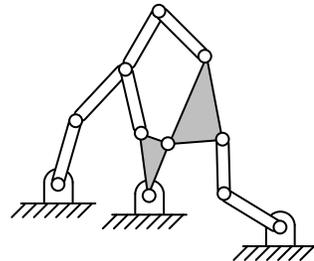


Figura 1.36

Prob. 1.3 Determinar el número de grados de libertad de los mecanismos de las figuras 1.33 a 1.52 mediante el criterio de Grübler.

Prob. 1.4 La patente americana n° 7090458 es propiedad de la universidad china de Tianjin. El invento describe un robot de dos grados de libertad, mostrado en la figura 1.53, destinado a funciones muy rápidas de *pick and place*. Calcular el número de grados de libertad mediante el criterio de Grübler y, si no coincide con el real, explicar la razón.

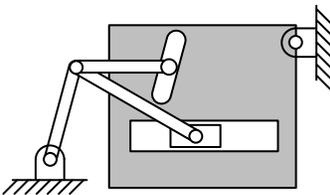


Figura 1.37

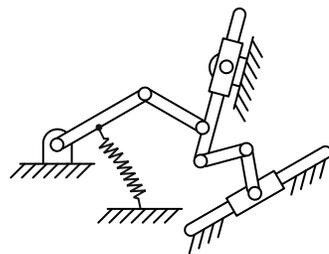


Figura 1.38

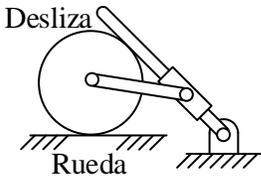


Figura 1.39

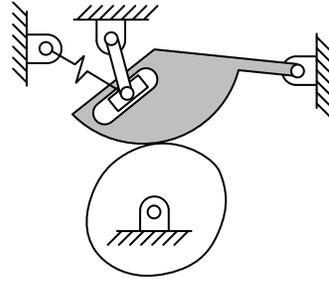


Figura 1.40

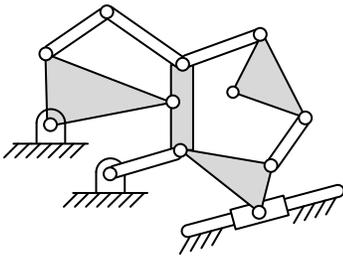


Figura 1.41

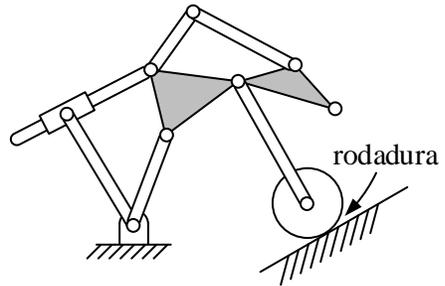


Figura 1.42

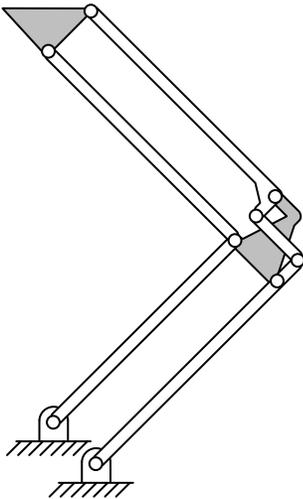


Figura 1.43

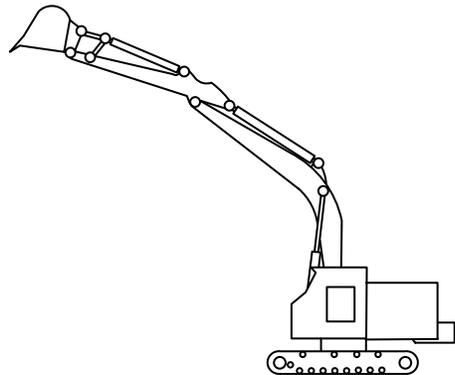


Figura 1.44

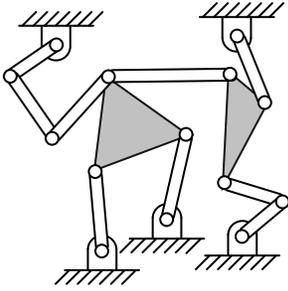


Figura 1.45

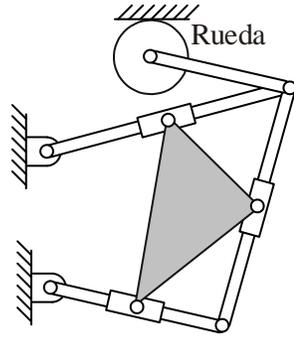


Figura 1.46

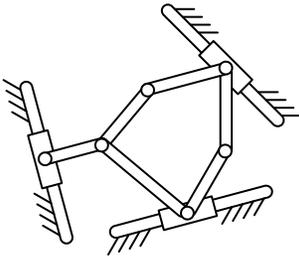


Figura 1.47

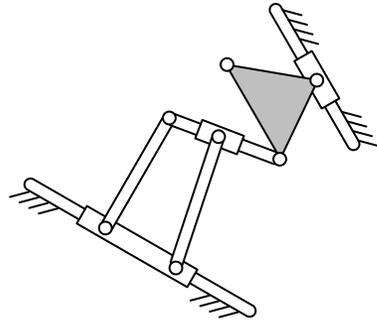


Figura 1.48

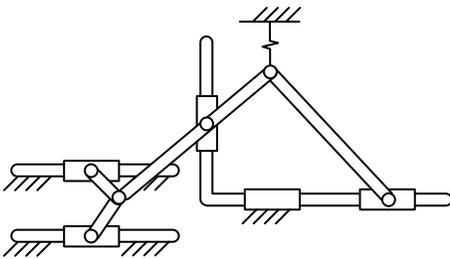


Figura 1.49

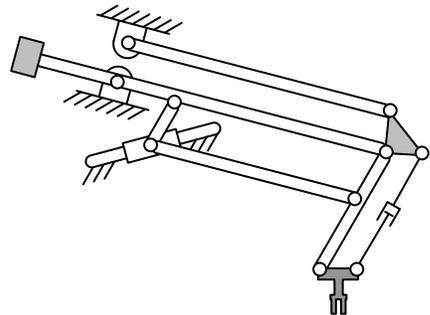


Figura 1.50

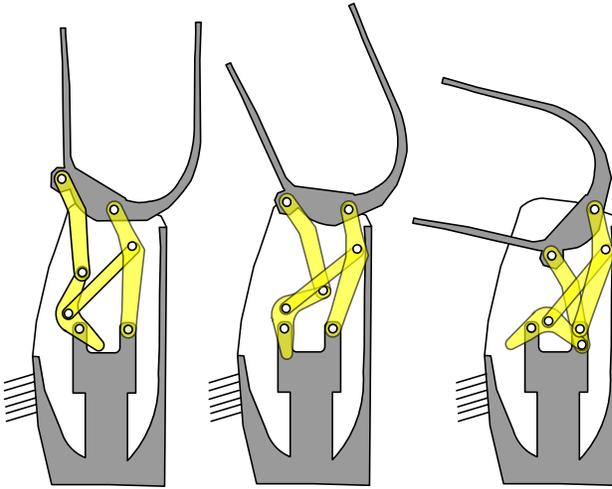


Figura 1.51

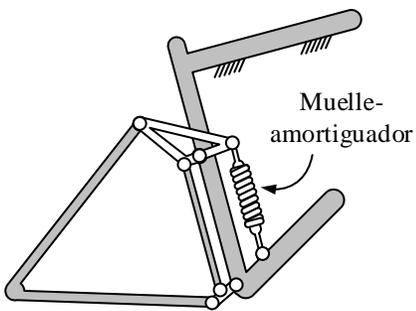


Figura 1.52

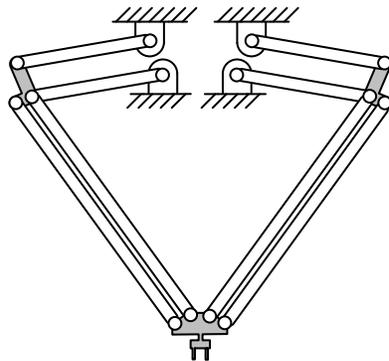


Figura 1.53

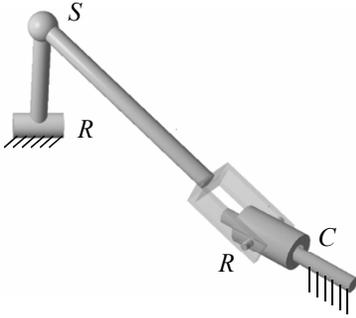


Figura 1.54



Figura 1.55

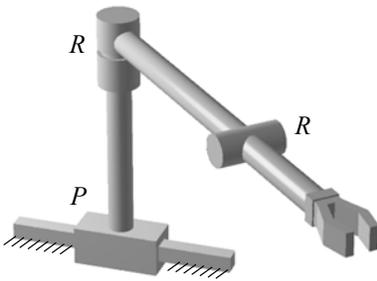


Figura 1.56

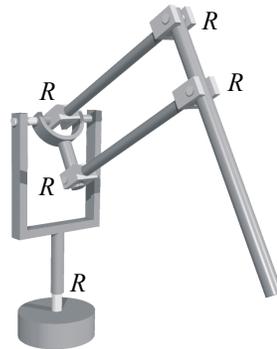


Figura 1.57

Prob. 1.5 Determinar el número de grados de libertad de los mecanismos tridimensionales de las figuras 1.54-1.60.

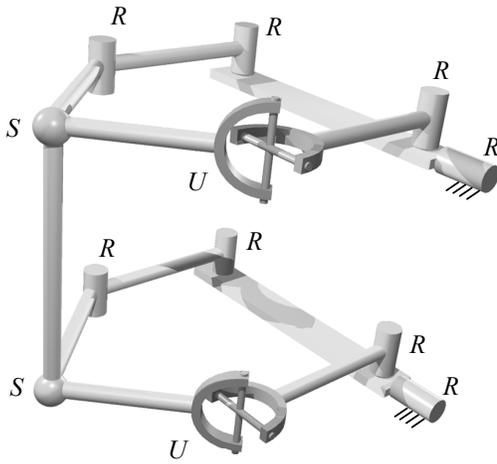


Figura 1.58

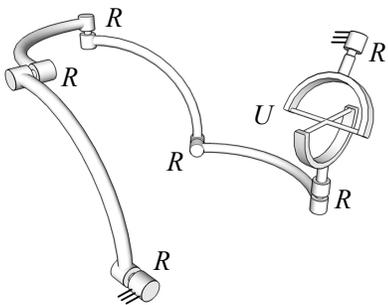


Figura 1.59

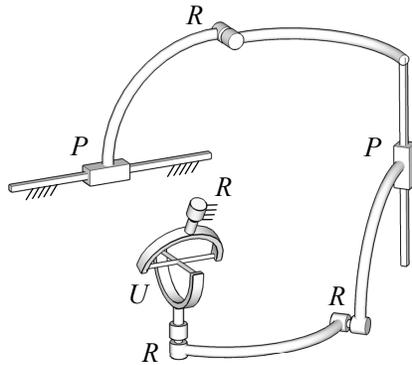


Figura 1.60

Capítulo 2

Cinemática del sólido rígido

2.1. Rotaciones entre sistemas de referencia

Sean los dos sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$ mostrados en la figura 2.1, cuya orientación viene definida mediante los vectores unitarios $\mathbf{i}_a, \mathbf{j}_a, \mathbf{k}_a$ e $\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b$. Sea \mathbf{u} un vector cualquiera. Por definición las *componentes* del vector \mathbf{u} en el sistema de referencia $\{a\}$ son las tres proyecciones de \mathbf{u} sobre los vectores unitarios del sistema de referencia $\{a\}$, que denotaremos

$${}^a\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} {}^a u_x \\ {}^a u_y \\ {}^a u_z \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

El superíndice a la izquierda indicará, en adelante, el sistema de referencia al que se refieren las componentes del vector. Adoptaremos el convenio de que todo vector sin superíndice tendrá sus componentes referidas al sistema de referencia $\{0\}$, que tomaremos como fijo. Por tanto, la expresión ${}^0\mathbf{u}$ será equivalente a \mathbf{u} .

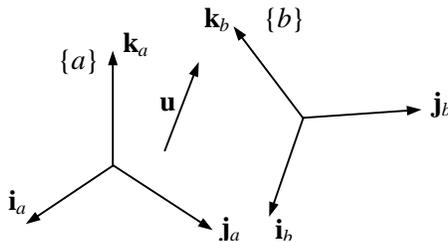


Figura 2.1: Representación de un vector en sistemas de referencia distintos.

Puesto que la proyección de un vector arbitrario \mathbf{u} sobre otro vector unitario \mathbf{w} se obtiene mediante el producto escalar entre \mathbf{u} y \mathbf{w} , podemos escribir las tres componentes (proyecciones) del vector \mathbf{u} en el sistema de referencia $\{a\}$ mediante las tres proyecciones

$$\begin{aligned} {}^a u_x &= \mathbf{u}^T \mathbf{i}_a \\ {}^a u_y &= \mathbf{u}^T \mathbf{j}_a \\ {}^a u_z &= \mathbf{u}^T \mathbf{k}_a \end{aligned} \quad (2.2)$$

Análogamente, las componentes del vector \mathbf{u} referidas al sistema de referencia $\{b\}$ se pueden expresar mediante las proyecciones

$$\begin{aligned} {}^b u_x &= \mathbf{u}^T \mathbf{i}_b \\ {}^b u_y &= \mathbf{u}^T \mathbf{j}_b \\ {}^b u_z &= \mathbf{u}^T \mathbf{k}_b \end{aligned} \quad (2.3)$$

Lógicamente, las componentes de \mathbf{u} en los sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$ están relacionadas, ya que representan dos formas diferentes de expresar una misma magnitud vectorial. Para hallar esta relación, partimos de la ecuación 2.2 y observamos que todos los vectores del lado derecho están expresados en el sistema de referencia $\{0\}$, pues no tienen superíndice a la izquierda. Teniendo en cuenta que el producto escalar de dos vectores es invariante respecto del sistema de referencia en que se expresan los vectores, podemos sustituir el sistema de referencia $\{0\}$ por el sistema $\{b\}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} {}^a u_x &= {}^b \mathbf{u}^T {}^b \mathbf{i}_a \\ {}^a u_y &= {}^b \mathbf{u}^T {}^b \mathbf{j}_a \\ {}^a u_z &= {}^b \mathbf{u}^T {}^b \mathbf{k}_a \end{aligned} \quad (2.4)$$

La ecuación 2.4 se puede expresar de forma matricial como

$${}^a \mathbf{u} = \begin{bmatrix} {}^b \mathbf{i}_a^T \\ {}^b \mathbf{j}_a^T \\ {}^b \mathbf{k}_a^T \end{bmatrix} {}^b \mathbf{u} = {}^a \mathbf{R}_b {}^b \mathbf{u} \quad (2.5)$$

donde la matriz ${}^a \mathbf{R}_b$ se conoce como *matriz de cambio de base* o *matriz de rotación* entre los sistemas $\{b\}$ y $\{a\}$.

Análogamente, podemos expresar la parte derecha de la ecuación 2.3 en el sistema de referencia $\{a\}$, obteniendo

$$\begin{aligned} {}^b u_x &= {}^a \mathbf{u}^T {}^a \mathbf{i}_b \\ {}^b u_y &= {}^a \mathbf{u}^T {}^a \mathbf{j}_b \\ {}^b u_z &= {}^a \mathbf{u}^T {}^a \mathbf{k}_b \end{aligned} \quad (2.6)$$

y de forma matricial

$${}^b\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{{}^a\mathbf{i}_b^T}{{}^a\mathbf{j}_b^T} \\ \frac{{}^a\mathbf{j}_b^T}{{}^a\mathbf{k}_b^T} \end{bmatrix} {}^a\mathbf{u} = {}^b\mathbf{R}_a {}^a\mathbf{u} \quad (2.7)$$

donde ${}^b\mathbf{R}_a$ se denomina matriz de cambio de base entre $\{a\}$ y $\{b\}$.

Las matrices de rotación ${}^a\mathbf{R}_b$ y ${}^b\mathbf{R}_a$ poseen tres propiedades:

1. Son *ortogonales*, es decir, su inversa coincide con su transpuesta. Para probarlo, basta con hacer el producto

$${}^a\mathbf{R}_b {}^a\mathbf{R}_b^T = \begin{bmatrix} \frac{{}^b\mathbf{i}_a^T}{{}^b\mathbf{j}_a^T} \\ \frac{{}^b\mathbf{j}_a^T}{{}^b\mathbf{k}_a^T} \end{bmatrix} [{}^b\mathbf{i}_a \mid {}^b\mathbf{j}_a \mid {}^b\mathbf{k}_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2. La inversa de ${}^a\mathbf{R}_b$ es ${}^b\mathbf{R}_a$, propiedad que se deduce directamente de las ecuaciones 2.5 y 2.7. Por tanto, al transponer o invertir una matriz de rotación sus índices a y b se permutan.
3. Las columnas de la matriz ${}^a\mathbf{R}_b$ son los vectores unitarios del sistema de referencia $\{b\}$ expresados en el sistema de referencia $\{a\}$, ya que aplicando las propiedades anteriores se puede escribir

$${}^a\mathbf{R}_b = {}^b\mathbf{R}_a^T = \begin{bmatrix} \frac{{}^a\mathbf{i}_b^T}{{}^a\mathbf{j}_b^T} \\ \frac{{}^a\mathbf{j}_b^T}{{}^a\mathbf{k}_b^T} \end{bmatrix}^T = [{}^a\mathbf{i}_b \mid {}^a\mathbf{j}_b \mid {}^a\mathbf{k}_b] \quad (2.9)$$

La matriz de rotación tiene dos interpretaciones posibles: la primera, que se ha utilizado en este apartado, considera a la matriz ${}^a\mathbf{R}_b$ como una matriz de *cambio de base* que transforma las componentes de un vector referidas al sistema $\{b\}$ en componentes referidas al sistema $\{a\}$. La segunda interpretación tiene un sentido más físico y considera a la matriz ${}^a\mathbf{R}_b$ como una transformación de vectores, capaz de llevar un vector desde una posición inicial hasta una posición final mediante una rotación. Veamos un ejemplo plano sencillo para aclarar la diferencia entre las dos interpretaciones.

Ejemplo 2.1 Consideremos los dos sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$ mostrados en la figura 2.2. Como hemos visto, las columnas de la matriz ${}^a\mathbf{R}_b$

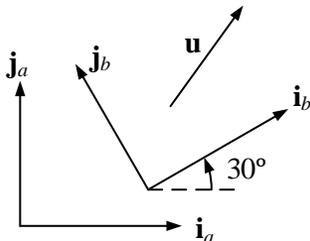


Figura 2.2: Matriz de cambio de base.

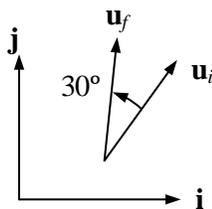


Figura 2.3: Matriz de rotación.

son los vectores unitarios del sistema $\{b\}$ expresados en el sistema $\{a\}$. Por tanto,

$${}^a\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Según lo visto, las componentes del vector \mathbf{u} en los dos sistemas de referencia están relacionadas mediante la expresión

$${}^a\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} {}^b\mathbf{u} \quad (2.11)$$

Consideremos ahora un único sistema de referencia, mostrado en la figura 2.3, y un vector cualquiera \mathbf{u}_i , en una posición que tomamos como inicial. Al premultiplicar \mathbf{u}_i por la matriz ${}^a\mathbf{R}_b$ anterior, se obtiene un nuevo vector \mathbf{u}_f . Para indagar por la naturaleza de esta transformación, podemos elegir un vector \mathbf{u}_i concreto, como por ejemplo $\mathbf{u}_i = \{1 \ 0\}$. Dicho vector se transformará en \mathbf{u}_f según el producto

$$\mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

que resulta ser el mismo vector girado 30° . Análogamente, la transformación del vector $\mathbf{u}_i = \{0 \ 1\}$ será

$$\mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

que supone también una rotación de 30° . Puesto que todo vector puede ser expresado como combinación lineal de $\{1 \ 0\}$ y $\{0 \ 1\}$, concluimos que la transformación que provoca la matriz ${}^a\mathbf{R}_b$ es siempre una rotación de 30° .

2.2. Parametrización de las rotaciones

En numerosas aplicaciones de la ingeniería es preciso expresar la orientación de un sistema de referencia *objetivo* con respecto a otro sistema de referencia *base*. Para ello, podríamos utilizar directamente la matriz de rotación entre ambos, ya que sus columnas contienen las componentes de los vectores unitarios del sistema de referencia *objetivo* con respecto del sistema de referencia *base*. Pese a la aparente simplicidad, esta elección comporta ciertos inconvenientes, el más grave de los cuales procede de que los nueve elementos de la matriz de rotación no son independientes. En efecto, puesto que las columnas de la matriz ${}^a\mathbf{R}_b$ son los vectores unitarios del sistema de referencia $\{b\}$ en el sistema de referencia $\{a\}$, las tres columnas de la matriz deberán satisfacer las seis ecuaciones de ortonormalidad

$$\begin{aligned}
 {}^a\mathbf{i}_b^T {}^a\mathbf{i}_b &= 1 \\
 {}^a\mathbf{j}_b^T {}^a\mathbf{j}_b &= 1 \\
 {}^a\mathbf{k}_b^T {}^a\mathbf{k}_b &= 1 \\
 {}^a\mathbf{i}_b^T {}^a\mathbf{j}_b &= 0 \\
 {}^a\mathbf{i}_b^T {}^a\mathbf{k}_b &= 0 \\
 {}^a\mathbf{j}_b^T {}^a\mathbf{k}_b &= 0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por tanto, si los nueve elementos de la matriz están sujetos a seis condiciones, sólo tres de ellos serán independientes o, dicho de otra forma, conocidos tres valores de la matriz de rotación, los seis restantes se pueden calcular con ayuda de las ecuaciones 2.14.

Una práctica común para describir las orientaciones consiste en utilizar un conjunto de tres (o cuatro) parámetros con sentido físico. De entre ellos, el más frecuente es el formado por los ángulos de Euler en sus múltiples variantes, cuya principal ventaja reside en el sentido físico, fácilmente comprensible. También se emplean con frecuencia otras formas de describir las orientaciones basadas en el Teorema de Euler-Chasles y en el concepto de *quaternions*. Veremos a continuación algunas de estas formas de *parametrizar* las rotaciones.

2.2.1. Ángulos de Euler XYZ en ejes fijos

Los ángulos de Euler XYZ en ejes fijos son tres rotaciones γ, β, α alrededor de los ejes X, Y, Z fijos, respectivamente. La palabra *fijos* tiene aquí un significado especial, que se ilustra en la figura 2.4. La primera rotación gira un ángulo γ alrededor del eje X_a , transformando el sistema de

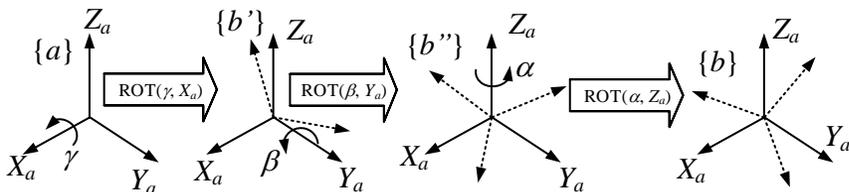


Figura 2.4: Ángulos de Euler XYZ en ejes fijos.

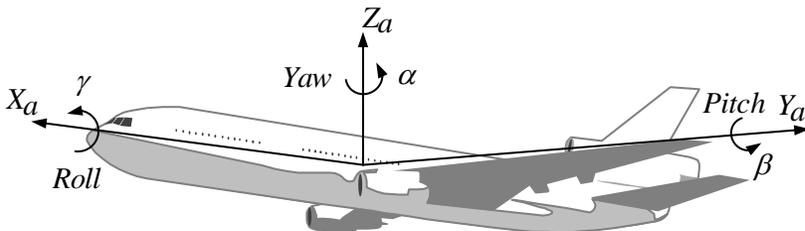


Figura 2.5: Ángulos roll, pitch y yaw.

referencia $\{a\}$ en $\{b'\}$. A continuación, se gira el sistema $\{b'\}$ un ángulo β alrededor del eje Y_a , obteniendo el sistema $\{b''\}$. Finalmente, se gira $\{b''\}$ un ángulo α respecto al eje Z_a , llegando finalmente al sistema $\{b\}$, cuya orientación queremos expresar. A estos tres ángulos γ, β, α se les conoce en aeronáutica como *roll*, *pitch* y *yaw*, pues representan los tres giros de un avión indicados en la figura 2.5.

Para calcular la matriz de rotación ${}^a\mathbf{R}_b$, aplicamos las rotaciones sucesivamente: primero la rotación en X_a , después la rotación en Y_a y, finalmente, la rotación en Z_a . Teniendo en cuenta que la primera rotación es la que debe ocupar la posición de más a la derecha (puesto que al multiplicar las matrices por un vector se comienza a operar por la derecha), podemos escribir

$${}^a\mathbf{R}_b = ROT(\alpha, Z) ROT(\beta, Y) ROT(\gamma, X) \quad (2.15)$$

donde $ROT(\alpha, Z)$ representa la matriz rotación elemental que gira un ángulo α alrededor del eje Z_a . Análogamente, las matrices $ROT(\beta, Y)$ y $ROT(\gamma, X)$ representan matrices de rotación elementales alrededor de los ejes Y_a y X_a , respectivamente. Escribiendo sus valores y operando, se ob-

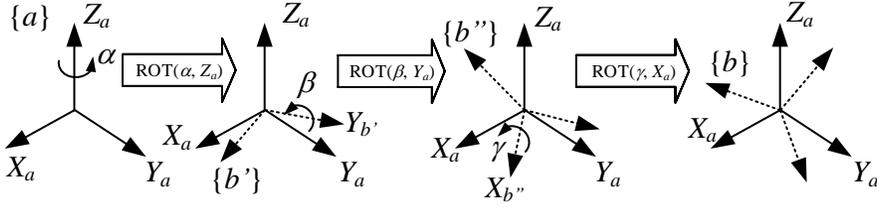


Figura 2.6: Ángulos de Euler ZYX en ejes seguidos.

tiene:

$$\begin{aligned}
 {}^a\mathbf{R}_b &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

expresión que permite obtener la matriz de cambio de base ${}^a\mathbf{R}_b$ a partir de los ángulos α , β y γ .

El problema inverso consiste en determinar los ángulos de Euler α , β , γ dados los nueve elementos de la matriz de rotación ${}^a\mathbf{R}_b$, es decir, suponiendo conocidos los valores numéricos r_{ij} de la expresión

$${}^a\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

La solución viene dada por las expresiones

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \beta &= -r_{31} & \cos \beta &= \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \beta} \\
 \text{sen } \alpha &= \frac{r_{21}}{\cos \beta} & \cos \alpha &= \frac{r_{11}}{\cos \beta} \\
 \text{sen } \gamma &= \frac{r_{32}}{\cos \beta} & \cos \gamma &= \frac{r_{33}}{\cos \beta}
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde el signo de $\cos \beta$ se puede escoger arbitrariamente. Cuando $\cos \beta = 0$, es decir, cuando $\beta = \pi/2 \pm n\pi$ ($n = 0, 1, \dots$), se produce una *orientación singular* para la que no se pueden calcular los ángulos de Euler, ya que la solución está indeterminada y hay infinitas combinaciones de α , β , γ que producen la misma matriz de rotación.

2.2.2. Ángulos de Euler ZYX en ejes seguidores

Los ángulos de Euler ZYX en ejes seguidores son tres rotaciones α, β, γ alrededor de los ejes Z, Y, X seguidores, respectivamente. Por *seguidores* se entienden las rotaciones que se dan, no respecto a los ejes originales como en el apartado anterior, sino respecto a los ejes girados. El orden de las rotaciones, según se indica en la figura 2.6, es el siguiente: primero se rota un ángulo α alrededor del eje Z_a , obteniéndose el sistema de referencia $\{b'\}$. Después se rota $\{b'\}$ un ángulo β alrededor del eje $Y_{b'}$, es decir, alrededor del eje Y ya rotado, obteniéndose el sistema $\{b''\}$. Finalmente, se rota $\{b''\}$ un ángulo γ alrededor del eje $X_{b''}$ para llegar al sistema $\{b\}$.

La secuencia de rotaciones se puede escribir, en este caso, mediante la siguiente composición de matrices de cambio de base:

$${}^a\mathbf{R}_b = {}^a\mathbf{R}_{b'} {}^{b'}\mathbf{R}_{b''} {}^{b''}\mathbf{R}_b \quad (2.19)$$

Para pasar de $\{a\}$ a $\{b'\}$ hemos aplicado una rotación elemental de un ángulo α alrededor del eje Z , de manera que ${}^a\mathbf{R}_{b'} = ROT(\alpha, Z)$. Análogamente, para pasar de $\{b'\}$ a $\{b''\}$ hemos dado una rotación elemental de un ángulo β alrededor del eje Y , por lo que ${}^{b'}\mathbf{R}_{b''} = ROT(\beta, Y)$. Finalmente, para pasar de $\{b''\}$ a $\{b\}$ hemos dado una rotación elemental de un ángulo γ alrededor del eje X , por lo que ${}^{b''}\mathbf{R}_b = ROT(\gamma, X)$. Sustituyendo, tenemos

$${}^a\mathbf{R}_b = ROT(\alpha, Z) ROT(\beta, Y) ROT(\gamma, X) \quad (2.20)$$

que es un resultado idéntico al que obtuvimos en la ecuación 2.15, por lo que la expresión de ${}^a\mathbf{R}_b$ en función de los ángulos α, β y γ viene también dada por la ecuación 2.16.

Este resultado es, en cierto modo, sorprendente; aunque las rotaciones no son conmutativas¹, el resultados anterior demuestra que al aplicar sucesivamente tres rotaciones γ, β, α alrededor de ejes XYZ fijos se obtiene la misma orientación que al aplicar sucesivamente tres rotaciones α, β, γ alrededor de ejes ZYX seguidores, lo que representa una propiedad *pseudo-conmutativa*.

Ejemplo 2.2 *La figura 2.7 muestra un paralelepípedo que se rota $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ en ejes fijos y seguidores. Como se ve, con la secuencia γ, β, α alrededor de ejes XYZ fijos se llega a la misma posición final que con la secuencia rotaciones α, β, γ alrededor de ejes ZYX seguidores.*

¹Según se ha visto, una rotación equivale a una multiplicación por una matriz de 3×3 . Puesto que el producto de matrices no es conmutativo, tampoco lo es la composición de rotaciones.

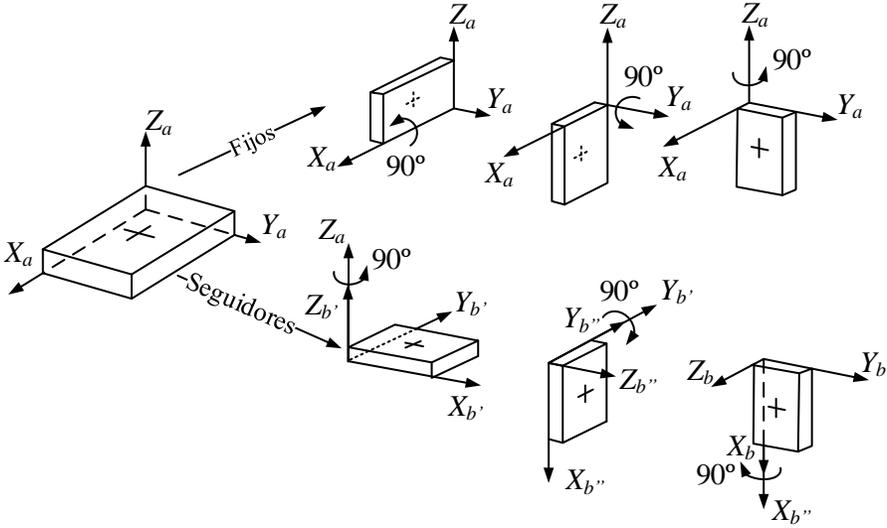


Figura 2.7: Rotaciones de un paralelepípedo en ejes fijos y ejes seguidores.

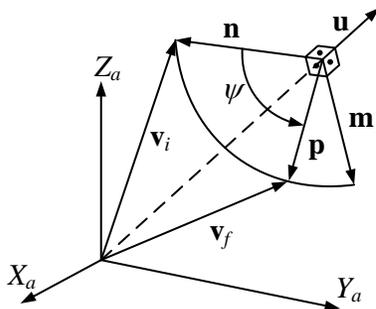
Ejemplo 2.3 De acuerdo con la expresión 2.18, la orientación final del ejemplo anterior es singular, ya que $\beta = 90^\circ$. Ello significa que existen infinitas formas de pasar de la orientación inicial a la final ¿Cómo podemos encontrar otro conjunto de rotaciones distinto del anterior ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$) y que produzca el mismo resultado final?

A simple vista podemos ver que las rotaciones $\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 0$ producen la misma orientación final, por lo que debe tratarse de una de las soluciones posibles.

Para resolver el problema de forma general, sustituimos en la expresión 2.20, o su equivalente la 2.16, el valor del ángulo $\beta = 90^\circ$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
 {}^a\mathbf{R}_b &= ROT(\alpha, Z) ROT\left(\frac{\pi}{2}, Y\right) ROT(\gamma, X) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\text{sen } \gamma \\ 0 & \text{sen } \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \text{sen}(\gamma - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) \\ 0 & \cos(\gamma - \alpha) & -\text{sen}(\gamma - \alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, la matriz correspondiente a la orientación final del ejem-

Figura 2.8: Rotación de \mathbf{v}_i alrededor del eje \mathbf{u} .

pló es:

$${}^a\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Se observa que ambas matrices coinciden siempre que $\alpha = \gamma$. Por tanto, cualquier conjunto de rotaciones que cumpla las propiedades $\alpha = \gamma$ y $\beta = 90^\circ$, permite pasar de la orientación inicial a la orientación final.

2.2.3. Rotación alrededor de un eje

Otra forma de especificar la rotación relativa entre dos sistemas de referencia es mediante la rotación alrededor de un eje. El teorema de Euler-Chasles establece que dado un sistema de referencia $\{a\}$ y otro $\{b\}$, se puede pasar de la orientación de $\{a\}$ a la de $\{b\}$ mediante una única rotación ψ alrededor de un eje \mathbf{u} . Tomando dicho vector como unitario, se puede combinar la información relativa a la dirección del eje de giro y al ángulo girado en un solo vector Ψ cuyo módulo es, precisamente, el ángulo ψ y cuya dirección es la del vector unitario \mathbf{u} .

Podemos escribir el vector Ψ como

$$\Psi = \mathbf{u} \psi \quad (2.23)$$

cuyo módulo es

$$|\Psi| = \psi \quad (2.24)$$

El vector Ψ representa otra forma de expresar las orientaciones, por lo que constituye una alternativa a los ángulos de Euler vistos en los apartados precedentes.

Para obtener la matriz de rotación en función de las tres componentes de Ψ , partimos de la figura 2.8, donde se muestra un vector \mathbf{v}_i que, al ser rotado un ángulo ψ alrededor del eje \mathbf{u} , se convierte en \mathbf{v}_f . Llamando ${}^a\mathbf{R}_b$ a la matriz de rotación buscada, podemos escribir:

$$\mathbf{v}_f = {}^a\mathbf{R}_b \mathbf{v}_i \quad (2.25)$$

Definimos el vector \mathbf{m} , perpendicular al plano formado por \mathbf{v}_i y \mathbf{u} , mediante la expresión

$$\mathbf{m} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}_i \quad (2.26)$$

y otro vector \mathbf{n} , contenido en el plano de \mathbf{v}_i y \mathbf{u}

$$\mathbf{n} = -\mathbf{u} \times \mathbf{m} = -\tilde{\mathbf{u}} \mathbf{m} = -\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}_i \quad (2.27)$$

donde la matriz $\tilde{\mathbf{u}}$ es la conocida matriz antisimétrica asociada al producto vectorial, cuya expresión y propiedades se pueden consultar en el apéndice, al final del capítulo.

Los vectores \mathbf{m} y \mathbf{n} están contenidos en un plano normal a \mathbf{u} , sobre el que el extremo de \mathbf{v}_i describe un arco de circunferencia que abarca un ángulo ψ al pasar a \mathbf{v}_f . Definimos un nuevo vector \mathbf{p} , incluido en este plano

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cos \psi + \mathbf{m} \sin \psi \quad (2.28)$$

Con los vectores \mathbf{n} y \mathbf{p} recién definidos, podemos escribir la ecuación vectorial

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i - \mathbf{n} + \mathbf{p} \quad (2.29)$$

Sustituyendo las expresiones 2.25-2.28 en la ecuación 2.29, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= \mathbf{v}_i + \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}_i - \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}_i \cos \psi + \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}_i \sin \psi = \\ &= (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} (1 - \cos \psi) + \tilde{\mathbf{u}} \sin \psi) \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (2.30)$$

Comparando con la ecuación 2.25, concluimos que la expresión de la matriz de rotación es

$${}^a\mathbf{R}_b = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} (1 - \cos \psi) + \tilde{\mathbf{u}} \sin \psi) \quad (2.31)$$

Operando, se puede obtener la siguiente expresión explícita de la matriz de rotación:

$${}^a\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} -(u_y^2 + u_z^2)\alpha + 1 & u_x u_y \alpha - u_z \beta & u_x u_z \alpha + u_y \beta \\ u_x u_y \alpha + u_z \beta & -(u_x^2 + u_z^2)\alpha + 1 & u_y u_z \alpha - u_x \beta \\ u_x u_z \alpha - u_y \beta & u_y u_z \alpha + u_x \beta & -(u_x^2 + u_y^2)\alpha + 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

donde $\alpha = 1 - \cos \psi$ y $\beta = \sin \psi$.

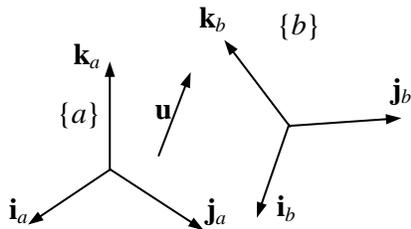


Figura 2.9

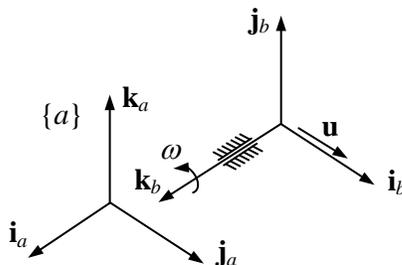


Figura 2.10

2.2.4. Parámetros de Euler

Los *parámetros de Euler* son la forma más conocida de representar la orientación con un conjunto de cuatro parámetros. La definición de los parámetros de Euler se apoya, como en el apartado anterior, en una rotación ψ alrededor de un eje \mathbf{u} . Los cuatro parámetros de Euler e_0, e_1, e_2, e_3 se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \\ e_1 &= u_x \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \\ e_2 &= u_y \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \\ e_3 &= u_z \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Los parámetros de Euler están relacionados por la ecuación algebraica $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$. A diferencia de los ángulos de Euler, los parámetros de Euler no tienen ninguna orientación singular, por lo que son capaces de definir de forma unívoca cualquier orientación posible.

2.3. Análisis de velocidades y aceleraciones

2.3.1. Derivación en distintos sistemas de referencia

La figura 2.9 muestra dos sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$, que se mueven uno respecto del otro, y un vector \mathbf{u} . Al derivar el vector \mathbf{u} respecto del tiempo, es necesario tener presentes dos sistemas de referencia:

- El sistema de referencia en el que se deriva
- El sistema de referencia en el que se expresan las componentes de la derivada.

Estos dos sistemas son conceptualmente diferentes, aunque en algunos casos pueden coincidir. Para aclarar estos conceptos, llamemos ${}^a\mathbf{v}_a$ a la derivada respecto al tiempo del vector ${}^a\mathbf{u}$:

$${}^a\mathbf{v}_a = \frac{d({}^a\mathbf{u})}{dt} \quad (2.34)$$

Físicamente, ${}^a\mathbf{v}_a$ representa la variación de las componentes de \mathbf{u} que vería un observador situado en el sistema de referencia $\{a\}$, por lo que $\{a\}$ es el sistema de referencia respecto al que se deriva. La derivada, por su parte, es también un vector, y sus componentes pueden ser expresadas en cualquier sistema de referencia, en este caso también el $\{a\}$. No habría ningún obstáculo en expresar dicho vector en otro sistema de referencia, por ejemplo el $\{b\}$, obteniendo ${}^b\mathbf{v}_a$, que representa físicamente la variación de las componentes del vector \mathbf{u} tal como la vería un observador situado en $\{a\}$ pero con sus componentes referidas al sistema $\{b\}$.

Ejemplo 2.4 *En la figura 2.10 se muestra un sistema de referencia $\{b\}$ que gira con velocidad angular ω constante alrededor de su eje \mathbf{k}_b . Durante el movimiento, \mathbf{k}_b permanece paralelo a \mathbf{i}_a y el vector \mathbf{u} permanece rígidamente unido a $\{b\}$. Podemos escribir*

$${}^a\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \\ \sen \omega t \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Al derivar, tenemos

$${}^a\mathbf{v}_a = \frac{d({}^a\mathbf{u})}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \sen \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Este vector ${}^a\mathbf{v}_a$ representa la velocidad del vector \mathbf{u} vista desde el sistema $\{a\}$. Como todo vector, \mathbf{v}_a se puede expresar también en otro sistema de referencia. Para pasar de $\{a\}$ a $\{b\}$ debemos multiplicar por la matriz de rotación:

$$\begin{aligned} {}^b\mathbf{v}_a &= {}^b\mathbf{R}_a {}^a\mathbf{v}_a = ({}^a\mathbf{R}_b)^T {}^a\mathbf{v}_a = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \omega t & -\sen \omega t & 0 \\ \sen \omega t & \cos \omega t & 0 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \sen \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Análogamente, podríamos calcular ${}^b\mathbf{v}_b$ como

$${}^b\mathbf{v}_b = \frac{d({}^b\mathbf{u})}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

y, por tanto,

$${}^a\mathbf{v}_b = {}^a\mathbf{R}_b {}^b\mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

En adelante, adoptaremos el convenio de tomar el sistema de referencia fijo $\{0\}$ como sistema de derivación y reservaremos para ello la notación del punto sobre la magnitud que se deriva. Por tanto, $\dot{\mathbf{u}}$ representará la derivada del vector \mathbf{u} con respecto del sistema de referencia fijo. El superíndice a la izquierda indicará, como hasta ahora, el sistema de referencia en el que se expresan las componentes. Con esta notación, conviene observar que ${}^a\dot{\mathbf{u}}$ no debe confundirse con $\frac{d{}^a\mathbf{u}}{dt}$, sino que

$${}^a\dot{\mathbf{u}} = {}^a\mathbf{R}_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (2.40)$$

Las derivaciones en sistemas de referencia distintos del fijo se indicarán explícitamente.

2.3.2. Velocidad angular y aceleración angular

Consideremos el sistema de referencia $\{a\}$ y el vector de módulo constante \mathbf{u} que se mueve solidariamente unido al sistema $\{a\}$. Podemos escribir

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_a {}^a\mathbf{u} \quad (2.41)$$

Al derivar la expresión anterior, se obtiene

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d(\mathbf{R}_a {}^a\mathbf{u})}{dt} = \dot{\mathbf{R}}_a {}^a\mathbf{u} + \mathbf{R}_a \underbrace{\frac{d({}^a\mathbf{u})}{dt}}_{=0} = \dot{\mathbf{R}}_a {}^a\mathbf{u} \quad (2.42)$$

Despejando ${}^a\mathbf{u}$ de la ecuación 2.41 y sustituyendo, se deduce

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{R}}_a (\mathbf{R}_a)^T \mathbf{u} \quad (2.43)$$

El producto $\dot{\mathbf{R}}_a (\mathbf{R}_a)^T$ es una matriz antisimétrica², como se puede demostrar a partir de la propiedad de ortogonalidad de la matriz de rotación, que establece

$$\mathbf{R}_a (\mathbf{R}_a)^T = \mathbf{I} \quad (2.44)$$

Derivando respecto al tiempo,

$$\dot{\mathbf{R}}_a (\mathbf{R}_a)^T = -\mathbf{R}_a (\dot{\mathbf{R}}_a)^T \quad (2.45)$$

Como el miembro de la izquierda coincide con el miembro de la derecha transpuesto y cambiado de signo, esta ecuación demuestra la proposición. Puesto que toda matriz antisimétrica puede interpretarse como un operador de producto vectorial por su vector dual asociado (ver Apéndice), llamando *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}_a$ a dicho vector dual, se puede escribir

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_a = \dot{\mathbf{R}}_a (\mathbf{R}_a)^T \quad (2.46)$$

Con esta definición, la ecuación 2.43 se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{u} \quad (2.47)$$

Físicamente, el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_a$ expresa la velocidad con la que el sistema $\{a\}$ cambia su orientación con respecto al sistema $\{0\}$.

Consideremos ahora el caso de mayor generalidad. Sea un sistema de referencia $\{a\}$ que se mueve respecto al sistema $\{0\}$, y un vector \mathbf{u} que se mueve arbitrariamente. Al derivar \mathbf{u} , podremos escribir

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d(\mathbf{R}_a^a \mathbf{u})}{dt} = \dot{\mathbf{R}}_a \mathbf{R}_a^T \mathbf{u} + \mathbf{R}_a \frac{d^a \mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{u} + \mathbf{R}_a \frac{d^a \mathbf{u}}{dt} \quad (2.48)$$

Más adelante utilizaremos esta ecuación como fórmula de derivación de un vector genérico, que se conoce también como *regla de derivación de Bouré*.

La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_a$ se define como la derivada de la velocidad angular con respecto al tiempo, es decir $\dot{\boldsymbol{\omega}}_a$.

²Por definición, una matriz \mathbf{A} es antisimétrica cuando $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$

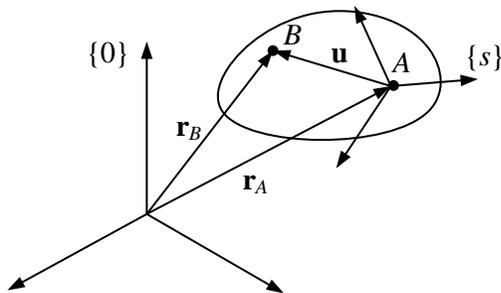


Figura 2.11

2.3.3. Campos de velocidad y aceleración del sólido rígido

Consideremos el sólido rígido mostrado en la figura 2.11, con el sistema de referencia $\{s\}$ solidariamente unido a él. Llamamos A al origen del sistema de referencia $\{s\}$ y B a una partícula material del sólido. Podemos escribir la igualdad vectorial

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{u} \quad (2.49)$$

Derivando esta ecuación, obtenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u} \quad (2.50)$$

donde \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B son las velocidades de los puntos A y B , y la derivada de \mathbf{u} se obtuvo en la ecuación 2.47. Al producto $\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u}$ se le denomina también velocidad de B con respecto a A , y se denota con las letras \mathbf{v}_{BA} . Puesto que el sistema $\{s\}$ está rígidamente unido al sólido, la velocidad angular del sólido es $\boldsymbol{\omega}_s$, la misma que la de $\{s\}$. La forma simplificada de escribir el campo de velocidades de un sólido rígido es,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} \quad (2.51)$$

Para obtener el campo de aceleraciones, se deriva la ecuación 2.50, resultando:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_s \times \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u} \quad (2.52)$$

donde \mathbf{a}_A y \mathbf{a}_B son las aceleraciones de los puntos A y B , y $\boldsymbol{\alpha}_s$ es la aceleración angular del sistema de referencia del sólido. A los dos sumandos que acompañan a \mathbf{a}_A se les denomina componentes de la *aceleración de B con respecto a A* y se denotan con el vector \mathbf{a}_{BA} .

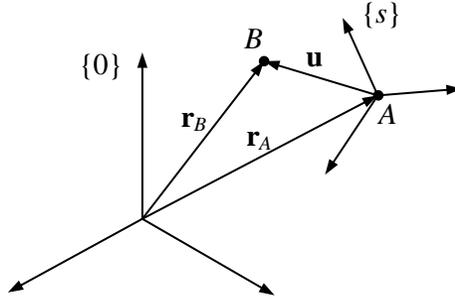


Figura 2.12

En el caso plano, el término $\boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{u}$ representa la componente de \mathbf{a}_{BA} perpendicular al vector \mathbf{u} , es decir, perpendicular a la línea que une A con B , por lo que se denomina *aceleración de B con respecto de A tangencial* y se denota \mathbf{a}_{BA}^t . Por su parte, el término $\boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u}$ es la componente de \mathbf{a}_{BA} que lleva la dirección del vector \mathbf{u} , por lo que se le denomina *aceleración de B con respecto de A normal* y se denota \mathbf{a}_{BA}^n . Con esta notación, la forma simplificada de escribir el campo de aceleraciones del sólido rígido es

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n \quad (2.53)$$

2.3.4. Movimiento de arrastre y relativo de un punto

La 2.12 muestra un sistema de referencia $\{s\}$ que se mueve respecto del fijo $\{0\}$. Una partícula material B tiene un movimiento arbitrario respecto de $\{s\}$ y respecto de $\{0\}$. Podemos escribir

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{u} \quad (2.54)$$

Derivando respecto del tiempo según la ecuación 2.48, se obtiene

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u} + \mathbf{R}_s \frac{d^s \mathbf{u}}{dt} \quad (2.55)$$

Comparando esta ecuación con la 2.50, deducimos que los dos primeros sumandos representan la velocidad del punto B como si estuviese rígidamente unido al sistema de referencia $\{s\}$, por lo que reciben el nombre de *velocidad de arrastre* y se denota \mathbf{v}_{arr} . El tercer sumando representa la velocidad del punto B tal y como la vería un observador subido en el sistema $\{s\}$, pero con sus componentes referidas al sistema $\{0\}$, por lo que

recibe el nombre de *velocidad relativa* y se denota \mathbf{v}_{rel} . Con esta notación, la ecuación 2.55 puede reescribirse como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{arr} + \mathbf{v}_{rel} \quad (2.56)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación 2.55, resulta

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u})}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{rel}}{dt} \quad (2.57)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d(\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u})}{dt} &= \boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_s \times \dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u} + \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_s \times \underbrace{\mathbf{R}_s \frac{d^s \mathbf{u}}{dt}}_{\mathbf{v}_{rel}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{rel}}{dt} &= \dot{\mathbf{R}}_s \frac{d^s \mathbf{u}}{dt} + \mathbf{R}_s \frac{d^2 s \mathbf{u}}{dt^2} = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{R}_s \frac{d^s \mathbf{u}}{dt} + \mathbf{R}_s \frac{d^2 s \mathbf{u}}{dt^2} = \\ &= \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{R}_s \frac{d^2 s \mathbf{u}}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde el valor de $\dot{\mathbf{R}}_s = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{R}_s$ se deduce de la ecuación 2.46. Sustituyendo las ecuaciones 2.58 y 2.59 en la 2.57, resulta:

$$\mathbf{a}_B = \underbrace{\mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u}}_{\mathbf{a}_{arr}} + \underbrace{\mathbf{R}_s \frac{d^2 s \mathbf{u}}{dt^2}}_{\mathbf{a}_{rel}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_{rel}}_{\mathbf{a}_{cor}} \quad (2.60)$$

Los tres primeros sumandos de la ecuación 2.60 representan la aceleración que tendría el punto B si éste estuviese rígidamente unido al sistema $\{s\}$, por lo que se les denomina *aceleración de arrastre* \mathbf{a}_{arr} . El siguiente sumando representa la aceleración del punto B que vería un observador subido en el sistema $\{s\}$, pero con sus componentes referidas al sistema fijo, y se le denomina *aceleración relativa* \mathbf{a}_{rel} . Por último, al tercer término se le denomina *aceleración de Coriolis* \mathbf{a}_{cor} .

Ejemplo 2.5 *Determinar la velocidad angular instantánea ω_1 del mecanismo de la figura 2.13 sabiendo que el actuador hidráulico se alarga con velocidad constante v .*

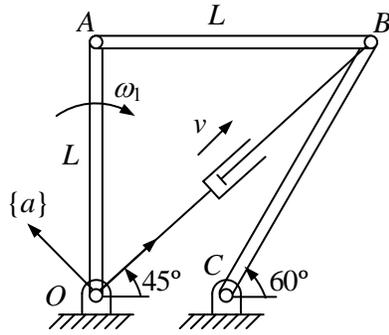


Figura 2.13

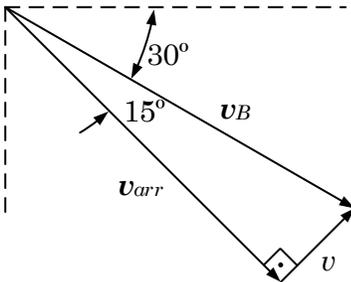


Figura 2.14

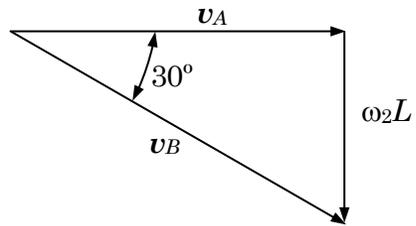


Figura 2.15

Comenzamos definiendo un sistema de referencia auxiliar $\{a\}$, con origen el punto O y orientado hacia el punto B . En dicho sistema, podemos plantear la ecuación vectorial

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{arr} + \mathbf{v}_{rel}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad relativa coincide con la velocidad v de alargamiento del actuador, podemos dibujar el triángulo de la figura 2.14, de donde se deduce

$$\mathbf{v}_B = \frac{v}{\text{sen } 15}$$

Por otra parte, la ecuación de velocidad del sólido \overline{AB} establece

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{AB}$$

que nos permite dibujar el correspondiente triángulo de la figura 2.15, del que se obtiene

$$\omega_1 = \frac{v_A}{L} = \frac{v_B \cos 30}{L} = \frac{\sqrt{3}v}{2L \text{sen } 15}$$

2.3.5. Movimiento de arrastre y relativo para la velocidad y aceleración angular

Repitamos ahora para la velocidad y aceleración angular lo visto en la sección anterior sobre el movimiento de arrastre y relativo. Consideremos dos sistemas de referencia móviles $\{s\}$ y $\{t\}$, que se mueven uno respecto del otro con un movimiento arbitrario. Para un vector \mathbf{u} , rígidamente unido al sistema $\{t\}$, podemos escribir la transformación

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_s {}^s\mathbf{R}_t {}^t\mathbf{u} \quad (2.61)$$

Sabemos por la ecuación 2.47 que la derivada de un vector \mathbf{u} rígidamente unido a un sistema de referencia se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{u} \quad (2.62)$$

Por otra parte, podemos tomar derivadas de la ecuación 2.61, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{R}}_s {}^s\mathbf{R}_t {}^t\mathbf{u} + \mathbf{R}_s \frac{d {}^s\mathbf{R}_t}{dt} {}^t\mathbf{u} = \dot{\mathbf{R}}_s {}^s\mathbf{u} + \mathbf{R}_s \frac{d {}^s\mathbf{R}_t}{dt} {}^t\mathbf{u} = \\ &= \underbrace{\dot{\mathbf{R}}_s \mathbf{R}_s^T}_{\boldsymbol{\omega}_s \times} \mathbf{u} + \mathbf{R}_s \underbrace{\frac{d {}^s\mathbf{R}_t}{dt} {}^s\mathbf{R}_t^T}_{{}^s\boldsymbol{\omega}_{t/s} \times} {}^s\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u} + \mathbf{R}_s ({}^s\boldsymbol{\omega}_{t/s} \times {}^s\mathbf{u}) = \\ &= \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{t/s} \times \mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_{t/s}) \times \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.63)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_{t/s}$ representa la velocidad angular con que un observador subido en $\{s\}$ ve girar al sistema $\{t\}$.

Comparando las dos últimas ecuaciones, concluimos que

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_{t/s} \quad (2.64)$$

que establece que la velocidad angular del sistema $\{t\}$ se puede escribir como suma de la velocidad angular del sistema $\{s\}$ más la velocidad angular del sistema $\{t\}$ vista por un observador subido en $\{s\}$. De forma abreviada, por analogía con el apartado anterior, podemos decir que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_t$ es la suma de una velocidad angular de arrastre con el sistema $\{s\}$ más una relativa angular relativa respecto de $\{s\}$, que escribimos como

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega}_{arr} + \boldsymbol{\omega}_{rel} \quad (2.65)$$

Para hallar la expresión correspondiente en aceleraciones angulares, partimos de la ecuación 2.64, que reescribimos como

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega}_s + \mathbf{R}_s^s \boldsymbol{\omega}_{t/s} \quad (2.66)$$

Tomando derivadas respecto al tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_t &= \boldsymbol{\alpha}_s + \dot{\mathbf{R}}_s^s \boldsymbol{\omega}_{t/s} + \mathbf{R}_s \frac{d^s \boldsymbol{\omega}_{t/s}}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_s + \underbrace{\dot{\mathbf{R}}_s \mathbf{R}_s^T}_{\boldsymbol{\omega}_s \times} \boldsymbol{\omega}_{t/s} + \mathbf{R}_s^s \boldsymbol{\alpha}_{t/s} = \\ &= \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_{t/s} + \boldsymbol{\alpha}_{t/s} \end{aligned} \quad (2.67)$$

expresión análoga a la de velocidades pero con un término adicional. Dicha ecuación establece que la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_t$ se puede escribir como la suma de la aceleración $\boldsymbol{\alpha}_s$, más la aceleración angular con la que un observador subido en $\{s\}$ ve moverse a $\{t\}$, más un término adicional que se conoce como *aceleración complementaria* o *aceleración de Resal*. Más concisamente podemos decir que la aceleración $\boldsymbol{\alpha}_t$ es suma de una aceleración de arrastre, más una aceleración relativa, más una aceleración de Resal. Matemáticamente:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{\alpha}_{arr} + \boldsymbol{\alpha}_{rel} + \boldsymbol{\alpha}_{Resal} \quad (2.68)$$

Ejemplo 2.6 *Determinar las velocidades angulares y aceleraciones angulares instantáneas de los cuatro elementos del mecanismo de la figura 2.16.*

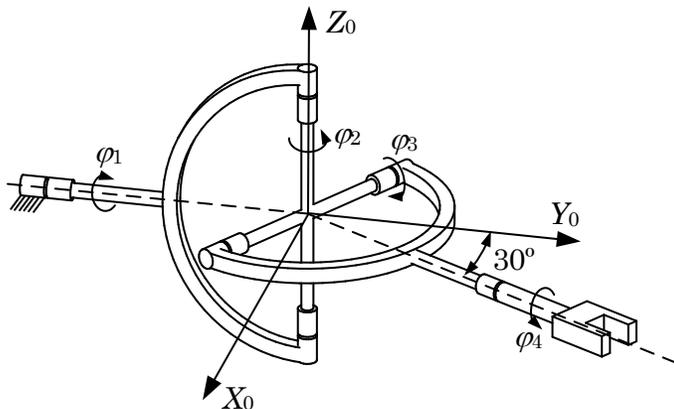


Figura 2.16

Podemos calcular las velocidades angulares empleando de forma recursiva la expresión 2.64 del movimiento de arrastre y relativo:

$$\omega_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega_{2/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_{3/2} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -\sqrt{3} \dot{\varphi}_3 \\ 2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 \\ 2\dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_4 = \omega_3 + \omega_{4/3} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -\sqrt{3} \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4 \\ 2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 + \sqrt{3} \dot{\varphi}_4 \\ 2\dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Análogamente, con las aceleraciones angulares podemos aplicar la ecuación 2.64 de forma recursiva:

$$\alpha_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_{2/1} + \omega_1 \times \omega_{2/1} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_{3/2} + \omega_2 \times \omega_{3/2} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \sqrt{3} \ddot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \\ 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_3 - \sqrt{3} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \\ 2\ddot{\varphi}_2 + \sqrt{3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_{4/3} + \omega_3 \times \omega_{4/3} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \sqrt{3} \ddot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \ddot{\varphi}_4 - \sqrt{3} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 \\ 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_3 - \sqrt{3} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \sqrt{3} \ddot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 \\ 2\ddot{\varphi}_2 + \sqrt{3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 - \frac{3}{2} \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 - \frac{1}{2} (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3) \dot{\varphi}_4 \end{Bmatrix}$$

2.3.6. Relación de los ángulos de Euler con la velocidad angular

En los apartados precedentes hemos estudiado los ángulos de Euler α , β , γ como una forma posible de definir la orientación. Por otra parte, hemos visto que la velocidad angular ω es un vector que expresa la velocidad de cambio de orientación de un sistema de referencia respecto de otro. Por consiguiente, debe existir una relación entre las derivadas de los ángulos de Euler $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ y el vector ω , que nos proponemos deducir en esta sección.

Para ello, adoptamos la parametrización de los ángulos de Euler ZYX en ejes seguidores, estudiada en el apartado 2.2.2. Volviendo a la figura 2.6, podemos aplicar el movimiento de arrastre y relativo a cada una de las tres rotaciones que componen la secuencia de giros. Por tanto, ω_b se podrá escribir como suma de los movimientos relativos de $\{b'\}$ respecto de $\{a\}$, de $\{b''\}$ respecto de $\{b'\}$, y de $\{b\}$ respecto de $\{b''\}$. Combinando los tres sumandos, se obtiene

$$\omega_b = \dot{\alpha} \mathbf{k}_a + \dot{\beta} \mathbf{j}_{b'} + \dot{\gamma} \mathbf{i}_{b''} =$$

$$= \dot{\alpha} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dot{\beta} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} + \dot{\gamma} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\ -\operatorname{sen} \beta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\ 1 & 0 & -\operatorname{sen} \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Derivando esta expresión con respecto del tiempo podremos obtener la relación entre la aceleración angular α_b y los ángulos de Euler.

2.3.7. Eje instantáneo de rotación y deslizamiento

En este apartado vamos a demostrar que el campo de velocidades instantáneo de un sólido rígido es equivalente al que tendría el sólido si estuviese simultáneamente rotando y deslizando sobre un eje, al que se denomina eje instantáneo de rotación y deslizamiento. Para ello, comencemos demostrando que el producto escalar entre la velocidad angular y la velocidad de un punto cualquiera es constante.

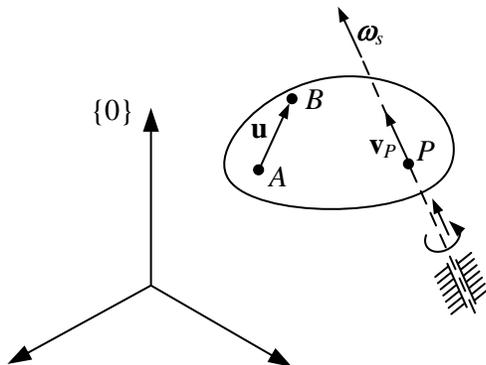


Figura 2.17: Eje instantáneo de rotación y deslizamiento.

Sean A y B dos partículas cualesquiera del sólido rígido mostrado en la figura 2.17. Llamando k a la constante antes citada, podemos escribir

$$\boldsymbol{\omega}_s^T \mathbf{v}_B = k \quad (2.70)$$

Aplicando a A y B la expresión del campo de velocidades del sólido rígido y sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene

$$\boldsymbol{\omega}_s^T \underbrace{(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u})}_{\mathbf{v}_B} = \boldsymbol{\omega}_s^T \mathbf{v}_A + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_s^T (\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{u})}_{=0} = \boldsymbol{\omega}_s^T \mathbf{v}_A = k \quad (2.71)$$

como queríamos demostrar. Por tanto, la proyección del vector velocidad de cualquier partícula material sobre la dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$ es constante.

A continuación nos preguntamos cuál será la velocidad mínima de entre todos los puntos del sólido. Teniendo en cuenta la invarianza del producto $\boldsymbol{\omega}_s^T \mathbf{v}$, esto es, de la proyección de \mathbf{v} sobre $\boldsymbol{\omega}_s$, concluimos que un punto tendrá velocidad mínima cuando su velocidad lleve la dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$. La demostración es obvia: todo vector velocidad puede descomponerse en una componente en la dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$ –que es igual para todas las partículas– y otra componente perpendicular a ella –distinta para cada partícula–. La partícula con velocidad mínima será aquella que carezca de componente perpendicular.

Llamemos P a un punto con velocidad mínima, en el que \mathbf{v}_P es paralelo a $\boldsymbol{\omega}_s$. Si P' es otro punto del sólido tal que el vector $\overline{PP'}$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}_s$, resulta que la velocidad de P' es

$$\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_s \times \overline{PP'} = \mathbf{v}_P \quad (2.72)$$

igual a la de P . Lo mismo ocurrirá con los demás puntos alineados con P y P' . Esta propiedad justifica que el punto P y la dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$ constituyen un eje a lo largo del cual el sólido se encuentra en deslizamiento instantáneo. En cambio, un punto A situado fuera de este eje tiene una velocidad

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_s \times \overline{PA} \quad (2.73)$$

es decir, que además de tener la misma velocidad de deslizamiento de P tiene una velocidad de rotación alrededor del eje de deslizamiento. Por esta razón a dicho eje se le denomina *eje instantáneo de rotación y deslizamiento*.

Veamos ahora cómo calcular dicho eje, conocidas la velocidad angular del sólido $\boldsymbol{\omega}_s$ y la velocidad de un punto cualquiera \mathbf{v}_A . La velocidad mínima del punto P se obtiene de la expresión

$$\mathbf{v}_P = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_s^T}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|} \mathbf{v}_A \right) \frac{\boldsymbol{\omega}_s}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|} \quad (2.74)$$

donde el término $\frac{\boldsymbol{\omega}_s}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|}$ representa el vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$. Por tanto, el paréntesis representa la proyección de \mathbf{v}_A sobre la dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$, que es el módulo de la velocidad mínima. Por otra parte,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_s \times \overline{AP} \quad (2.75)$$

Igualando las ecuaciones 2.74 y 2.75 y despejando, resulta:

$$\boldsymbol{\omega}_s \times \overline{AP} = \boldsymbol{\omega}_s^T \mathbf{v}_A \frac{\boldsymbol{\omega}_s}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|^2} - \mathbf{v}_A \quad (2.76)$$

que se puede escribir de forma abreviada como

$$\boldsymbol{\omega}_s \times \overline{AP} = \mathbf{y} \quad (2.77)$$

Dicha expresión representa un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que son las tres componentes de \overline{AP} . Es fácil comprobar que estas tres ecuaciones no son independientes, sino que están relacionadas, lo que da lugar a un sistema indeterminado con infinitas soluciones. Para resolver la indeterminación imponemos una condición adicional arbitraria³ que, por conveniencia, es:

$$\boldsymbol{\omega}_s^T \overline{AP} = 0 \quad (2.78)$$

³En función de qué condición se escoja se obtendrá uno u otro punto del eje, lo cual es irrelevante.

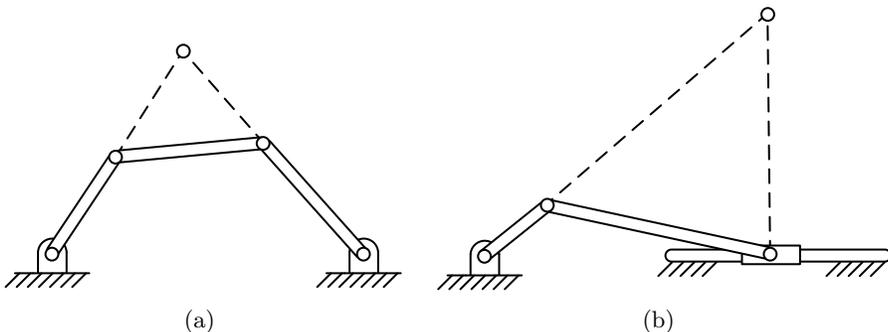


Figura 2.18: Centro instantáneo de rotación.

Multiplicando la ecuación 2.77 vectorialmente por $\boldsymbol{\omega}_s$, tenemos

$$\boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_s \times \overline{AP} = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{y} \quad (2.79)$$

Introduciendo aquí la conocida relación $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a}^T \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a}^T \mathbf{b})$, llegamos a

$$\underbrace{\boldsymbol{\omega}_s (\boldsymbol{\omega}_s^T \overline{AP})}_{=0} - \overline{AP} \underbrace{(\boldsymbol{\omega}_s^T \boldsymbol{\omega}_s)}_{\|\boldsymbol{\omega}_s\|^2} = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{y} \quad (2.80)$$

de donde despejamos

$$\overline{AP} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{y}}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|^2} \quad (2.81)$$

Finalmente, sustituyendo el valor de \mathbf{y} de las ecuaciones 2.76 y 2.77, obtenemos

$$\overline{AP} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_s}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|^2} \times \left(\boldsymbol{\omega}_s^T \mathbf{v}_A \frac{\boldsymbol{\omega}_s}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|^2} - \mathbf{v}_A \right) = \frac{\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_A}{\|\boldsymbol{\omega}_s\|^2} \quad (2.82)$$

donde el primer término del paréntesis se cancela por ser colineal con $\boldsymbol{\omega}_s$.

En el caso plano, la velocidad de deslizamiento es nula, puesto que un movimiento de traslación a lo largo del eje obligaría al elemento a moverse en el plano perpendicular, lo que es incompatible con el movimiento plano. Por tanto, al eje instantáneo de rotación y deslizamiento se le denomina simplemente *centro instantáneo de rotación*.

Una forma simple de obtener el centro instantáneo de rotación es trazando la perpendicular al vector velocidad en dos puntos cualesquiera del sólido. Por ejemplo, el centro instantáneo de rotación del acoplador de un

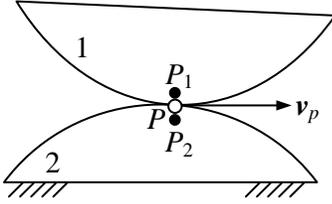


Figura 2.19

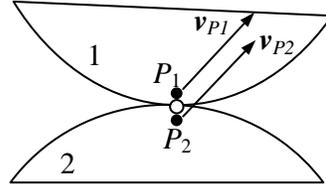


Figura 2.20

cuadrilátero articulado se obtiene trazando la prolongación de las dos barras extremas, tal y como se muestra en la figura 2.18(a) Análogamente, el centro instantáneo de rotación de la biela en un mecanismo biela-manivela se obtiene como se indica en la figura 2.18(b).

2.3.8. Cinemática de la rodadura plana

Cuando dos superficies como las mostradas en la figura 2.19 tienen movimiento de rodadura, en el contacto se pueden distinguir tres puntos conceptualmente distintos: los puntos P_1 y P_2 , que son partículas materiales pertenecientes a los sólidos 1 y 2, y el punto matemático P , que no pertenece a ninguno de los dos cuerpos. La posición de los tres puntos P_1 , P_2 y P coincide de forma instantánea en el instante mostrado, pero no en instantes posteriores. La velocidad de los puntos en contacto P_1 y P_2 es nula, mientras que la velocidad del punto matemático \mathbf{v}_P es tangente a las dos curvas y se denomina *velocidad de cambio de polo*.

Si aplicamos una velocidad de arrastre a ambos sólidos, estas propiedades de la velocidad se siguen cumpliendo en el movimiento relativo. Por tanto, en el movimiento absoluto la velocidad de los dos puntos de contacto \mathbf{v}_{P_1} y \mathbf{v}_{P_2} son iguales, como se muestra en la figura 2.20.

Veamos cuánto vale la aceleración del punto P_1 de la figura 2.19. Para ello, consideremos un punto cualquiera A del sólido 1, cuya velocidad vendrá dada por

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{P_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{P_1A} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{P_1A} \tag{2.83}$$

Esta ecuación es válida únicamente en el instante en que el punto P_1 coincide con el polo, ya que fuera de este instante no se verifica que $\mathbf{v}_{P_1} = 0$. Sin embargo, acudiendo al punto matemático P podemos escribir

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{PA} \tag{2.84}$$

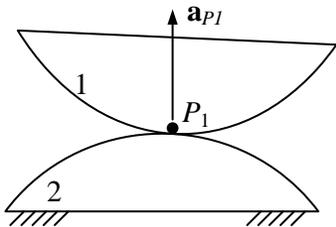


Figura 2.21

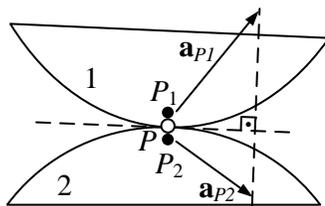


Figura 2.22

ya que el punto P está siempre sobre el polo. La aceleración del punto A se obtendrá derivando esta ecuación, lo que da

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{PA} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \frac{d(\overline{OA} - \overline{OP})}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{PA} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_P) \quad (2.85)$$

donde O es el origen del sistema de referencia $\{0\}$ y \mathbf{v}_P es la *velocidad de cambio de polo* que, como hemos visto, es tangente a las dos curvas en rodadura.

Ahora, hagamos que el punto A se acerque hacia el punto P hasta el límite. Entonces, el segmento \overline{PA} tiende a cero al mismo tiempo que la velocidad de A tiende a la de P_1 (no a la de P , porque A es una partícula material de 1 y P no lo es) y la aceleración de A también tiende a la de P_1 . Teniendo en cuenta que $\mathbf{v}_{P_1} = 0$, podemos escribir

$$\mathbf{a}_{P_1} = -\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_P \quad (2.86)$$

Esta expresión indica que la aceleración del centro instantáneo de rotación es normal a las dos curvas en contacto, como se indica en la figura 2.21.

El caso más general se obtiene aplicando al elemento 2 un movimiento de arrastre, y recordando que lo dicho hasta el momento es válido para el movimiento relativo. Puesto que las aceleraciones de arrastre son iguales para los dos puntos y la aceleración de Coriolis es nula (no hay velocidad relativa), la aceleración de los puntos P_1 y P_2 diferirá sólo en la aceleración relativa, que es perpendicular a las dos superficies en el punto de contacto.

En resumidas cuentas, en el movimiento de rodadura entre dos sólidos se cumplen dos propiedades:

1. Las velocidades de los puntos de contacto son iguales
2. La proyección de las aceleraciones de los puntos en contacto sobre la tangente común es la misma.

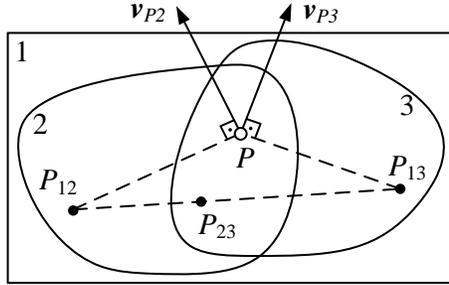


Figura 2.23: Polos del movimiento relativo de tres planos.

2.3.9. Movimiento relativo de tres cuerpos en el plano

Se ha visto que el movimiento de un sólido en el plano puede considerarse de forma instantánea como una rotación alrededor de un punto denominado centro instantáneo de rotación (CIR). Si consideramos la forma del sólido como un plano de dimensiones ilimitadas, el CIR es el punto del plano con velocidad instantánea nula. Esto mismo se puede expresar de otra forma diciendo que el CIR es el punto en el que la velocidad del plano móvil y la del plano fijo (que es nula) coinciden.

Generalizando este concepto al movimiento relativo de dos planos cualesquiera, se denomina P_{12} , *polo del movimiento relativo* entre los planos 1 y 2, al punto en el que la velocidad del plano 1 coincide con la del plano 2. Evidentemente, P_{12} coincide con P_{21} . El movimiento relativo entre los planos 1 y 2 es de rotación instantánea alrededor del polo P_{12} , por lo que la velocidad relativa de un punto cualquiera del plano 2 respecto del plano 1 es perpendicular a la línea que une dicho punto con P_{12} .

Consideremos tres planos 1, 2 y 3 con un movimiento arbitrario entre ellos y tomemos el plano 1 como referencia para medir velocidades. La velocidad \mathbf{v}_{P_2} de un punto cualquiera P , perteneciente al plano 2, es perpendicular a la línea $\overline{PP_{12}}$. Análogamente, la velocidad \mathbf{v}_{P_3} del punto P , que coincide instantáneamente con el anterior pero pertenece al plano 3, es perpendicular a la línea $\overline{PP_{13}}$. Si tratamos de encontrar un punto P^* cuya velocidad sea la misma en el plano 2 que en el plano 3, es evidente que tendrá que encontrarse en la línea que une P_{12} y P_{13} , para que \mathbf{v}_{P_2} y \mathbf{v}_{P_3} lleven la misma dirección. Por tanto, el polo P_{23} debe estar alineado con los polos P_{12} y P_{13} .

La propiedad anterior constituye el *teorema de los tres centros* o *teorema de Aronhold-Kennedy*, y establece que los polos del movimiento relativo asociados a tres planos están siempre alineados.

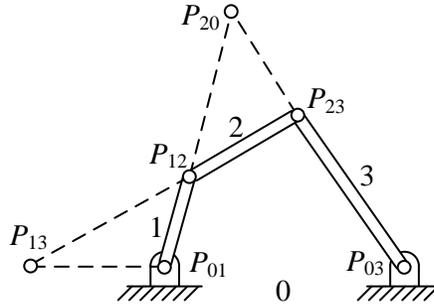


Figura 2.24: Polos del movimiento relativo.

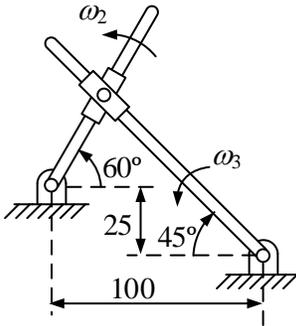


Figura 2.25

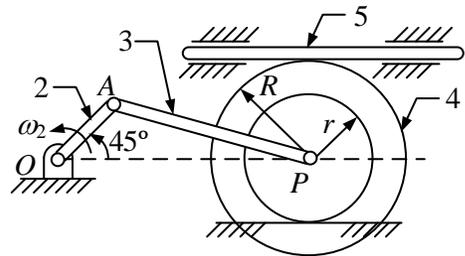


Figura 2.26

Ejemplo 2.7 La figura 2.24 muestra un cuadrilátero articulado sobre el que se indican los polos del movimiento relativo entre los cuatro planos correspondientes a los cuatro elementos de la cadena cinemática. El plano 0 es el fijo.

Los polos P_{01} , P_{12} , P_{23} y P_{03} son inmediatos, pues se encuentran en las articulaciones entre las barras. El polo P_{20} es el centro instantáneo de rotación de la barra 2, que se obtiene como la intersección de las perpendiculares a los vectores velocidad en los extremos de la barra. Esto está de acuerdo con el teorema de los tres centros, que establece que el polo P_{20} debe estar alineado, por una parte, con los polos P_{01} y P_{12} y, por otra, con los polos P_{23} y P_{03} .

Análogamente, el polo P_{13} está alineado, por una parte, con P_{01} y P_{03} y, por otra, con P_{12} y P_{23} .

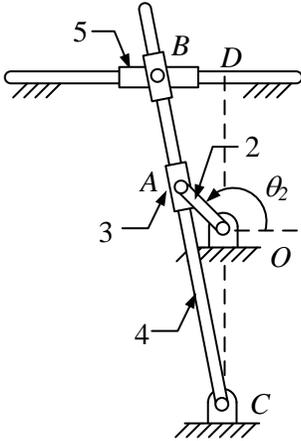


Figura 2.27

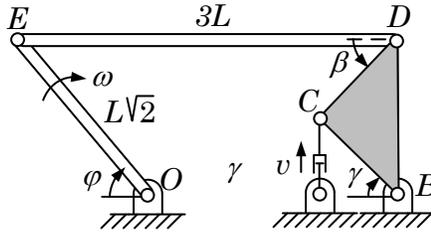


Figura 2.28

2.4. Problemas

Prob. 2.1 Los elementos 2 y 3 de la figura 2.25 son impulsados de forma independiente con $\omega_2 = 20 \text{ rad/s}$ y $\omega_3 = 30 \text{ rad/s}$. Calcular el valor numérico de la velocidad absoluta del centro del pasador.

Prob. 2.2 En el mecanismo de la figura 2.26, la manivela 2 gira con $\omega_2 = 120 \text{ rpm}$. Las dimensiones de los elementos son: $\overline{OA} = 2 \text{ cm}$, $\overline{AP} = 4,8 \text{ cm}$, $r = 2 \text{ cm}$ y $R = 3 \text{ cm}$. Calcular el valor numérico de la velocidad de la corredera 5 para la posición indicada, suponiendo que existe rodadura en los dos contactos del elemento 4.

Prob. 2.3 En el mecanismo de la figura 2.27, determinar los valores numéricos de la velocidad y aceleración del punto B, siendo $\omega_2 = 25 \text{ rpm}$ y $\alpha_2 = 0$. Datos: $\overline{OA} = 5 \text{ cm}$, $\theta_2 = 135^\circ$, $\overline{OC} = \overline{OD} = 16 \text{ cm}$.

Prob. 2.4 Determinar la velocidad v de alargamiento del cilindro hidráulico correspondiente a una velocidad angular $\omega = 1 \text{ rad/s}$ en el elemento de entrada \overline{OE} de la figura 2.28 sabiendo que los ángulos φ, β, γ valen instantáneamente 45° .

Prob. 2.5 Obtener las matrices de cambio de base ${}^a\mathbf{R}_b$, ${}^a\mathbf{R}_c$ y ${}^b\mathbf{R}_c$ correspondientes a los tres sistemas de referencia mostrados en la figura 2.29.

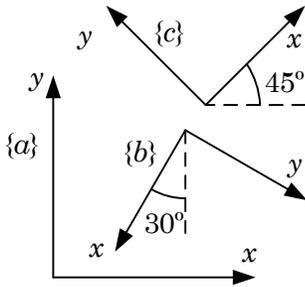


Figura 2.29

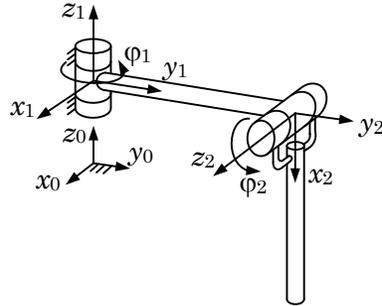


Figura 2.30

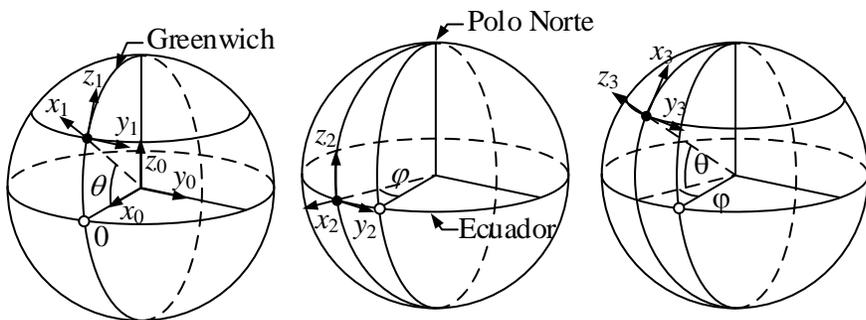


Figura 2.31

Prob. 2.6 La figura 2.30 muestra dos barras articuladas y dos sistemas de referencia $\{1\}$ y $\{2\}$ rígidamente unidos a cada una de las barras. El ángulo φ_1 mide el giro del sistema de referencia $\{1\}$ con respecto al sistema de referencia fijo $\{0\}$. El ángulo φ_2 mide el giro del sistema de referencia $\{2\}$ con respecto al $\{1\}$. A partir de $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ y $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$, calcular para la posición indicada a) Las tres componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$. b) Las tres componentes de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_2$.

Prob. 2.7 Sobre cada punto de la Tierra se puede definir un sistema de referencia cuyo eje X es la prolongación del radio, el eje Y es tangente al paralelo, y el eje Z es tangente al meridiano. Como se puede comprobar en la figura 2.31, dicho sistema de referencia coincide con el geocéntrico en el punto 0, intersección entre el meridiano de Greenwich y el ecuador. Se pide, obtener las matrices de rotación \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 y \mathbf{R}_3 para los sistemas de referencia $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$.

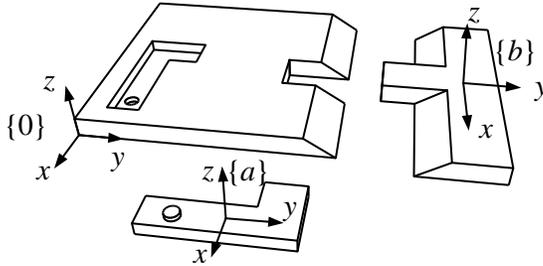


Figura 2.32

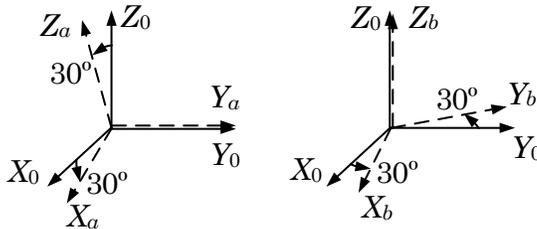


Figura 2.33

Prob. 2.8 La figura 2.32 muestra una placa central, sobre la que deben ensamblarse dos piezas que llegan a la cadena de montaje en la orientación indicada. Para definir la orientación de cada pieza se emplean los sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$, rígidamente unidos a ellas. Al reorientar las piezas, los sistemas de referencia $\{a\}$ y $\{b\}$ cambian su orientación y pasan a denominarse $\{a_f\}$ y $\{b_f\}$. Hallar: a) Las matrices de rotación \mathbf{R}_{af} y \mathbf{R}_{bf} , y b) Los ángulos de Euler XYZ en ejes seguidores que permiten pasar de las orientaciones $\{a\}$ y $\{b\}$ a las orientaciones $\{a_f\}$ y $\{b_f\}$.

Prob. 2.9 Obtener las matrices de cambio de base ${}^0\mathbf{R}_a$, ${}^0\mathbf{R}_b$ y ${}^a\mathbf{R}_b$ correspondientes a los tres sistemas de referencia mostrados en la Figura 2.33.

Prob. 2.10 Obtener las matrices ${}^0\mathbf{R}_a$ y ${}^0\mathbf{R}_b$ que representan la orientación en que las dos piezas de la figura 2.34 pueden ser ensambladas correctamente.

Prob. 2.11 La figura 2.35 muestra una placa plana que inicialmente se encuentra en posición horizontal. El sistema de referencia $\{a\}$ está rígidamente unido a la placa y coincide con la orientación del sistema de referencia

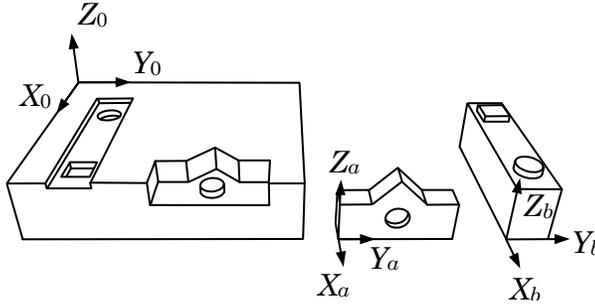


Figura 2.34

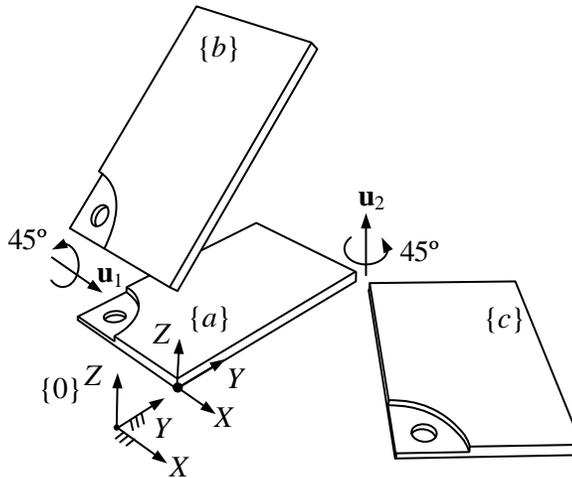


Figura 2.35

fijo $\{0\}$. La placa puede sufrir dos rotaciones alternativas: una rotación de 45° alrededor del eje u_1 , o bien una rotación de 45° alrededor u_2 . Llamando $\{b\}$ a la orientación de la placa tras la rotación alrededor de u_1 y $\{c\}$ a la orientación de la placa tras la rotación alrededor de u_2 , se pide: 1) dibujar los sistemas de referencia $\{b\}$ y $\{c\}$. 2) Calcular las matrices ${}^0\mathbf{R}_b$, ${}^0\mathbf{R}_c$ y ${}^b\mathbf{R}_c$.

2.5. Apéndice

El producto vectorial entre dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} se define como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{Bmatrix} \quad (2.87)$$

se puede escribir de forma matricial como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v} \quad (2.88)$$

La matriz antisimétrica $\tilde{\mathbf{u}}$ definida como

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

hace las mismas veces que el operador $(\mathbf{u} \times)$. Se puede pensar que todo vector tiene una matriz antisimétrica asociada con la estructura de la ecuación 2.89. Análogamente, a toda matriz antisimétrica le corresponde un vector dual asociado cuyas componentes x , y , z se determinan identificando los términos $(3, 2)$, $(1, 3)$ y $(2, 1)$ con cada una de las tres componentes, respectivamente.

Capítulo 3

Dinámica del sólido rígido

3.1. Dinámica de la partícula

La segunda ley de Newton establece que en una partícula de masa constante m sobre la que actúa una fuerza \mathbf{F} se verifica

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.1)$$

donde \mathbf{p} es el momento lineal que se define como el producto de la masa m por la velocidad \mathbf{v}

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad (3.2)$$

Puesto que hemos supuesto la masa m constante, se verifica que

$$\mathbf{F} = \frac{dm\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a} \quad (3.3)$$

donde \mathbf{a} es la aceleración de la partícula. El *Teorema de conservación del momento lineal* se deduce inmediatamente de la ecuación 3.1 y establece que cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es nula, el momento lineal \mathbf{p} se conserva.

El *momento angular* de una partícula alrededor de un punto O , denotado como \mathbf{L} , se define como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (3.4)$$

donde \mathbf{r} es el vector que va desde O hasta la partícula. Premultiplicando vectorialmente por \mathbf{r} a ambos lados de la ecuación 3.3, obtenemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{dm\mathbf{v}}{dt} \quad (3.5)$$

siendo \mathbf{N} el momento de la fuerza \mathbf{F} respecto de O . Esta ecuación se puede transformar teniendo en cuenta la identidad vectorial

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{dm\mathbf{v}}{dt} \quad (3.6)$$

donde el primer sumando es, obviamente, nulo. Por tanto, podemos reescribir la ecuación 3.5 como

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3.7)$$

Esta ecuación permite también establecer el *Teorema de conservación del momento angular*, que establece que cuando el momento de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo, el momento angular \mathbf{L} se conserva.

3.2. Dinámica del sólido rígido

3.2.1. Ecuaciones de Newton

En este apartado consideraremos que un sólido rígido de masa total m está compuesto por un sistema continuo de partículas materiales de masa dm . Distinguiremos entre fuerzas externas, que actúan sobre las partículas y que son debidas a causas externas al sólido, y fuerzas internas o fuerzas de interacción entre las partículas, que impiden su desplazamiento relativo unas respecto de otras. Llamaremos $d\mathbf{F}^i$ a la suma total de las fuerzas internas ejercidas sobre una partícula por las partículas adyacentes y \mathbf{F}_j^e a la fuerza exterior que actúa sobre la partícula j . A diferencia de las fuerzas internas, que actúan sobre todas las partículas del sólido, las fuerzas externas sólo actúan sobre unas cuantas partículas (aquéllas que llevan índice j). Podemos escribir la ecuación del movimiento de una partícula sobre la que no actúa una fuerza exterior como

$$d\mathbf{F}^i = \mathbf{a} dm \quad (3.8)$$

y para una partícula sobre la que actúa una fuerza exterior¹

$$d\mathbf{F}^i + \mathbf{F}_j^e = \mathbf{a} dm \quad (3.9)$$

Supondremos que las fuerzas internas cumplen la tercera ley de Newton (principio de acción y reacción), por lo que las fuerzas de interacción entre

¹La ecuación 3.9 no es rigurosa matemáticamente hablando, pues incluye una fuerza finita en una ecuación de términos infinitesimales. Sin embargo, la pérdida de rigor matemático se ve compensado por una mayor claridad en la exposición.

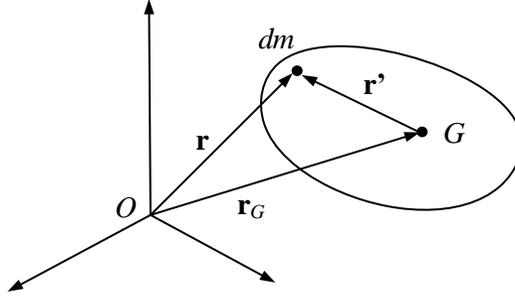


Figura 3.1

dos partículas llevan la dirección de la recta que las une, y son iguales y de signos contrarios. Sumando las ecuaciones del movimiento de todas las partículas del sólido, llegamos a

$$\int_V d\mathbf{F}^i + \sum_j \mathbf{F}_j^e = \int_V \mathbf{a} dm \quad (3.10)$$

El primer sumando de la izquierda es cero, ya que las fuerzas internas se cancelan dos a dos. El segundo sumando es simplemente \mathbf{F}^e , resultante de todas las fuerzas exteriores. Por último, teniendo en cuenta que la masa de cada partícula es constante, podemos escribir

$$\mathbf{F}^e = \int_V \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} dm = \frac{d^2}{dt^2} \int_V \mathbf{r} dm = \frac{d^2}{dt^2} (m \mathbf{r}_G) = m \mathbf{a}_G \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r}_G es el vector que va del origen del sistema de referencia al centro de gravedad y \mathbf{a}_G es la aceleración del centro de gravedad.

3.2.2. Ecuaciones de Euler

Tomemos momentos en las ecuaciones 3.8 y 3.9 respecto al centro de gravedad, lo que siguiendo la notación utilizada en la figura 3.1 equivale a premultiplicarlas vectorialmente por \mathbf{r}' , obteniendo

$$\mathbf{r}' \times d\mathbf{F}^i = \mathbf{r}' \times \mathbf{a} dm \quad (3.12)$$

para las partículas sin fuerza exterior y

$$\mathbf{r}' \times d\mathbf{F}^i + \mathbf{r}' \times \mathbf{F}_j^e = \mathbf{r}' \times \mathbf{a} dm \quad (3.13)$$

para las partículas con fuerza exterior. Sumemos las ecuaciones 3.12 y 3.13 correspondientes a todas las partículas del sólido, lo que da

$$\int_V \mathbf{r}' \times d\mathbf{F}^i + \sum_j \mathbf{r}' \times \mathbf{F}_j^e = \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{a} dm \quad (3.14)$$

Lo mismo que antes, los momentos correspondientes a las fuerzas interiores se cancelan dos a dos, por lo que el primer sumando es nulo. El segundo sumando representa el momento resultante de las fuerzas exteriores actuantes sobre la partícula, que denominaremos \mathbf{N}^e . Por tanto,

$$\mathbf{N}^e = \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{a} dm \quad (3.15)$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\mathbf{N}^e = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{v} dm - \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \times \mathbf{v} dm \quad (3.16)$$

Llamando $\boldsymbol{\omega}$ a la velocidad angular del sólido, y teniendo en cuenta la expresión del campo de velocidades del sólido rígido, la velocidad de la partícula \mathbf{v} se puede escribir como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (3.17)$$

Si sustituimos esta expresión en la anterior y tenemos en cuenta que $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_G$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^e &= \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}' \times (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm - \int_V \frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_G)}{dt} \times \mathbf{v} dm = \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_G dm + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' dm - \\ &\quad - \int_V (\mathbf{v} - \mathbf{v}_G) \times \mathbf{v} dm = \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' dm + \int_V \mathbf{v}_G \times \mathbf{v} dm \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde la integral

$$\int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_G = \left(\int_V \mathbf{r}' dm \right) \times \mathbf{v}_G = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

se cancela por contener el momento estático de primer orden respecto al centro de gravedad.

Aplicando la fórmula $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a}^T \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a}^T \mathbf{b})$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^e &= \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' dm + \int_V \mathbf{v}_G \times \mathbf{v} dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_V [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}') - \mathbf{r}' (\mathbf{r}'^T \boldsymbol{\omega})] dm + \mathbf{v}_G \times \int_V \mathbf{v} dm = \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \underbrace{[(\mathbf{r}'^T \mathbf{r}') \mathbf{I} - \mathbf{r}' \mathbf{r}'^T]}_{\mathbf{I}_G} dm \boldsymbol{\omega} + \underbrace{\mathbf{v}_G \times (m \mathbf{v}_G)}_{=0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 3×3 . La integral que aparece en la ecuación 3.20 es, por definición, el tensor de inercia referido al centro de gravedad G . Llamando (x', y', z') a las componentes del vector \mathbf{r}' , podemos escribir la expresión del tensor de inercia como

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_G &= \int_V \left[\begin{Bmatrix} x' & y' & z' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x' & y' & z' \end{Bmatrix} \right] dm = \\ &= \int_V \begin{bmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -x'y' & x^2 + z'^2 & -y'z' \\ -x'z' & -y'z' & x'^2 + y'^2 \end{bmatrix} dm \\ &= \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Finalmente, la ecuación 3.20 se puede escribir en la forma

$$\mathbf{N}^e = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\alpha} + \dot{\mathbf{I}}_G \boldsymbol{\omega} \quad (3.22)$$

Puesto que las columnas de la matriz \mathbf{I}_G son vectores constantes cuando están expresados en un sistema de referencia rígidamente unido al sólido, podemos utilizar la regla de derivación $\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ con cada columna, con lo que se obtiene

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \quad (3.23)$$

Estas tres ecuaciones se conocen con el nombre de *ecuaciones de Euler* y su correcta utilización es uno de los temas fundamentales de la Mecánica Clásica. Sobre ellas, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Las ecuaciones de Euler, en la forma expresada por la ecuación 3.23 solamente se pueden aplicar al centro de gravedad.

- Se deja al alumno, como ejercicio, la tarea de demostrar que la ecuación 3.23 se puede aplicar también a un punto fijo O .
- El tensor de inercia \mathbf{I}_G no es constante, ya que está referido al sistema fijo $\{0\}$. Para convertirlo en constante, es preciso expresar las ecuaciones de Euler en el sistema de referencia del sólido $\{s\}$, para lo que hay que premultiplicar la ecuación 3.23 por la matriz de rotación ${}^s\mathbf{R}_0$, obteniendo

$${}^s\mathbf{N}^e = {}^s\mathbf{I}_G {}^s\boldsymbol{\alpha} + {}^s\boldsymbol{\omega} \times {}^s\mathbf{I}_G {}^s\boldsymbol{\omega} \quad (3.24)$$

- La relación entre los tensores de inercia y se deduce fácilmente, y vale

$$\mathbf{I}_G = {}^0\mathbf{R}_s {}^s\mathbf{I}_G {}^0\mathbf{R}_s^T \quad (3.25)$$

- En el caso plano, las ecuaciones de Euler son especialmente simples. Podemos considerar que toda la masa está concentrada en el plano $z=0$, de manera que $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Por tanto, la forma que adoptan las ecuaciones es:

$${}^s\mathbf{N}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_z \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Como se ve, dos de las tres ecuaciones son triviales, por lo que en la práctica sólo se utiliza la ecuación escalar

$$N^e = I_z \alpha \quad (3.27)$$

3.2.3. Ecuaciones diferenciales del movimiento

Las ecuaciones obtenidas en los dos apartados precedentes constituyen un conjunto de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, que podemos escribir conjuntamente. De las ecuaciones 3.11 y 3.22 se deduce

$$\mathbf{F}^e = m \ddot{\mathbf{r}}_G \quad (3.28)$$

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \quad (3.29)$$

En la ecuación 3.29 no aparece explícitamente ninguna derivada, debido a que la velocidad angular no es integrable. Para transformarla en tres ecuaciones diferenciales convencionales, debemos introducir la ecuación 2.69

que relaciona $\boldsymbol{\omega}$ con las derivadas de los ángulos de Euler, y que se reproduce a continuación

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\ 1 & 0 & -\operatorname{sen} \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Llamando \mathbf{B} a la matriz 3×3 anterior, y $\boldsymbol{\Psi}$ al vector que contiene los tres ángulos de Euler α , β , γ en ejes seguidores, se puede escribir

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\Psi}} \quad (3.31)$$

Derivando,

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \ddot{\boldsymbol{\Psi}} + \dot{\mathbf{B}} \dot{\boldsymbol{\Psi}} \quad (3.32)$$

con

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \dot{\alpha} - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \dot{\beta} \\ 0 & -\operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \cos \beta \dot{\alpha} - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \dot{\beta} \\ 1 & 0 & -\cos \beta \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Sustituyendo en 3.29, se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e &= m \ddot{\mathbf{r}}_G \\ \mathbf{N}^e &= \mathbf{I}_G \mathbf{B} \ddot{\boldsymbol{\Psi}} + \mathbf{I}_G \dot{\mathbf{B}} \dot{\boldsymbol{\Psi}} + (\mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\Psi}}) \times \mathbf{I}_G (\mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\Psi}}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

que constituye un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, de segundo orden, de cuya resolución se obtiene la trayectoria del centro de gravedad $\mathbf{r}_G(t)$ y el cambio de orientación $\boldsymbol{\Psi}(t)$.

3.2.4. Principio de D'Alembert

En las dos secciones precedentes hemos demostrado que las leyes de Newton aplicadas a un sólido rígido conducen a las ecuaciones 3.28 y 3.29, denominadas de Newton-Euler .

Definamos, por conveniencia, un sistema de fuerzas ficticio que llamaremos *fuerzas de inercia*. Previamente, recordemos que para definir correctamente un sistema de fuerzas es necesario especificar su fuerza resultante y su momento resultante respecto de un punto cualquiera. En nuestro caso, definiremos la resultante de las fuerzas de inercia \mathbf{F}_{iner}^e y el momento

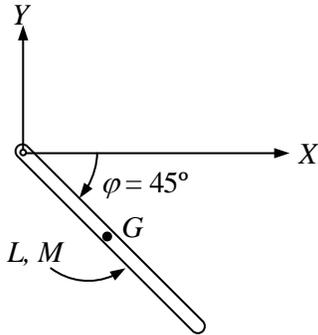


Figura 3.2

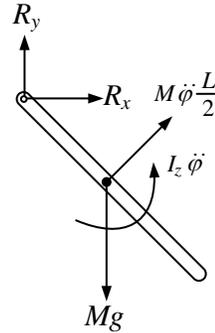


Figura 3.3

resultante de las fuerzas de inercia respecto al centro de gravedad \mathbf{N}_{iner}^e (también llamado *momento giroscópico*), como

$$\mathbf{F}_{iner}^e = -m \mathbf{a}_G \quad (3.35)$$

$$\mathbf{N}_{iner}^e = -\mathbf{I}_G \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \quad (3.36)$$

Con esta definición, podemos reescribir las ecuaciones de Newton-Euler como

$$\mathbf{F}^e + \mathbf{F}_{iner}^e = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{N}^e + \mathbf{N}_{iner}^e = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

El *principio de D'Alembert* se basa en estas dos ecuaciones, y establece que cuando a un cuerpo en movimiento se le añaden como fuerzas actuantes las fuerzas de inercia, el cuerpo se encuentra en equilibrio estático.

Veamos un ejemplo que ilustra la aplicación del principio de D'Alembert.

Ejemplo 3.1 La figura 3.2 muestra un péndulo compuesto por una barra de longitud L y masa M , uniformemente distribuida, que está inicialmente en reposo a 45° . La barra se deja libre, sin velocidad inicial, y cae por efecto de la gravedad. Para calcular la aceleración angular con la que comienza su caída, así como las reacciones en los apoyos, utilizamos el principio de D'Alembert.

La figura 3.3 muestra el diagrama de sólido libre de la barra, en el que se han incluido las fuerzas de inercia. La resolución del problema se

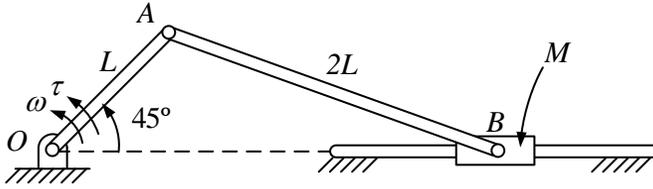


Figura 3.4

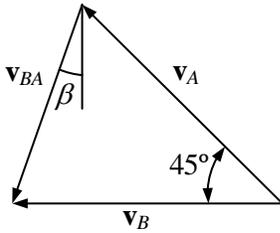


Figura 3.5

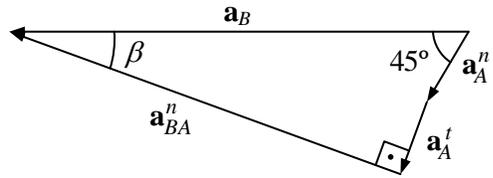


Figura 3.6

hace aplicando las ecuaciones de la estática. Tomando momentos en la articulación, tenemos

$$I_z \ddot{\varphi} + M \ddot{\varphi} \frac{L^2}{4} - M g \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Teniendo en cuenta que $I_z = \frac{1}{12}ML^2$, y despejando la aceleración angular, resulta

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g\sqrt{2}}{4L}$$

Ejemplo 3.2 En el mecanismo biela-manivela de la figura 3.4, la manivela gira con velocidad angular constante al ser accionada por un par motor τ desconocido. Sabiendo que la manivela y el acoplador tienen masa despreciable y que la masa de la deslizadora es M , calcular el par τ instantáneo cuando la manivela forma un ángulo de 45° .

En primer lugar, es necesario resolver la cinemática del mecanismo, para lo que calculamos la velocidad del punto B por medio de la ecuación

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

que se traduce en el diagrama de velocidades de la figura 3.5. El ángulo que forma el acoplador con la horizontal se puede calcular fácilmente y vale

$\beta = 20,70^\circ$. *Proyectando las velocidades verticales deducimos que*

$$v_{BA} = \frac{v_A \cos 45}{\cos \beta} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \omega L$$

luego

$$\omega_{BA} = \frac{v_{BA}}{2L} = \frac{\sqrt{7}}{7} \omega = 0,378 \omega$$

Proyectando sobre la horizontal, hallamos

$$v_B = v_A \cos 45 + v_{BA} \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{14} \omega L (7 + \sqrt{7}) = 0,974 \omega L$$

Para calcular las aceleraciones partimos de la ecuación

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t$$

donde la aceleración de A tangencial es nula por ser ω constante. Esta ecuación vectorial da origen al diagrama de aceleraciones mostrado en la figura 3.6. Proyectando sobre la vertical, tenemos

$$\mathbf{a}_{BA}^n \sin \beta = \mathbf{a}_A^n \sin 45 + \mathbf{a}_{BA}^t \cos \beta$$

Despejando, se obtiene

$$\mathbf{a}_{BA}^t = -\omega^2 L \frac{12}{7\sqrt{7}}$$

Y, finalmente, proyectando sobre la horizontal,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A^n \cos 45 + \mathbf{a}_{BA}^t \sin \beta + \mathbf{a}_{BA}^n \cos \beta = \\ &= \omega^2 L \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{7\sqrt{7}} \right) = 0,745 \omega^2 L \end{aligned}$$

Los diagramas de sólido libre de la manivela y la deslizadera se muestran en la figura 3.7. Observemos que la fuerza de inercia en la deslizadera lleva la dirección opuesta a la aceleración en B. El acoplador, al ser una barra sin masa y sin fuerzas exteriores aplicadas, únicamente transmite la reacción T en la dirección de la propia barra. Haciendo el equilibrio

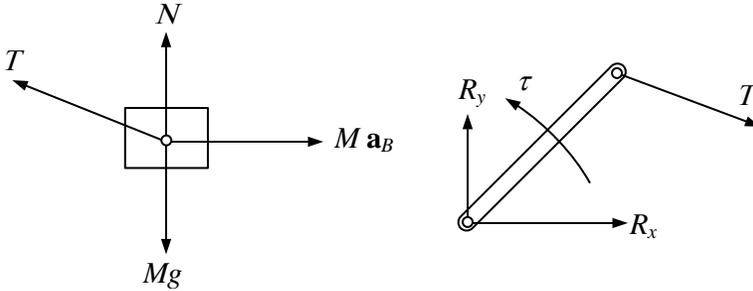


Figura 3.7

de fuerzas horizontales, verticales y de momentos se obtienen las cinco ecuaciones

$$T \cos \beta - M a_B = 0$$

$$N + T \operatorname{sen} \beta - Mg = 0$$

$$R_x + T \cos \beta = 0$$

$$R_y - T \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$\tau - TL \cos(45 - \beta) = 0$$

Resolviendo las cinco ecuaciones, se obtiene el par motor:

$$\tau = M \omega^2 L^2 \sqrt{\frac{2}{7}} \left(1 + \frac{1}{7\sqrt{7}} \right) \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0,7262 M \omega^2 L^2$$

3.2.5. Teorema de los trabajos virtuales

El *teorema de los trabajos virtuales* establece que cuando a un sistema en equilibrio se le aplica un desplazamiento virtual compatible con los enlaces, el trabajo virtual producido por las fuerzas del sistema es nulo. Dicho teorema se estudia con detalle en Mecánica Analítica y aquí nos limitaremos a repararlo brevemente y a resaltar algunos aspectos importantes de su aplicación práctica.

Un desplazamiento virtual es un desplazamiento infinitesimal que tiene lugar en un tiempo virtual. Se puede pensar que el tiempo virtual es una magnitud temporal cuya ley de variación es completamente independiente del tiempo real, al que se ven sometidos el resto de las leyes mecánicas. Durante un desplazamiento virtual, el tiempo virtual transcurre, pero el tiempo real permanece congelado. Por otra parte, puesto que los desplazamientos virtuales son desplazamientos ficticios que no tienen lugar en la

realidad y que no cambian la posición del sistema, no producen fuerzas de inercia, no alargan los muelles, no cambian las reacciones, etc.

En lugar de hablar de desplazamientos virtuales se puede hablar también de velocidades virtuales, que se obtienen dividiendo el desplazamiento virtual por el tiempo virtual. Velocidades virtuales y velocidades reales guardan una total semejanza y satisfacen las mismas ecuaciones. Por ello, la forma más sencilla de calcular desplazamientos virtuales es, con frecuencia, calcular velocidades reales y, de ahí, pasar a velocidades virtuales aplicando el operador virtual donde proceda. Este procedimiento se clarificará más adelante con un ejemplo.

En los sistemas con más de un grado de libertad es necesario aplicar tantos desplazamientos virtuales independientes como grados de libertad para resolver todas las incógnitas. Lo más sencillo para generar n desplazamientos virtuales independientes es emplear una secuencia de la forma:

$$\begin{aligned} \delta x_1, \quad \delta x_2 = 0, \quad \dots, \quad \delta x_n = 0 \\ \delta x_1 = 0, \quad \delta x_2, \quad \dots, \quad \delta x_n = 0 \\ \dots \\ \delta x_1 = 0, \quad \delta x_2 = 0, \quad \dots, \quad \delta x_n \end{aligned} \tag{3.39}$$

Es decir, cada desplazamiento virtual se obtiene dando al mismo tiempo un desplazamiento virtual a un grado de libertad y cero a los demás. Repitiendo esto para cada uno de los n grados de libertad, se obtienen los n desplazamientos virtuales independientes. La figura 3.8 muestra, como ejemplo, los dos desplazamientos virtuales independientes de un doble péndulo con grados de libertad φ_1 y φ_2 .

A diferencia de las ecuaciones de Newton-Euler, que se aplican independientemente para cada elemento del mecanismo, el teorema de los trabajos virtuales se puede aplicar globalmente a todo el mecanismo o a cualquier conjunto de elementos. Debido a que las fuerzas de reacción son fuerzas internas, por el principio de acción y reacción los trabajos virtuales de todas las fuerzas internas se anulan. Consecuentemente, cuando se aplica el teorema de los trabajos virtuales las reacciones no aparecen.

A continuación resolveremos de nuevo el ejemplo 3.2 del apartado anterior, pero utilizando esta vez el teorema de los trabajos virtuales.

Ejemplo 3.3 *Comenzamos resolviendo la cinemática del mecanismo para determinar el valor de las fuerzas de inercia. En este caso, es suficiente con determinar la aceleración del punto B que, como se vio, vale*

$$\mathbf{a}_B = \omega^2 L \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{7\sqrt{7}} \right)$$

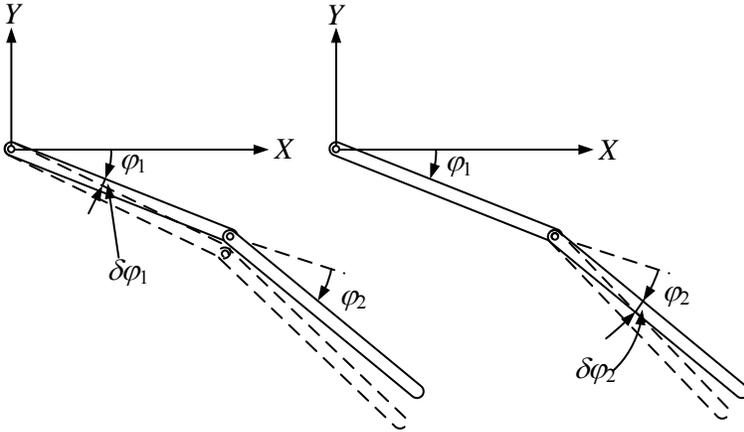


Figura 3.8: Desplazamientos virtuales independientes.

A continuación, hacemos un diagrama como el de la figura 3.9, en el que se muestran las fuerzas exteriores y de inercia del mecanismo. Aplicamos un desplazamiento virtual $\delta\varphi$ a la manivela, lo que hace que todo el mecanismo se desplace virtualmente. Por el teorema de los trabajos virtuales podemos escribir

$$\delta W = \tau \delta\varphi - M \mathbf{a}_B \delta x_B = 0$$

La velocidad de B, calculada previamente, es

$$\mathbf{v}_B = \frac{\sqrt{2}}{14} \omega L (7 + \sqrt{7})$$

Puesto que las velocidades virtuales y las reales satisfacen las mismas ecuaciones, para hallar el desplazamiento virtual de B podemos basarnos en esta expresión. Multiplicando la ecuación anterior por una fracción de tiempo infinitesimal dt obtenemos

$$dx_B = \frac{\sqrt{2}}{14} d\varphi L (7 + \sqrt{7})$$

Sustituyendo, ahora, el operador de diferenciación $d()$ por el de desplazamiento virtual $\delta()$, tenemos

$$\delta x_B = \frac{\sqrt{2}}{14} \delta\varphi L (7 + \sqrt{7})$$

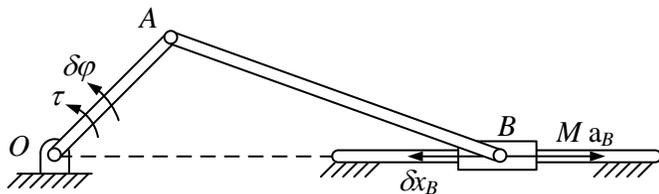


Figura 3.9

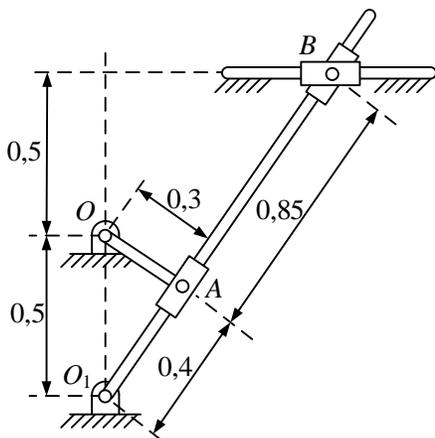


Figura 3.10

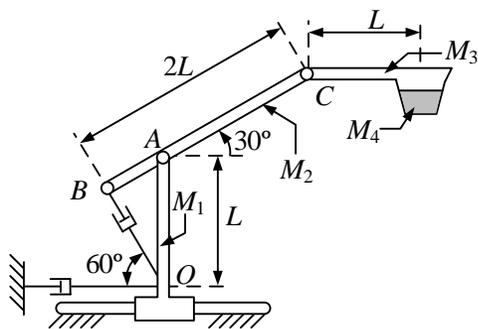


Figura 3.11

Finalmente, sustituyendo en la ecuación de trabajo virtual y simplificando $\delta\varphi$, resulta

$$\tau = 0,7262 M\omega^2 L^2$$

que coincide con el resultado obtenido en el ejemplo 3.2 del apartado anterior.

3.3. Problemas

Prob. 3.1 En el mecanismo de la figura 3.10, \overline{OA} gira con velocidad constante de 2π rad/s. El bloque B pesa 20 kg y se mueve en el interior de una guía horizontal. La barra $\overline{O_1B}$ pesa 6 kg y la \overline{OA} 2 kg. En la posición indicada, es decir, siendo \overline{OA} perpendicular a $\overline{O_1B}$ y considerando que las barras $\overline{O_1B}$ y \overline{OA} tienen masa uniformemente distribuida, y que no existen fuerzas de rozamiento, hallar: 1) El valor numérico de las fuerzas

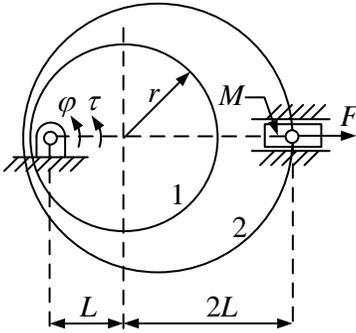


Figura 3.12

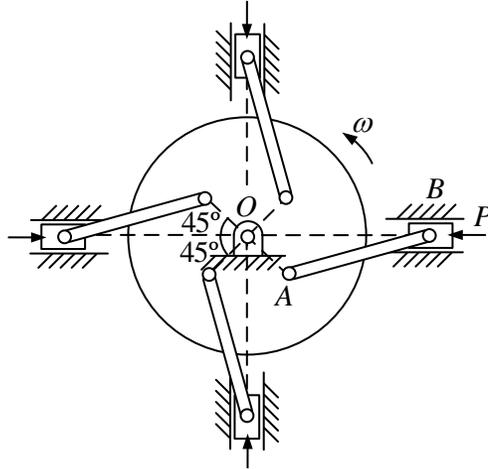


Figura 3.13

que actúan sobre el bloque. 2) Las reacciones en las articulaciones O y O_1 . 3) El esfuerzo aplicado por el motor que mueve la manivela \overline{OA} .

Prob. 3.2 El robot plano de 3 grados de libertad de la Figura figura 3.11 se utiliza para transportar un recipiente. En el punto C hay un motor rotativo y dos motores lineales entre B y O , y entre el suelo y O . Los elementos tienen masa uniformemente distribuida de valores $M_1 = 30$ kg, $M_2 = 20$ kg, $M_3 = 10$ kg y $M_4 = 40$ kg. Además $L = 1$ m y se tomará $g = 10$ m/s². Se pretende calcular los esfuerzos motores que han de realizarse en la posición dada, si se quiere trasladar el recipiente con una velocidad horizontal $v_x = 1$ m/s y una velocidad vertical $v_y = 0,5$ m/s, ambas constantes, de tal manera que no se derrame el líquido que contiene.

Prob. 3.3 En el mecanismo de la figura 3.12, el cilindro macizo 1 se aloja en un hueco del cilindro 2, encajando exactamente de manera que ambos pueden girar libremente sin holgura. El cilindro 1 está articulado al suelo, mientras que el 2 está articulado a un bloque que desliza horizontalmente. Se pide: 1) Suponiendo todos los elementos sin masa, hallar el par τ necesario para vencer la fuerza F . 2) Si el bloque tiene masa M , hallar el par τ en la posición $\varphi = \pi/2$ para que el cilindro 1 gire con velocidad angular constante.

Prob. 3.4 El mecanismo de la figura 3.13 forma parte de un compresor de cuatro cilindros. Si el motor gira con una velocidad angular constante

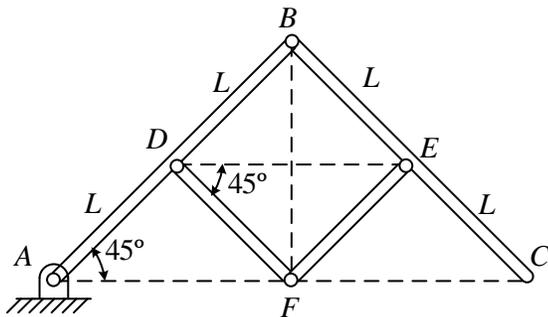


Figura 3.14

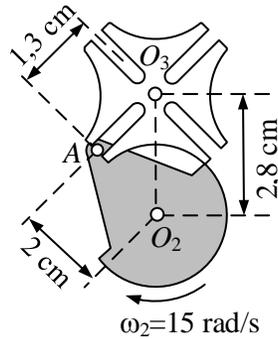


Figura 3.15

ω y considerando que sólo los pistones tienen masa m , determinar el par necesario para vencer la fuerza P en cada pistón. $\overline{OA} = L\sqrt{2}$, $\overline{AB} = 2L$. No considerar el peso.

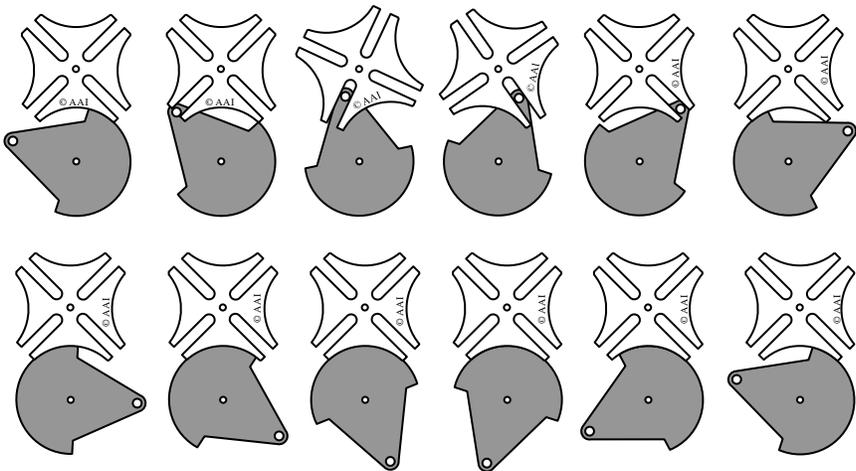


Figura 3.16: Secuencia de movimiento de la rueda de Ginebra.

Prob. 3.5 El mecanismo de la figura 3.14 es un pantógrafo, empleado para ampliar o reducir dibujos mecánicamente. Para ampliar, se coloca un lápiz en la punta F y otro en C . Al seguir la trayectoria con el lápiz en F , el punto C dibuja la misma trayectoria ampliada. Se pide: 1) Deducir el número de grados de libertad mediante el criterio de Grübler. 2) Si la velocidad de F es de 2 cm/s vertical hacia arriba, hallar la velocidad de C .

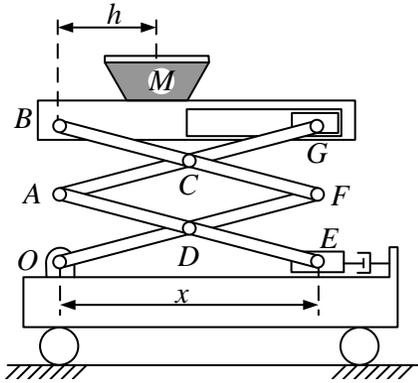


Figura 3.17

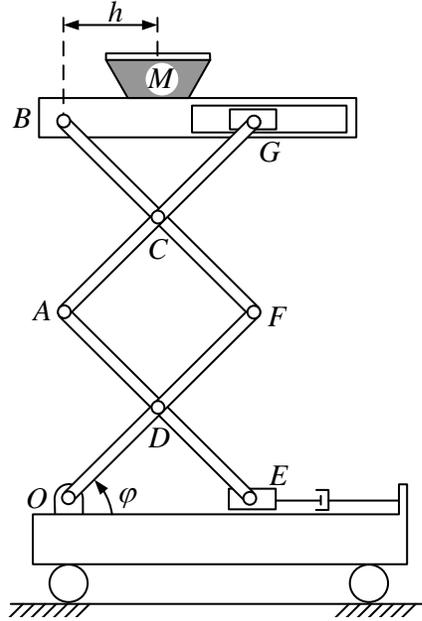


Figura 3.18

Prob. 3.6 El mecanismo de la figura 3.15 se denomina rueda de Ginebra y se utiliza para generar movimiento intermitente de rotación a partir de una rotación continua. Cuando la pestaña A encaja en la ranura de la rueda 3, ésta rota 90° y, después, permanece quieta hasta que la pestaña da otra vuelta completa y vuelve a encajar con otra nueva ranura. La secuencia de animación puede verse en la 3.16. Suponiendo que la rueda 2 gira con una velocidad constante de $\omega_2 = 15 \text{ rad/s}$ por efecto de un par torsor T_2 , determinar dicho par para que la rueda 3 pueda vencer un par resistente $T_3 = 50 \text{ Nm}$. El momento de inercia de la rueda 3 respecto a O_3 es de $I_3 = 2 \text{ kg m}^2$.

Prob. 3.7 La figura 3.17 muestra una mesa elevadora sobre la que se ha colocado una carga de masa M . Sabiendo que $\overline{OF} = \overline{FB} = \overline{EA} = \overline{AG}$, se pide: 1) Suponiendo todas las barras sin masa, obtener la fuerza F que debe desarrollar el motor situado en E para una posición cualquiera x de la deslizadera. En este apartado se considerará que la fuerza de inercia de la carga es despreciable. ¿Afectaría en algo al esfuerzo motor el hecho de que la masa M esté desplazada hacia la izquierda o hacia la derecha? En caso afirmativo, ¿hacia qué lado habría que desplazarla para que el esfuerzo

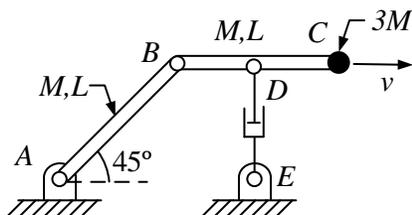


Figura 3.19

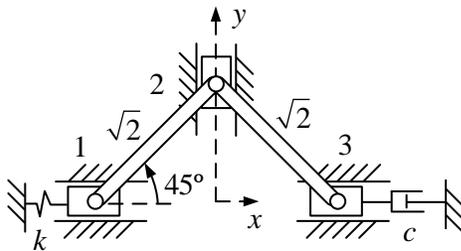


Figura 3.20

motor sea menor? 2) Suponiendo que las cuatro barras \overline{OF} , \overline{FB} , \overline{EA} , \overline{AG} tienen masa m uniformemente distribuida y que \overline{BG} no tiene masa, calcular el esfuerzo motor para $\varphi = 45^\circ$, con la condición de que la deslizadera E se mueva con velocidad constante v hacia la izquierda.

Prob. 3.8 El robot plano de la figura 3.19 consta de dos brazos iguales de masa M y longitud L . En el extremo del segundo brazo transporta una masa $3M$ que se considera puntual. El robot se mueve merced a la acción de un motor rotativo en A , no dibujado, y a otro motor de tipo lineal unido a los puntos E y D , siendo D el punto medio del segundo brazo. Ambos motores se suponen de masa despreciable. Si el robot ha sido programado para que el punto C siga una trayectoria rectilínea horizontal con velocidad constante v , obtener para el instante considerado los esfuerzos motores necesarios para obtener dicho movimiento. Nota: se debe considerar la acción del peso.

Prob. 3.9 El mecanismo de la figura 3.20, que está en un plano horizontal (no considerar el peso), consta de dos barras de masa uniformemente distribuida m y tres deslizaderas sin masa. Las deslizaderas 1 y 3 están unidas al elemento fijo por medio de un muelle de rigidez $k = 100$ N/m y un amortiguador de constante $c = 100$ Ns/m, respectivamente. En el instante que se considera, la velocidad de la deslizadera 1 es $\dot{x}_1 = 3$ m/s. Suponiendo que el muelle se encuentra sin tensión inicial, calcular para la posición indicada la aceleración \ddot{x}_1 .

Prob. 3.10 El sistema de la figura 3.21 representa una leva de disco con seguir oscilante de pie curvo. El disco es un cilindro de radio R articulado en un punto excéntrico O , y gira con velocidad angular constante ω bajo la acción de un par motor τ desconocido. El seguidor oscilante está articulado en el punto C y debe vencer un par resistente T conocido, que le obliga a

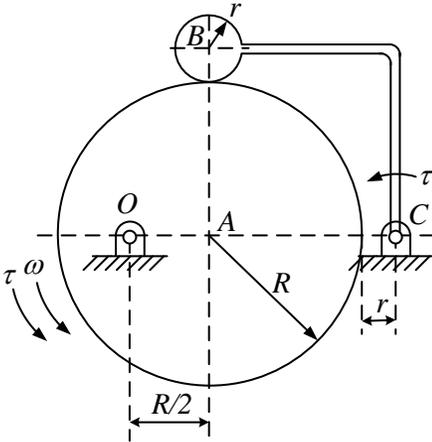


Figura 3.21

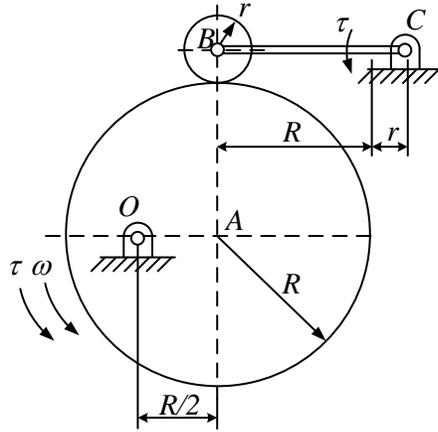


Figura 3.22

mantenerse en contacto con la superficie de la leva. El extremo del seguidor es una circunferencia de radio r . La masa de la leva es M , su centro de gravedad está en el punto A y su momento de inercia es el que corresponde a un cilindro. La masa del seguidor es m y su centro de gravedad está en el punto B , con momento de inercia correspondiente también al de un cilindro. La masa de las barras del seguidor se supone despreciable. Suponiendo que no hay rozamiento entre la leva y el seguidor se pide 1) Calcular la aceleración angular del seguidor. 2) Calcular el par motor τ .

Prob. 3.11 El sistema de la figura 3.22 representa una leva de disco con seguidor oscilante de rodillo. El disco es un cilindro de radio R articulado en un punto excéntrico O , y gira con velocidad angular constante ω bajo la acción de un par motor τ desconocido. El seguidor oscilante está articulado en el punto C y debe vencer un par resistente T conocido, que le obliga a mantenerse en contacto con la superficie de la leva. El rodillo tiene radio r y rueda sin deslizar. La masa de la leva es M , su centro de gravedad está en el punto A y su momento de inercia es el que corresponde a un cilindro. La masa del rodillo es m y su centro de gravedad está en el punto B , con momento de inercia correspondiente también al de un cilindro. La masa de la barra del seguidor se supone despreciable. Se pide 1) Calcular las aceleraciones angulares del seguidor y del rodillo. 2) Calcular el par motor τ .

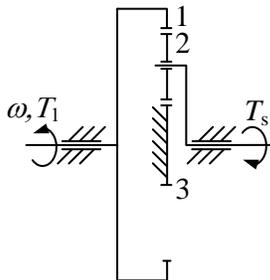


Figura 3.23

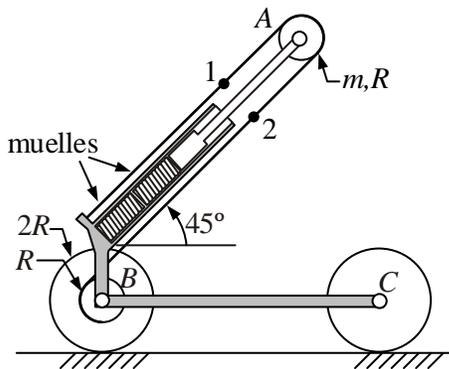


Figura 3.24

Prob. 3.12 El mecanismo de la figura 3.23 representa un reductor de velocidad compuesto por un tren de engranajes planetarios cuyo eje de entrada gira con velocidad angular constante ω . El eje de salida debe vencer un par resistente constante de magnitud $T_s = 10 \text{ Nm}$. Calcular el par motor necesario, sabiendo que los números de dientes de las ruedas son $z_1 = 60$, $z_2 = 20$, $z_3 = 20$, sus masas son $m_1 = 1,5 \text{ kg}$, $m_2 = 0,2 \text{ kg}$, y los momentos de inercia polares son $I_1 = 0,05 \text{ kg m}^2$, $I_2 = 0,01 \text{ kg m}^2$.

Prob. 3.13 La figura 3.24 muestra un automóvil de recorrido limitado, con un sistema motriz basado en dos muelles de compresión idénticos. Con objeto de amplificar el recorrido del actuador se emplea un multiplicador de poleas y cable inextensible. Uno de los extremos del cable se fija al chasis, mientras que el otro extremo se enrolla en la polea B tras pasar por la polea A , ambas de radio R . El único elemento con masa es la polea A , que tiene masa $m = 1 \text{ kg}$ y momento de inercia $mR^2/2$. Tomar $g = 10 \text{ m/s}^2$. Suponiendo rodadura entre la rueda motriz y el suelo, se pide: 1) La aceleración inicial a_0 del vehículo suponiendo que parte con velocidad nula y que los dos muelles están comprimidos al máximo. 2) La diferencia de tensiones del cable entre los puntos 1 y 2. Las características de cada muelle son las siguientes:

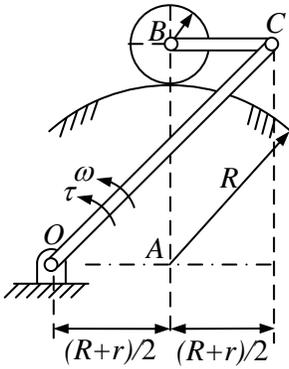


Figura 3.25

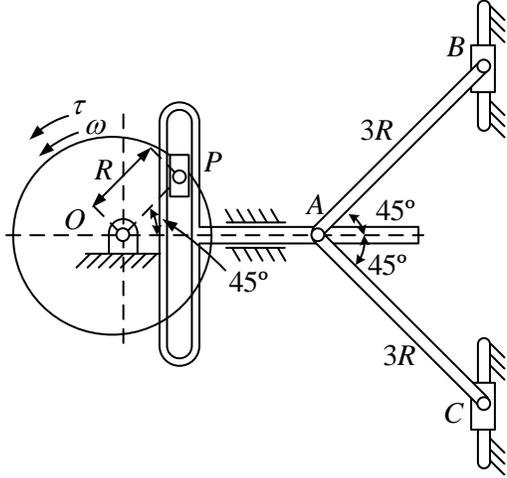


Figura 3.26

Características del muelle

Diámetro del alambre	1.25 mm
Diámetro exterior	17.0 mm
Longitud en reposo	85.2 mm
Longitud mínima de trabajo	18.5 mm
Fuerza a máxima compresión	50 N
Constante elástica	0.75 N/mm

Prob. 3.14 En el sistema de la figura 3.25, la barra \overline{OC} gira con velocidad angular constante ω bajo la acción de un par motor τ desconocido. El rodillo tiene radio r y rueda sin deslizar. La masa de \overline{OC} es M y está uniformemente distribuida a lo largo de la barra. La masa del rodillo es m y su centro de gravedad está en el punto B , con momento de inercia correspondiente al de un cilindro. La masa de la barra \overline{BC} se supone despreciable. Se pide 1) Calcular las aceleraciones angulares de la barra \overline{BC} y del rodillo. 2) Calcular el par motor τ .

Prob. 3.15 El dispositivo de la figura 3.26 está basado en un mecanismo para generar movimientos armónicos denominado yugo escocés. El disco macizo con centro en O gira con velocidad angular constante por efecto de un motor no indicado en la figura. La deslizadora P está articulada al disco por medio de un pasador situado a una distancia R del punto O . Al girar el disco, éste arrastra a la deslizadora quien, a su vez, arrastra al elemento

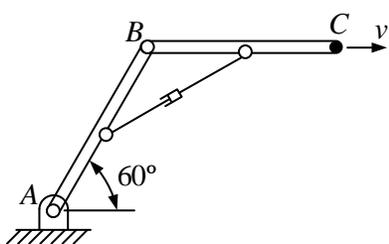


Figura 3.27

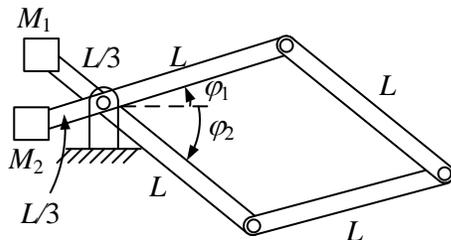


Figura 3.28

en forma de T obligándole a deslizar horizontalmente. En el extremo A se articulan otras dos barras de longitud $3R$ que terminan en las deslizaderas B y C . Considerando que las deslizaderas B y C tienen masa M y que las masas de los demás elementos son despreciables, calcular el par motor τ necesario para mover el mecanismo en el instante indicado.

Prob. 3.16 El robot plano de la figura 3.27 transporta en su extremo una masa puntual de magnitud $3M$ a velocidad constante v . Los dos brazos del robot tienen masa M y longitud L . En la articulación A existe un motor rotativo y entre los puntos medios de los dos brazos hay un motor lineal, que se supone sin masa. El sistema trabaja en un plano vertical sometido a la acción de la gravedad. Para la posición indicada, calcular el esfuerzo que deben realizar los dos motores para que el movimiento sea el deseado.

Prob. 3.17 Se trata de conseguir que el robot de dos grados de libertad de la figura 3.28 quede perfectamente equilibrado en el plano vertical, es decir, que cualquier posición del robot sea estable sin necesidad de que los motores ejerzan ningún par. Para ello, se ha preseleccionado la estructura de tipo pantógrafo mostrada. Se pretende llevar a cabo el equilibrado del robot mediante dos masas puntuales M_1 y M_2 en los extremos indicados. Sabiendo que la masa por unidad de longitud de las barras es m , determinar si es posible el equilibrado para cualquier posición del robot indicando, en su caso, los valores de las masas de equilibrado.

Prob. 3.18 La figura 3.29 muestra una plataforma Stewart, frecuentemente utilizada como mecanismo orientador. En ella, el elemento superior tiene seis grados de libertad respecto al elemento inferior, de manera que se puede conseguir cualquier traslación y rotación variando las longitudes de los seis actuadores lineales. La plataforma Stewart puede verse como un robot



Figura 3.29

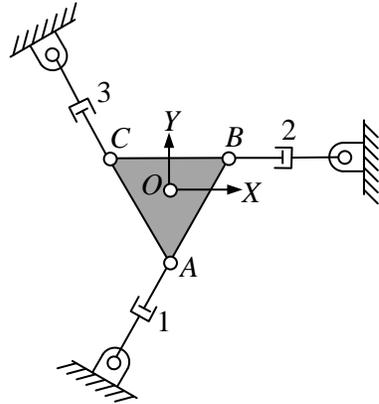


Figura 3.30

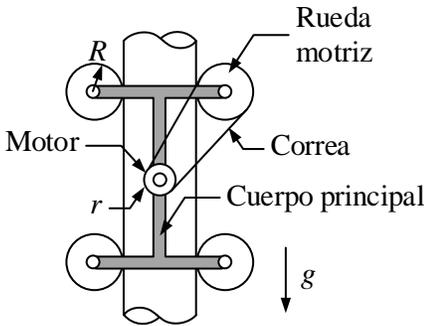


Figura 3.31

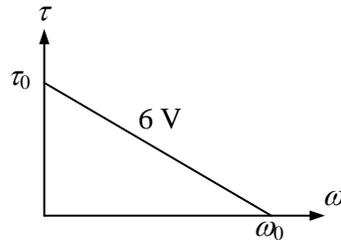


Figura 3.32

de seis grados de libertad de cadena cinemática cerrada. Ésta le confiere una gran rigidez, lo que le permite tiempos de posicionamiento cortos y capacidad de carga elevada frente a los robots industriales de cadena abierta. En el prediseño de una plataforma Stewart se va a comenzar con el modelo plano de la figura 3.30, que mantiene las propiedades básicas del modelo tridimensional. Dicho modelo plano se encuentra en el plano horizontal y consta de un triángulo equilátero rígido de lado L , masa m y momento de inercia I_O , accionado mediante tres actuadores lineales. Se pide, 1) Calcular las velocidades de acortamiento/alargamiento de los actuadores para que la plataforma tenga velocidad lineal $\dot{x}_0 = 1$, $\dot{y}_0 = 0$, y velocidad angular $\omega = 1$. 2) Calcular la fuerza que deben ejercer los actuadores para que partiendo del reposo en la posición indicada, la plataforma tenga aceleración lineal $\ddot{x}_0 = 1$, $\ddot{y}_0 = 0$, y aceleración angular $\alpha = 1$.

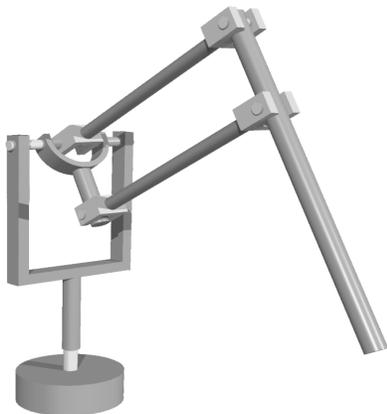


Figura 3.33

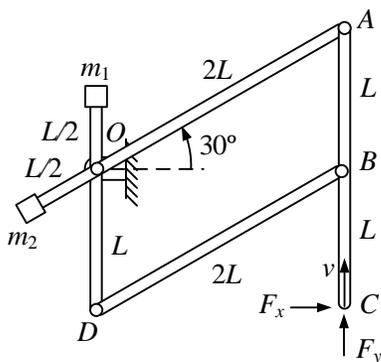


Figura 3.34

Prob. 3.19 La figura 3.31 representa un móvil que asciende por un tubo vertical. El móvil está compuesto por un cuerpo principal, en el que va fijo el motor de corriente continua y cuatro ruedas. La 3.32 muestra la gráfica par/velocidad del motor para la tensión nominal de 6 V. La potencia se transmite del motor a la rueda motriz por medio de dos poleas, una de radio r unida al motor, y otra de radio R unida a la rueda. Entre ambas poleas se monta una correa inextensible. La masa del cuerpo principal es M , mientras que cada rueda se puede considerar como un cilindro uniforme de masa m . Sabiendo que hay rodadura entre el tubo y las cuatro ruedas, se pide: 1) Suponiendo el móvil en reposo, determinar la aceleración de arranque del motor alimentado a la tensión nominal de 6 V. 2) Una vez en movimiento, determinar la velocidad de ascenso a la que se estabiliza el móvil para la tensión nominal de 6 V. 3) Determinar la masa M del móvil óptima para que el motor trabaje a su máxima potencia una vez alcanzada la velocidad de régimen.

Prob. 3.20 El mecanismo de la figura 3.33 es una representación esquemática de un dispositivo Phantom, utilizado para simular el tacto en la interacción con entornos virtuales. El modelo simplificado plano de dos grados de libertad, mostrado en la figura 3.34, consta de las cuatro barras \overline{OA} , \overline{AB} , \overline{OD} y \overline{BD} , todas ellas sin masa. En los extremos de las barras \overline{OA} y \overline{OD} existen masas puntuales de magnitudes m_1 y m_2 , respectivamente. Si se desea que el punto C se mueva con velocidad constante v vertical, determinar: 1) Las velocidades angulares ω_{OA} y ω_{OD} . 2) Las aceleraciones angulares α_{OA} y α_{OD} . 3) La fuerza instantánea F que hay que

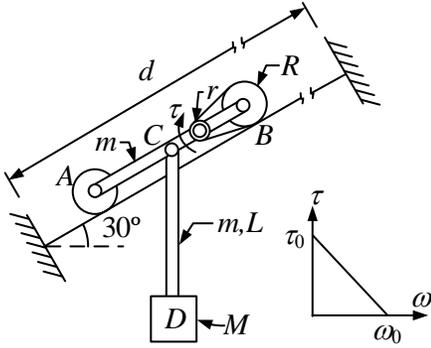


Figura 3.35

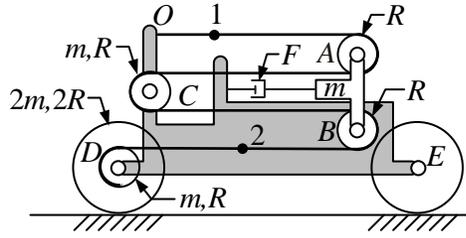


Figura 3.36

ejercer en el extremo para que la velocidad deseada sea posible (considerar el peso).

Prob. 3.21 La figura 3.35 representa un pequeño teleférico que remonta un cable fijo, inclinado 30° , por acción de un motor de corriente continua con par de arranque τ_0 y velocidad en vacío ω_0 , cuya curva característica ideal para la tensión de alimentación nominal se muestra. El motor transmite el par mediante una correa inextensible y dos poleas de radios r y R . El radio de la rueda tractora es también R . En el centro de la barra \overline{AB} , de masa m , se articula un barra \overline{CD} de masa m y longitud L que lleva en el extremo una masa puntual M . Se pide 1) Hallar la aceleración instantánea del punto C en el arranque, es decir, cuando el teleférico se encuentra en reposo. 2) Tras el arranque, se produce un breve transitorio durante el cual el teleférico acelera hasta alcanzar su velocidad de régimen, mientras la barra \overline{CD} pendulea hasta quedar finalmente vertical. Puesto que la longitud del cable d es muy larga, el efecto de dicho transitorio se puede despreciar, y suponer que la barra \overline{CD} permanece vertical durante todo el trayecto. En estas circunstancias, hallar el diámetro de la polea r que minimiza el tiempo invertido por el teleférico en el ascenso.

Prob. 3.22 La figura 3.36 muestra un vehículo automóvil de recorrido limitado cuyo sistema motriz se basa en un actuador lineal que genera una fuerza F . Con objeto de amplificar el recorrido del actuador, se emplea un multiplicador basado en cuatro poleas y un cable inextensible. Uno de los extremos del cable se fija al chasis en el punto O mientras que el otro extremo se enrolla en la polea D tras pasar por las poleas A , B y C , todas ellas de radio R . Las poleas sin masa A y B están montadas sobre una

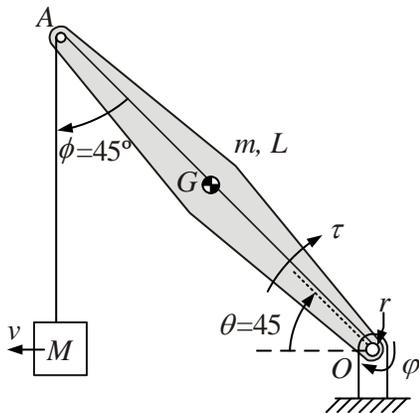


Figura 3.37

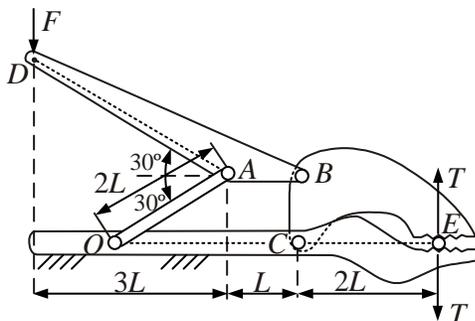


Figura 3.38

misma deslizadera rígida de masa m , que obliga a que las velocidades de los puntos A y B sean idénticas. Las poleas C y D tienen masa m . La polea D va solidariamente unida a la rueda motriz, de radio $2R$ y masa $2m$. La rueda directora E se considera sin masa. Suponiendo que el rozamiento entre la rueda motriz y el suelo es tal que la rueda no desliza, y tomando como momentos de inercia de las poleas los correspondientes a cilindros macizos, calcular: 1) La aceleración inicial a_0 del vehículo suponiendo que parte con velocidad nula. 2) Intuitivamente, sin necesidad de hacer cálculos, ¿cree que la tensión del cable en los puntos 1 y 2 es la misma o diferente? Justificar la respuesta con un breve comentario.

Prob. 3.23 La figura 3.37 representa una grúa empleada para depositar piedras de gran tamaño en un nuevo espigón. La grúa consta de brazo principal OA articulado en O , de masa m , longitud L y momento de inercia I respecto a su centro de gravedad. Un cable inextensible sujeta una piedra de masa M , pasando por una polea situada en A y enrollándose en un carrete de radio r situado en O . Suponiendo el vehículo fijo, determinar: 1) El valor instantáneo de las velocidades $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ y aceleraciones $\ddot{\varphi}$ y $\ddot{\theta}$ para que la piedra se mueva con velocidad constante v en la dirección indicada, suponiendo que el cable permanece vertical en todo momento. 2) Con la grúa en reposo, se aplica un par τ en el brazo principal, manteniendo el carrete fijo (es decir, $\varphi = \text{constante}$). Determinar las aceleraciones instantáneas $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\varphi}$ que se producen.

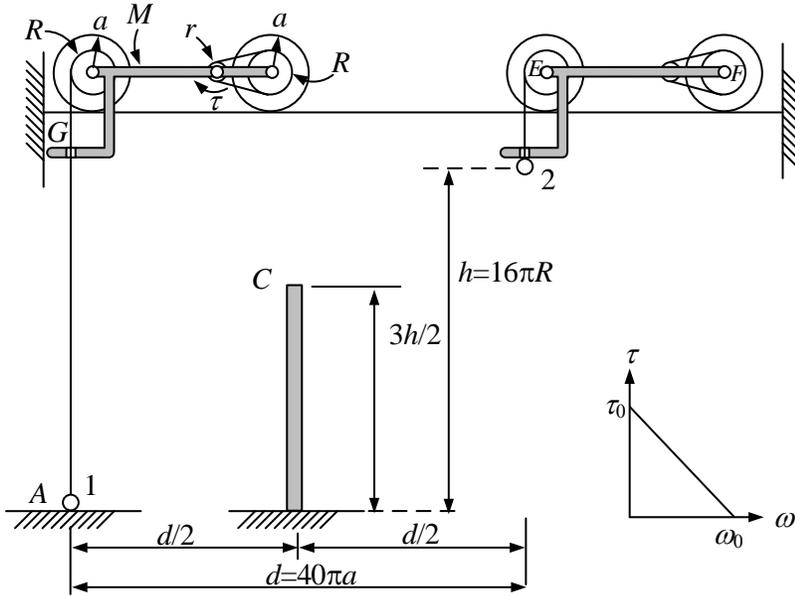


Figura 3.39

Prob. 3.24 La figura 3.38 muestra una llave de perro empleada como multiplicador de fuerza para sujetar piezas firmemente. Sabiendo que se ejerce una fuerza F con la mano en el punto D , hallar por el método de los trabajos virtuales la fuerza T con la que se sujeta la pieza en el punto E .

Prob. 3.25 La figura 3.39 muestra una máquina que debe transportar un objeto A de masa m desde el punto 1 hasta el punto 2. En su movimiento, el objeto A no puede tocar el obstáculo C , debiendo emplear la sola propulsión de un motor eléctrico de corriente continua con par de arranque τ_0 y velocidad en vacío ω_0 , cuya curva característica se muestra. La máquina consta de un cuerpo principal \overline{EF} de masa M sobre el que se monta el motor. En el eje de salida del motor se monta una polea de radio r que transmite el movimiento a la rueda tractora, de radio a , por medio de una polea de radio R solidariamente unida a ella. En la rueda no tractora se monta otra polea de radio R sobre la que se arrolla un hilo inextensible, en cuyo extremo se encuentra el objeto A . El mecanismo ideado para que el objeto A no golpee el obstáculo consiste en un embrague de fricción que comienza a patinar, produciendo un par resistente constante $T = \tau_0/4$, cuando el objeto A alcanza el fin de carrera G . Suponiendo el rozamiento

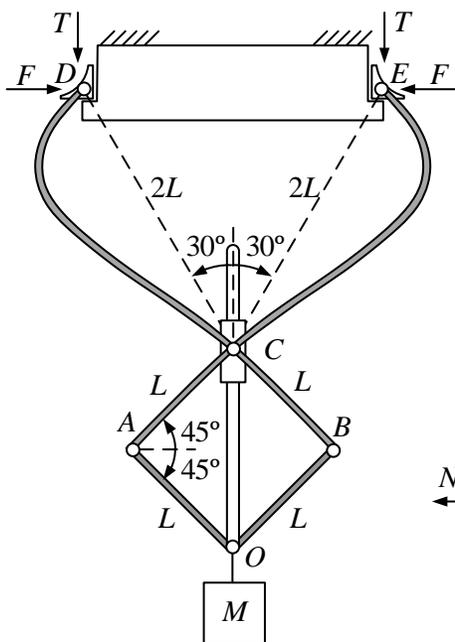


Figura 3.40

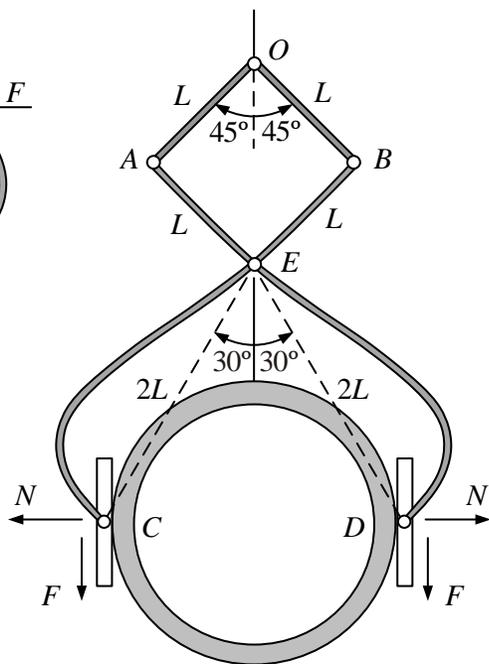


Figura 3.41

despreciable, se pide: 1) Calcular la aceleración lineal de la máquina en el arranque, es decir, cuando la velocidad inicial es nula. 2) Determinar el tiempo empleado por la máquina para transportar el objeto A desde el punto 1 hasta el 2, despreciando los transitorios del régimen del motor producidos en el arranque y en la entrada del embrague. 3) Para mejorar la máquina, se dispone de dos poleas de radio $R_1 = R/2$ y $R_2 = 2R/3$. Con objeto de minimizar el tiempo, ¿es mejor utilizar R_1 , R_2 o R ?

Prob. 3.26 El sistema de fijación mostrado en la figura 3.40 muestra un mecanismo de autoenclavamiento. Sabiendo que la masa suspendida es M y despreciando la masa de las barras, determinar las fuerzas F y T que los apoyos ejercen contra el marco.

Prob. 3.27 La figura 3.41 muestra una grúa para la descarga de tubos, que emplea un mecanismo de barras articuladas para el amarre durante la maniobra de transporte. Dicho mecanismo emplea el peso propio del tubo para generar una fuerza de compresión que, en virtud del rozamiento, impide la caída del tubo. Sabiendo que la masa del tubo es M y considerando

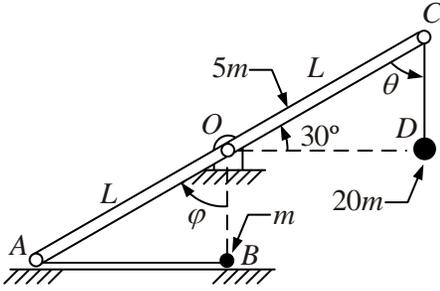


Figura 3.42

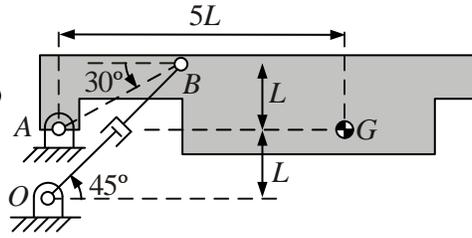


Figura 3.43

despreciable la masa del resto de los elementos, determinar 1) El valor de la fuerza de compresión N empleando el método de los trabajos virtuales. 2) El valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre el tubo y el amarre para que el tubo no deslice.

Prob. 3.28 El trábucos es una máquina de guerra inventada en China entre los siglos V y III a.C., aunque llegó a Europa en el S. VI d.C. Desde el punto de vista mecánico, se trata de una máquina de gran eficiencia, capaz de convertir la energía potencial gravitatoria de un contrapeso en energía cinética de un proyectil. La figura 3.42 representa el modelo esquemático de un trábucos, en el que la barra principal AC tiene longitud $2L$ y masa $5m$. El contrapeso, de masa puntual $20m$, se encuentra suspendido en una bandeja de masa despreciable. El proyectil B , de masa m , está unido al extremo A del brazo principal por medio de un cable inextensible \overline{AB} . Suponiendo que el sistema parte del reposo, calcular la aceleración del proyectil a_B .

Prob. 3.29 La figura 3.43 muestra el esquema cinemático de la puerta trasera de una furgoneta, que pivota alrededor del punto A . Se dispone un conjunto muelle-amortiguador entre los puntos O y B para facilitar su apertura y cierre. Se pide: 1) Calcular la velocidad angular de la puerta ω_p y del amortiguador ω_a cuando el elemento muelle-amortiguador tiene una velocidad lineal conocida v . 2) Estando la puerta inicialmente en reposo, se deja libre bajo la acción de la gravedad. La puerta tiene masa M y momento de inercia $I_G = ML^2$ alrededor de su centro de gravedad G . Calcular la aceleración angular instantánea de la puerta α_p sabiendo que el conjunto muelle-amortiguador ejerce una fuerza resistente F que se opone a la caída.

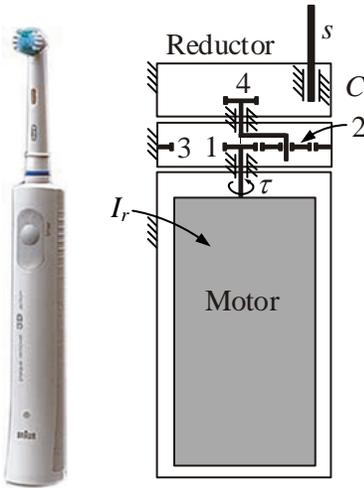


Figura 3.44 Figura 3.45

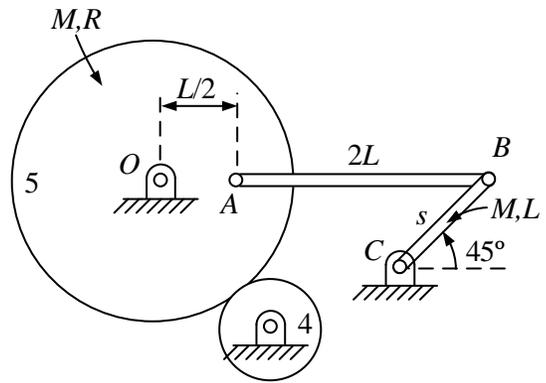


Figura 3.46

Prob. 3.30 Una casa fabricante de cepillos de dientes eléctricos está realizando estudios con vistas a la modificación del diseño de su gama de productos. La estructura mecánica del cepillo consta de tres elementos, mostrados en la figura 3.45: un motor, un reductor planetario y un mecanismo de barras articuladas del tipo manivela-balancín. El motor consta de un rotor t (parte giratoria del motor) de momento de inercia I_r . El rotor t se acopla directamente a un reductor planetario de simple etapa compuesto por tres engranajes de masa despreciable con números de dientes $z_1 = 15$, $z_2 = 20$ y $z_3 = 55$. El eje de salida del reductor lleva acoplado el engranaje 4 (sin masa, $z_4 = 15$) que, a través del engranaje 5 (de masa M , radio R y $z_5 = 70$), transmite el movimiento al mecanismo de barras articuladas, produciendo la oscilación del eje de salida s . La figura 3.46 muestra el par de engranajes 4–5 así como el mecanismo de barras articuladas que genera la oscilación en el eje de salida s . Como se ve, la barra sin masa AB está articulada con el engranaje 5. Éste, a su vez, se articula a la barra BC , de masa M , que constituye el eje de salida s . Se pide: 1) Obtener las relaciones instantáneas de velocidades ω_4/ω_t y ω_s/ω_4 . 2) Estando el sistema en reposo, calcular la aceleración instantánea del rotor α_t al aplicar el par de arranque τ . 3) De acuerdo con el criterio de Grashoff, ¿qué tipo de movimiento tiene el cuadrilátero? Justificarlo numéricamente. Datos: Momento de inercia del engranaje 5 igual al de un cilindro macizo, $I = MR^2/2$. No considerar el peso.



Figura 3.47

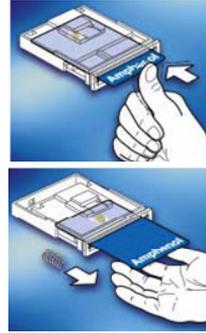


Figura 3.48

Prob. 3.31 Los tornos de la figura 3.47 se emplean como medio de control de accesos. Cada torno está dotado de un lector de tarjetas como el de la figura 3.48. La parte mecánica del lector debe garantizar el contacto correcto con la tarjeta, pues de otra forma la lectura fallará. El funcionamiento del conjunto lector de la figura 3.49 es como sigue: la tarjeta se introduce en la ranura que queda entre los elementos móviles 1 y 3. La tarjeta hace tope en el extremo del elemento 1 y lo arrastra, comprimiendo al mismo tiempo un muelle antagonista que se opone al movimiento. El elemento 3 se encuentra articulado al elemento 1 en su punto B . Además, el elemento 3 lleva una ranura lateral inclinada 30° en la que se inserta el pasador fijo A , que le obliga a cambiar su orientación a medida que se desplaza linealmente. Al final del recorrido, el vástago de un electroimán impide que el muelle recupere su posición inicial, de forma que la pieza 1 y la tarjeta quedan atrapadas durante unos instantes, mientras se realiza la lectura del chip. Tras la lectura, el electroimán retrae su vástago y libera la pieza 1, que expulsa la tarjeta por efecto del muelle. Durante la fase de rediseño se van a realizar algunos cálculos para introducir mejoras en el producto. Se pide: 1) Determinar la relación que existe entre la velocidad lineal \dot{x} de la pieza 1 y la velocidad angular $\dot{\theta}$ de la pieza 3 en el instante $t = 0$; 2) Calcular la velocidad del punto G , centro de gravedad del elemento 3, en función de la velocidad lineal; 3) El sistema se encuentra en reposo con el muelle ejerciendo una fuerza F que es contrarrestada por el electroimán. En $t=0$, el electroimán retrae el vástago y el sistema comienza la expulsión de la tarjeta por acción del muelle. Calcular la aceleración lineal \ddot{x} en dicho instante. Datos: La masa del elemento 1 es M ; la masa del elemento 2 es despreciable; la masa del elemento 3 es $2M$ y su momento de inercia respecto al centro de gravedad es $ML^2/6$. Considerar el peso.

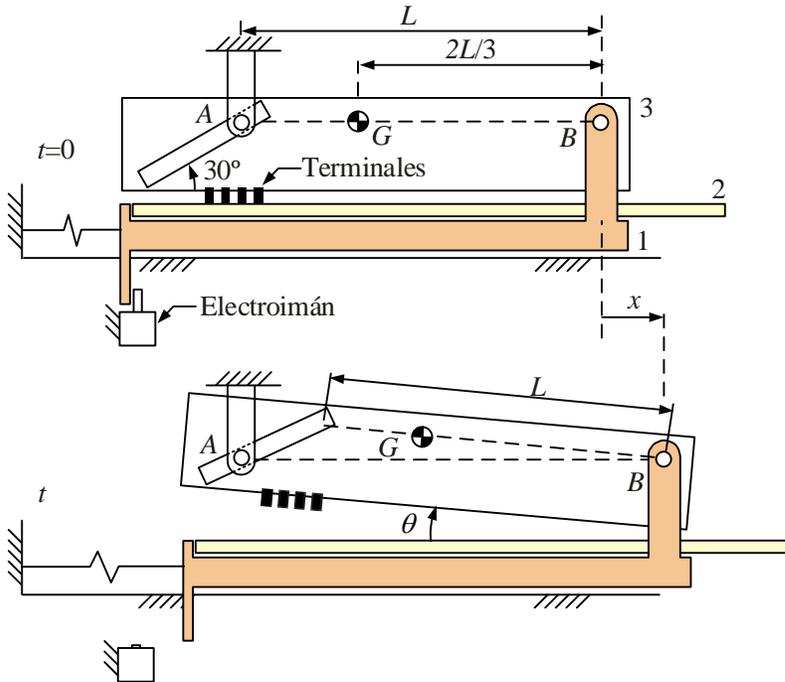


Figura 3.49

Prob. 3.32 En una práctica de la asignatura, los alumnos deben diseñar y fabricar un vehículo, impulsado exclusivamente por energía potencial gravitatoria, capaz de recorrer la máxima distancia después de pasar por debajo de un hilo limitador de altura. Con objeto de aprovechar al máximo la energía potencial, los alumnos idearon máquinas plegables que reducían sus alturas a medida que avanzaban. El grupo ganador empleó un concepto similar al mostrado en la figura 3.50, donde se muestra la configuración inicial de reposo, con las dos barras formando 30° con la vertical. En la figura 3.51 se muestra una explosión de las piezas que componen el vehículo: la pieza 1 —única con masa no despreciable— es una masa puntual de valor m ; la pieza 2 es una barra de longitud $L = 2\sqrt{3}r$; la pieza 3 es una barra de longitud $L = 2\sqrt{3}r$ terminada en un cilindro solidario de radio r ; la pieza 4 se compone de dos cilindros solidarios de radios r y R ; la pieza 5 es un cilindro de radio R ; la pieza 6 es un cable inextensible que se arrolla a las piezas 3 y 4 de la forma indicada. Suponiendo rodadura, se pide: 1) Calcular las velocidades de las articulaciones \dot{x}_A , \dot{x}_C , y la velocidad angular ω_2 de la barra 2, en función de φ y $\dot{\varphi}$ para la posición inicial en que $\beta = 30^\circ$.

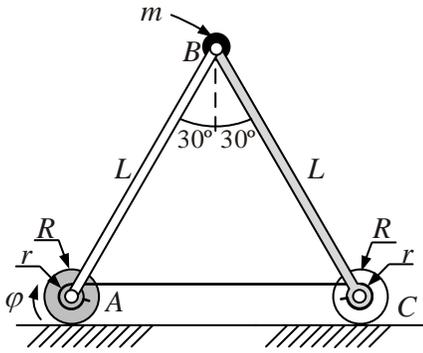


Figura 3.50

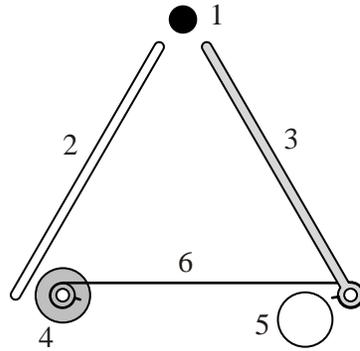


Figura 3.51

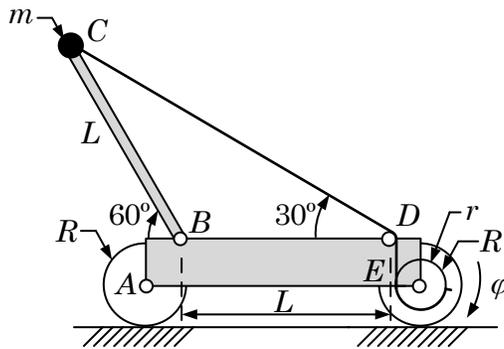


Figura 3.52

2) Calcular la aceleración instantánea $\ddot{\varphi}$ suponiendo que el vehículo parte del reposo desde $\beta = 30^\circ$.

Prob. 3.33 Otro de los diseños realizados por los alumnos en la práctica de la asignatura es el mostrado en la figura 3.52. El vehículo consta de un chasis, dos ruedas de radio R con centros en A y E , y una barra de longitud L articulada en el punto B . Todos los elementos se consideran de masa despreciable, a excepción de la masa puntual m situada en el punto C . Un cable inextensible parte del punto C , pasa por una polea sin rozamiento de radio despreciable situada en D , y se enrolla en una polea de radio r solidariamente unida a la rueda E . Se pide: 1) Calcular la velocidad angular ω_{BC} y la velocidad v de avance del vehículo en función de $\dot{\varphi}$. 2) Suponiendo que el vehículo parte del reposo en el instante de la figura, determinar la aceleración $\ddot{\varphi}$.

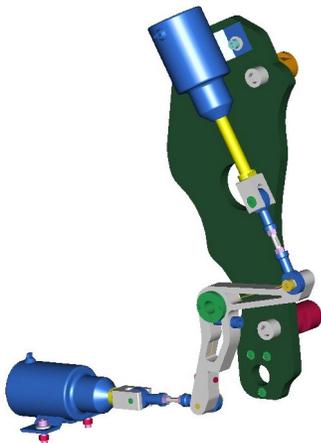


Figura 3.53

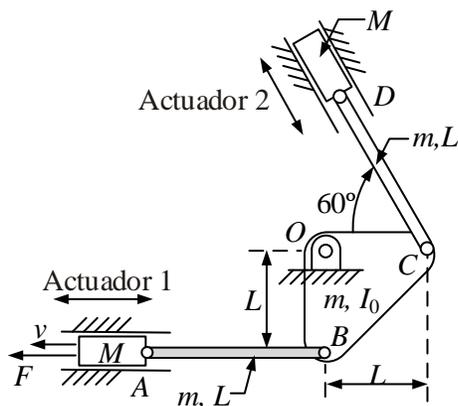


Figura 3.54

Prob. 3.34 En el laboratorio de automoción de Tecnum se ha estado trabajando en el diseño de un nuevo sistema de accionamiento para la selección de velocidades del vehículo de kart-cross que se utiliza como banco de pruebas. La idea es poder seleccionar la velocidad por medio de señales eléctricas enviadas desde el volante, para evitar el habitual movimiento de palanca realizado por el conductor con la mano. El modelo CAD del mecanismo diseñado puede verse en la figura 3.53. Se han empleado dos actuadores magnéticos lineales de simple efecto, cuya función es girar el mando para cambiar de marcha. El esquema cinemático del mecanismo puede verse en la figura 3.54: el actuador magnético 1 está colocado horizontalmente, mientras que el 2 se encuentra inclinado 60° respecto a la horizontal. Los vástagos móviles de ambos actuadores tienen masa M , y se conectan con el triángulo de mando del cambio por medio de dos barras articuladas \overline{AB} y \overline{CD} , ambas de longitud L y masa m uniformemente distribuida. El momento de inercia del triángulo respecto del punto O es I_0 . Se pide: 1) Determinar las velocidades angulares instantáneas de las barras \overline{AB} y \overline{CD} cuando el actuador magnético 1 se mueve hacia la izquierda con velocidad v . 2) Estando el sistema en reposo, se activa el actuador 1 y aparece la fuerza F . Calcular la aceleración instantánea a que se produce por efecto de dicha fuerza. No considerar el peso.

Prob. 3.35 Hace años, los frenos del tipo *cantilever* eran prácticamente desconocidos en las bicicletas, y sólo se veían en tándems o bicicletas de la gama más alta. Hoy en día, este tipo de frenos es tan corriente que se

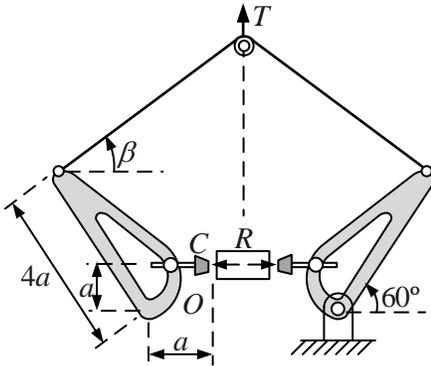


Figura 3.55

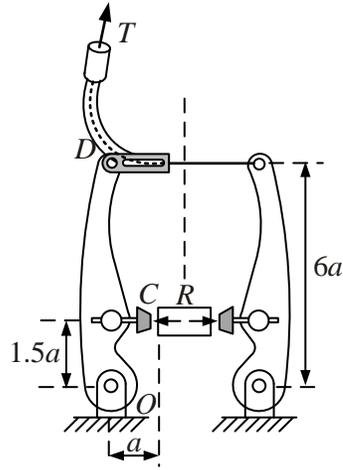


Figura 3.56

encuentran en bicicletas de todas las gamas. Su éxito reside en la gran ventaja mecánica que alcanzan, es decir, en el gran efecto amplificador que se logra sobre la fuerza ejercida en la maneta del freno. Más recientemente, se ha popularizado el freno que la casa Shimano ha denominado *V-brake*, en el que el cable central actúa horizontalmente. Se pretende comparar la amplificación mecánica del freno *cantilever* de la figura 3.55 y del freno *V-brake* de la figura 3.56, calculando, para cada uno de ellos, el cociente R/T , siendo R la fuerza ejercida por la zapata en el punto C , y T la tensión del cable principal. Empleando el método de los trabajos virtuales, se pide:

- 1) Calcular el cociente R/T para el freno cantilever de la figura 3.55, en función del ángulo β .
- 2) Calcular el cociente R/T para el freno *V-brake* de la figura 3.56.
- 3) Establecer el ángulo β para el que el freno cantilever genera una amplificación mayor que el *V-brake*.

Prob. 3.36 Entre los productos de la casa Manitou, especializada en maquinaria de elevación y carga, se encuentra el modelo Maniaccess, mostrado en la figura 3.57. La máquina va propulsada por un motor diesel y emplea actuadores hidráulicos lineales. Para posicionar la barquilla superior, en la que trabajan los operarios, existe una primera etapa de elevación basada en un mecanismo de barras articuladas. Una segunda etapa telescópica permite el posicionamiento final de la barquilla. El esquema cinemático de la primera etapa se representa en la figura 3.58. Se pide: 1) Determinar el número de grados de libertad del mecanismo mediante el criterio de



Figura 3.57

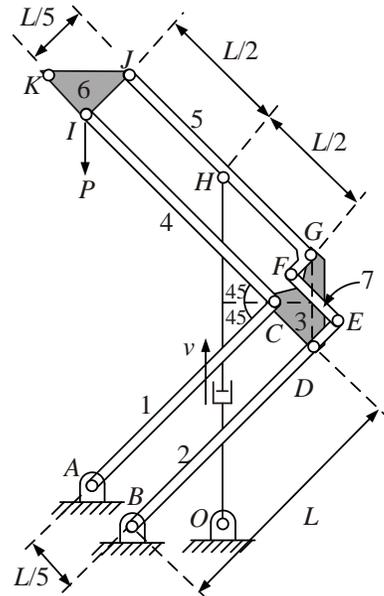


Figura 3.58

Grübler. 2) Sabiendo que el actuador lineal que une los puntos O y H se desliza con velocidad vertical v , calcular las velocidades lineales v_C , v_J y las velocidades angulares ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 , ω_5 , ω_6 y ω_7 . 3) Determinar la fuerza F en el actuador necesaria para soportar una carga P en la barquilla.

Prob. 3.37 La última etapa de la máquina de elevación de la figura 3.57) consta de un elemento telescópico que permite el acercamiento de la barquilla al área de trabajo. Su esquema cinemático se muestra en la figura 3.59. Mediante dos cilindros hidráulicos se puede cambiar la orientación del

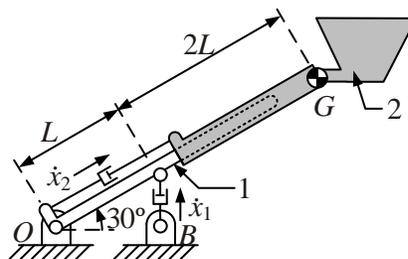


Figura 3.59

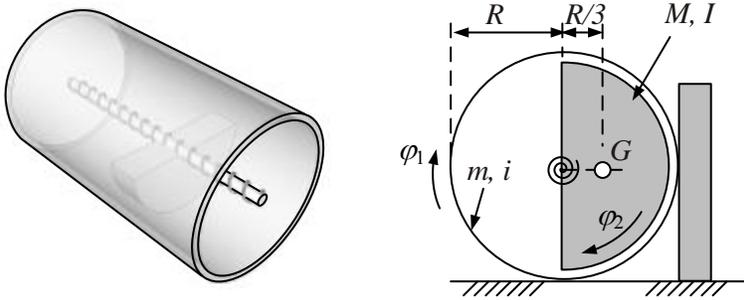


Figura 3.60

brazo 1 y desplegar el elemento telescópico 2, que lleva rigidamente unida la barquilla. El elemento 2 tiene masa M , centro de gravedad G , y momento de inercia respecto al centro de gravedad I_G . La masa del elemento 1 se considera despreciable frente a la del elemento 2. Sabiendo que los dos actuadores hidráulicos se desplazan con velocidades de alargamiento \dot{x}_1 y \dot{x}_2 constantes, se pide: 1) Calcular la velocidad angular ω_1 , la aceleración angular α_1 y la aceleración lineal del centro de gravedad G . 2) Calcular las fuerzas F_1 y F_2 que deben ejercer los actuadores.

Prob. 3.38 El sistema de la figura 3.60 es una representación esquemática de un móvil que fue diseñado y construido por un grupo de alumnos como práctica de la asignatura, para recorrer la distancia de 7 metros en el menor tiempo posible. El dispositivo consta de un cilindro exterior de masa m y momento de inercia i . En el interior del cilindro se dispone un eje longitudinal, que se monta empleando rodamientos de baja fricción alojados en las tapas del cilindro. Sobre el eje, se amarra una pieza pesada con forma semicircular, de masa M y momento de inercia I respecto a su centro de gravedad G . Dicha pieza puede girar alrededor del eje, pero para ello debe vencer un muelle de torsión de rigidez k . Antes de comenzar la prueba, se da vueltas al dispositivo para precargar el muelle de torsión. Tras ello, el móvil se coloca en el suelo, junto a un obstáculo que impide su avance. Debido a la precarga del muelle, la pieza semicircular adoptada una posición girada 90° . Al dar comienzo la prueba, se retira el obstáculo y el móvil se pone en movimiento. Se supone el rozamiento entre el suelo y el cilindro es suficiente para impedir el deslizamiento. Para dicho instante

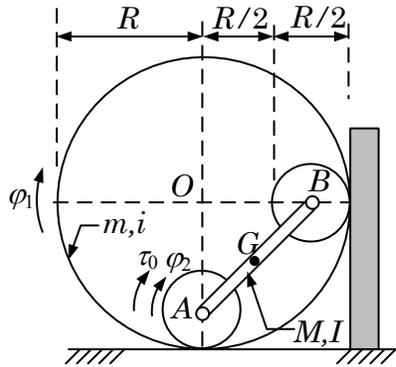


Figura 3.61

inicial se pide: 1) Determinar el par τ_0 de precarga del muelle. 2) Calcular las aceleraciones instantáneas $\ddot{\varphi}_1$ y $\ddot{\varphi}_2$. 3) Para mejorar la eficacia del móvil estamos considerando sustituir el muelle de rigidez k por otro de rigidez distinta, pero sin realizar ninguna otra modificación más (iguales masas y momentos de inercia, e igual ángulo de inclinación de la pieza semicircular). Nos preguntamos ¿debemos sustituirlo por uno de mayor o menor rigidez? ¿Por qué?

Prob. 3.39 Otro diseño empleado por algunos alumnos en la práctica de la asignatura es el que se muestra en figura 3.61. El dispositivo consta de un cilindro exterior de masa m y momento de inercia i . En el interior del cilindro se dispone un coche de juguete accionado por pilas, compuesto por dos ruedas de masa despreciable y un conjunto chasis-motor de masa M y momento de inercia I respecto de su centro de gravedad G . Cuando se enciende el motor, éste genera un par τ_0 sobre la rueda trasera, pero como el obstáculo impide avanzar al cilindro exterior, el efecto del par es obligar al coche a adoptar una posición inclinada 45° . 1) Determinar el par τ_0 que genera el motor. 2) Suponiendo un estado cualquiera de velocidades $\dot{\varphi}_1$ y $\dot{\varphi}_2$, determinar las velocidades que tendrían los puntos A y B . Deducir la velocidad del punto G como media aritmética de las velocidades de A y B . Considerar rodadura. 3) Mientras el coche permanece en reposo en la posición inclinada, se retira súbitamente el obstáculo y el móvil se pone en movimiento. Para dicho instante inicial, calcular las aceleraciones instantáneas $\ddot{\varphi}_1$ y $\ddot{\varphi}_2$.

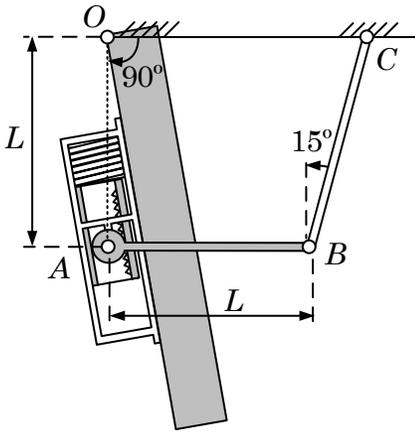


Figura 3.62

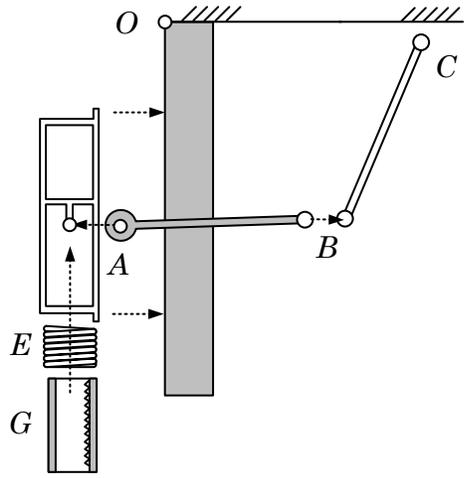


Figura 3.63

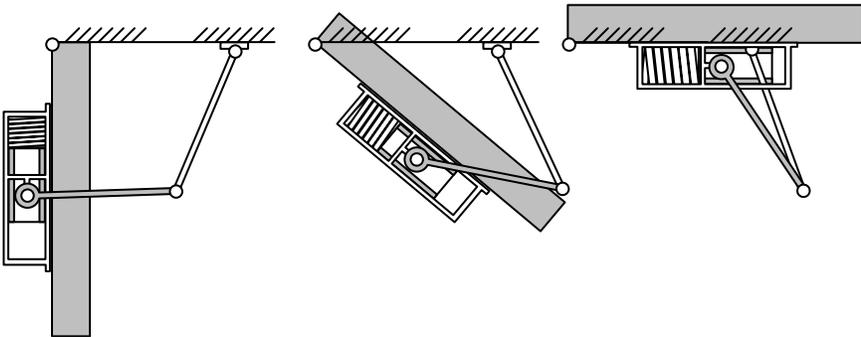


Figura 3.64

Prob. 3.40 Muchas puertas incorporan un freno mecánico para impedir, por una parte, su cierre violento y, por otra, para obligarlas a permanecer cerradas. Exteriormente, el freno consta de un cuerpo principal de forma prismática y de dos brazos articulados, cuyo esquema mecánico se muestra en la figura 3.62 y cuyo despiece se muestra en la figura 3.63. El cuerpo principal se atornilla a la puerta y aloja en su interior un muelle de compresión E y una deslizadera G , la cual lleva incorporada una cremallera. Sobre el cuerpo principal se articula la barra \overline{AB} , que se compone de dos partes solidariamente unidas: una barra biarticulada y un engranaje de radio primitivo R . Finalmente, una barra biarticulada \overline{BC} se une a la pared. El funcionamiento del conjunto, que se ilustra en la figura 3.64, es el siguiente: el muelle E trabaja a compresión y ejerce una fuerza sobre la deslizadera/cremallera G . Ésta engrana con el engranaje, obligando a girar al brazo \overline{AB} . El brazo \overline{BC} transmite la fuerza al marco de la puerta y obliga a la puerta a cerrarse. El efecto freno se consigue llenando de aceite el interior del cuerpo principal y obligando a que el paso del aceite de un lado al otro de la deslizadera se realice por un pequeño orificio calibrado. El momento de inercia de la puerta alrededor del punto O es I_O . En el punto B hay una masa puntual de valor m . El resto de las masas se consideran despreciables. Con la puerta abierta y en reposo, en la posición mostrada en la figura 3.62, ésta se deja libre y, por la acción de la fuerza F ejercida por el muelle, comienza a cerrarse. Calcular la aceleración angular instantánea de la puerta para dicha posición.

Prob. 3.41 Otra forma alternativa de colocar un freno de puerta descrito el problema 3.40 consiste en disponer el cuerpo principal sobre la pared y el extremo del brazo sobre la puerta, como se muestra en la 3.65. El momento de inercia de la puerta alrededor del punto O es I_O . Las barras AB y BC tienen masa m uniformemente distribuida (pese a que las longitudes de las barras son diferentes, ambas tienen la misma masa). El resto de los elementos se consideran de masa despreciable. Con la puerta abierta y en reposo, en la posición mostrada en la figura, ésta se deja libre y, por la acción de la fuerza F ejercida por el muelle, comienza a cerrarse. Se pide, calcular la aceleración angular instantánea de la puerta para dicha posición.

Prob. 3.42 La figura 3.66 muestra el mecanismo de un obturador central de láminas de una cámara fotográfica con autoenfoco. Dicho mecanismo es el responsable de permitir, durante un breve lapso de tiempo, el paso de la luz hasta el sensor CCD en las cámaras digitales. El sistema consta

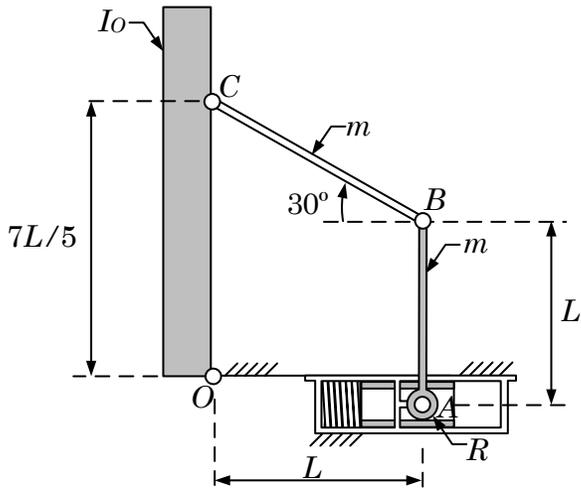


Figura 3.65

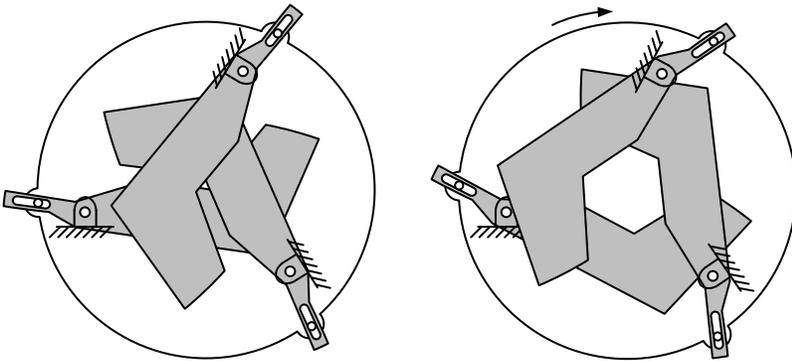


Figura 3.66

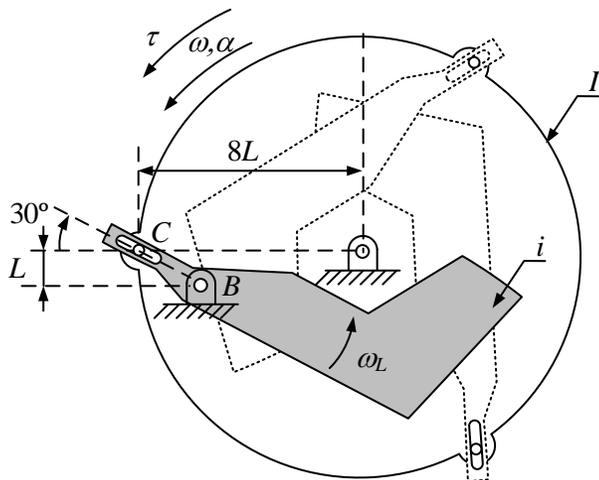


Figura 3.67

de dos elementos principales: un cuerpo móvil o rotor y tres cortinillas que realizan la obturación propiamente dicha. El rotor se acopla al elemento fijo mediante una articulación simple, no mostrada en la figura, que le permite girar alrededor del eje central. Las tres laminillas se unen, por una parte, al elemento fijo mediante una articulación simple y, por otra, al rotor mediante una deslizadera articulada. El movimiento del conjunto consiste en un giro del rotor, que arrastra a las laminillas obligándolas a girar. En la 3.67 se ilustran las dimensiones del sistema para la posición apertura total. El momento de inercia del rotor respecto de su centro es I , y el momento de inercia de cada cortinilla respecto de su punto de giro es i . Para la posición indicada se pide: 1) Calcular la velocidad angular de las laminillas ω_L en función de la velocidad angular del rotor ω . 2) Suponiendo que el sistema parte del reposo, calcular la aceleración angular del rotor α debida a la acción del par de cierre τ .

Prob. 3.43 La figura 3.68 muestra el mecanismo de apertura y cierre de una gama de ventanas de aluminio. Sabiendo que cada pestillo ejerce una fuerza resistente F que se opone a la apertura o cierre de la ventana, considerando que los dos pestillos son los únicos elementos con masa m y que el peso es despreciable, se pide: 1) Calcular los pares estáticos τ_a y τ_c necesarios para vencer las fuerzas resistentes en las posiciones ventana cerrada (figura 3.68) y ventana abierta (figura 3.69), respectivamente. 2) Para la posición de la figura 3.68, suponiendo el sistema en reposo, calcular la acele-

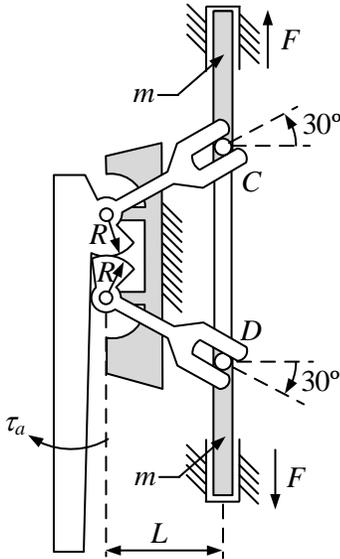


Figura 3.68

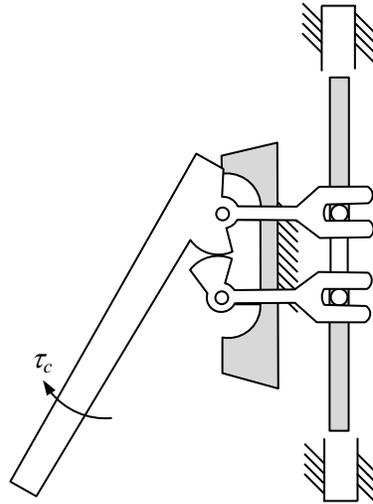


Figura 3.69

ración angular instantánea α que se produce como consecuencia de aplicar un par de apertura τ_a superior al par estático.

Prob. 3.44 La figura 3.70 muestra un cortasetos motorizado empleado en tareas de jardinería. El cortasetos consta de tres elementos principales: un motorreductor, un mecanismo de transmisión de yugo escocés para transformar la rotación en movimiento alternativo de traslación, y dos conjuntos de cuchillas afiladas, unas fijas y otras móviles, que producen el corte de las ramas delgadas del seto. Durante el diseño de un nuevo modelo se desean analizar las vibraciones que el dispositivo transmite a las manos del usuario durante su funcionamiento en vacío. Para ello, se va a construir un banco de ensayos como el mostrado en figura la figura 3.72. El banco consta de tres cuerpos: a) el sólido 1 es una deslizadera horizontal de masa m cuyo desplazamiento horizontal se mide mediante la variable x . El sólido 1 se encuentra unido al elemento fijo mediante un muelle de constante k y un amortiguador de constante c ; b) el sólido 2, de masa m , centro de gravedad situado en el punto O y momento de inercia I , se encuentra articulado en el punto O y gira por efecto de un par τ ; y c) el sólido 3 desliza sobre el elemento 1 y se une al elemento 2 mediante una deslizadera articulada en el punto A . Estando el sistema en reposo con un ángulo $\varphi = 45^\circ$, con el



Figura 3.70

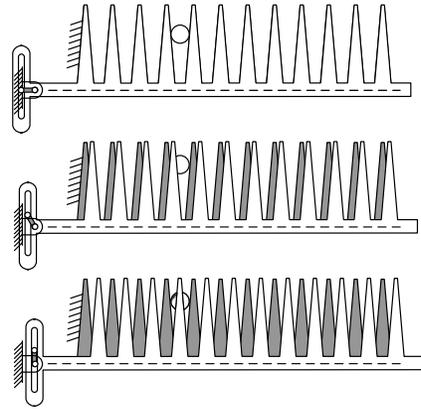


Figura 3.71

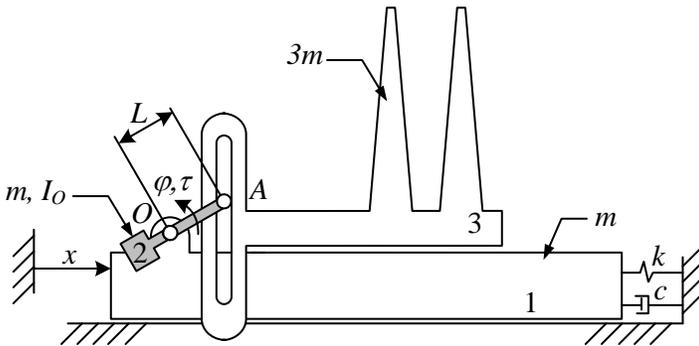


Figura 3.72

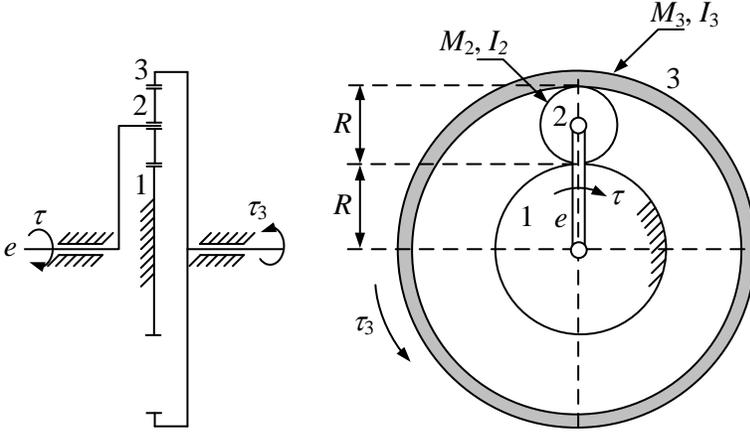


Figura 3.73

muelle sin deformación inicial, se enciende el motor y éste produce un par τ . Calcular las aceleraciones instantáneas $\ddot{\varphi}_0$ y \ddot{x}_0 .

Prob. 3.45 La figura 3.73 muestra un tren planetario empleado como reductor. El tren consta de un eje de entrada e , de masa despreciable, y de tres engranajes de dimensiones y masas indicadas en la figura. Al aplicar en el eje de entrada un par τ conocido, se pide: 1) Calcular la velocidad estacionaria ω_e del eje de entrada, sabiendo que el par resistente en el eje de salida 3 responde a la expresión $\tau_3 = c\omega_3$. 2) Suponiendo el sistema en reposo, calcular la aceleración angular instantánea α_e del eje de entrada. Nota: no considerar el peso.

Prob. 3.46 La figura 3.74 muestra la vista de perfil de una puerta plegable de garaje. La puerta consta de dos mitades iguales, \overline{OA} y \overline{AB} , cada una de longitud L y masa m uniformemente distribuida. El punto B desliza a lo largo de una guía vertical. En dicho punto se amarra el cable del contrapeso M , que permite abrir y cerrar la puerta con un esfuerzo pequeño. Se pide: 1) Calcular la masa M necesaria para contrapesar estáticamente la puerta en una posición cualquiera φ ; 2) Estando la puerta en reposo, en posición cerrada ($\varphi = 90^\circ$), se aplica una fuerza horizontal F en el punto A . Calcular la aceleración instantánea $\ddot{\varphi}$.

Prob. 3.47 La figura 3.75 muestra la vista de perfil de una puerta de garaje. La apertura y cierre de la puerta se realiza mediante un actuador

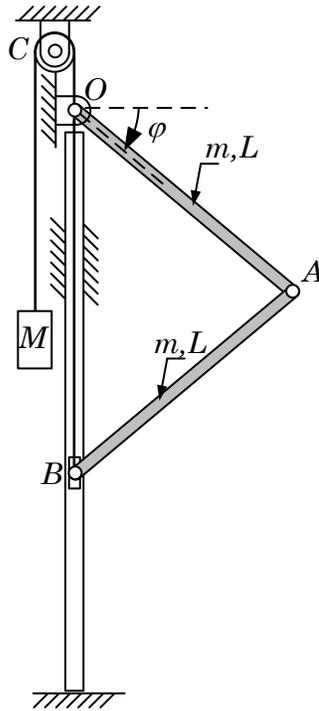


Figura 3.74

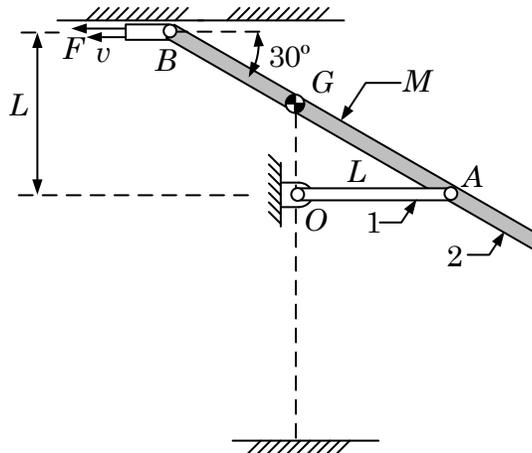


Figura 3.75

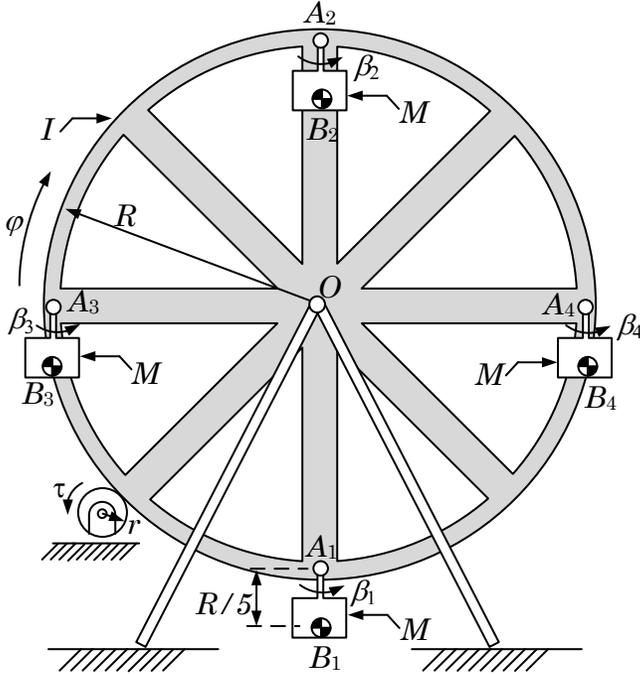


Figura 3.76

lineal instalado en el techo, que guía el punto B horizontalmente hacia la izquierda, con velocidad constante v . Sabiendo que la distancia \overline{AB} es $2L$, calcular para el instante de la figura a) Las velocidades angulares ω_1 y ω_2 de los elementos 1 y 2 en función de la velocidad v . b) Las aceleraciones angulares α_1 y α_2 para la velocidad v constante. c) Suponiendo que la velocidad v es suficientemente baja para poder despreciar las fuerzas de inercia frente al peso, calcular la fuerza F que ejerce el actuador.

Prob. 3.48 Se quiere desarrollar una pequeña noria infantil de sólo cuatro cabinas colgantes, como la mostrada en la figura 3.76. El cuerpo circular de la noria tiene radio R y momento de inercia I respecto del centro O . Las cuatro cabinas son idénticas y se encuentran articuladas en los puntos A_1 , A_2 , A_3 y A_4 , por lo que pueden oscilar libremente variando los ángulos β_1 , β_2 , β_3 y β_4 . A efectos prácticos, la masa M de cada cabina puede considerarse concentrada en los centros de gravedad B_1 , B_2 , B_3 y B_4 situados, cada uno, a una distancia $R/5$ debajo de su correspondiente articulación. Para mover la noria se cuenta con un motor que genera un par τ sobre la

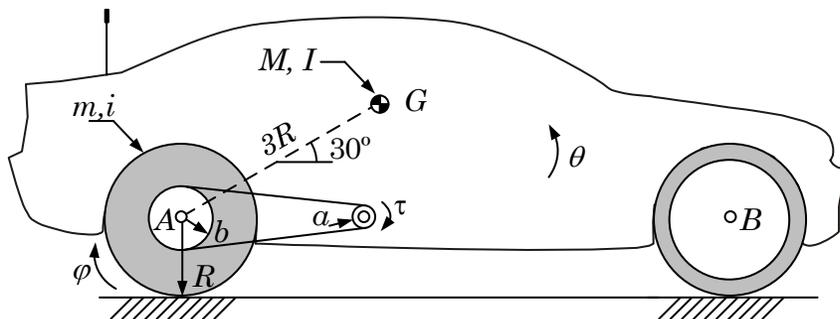


Figura 3.77

rueda de radio r , que transmite el movimiento a la noria mediante rodadura. Si la noria y las cabinas se encuentran inicialmente en reposo y se enciende el motor, calcular los valores de las aceleraciones angulares de las cuatro cabinas β_1 , β_2 , β_3 y β_4 , así como la aceleración angular de la noria $\ddot{\varphi}$.

Prob. 3.49 Partiendo del reposo, se acelera a tope el coche de juguete de radio control mostrado en la figura 3.77, de forma que el motor entrega su máximo par τ . Sabiendo que la rueda trasera no patina y que el par τ es suficiente para que el coche levante la rueda delantera, se pide: 1) Dibujar el estado de fuerzas del sistema, incluyendo las fuerzas de inercia en función de las aceleraciones $\ddot{\varphi}$ y $\ddot{\theta}$. 2) Calcular la aceleración angular instantánea de la rueda trasera $\ddot{\varphi}$ y del chasis $\ddot{\theta}$ tomando $M = 3m$, $I = mR_2$, $i = mR^2/2$.

Prob. 3.50 El mecanismo de la figura 3.78 se encuentra en un plano vertical. Se pide: a) Hallar la relación instantánea entre $\dot{\varphi}$ y $\dot{\beta}$. b) Partiendo del reposo se aplica un par τ en el elemento \overline{AB} . Hallar la aceleración instantánea $\ddot{\beta}$ sabiendo que sólo la barra \overline{DE} tiene masa M uniformemente distribuida.

Prob. 3.51 El robot de la figura 3.79 se encuentra en un plano horizontal y su extremo C recorre una trayectoria vertical a velocidad constante v . Sabiendo que el elemento BC tiene masa m uniformemente distribuida y que en el punto C hay una masa puntual m , se pide: a) Hallar las aceleraciones instantáneas $\ddot{\varphi}_1$ y $\ddot{\varphi}_2$ de los motores 1 y 2. b) Hallar los pares instantáneos τ_1 y τ_2 que ejercen los motores para asegurar el movimiento rectilíneo a velocidad constante.

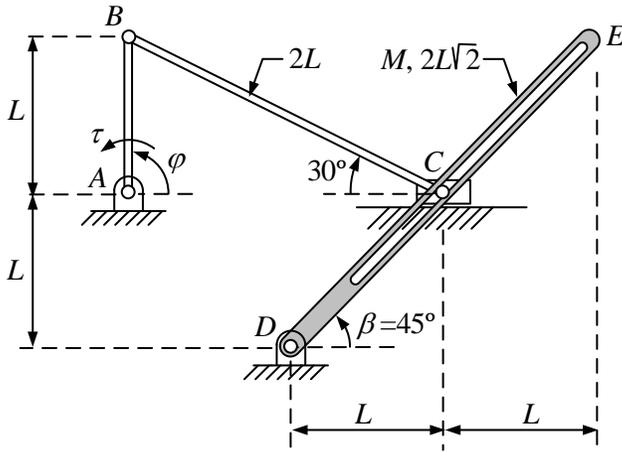


Figura 3.78

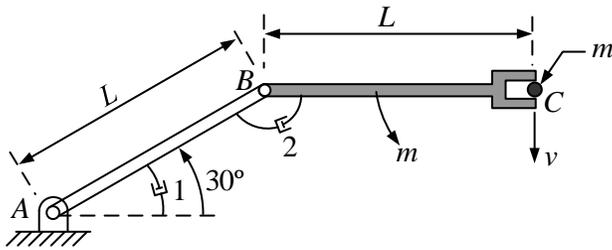


Figura 3.79

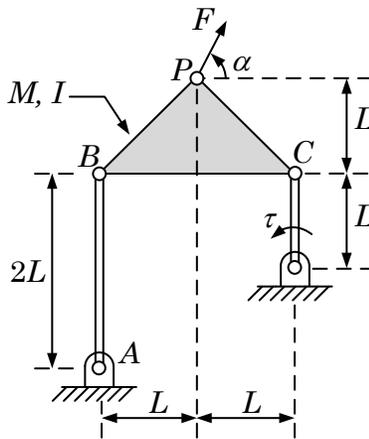


Figura 3.80

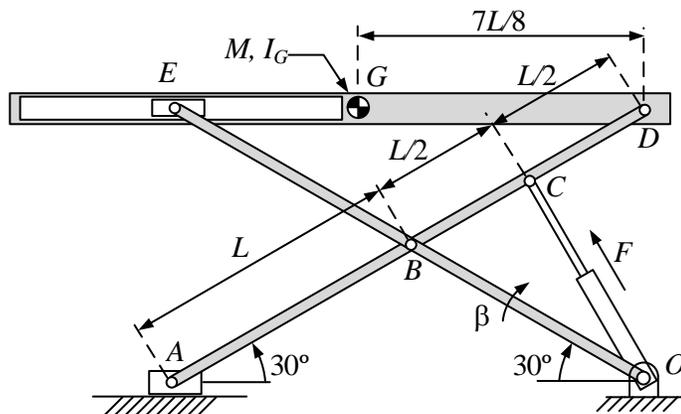


Figura 3.81

Prob. 3.52 Calcular el valor del par τ necesario para que el mecanismo de la figura 3.80 se encuentre en equilibrio estático en el plano horizontal cuando $\alpha = 45^\circ$. Determinar también el valor de α que hace mínimo el valor absoluto del par τ necesario para que el sistema se encuentre en equilibrio estático.

Prob. 3.53 La figura 3.81 muestra una mesa elevadora en el que sólo el elemento horizontal se considera con masa. Se pide: a) Hallar la fuerza estática F necesaria para mantener la plataforma en la posición indicada. b) Partiendo del reposo, se aplica una fuerza F en el actuador. Hallar la aceleración instantánea $\ddot{\beta}$.

Prob. 3.54 Para la mesa elevadora de la figura 3.82, se pide: a) Hallar la fuerza estática F necesaria para mantener la plataforma en la posición indicada venciendo su peso propio. b) Partiendo del reposo, se aplica una fuerza F en el actuador. Hallar la aceleración instantánea $\ddot{\beta}$.

Prob. 3.55 Calcular el par necesario para equilibrar estáticamente la fuerza F , sabiendo que en cada etapa del reductor de la figura 3.83 hay un reducción 1 : 10 en el mismo sentido que el eje de entrada.

Prob. 3.56 La figura 3.85 muestra una máquina de ejercicio conocida como elíptica, incluida dentro de la oferta de muchos gimnasios. Empleando

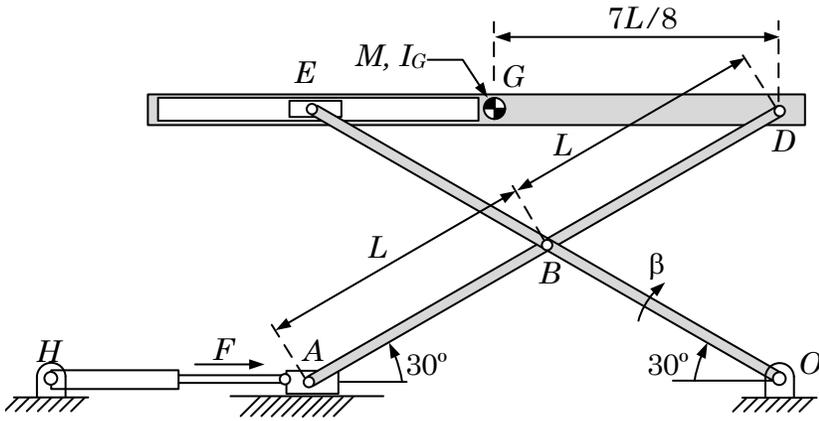


Figura 3.82

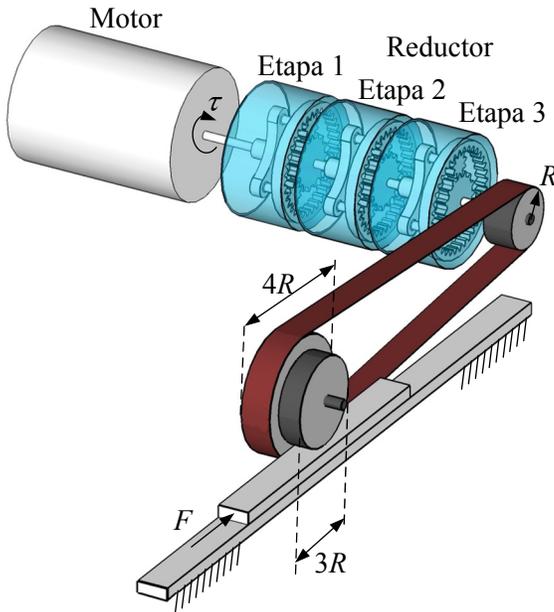


Figura 3.83



Figura 3.84

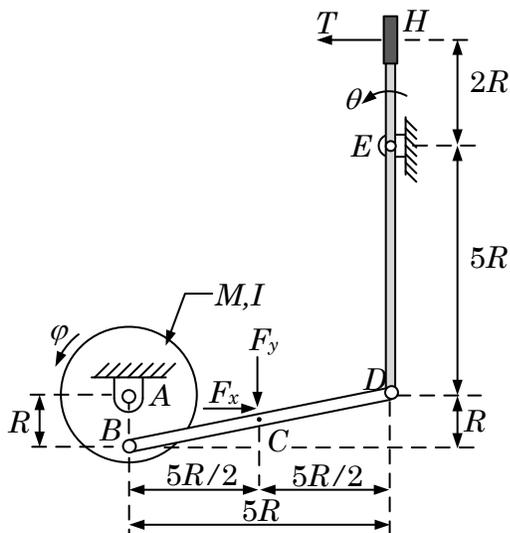


Figura 3.85

el esquema simplificado del mecanismo, se pide: a) Hallar la relación de velocidades entre $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$. b) Calcular la fuerza T aplicada en el punto H que equilibra estáticamente las fuerzas F_x y F_y aplicadas en el punto C . c) Suponiendo el sistema en reposo, se aplica una fuerza $T = F_x$ en el punto H . Calcular la aceleración instantánea $\ddot{\varphi}$ que se produce como consecuencia de la fuerza anterior y de las dos fuerzas F_x y F_y del punto C . Considerar que sólo el disco tiene masa M y momento de inercia I .

Prob. 3.57 El vehículo de la figura 3.86 tiene un motor con un par τ , que se transmite a las ruedas traseras mediante una correa. Llamando x al avance del vehículo, y sabiendo que sólo el cuerpo tiene masa M , se pide: 1) Si el vehículo parte del reposo, hallar la aceleración inicial \ddot{x}_0 . 2) Si la fuerza aerodinámica resistente es $F = 10 \dot{x}^2$, hallar la velocidad \dot{x} a la que se estabiliza el avance del automóvil para un par τ conocido.

Prob. 3.58 El vehículo de la figura 3.87 tiene un motor con un par τ , que se transmite a las ruedas traseras mediante una correa. Se supone rodadura entre las ruedas y el suelo. Llamando x al avance del vehículo, y sabiendo que sólo el chasis tiene masa M , se pide: 1) Hallar el par τ_e estático que permite al vehículo permanecer en reposo en la pendiente. 2) Partiendo del reposo se aplica un par τ_0 , superior al par estático. Calcular la aceleración

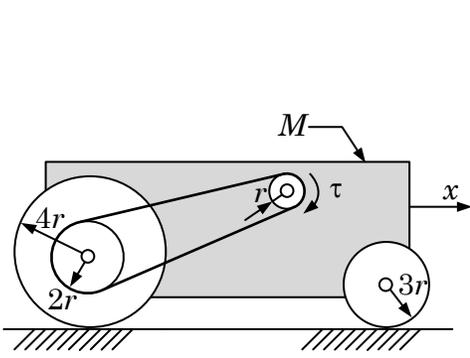


Figura 3.86

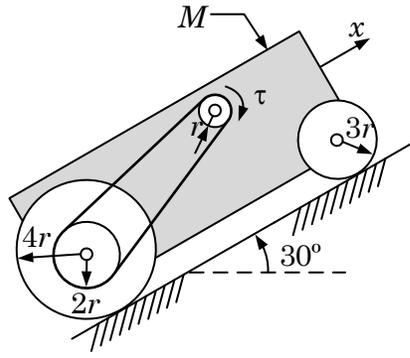


Figura 3.87

instantánea \ddot{x}_0 .

Capítulo 4

Análisis cinemático por métodos numéricos

4.1. Introducción

En los capítulos precedentes se han estudiado los métodos tradicionales para el estudio cinemático y dinámico de mecanismos, basados en la aplicación directa de los principios y teoremas de la mecánica clásica. Aunque dichos métodos permiten abordar pequeños problemas de cinemática y dinámica, la complejidad de las ecuaciones involucradas limita seriamente su campo de aplicación.

Una reflexión sobre los métodos de cálculo de mecanismos vistos hasta el momento indica que las herramientas de que se disponen son, fundamentalmente, las relaciones trigonométricas básicas, algunas consideraciones geométricas, las leyes de Newton, la cinemática del sólido rígido y la resolución analítica de ecuaciones diferenciales. Con estos medios, y poco más, se está en condiciones de abordar la mayor parte de los problemas que aparecen en el estudio clásico de la teoría de máquinas. Aunque el planteamiento de los problemas por los métodos analíticos tradicionales es relativamente directo, la resolución puede volverse tremendamente compleja. Por ejemplo, la deducción de la ecuación del movimiento de un mecanismo biela-manivela se lleva a cabo en un tiempo breve, pero la posterior resolución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden obtenida es complicada y, de ordinario, debe resolverse mediante un método numérico.

También los métodos gráficos de análisis cinemático tienen serias limitaciones, más allá de la mera complejidad de la resolución de las ecuaciones resultantes. Por ejemplo, en el mecanismo de un grado de libertad de la

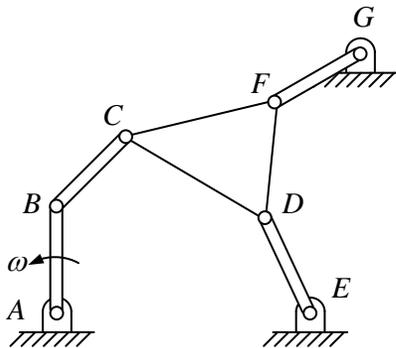


Figura 4.1

figura 4.1, la aplicación sistemática del campo de velocidades del sólido rígido es incapaz de resolver el problema de velocidades de forma explícita. El lector puede demostrar fácilmente que en este ejemplo es imposible obtener la velocidad angular de las barras, por ejemplo de FG , mediante los cinemas de velocidades. Este problema, en particular, puede soslayarse mediante métodos alternativos como el *método del punto auxiliar* o el *método de Goodman*, pero también éstos, a su vez, tienen limitaciones.

Los métodos analíticos son los preferidos por su comodidad y facilidad de interpretación cuando los problemas son de reducido tamaño. Sin embargo, en problemas complejos o de cierto tamaño los métodos analíticos deben ser sustituidos por métodos numéricos. La existencia de programas de computador con capacidades completas de análisis cinemático y dinámico puede crear la tentación de centrarse en su utilización y prescindir de los planteamientos teóricos. Esta forma de pensar es errónea, pues un cierto conocimiento de las bases teóricas da al ingeniero la capacidad para crear sus propios programas cuando sea necesario, para interpretar los resultados y para intuir la causa de posibles errores.

Para desarrollar un método matemático susceptible de ser programado con facilidad es necesario, en primer lugar, crear un modelo matemático simple y eficiente del mecanismo. Ello implica transformar los conceptos de elemento, par cinemático, velocidad, etc., en un conjunto de datos numéricos dispuestos en forma de matriz o vector: es el proceso de *modelización*. En este capítulo nos centraremos en la modelización de mecanismos mediante *coordenadas naturales*, aunque también se verán brevemente otros tipos de coordenadas utilizadas en la práctica.

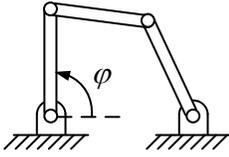


Figura 4.2

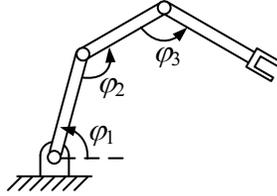


Figura 4.3

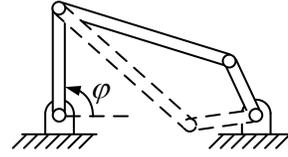


Figura 4.4

4.2. Coordenadas independientes

Para modelizar un mecanismo en coordenadas independientes se emplea un número mínimo de coordenadas, es decir, tantas como grados de libertad. Por ejemplo, para modelizar el cuadrilátero de la figura 4.2, se precisa una única coordenada, que puede ser el ángulo φ . Para modelizar el robot plano de la figura 4.3 se precisan tres coordenadas, por ejemplo los ángulos relativos φ_1 , φ_2 y φ_3 .

La ventaja de las coordenadas independientes radica en su reducido número –el mínimo posible–, ya que el número de coordenadas determina el tamaño final del problema. Son muy adecuadas cuando se trata de resolver mecanismos de cadena abierta, pues en este caso las coordenadas relativas proporcionan con facilidad la posición de cualquier elemento del mecanismo. En el robot de la figura 4.3 resulta evidente que, conocidos los valores de los tres ángulos, la posición y orientación de cualquiera de los elementos del robot se determinan con facilidad.

En el caso de las cadenas cinemáticas cerradas, el uso de coordenadas independientes es menos ventajoso pues exige la resolución del problema cinemático de posición para determinar la posición y orientación de cualquier cuerpo que no sea el de entrada. El problema de posición es no lineal, por lo que debe resolverse de forma iterativa, y además tiene múltiples soluciones. Puesto que cualquiera de las múltiples soluciones es posible, las coordenadas independientes no especifican de forma unívoca la posición del mecanismo, lo que da origen a ambigüedades. Por ejemplo, en el cuadrilátero de la figura 4.4, conocido el valor del ángulo φ , el mecanismo puede adoptar tanto la configuración de “codo hacia arriba” como la de “codo hacia abajo”.

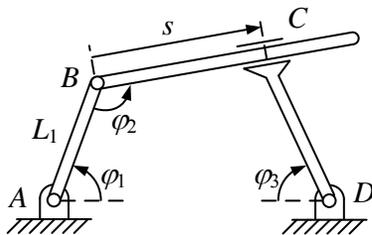


Figura 4.5

4.3. Coordenadas dependientes

Las coordenadas que modelizan un sistema mecánico se llaman *dependientes* cuando su número es mayor que el número de grados de libertad. Es obvio que entre las coordenadas dependientes deben existir ciertas relaciones algebraicas, precisamente porque una vez especificadas tantas de ellas como grados de libertad, el resto pueden ser calculadas en virtud de dichas relaciones, que denominamos *ecuaciones de restricción*. Llamando n al número de coordenadas dependientes, g al número de grados de libertad, y m al número de ecuaciones de restricción, ha de cumplirse la relación,

$$g = n - m \quad (4.1)$$

Lo característico de las coordenadas dependientes es que definen unívocamente la posición de cada elemento del mecanismo. Esto puede lograrse seleccionando diferentes tipos de coordenadas: *relativas*, *de punto de referencia* y *naturales*.

4.3.1. Coordenadas relativas dependientes

Las coordenadas relativas se definen en cada par cinemático, y cada una de ellas mide la posición de un elemento con respecto al anterior en la cadena cinemática. En cada par es preciso introducir tantas coordenadas como grados de libertad permite el par. Por ejemplo, en la figura 4.5, donde las coordenadas φ_1 , φ_2 , φ_3 y s definen unívocamente la posición del cuadrilátero.

Con las coordenadas relativas, las *ecuaciones de restricción* proceden fundamentalmente de las condiciones de *cierre de lazo*. Continuando con el ejemplo anterior, tenemos cuatro coordenadas ($n = 4$) y un solo grado de libertad ($g = 1$), por lo que deben existir $m = n - g = 3$ ecuaciones, que se

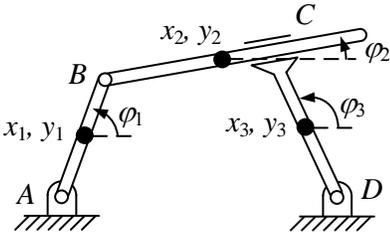


Figura 4.6

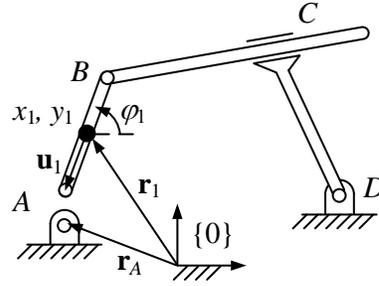


Figura 4.7

deducen de la ecuación vectorial de cierre de lazo:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0} \tag{4.2}$$

que se puede escribir en forma escalar como

$$L_1 \cos \varphi_1 + s \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \pi) + L_3 \cos \varphi_3 - L_4 = 0 \tag{4.3}$$

$$L_1 \sin \varphi_1 + s \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \pi) - L_3 \sin \varphi_3 = 0 \tag{4.4}$$

A estas dos ecuaciones podemos añadir una tercera, procedente de relacionar los tres ángulos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$(\varphi_1 + \varphi_2 - \pi) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3\right) = 0 \tag{4.5}$$

Una ventaja de las coordenadas relativas estriba en su reducido número, que conduce a una formulación compacta y eficiente. Además, las coordenadas relativas facilitan la consideración de fuerzas y momentos aplicados en los pares cinemáticos, pues están directamente relacionadas con el movimiento de los pares, donde normalmente están situados los motores y actuadores. Su principal inconveniente radica en la dificultad de determinar de forma sistemática el número de cadenas cinemáticas cerradas y cuáles de ellas son independientes.

Como se ha mencionado, en los mecanismos de cadena abierta las coordenadas relativas son independientes, es decir, su número coincide con el número de grados de libertad del mecanismo, por lo que no hay ecuaciones de restricción.

4.3.2. Coordenadas de punto de referencia

Las coordenadas de punto de referencia sitúan la posición y orientación de cada elemento del mecanismo de forma absoluta. Existen varias elecciones posibles. La más directa consiste en definir un sistema de referencia

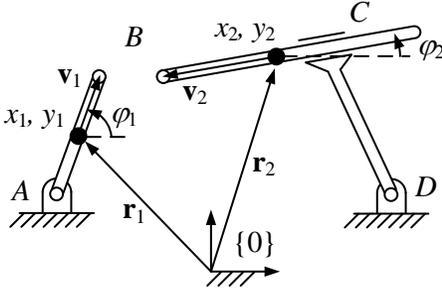


Figura 4.8

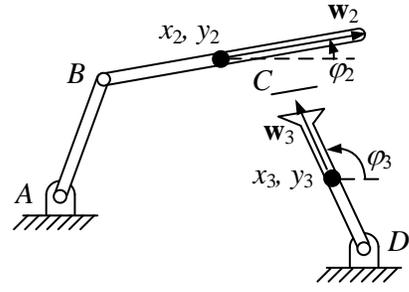


Figura 4.9

rígidamente unido al elemento y tomar, por una parte, las coordenadas de su origen para definir la traslación y, por otra, los ángulos de Euler (u otra forma de parametrizar las rotaciones) para definir su orientación. En el caso tridimensional, son precisas seis coordenadas para definir la posición de un cuerpo. En el caso plano bastan tres coordenadas.

Las ecuaciones de restricción surgen al examinar cada par y escribir matemáticamente las limitaciones al movimiento que el propio par impone a los dos elementos unidos por él. En el ejemplo plano de la figura 4.6, las coordenadas de punto de referencia son $\{x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3, \varphi_3\}$. Puesto que hay nueve coordenadas y un solo grado de libertad, deben existir 8 ecuaciones de restricción.

Para deducirlas, comenzamos con la figura 4.7, donde se representa el par A , que une los elementos 1 y 0. Dicho par obliga al punto A a permanecer fijo, lo que matemáticamente se puede expresar igualando la suma $\mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1$ al vector \mathbf{r}_A :

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} x_1 - \frac{L_1}{2} \cos \varphi_1 - x_A \\ y_1 - \frac{L_1}{2} \sin \varphi_1 - y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Análogamente podemos proceder con el par B , que une los elementos 1 y 2. En este caso, el par cinemático obliga a coincidir en el punto B a las dos partículas materiales situadas en los extremos de los elementos 1 y 2, como se muestra en la figura 4.8. Matemáticamente,

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} x_1 + \frac{L_1}{2} \cos \varphi_1 - x_2 + \frac{L_2}{2} \cos \varphi_2 \\ y_1 + \frac{L_1}{2} \sin \varphi_1 - y_2 + \frac{L_2}{2} \sin \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Con el par D procedemos igual que con el A , obteniendo

$$\mathbf{r}_3 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{r}_D = \begin{Bmatrix} x_3 - \frac{L_3}{2} \cos \varphi_3 - x_D \\ y_3 - \frac{L_3}{2} \sin \varphi_3 - y_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

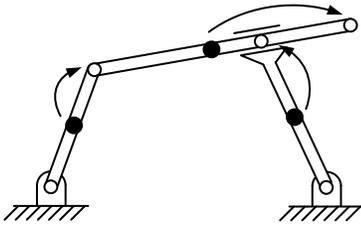


Figura 4.10

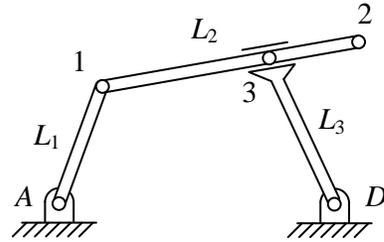


Figura 4.11

Finalmente, consideramos el par C en la figura 4.9. Se trata de una deslizadera rígida que obliga a los elementos 2 y 3 a permanecer siempre perpendiculares, permitiendo que el elemento 3 se traslade a lo largo del elemento 2. Matemáticamente, estas dos condiciones se expresan mediante dos ecuaciones: una ecuación de perpendicularidad, que obliga a que los ángulos φ_2 y φ_3 difieran en 90° , y otra ecuación de alineamiento, que obliga a que la proyección del vector \mathbf{r}_{23} sobre \mathbf{w}_3 permanezca siempre constante. Las dos ecuaciones quedan:

$$\varphi_3 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2} = 0 \tag{4.9}$$

$$\mathbf{r}_{23}^T \mathbf{w}_3 = (x_3 - x_2) \cos \varphi_3 + (y_3 - y_2) \sin \varphi_3 - k = 0 \tag{4.10}$$

Las expresiones 4.6–4.10 contienen las ocho ecuaciones de restricción que relacionan las coordenadas dependientes entre sí.

La principal ventaja de las coordenadas de punto de referencia radica en lo sistemático de su aplicación. Tanto la modelización del mecanismo como la generación de las ecuaciones de restricción se pueden automatizar, lo que las hace particularmente atractivas para desarrollar con ellas programas de ordenador.

4.3.3. Coordenadas naturales

Las coordenadas naturales¹ también definen de forma absoluta la posición de cada elemento, pero en lugar de estar situadas en el centro del elemento, como las coordenadas de punto de referencia, se sitúan normalmente en los pares. Pueden verse como una evolución de las coordenadas

¹Las coordenadas naturales fueron desarrolladas en el CEIT por el profesor Javier García de Jalón y colaboradores. Para una descripción detallada puede consultarse el libro *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge*, J. García de Jalón y E. Bayo, 1993, Springer Verlag.

de punto de referencia, cuando los puntos de interés migran hacia los pares (figura 4.10), contribuyendo así simultáneamente a definir la posición de dos elementos en lugar de uno. Una consecuencia inmediata es que ya no son necesarias variables de tipo angular para definir la orientación de cada elemento, con la complejidad que ello conlleva.

Con las coordenadas naturales, las ecuaciones de restricción son de dos tipos: de *sólido rígido* y de *par cinemático*, éstas últimas sólo en determinados pares.

En el ejemplo de la figura 4.11, las coordenadas naturales son $\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\}$, que suman seis coordenadas para un solo grado de libertad, por lo que existen cinco ecuaciones de restricción. Tres de estas cinco ecuaciones son de sólido rígido y su deducción es bastante directa: deben imponer las condiciones de que el punto 1 permanezca a distancia constante de A , que 2 permanezca a distancia constante de 1, y que 3 permanezca a distancia constante de D . Matemáticamente,

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \quad (4.11)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (4.12)$$

$$(x_3 - x_D)^2 + (y_3 - y_D)^2 - L_3^2 = 0 \quad (4.13)$$

Otras dos ecuaciones son de par cinemático y surgen de las limitaciones al movimiento que impone la deslizadera rígida. En primer lugar, el segmento $\overline{12}$ debe permanecer formando ángulo constante con el segmento $\overline{3D}$, lo que equivale a decir que su producto escalar debe ser constante. En segundo lugar, el punto 3 debe moverse sobre el segmento $\overline{12}$, lo que equivale a decir que el producto vectorial entre $\overline{12}$ y $\overline{13}$ debe ser nulo. Podemos escribir estas dos ecuaciones:

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_D) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_D) - k = 0 \quad (4.14)$$

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad (4.15)$$

Con las coordenadas naturales, la modelización de los mecanismos es simple y sistemática, y las ecuaciones de restricción son sencillas. A diferencia de las coordenadas de punto de referencia, las coordenadas naturales tienen una interpretación física intuitiva. Por ello, en este capítulo se adoptarán estas coordenadas para continuar el desarrollo de los métodos numéricos de análisis cinemático y dinámico de mecanismos.

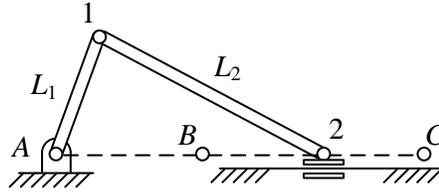


Figura 4.12

4.4. Coordenadas naturales en el plano

Las coordenadas naturales en el plano se componen de coordenadas cartesianas de algunos puntos de cada sólido situados en los pares. Para modelizar correctamente un mecanismo en coordenadas naturales pueden seguirse las siguientes normas:

1. En cada articulación se debe situar un punto.
2. En los pares prismáticos deben existir, al menos, tres puntos alineados: dos para definir el eje y el tercero para la deslizadera.
3. Cada sólido debe contener, como mínimo, dos puntos. Si esta condición no se cumple, es imposible determinar la orientación del cuerpo.
4. Además de lo anterior, se pueden utilizar tantos puntos adicionales como se desee.

Ejemplo 4.1 *Para modelizar el mecanismo biela-manivela de la figura 4.12, se toman los puntos 1 y 2. Los puntos fijos A, B y C, aunque necesarios para el planteamiento de las ecuaciones de restricción, no forman estrictamente parte de las coordenadas naturales, por no ser variables. Por tanto, el vector de coordenadas naturales es $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$. Puesto que hay un solo grado de libertad, es necesario establecer tres ecuaciones de restricción, que son:*

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0$$

$$(x_2 - x_C)(y_C - y_B) - (y_2 - y_C)(x_C - x_B) = 0$$

Las dos primeras ecuaciones son de sólido rígido y obligan a que las barras mantengan sus longitudes constantes. La tercera ecuación corresponde

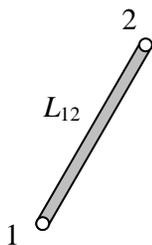


Figura 4.13

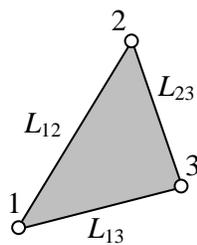


Figura 4.14

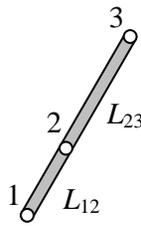


Figura 4.15

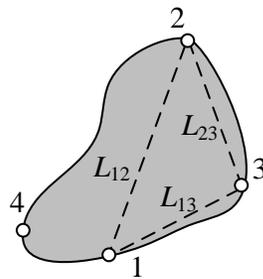


Figura 4.16

a la deslizadera articulada, y obliga a que a los puntos B , C y 2 permanezcan alineados, mediante el producto vectorial nulo de los segmentos $\overline{2C}$ y \overline{BC} .

Otra forma alternativa de modelizar este mecanismo consiste en tomar como coordenadas naturales $\{x_1, y_1, x_2\}$, prescindiendo de la variable y_2 , que es nula. En este caso, la tercera ecuación habría sido innecesaria.

4.4.1. Restricciones de sólido rígido

Las restricciones de sólido rígido son las necesarias para que los puntos de un mismo elemento no tengan desplazamientos relativos. En un elemento plano definido mediante n puntos deben existir $n - 3$ ecuaciones de restricción, ya que el elemento tiene tres grados de libertad. Veamos los distintos casos que pueden darse en función del número de puntos:

- a. **Dos puntos** (figura 4.13): en este caso, la única ecuación de restricción es la que obliga a mantener constante la distancia entre los puntos 1 y 2,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (4.16)$$

- b. **Tres puntos** (figura 4.14): se precisan tres restricciones para asegurar que los tres lados del triángulo 123 son constantes, que son

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (4.17)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_{13}^2 = 0 \quad (4.18)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (4.19)$$

- c. **Tres puntos alineados** (figura 4.15): cuando los tres puntos se encuentran alineados, las tres ecuaciones de distancia no garantizan la condición de sólido rígido. La prueba es que el punto 2 se puede mover infinitesimalmente en dirección perpendicular al segmento $\overline{13}$ sin que varíen las distancias $\overline{12}$ y $\overline{23}$. La solución consiste en sustituir dos de las ecuaciones de distancia por otras dos ecuaciones que establecen la proporcionalidad entre el vector \mathbf{r}_{12} y el vector \mathbf{r}_{13} ,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (4.20)$$

$$(x_3 - x_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}}(x_2 - x_1) = 0 \quad (4.21)$$

$$(y_3 - y_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}}(y_2 - y_1) = 0 \quad (4.22)$$

- d. **Cuatro puntos** (figura 4.16): con cuatro puntos, el número de variables es $n = 8$, por lo que son precisas cinco ecuaciones de restricción. En primer lugar, se escogen tres puntos no alineados, por ejemplo 1, 2 y 3, y se escriben sus tres ecuaciones de distancia constante. Las dos ecuaciones restantes se obtienen al expresar el vector \mathbf{r}_{14} como combinación lineal de los vectores \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{13} , con constantes de proporcionalidad λ y μ (es también válida cualquier otra permutación en que las coordenadas del punto 4 se expresen como combinación lineal de los demás puntos),

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (4.23)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_{13}^2 = 0 \quad (4.24)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (4.25)$$

$$(x_4 - x_1) - \lambda(x_2 - x_1) - \mu(x_3 - x_1) = 0 \quad (4.26)$$

$$(y_4 - y_1) - \lambda(y_2 - y_1) - \mu(y_3 - y_1) = 0 \quad (4.27)$$

- e. **Más de cuatro puntos**: se procede igual que con cuatro puntos, añadiendo dos ecuaciones de combinación lineal adicionales por cada punto adicional.

4.4.2. Restricciones de par cinemático

Las restricciones de par cinemático son las necesarias para que las coordenadas de dos elementos contiguos unidos mediante un par se muevan de

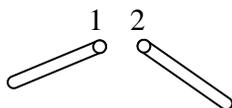


Figura 4.17

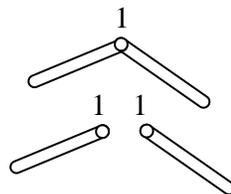


Figura 4.18

acuerdo con los grados de libertad permitidos por el par. En los siguientes apartados se estudian los distintos tipos de pares cinemáticos, las formas de modelizarlos y sus ecuaciones de restricción.

Articulación plana

Una articulación plana puede modelizarse de dos formas distintas. En primer lugar, mediante dos puntos 1 y 2, como se muestra en la figura 4.17, en cuyo caso es necesario imponer dos ecuaciones de restricción triviales:

$$x_1 - x_2 = 0 \quad (4.28)$$

$$y_1 - y_2 = 0 \quad (4.29)$$

La segunda forma de modelizar la articulación es compartiendo el punto 1, como en la figura 4.18. En este caso, el punto 1 pertenece tanto al elemento de la derecha como al de la izquierda. El mero hecho de que dos elementos compartan un punto hace innecesarias las ecuaciones de restricción. Fácilmente se ve que el único movimiento posible entre dos elementos que comparten un punto es, precisamente, la rotación alrededor de dicho punto.

Emplear una u otra forma de modelizar el par es una cuestión, en muchos casos, de preferencias personales. En general no hay razones de peso que inclinen la balanza en una dirección o en otra. Se puede argumentar que al compartir puntos disminuye el número de variables, por lo que el esfuerzo de cálculo necesario es aparentemente menor. Sin embargo, el incremento del tamaño de las matrices y vectores se ve compensado por una mayor dispersión de los términos, hecho que aprovechan las técnicas de resolución de matrices dispersas. El resultado es que el tiempo de cálculo tiende a aumentar sólo muy ligeramente. Si la velocidad de resolución no es un punto clave, y frecuentemente no lo es, puede ser más conveniente modelizar el mecanismo sin compartir puntos, pues ello facilita considerablemente el cálculo de las reacciones en los pares y de los esfuerzos motores.

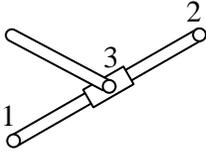


Figura 4.19

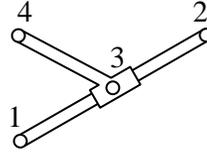


Figura 4.20

Deslizadera articulada plana

Para modelizar este par es preciso disponer de tres puntos alineados, como se muestra en la figura 4.19. Los puntos 1 y 2 se encuentran sobre el eje de la deslizadera, y el punto 3 sobre la articulación. La única ecuación de restricción es la que garantiza que los puntos 1, 2 y 3 permanecen siempre alineados, lo que matemáticamente se consigue mediante una ecuación de producto vectorial nulo entre los vectores \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{13} .

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0 \quad (4.30)$$

Deslizadera rígida plana

Como se puede ver en la figura 4.20, la deslizadera rígida se modeliza igual que deslizadera articulada, pero en este caso es preciso imponer además una segunda ecuación de restricción, que obligue a que los vectores \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{34} formen un ángulo constante, lo que matemáticamente se consigue con una ecuación de producto escalar constante. Las dos ecuaciones son:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0 \quad (4.31)$$

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) - c = 0 \quad (4.32)$$

donde c es una constante.

4.4.3. Coordenadas relativas

Según hemos visto, las coordenadas naturales son puramente cartesianas pues se componen exclusivamente de puntos. Sin embargo, en algunas ocasiones resulta de utilidad incluir también coordenadas relativas, para facilitar la definición de ciertos pares cinemáticos o para interpretar más fácilmente los resultados. Por ejemplo, el par engranaje se define mediante una proporcionalidad entre los ángulos girados por dos elementos. O bien, en un mecanismo biela-manivela conviene expresar la traslación de la deslizadera en función del ángulo de la manivela. En ambos ejemplos,

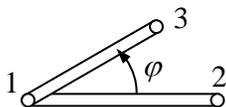


Figura 4.21

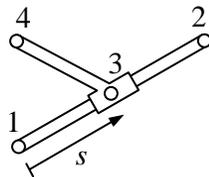


Figura 4.22

poder contar con los ángulos entre las variables del problema simplifica su planteamiento. Las coordenadas relativas pueden ser también lineales, y facilitan la introducción de actuadores lineales, hilos inextensibles, etc.

Por cada coordenada relativa, se incrementa en una unidad el número de variables dependientes (n), mientras que el número de grados de libertad (g) no varía. Puesto que el número de restricciones es $n - g$, por cada nueva coordenada relativa será preciso añadir una nueva ecuación de restricción.

Coordenada relativa angular

Consideremos los dos elementos articulados de la figura 4.21, entre los que hemos definido el ángulo φ . Consecuentemente, debemos introducir una ecuación de restricción adicional para relacionar φ con las coordenadas de los puntos 1, 2 y 3, lo que se consigue mediante el producto escalar entre los vectores \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{13} :

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) - L_{12}L_{23} \cos \varphi = 0 \quad (4.33)$$

Desafortunadamente, esta ecuación no es válida cuando φ está próximo a 0 o 180° . La causa es que el producto escalar representa la proyección del vector \mathbf{r}_{13} sobre \mathbf{r}_{12} . En general, cuando φ varía también lo hace dicha proyección. Sin embargo, en el caso particular de $\varphi = 0$ o $\varphi = 180^\circ$, cuando los vectores \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{13} se encuentran alineados, una variación infinitesimal del ángulo φ no provoca variación alguna en la proyección. En estos casos, en lugar de emplear la ecuación de producto escalar se puede emplear la de producto vectorial entre \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{13} :

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - L_{12}L_{23} \sin \varphi = 0 \quad (4.34)$$

Mediante un razonamiento análogo al anterior se puede demostrar que esta ecuación no es válida cuando el ángulo $\varphi = \pm 90^\circ$. Resulta entonces que las dos ecuaciones anteriores son complementarias, pues ninguna de las dos es válida en todo el rango del movimiento. Una táctica posible consiste

en emplear cualquiera de las ecuaciones hasta que se vuelva inservible y, entonces, sustituirla por la otra. Sin embargo, en la práctica es más sencillo y recomendable introducir las dos ecuaciones al mismo tiempo, admitiendo que las ecuaciones de restricción puedan ser redundantes.

Coordenada relativa lineal

En la deslizadera de la figura 4.22 se ha definido la coordenada relativa lineal s . En este caso, la ecuación de restricción es

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - s^2 = 0 \quad (4.35)$$

Esta ecuación presenta problemas cuando, en su movimiento a lo largo de la deslizadera, el punto 3 pasa por encima del punto 1, momento en que la ecuación 4.35 se vuelve inservible. Cuando esta situación puede producirse, es preferible emplear otra aproximación diferente, que consiste en describir el vector \mathbf{r}_{13} como proporcional al vector \mathbf{r}_{12} , mediante las ecuaciones:

$$(x_3 - x_1) - \frac{s}{L_{12}}(x_2 - x_1) = 0 \quad (4.36)$$

$$(y_3 - y_1) - \frac{s}{L_{12}}(y_2 - y_1) = 0 \quad (4.37)$$

Estrictamente, sólo una de estas dos ecuaciones de restricción es necesaria. Cuando el vector \mathbf{r}_{12} se encuentra horizontal, la segunda ecuación no es válida pues la variación de las coordenadas y_1 e y_3 no proporciona ninguna información acerca de la variación de s . Análogamente, cuando el vector \mathbf{r}_{12} se encuentra vertical, la primera ecuación no sirve ya que la variación de las coordenadas x_1 y x_3 no da información sobre la variación de s . Igual que el caso de la coordenada angular, es recomendable introducir las dos ecuaciones simultáneamente y utilizar técnicas de resolución que permitan operar con restricciones en exceso.

Pares cinemáticos superiores: engranaje y rodadura

Las coordenadas relativas angulares y lineales, vistas en el apartado anterior, facilitan en gran medida la consideración de los denominados pares de orden superior, como el par de engranajes y el par de rodadura. Otros pares superiores, como el de leva, pueden ser tenidos en cuenta de forma similar, aunque su complejidad es mayor.

Para modelizar un par de engranajes como el de la figura 4.23, es suficiente con definir dos variables relativas angulares φ_1 y φ_2 , y relacionarlas

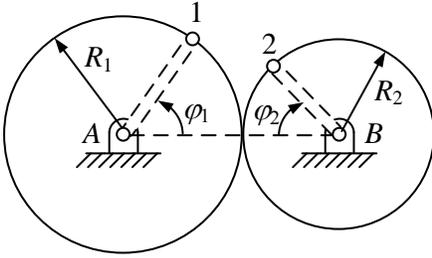


Figura 4.23

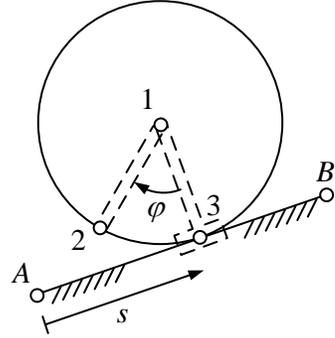


Figura 4.24

entre sí mediante la ecuación de restricción

$$R_1(\varphi_1 - \varphi_{10}) - R_2(\varphi_2 - \varphi_{20}) = 0 \quad (4.38)$$

donde φ_{10} y φ_{20} representan los valores iniciales de φ_1 y φ_2 .

Por su parte, el par de rodadura se modeliza empleando una coordenada relativa angular y otra lineal, como se muestra en la figura 4.24, y añadiendo la ecuación

$$s - s_0 - R(\varphi - \varphi_0) = 0 \quad (4.39)$$

Conviene resaltar que, en la modelización efectuada en la figura anterior, se ha recurrido a un sencillo truco para capturar adecuadamente los movimientos de traslación y rotación de la rueda, consistente en definir un elemento ficticio, modelizado con los puntos 1 y 3, cuyo movimiento de traslación sirve para asegurar que el punto 1 (centro del disco) permanece a distancia constante de la pista. Apoyándonos en este elemento, es mucho más fácil definir el movimiento real de la rueda, modelizada mediante los puntos 1 y 2.

4.5. Ejemplo de modelización con coordenadas naturales

En este apartado se muestra la modelización de un mecanismo plano en coordenadas naturales y se plantean las correspondientes ecuaciones de restricción.

El mecanismo de retorno rápido mostrado en la figura 4.25 se utiliza en ciertos tipos de máquina-herramienta. Se ha modelizado mediante tres

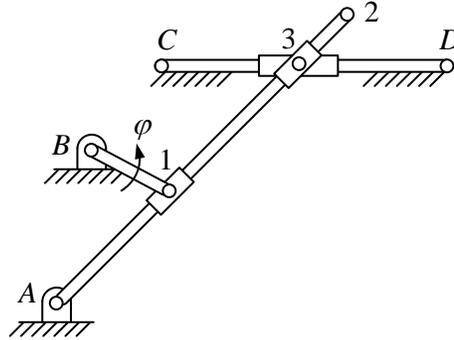


Figura 4.25

puntos móviles 1, 2 y 3, cuatro puntos fijos A , B , C y D , y el ángulo φ . El vector de coordenadas cuenta, por tanto, con siete componentes:

$$\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \varphi\} \quad (4.40)$$

La introducción del ángulo φ en el elemento de entrada parece razonable, por tener un motor acoplado a él. Fácilmente puede deducirse que el mecanismo tiene un grado de libertad, por lo que se precisan, al menos, seis ecuaciones de restricción.

En primer lugar, se introducen dos ecuaciones de restricción de distancia constante:

$$(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2 - L_{1B}^2 = 0 \quad (4.41)$$

$$(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_{2A}^2 = 0 \quad (4.42)$$

A continuación, necesitamos introducir tres ecuaciones de alineamiento correspondientes a las tres deslizaderas articuladas. Las ecuaciones garantizan, respectivamente, el alineamiento de los puntos $\overline{A12}$, $\overline{A23}$ y $\overline{CD3}$:

$$(x_1 - x_A)(y_2 - y_A) - (y_1 - y_A)(x_2 - x_A) = 0 \quad (4.43)$$

$$(x_3 - x_A)(y_2 - y_A) - (y_3 - y_A)(x_2 - x_A) = 0 \quad (4.44)$$

$$(x_3 - x_C)(y_D - y_C) - (y_3 - y_C)(x_D - x_C) = 0 \quad (4.45)$$

Finalmente, restaría por incluir la ecuación de restricción del ángulo φ , que incluimos por duplicado para evitar singularidades:

$$x_1 - x_B - L_{1B} \cos \varphi = 0 \quad (4.46)$$

$$y_1 - y_B - L_{1B} \sin \varphi = 0 \quad (4.47)$$

4.6. Problemas cinemáticos

El estudio cinemático de un mecanismo pretende conocer su movimiento independientemente de las fuerzas actuantes. Los problemas cinemáticos son de naturaleza puramente geométrica, y se dirigen exclusivamente al análisis del movimiento en términos de posición, velocidad y aceleración, sin considerar las causas que lo producen.

Para definir de forma más precisa los problemas cinemáticos, es preciso definir previamente el vector \mathbf{q} , de $n \times 1$, que contiene las coordenadas dependiente empleadas en la modelización del mecanismo, y el vector \mathbf{z} , de dimensión $g \times 1$, que contiene las coordenadas de los grados de libertad. Normalmente, \mathbf{z} es un subconjunto del vector \mathbf{q} , obtenido al tomar tantas componentes de \mathbf{q} como grados de libertad.

Empleando estos dos vectores, se está en condiciones de definir los tres problemas cinemáticos principales: de *posición*, de *velocidad* y de *aceleración*. La tabla 4.1 resume los datos e incógnitas de cada problema.

Problema	Datos	Incógnitas
De posición	\mathbf{z}	\mathbf{q}
De velocidad	$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}$	$\dot{\mathbf{q}}$
De aceleración	$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{z}}$	$\ddot{\mathbf{q}}$

Tabla 4.1: Clasificación de los problemas cinemáticos.

En el *problema de posición* se trata de hallar la posición de todas las coordenadas naturales a partir de las posiciones de los grados de libertad. En el *problema de velocidad* se trata de hallar la velocidad de todas las coordenadas naturales, conocida la velocidad de los grados de libertad. Y en el *problema de aceleración* se trata de hallar la aceleración de todas las coordenadas naturales conocida la aceleración de los grados de libertad. Para resolver el problema de velocidad es necesario resolver previamente el de posición. Para resolver el problema de aceleración es preciso resolver previamente los problemas de posición y velocidad.

4.6.1. Problema de posición

El problema de posición, también conocido como problema *de montaje*, consiste en calcular la posición \mathbf{q} de todos los elementos del mecanismo, a partir de la posición de los grados de libertad \mathbf{z} . La solución de este problema es relativamente sencilla en el caso de mecanismos de cadena abierta, debido a que la solución es única y puede calcularse de forma

explícita. En cambio, en los mecanismos con cadena cinemática cerrada el problema es bastante más complejo, normalmente con soluciones múltiples y frecuentemente sin solución explícita.

Como ya se ha dicho, las n incógnitas del vector \mathbf{q} se encuentran ligadas por m ecuaciones de restricción, que agruparemos en el denominado vector de restricciones Φ , de dimensión $m \times 1$. Puesto que las ecuaciones de restricción son, en principio, funciones de las coordenadas naturales y del tiempo, podemos escribir de forma compacta el conjunto de todas las ecuaciones de restricción como:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{Bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}, t) \\ \dots \\ \Phi_m(\mathbf{q}, t) \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

En definitiva, nuestro problema consiste en resolver dicho conjunto de ecuaciones no lineales. Para abordar su resolución se puede recurrir al *método de Newton-Raphson*, también conocido como *método de la tangente*, basado en linealizar la ecuación anterior tomando los dos primeros términos de su serie de Taylor,

$$\Phi(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, t) \approx \Phi(\mathbf{q}, t) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\Delta\mathbf{q} \approx \mathbf{0} \quad (4.49)$$

donde $\Phi_{\mathbf{q}}$ es la matriz jacobiana $m \times n$ de las ecuaciones de restricción, cuya expresión explícita es:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\phi_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_m}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial\phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

La ecuación 4.49 se puede tomar como referencia para establecer el siguiente proceso iterativo:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i, t)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = -\Phi(\mathbf{q}_i, t) \quad (4.51)$$

En cada iteración es necesario resolver la ecuación 4.51, que representa un sistema lineal de m ecuaciones con otras tantas incógnitas. Aunque el vector \mathbf{q} tiene n componentes, hay que recordar que g de estas componentes son conocidas de antemano, puesto que representan la posición de los grados de libertad. Para comenzar el proceso iterativo necesitamos partir de una estimación de la solución \mathbf{q}_0 , suficientemente próxima a la solución real

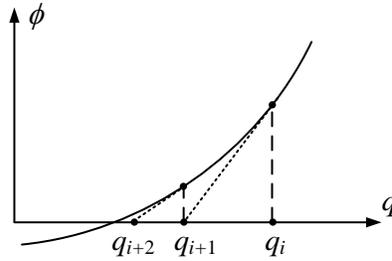


Figura 4.26

para que las sucesivas iteraciones converjan. Aunque no siempre es trivial, en la práctica la obtención de dicha estimación no suele representar una gran dificultad. El proceso iterativo termina cuando éste converge a una solución próxima a la real, lo que sucede cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas es menor que una tolerancia prefijada,

$$|\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i| < \epsilon \quad (4.52)$$

Se puede demostrar que el método de Newton Raphson goza de convergencia cuadrática en el entorno de la solución, lo que hace que habitualmente sean precisas muy pocas iteraciones hasta obtener la solución.

En el caso de una sola variable, la interpretación geométrica del método de Newton-Raphson se muestra en la figura 4.26. Como se puede ver, al linealizar la función no lineal estamos acercándonos a la solución por medio de las tangentes en las sucesivas soluciones parciales, cada vez más próximas a la solución verdadera. Lo que en el caso de una función de una variable es la pendiente de cada recta tangente, en el caso general de una función vectorial de varias variables es la matriz jacobiana. Entender bien esta interpretación permitirá descubrir posibles errores en la matriz jacobiana o en el vector de ecuaciones de restricción, a la vista del comportamiento del proceso iterativo.

Se denomina *simulación cinemática* a la resolución sucesiva del problema de posición para una determinada ley de movimiento de los grados de libertad $\mathbf{z}(t)$. Mediante ella, se pueden determinar trayectorias, curvaturas y se pueden generar animaciones en el computador. Puesto que la simulación cinemática requiere la resolución del problema de posición en múltiples etapas, la estimación inicial \mathbf{q}_0 requerida al comienzo de cada etapa se puede tomar como la solución final de la etapa anterior.

4.6.2. Problema de velocidad

El problema de velocidad consiste en determinar las velocidades $\dot{\mathbf{q}}$ de todas las variables del mecanismo, conocida su posición \mathbf{q} y la velocidad $\dot{\mathbf{z}}$ de los grados de libertad. Derivando la ecuación 4.48 mediante la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{q}, t) = \Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \mathbf{0} \quad (4.53)$$

donde Φ_t es la derivada parcial de las ecuaciones de restricción respecto al tiempo. En los casos vistos hasta el momento, esta derivada es nula pues las ecuaciones de restricción de sólido rígido, de par cinemático y de coordenada relativa son independientes del tiempo. Sin embargo, en otros casos este término puede ser no nulo. Despejando en la ecuación anterior:

$$\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t \quad (4.54)$$

Aparentemente, la ecuación 4.54 representa un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas, pero hay que recordar que las velocidades de los grados de libertad son conocidas. El valor de dichas velocidades conocidas se puede incluir añadiendo g filas triviales al sistema de ecuaciones, cada una de las cuales especifique el valor de la velocidad de un grado de libertad. Este punto se aclarará en un ejemplo posterior.

4.6.3. Problema de aceleración

En el problema de aceleración se tratan de determinar las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$ de todas las variables del mecanismo, conocida la posición \mathbf{q} , la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$, y las aceleraciones de los grados de libertad $\ddot{\mathbf{z}}$. Derivando respecto al tiempo la ecuación de velocidades 4.53, se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi(\mathbf{q}, t) = \Phi_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \ddot{\Phi}_t = \mathbf{0} \quad (4.55)$$

Reordenando los términos, se puede escribir

$$\Phi_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} - \ddot{\Phi}_t \quad (4.56)$$

El miembro de la derecha es conocido en función de la posición, la velocidad y el tiempo. Como en el problema de velocidad, se ha obtenido un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, en el que se conocen las aceleraciones de los grados de libertad. Dichas aceleraciones conocidas se pueden introducir mediante g ecuaciones adicionales, cada una de las cuales especifique el valor de la aceleración de un grado de libertad.

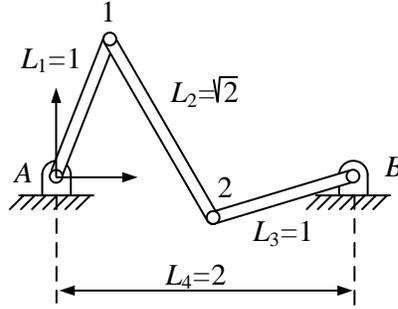


Figura 4.27

Ejemplo 4.2 Apliquemos las expresiones recién estudiadas al análisis cinemático del cuadrilátero articulado de la figura 4.27. El mecanismo está compuesto por barras de longitudes $L_1 = 1$, $L_2 = \sqrt{2}$, $L_3 = 1$, $L_4 = 2$, y ha sido modelizado empleando las cuatro coordenadas $\mathbf{q}^T = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$. Los dos puntos fijos A y B no son incógnitas, ya que sus coordenadas son fijas y valen $x_A = y_A = y_B = 0$, $x_B = 2$. El mecanismo tiene un único grado de libertad, cuya variable podemos escoger entre las componentes de \mathbf{q} . En este caso, tomamos $z = \{x_1\}$. Las tres ecuaciones de restricción son:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 \\ (x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 - L_3^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

La matriz jacobiana se obtiene tomando derivadas parciales de las tres ecuaciones respecto de las cuatro variables:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ \hline 0 & 0 & 2(x_2 - x_B) & 2(y_2 - y_B) \end{array} \right]$$

Resolvamos en primer lugar el problema de posición para $z = x_1 = 0$. Se ve con facilidad que cuando $x_1 = 0$, la coordenada y_1 deberá tomar el valor 1, pues la longitud de la barra vale $L_1 = 1$. Sin embargo, no conocemos la posición del punto 2, que es precisamente lo que se desea hallar. Para comenzar el proceso iterativo, tomemos arbitrariamente como primera estimación de la solución la siguiente:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ x_{20} \\ y_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0,3 \end{Bmatrix}$$

Comenzamos a iterar empleando la expresión 4.51, particularizada para $i = 0$,

$$\Phi_q(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) = -\Phi(\mathbf{q}_0)$$

y desarrollando,

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1,4 & 2 & -1,4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0,6 \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_{1(1)} - 0 \\ y_{1(1)} - 1 \\ x_{2(1)} - 1 \\ y_{2(1)} - 0,3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (0-0)^2 + (1-0)^2 - 1 \\ (1-0)^2 + (0,3-1)^2 - 2 \\ (1-2)^2 + (0,3-0)^2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 0,00 \\ -0,51 \\ 0,09 \end{pmatrix}$$

Aparentemente, se trata de un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, pero en realidad x_1 es un dato de partida, por lo que su valor debe permanecer fijo e igual a cero, o lo que es lo mismo, $x_{1(1)} = 0$. Dicha ecuación se puede añadir a nuestro sistema en forma de fila adicional, y se obtiene el siguiente sistema ampliado:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1,4 & 2 & -1,4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0,6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_{1(1)} - 0 \\ y_{1(1)} - 1 \\ x_{2(1)} - 1 \\ y_{2(1)} - 0,3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,00 \\ -0,51 \\ 0,09 \\ 0,00 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_{1(1)} \\ y_{1(1)} \\ x_{2(1)} \\ y_{2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 1,0000 \\ 0,8875 \\ -0,2250 \end{pmatrix}$$

Una vez que disponemos de una nueva aproximación de la posición, podemos realizar la segunda iteración:

$$\Phi_q(\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = -\Phi(\mathbf{q}_1)$$

Sustituyendo, se obtiene.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 2,45 & -1,775 & 2,45 & 1,775 \\ \hline 0 & 0 & -2,225 & -0,45 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_{1(1)} - 0 \\ y_{1(1)} - 1 \\ x_{2(1)} - 0,8875 \\ y_{2(1)} - (-0,2250) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,2883 \\ 0,2883 \\ 0,0000 \end{pmatrix}$$

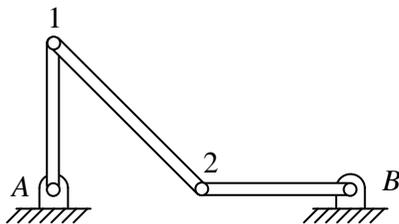


Figura 4.28

Resolviendo de nuevo, tenemos

$$\begin{Bmatrix} x_{1(2)} \\ y_{1(2)} \\ x_{2(2)} \\ y_{2(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00000 \\ 1,00000 \\ 0,97975 \\ -0,04050 \end{Bmatrix}$$

Y así, sucesivamente, podemos continuar el proceso iterativo. Las dos siguientes iteraciones, cuyas soluciones se indican, muestran una rápida convergencia hacia la solución exacta:

$$\begin{Bmatrix} x_{1(3)} \\ y_{1(3)} \\ x_{2(3)} \\ y_{2(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00000 \\ 1,00000 \\ 0,99907 \\ -0,00186 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_{1(4)} \\ y_{1(4)} \\ x_{2(4)} \\ y_{2(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00000 \\ 1,00000 \\ 0,99999 \\ -0,00004 \end{Bmatrix}$$

Como se comprueba fácilmente, la solución exacta es $x_2 = 1$, $y_2 = 0$, que corresponde a la posición mostrada en la figura 4.28.

Una vez conocida la posición exacta, resolvamos ahora el problema de velocidades instantáneo, con $\dot{\mathbf{z}} = \dot{x}_1 = 1$, lo que equivale a tomar la barra $\overline{A1}$ como elemento de entrada, con velocidad angular $\omega = 1$. Aplicando la ecuación 4.53 con $\Phi_t = \mathbf{0}$, ampliada con el dato conocido $\dot{x}_1 = 1$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

solución que fácilmente podemos verificar por métodos analíticos empleando el cinema de velocidades.

Y para concluir, resolvamos el problema de aceleraciones para la posición y velocidad anteriores y para la aceleración $\ddot{z} = \ddot{x}_1 = 3$. Basándonos en la ecuación 4.56, ampliada con el dato conocido $\ddot{x}_1 = 3$, se obtiene

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ -2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 - 2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \\ -2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

4.7. Mecanismos sobredeterminados

En ocasiones, al generar las ecuaciones de restricción de un mecanismo resulta que $m > n - g$, es decir, el número de ecuaciones de restricción es superior al teóricamente necesario. Una primera causa del exceso de ecuaciones es la simple comodidad del analista, cuando no es evidente seleccionar las ecuaciones mínimas necesarias de entre varias posibles. Para evitar la tarea de comprobar continuamente si las dos ecuaciones seleccionadas son apropiadas e independientes, se puede optar por incluir todas las posibles ecuaciones al mismo tiempo. Por ejemplo, se ha visto en el caso plano que por cada coordenada relativa de ángulo o distancia es preciso introducir una nueva ecuación de restricción de entre dos posibles. En vez de escoger en cada caso la ecuación apropiada, es más sencillo introducir siempre las dos.

Un segundo origen de redundancia se da en los mecanismos que poseen más grados de libertad que los predichos por el criterio de Grübler. Estos mecanismos obtienen su capacidad de movimiento de una configuración

geométrica particular, y no de la proporción entre el número de elementos y pares cinemáticos. En estos casos, la redundancia en las ecuaciones de restricción es intrínseca, pues procede de la propia naturaleza del mecanismo.

Lógicamente, la presencia de ecuaciones redundantes no debe afectar a la solución puesto que todas las ecuaciones son compatibles, es decir, unas filas son combinación lineal de otras. Para resolver un sistema de esta naturaleza podemos emplear diversas técnicas algebraicas. Por ejemplo, podemos emplear el pivotamiento para permutar el orden de las filas, seleccionar las mejor condicionadas y eliminar las redundantes. O bien, podemos emplear la técnica de los mínimos cuadrados para obtener la solución de mínimo error cuadrático. Ambos métodos se encuentran programados en Matlab y pueden emplearse sin mayores complicaciones.

4.8. Determinación numérica del número de grados de libertad

Se ha visto en un capítulo precedente la forma de obtener el número de grados de libertad mediante el criterio de Grübler, empleando exclusivamente información estructural acerca del número de elementos y el número y tipo de pares. Como se recordará, la principal limitación del método proviene de no tomar en cuenta las magnitudes geométricas, por lo que el número de grados de libertad obtenido para un mecanismo particular coincide con el correspondiente a toda la familia de mecanismos estructuralmente similares, lo cual es incorrecto en configuraciones geométricas particulares.

Con las herramientas numéricas que se han desarrollado en los apartados precedentes se está en condiciones de abordar de forma completamente general la determinación exacta del número de grados de libertad de un mecanismo. Como sabemos, el número de grados de libertad es una magnitud constante en el tiempo e independiente de la posición. Si el mecanismo ha sido modelizado mediante las n coordenadas naturales contenidas en el vector \mathbf{q} , existen m ecuaciones de restricción que las relacionen entre sí y que constituyen el sistema de m ecuaciones $\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, cuya matriz jacobiana $\Phi_{\mathbf{q}}$, de tamaño $m \times n$ regula los problemas de posición, velocidad y aceleración descritos por las ecuaciones 4.51, 4.54 y 4.56, que escribimos de forma genérica

$$\Phi_{\mathbf{q}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.57}$$

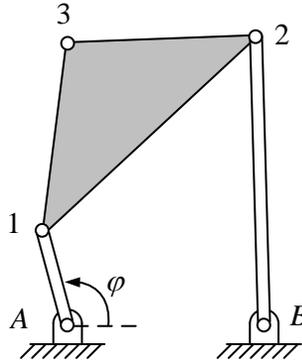


Figura 4.29

Para que dicho sistema rectangular de m ecuaciones y n incógnitas tenga solución única, es preciso conocer algunas de las componentes del vector de soluciones pues, de lo contrario, el sistema quedaría indeterminado. ¿Cuántas componentes se necesitan conocer?: tantas como filas haya que añadir para que el sistema de ecuaciones sea resoluble. Observemos que este concepto algebraico de “componentes que necesitamos conocer” coincide con el de “número de grados de libertad”, definido como el número mínimo de parámetros que especifican el movimiento del mecanismo.

Si consideramos la posibilidad de que algunas de las filas de $\Phi_{\mathbf{q}}$ sean linealmente dependientes, el número de filas independientes es el rango de la matriz. Entonces, el número de componentes que hay que añadir es igual al número n de incógnitas menos el rango de la matriz. Por tanto, el número de grados de libertad se puede expresar como

$$g = n - \text{rango}(\Phi_{\mathbf{q}}) \quad (4.58)$$

A diferencia del criterio de Grübler, esta ecuación emplea datos exclusivamente numéricos por lo que su resultado es completamente general.

4.9. Empleo de Matlab para resolver los problemas cinemáticos

El programa Matlab es una herramienta excepcionalmente útil para plantear y resolver los problemas cinemáticos de posición, velocidad y aceleración. En este apartado describiremos un sencillo ejemplo, que puede facilitar la resolución de otros problemas si se emplea como plantilla.

Consideramos un cuadrilátero articulado compuesto por los tres elementos de la figura 4.29. El mecanismo se modeliza mediante dos puntos fijos A y B , y mediante tres puntos móviles 1, 2 y 3 y el ángulo φ . Las longitudes de las barras son $L_{1A} = 1$, $L_{12} = 3$, $L_{13} = 2$, $L_{23} = 2$, $L_{2B} = 3$, $L_{AB} = 2$. Deseamos calcular la posición, velocidad y aceleración del punto 3 en una revolución completa del ángulo φ , que cumple la ley de movimiento $\varphi = 2\pi t$. Asimismo, deseamos realizar una animación del mecanismo que nos permita ver el movimiento de forma directa e intuitiva.

Comenzamos incluyendo las tres funciones principales del programa: ProbPosicion, ProbVelocidad y ProbAceleracion.

ProbPosicion.m

```
%Resuelve el problema de posición
function q = ProbPosicion

global q angDato;

%Inicializa las variables
error = 1e10;
epsilon = 1e-10;
deltaQ = zeros(7,1);
fi = zeros(7,1);

%Bucle hasta que el error sea menor que la tolerancia
while (error > epsilon),
    %Extrae las coordenadas
    x1=q(1); y1=q(2); x2=q(3); y2=q(4);
    x3=q(5); y3=q(6); ang=q(7);

    %Calcula los residuos
    fi(1)= x1^2+y1^2-1;
    fi(2)=(x2-x1)^2+(y2-y1)^2-9;
    fi(3)=(x3-x1)^2+(y3-y1)^2-4;
    fi(4)=(x2-x3)^2+(y2-y3)^2-4;
    fi(5)=(x2-2)^2+y2^2-9;
    fi(6)= x1-cos(ang);
    fi(7)= y1-sin(ang);
    fi(8)= ang - angDato;

    deltaQ =-Jacob\fi; %Calcula la variación de q
    q = q+deltaQ; %Actualiza las posiciones
    error = norm(deltaQ); %Calcula el error
end
```

ProbVelocidad.m

```
%Resuelve el problema de velocidad
function qp = ProbVelocidad

global q qp;

%Inicializa las variables
b = zeros(8,1);

b(8) = 2*3.141592;    %Introduce la velocidad del gdl
qp = Jacob\b;        %Calcula la variación de q
```

ProbAceleracion.m

```
%Resuelve el problema de aceleración
function qpp = ProbAceleracion
global q qp qpp

%Inicializa las variables
b =zeros(8,1);

%Extrae las velocidades
x1p=qp(1); y1p=qp(2);
x2p=qp(3); y2p=qp(4);
x3p=qp(5); y3p=qp(6);
angp=qp(7);ang=q(7) ;

%Calcula el producto fiqp*qp
b(1) = 2*x1p^2      + 2*y1p^2;
b(2) = 2*(x2p-x1p)^2 + 2*(y2p-y1p)^2;
b(3) = 2*(x3p-x1p)^2 + 2*(y3p-y1p)^2;
b(4) = 2*(x2p-x3p)^2 + 2*(y2p-y3p)^2;
b(5) = 2*x2p^2      + 2*y2p^2;
b(6) = cos(ang)*angp^2;
b(7) = sin(ang)*angp^2;
b(8) = 0;

%Resuelve el sistema
qpp=-Jacob\b;          %Calcula la aceleración
```

Las tres funciones anteriores constituyen el armazón fundamental del programa, aunque todavía se necesitan otras tres funciones más. La función **Jacob** se encarga de calcular la matriz jacobiana. La función **DibujaMecanismo** se encarga de la representación gráfica del cuadrilátero articulado y se utiliza para la animación del movimiento. Finalmente, la función principal **Main** organiza el resto de las funciones y controla el bucle de tiempos.

Jacob.m

```

% Calcula la matriz jacobiana
function jac = Jacob

global q;

%Inicializa a cero la matriz jacobiana
jac=zeros(8,7);

%Extrae las coordenadas
x1=q(1); y1=q(2); x2=q(3); y2=q(4);
x3=q(5); y3=q(6); ang=q(7);

%Monta la matriz jacobiana
jac(1,1)= 2*x1      ; jac(1,2)= 2*y1      ;
jac(2,1)=-2*(x2-x1) ; jac(2,2)=-2*(y2-y1);
jac(2,3)= 2*(x2-x1) ; jac(2,4)= 2*(y2-y1);
jac(3,1)=-2*(x3-x1) ; jac(3,2)=-2*(y3-y1);
jac(3,5)= 2*(x3-x1) ; jac(3,6)= 2*(y3-y1);
jac(4,3)= 2*(x2-x3) ; jac(4,4)= 2*(y2-y3);
jac(4,5)=-2*(x2-x3) ; jac(4,6)=-2*(y2-y3);
jac(5,3)= 2*(x2-2)  ; jac(5,4)= 2*y2      ;
jac(6,1)=1          ; jac(6,7)= sin(ang)  ;
jac(7,2)=1          ; jac(7,7)=-cos(ang) ;
jac(8,7)=1;

```

DibujaMecanismo.m

```

%Dibuja el mecanismo
function DibujaMecanismo
global q;

%Limpia la pantalla
cla;

%Extrae los 3 puntos móviles del cuadrilátero
x1=q(1); y1=q(2); x2=q(3); y2=q(4);
x3=q(5); y3=q(6);

%Dibuja el triángulo del acoplador en rojo
fill([x1,x3,x2],[y1,y3,y2],'r');

%Dibuja tres barras móviles entre las cuatro articulaciones
line([0,x1,x2,2],[0,y1,y2,0],'linewidth',3);

%Vacía el buffer de dibujo
drawnow;

```

Main.m

```

%Programa principal

%Limpia la memoria
clear;

%Inicializa variables q, qp (=q_prima) y qpp (=q_segunda)
global q qp qpp
q=zeros(7,1); qp=zeros(7,1); qpp=zeros(7,1);

%Valor inicial de las coordenadas x1, y1, x2, y2, x3, y3, ang
q(1)=1; q(2)=0; q(3)=3; q(4)=1; q(5)=1.5; q(6)=3; q(7)=0;

%Establece el número de incrementos para 360° o 1 seg
numIncr=500;

%Inicializa las variables q(t), q_prima(t) y q_segunda(t)
q_t =zeros(7,numIncr+1);
qp_t =zeros(7,numIncr+1);
qpp_t =zeros(7,numIncr+1);

%Crea la figura que contendrá la animación
fig1=figure(1);
hold on;
axis([-2,5,-2,4]); %Establece los límites [xmin,xmax,ymin,ymax]
axis manual; %Congela los límites anteriores
axis off %Elimina el dibujo de los ejes

%Bucle de animación
global angDato;
for i=0:numIncr
    angDato=2*pi*(i/numIncr);
    q = ProbPosicion;
    qp = ProbVelocidad;
    qpp = ProbAceleracion;
    DibujaMecanismo;

    %Almacena información
    q_t (:,i+1)=q;
    qp_t (:,i+1)=qp;
    qpp_t (:,i+1)=qpp;
end

%Crea la figura con los plots del punto 3
fig2=figure(2);

%Plot de x3, y3

```

```

subplot(3,2,1); plot(q_t(7,:),q_t(5,:)); xlabel('\xi'); ylabel('x3');
subplot(3,2,2); plot(q_t(7,:),q_t(6,:)); xlabel('\xi'); ylabel('y3');

%Plot de x3_prima, y3_prima
subplot(3,2,3); plot(q_t(7,:),qp_t(5,:)); xlabel('\xi'); ylabel('xp3');
subplot(3,2,4); plot(q_t(7,:),qp_t(6,:)); xlabel('\xi'); ylabel('yp3');

%Plot de x3_segunda, y3_segunda
subplot(3,2,5); plot(q_t(7,:),qpp_t(5,:)); xlabel('\xi'); ylabel('xpp3');
subplot(3,2,6); plot(q_t(7,:),qpp_t(6,:)); xlabel('\xi'); ylabel('ypp3');

```

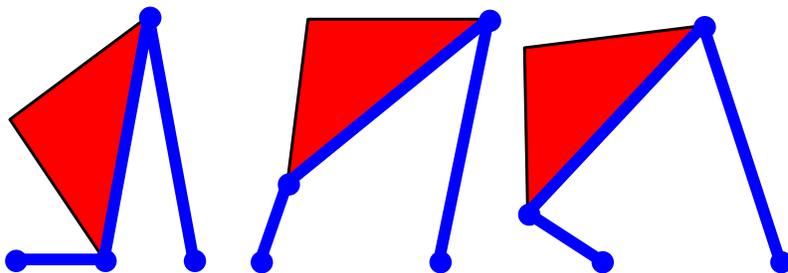


Figura 4.30

El resultado obtenido al ejecutar el programa se puede ver en las dos figuras 4.30 y 4.31. La primera muestra tres capturas de pantalla durante la animación del movimiento. En la segunda se muestran las gráficas con la evolución de x_3 , y_3 , \dot{x}_3 , \dot{y}_3 , \ddot{x}_3 , \ddot{y}_3 con respecto al ángulo φ .

4.10. Problemas

Prob. 4.1 Modelizar con coordenadas naturales y escribir las ecuaciones de restricción de los mecanismos mostrados en la figuras 4.32-4.39:

Prob. 4.2 Para el cuadrilátero articulado de la figura 4.40, resolver el problema instantáneo de velocidades en la posición indicada para la velocidad $\dot{\varphi} = 1$ rad/s. Datos: $x_A = 0$, $y_A = 0$, $x_B = 7$, $y_B = 0$, $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$.

Prob. 4.3 Hallar la velocidad y aceleración instantáneas del punto 2 del mecanismo de la figura 4.41 para las velocidades y aceleraciones conocidas $\dot{y}_1 = \dot{x}_3 = 1$, $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_3 = 1$.

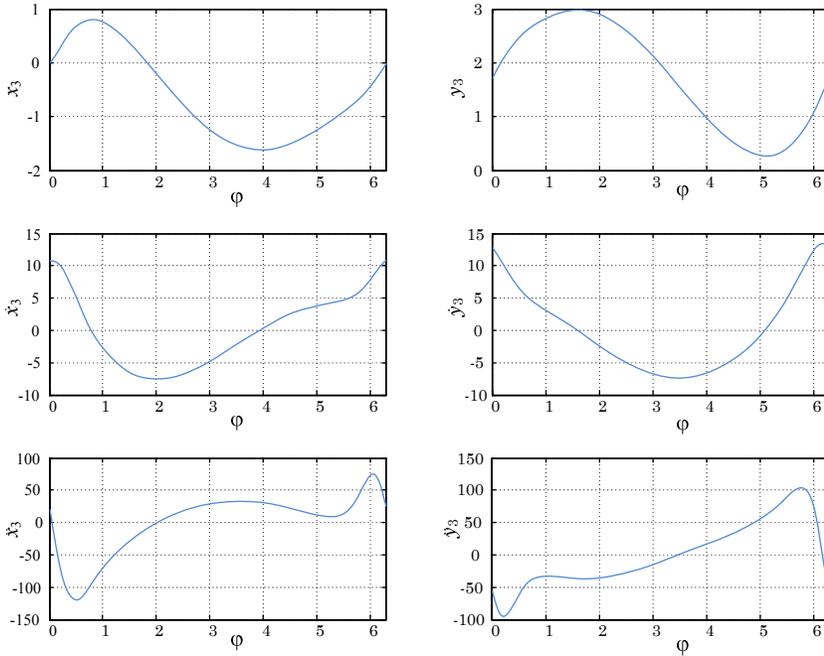


Figura 4.31

Prob. 4.4 En el mecanismo de la figura 4.42, calcular el valor instantáneo de ω_1 sabiendo que $\omega_2 = 1$ rad/s. Dato: $\overline{B1} = 2$.

Prob. 4.5 Los problemas de hilos inextensibles se pueden estudiar con las coordenadas naturales. Para ello, basta con introducir dos coordenadas relativas de distancia variable s_1, s_2 en cada una de las mitades en que la polea divide al hilo y, después, imponer la ecuación de restricción $s_1 + s_2 = k$. En el problema de la figura 4.43, obtener la velocidad instantánea del punto 1 cuando el punto 2 tiene velocidad $v = 2$ m/s.

Prob. 4.6 Se va a emplear un cable inextensible de longitud $L = 3\sqrt{2}$ para suspender la carga de la figura 4.44. Los extremos del cable se amarran a los puntos fijos A y B , mientras que en el cable se introduce la anilla 1, de la que cuelga la carga propiamente dicha. Deslizándose la anilla a izquierda o derecha se logra desplazar la carga, situando la coordenada x_1 en cualquier punto del intervalo $[x_A, x_B]$. Se quieren emplear las coordenadas naturales $\mathbf{q}^T = \{x_1, y_1, s_1, s_2\}$ para resolver el problema de posición. Para la posición conocida $x_1 = 1$, y tomando como estimación inicial de la solución $\mathbf{q}(0)$

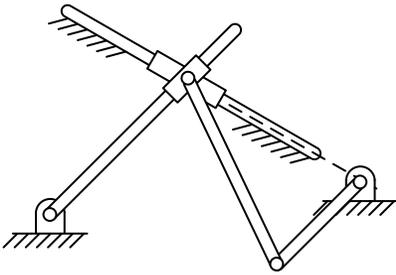


Figura 4.32

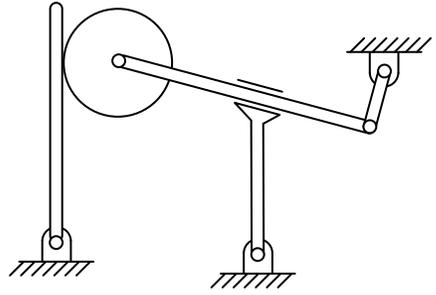


Figura 4.33

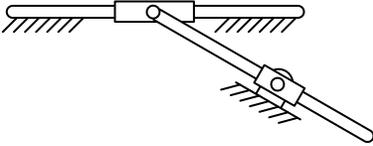


Figura 4.34

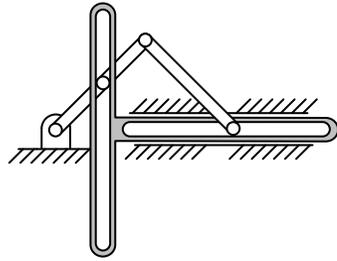


Figura 4.35

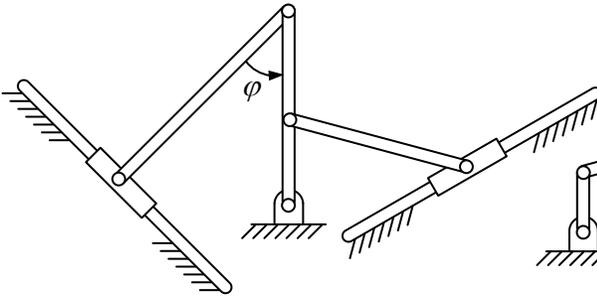


Figura 4.36

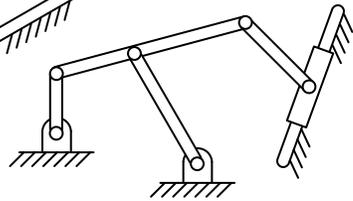


Figura 4.37

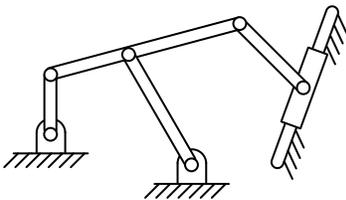


Figura 4.38

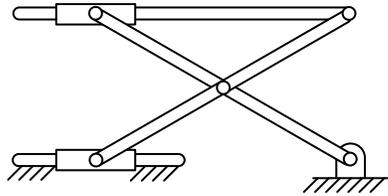


Figura 4.39

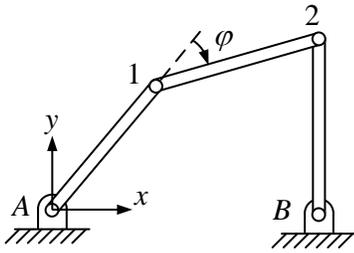


Figura 4.40

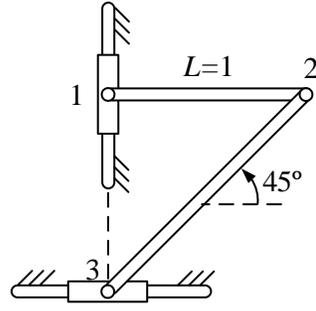


Figura 4.41

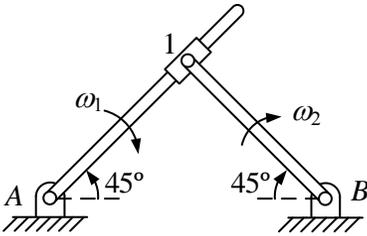


Figura 4.42

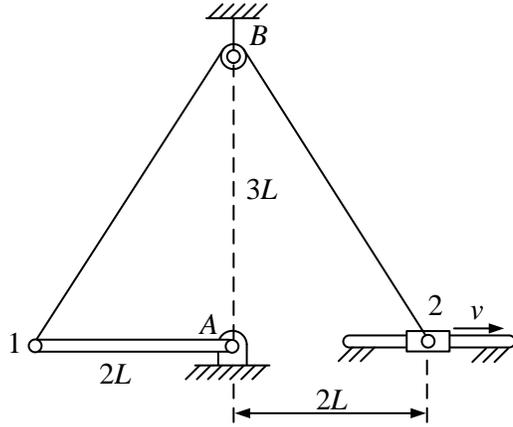


Figura 4.43

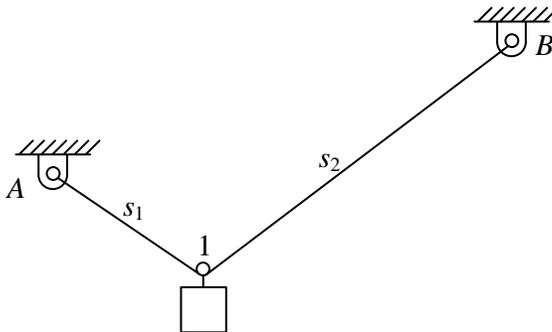


Figura 4.44

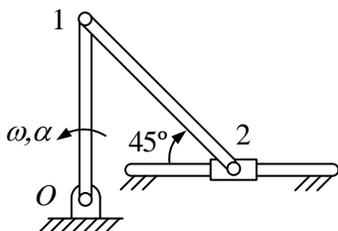


Figura 4.45

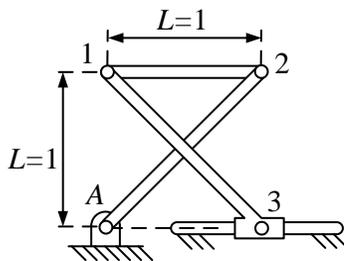


Figura 4.46

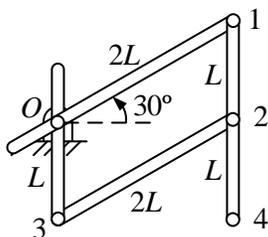


Figura 4.47

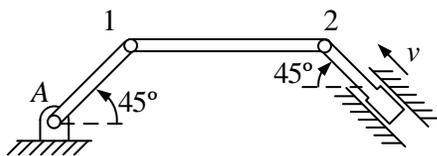


Figura 4.48

la indicada, realizar una iteración mediante el método de la tangente para obtener una aproximación mejor de la solución $\mathbf{q}(1)$. Datos: $x_A = 0$, $y_A = 0$, $x_B = 3$, $y_B = 1$, $x_{10} = 1$, $y_{10} = -2$, $s_{10} = \sqrt{2}$, $s_{20} = 2\sqrt{2}$.

Prob. 4.7 Hallar la velocidad y aceleración instantáneas del punto 2 de la figura 4.45, tomando como dato la velocidad de entrada $\omega = 2$ rad/s y $\alpha = 1$ rad/s². Datos: $\overline{O1} = 50$ cm, $\overline{12} = 30\sqrt{2}$ cm.

Prob. 4.8 El mecanismo de la figura 4.46 consta de tres elementos móviles unidos mediante tres articulaciones simples y una deslizadera rígida. Sabiendo que la velocidad de la deslizadera 3 es $\dot{x}_3 = 3$ m/s y su aceleración $\ddot{x}_3 = 0$, calcular las velocidades y aceleraciones instantáneas de los puntos 1 y 2.

Prob. 4.9 El mecanismo de dos grados de libertad de la figura 4.47 consta de cuatro barras $\overline{O1}$, $\overline{124}$, $\overline{23}$ y $\overline{O3}$. Si se desea que el punto 4 se mueva con velocidad constante $v_4 = 3$ m/s en dirección vertical, calcular las velocidades y aceleraciones instantáneas de los puntos 1, 2 y 3.

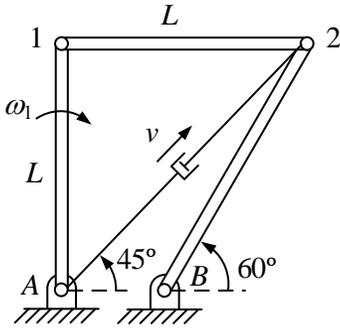


Figura 4.49

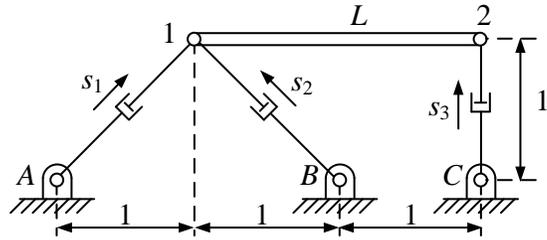


Figura 4.50

Prob. 4.10 El mecanismo de la figura 4.48 consta de dos elementos rígidos de longitudes $L_{A1} = \sqrt{2}$ y $L_{12} = 2$, y de un pistón-actuador. Resolver el problema de velocidades para la velocidad del pistón $v = \sqrt{2}$ m/s.

Prob. 4.11 Determinar la velocidad angular instantánea ω_1 del mecanismo de la figura 4.49 sabiendo que el actuador hidráulico se alarga con velocidad lineal v .

Prob. 4.12 El mecanismo de la figura 4.50 se mueve por medio de tres actuadores lineales definidos mediante coordenadas relativas s_1, s_2, s_3 . Sabiendo que las velocidades instantáneas de los actuadores son $\dot{s}_1 = \dot{s}_3 = 3$ y $\dot{s}_2 = 1$, hallar las velocidades instantáneas de los puntos 1 y 2.

Capítulo 5

Análisis dinámico por métodos numéricos

5.1. Introducción

Por medio del análisis dinámico tratamos de encontrar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un mecanismo como consecuencia de su velocidad inicial o de las fuerzas exteriores. La Mecánica Clásica proporciona diversos caminos para obtener dichas ecuaciones: aislando cada elemento y aplicándoles las ecuaciones de Newton-Euler, mediante las ecuaciones de Lagrange o empleando el Teorema de los Trabajos Virtuales. Cualquiera que sea el camino seguido, el resultado es un conjunto de tantas ecuaciones diferenciales ordinarias como grados de libertad.

El empleo de las coordenadas naturales no introduce ninguna variación conceptual respecto de los procedimientos ya conocidos. Simplemente aporta un soporte matemático adecuado para dar a los procedimientos un enfoque general y sistemático. Gracias a las coordenadas naturales podremos desarrollar las ecuaciones del movimiento de cualquier sistema mecánico, sin importar su número de elementos, pares y grados de libertad. Como veremos, para obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento necesitaremos recurrir a las resoluciones de los problemas cinemáticos, vistos en el capítulo anterior. Asimismo, necesitaremos presentar algunos conceptos sobre la integración numérica de ecuaciones diferenciales.

La resolución del análisis dinámico nos proporciona la trayectoria de los grados de libertad $\mathbf{z}(t)$. Para determinar las reacciones en los pares recurriremos al método de los *multiplicadores de Lagrange*, un método empleado tradicionalmente en la minimización de funciones sujetas a restricciones,

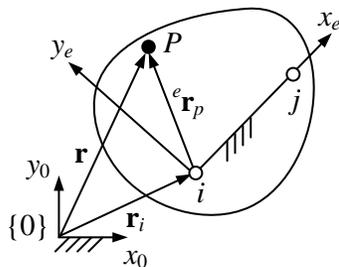


Figura 5.1

que en este caso proporcionará la forma de asociar las fuerzas interiores a las ecuaciones de restricción.

5.2. Fuerzas de inercia de un elemento

Partimos de un sólido definido mediante dos puntos i y j . Además del sistema de referencia fijo $\{0\}$, definimos un sistema de referencia $\{e\}$, cuyo origen se encuentra en el punto i y cuyo eje x_e atraviesa el punto j . Denominamos \mathbf{A}_e a la matriz de cambio de base entre los sistemas de referencia $\{e\}$ y $\{0\}$.

Tratemos de escribir las coordenadas de una partícula material de masa dm situada en el punto P , en función de las coordenadas de los puntos i y j . Para ello, llamando ${}^e \mathbf{r}_P$ a las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $\{e\}$, podemos escribir

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_e {}^e \mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{L_{ij}} \begin{bmatrix} (x_j - x_i) & -(y_j - y_i) \\ (y_j - y_i) & (x_j - x_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^e x_P \\ {}^e y_P \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Mediante una simple reordenación de términos, esta expresión se puede escribir en forma de producto de matriz por vector,

$$\mathbf{r} = \frac{1}{L_{ij}} \begin{bmatrix} L_{ij} - {}^e x_P & {}^e y_P & {}^e x_P & -{}^e y_P \\ -{}^e y_P & L_{ij} - {}^e x_P & {}^e y_P & {}^e x_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_P \mathbf{q}_e \quad (5.2)$$

donde \mathbf{T}_P es una matriz de tamaño 2×4 , constante en el tiempo, pero variable de una partícula a otra, y \mathbf{q}_e es el vector de coordenadas naturales del elemento.

Para calcular la aceleración del punto P , basta con derivar dos veces la ecuación anterior con respecto al tiempo, obteniendo

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T}_P \ddot{\mathbf{q}}_e \quad (5.3)$$

También podemos calcular el desplazamiento virtual del punto P empleando el operador virtual δ sobre la ecuación 5.2,

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{T}_P \delta \mathbf{q}_e \quad (5.4)$$

La fuerza de la inercia de la partícula P es sencillamente $-\ddot{\mathbf{r}}dm$. El trabajo virtual δW_P producido en un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}$ del punto P se calculará mediante el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, obteniendo

$$\delta W_P = -\delta \mathbf{r}^T \ddot{\mathbf{r}} dm = -\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{T}_P^T \mathbf{T}_P \ddot{\mathbf{q}}_e dm \quad (5.5)$$

Para calcular el trabajo virtual de todo el elemento, deberemos sumar los trabajos virtuales de todas las partículas del volumen V del sólido, mediante la integral

$$\delta W_{iner}^e = \int_V \delta W_P = - \int_V \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{T}_P^T \mathbf{T}_P \ddot{\mathbf{q}}_e dm \quad (5.6)$$

En esta ecuación los términos $\delta \mathbf{q}_e$ y $\ddot{\mathbf{q}}_e$ no varían de una partícula a otra, pues contienen las coordenadas de los puntos i y j , por lo que podemos sacarlos fuera de la integral,

$$\delta W_{iner}^e = -\delta \mathbf{q}_e^T \left(\int_V \mathbf{T}_P^T \mathbf{T}_P dm \right) \ddot{\mathbf{q}}_e \quad (5.7)$$

El paréntesis representa una matriz simétrica de tamaño 4×4 , que multiplica al vector $\ddot{\mathbf{q}}_e$. El resultado de dicho producto es un vector de 4×1 que expresa las fuerzas de inercia del elemento mediante las coordenadas naturales. Por el sentido físico del paréntesis, que es el de una masa, recibe el nombre de matriz de masas del elemento, que denominaremos \mathbf{M}_e , y cuya expresión es

$$\mathbf{M}_e = \int_V \mathbf{T}_P^T \mathbf{T}_P dm \quad (5.8)$$

Con la ayuda de la ecuación 5.2, que contiene la expresión explícita de la matriz \mathbf{T}_P , podemos expandir la ecuación anterior y obtener la expresión



Figura 5.2

explícita de la matriz de masas del elemento. Operando y realizando algunas simplificaciones que omitimos, se obtiene finalmente:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} M + a - 2b_x & 0 & b_x - a & -b_y \\ & M + a - 2b_x & b_y & b_x - a \\ & & a & 0 \\ \text{sim.} & & & a \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

con

$$a = \frac{I_i}{L_{ij}^2} \quad b_x = \frac{M {}^e x_G}{L_{ij}} \quad b_y = \frac{M {}^e y_G}{L_{ij}} \quad (5.10)$$

$$M = \int_V dm \quad (5.11)$$

$$I_i = \int_V ({}^e x_P^2 + {}^e y_P^2) dm \quad (5.12)$$

$${}^e x_G = \frac{1}{M} \int_V {}^e x_P dm \quad {}^e y_G = \frac{1}{M} \int_V {}^e y_P dm \quad (5.13)$$

siendo L_{ij} la longitud entre los puntos i y j , M la masa del elemento, ${}^e x_G$, ${}^e y_G$ las coordenadas del centro de gravedad en el sistema de referencia $\{e\}$, e I_i el momento del inercia del elemento con respecto del punto i .

Finalmente, podemos escribir abreviadamente el trabajo virtual de las fuerzas de inercia de un elemento como

$$\delta W_{iner}^e = -\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e \quad (5.14)$$

Ejemplo 5.1 Calcular la matriz de masas \mathbf{M}_e del elemento de la figura 5.2, consistente en una barra de longitud L y masa M uniformemente distribuida, modelizada mediante dos puntos 1 y 2 situados en los extremos de la barra.

En primer lugar, situamos el sistema de referencia $\{e\}$ en el punto 1 y

dibujamos el eje x_e apuntando hacia el punto 2. En este caso:

$${}^e x_G = \frac{L}{2}$$

$${}^e y_G = 0$$

$$I_1 = \frac{ML^2}{3}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la expresión general de la matriz de masas 5.9, se obtiene:

$$\mathbf{M}_e = \frac{M}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5.3. Fuerzas de inercia de un mecanismo

Un mecanismo está compuesto por múltiples elementos unidos entre sí mediante pares cinemáticos. Para hallar el trabajo virtual de todas las fuerzas de inercia de un mecanismo durante un desplazamiento virtual arbitrario, podemos sumar le trabajo virtual de cada elemento, expresado en la ecuación 5.14,

$$\delta W_{iner} = \sum_e \delta W_{iner}^e = - \sum_e \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e \quad (5.15)$$

Esta ecuación contiene un sumatorio extendido a cada elemento del mecanismo en el que aparecen los vectores \mathbf{q}_e de coordenadas naturales de cada elemento. Mediante una simple reordenación algebraica de los términos, podemos transformar dicha ecuación, eliminando el sumatorio, para reescribir el trabajo virtual de las fuerzas de inercia en función del vector \mathbf{q} de coordenadas naturales de todo el mecanismo,

$$\delta W_{iner} = -\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (5.16)$$

El proceso de reordenación anterior se conoce comúnmente como *ensamblado* de la matriz de masas, y consiste en generar la matriz de masas del mecanismo a partir de las matrices de masas de los elementos que lo componen. Una justificación completamente general de este proceso conlleva cierta complejidad, por lo que se ha optado por explicarlo mediante ejemplos sencillos.

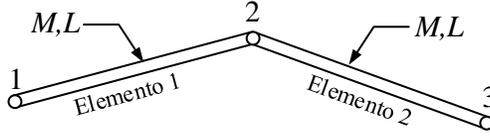


Figura 5.3

Comencemos con el mecanismo de la figura 5.3, compuesto por dos barras articuladas de longitud L y masa M uniformemente distribuida. El mecanismo se modeliza mediante los puntos 1, 2 y 3. Al elemento 1 le corresponden los puntos 1 y 2, mientras que al elemento 2 le corresponden los puntos 2 y 3.

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia del mecanismo es la suma de los trabajos virtuales de los dos elementos,

$$\begin{aligned}
 \delta W_{iner} &= \delta W_{iner}^1 + \delta W_{iner}^2 = \\
 &= \frac{M}{6} \left\{ \delta x_1 \delta y_1 \mid \delta x_2 \delta y_2 \right\} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \\
 &+ \frac{M}{6} \left\{ \delta x_2 \delta y_2 \mid \delta x_3 \delta y_3 \right\} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Podemos reescribir la ecuación empleando el vector \mathbf{r}_i para referirnos a las coordenadas x_i, y_i de los puntos 1 y 2, y empleando las submatrices \mathbf{M}_{ij}^e para referirnos a la partición 2×2 de la matriz de masas del elemento e correspondiente a la fila del punto i y la columna del punto j .

$$\begin{aligned}
 \delta W_{iner} &= \left\{ \delta \mathbf{r}_1^T \delta \mathbf{r}_2^T \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^1 & \mathbf{M}_{12}^1 \\ \mathbf{M}_{21}^1 & \mathbf{M}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 \end{Bmatrix} + \\
 &+ \left\{ \delta \mathbf{r}_2^T \delta \mathbf{r}_3^T \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^2 & \mathbf{M}_{23}^2 \\ \mathbf{M}_{32}^2 & \mathbf{M}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 \end{Bmatrix} = \\
 &= \delta \mathbf{r}_1^T (\mathbf{M}_{11}^1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{M}_{12}^1 \ddot{\mathbf{r}}_2) + \\
 &+ \delta \mathbf{r}_2^T (\mathbf{M}_{21}^1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{M}_{22}^1 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{M}_{22}^2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{M}_{23}^2 \ddot{\mathbf{r}}_3) + \\
 &+ \delta \mathbf{r}_3^T (\mathbf{M}_{32}^2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{M}_{33}^2 \ddot{\mathbf{r}}_3) \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

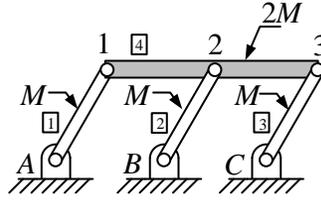


Figura 5.4

Finalmente, podemos reordenar todos los términos y escribir una ecuación en la que aparezca \mathbf{q} como único vector de coordenadas naturales,

$$\begin{aligned} \delta W_{iner} &= \{ \delta \mathbf{r}_1^T \delta \mathbf{r}_2^T \delta \mathbf{r}_3^T \} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{11}^1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{M}_{12}^1 \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \mathbf{M}_{21}^1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{M}_{22}^1 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{M}_{22}^2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{M}_{23}^2 \ddot{\mathbf{r}}_3 \\ \mathbf{M}_{32}^2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{M}_{33}^2 \ddot{\mathbf{r}}_3 \end{array} \right\} = \\ &= \{ \delta \mathbf{r}_1^T \delta \mathbf{r}_2^T \delta \mathbf{r}_3^T \} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{M}_{11}^1 & \mathbf{M}_{12}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21}^1 & \mathbf{M}_{22}^1 + \mathbf{M}_{22}^2 & \mathbf{M}_{23}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{32}^2 & \mathbf{M}_{33}^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 \end{array} \right\} = \\ &= \{ \delta \mathbf{r}_1^T \delta \mathbf{r}_2^T \delta \mathbf{r}_3^T \} \frac{M}{6} \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 \end{array} \right\} = \\ &= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Como se puede comprobar, la matriz de masas del mecanismo se ha obtenido *distribuyendo* las submatrices de cada punto en la matriz global del mecanismo. Cuando dos submatrices de elementos diferentes se superponen, por corresponderles la misma posición en la matriz de masas global, ambas submatrices se suman. El proceso puede generalizarse sin dificultad. Para calcular la matriz de masas de un mecanismo, se obtienen en primer lugar las matrices de masas de cada elemento, seguidamente se identifican las submatrices de cada punto y, finalmente, se ensamblan las submatrices en la matriz global, sumando aquéllas en las que se produzca superposición.

Ejemplo 5.2 *Calcular la matriz de masas del mecanismo de la figura 5.4, sabiendo que los cuatro elementos son barras de masa uniformemente distribuida.*

Puesto que los cuatro elementos tienen masa distribuida y están modelizados con puntos en sus extremos, se puede aplicar la expresión del ejemplo 5.1, obteniendo:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \quad 1 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ A \\ 1 \end{array} \\
 M_1 = \frac{M}{6}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} B \quad 2 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ B \\ 2 \end{array} \\
 M_2 = \frac{M}{6}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} C \quad 3 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ C \\ 3 \end{array} \\
 M_3 = \frac{M}{6}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ 1 \\ 3 \end{array} \\
 M_4 = \frac{M}{3}
 \end{array}$$

expresión en la que se indican el punto a que corresponden las filas y columnas.

El ensamblado de la matriz de masas requiere distribuir estas 16 submatrices en la matriz de masas global. Omitiendo las submatrices que corresponden a puntos fijos, resulta

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} M_{11}^1 + M_{11}^4 & \mathbf{0} & M_{13}^4 \\ \hline \mathbf{0} & M_{22}^2 & \mathbf{0} \\ \hline M_{31}^4 & \mathbf{0} & M_{33}^3 + M_{33}^4 \end{array} \right]$$

Y, operando, se obtiene finalmente

$$M = \frac{M}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right] \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Ejemplo 5.3 Calcular la matriz de masas del mecanismo biela-manivela de la figura 5.5, compuesto por tres elementos: la manivela (elemento 1) tiene forma circular de radio R y masa M uniformemente distribuida; la biela (elemento 2), es una barra de masa M uniformemente distribuida; la deslizadora (elemento 3) tiene masa M .

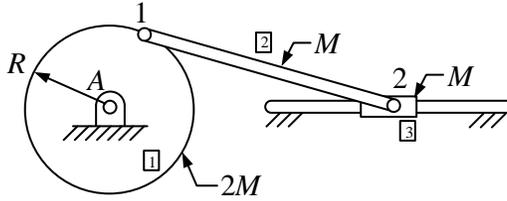


Figura 5.5

El vector de coordenadas naturales \mathbf{q} está compuesto por las cuatro coordenadas de los puntos 1 y 2, es decir, x_1, y_1, x_2, y_2 . Puesto que el mecanismo tiene un único grado de libertad, serán precisas tres ecuaciones de restricción: a) distancia constante entre los puntos A y 1; b) distancia constante entre los puntos 1 y 2; c) coordenada $y_2 = 0$.

Una opción alternativa consiste tomar un vector \mathbf{q} que sólo incluya las coordenadas x_1, y_1, x_2 , aprovechando que $y_2 = 0$, por lo que no constituye una incógnita. En este caso, será suficiente con imponer las dos primeras ecuaciones de restricción. Para obtener la matriz de masas adoptaremos esta elección de coordenadas, por lo que la matriz de masas M tendrá tamaño 3×3 . Las matrices de masas de los tres elementos son las siguientes:

$$\mathbf{M}_1 = M \begin{array}{c} A \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ 1 \end{array} \quad \mathbf{M}_2 = \frac{M}{6} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\mathbf{M}_3 = M \begin{array}{c} 2 \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \\ 2 \end{array}$$

La matriz \mathbf{M}_1 se obtiene particularizando para el elemento 1 la expresión general de la matriz de masas de la ecuación 5.9, con masa $2M$, longitud $L_{ij} = R$, momento de inercia $I_i = MR^2$, y posición del centro de gravedad ${}^e x_G = {}^e y_G = 0$. La matriz \mathbf{M}_3 es trivial, ya que el elemento 3 puede considerarse una masa puntual y el trabajo virtual de las fuerzas de inercia se escribe directamente como

$$\delta W_{iner}^3 = - \left\{ \delta x_2 \quad \delta y_2 \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{array} \right\}$$

Para ensamblar la matriz de masas del mecanismo, debemos distribuir

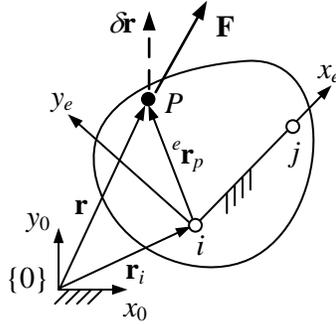


Figura 5.6

las submatrices correspondiente a las filas y columnas del vector \mathbf{q} . Operando, se obtiene

$$\mathbf{M} = \frac{M}{6} \left[\begin{array}{cc|c} x_1 & y_1 & x_2 \\ \hline 8 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \end{array}$$

5.4. Fuerzas exteriores puntuales

Consideramos una fuerza puntual \mathbf{F} actuando sobre una partícula material P del elemento e , como se muestra en la figura 5.6. El trabajo virtual producido por \mathbf{F} en un desplazamiento virtual arbitrario $\delta \mathbf{r}$ se obtiene mediante el producto escalar de los dos vectores,

$$\delta W_F = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{F} \quad (5.20)$$

Anteriormente, en la ecuación 5.4, hemos calculado el valor del desplazamiento $\delta \mathbf{r}$ en función de las coordenadas naturales del elemento \mathbf{q}_e . Sustituyendo,

$$\delta W_F = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{T}_P^T \mathbf{F} = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{Q}_F \quad (5.21)$$

donde el vector \mathbf{Q}_F se denomina fuerza generalizada, y de acuerdo con la ecuación 5.2, toma el valor

$$\mathbf{Q}_F = \mathbf{T}_P^T \mathbf{F} = \frac{1}{L_{ij}} \left[\begin{array}{cc|c} L_{ij} - {}^e x_P & -{}^e y_P & \\ \hline {}^e y_P & L_{ij} - {}^e x_P & \\ \hline {}^e x_P & {}^e y_P & \\ -{}^e y_P & {}^e x_P & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

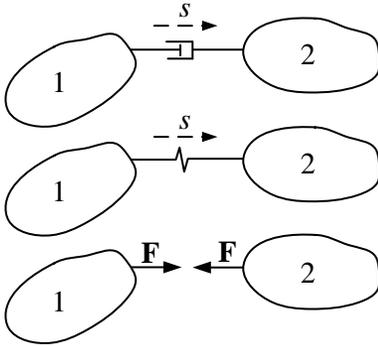


Figura 5.7

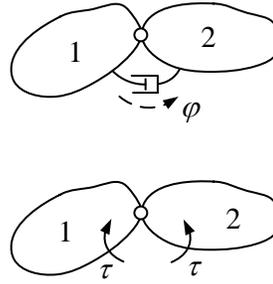


Figura 5.8

Un caso particular es la fuerza de la gravedad, en que la fuerza \mathbf{F} se encuentra aplicada en el centro de gravedad del elemento, y toma el valor

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Mg \end{Bmatrix} \tag{5.23}$$

También es frecuente el caso en que existan muelles o amortiguadores actuando en uno más de los elementos del mecanismo. Esta situación se puede tratar incluyendo fuerzas iguales y de signo opuesto, cada una actuando sobre uno de los extremos de los muelles o amortiguadores.

5.5. Fuerzas introducidas por los actuadores

La función de los actuadores es proporcionar fuerzas exteriores para gobernar el movimiento del mecanismo. Pueden ser de dos tipos: lineales o angulares. Los *actuadores lineales* introducen fuerzas F iguales y de signo opuesto entre sus dos puntos de anclaje, de forma análoga a los muelles (figura 5.7); a diferencia de éstos, que son elementos internos, los actuadores producen una fuerza generada por una fuente de energía externa, que produce una ley de control pre-establecida. Los *actuadores angulares* funcionan de forma análoga, pero en lugar de fuerzas introducen momentos τ , iguales y de signos opuestos entre dos elementos del mecanismo (figura 5.8).

Para calcular el trabajo virtual producido por F o τ , es recomendable definir coordenadas relativas lineales (s) o angulares (φ), según corresponda. En el caso del actuador lineal, el trabajo virtual se calcula como el producto del módulo de la fuerza F por el desplazamiento virtual de la

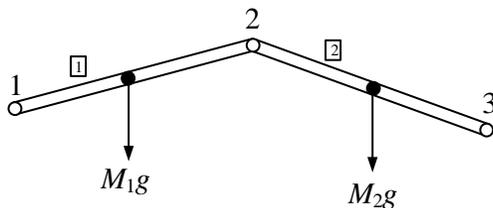


Figura 5.9

distancia s ,

$$\delta W_F = F \delta s \quad (5.24)$$

Por su parte, el trabajo virtual del actuador angular se obtiene mediante el producto del momento τ por el desplazamiento virtual del ángulo φ ,

$$\delta W_\tau = \tau \delta \varphi \quad (5.25)$$

5.6. Ensamblado del vector de fuerzas generalizadas

En un mecanismo pueden actuar numerosas fuerzas exteriores de los tipos descritos en los apartados anteriores. El trabajo virtual de todas ellas se calculará sumando los trabajos virtuales de cada una de las fuerzas. Análogamente a lo visto en el apartado 5.3 para las fuerzas de inercia, la suma de las fuerzas generalizadas es equivalente al ensamblado de los vectores particulares de cada fuerza generalizada para constituir un único vector \mathbf{Q} . Llamando n_F al número de fuerzas generalizadas exteriores, podemos escribir la expresión

$$\delta W_{F_{ext}} = \sum_{n_F} \delta W_F = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (5.26)$$

Para comprender mejor el proceso de ensamblado del vector \mathbf{Q} , recurrimos al ejemplo de la figura 5.9, compuesto por dos barras rígidas de masa M_1 y M_2 uniformemente distribuida, y articuladas en el punto 2. Puesto que los pesos actúan en los centros de gravedad de cada elemento, que

coinciden con los centros geométricos de las barras, se puede escribir

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{T}_P^T \mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -M_1g \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -M_1g/2 \\ 0 \\ -M_1g/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{T}_P^T \mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -M_2g \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -M_2g/2 \\ 0 \\ -M_2g/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \quad (5.28)$$

Ensamblando los dos vectores \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 en un único vector \mathbf{Q} de fuerzas generalizadas del mecanismo, se obtiene:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -M_1g/2 \\ 0 \\ -(M_1 + M_2)g/2 \\ 0 \\ -M_2g/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \quad (5.29)$$

Este proceso puede generalizarse fácilmente para cualquier tipo de fuerza exterior. El concepto es siempre el mismo: primero se forma el vector particular de cada fuerza generalizada, y después se ensamblan en el vector global, encajándolos en las posiciones correspondientes a las coordenadas afectadas. Cuando dos o más términos coincidan en una misma posición, se suman.

5.7. Ecuaciones del movimiento en coordenadas independientes

Del teorema de los trabajos virtuales sabemos que

$$\delta W_{iner} + \delta W_{ext} = 0 \quad (5.30)$$

En los apartados anteriores hemos calculado las expresiones de δW_{iner} y δW_{ext} en función del vector \mathbf{q} . Sustituyendo las expresiones 5.16 y 5.26, se obtiene

$$-\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} = 0 \quad (5.31)$$

Cambiando de signo y sacando factor común,

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = 0 \quad (5.32)$$

No podemos concluir que el paréntesis sea nulo, debido a que las componentes de \mathbf{q} son variables dependientes, relacionados entre sí por las ecuaciones de restricción. Para justificar esta afirmación, consideremos un ejemplo de dos dimensiones en que las ecuaciones anteriores se particularizan arbitrariamente con los siguientes valores:

$$\{\delta x \quad \delta y\} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (5.33)$$

y supongamos que las dos variables x , y están relacionadas mediante la ecuación

$$y = 2x \quad (5.34)$$

Precisamente porque esta relación existe, la ecuación 5.33 puede anularse sin necesidad de que el paréntesis sea nulo. Concretamente, cuando el paréntesis toma el valor $\{-2 \ 1\}^T$ o cualquier múltiplo de él, se verificará que

$$\{\delta x \quad \delta y\} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -2\delta x + \delta y = 0 \quad (5.35)$$

ecuación que siempre es nula en virtud de la relación 5.34.

A la vista de que no podemos eliminar los desplazamientos virtuales por no ser independientes, trataremos de reducir el número de variables hasta que su número coincida con el número de grados de libertad del mecanismo. Llamaremos \mathbf{z} al vector de coordenadas independientes, de dimensión $g \times 1$, obtenido extrayendo tantas componentes del vector \mathbf{q} como grados de libertad.

Conocido el vector \mathbf{z} podemos obtener el vector \mathbf{q} resolviendo el problema de posición. Por tanto, podemos pensar en \mathbf{q} como una función del vector \mathbf{z} , escribiendo

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad (5.36)$$

Derivando respecto al tiempo,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_g} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} \quad (5.37)$$

donde \mathbf{R} es una matriz de tamaño $n \times g$, y representa la matriz jacobiana de la función vectorial \mathbf{f} respecto de \mathbf{z} . La ecuación anterior demuestra que, para una posición dada, la relación existente entre $\dot{\mathbf{q}}$ y $\dot{\mathbf{z}}$ es lineal.

Sabemos que los desplazamientos virtuales satisfacen las mismas ecuaciones que las velocidades. Entonces, podemos escribir una ecuación análoga a la 5.37,

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{R} \delta \mathbf{z} \tag{5.38}$$

Sustituyendo en 5.32, se obtiene

$$\delta \mathbf{z}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = 0 \tag{5.39}$$

Pero en esta ecuación los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{z}$ son arbitrarios e independientes, por lo que debe cumplirse

$$\mathbf{R}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \tag{5.40}$$

o bien,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^T \mathbf{Q} \tag{5.41}$$

Ahora debemos sustituir el vector $\ddot{\mathbf{q}}$ por $\ddot{\mathbf{z}}$, y para ello derivamos la ecuación 5.37,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d(\mathbf{R}\dot{\mathbf{z}})}{dt} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \tag{5.42}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 5.41, se obtiene finalmente

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}} \tag{5.43}$$

Esta expresión representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, que rigen el movimiento del mecanismo. Las dimensiones de los distintos vectores y matrices se pueden apreciar de forma más intuitiva en la figura 5.10.

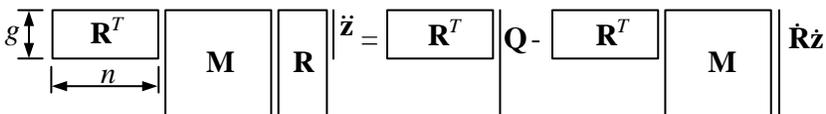


Figura 5.10

Ya hemos visto anteriormente cómo calcular la matriz de masas \mathbf{M} y el vector de fuerzas generalizadas \mathbf{Q} . Ahora veremos cómo calcular en la práctica la matriz \mathbf{R} y el vector $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$.

Para calcular la matriz \mathbf{R} recurrimos a la ecuación 5.37, que reproducimos a continuación,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \quad (5.44)$$

De entre todos los vectores $\dot{\mathbf{z}}$ posibles, escojamos arbitrariamente aquél que tiene todas sus componentes nulas, excepto la primera, que toma valor unidad, es decir, $\dot{\mathbf{z}} = \{1 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$. Con esta elección particular, podemos realizar el producto $\mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}$, indicando cada una de las g columnas de la matriz \mathbf{R} mediante un superíndice,

$$\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{R}^1 \mid \mathbf{R}^2 \mid \dots \mid \mathbf{R}^g] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{R}^1 \quad (5.45)$$

Podemos interpretar este resultado diciendo que \mathbf{R}^1 , primera columna de la matriz \mathbf{R} , es el vector $\dot{\mathbf{q}}$ correspondiente a las velocidades de los grados de libertad $\dot{\mathbf{z}} = \{1 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$. El proceso de calcular el vector $\dot{\mathbf{q}}$ para un vector $\dot{\mathbf{z}}$ dado constituye el *problema cinemático de velocidad*, cuya resolución ya se ha abordado.

El razonamiento anterior es fácilmente generalizable: para calcular \mathbf{R}^i , columna i de la matriz \mathbf{R} , deberemos resolver el problema de velocidad con un vector $\dot{\mathbf{z}}$ tal que $\dot{z}_i = 1$ y $\dot{z}_j = 0, \forall j \neq i$. Repitiendo g veces este proceso, se obtendrán todas las columnas de \mathbf{R} .

Para calcular el producto $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ recurrimos a la ecuación 5.42, que establece

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \quad (5.46)$$

En el caso particular en que $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, se observa que el producto $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ coincide exactamente con el vector de aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$. Por tanto, el producto $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ representa físicamente la aceleración del mecanismo debida a la velocidad, que es suma de los términos centrífugos y de Coriolis.

En términos prácticos, para calcular $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ necesitamos hallar la aceleración $\ddot{\mathbf{q}}$ correspondiente a $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$. Como se recordará, al proceso de calcular $\ddot{\mathbf{q}}$ conocido el vector $\ddot{\mathbf{z}}$ lo denominamos *problema cinemático de aceleración*, y su resolución ha sido ya estudiada. Por tanto, el problema de calcular el vector $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ se reduce a resolver un problema de aceleración.

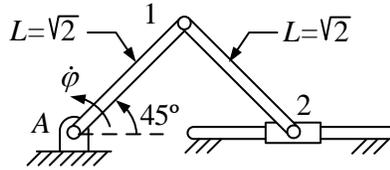


Figura 5.11

Ejemplo 5.4 *Calcular la aceleración instantánea del mecanismo biela-manivela de la figura 5.11, suponiendo que se encuentra en un plano horizontal y que se deja evolucionar libremente con velocidad angular instantánea $\dot{\varphi} = 2$ rad/s. Las dos barras tienen masa m uniformemente distribuida.*

Empleando como coordenadas naturales el vector $\mathbf{q}^T = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ \varphi\}$, las ecuaciones de restricción y su correspondiente matriz jacobiana (particularizada para la posición instantánea), serán:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - 2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2 \\ x_1 - \sqrt{2} \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

Y la matriz jacobiana,

$$\Phi_q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \sin \varphi \end{array} \right]$$

que particularizada para la posición indicada, resulta

$$\Phi_q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Para calcular la matriz \mathbf{R} debemos realizar sucesivos análisis de velocidades dando valor unitario a cada grado de libertad y cero a los demás. Como en este caso tenemos un solo grado de libertad, la matriz \mathbf{R} tendrá una única columna, que obtendremos mediante un análisis de velocidad con valor $\dot{\varphi} = 1$ rad/s. Conviene resaltar que éste no es el valor real de la velocidad (el enunciado dice que la velocidad es $\dot{\varphi} = 2$ rad/s) sino un valor ficticio que empleamos con la única finalidad de calcular la matriz \mathbf{R} . Para ello, emplearemos la ecuación

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}}^* = -\Phi_t = \mathbf{0}$$

en la que empleamos el superíndice “*” para indicar que se trata de velocidades ficticias. Al sistema de ecuaciones anterior le que añadiremos la ecuación $\dot{\varphi}^* = 1$ como una fila adicional para introducir el valor conocido de la velocidad. Con ello,

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{y}_1^* \\ \dot{x}_2^* \\ \dot{\varphi}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La solución de este sistema nos proporciona el valor de la matriz \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{y}_1^* \\ \dot{x}_2^* \\ \dot{\varphi}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

A continuación podemos calcular las velocidades reales del mecanismo mediante la expresión $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}$, resultando

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{2}_{\dot{\mathbf{z}}} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Seguidamente, calculamos el término $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$, que se obtiene mediante un análisis de aceleraciones con $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, es decir con $\ddot{\varphi} = 0$. Resaltamos de nuevo que dicha aceleración es ficticia, ya que el valor de $\ddot{\varphi}$ es desconocido (precisamente es lo que se pide en el enunciado). Para el análisis de aceleraciones empleamos la ecuación:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}}^* = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

a la que añadiremos la ecuación $\ddot{\varphi}^* = 0$ como fila adicional, para introducir el valor conocido de la aceleración. Desarrollando las ecuaciones, obtenemos

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1^* \\ \ddot{y}_1^* \\ \ddot{x}_2^* \\ \ddot{\varphi}^* \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 2\dot{x}_1^2 + 2\dot{y}_1^2 \\ 2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + 2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \\ \sqrt{2} \cos \varphi \dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 16 \\ 16 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Y resolviendo estas ecuaciones, obtenemos

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1^* \\ \ddot{y}_1^* \\ \ddot{x}_2^* \\ \ddot{\varphi}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -4 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matriz de masas \mathbf{M} se obtiene ensamblando las matrices de masas de los dos elementos, como se ha mostrado en el apartado 5.3. Según se ha visto, las matrices de cada elemento son:

$$\mathbf{M}_1 = \frac{M}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} A & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \\ A \\ 1 \end{array} \quad \mathbf{M}_2 = \frac{M}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Y la matriz de masas del mecanismo resulta:

$$\mathbf{M} = \frac{M}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & y_1 & x_2 & \varphi \\ \hline 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ \varphi \end{array}$$

El vector \mathbf{Q} de fuerzas generalizadas es nulo, ya que no actúan fuerzas exteriores (el peso no actúa porque el mecanismo se halla en un plano horizontal).

Sustituyendo los términos anteriores en la ecuación diferencial del movimiento 5.43 particularizada para el instante actual, tenemos:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} = \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right\} \frac{M}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right\} \end{array} = \frac{10}{3} M$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}} = \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right\} \frac{M}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{c} -4 \\ -4 \\ -8 \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} = -8M$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{Q} = 0$$

y, finalmente, se obtiene:

$$\frac{10}{3}M\ddot{\varphi} = -8M$$

de donde se deduce la solución

$$\ddot{\varphi} = -\frac{12}{5}$$

5.8. Integración numérica de las ecuaciones del movimiento

Hemos visto que las ecuaciones del movimiento se describen matemáticamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales y de segundo orden. En este apartado revisaremos brevemente algunos conceptos básicos para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales. Puesto que las fórmulas habituales de integración numérica están pensadas para sistemas de primer orden de la forma $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$, será preciso reducir previamente el orden de nuestro sistema de ecuaciones, pasando de segundo a primer orden.

5.8.1. Reducción del orden de las ecuaciones diferenciales del movimiento

Todo sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden puede ser transformado en otro de primer orden duplicando el número de ecuaciones y de incógnitas. En nuestro caso, necesitamos reducir el orden del sistema de g ecuaciones diferenciales dado por la expresión 5.43, que reproducimos a continuación,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} \quad (5.47)$$

A estas g ecuaciones, podemos añadirles otras g nuevas ecuaciones triviales para obtener el siguiente sistema ampliado,

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

Ahora, definimos el vector \mathbf{y} , de tamaño $2g \times 1$

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

en el que \mathbf{y}_1 equivale a $\dot{\mathbf{z}}$, e \mathbf{y}_2 equivale a \mathbf{z} . Teniendo en cuenta que las matrices \mathbf{R} y \mathbf{M} dependen exclusivamente de \mathbf{z} , y que los vectores \mathbf{Q} y $\mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}$ dependen de \mathbf{z} y $\dot{\mathbf{z}}$, podemos concluir que cada término de la ecuación 5.49 depende de \mathbf{y} , puesto que dicho vector ya incluye a \mathbf{z} y $\dot{\mathbf{z}}$. Con estas consideraciones, y despejando de la ecuación anterior, se obtiene,

$$\dot{\mathbf{y}} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y}_1 \end{array} \right\} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (5.50)$$

que representa un sistema de $2g$ ecuaciones diferenciales de primer orden. A este sistema podemos aplicarle cualquiera de los métodos de integración numérica descritos en la bibliografía, e incluidos en programas de cálculo matemático como Maple o Matlab.

5.8.2. Métodos de integración explícitos e implícitos

Los métodos de integración numérica tratan de hallar una solución discreta aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales, cuya solución exacta es continua. Dichos métodos se clasifican en *explícitos* e *implícitos*. Para entender la diferencia entre ambos podemos recurrir al método de integración de Euler, el más sencillo de todos ellos. Consideremos la ecuación de una variable

$$\dot{y} = f(y, t) \quad (5.51)$$

Llamamos y_n al valor de la función en el instante t_n , es decir, $y_n = y(t_n)$, y denominamos h a la diferencia $t_{n+1} - t_n$. En el método de *Euler explícito*, a partir el valor de y_n aproximamos la solución en y_{n+1} empleando la derivada en t_n ,

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n, t_n) h \quad (5.52)$$

cuya interpretación geométrica se muestra en la figura 5.12.

El método de *Euler implícito* aproxima la solución en y_{n+1} utilizando la derivada en t_{n+1} ,

$$y_{n+1} = y_n + f(y_{n+1}, t_{n+1}) h \quad (5.53)$$

con la interpretación geométrica de la figura 5.13. El método de Euler implícito requiere resolver esta última ecuación iterativamente, ya que el valor de y_{n+1} aparece a ambos lados de la ecuación sin que, en general, sea posible despejarla. Normalmente, los métodos explícitos son más fáciles de

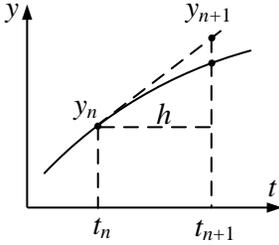


Figura 5.12

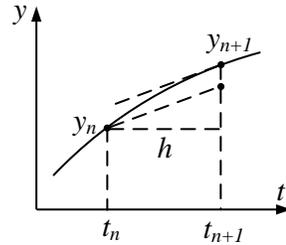


Figura 5.13

programar pero adolecen de falta de estabilidad. Por ello, es frecuente tener que recurrir a los métodos implícitos.

Matlab dispone de diversas funciones para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias: `ode23`, `ode45`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t`, `ode23tb`. Cada una de ellas implementa distintas fórmulas de integración, y están más indicadas para ciertos tipos de problemas. Las funciones `ode45` y `ode113` suelen ser una buena elección para muchos problemas mecánicos de tamaños pequeño y mediano.

5.9. Cambio de coordenadas independientes

En el apartado 5.7 hemos definido el vector \mathbf{z} como una extracción de g componentes de \mathbf{q} . Si se ha realizado una buena elección, las componentes de \mathbf{z} constituyen los grados de libertad del mecanismo, por lo que definen su posición. Sin embargo, a medida que el movimiento del mecanismo hace cambiar su posición, los grados de libertad pueden volverse inservibles. Por ejemplo, en la figura 5.14 la elección de y_1 como grado de libertad es adecuada inicialmente, pero cuando el cuadrilátero alcanza la posición de la figura 5.15, la coordenada y_1 no sirve como grado de libertad. Al encontrarse la barra en posición vertical \dot{y}_1 debe ser siempre nulo, por lo que no proporciona ninguna información sobre el movimiento real del sistema.

Cuando las coordenadas independientes se vuelven inservibles es preciso cambiarlas. En el ejemplo anterior, cuando la barra se encuentra vertical podemos sustituir y_1 por la coordenada x_1 . En el caso más general, la selección de un conjunto de grados de libertad adecuado no siempre es tarea sencilla, especialmente en los mecanismos tridimensionales.

El cambio de coordenadas independientes se puede evitar casi siempre escogiendo grados de libertad válidos para todo el rango del movimiento,

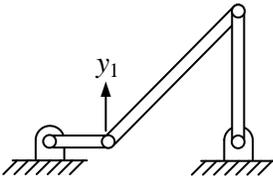


Figura 5.14

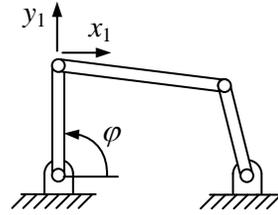


Figura 5.15

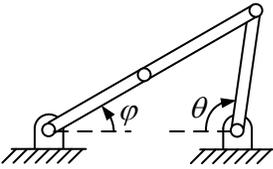


Figura 5.16

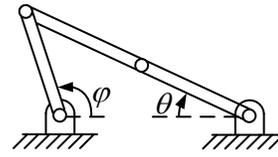


Figura 5.17

lo que habitualmente se consigue mediante coordenadas relativas de ángulo o de distancia.

Conviene señalar que el mero hecho de escoger coordenadas relativas como grados de libertad no garantiza su validez en todo el rango de movimiento. En ciertos problemas, la necesidad de cambiar los grados de libertad es inherente al propio problema, por lo que es inevitable. Por ejemplo, en un cuadrilátero articulado con movimiento de doble balancín, los toques del movimiento obligan al cambio de coordenadas independientes. En la figura 5.16 el ángulo φ es válido como grado de libertad, pero al alcanzar la posición de la figura 5.17 se vuelve inservible. Lo contrario le ocurre al ángulo θ .

5.10. Ecuaciones del movimiento en coordenadas dependientes

Según hemos visto, la aplicación del teorema de los trabajos virtuales con coordenadas naturales conduce a la expresión

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = 0 \tag{5.54}$$

Sabemos que de esta ecuación no podemos eliminar los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{q}$, por no ser independientes. Una primera alternativa, recién

vista, consiste en convertir las coordenadas en independientes. Otra alternativa –que veremos en este apartado– consiste en emplear la técnica matemática de los *multiplicadores de Lagrange*, estudiada en Cálculo para la minimización de funciones sujetas a restricciones.

Partimos de las m ecuaciones de restricción que representábamos mediante la expresión

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

Consideramos un desplazamiento virtual arbitrario $\delta\mathbf{q}$, compatible con los enlaces, que provoca una variación Φ en las ecuaciones de restricción,

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{q}}\delta\mathbf{q} = \Phi_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.56)$$

Añadamos ahora a la ecuación 5.54 un término adicional de valor nulo, resultado de multiplicar escalarmente el vector $\delta\Phi$ por un vector λ arbitrario, de tamaño $m \times 1$, denominado vector de *multiplicadores de Lagrange*,

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) + \delta\Phi^T\lambda = \mathbf{0} \quad (5.57)$$

Sustituyendo en ella la ecuación 5.56, se obtiene

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q} + \Phi_{\mathbf{q}}^T\lambda) = \mathbf{0} \quad (5.58)$$

En esta ecuación, el vector $\delta\mathbf{q}$ sigue sin poder ser eliminada por el mismo motivo que antes, pues sus componentes son dependientes. Pero algo ha cambiado: ahora tenemos un vector λ arbitrario cuyas componentes podemos escoger según convenga. Pues bien, de los infinitos vectores posibles escogeremos, precisamente, aquél que obligue al paréntesis a ser nulo, cualquiera que sea el vector $\delta\mathbf{q}$. Con ello, conseguimos eliminar el vector $\delta\mathbf{q}$ aunque sus componentes sean dependientes, a costa de optar por una elección concreta del vector λ .

Expliquemos este proceso mediante el ejemplo de dos dimensiones visto anteriormente. Consideramos el sistema descrito por la ecuación

$$\left\{ \begin{matrix} \delta x & \delta y \end{matrix} \right\} \left(\left[\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) = 0 \quad (5.59)$$

sujeto a la restricción

$$\phi = y - 2x = 0 \quad (5.60)$$

La matriz jacobiana es,

$$\phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Añadiendo el producto $\delta \Phi^T \boldsymbol{\lambda}$ a la ecuación 5.59, obtenemos

$$\{ \delta x \quad \delta y \} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \lambda \right) = 0 \quad (5.62)$$

Operando,

$$\delta x(2\ddot{x} + \ddot{y} - 1 - 2\lambda) + \delta y(\ddot{x} + 2\ddot{y} - 1 + \lambda) = 0 \quad (5.63)$$

Debido a que δx y δy están relacionados, no podemos afirmar que los dos paréntesis sean nulos para cualquier desplazamiento virtual. Ahora bien, podemos escoger un valor de λ arbitrario y, por conveniencia, tomamos el valor que anula el segundo paréntesis, es decir, $\lambda = 1 - \ddot{x} - 2\ddot{y}$. Con esta elección, el primer paréntesis tiene que ser forzosamente nulo, ya que el desplazamiento virtual δx es arbitrario. Es decir, al introducir el multiplicador de Lagrange podemos eliminar los desplazamientos virtuales dependientes, siempre y cuando la elección de λ sea la apropiada.

Consecuentemente, podemos eliminar el término $\delta \mathbf{q}$ de la ecuación 5.58, obteniendo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (5.64)$$

que representa un sistema de n ecuaciones con $n + m$ incógnitas, que son las coordenadas dependientes \mathbf{q} y los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. Para complementar este sistema, podemos recurrir al análisis cinemático de aceleración que, como se vio, es

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_t \quad (5.65)$$

El conjunto de las dos ecuaciones 5.64 y 5.65 constituyen el siguiente sistema de $n + m$ ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_t \end{Bmatrix} \quad (5.66)$$

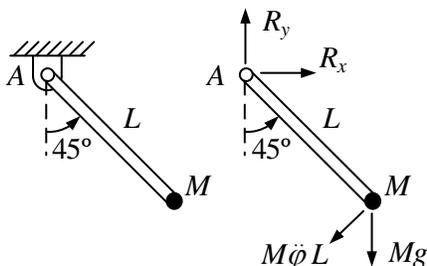


Figura 5.18

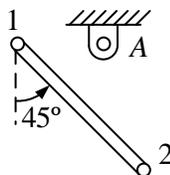


Figura 5.19

5.11. Interpretación física de los multiplicadores de Lagrange

Cada multiplicador de Lagrange se encuentra asociado a una –y sólo una– ecuación de restricción. Se puede demostrar con relativa facilidad que el producto $\Phi_q^T \lambda$ de la ecuación 5.64 tiene dimensiones de fuerza generalizada y que físicamente representa la fuerza necesaria para que las restricciones se cumplan. Quizá la forma más sencilla de abordar una demostración no rigurosa sea mediante un ejemplo.

Consideremos la barra rígida mostrada en la figura 5.18, de longitud L y con una masa puntual M en el extremo. La barra se encuentra en reposo, inclinada 45° en un plano vertical, y se desea calcular la aceleración inicial del extremo y las reacciones en la articulación. Las ecuaciones de la mecánica clásica fácilmente nos permiten calcular estos términos. Basándonos en la figura y tomando momentos en el punto A , obtenemos

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g\sqrt{2}}{2L} \quad (5.67)$$

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{\varphi}L\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{g}{2} \quad (5.68)$$

Realizando los sumatorios de fuerzas horizontales y verticales, se obtiene

$$R_x = -\frac{mg}{2} \quad (5.69)$$

$$R_y = \frac{mg}{2} \quad (5.70)$$

Resolvamos ahora el mismo problema empleando coordenadas naturales. Para ello, empleemos la modelización mostrada en la figura 5.19, en la que se utilizan los puntos 1 y 2. Por tanto, nuestro vector de coordenadas

dependientes es

$$\mathbf{q}^T = \{ x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \} \quad (5.71)$$

Puesto que el mecanismo tiene un solo grado de libertad, deben existir $n - m = 3$ ecuaciones de restricción, que son

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L^2 \\ x_1 \\ y_1 \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (5.72)$$

La correspondiente matriz jacobiana es

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}L & \sqrt{2}L & \sqrt{2}L & -\sqrt{2}L \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Y la matriz de masas del elemento,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Finalmente, podemos escribir el sistema completo ensamblado,

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}L & 0 & 1 \\ 0 & 0 & M & 0 & \sqrt{2}L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & -\sqrt{2}L & 0 & 0 \\ \hline -\sqrt{2}L & \sqrt{2}L & \sqrt{2}L & -\sqrt{2}L & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

Pese al tamaño del sistema, el gran número de términos nulos hace que

la resolución a mano sea una tarea sencilla, de la que se obtiene la solución:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0 \quad (5.76)$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = -\frac{g}{2} \quad (5.77)$$

$$\lambda_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}L} \quad (5.78)$$

$$\lambda_2 = \frac{mg}{2} \quad (5.79)$$

$$\lambda_3 = -\frac{mg}{2} \quad (5.80)$$

La fuerza generalizada correspondiente a las ecuaciones de restricción segunda y tercera resulta ser

$$Q_2 = -\Phi_{\mathbf{q}_2}^T \lambda_2 = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{mg}{2} = \begin{Bmatrix} -\frac{mg}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.81)$$

$$Q_3 = -\Phi_{\mathbf{q}_3}^T \lambda_3 = -\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \left(-\frac{mg}{2}\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{mg}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.82)$$

resultados que coinciden con los obtenidos por el método clásico para R_x y R_y en las ecuaciones 5.69 y 5.70.

5.12. Cálculo de las reacciones

Cada ecuación de restricción lleva asociado su multiplicador de Lagrange y su correspondiente interpretación física. En este apartado nos preguntamos por el sentido físico de cada una de las restricciones, lo que nos permitirá hallar las reacciones en cada par cinemático.

5.12.1. Reacciones de sólido rígido

Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de sólido rígido no tienen interés práctico inmediato. Representan las fuerzas internas entre partículas para mantener constantes sus posiciones relativas a lo largo del movimiento. No representan reacciones en los pares.

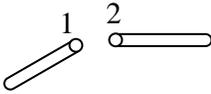


Figura 5.20

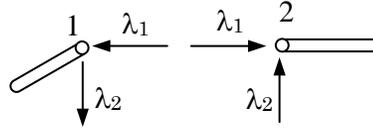


Figura 5.21

5.12.2. Reacciones en la articulación

Para hallar las reacciones de una articulación se precisa no compartir los puntos entre elementos adyacentes, como en la figura 5.20, de forma que la ecuación de restricción del par aparezca explícitamente. Las dos ecuaciones del par son

$$\Phi_1 = x_1 - x_2 = 0 \tag{5.83}$$

$$\Phi_2 = y_1 - y_2 = 0 \tag{5.84}$$

Las filas y columnas de la matriz jacobiana asociadas a estas dos restricciones son

$$\Phi_{q1} = \left\{ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\} \tag{5.85}$$

$$\Phi_{q2} = \left\{ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right\} \tag{5.86}$$

Llamando λ_1 y λ_2 a los correspondientes multiplicadores de Lagrange obtenemos las fuerzas generalizadas \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2

$$\mathbf{Q}_1 = -\Phi_{q1}^T \lambda_1 = - \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\} \lambda_1 = \left\{ \begin{array}{c} -\lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{5.87}$$

$$\mathbf{Q}_2 = -\Phi_{q2}^T \lambda_2 = - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\} \lambda_2 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} \tag{5.88}$$

El sentido físico de dicho resultado se muestra en la figura 5.21. Las dos primeras filas de cada vector representan las componentes de la reacción sobre el punto 1, y las dos segundas filas representan las componentes de la reacción sobre el punto 2. Por el principio de acción y reacción, ambas reacciones deben ser iguales y de signo contrario.

De las dos ecuaciones anteriores comprobamos que los dos multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2 tienen un claro sentido físico: λ_1 representa el módulo de la reacción R_x , y λ_2 el módulo de la reacción R_y .

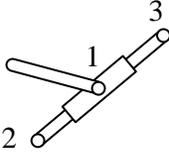


Figura 5.22

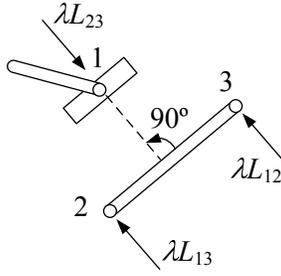


Figura 5.23

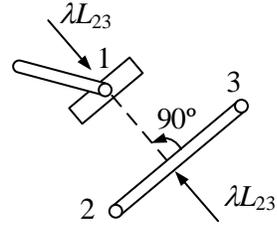


Figura 5.24

5.12.3. Reacciones en la deslizadera articulada

Como se vio, una deslizadera articulada se modeliza mediante tres puntos, como se muestra en la figura 5.22. Su ecuación de restricción debe garantizar el alineamiento entre los puntos 1, 2 y 3, lo que se consigue mediante el producto vectorial entre los vectores \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{13} , cuya expresión es

$$\Phi = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0 \tag{5.89}$$

La fila correspondiente en la matriz jacobiana es,

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -(y_3 - y_2)(x_3 - x_2) & (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) & -(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \end{matrix} \right\} \tag{5.90}$$

Y la fuerza generalizada,

$$\mathbf{Q} = -\Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = \lambda \left\{ \begin{matrix} \frac{(y_3 - y_2)}{-(x_3 - x_2)} \\ \frac{-(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} \\ \frac{(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \tag{5.91}$$

Observemos que las reacciones aparecen como fuerzas generalizadas distribuidas en los puntos 1, 2 y 3, como se muestra en la figura 5.23. Fácilmente se puede comprobar que la suma de las fuerzas de los puntos 2 y 3, coincide con la fuerza del punto del 1 cambiada de signo, como postula el principio de acción y reacción. La acción de estas dos fuerzas equivale a una sola fuerza aplicada en la deslizadera, como se ilustra en la figura 5.24.

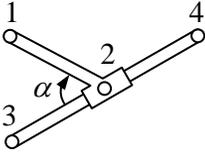


Figura 5.25

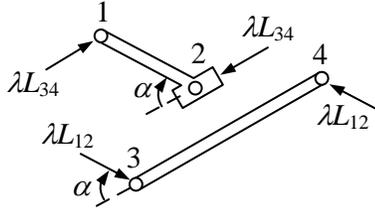


Figura 5.26

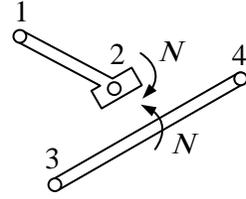


Figura 5.27

5.12.4. Reacciones en la deslizadera rígida

La deslizadera rígida se modeliza mediante cuatro puntos, tres de ellos alineados a lo largo del eje, como en la figura 5.25. Es preciso imponer dos ecuaciones de restricción: la primera, de producto vectorial nulo entre los vectores \mathbf{r}_{23} y \mathbf{r}_{24} obliga a que los puntos 2, 3 y 4 permanezcan alineados; la segunda ecuación, de producto escalar constante entre los vectores \mathbf{r}_{12} y \mathbf{r}_{34} , obliga a que los segmentos $\overline{12}$ y $\overline{34}$ formen ángulo α constante. Omitiremos la primera de las ecuaciones, por ser análoga a la recién vista para la deslizadera articulada. La segunda ecuación establece

$$\Phi = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) - c = 0 \tag{5.92}$$

Su fila en la matriz jacobiana es,

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{matrix} \right\} \tag{5.93}$$

Y la fuerza generalizada,

$$\mathbf{Q} = -\Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = -\lambda \left\{ \begin{matrix} \frac{x_3 - x_4}{y_3 - y_4} & 1 \\ \frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3} & 2 \\ \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} & 3 \\ \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} & 4 \end{matrix} \right\} \tag{5.94}$$

Podemos ver la representación de la fuerzas generalizadas en la figura 5.26. Fácilmente comprobamos que la resultante neta en cada elemento es un momento, que se muestra en la figura 5.27. Además, comprobamos que los momentos en cada elemento tienen el mismo módulo

$$N = \lambda L_{12} L_{34} \sin \alpha \tag{5.95}$$

pero signos contrarios, como establece el principio de acción y reacción. Por tanto, y como cabía esperar, la fuerza generalizada \mathbf{Q} asociada a la restricción de ángulo constante es un momento.

5.12.5. Reacciones de coordenada relativa

Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de coordenada relativa no tienen significado físico, por lo que tampoco tienen interés práctico.

5.12.6. Esfuerzos motores

Los esfuerzos motores son los que se aplican en los grados de libertad para producir el movimiento deseado. En el problema dinámico directo, a partir del valor de los esfuerzos motores $\boldsymbol{\tau}(t)$ calculamos la trayectoria del mecanismo $\mathbf{z}(t)$. En el problema dinámico inverso hacemos exactamente lo contrario: a partir de la trayectoria del mecanismo $\mathbf{z}(t)$ calculamos los esfuerzos motores.

Existen varias formas de resolver este problema. Una de ellas consiste en contemplar el movimiento conocido del mecanismo bajo la perspectiva de las ecuaciones de restricción. Si el mecanismo se mueve según un la ley $\mathbf{z}_c(t)$, podremos escribir g ecuaciones de restricción de la forma

$$\Phi = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_c(t) = \mathbf{0} \quad (5.96)$$

Estas g ecuaciones tienen como finalidad imponer a cada grado de libertad la condición de que su movimiento coincida con el de la función $\mathbf{z}_c(t)$. Entonces, el sentido físico de los g multiplicadores de Lagrange asociados a estas restricciones es, precisamente, el de esfuerzos motores. La deducción es lógica: el multiplicador asociado con cada restricción indica la fuerza generalizada necesaria para que se cumpla dicha restricción. Puesto que las restricciones anteriores imponen un movimiento conocido, la fuerza correspondiente es la que garantiza exactamente dicho movimiento, es decir, el esfuerzo motor.

Un simple ejemplo puede servir para aclarar este concepto. Consideremos el cuadrilátero articulado de la figura 5.28, cuyo movimiento viene definido por $\varphi_c(t)$. Deseamos obtener el par motor $\tau(t)$ capaz de causar dicho movimiento. Para ello, introducimos la nueva ecuación de restricción

$$\Phi = \varphi(t) - \varphi_c(t) = 0 \quad (5.97)$$

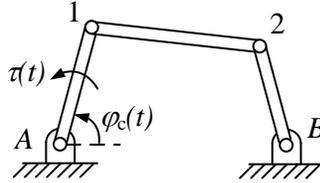


Figura 5.28

La fuerza generalizada es, en este caso

$$\mathbf{Q} = -\Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = -\lambda \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \varphi \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{Bmatrix} \quad (5.98)$$

lo que indica que el par motor τ es, precisamente, el multiplicador de Lagrange λ cambiado de signo.

5.13. Problema dinámico inverso

Para resolver el problema dinámico inverso, suponemos conocido el movimiento de los grados de libertad y deseamos calcular las reacciones en algunas o en todas las articulaciones. Según hemos visto en los apartados anteriores, el primer paso para determinar las reacciones consiste de establecer ecuaciones de restricción de par. Por ejemplo, en una articulación, debemos imponer las restricciones $x_2 - x_1 = 0$ e $y_2 - y_1 = 0$, para que los puntos 1 y 2 coincidan.

A partir del movimiento conocido $\mathbf{z}(t)$ y $\dot{\mathbf{z}}(t)$, resolviendo el problema cinemático de posición podemos obtener $\mathbf{q}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$. A partir de ellos, podemos recurrir a la ecuación 5.66, que establece

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_t \end{Bmatrix} \quad (5.99)$$

En este caso, podemos contemplar la expresión anterior como un sistema lineal de ecuaciones del que podemos calcular el vector de las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$ y el vector λ de multiplicadores de Lagrange. A partir de λ , el cálculo de las reacciones en cada par se realiza de acuerdo a lo descrito en el apartado 5.12.

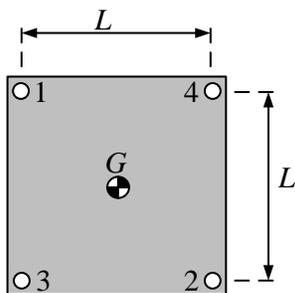


Figura 5.29

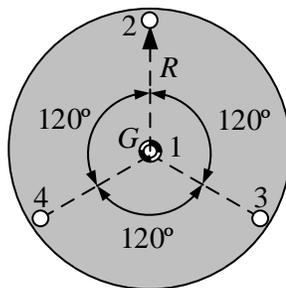


Figura 5.30

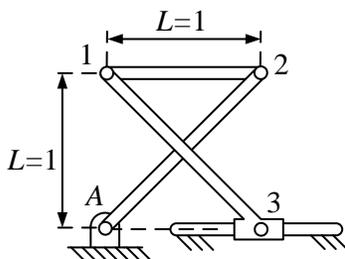


Figura 5.31

5.14. Problemas

Prob. 5.1 Calcular la matriz de masas de los elementos de las figura 5.29 y 5.30, sabiendo que tienen masa M y momento de inercia I_G respecto del centro de gravedad.

Prob. 5.2 El mecanismo de la figura 5.31 consta de tres elementos móviles unidos mediante tres articulaciones simples y una deslizadera rígida. Se quieren resolver independientemente las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del mecanismo. Sabiendo que sólo el elemento $\overline{12}$ tiene masa uniformemente distribuida de 5 kg, que el valor de la gravedad es $g = 10 \text{ m/s}^2$ y que instantáneamente el mecanismo se mueve con velocidad $\dot{x}_3 = 3 \text{ m/s}$ bajo la única acción de la gravedad, calcular la aceleración de la deslizadera 3.

Prob. 5.3 En el mecanismo de la figura 5.32, la doble deslizadera 3 tiene masa puntual $m_3 = 5 \text{ kg}$ y la manivela con centro en B tiene masa uniformemente distribuida $M = 6 \text{ kg}$. Empleando en la modelización únicamente

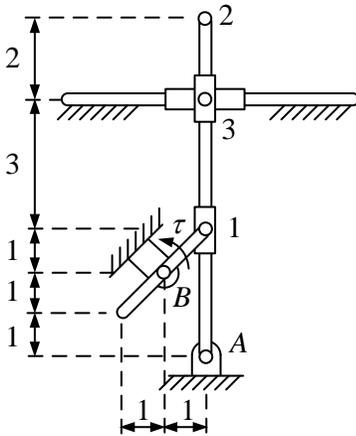


Figura 5.32

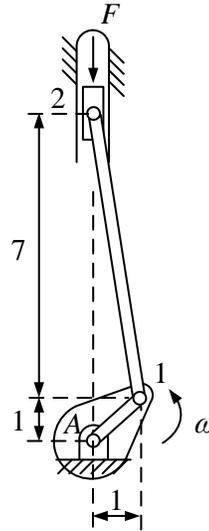


Figura 5.33

los puntos móviles 1, 2, 3, y si es preciso, coordenadas relativas, se pide: 1) Calcular la velocidad instantánea del mecanismo sabiendo que la deslizadera se mueve con velocidad instantánea $\dot{x}_3 = 2$ m/s. 2) Obtener la matriz masas de todo el mecanismo. 3) Suponiendo que el mecanismo parte del reposo, calcular la aceleración angular instantánea de la barra $\overline{B1}$ cuando se aplica el par $\tau = 2$ Nm indicado en la figura. 4) Calcular las reacciones instantáneas en la deslizadera 1 por el método de los multiplicadores de Lagrange.

Prob. 5.4 La figura 5.33 representa un modelo simplificado de un motor de explosión que se desea estudiar empleando el vector de coordenadas $\mathbf{q}^T = \{x_1 \ y_1 \ y_2 \ \varphi\}$, siendo φ el giro del cigüeñal. El cigüeñal tiene masa $M = 5$ kg y momento polar respecto al punto A de valor $I_A = 10$ kg m², y gira con velocidad angular $\omega = 100$ rad/s. Sobre el pistón, de masa $m = 3$ kg, actúa una fuerza vertical $F = 1000$ N. La biela se considera de masa despreciable. Se pide: a) Calcular la velocidad instantánea del punto 2. b) Calcular la matriz de masas del conjunto. c) Calcular la matriz \mathbf{R} y el producto $\mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}$ tomando como grado de libertad la coordenada φ . d) Calcular la aceleración $\ddot{\varphi}$ empleando el método de la matriz \mathbf{R} .

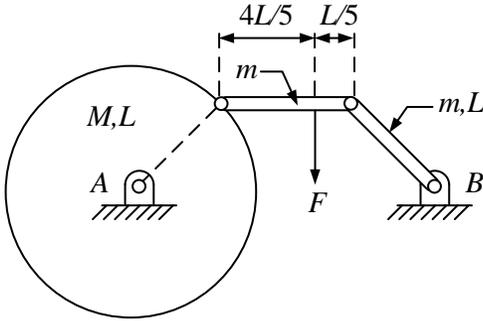


Figura 5.34

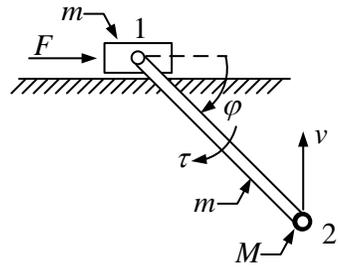


Figura 5.35

Prob. 5.5 El mecanismo de la figura 5.34 consta de tres elementos móviles: un cilindro macizo de masa M y radio L , articulado en su centro A , y dos barras biarticuladas de longitud L y masa m uniformemente distribuida. Se pide: a) Obtener \mathbf{M} , matriz de masas del mecanismo, indicando el proceso de ensamblado de las matrices de masas de cada elemento. b) Obtener el vector de fuerzas generalizadas \mathbf{Q} considerando que no hay peso y que la fuerza F es la única actuante.

Prob. 5.6 El mecanismo de la figura 5.35 se encuentra en un plano horizontal y transporta una masa puntual $M = 6$ kg en su extremo. Los dos elementos móviles tienen masa $m = 3$ kg uniformemente distribuida. En el instante inicial, la velocidad del extremo 2 es vertical, de valor $v = 5$ m/s. Dos actuadores ejercen, respectivamente, una fuerza $F = 10$ N y un par $\tau = 1$ Nm. Empleando el vector de coordenadas $\mathbf{q}^T = \{x_1 \ x_2 \ y_2 \ \varphi\}$, calcular las aceleraciones \ddot{y}_1 y $\ddot{\varphi}$, mediante el método de la matriz \mathbf{R} . Datos: $L_{12} = 1$, $\varphi = 45^\circ$.

Prob. 5.7 Calcular la matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas del mecanismo de la figura 5.36 empleando la modelización $\mathbf{q}^T = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2\}$. El elemento $\overline{12}$ tiene masa $3m$ uniformemente distribuida a lo largo de su longitud $2L$, y una masa puntual $2m$ en el extremo. El elemento $\overline{2B}$ tiene masa $3m$ uniformemente distribuida. El muelle tiene longitud natural $l_0 = 2\sqrt{2}L$ y rigidez $k = 10$. No considerar el peso.

Prob. 5.8 El mecanismo de la figura 5.37 se modeliza mediante las coordenadas $\mathbf{q}^T = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ \varphi \ s\}$ y en el instante inicial se encuentra en reposo. Sabiendo que hay dos masas de valor m concentradas en los puntos 2 y 3, y que el actuador ejerce una fuerza F de alargamiento, se pide:

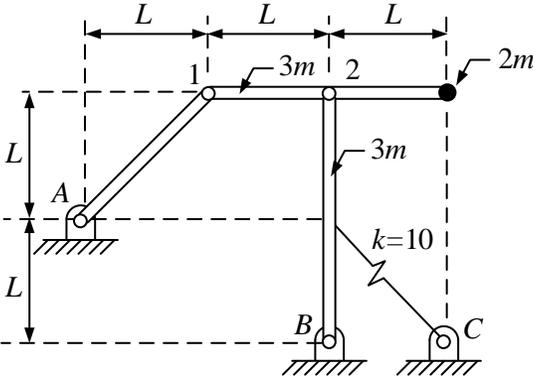


Figura 5.36

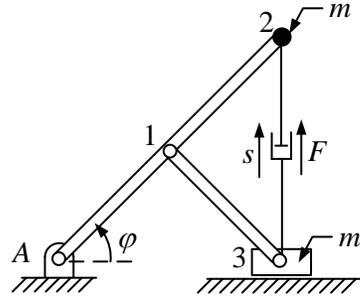


Figura 5.37

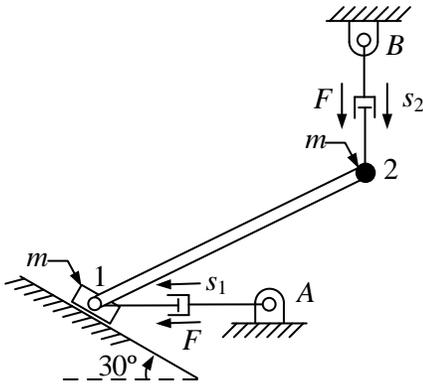


Figura 5.38

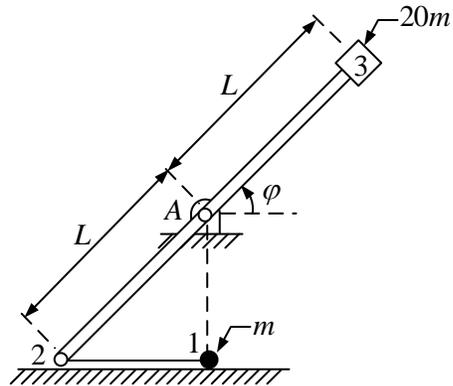


Figura 5.39

a) Hallar las ecuaciones de restricción y la matriz jacobiana. b) Calcular la matriz \mathbf{R} tomando el ángulo φ como grado de libertad. c) Calcular la matriz de masas \mathbf{M} , y el vector de fuerzas generalizadas \mathbf{Q} . d) Hallar la aceleración instantánea $\ddot{\varphi}$. Datos: $x_A = 0, y_A = 0, x_1 = 1, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 2, x_3 = 2, y_3 = 0$.

Prob. 5.9 El mecanismo de la figura 5.38 se modeliza mediante las coordenadas $\mathbf{q}^T = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ s_1 \ s_2\}$. Sabiendo que en el instante inicial el sistema se encuentra en reposo, que la barra $\overline{12}$ tiene masas puntuales m en sus extremos, y que los dos actuadores ejercen fuerzas F de alargamiento, se pide: a) Hallar las ecuaciones de restricción y la matriz jacobiana. b) Calcular la matriz \mathbf{R} tomando como grados de libertad las distancias s_1 ,

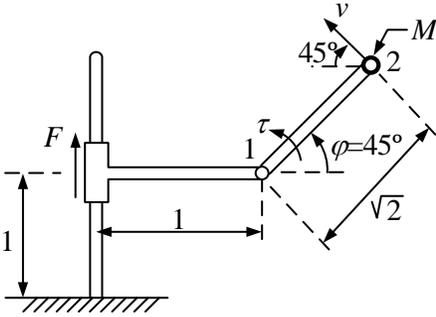


Figura 5.40

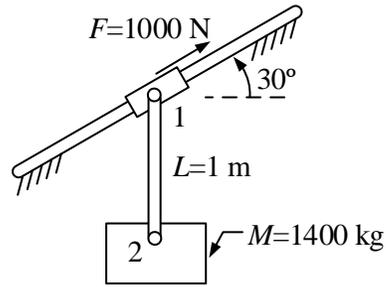


Figura 5.41

s_2 . c) Calcular la matriz de masas \mathbf{M} , y el vector de fuerzas generalizadas \mathbf{Q} . d) Plantear las ecuaciones que permiten obtener las aceleraciones instantáneas \ddot{s}_1 y \ddot{s}_2 . Datos: $x_A = 2$, $y_A = 0$, $x_B = 4$, $y_B = 4$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.

Prob. 5.10 Se desea estudiar el comportamiento de un modelo simplificado de traba, mostrado en la figura 5.39, compuesto por una barra rígida de longitud $2L$ y masa despreciable, un contrapeso de masa $20m$, y un proyectil de masa m unido al extremo de la barra mediante un hilo inextensible sin masa. Partiendo del reposo, se deja libre el traba, de tal forma que el contacto entre la masa m y el suelo se comporta como una deslizadera plana. Empleando el vector de coordenadas $\mathbf{q}^T = \{x_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ \varphi\}$, se pide calcular la aceleración instantánea del punto 1 mediante el método de la matriz \mathbf{R} . Datos: $m = 1$ kg, $L = \sqrt{2}$ m, $\varphi = 45^\circ$, $g = 10$ m/s², $x_A = 0$, $y_A = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = -1$, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $x_3 = 1$, $y_3 = 1$.

Prob. 5.11 El robot plano de figura 5.40 se encuentra en un plano horizontal y transporta una masa puntual $M = 6$ kg en su extremo. Las dos barras móviles tienen masa $m = 3$ kg uniformemente distribuida. En el instante inicial, la barra horizontal se encuentra en reposo y el extremo del robot tiene velocidad $v = \sqrt{2}$ m/s. Los actuadores del robot ejercen una fuerza $F = 10$ N y un par $\tau = 1$ Nm. Empleando el vector de coordenadas $\mathbf{q}^T = \{y_1 \ x_2 \ y_2 \ \varphi\}$, calcular las aceleraciones \ddot{y}_1 y $\ddot{\varphi}$ mediante el método de la matriz \mathbf{R} .

Prob. 5.12 El sistema de la figura 5.41 representa un modelo simplificado de un teleférico que circula por una guía inclinada 30° respecto a la horizontal. La cabina, que se encuentra suspendida de la deslizadera por

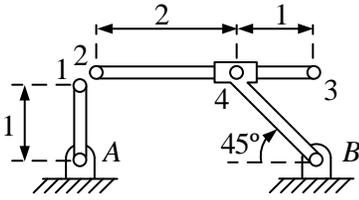


Figura 5.42

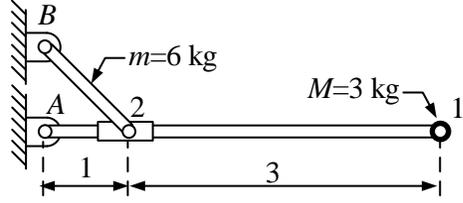


Figura 5.43

medio de una barra sin masa de 1 m, tiene masa $M = 1400$ kg. Estando el sistema en reposo, actúa sobre el punto 1 una fuerza $F = 1000$ N. Se pide, calcular la aceleración instantánea de los puntos 1 y 2 por el método de los multiplicadores de Lagrange, así como la reacción en la deslizadera.

Prob. 5.13 La figura 5.42 muestra un mecanismo modelizado por medio de los puntos 1, 2, 3 y 4, introduciendo las siete ecuaciones de restricción abajo indicadas. Al analizarlo por el método de los multiplicadores de Lagrange, se obtiene como resultado el vector λ indicado. Determinar: a) La fuerza resistente en la articulación 1 – 2. b) El momento resistente en la deslizadera rígida 4.

$$\Phi(\mathbf{q}) = \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - 1 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - 9 \\ (x_4 - x_B)^2 + (y_4 - y_B)^2 - 2 \\ x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ (x_3 - x_2)(y_4 - y_2) - (y_3 - y_2)(x_4 - x_2) \\ (x_3 - x_2)(x_B - x_4) + (y_3 - y_2)(y_B - y_4) - 3 \end{array} \right\} \quad \lambda = \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{array} \right\}$$

Prob. 5.14 El mecanismo de la figura 5.43 consta de una barra rígida $\overline{B2}$, de masa uniformemente distribuida 6 kg, y de una barra $\overline{A1}$, con una masa puntual de 3 kg en su extremo. Partiendo de la posición indicada, las dos barras se dejan libres bajo la acción de la gravedad ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Calcular la reacción instantánea en la deslizadera articulada 2 por el método de los multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 6

Levas

6.1. Descripción general

Las levas son elementos mecánicos empleados para transmitir leyes de movimiento complejas, que se componen básicamente de un elemento conductor denominado *disco* o *leva* y otro elemento conducido denominado *seguidor*.

Las levas se presentan en una gran variedad de formas y pueden ser planas o tridimensionales, aunque en este capítulo nos limitaremos al estudio del caso plano. A modo de ejemplo, y para dar idea de la variedad de formas que pueden adoptar, en las figuras 6.1-6.6 se muestran seis combinaciones posibles de levas y seguidores.

El seguidor se denomina *de traslación* si su movimiento es una traslación a lo largo de un eje, y *oscilante*, si su movimiento es de rotación alrededor

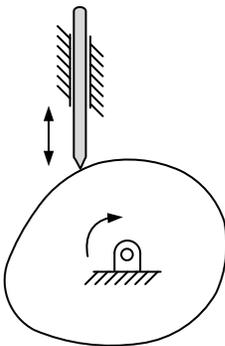


Figura 6.1: Seguidor puntual centrado.

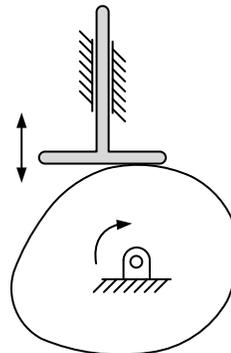


Figura 6.2: Seguidor de pie plano.

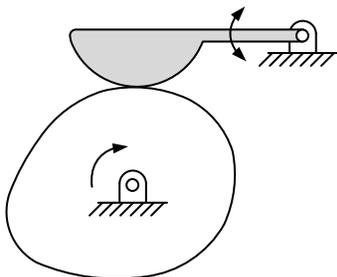


Figura 6.3: Seguidor oscilante curvo.

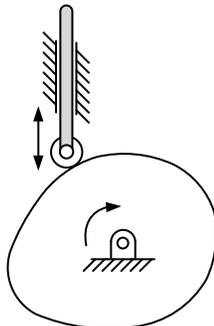


Figura 6.4: Seguidor de rodillo.

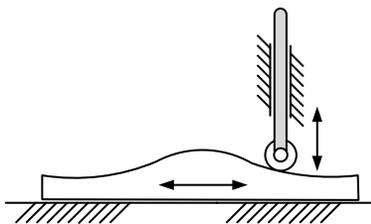


Figura 6.5: Leva de traslación plana.

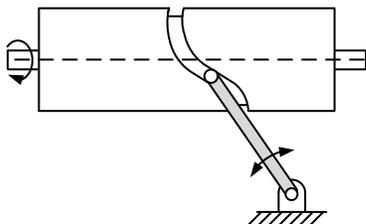


Figura 6.6: Leva cilíndrica.

de un eje.

Atendiendo a la forma del seguidor, éste puede ser *puntual*, *plano*, *curvo* o *de rodillo*. En el caso de los seguidores de traslación, se denominan *centrado* aquél en que el eje de del seguidor corta al eje de la leva, y *descentrado* en caso contrario.

6.2. Criterios y variables de diseño de las levas

La función de la leva es producir un determinado desplazamiento en el seguidor para un valor dado de la posición de la leva. Llamando θ al movimiento de la leva y z al movimiento del seguidor, se debe diseñar la leva para satisfacer la función

$$z = z(\theta) \tag{6.1}$$

A dicha función $z(\theta)$ se la denomina *función de leva*, y a su representación gráfica *diagrama de desplazamiento*.

La secuencia de diseño de la leva para obtener el movimiento deseado en el seguidor es el siguiente:

- i. Definir la ley de movimiento $z(\theta)$ deseada
- ii. Definir el tipo de leva y seguidor y sus principales dimensiones geométricas
- iii. Obtener el perfil de leva
- iv. Verificar que la leva diseñada cumple los requisitos y que su geometría no produce problemas en el contacto con el seguidor.

Algunos parámetros importantes de las levas se presentan como variables de diseño o se obtienen directamente de ellas, y su valor afecta directamente a su buen funcionamiento y fiabilidad. Los principales parámetros que se deben considerar son los siguiente:

- a. **Ángulo de presión:** es el ángulo α que forma la normal en el contacto con el eje del seguidor, como se muestra en la figura 6.7, que coincide con la línea de transmisión de esfuerzos en ausencia de rozamiento. Esta magnitud es importante en los seguidores de traslación, y conviene que su valor sea pequeño, ya que un ángulo de presión grande transforma la fuerza de contacto F en un par M elevado en la guía, con el consiguiente sobredimensionamiento y desgaste de ésta.
- b. **Distancia al contacto:** en las levas de pie, esta magnitud es la distancia l entre el punto de contacto y el eje del seguidor. Como se ve en la figura 6.8, en este caso el ángulo de presión es siempre nulo, pero la fuerza de contacto F se transforma en par resistente M al multiplicarse por la distancia l , por lo que conviene que su valor sea reducido. Por otra parte, el valor máximo de la distancia al contacto representa el límite inferior de la dimensión del seguidor, que lógicamente debe tener una longitud mayor para asegurar el contacto.
- c. **Muelle antagonista:** habitualmente, el contacto entre la leva y el seguidor debe asegurarse mediante un muelle antagonista, como el mostrado en la figura 6.9, cuyas características deben ser cuidadosamente seleccionadas para impedir, por una parte, que el seguidor pierda contacto con la leva y, por otra, que los esfuerzos en el contacto y en los apoyos sean sean innecesariamente elevados.
- d. **Velocidad de deslizamiento:** es la diferencia de velocidades entre los puntos S_1 y S_2 , de contacto del seguidor y la leva, respectivamente, y lleva siempre la dirección t de la tangente en el punto de contacto,

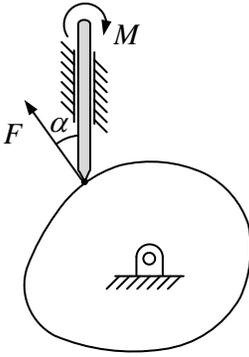


Figura 6.7

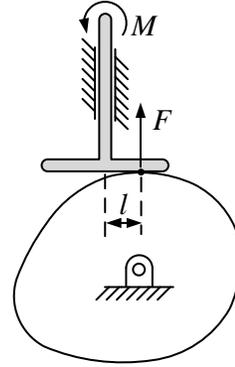


Figura 6.8

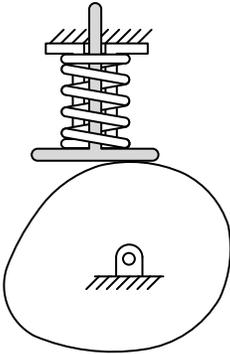


Figura 6.9

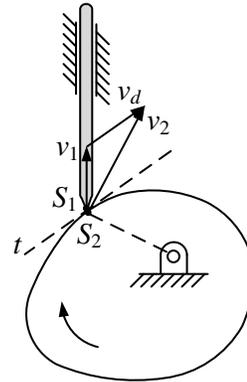


Figura 6.10

como se muestra en la figura 6.10. En el caso particular de las levas de rodillo, el contacto se produce por rodadura por lo que la velocidad de deslizamiento es nula.

- e. **Limitaciones geométricas debidas a la curvatura:** La combinación entre las curvaturas del seguidor, de la herramienta de corte y del perfil de leva pueda dar lugar, por una parte, a puntos de la leva imposibles de alcanzar por el seguidor (figura 6.11), o bien a puntos angulosos generados durante la fabricación (figura 6.12). Para verificar la validez del perfil de leva obtenido en el diseño, es necesario comprobar el valor de su radio de curvatura en cada uno de los puntos del perfil.
- f. **Radio de la circunferencia base, excentricidad y despla-**

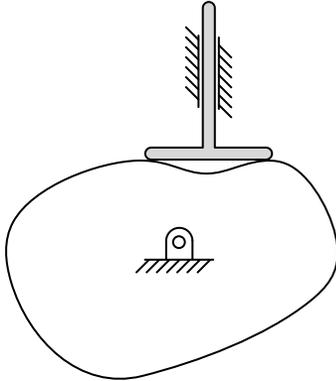


Figura 6.11

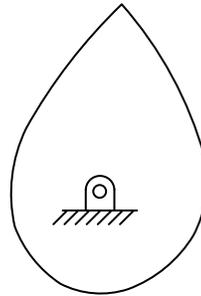


Figura 6.12

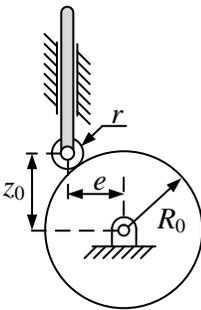


Figura 6.13

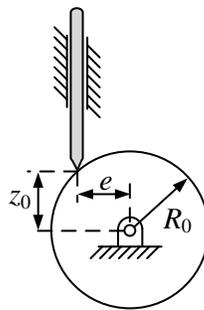


Figura 6.14

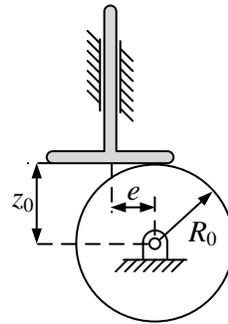


Figura 6.15

miento inicial. El *radio de la circunferencia base* R_0 es el correspondiente a la circunferencia de menor tamaño que tiene como centro el de la leva y que, si se empleara como leva, mantendría el seguidor continuamente en su posición de reposo. Dicha magnitud se encuentra relacionada con la *excentricidad* e , que es la distancia entre el centro de la leva y el eje del seguidor, y con el *desplazamiento inicial* z_0 , que mide el desplazamiento de traslación mínimo del seguidor. Las figuras 6.13-6.15 ilustran mediante tres ejemplos las relaciones entre estos parámetros.

6.3. Análisis de velocidad de las levas

Cuando se dispone de la expresión explícita del diagrama de desplazamiento $z(\theta)$, la velocidad angular de la leva ω_l y la velocidad del seguidor

v_s se obtienen directamente por derivación con respecto del tiempo. La velocidad angular de la leva es

$$\omega_l = \dot{\theta} \quad (6.2)$$

y la del seguidor

$$v_s = \dot{z} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = z' \dot{\theta} \quad (6.3)$$

Análogamente, la aceleración angular α_l de leva y la aceleración a_s del seguidor se obtienen derivando las ecuaciones anteriores. Suponiendo que la leva gira con velocidad angular constante, tendremos $\ddot{\theta} = 0$, por lo que la aceleración del seguidor valdrá

$$a_s = \ddot{z} = z'' \dot{\theta}^2 \quad (6.4)$$

Si no se dispone de la ecuación explícita $z(\theta)$, la relación de velocidades puede deducirse a partir de la condición cinemática de contacto entre la leva y el seguidor, que obliga a que la velocidad de los puntos de contacto S_1 y S_2 sea idéntica en la dirección normal. En el caso del seguidor oscilante de pie curvo, mostrado en la figura 6.16, las velocidades v_{s1} y v_{s2} solo se diferencian en una componente tangencial, que es v_d , la velocidad de deslizamiento. Por el teorema de los tres centros, el punto P es el polo del movimiento relativo entre el movimiento de la leva y el seguidor, por lo que su velocidad como perteneciente al seguidor $\omega_1 \overline{O_1P}$ debe ser igual a su velocidad como perteneciente a la leva $\omega_2 \overline{O_2P}$. De esta igualdad, podemos deducir

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\overline{O_1P}}{\overline{O_2P}} \quad (6.5)$$

En el caso del seguidor de traslación de la figura 6.17, el polo del movimiento relativo P obliga a que

$$v_1 = \omega_2 \overline{O_2P} \quad (6.6)$$

En ambos casos, la velocidad de deslizamiento v_d es

$$v_d = \overline{PS} (\omega_1 - \omega_2) \quad (6.7)$$

Por otra parte, comparando la ecuación 6.3 con la 6.6 se deduce que

$$\overline{O_2P} = z' \quad (6.8)$$

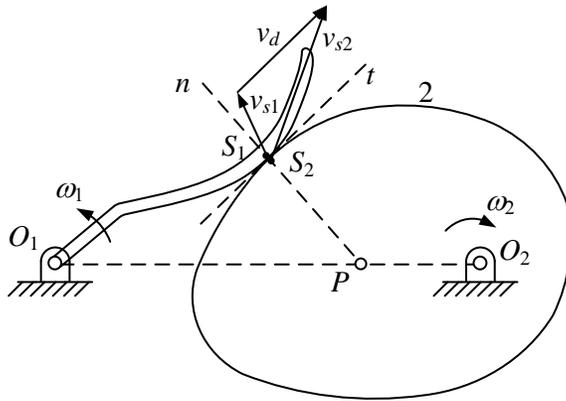


Figura 6.16

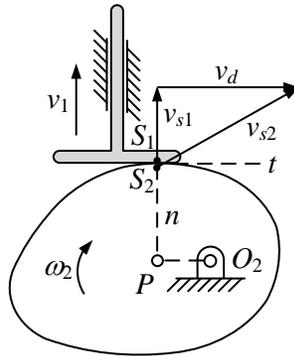


Figura 6.17

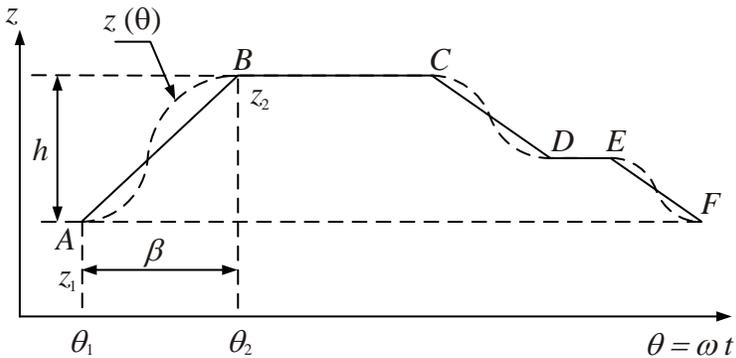


Figura 6.18: Diagrama de desplazamientos.

6.4. Especificación del diagrama de desplazamiento

Normalmente, la especificación del diagrama de desplazamientos $z(\theta)$ se realiza mediante una secuencia de tramos de *ascenso*, *reposo* y *descenso*. Por ejemplo, el diagrama de la figura 6.18 se construye mediante cinco tramos: ascenso (AB), reposo (BC), descenso (CD), reposo (DE) y descenso (EF). Teniendo en cuenta que los tramos de reposo no encierran ninguna dificultad y que los tramos de descenso se pueden estudiar por simetría con los de ascenso, será suficiente con estudiar detalladamente la forma de especificar los tramos de ascenso.

Los diagramas de desplazamiento $z(\theta)$ deben satisfacer ciertas *condiciones de continuidad* en la uniones entre tramos. En primer lugar y por razones obvias, la función $z(\theta)$ debe tener continuidad C^0 , es decir, debe ser continua. Asimismo, $z(\theta)$ debe ser continua C^1 , de forma que la función derivada $z'(\theta)$ también sea una función continua. De no cumplirse esta condición, las discontinuidades en velocidades provocarán la existencia de *percusiones*, fuerzas de magnitud infinita y de duración infinitesimal, que causarán un mal funcionamiento de la leva. Finalmente, es deseable que $z(\theta)$ tenga continuidad C^2 , de forma que $z''(\theta)$ sea continua, ya que la presencia de discontinuidades en z'' equivale a la aparición o desaparición súbita de fuerzas, lo que puede provocar vibraciones, ruidos, fatiga y desgaste. Incluso si no existen discontinuidades, interesará que el valor absoluto de z'' sea lo más reducido posible ya que, de acuerdo con la ecuación 6.4, la aceleración del seguidor es el producto $z''\omega^2$. Las aceleraciones elevadas provocan fuerzas de inercia elevadas, con sus correspondientes tensiones, vibraciones y desgaste.

Volviendo a la figura 6.18, nos preguntamos ahora por la forma de describir matemáticamente el tramo de ascenso AB que cumpla las condiciones de continuidad recién citadas. Veremos a continuación, separadamente, cuatro formas diferentes de definirlo: *parabólico*, *cúbico*, *armónico* y *cicloidial*.

6.4.1. Diagrama de desplazamiento parabólico

El diagrama *parabólico* consiste en dividir el ascenso entre el punto (θ_1, z_1) y el punto (θ_2, z_2) en dos mitades, cada una de las cuales es una parábola. Llamando β a la diferencia $\theta_2 - \theta_1$ y llamando h a la diferencia

$z_2 - z_1$, las ecuaciones de las parábolas son:

Para $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \frac{\beta}{2}$

$$z = z_1 + \frac{2h}{\beta^2} (\theta - \theta_1)^2 \quad (6.9)$$

$$z' = \frac{4h}{\beta^2} (\theta - \theta_1) \quad (6.10)$$

$$z'' = \frac{4h}{\beta^2} \quad (6.11)$$

Para $\theta_1 + \frac{\beta}{2} \leq \theta \leq \theta_1 + \beta$

$$z = z_1 + h - \frac{2h}{\beta^2} (\theta_2 - \theta)^2 \quad (6.12)$$

$$z' = \frac{4h}{\beta^2} (\theta_2 - \theta) \quad (6.13)$$

$$z'' = -\frac{4h}{\beta^2} \quad (6.14)$$

Los valores extremos de la velocidad y la aceleración en el interior del intervalo son

$$|z'|_{max} = \frac{2h}{\beta} \quad (6.15)$$

$$|z''|_{max} = \frac{4h}{\beta^2} \quad (6.16)$$

El diagrama parabólico presenta tres discontinuidades en aceleraciones: la primera se produce en la mitad del intervalo, donde z'' cambia de signo. Las otras dos se producen en θ_1 y θ_2 ya que en estos puntos la aceleración toma valor finito, mientras que en los periodos de reposo anterior y posterior la aceleración toma valor nulo.

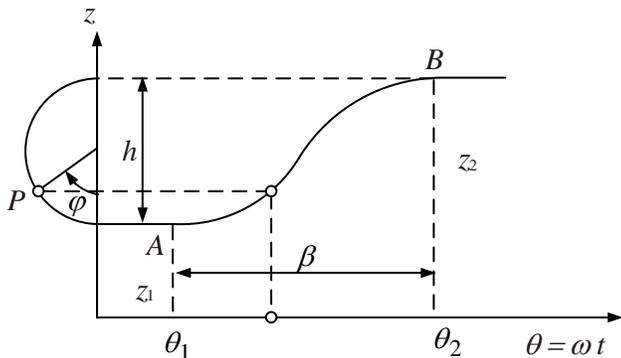


Figura 6.19: Leva de desplazamiento armónico.

6.4.2. Diagrama de desplazamiento cúbico

En este diagrama la fase de ascenso se representa mediante un polinomio de tercer grado, cuya ecuación es:

$$z = z_1 + \frac{3h}{\beta^2} (\theta - \theta_1)^2 - \frac{2h}{\beta^3} (\theta - \theta_1)^3 \quad (6.17)$$

$$z' = \frac{6h}{\beta^2} (\theta - \theta_1) - \frac{6h}{\beta^3} (\theta - \theta_1)^2 \quad (6.18)$$

$$z'' = \frac{6h}{\beta^2} - \frac{12h}{\beta^3} (\theta - \theta_1) \quad (6.19)$$

Los valores de la velocidad y aceleración máximos son, en este caso

$$|z'|_{max} = \frac{3h}{2\beta} \quad (6.20)$$

$$|z''|_{max} = \frac{6h}{\beta^2} \quad (6.21)$$

En este caso hay dos discontinuidades en los extremos del intervalo.

6.4.3. Diagrama de desplazamiento armónico

Este diagrama de desplazamiento se obtiene por composición de un movimiento de velocidad constante en el eje de ordenadas θ y otro de proyección vertical del punto P , que se mueve con velocidad uniforme sobre la circunferencia de diámetro h mostrada en la figura 6.19.

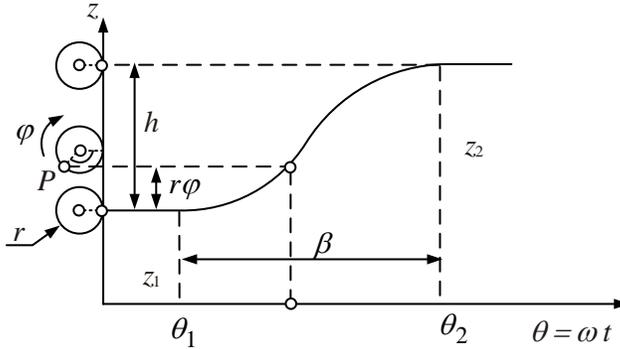


Figura 6.20: Leva de desplazamiento cicloidal.

Mientras el punto sobre el eje de abscisas pasa de θ_1 a θ_2 a velocidad constante, el punto sobre la circunferencia debe pasar de un extremo al otro con velocidad angular constante y llegar al extremo al mismo tiempo. Por tanto, entre el ángulo θ girado por la leva y el ángulo φ debe existir la siguiente relación de proporcionalidad

$$\varphi = \frac{\pi}{\beta} (\theta - \theta_1) \quad (6.22)$$

La función de desplazamiento y sus derivadas resultan ser:

$$z = z_1 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cos \varphi = z_1 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cos \left(\frac{\pi}{\beta} (\theta - \theta_1) \right) \quad (6.23)$$

$$z' = \frac{h}{2} \frac{\pi}{\beta} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\beta} (\theta - \theta_1) \right) \quad (6.24)$$

$$z'' = \frac{h}{2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi}{\beta} (\theta - \theta_1) \right) \quad (6.25)$$

Los valores máximos de la velocidad y aceleración son:

$$|z'|_{max} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{\beta} = 1,571 \frac{h}{\beta} \quad (6.26)$$

$$|z''|_{max} = \frac{\pi^2}{2} \frac{h}{\beta^2} = 4,935 \frac{h}{\beta^2} \quad (6.27)$$

Una vez más, existen discontinuidades en aceleraciones en los extremos del intervalo.

6.4.4. Diagrama de desplazamiento cicloidal

Este diagrama se obtiene por composición de un movimiento de traslación uniforme en el eje de abscisas y de la proyección sobre el eje de ordenadas de un punto P situado sobre una circunferencia, que rueda sobre el eje de ordenadas dando una revolución completa.

Puesto que la circunferencia da una vuelta completa al pasar de y_1 a $y_1 + h$ en el mismo tiempo en que P pasa de θ_1 a θ_2 , podemos escribir las relaciones

$$2\pi r = h \quad (6.28)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\beta}(\theta - \theta_1) \quad (6.29)$$

Utilizando estas expresiones y teniendo en cuenta que

$$z = z_1 + \varphi r - r \operatorname{sen} \varphi \quad (6.30)$$

se deduce la función de desplazamiento y sus derivadas:

$$z = z_1 + \frac{(\theta - \theta_1) h}{\beta} - \frac{h}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\beta} \quad (6.31)$$

$$z' = \frac{h}{\beta} - \frac{h}{\beta} \cos \frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\beta} \quad (6.32)$$

$$z'' = \frac{2\pi h}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\beta} \quad (6.33)$$

Los valores máximos de la velocidad y aceleración son:

$$|z'|_{max} = \frac{2h}{\beta} \quad (6.34)$$

$$|z''|_{max} = \frac{2\pi h}{\beta^2} \quad (6.35)$$

En este caso, la aceleración es continua en todo el intervalo, incluidos los puntos extremos.

6.4.5. Comparación entre diagramas de desplazamiento

Con objeto de analizar las diferencias entre cada uno de los diagramas de desplazamiento anteriores, suponemos $\beta = 1$ y $h = 1$, de forma que se puedan comparar sus gráficas, como se muestra en la figura 6.21.

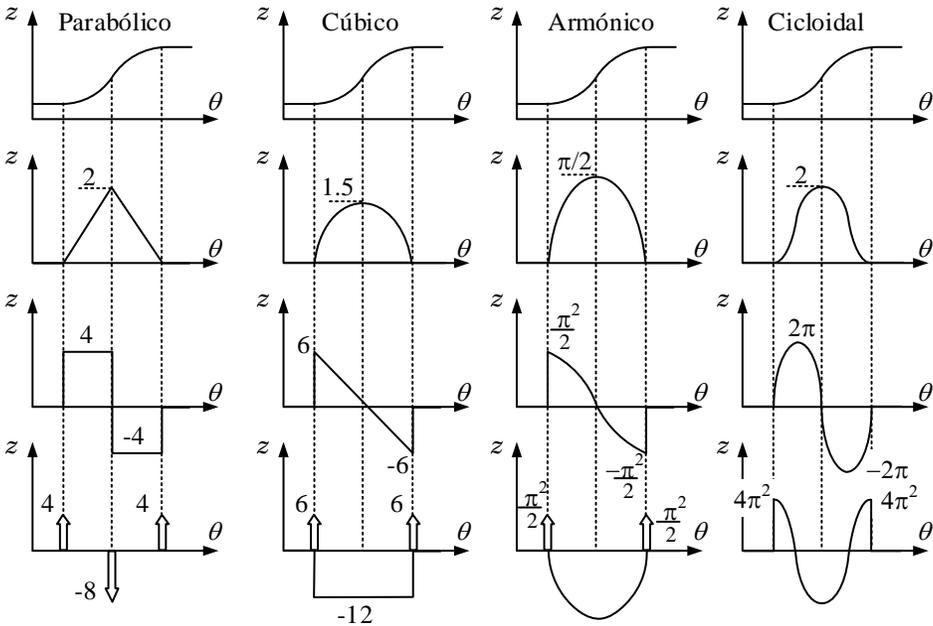


Figura 6.21: Comparación entre diagramas de leva.

Resumiendo en una tabla los valores extremos de las velocidades y aceleraciones en los cuatro diagramas anteriores, se obtiene:

	Parabólico	Cúbico	Armónico	Cicloidal
$ z' _{max}$	2	1.5	1.571	2
$ z'' _{max}$	4	6	4.935	6.238
$ z''' _{max}$	∞	∞	∞	Finita

Tabla 6.1: Comparativa de valores máximos.

El diagrama parabólico da lugar a la menor aceleración, pero el precio que se paga para ello es una discontinuidad en el punto medio del intervalo.

El diagrama cicloidal es el único que tiene aceleración continua, aunque la continuidad se logra a costa de tener una aceleración máxima de valor superior a las otras tres alternativas.

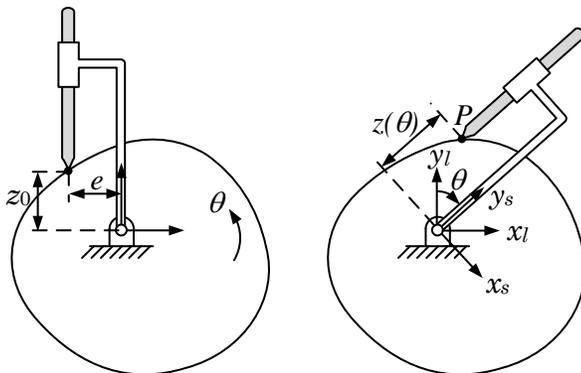


Figura 6.22

6.5. Obtención del perfil de leva

Una vez especificado el diagrama de desplazamiento $z(\theta)$, seleccionados el tipo de leva y seguidor, y elegidos los principales parámetros de diseño, es preciso obtener el perfil de leva que produce el movimiento del seguidor descrito por la función $z(\theta)$. Para obtener las ecuaciones de la leva se estudiará el movimiento invertido del seguidor con respecto de la leva, de forma que la leva se considerará fija y el seguidor tendrá un movimiento combinado de rotación/traslación.

En los tramos de reposo, el perfil de leva es trivial y se obtiene mediante un arco de circunferencia centrado en el centro de la leva. En los apartados siguientes veremos el caso particular del seguidor puntual y el caso más general.

6.5.1. Obtención del perfil de leva con seguidor puntual

En el caso del seguidor puntual mostrado en la figura 6.22, en el movimiento normal a un giro θ de la leva le corresponde un desplazamiento $z(\theta)$ del seguidor, mientras que en el movimiento invertido, la leva se considera fija y el seguidor se desplaza unido a un par prismático que permite su giro y su traslación. Llamando $\{l\}$ al sistema de referencia de la leva y $\{s\}$ al sistema de referencia del seguidor, en el movimiento invertido podremos escribir con facilidad las coordenadas de un punto genérico P del perfil de leva en el sistema de referencia $\{s\}$:

$${}^s\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} {}^s x_P \\ {}^s y_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -e \\ z(\theta) \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

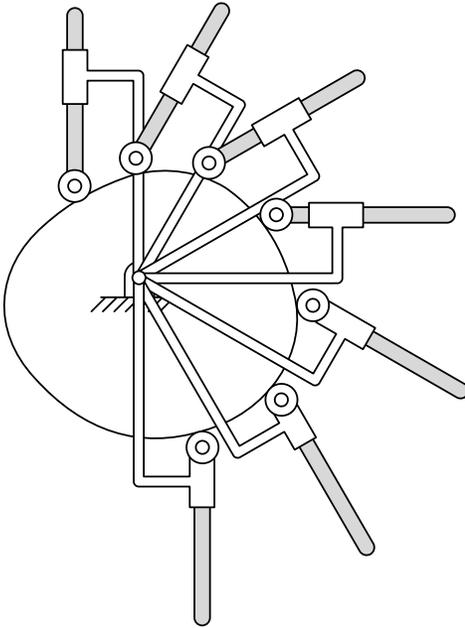


Figura 6.23

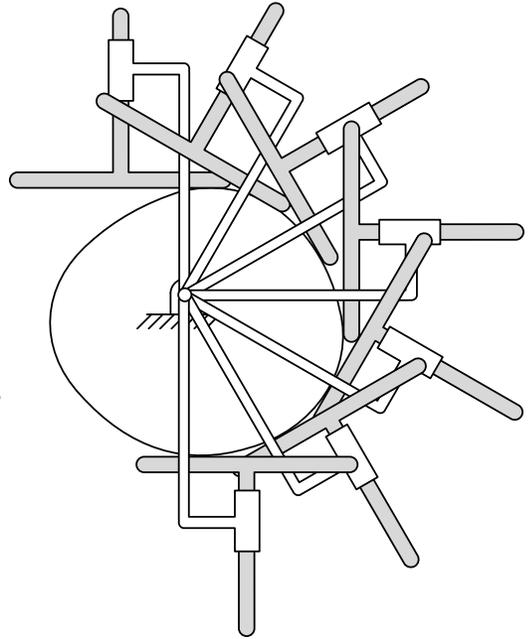


Figura 6.24

Teniendo en cuenta que la matriz de cambio de base ${}^l\mathbf{R}_s$ es

$${}^l\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

se puede obtener

$${}^l\mathbf{r}_P = {}^l\mathbf{R}_s {}^s\mathbf{r}_P \quad (6.38)$$

que constituyen las ecuaciones paramétricas del perfil de leva en función de θ .

6.5.2. Obtención del perfil de leva con seguidor de forma general

En el caso del seguidor no puntual, los puntos de la superficie de la leva se obtienen como envolvente de un haz de curvas o rectas. Por ejemplo, en el caso del seguidor de rodillo mostrado en la figura 6.23, la superficie de la leva es la envolvente interior de un haz de circunferencias, y en el caso del seguidor plano de la figura 6.24 la superficie de la leva es la envolvente del

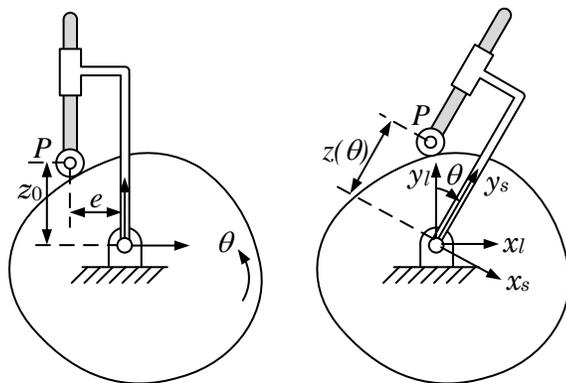


Figura 6.25

haz de rectas compuesto por el pie del seguidor. En ambos casos, es sencillo obtener la ecuación del rodillo o de la recta en función de θ . Llamando $f(x, y, \theta)$ a la ecuación de cada rodillo o recta, la envolvente a todas ellas es el perfil de leva, y se obtiene de las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y, \theta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

Por ejemplo, en la figura 6.25 el centro P del rodillo se obtiene como

$${}^s \mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} {}^s x_P \\ {}^s y_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -e \\ z(\theta) \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

y en función del sistema de referencia de la leva:

$${}^l \mathbf{r}_P = {}^l \mathbf{R}_s {}^s \mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} {}^l x_P \\ {}^l y_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -e \cos \theta + z(\theta) \sin \theta \\ e \sin \theta + z(\theta) \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

Identificando el sistema de referencia de la leva $\{l\}$ con el sistema de referencia fijo $\{0\}$, de modo que $x = {}^l x$, $y = {}^l y$, ${}^l x_P = x_P$, ${}^l y_P = y_P$, se puede escribir la ecuación del rodillo como

$$f(x, y, \theta) = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 - r^2 = 0 \quad (6.42)$$

que se puede introducir en las ecuaciones 6.39 para obtener las ecuaciones paramétricas del perfil de leva. Una dificultad de este método proviene de que frecuentemente existen más de una envolvente, como por ejemplo en el

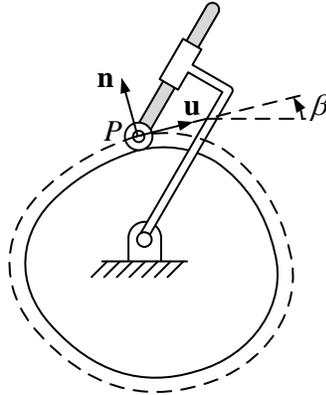


Figura 6.26

caso del seguidor de rodillo en que hay una envolvente exterior a los rodillos y otra interior. Lógicamente, el perfil de leva es la envolvente interior, pero el proceso de obtención analítica no discrimina entre una y otra, por lo que hay que encontrar la forma de separarlas.

Sin embargo, habitualmente no es preciso utilizar el método general, ya que en los dos casos de seguidor de rodillo y de pie plano existen soluciones más directas, que veremos en los dos apartados siguientes.

6.5.3. Obtención del perfil de leva con seguidor de rodillo

En un seguidor de rodillo, la curva primitiva es *paralela* al perfil de leva, aunque se encuentra separada de ella una distancia r igual al radio del rodillo. Dicho *paralelismo* se manifiesta en que a cada punto P de la curva primitiva le corresponde otro punto del perfil de leva situado a una distancia r en la dirección opuesta al vector normal \mathbf{n} .

El ángulo β que forma el vector tangente \mathbf{u} con la horizontal se puede calcular tomando derivadas de las coordenadas x_P e y_P de la ecuación 6.41, teniendo en cuenta que

$$\tan \beta = \frac{dy_P}{dx_P} = \frac{dy_P/d\theta}{dx_P/d\theta} = \frac{y'_P}{x'_P} \quad (6.43)$$

Y de aquí se deduce el valor de $\beta(\theta)$. En función de dicho ángulo, podemos escribir el vector normal \mathbf{n} como

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} \beta \\ \cos \beta \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

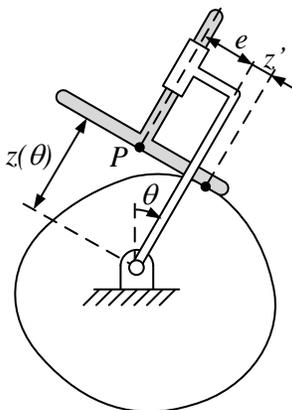


Figura 6.27

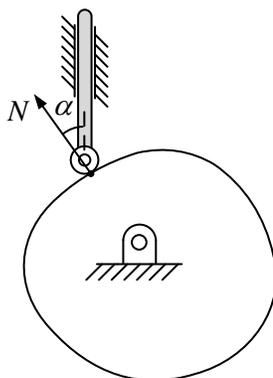


Figura 6.28: Ángulo de presión.

Y, finalmente, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas de la leva superficie de la leva mediante la expresión:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) \\ y(\theta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x_P(\theta) + r \operatorname{sen} \beta(\theta) \\ y_P(\theta) - r \operatorname{cos} \beta(\theta) \end{array} \right\} \quad (6.45)$$

El radio de curvatura ρ de cada punto de la leva se puede calcular mediante la expresión

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.46)$$

6.5.4. Obtención del perfil de leva con seguidor de plano

En un seguidor de plano, las coordenadas x_P , y_P vienen también dadas por la ecuación 6.41. Teniendo en cuenta, según se ha visto en la ecuación 6.8, que la distancia entre el centro de la leva y el punto de contacto es z' , se puede escribir:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) \\ y(\theta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x_P(\theta) + z' \operatorname{cos} \theta \\ y_P(\theta) - z' \operatorname{sen} \theta \end{array} \right\} \quad (6.47)$$

que constituyen las ecuaciones paramétricas de la leva.

6.6. Factores que influyen en el ángulo de presión

Según se ha visto anteriormente, el esfuerzo principal entre la superficie de la leva y el seguidor (prescindiendo del rozamiento) lleva la dirección de

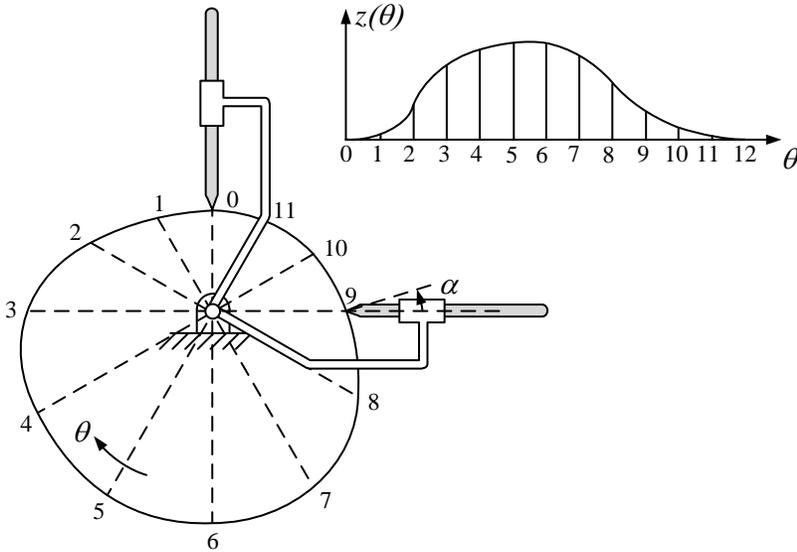


Figura 6.29

la normal al perfil de leva, como se muestra en la figura 6.28. El ángulo α que forma la línea normal con el eje del seguidor se denomina *ángulo de presión* y determina los esfuerzos que soportan las guías del seguidor.

Como criterio general de diseño, se trata de que el ángulo de presión sea tan pequeño como sea posible. Por ello, se recomienda habitualmente que α no sobrepase los 30° , aunque cuando las cargas son ligeras y la lubricación es buena se puede llegar hasta los 45° .

Los dos factores con mayor influencia en la ángulo de presión son:

- **El radio de la circunferencia base**

El factor que más influye en el ángulo de presión es el radio de la circunferencia base R_0 . A mayor valor de R_0 , menor valor de α , ya que al aumentar R_0 aumenta también el radio de curvatura del perfil del leva, pareciéndose la leva cada vez más a un disco circular, cuyo ángulo de presión es nulo. Lógicamente, el límite superior de R_0 viene determinado por tamaño máximo de leva permitido por las especificaciones.

- **La excentricidad**

La excentricidad del seguidor también influye en el ángulo de presión. Para estudiar su influencia, consideremos la leva con seguidor puntual

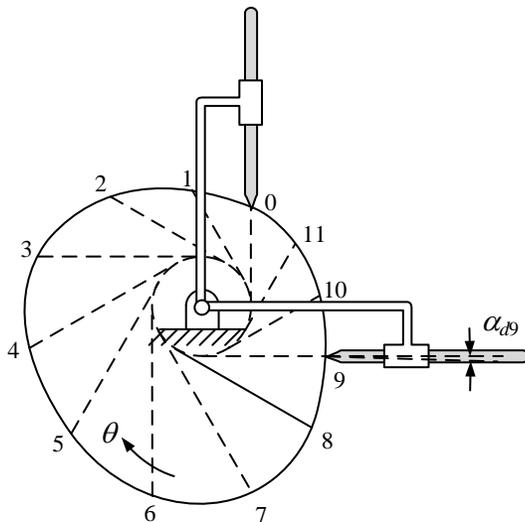


Figura 6.30: Seguidor excéntrico hacia la derecha.

representada en la figura 6.29, junto con su diagrama de desplazamientos $z(\theta)$. La figura 6.30 muestra una leva con idéntico diagrama de desplazamientos $z(\theta)$ que la leva anterior, y tiene la misma circunferencia base, pero en este caso el seguidor es excéntrico. La figura 6.31 representa una tercera leva, similar a las dos anteriores, pero con el seguidor desplazado excéntricamente en la dirección contraria a la segunda leva.

Para comparar la variación del ángulo de presión en las tres levas, se ha dividido cada revolución completa en 12 partes y se han dibujado la posición del seguidor en el punto 9 del movimiento invertido. Como se ve, el desplazamiento del seguidor hacia la derecha (figura 6.30) o izquierda (figura 6.31) produce un ángulo de presión distinto del ángulo α de la posición central (figura 6.29). Llamando α_{d9} al ángulo de presión con desplazamiento hacia la derecha en la posición 9, y α_{i9} al ángulo análogo con desplazamiento izquierdo, observamos que $\alpha_{i9} < \alpha < \alpha_{d9}$. Si repitiéramos el mismo proceso con la posición 3, veríamos que el resultado sería el contrario: $\alpha_{i3} > \alpha > \alpha_{d3}$. Por tanto, concluimos que el desplazamiento del seguidor provoca el crecimiento de α en unas regiones de la leva y la disminución en otras. Concretamente, esta variación representa un *desplazamiento* de la gráfica del ángulo de presión frente a θ , hacia arriba o hacia abajo según el desplazamiento se produzca en un sentido o en otro.

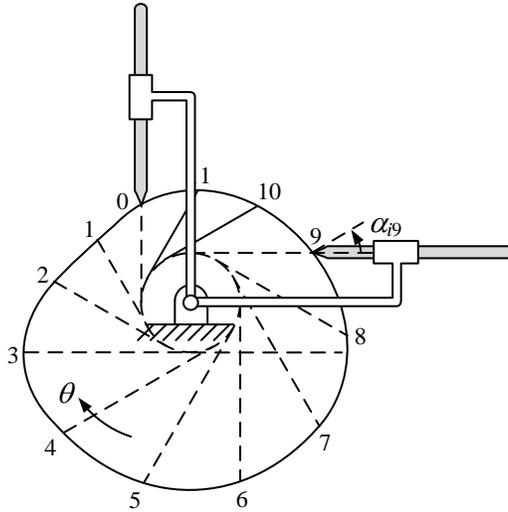
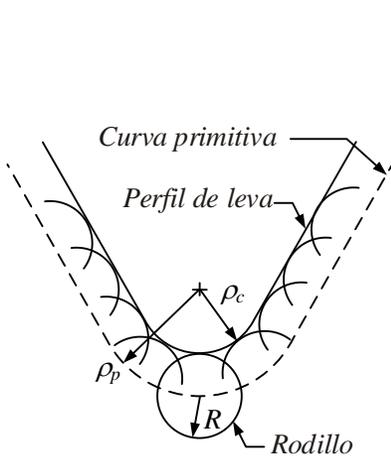
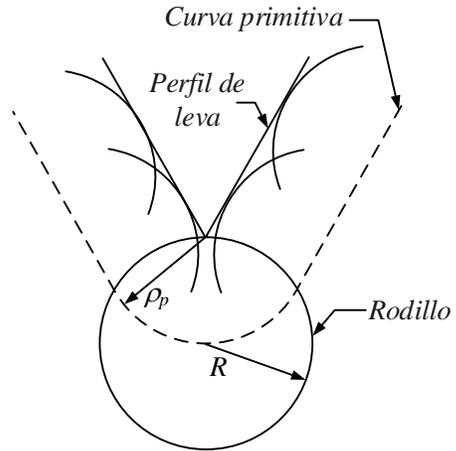


Figura 6.31: Seguidor excéntrico hacia la izquierda.

Teniendo en cuenta que para asegurar el contacto leva-seguidor existe un muelle antagonista que se comprime en la carrera de ascenso, el muelle alcanzará su máxima fuerza en el momento en que el seguidor alcance la posición más elevada de su carrera. Puesto que el momento resistente producido en las guías crece al crecer el ángulo de presión y el esfuerzo normal, para mantener dicho momento dentro de límites tolerables interesará reducir el ángulo de presión en los momentos en que el esfuerzo normal es más elevado, al comprimirse el muelle. En conclusión, el desplazamiento excéntrico del seguidor se debe diseñar de forma que el ángulo de presión se vea reducido cuando la fuerza alcance sus valores máximos, a costa de aumentarlo cuando la fuerza sea mínima.

6.7. Limitaciones en el diámetro de los rodillos

El diámetro del rodillo del seguidor debe ser lo más grande posible para que las tensiones en la superficie de la leva sean reducidas. Sin embargo, si el radio de curvatura de la curva primitiva en cualquiera de sus puntos es menor que el radio del rodillo, el perfil teórico de la leva es una superficie que intersecta consigo misma, por lo que su construcción es imposible. Para ver esto, observemos la figura 6.32. Cuando el radio del rodillo r es menor que el de la curva primitiva ρ_p , el perfil de la leva queda definido de forma

Figura 6.32: $r < \rho_p$.Figura 6.33: $r = \rho_p$.

unívoca. Como se puede ver, el perfil de leva es paralelo a la línea primitiva y su radio local de curvatura es

$$\rho_c = \rho_p - r \quad (6.48)$$

Cuando el radio del rodillo va creciendo, como en la figura 6.32, hasta llegar al caso límite $r = \rho_p$, el radio de curvatura de la leva se vuelve nulo, adoptando una forma de pico agudo. Lógicamente, esto produciría tensiones muy elevadas que se deben evitar. Por ello, las levas se construyen de manera que el radio del rodillo sea más pequeño que el menor radio de curvatura de la leva.

Si el radio del rodillo llegara a ser mayor que el radio de curvatura de la curva primitiva (figura 6.34), la envolvente de las posiciones del rodillo tiene la forma mostrada en la figura del centro que, como se ve, interseca consigo misma. Esto quiere decir que si se utiliza una herramienta con forma de rodillo para tallar el perfil de leva, se eliminará el material limitado por el punto de intersección de la curva, mostrado en color más oscuro. A este fenómeno se le denomina interferencia de tallado.

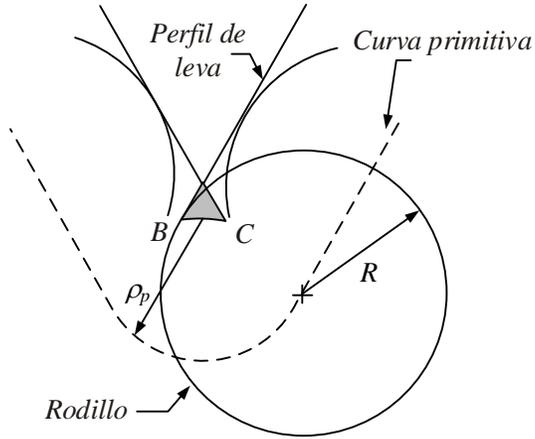


Figura 6.34: $r > \rho_p$.

Capítulo 7

Engranajes cilíndricos rectos

7.1. Clasificación de los engranajes

Los engranajes son elementos que permiten transmitir rotaciones entre ejes con una relación de velocidades angulares constante. Aunque este mismo objetivo se puede lograr también mediante correas, cadenas, ruedas de fricción o mecanismos de barras articuladas, los engranajes son quizá los elementos más versátiles y los que presentan menores limitaciones. Por ejemplo, las cadenas y correas son alternativas silenciosas y de bajo coste, pero tienden a ocupar un volumen superior y su capacidad de transmisión de potencia es limitada. Los engranajes, en cambio, son compactos, sencillos de fabricar, pueden transmitir grandes potencias y están normalizados, razones por las que su presencia es ubicua en todo tipo de máquinas, en forma de reductores, multiplicadores, cajas de cambios, diferenciales, etc.

Los engranajes se clasifican en tres grupos, atendiendo a la disposición de sus ejes:

a. **Ejes paralelos** → engranajes cilíndricos

- Dientes rectos: pueden ser *exteriores* (figura 7.1) o *interiores*.
- Piñón–cremallera (figura 7.2).
- Dientes helicoidales (figura 7.3) y *Herringbone* (figura 7.4).

b. **Ejes que se cortan** → engranajes cónicos

- Dientes rectos (figura 7.5).
- Dientes espirales (figura 7.6).

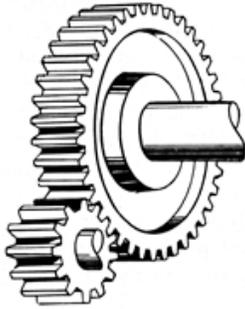


Figura 7.1: Rectos exteriores.

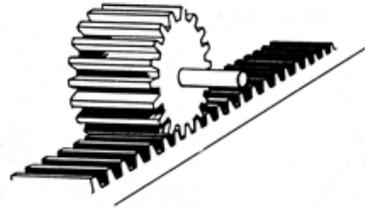


Figura 7.2: Piñón-cremallera.

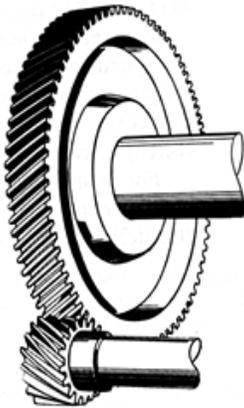


Figura 7.3: Helicoidales.



Figura 7.4: Helicoidales Herringbone.

c. Ejes que se cruzan

- Hipoides (figura 7.7).
- Sinfín-corona (figura 7.8).
- Helicoidales de ejes cruzados (figura 7.9).

7.2. Ley general de engrane. Perfiles conjugados

Los engranajes antiguos, como los mostrados en la figura 7.10 se fabricaban de madera y constaban de un elemento circular en forma de rueda sobre el que se montaban piezas salientes igualmente espaciadas, de modo que los salientes de la rueda motriz encajaban en los de la rueda conducida

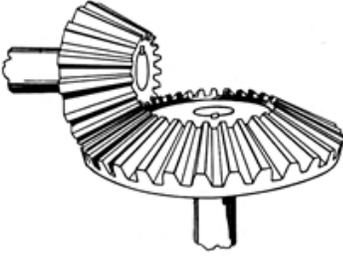


Figura 7.5: Engranajes cónicos.

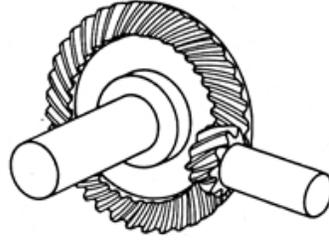


Figura 7.6: Cónicos espirales.

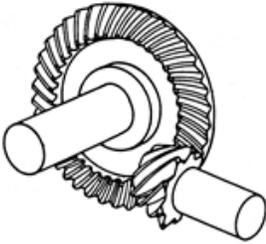


Figura 7.7: Hipoides.



Figura 7.8: Sinfín-corona.



Figura 7.9: Ejes cruzados.

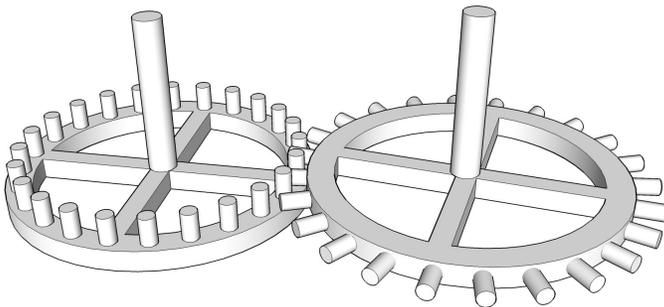


Figura 7.10: Engranajes antiguos.

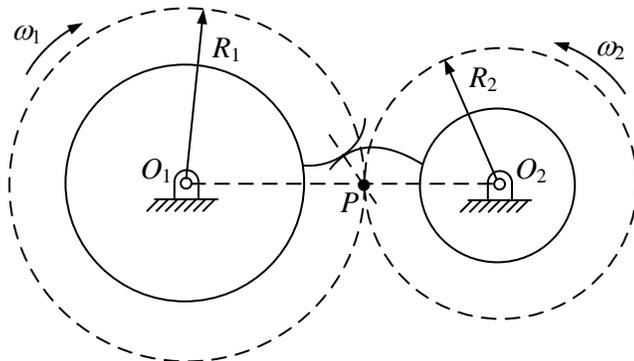


Figura 7.11: Transmisión de la rotación por contacto directo.

y la arrastraban. Al margen de otras consideraciones sobre su resistencia y eficiencia, estos engranajes adolecen de una severa limitación cinemática que impide su utilización, excepto a velocidades muy bajas, ya que la relación de velocidades angulares entre los ejes de entrada y salida sólo es constante en promedio, pero no lo es cada instante, provocando aceleraciones elevadas, ruido y vibraciones. Concluimos, por tanto, que una propiedad esencial de los engranajes para su correcto funcionamiento es que la relación de velocidades angulares sea constante en todo momento.

Los engranajes transmiten el movimiento mediante contacto directo entre dos superficies curvas como las de la figura 7.11 y, como se vio en el capítulo precedente, la relación de velocidades angulares se puede escribir en función de la posición del punto P , intersección de la línea de centros con la normal a los perfiles en el punto de contacto:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}} \quad (7.1)$$

Para que la relación ω_1/ω_2 permanezca constante es necesario que el punto P permanezca invariable en la línea de centros. A esta condición se la conoce como *ley general de engrane* y los perfiles que la cumplen se denominan *perfiles conjugados*.

El movimiento de los perfiles conjugados es equivalente a la rodadura de dos circunferencias de radios $R_1 = \overline{O_1P}$ y $R_2 = \overline{O_2P}$, denominadas *circunferencias primitivas*. Conviene no confundir dicho movimiento de rodadura equivalente con el contacto real entre las superficies, que no es de rodadura pura, sino que los puntos de contacto tienen una velocidad de deslizamiento en la dirección tangente al contacto entre los dientes, razón por la que los engranajes deben funcionar con lubricación.

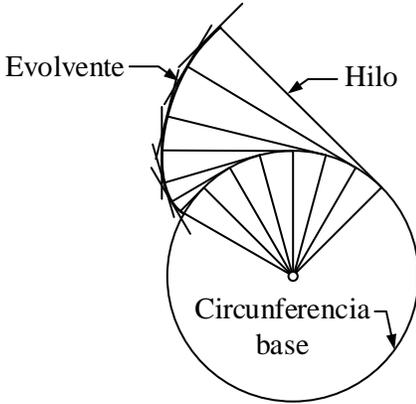


Figura 7.12: Evolvente de circunferencia.

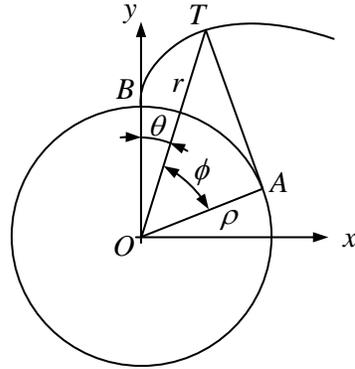


Figura 7.13

7.3. Engranajes de evolvente

De la sección anterior se deduce la necesidad de encontrar unos perfiles conjugados que, satisfaciendo la ley general de engrane, sean sencillos de construir. De entre los múltiples perfiles posibles, el más extendido es la curva *evolvente de circunferencia*, que se utiliza en la mayor parte de los engranajes rectos y helicoidales.

La evolvente se puede definir como la trayectoria descrita por el extremo de un hilo que se desenrolla de una circunferencia, denominada *circunferencia base*, como se muestra en la figura 7.12. Alternativamente, una evolvente de circunferencia se puede definir como el lugar geométrico de los puntos cuyo centro de curvatura es una circunferencia. Como se puede ver en la figura, la normal a la evolvente en un punto cualquiera es tangente a la circunferencia base, y su tangente es normal al hilo que se desenrolla.

Observando la figura 7.13, podemos ver que el arco \widehat{AB} coincide con la línea \overline{AT} , ya que representan los estados enrollado y estirado del hilo. Llamando ρ al radio de la circunferencia base, se cumple

$$\rho \tan \phi = \rho (\theta + \phi) \tag{7.2}$$

Despejando θ :

$$\theta = \tan \phi - \phi = Ev(\phi) \tag{7.3}$$

donde $Ev(\phi)$ se denomina *función evolvente* de ϕ . El ángulo ϕ se puede despejar de la ecuación anterior empleando la función inversa:

$$\phi = Ev^{-1}(\theta) \tag{7.4}$$

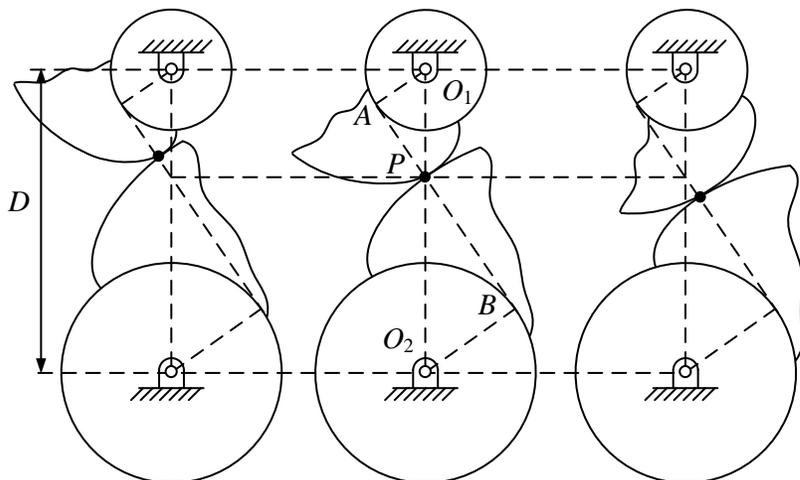


Figura 7.14: Engrane entre perfiles de evolvente.

Volviendo a la figura 7.13, podemos escribir

$$r = \frac{\rho}{\cos \phi} = \frac{\rho}{\cos (Ev^{-1}(\theta))} \quad (7.5)$$

que representa la ecuación analítica de la evolvente en coordenadas polares. Entre las propiedades de los perfiles de evolvente podemos destacar las siguientes:

- a. **Engranaran a cualquier distancia entre centros:** sean las dos circunferencias base con centros O_1 y O_2 , y dos perfiles de evolvente, de los que la figura 7.14 muestra tres posiciones distintas de su movimiento relativo. Hemos visto que la normal en cualquier punto de la evolvente es tangente a la circunferencia base. Por tanto, la normal común a las dos evolventes en el punto de contacto ha de ser tangente a cada una de las circunferencias base, lo que implica que la normal es tangente simultáneamente a las dos circunferencias base. En la figura 7.14 se observa cómo el punto de contacto se va desplazando a medida que las circunferencias giran pero el punto P , intersección de la línea de centros con la normal común a los dos perfiles permanece constante.

La figura 7.15 muestra lo que ocurre cuando los mismos dos perfiles de la figura 7.14 engranan a una distancia entre centros $d < D$. Se puede ver cómo los centros de las dos circunferencias están, en este,

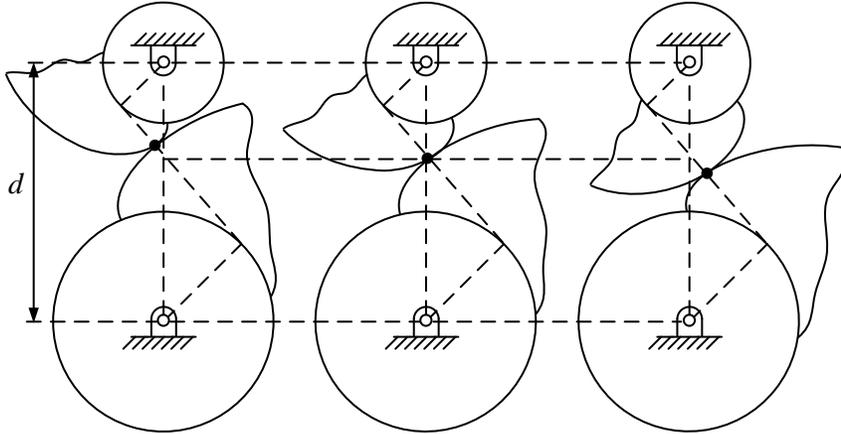


Figura 7.15: Engrane entre perfiles de evolvente a una distancia $d < D$.

caso más próximos. Sin embargo, durante el movimiento de rotación la intersección de la normal con la línea de centros sigue siendo un punto fijo. Por tanto, podemos concluir que los perfiles de evolvente satisfacen la ley general de engrane cualquiera que sea distancia entre los centros de las circunferencias base.

- b. **Su movimiento equivale a la rodadura de sus circunferencias base:** como se va visto, el movimiento de los engranajes que satisfacen la ley general de engrane equivale a la rodadura de sus circunferencias primitivas. En los engranajes de evolvente, además, como se ve en la figura 7.16, la proporcionalidad de los triángulos obliga a que el cociente entre los radios de las circunferencias primitivas R_1/R_2 sea idéntico al cociente entre los radios de las circunferencias base ρ_1/ρ_2 , de forma que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (7.6)$$

resultado que permite interpretar el movimiento de dos engranajes como el de rodadura entre sus circunferencias base, unidas a través de una correa imaginaria mostrada en trazo gris.

- c. **La línea de engrane es una recta:** se llama *línea de engrane* al lugar geométrico de los puntos de contacto entre perfiles conjugados. Como se ha visto en la figura 7.14, este lugar geométrico es una recta

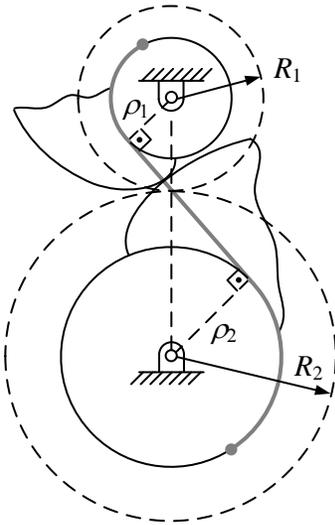


Figura 7.16

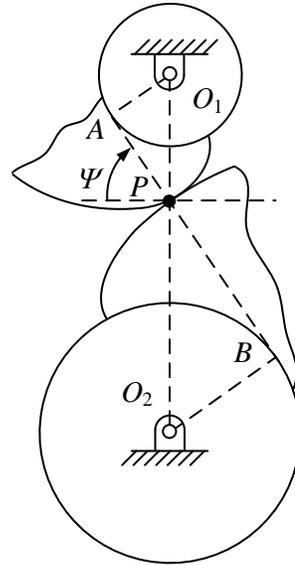


Figura 7.17

en los perfiles de evolvente. En la figura 7.17 se puede ver la línea de engrane, que es el segmento AB .

La línea de engrane es también la normal común a los dos perfiles de evolvente por lo que indica la dirección a lo largo de la cual se transmiten los esfuerzos entre los dientes. Al ángulo ψ que forma la línea de engrane con la horizontal se le conoce como ángulo de presión, que en los engranajes normalizados vale 20° . El ángulo de presión varía al modificar la distancia entre centros.

d. Los perfiles de evolvente son fáciles de generar

En la figura 7.18 se muestran dos perfiles de evolvente y sus correspondientes circunferencias primitivas. El movimiento de la rueda 1 considerando la rueda 2 como fija es una rodadura de la circunferencia primitiva 1 sobre la 2. Durante su movimiento, del que se muestran seis fotogramas, el perfil 1 va pasando por sucesivas posiciones, permaneciendo tangente al perfil 2. El conjunto de las sucesivas posiciones que alcanza el perfil 1 a lo de su movimiento pueden interpretarse como un haz de curvas cuya envolvente es, precisamente, el perfil de evolvente 2.

Supongamos ahora que hacemos crecer hasta el infinito el radio pri-

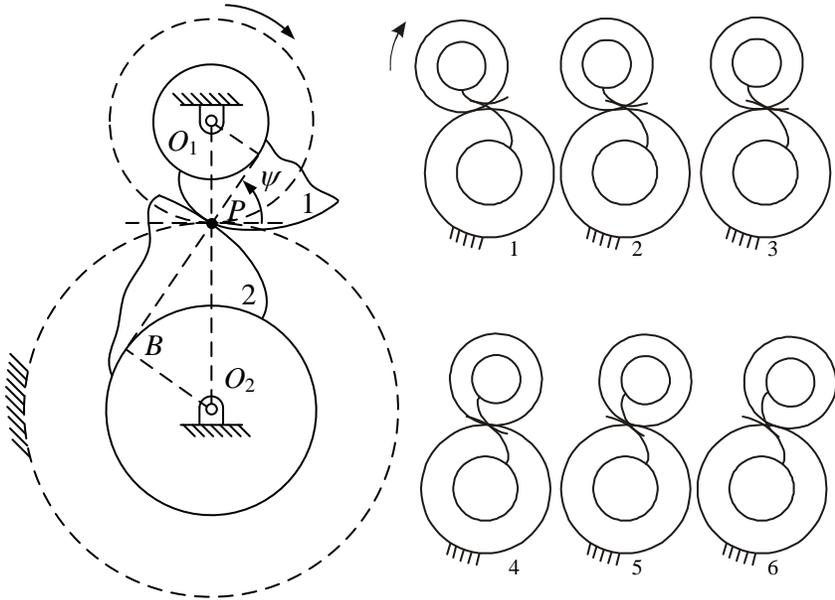


Figura 7.18: Movimiento invertido entre dos perfiles de evolvente.

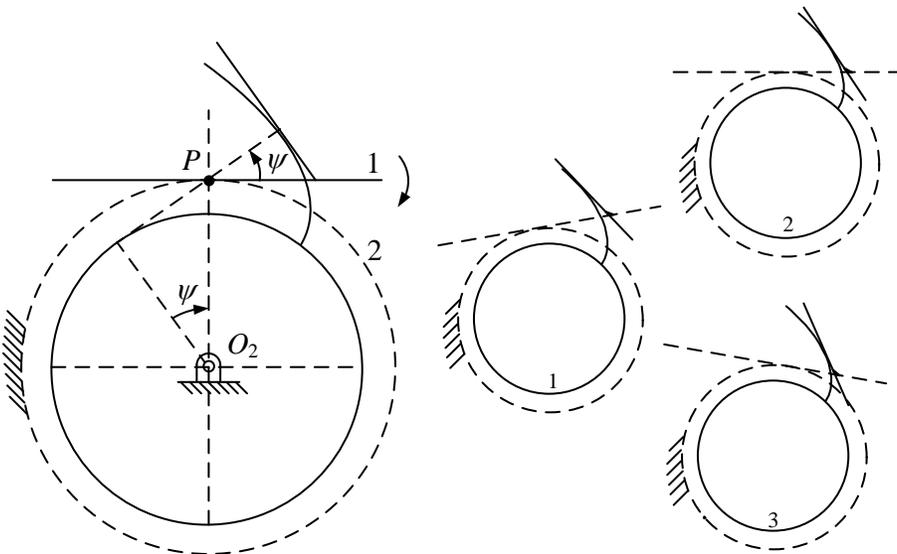


Figura 7.19: Movimiento invertido entre evolvente y una recta.

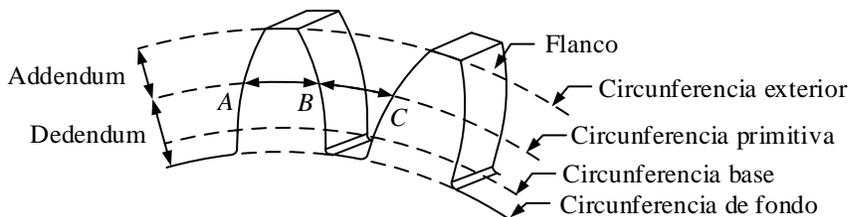


Figura 7.20: Nomenclatura de los engranajes.

mitivo de la circunferencia 1, obteniendo el resultado de la figura 7.19, en el que la circunferencia primitiva 1 se ha transformado en la recta 1, al tiempo que el perfil de evolvente 1 se ha transformado en una recta inclinada que forma un ángulo ψ con la vertical. Puesto que la recta se ha obtenido por un proceso de paso al límite, debe ser también un perfil conjugado a la evolvente 2. Por ello, al hacer rodar la línea primitiva 1 sobre la circunferencia 2, como se ilustra mediante tres fotogramas, la recta inclinada que está solidariamente unida a la recta 1, genera una envolvente que coincide con el perfil de evolvente 2. Como se verá más adelante, esta propiedad se utiliza para generar en la práctica dientes de engranaje.

7.4. Nomenclatura y estandarización

El contacto entre dos perfiles de evolvente no asegura ni la continuidad del movimiento en una revolución completa ni el carácter bidireccional de la transmisión de potencia, ya que en un sentido los perfiles se separarán. La solución a ambos problemas es el dentado característico de los engranajes, consistente en disponer una sucesión de perfiles de evolvente, agrupados por parejas simétricas formando dientes. El dentado de los engranajes está sujeto a diversas normas de estandarización UNE e ISO. La figura 7.20 muestra la nomenclatura más comúnmente utilizada.

Especialmente importantes son tres arcos medidos sobre la circunferencia primitiva: el *espesor del diente* \widehat{AB} , la *anchura del hueco* \widehat{BC} y el *paso circular* $p = \widehat{AC}$. Por razones prácticas, para evitar las medidas circunferenciales en la denominación de los engranajes, se define el *módulo* como

$$m = \frac{p}{\pi} \quad (7.7)$$

Llamando z al número de dientes y R al radio primitivo, el paso p se

puede escribir como

$$p = \frac{2 \pi R}{z} \quad (7.8)$$

Comparando las ecuaciones 7.7 y 7.8, se obtiene la relación entre el radio primitivo y el módulo

$$R = \frac{mz}{2} \quad (7.9)$$

Las normas ISO para España contienen tres series de módulos, de las que se recomienda utilizar los módulos de la serie *I* siempre que sea posible y evitar los módulos de la serie *III* salvo casos imprescindibles.

Serie I (mm)	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	...
Serie II (mm)	1,25	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	...
Serie III (mm)	—	—	—	—	3,25	3,75	—	6,5	...

Tabla 7.1: Extracto de la tabla de módulos ISO.

Asimismo, se encuentran normalizados, entre otros, las siguientes dimensiones:

- **El espesor del diente:** coincide con la anchura del hueco, por lo que su valor es $p/2$.
- **El ángulo de presión ψ :** se recomienda emplear $\psi = 20^\circ$ pero, si es necesario, se puede utilizar también los ángulos $\psi = 14,5^\circ$ y $\psi = 25^\circ$.
- **El addendum a :** su dimensión es $a = m$ en los dientes normales y $a = 0,75 m$ en los dientes cortos.
- **El dedendum d :** su dimensión es $d = 1,25 m$ en los dientes normales y $d = m$ en los dientes cortos.

Por consideraciones geométricas obvias se concluye que, para que dos engranajes engranen, es necesario que tengan el mismo paso circular, como se aprecia en la figura 7.21, donde la diferencia entre p_1 y p_2 impide el encaje de los dientes de uno en los huecos del otro. Por lo tanto, se debe cumplir

$$p_1 = p_2 \quad (7.10)$$

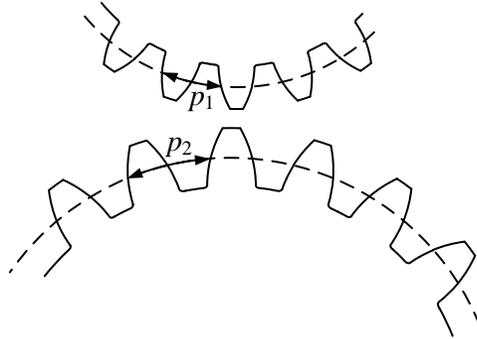


Figura 7.21: Necesidad de la igualdad de pasos circulares.

De las ecuaciones 7.6, 7.9 y 7.10 se puede escribir la identidad

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (7.11)$$

Para que las ruedas dentadas con perfil de evolvente sean intercambiables entre sí, deben de cumplir las siguientes condiciones:

- Tener el mismo módulo (lo que equivale al mismo paso circular).
- Tener igual ángulo de presión de generación ψ .
- Presentar addendum y dedendum normalizados.
- Tener anchura del hueco igual al espesor del diente sobre la circunferencia primitiva.

En un par de engranajes se denomina rueda al de mayor diámetro y piñón al de menor diámetro.

7.5. Generación de engranajes

Los engranajes se pueden fabricar en infinidad de materiales, tamaños, formas y tolerancias, lo que conlleva un gran número de métodos posibles de fabricación. Por ejemplo, los engranajes de pequeño tamaño y potencia se fabrican a muy bajo precio mediante inyección de plástico. Los engranajes de mayor potencia y resistencia se fabrican habitualmente por procesos de mecanizado, y en algunas aplicaciones mediante consolidación de polvos o electro-erosión.

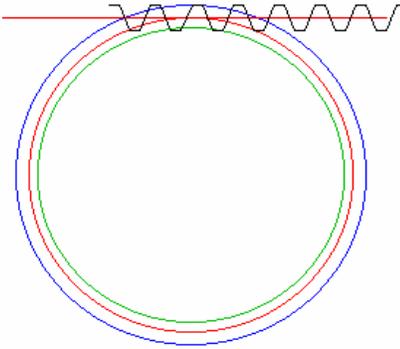


Figura 7.22

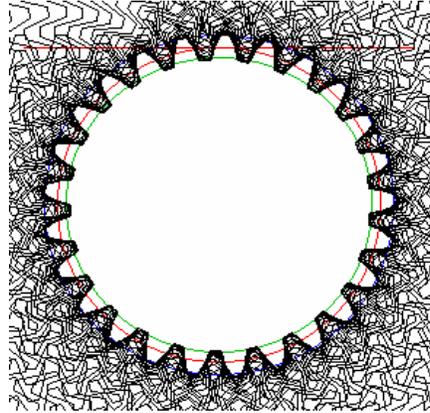


Figura 7.23

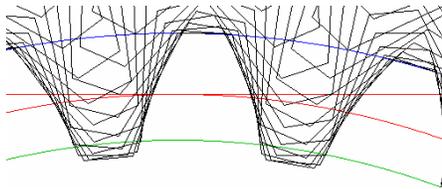


Figura 7.24

7.5.1. Generación por cremallera

Aprovechando la propiedad vista en el apartado 7.3, se pueden unir varios planos inclinados sobre la misma línea primitiva para formar un dispositivo llamado cremallera. La figura 7.22 muestra una cremallera y su línea primitiva, así como las circunferencias exterior, primitiva y base de un cilindro. Al hacer rodar la línea primitiva de la cremallera sobre la circunferencia primitiva del cilindro cada plano inclinado de la cremallera generará un perfil de evolvente. El resultado final, ilustrado en la figura 7.23, muestra cómo se han generado todos los dientes del engranaje tras esta operación. La figura 7.24 muestra un detalle de la generación de uno de los dientes.

Para mecanizar un engranaje se parte de un cilindro macizo y de una herramienta de corte en forma de cremallera, que se puede desplazar en la dirección del eje del cilindro. Para generar los dientes, se reproduce el movimiento de rodadura de la cremallera sobre el cilindro mediante la operación ilustrada en la figura 7.25, que se puede resumir en los siguientes pasos:

- a. La cremallera se retira y se sitúa el cilindro de manera que la línea primitiva del cilindro y de la cremallera sean coincidentes
- b. Se desplaza la cremallera en la dirección del eje del cilindro, cortando el material que interfiere con los dientes de la cremallera.
- c. Se retira la cremallera. A continuación se gira el cilindro un pequeño ángulo $\Delta\varphi$ y se desplaza la cremallera una distancia $R\Delta\varphi$. Cuanto más pequeño sea $\Delta\varphi$, mejor será el acabado del engranaje.
- d. Se desplaza la cremallera de nuevo en dirección del eje del cilindro, eliminando de nuevo el material que interfiere con la cremallera.
- e. Se repiten los pasos 3 y 4 hasta que se completan los 360 grados.

Un inconveniente de la generación por cremallera es que son necesarias cremalleras de gran longitud para tallar engranajes de diámetro elevado. Por ello, en lugar de cremalleras se pueden utilizar herramientas para fresado en forma de tornillo cuya sección longitudinal es la de una cremallera. El tallado de engranajes con este tipo de herramientas se realiza mediante una fresadora.

La generación de engranajes con cremallera o fresa puede producir el fenómeno de *interferencia de tallado*, que se produce al tallar parte del perfil por debajo de la circunferencia base. La línea de engrane es el segmento \overline{CD}

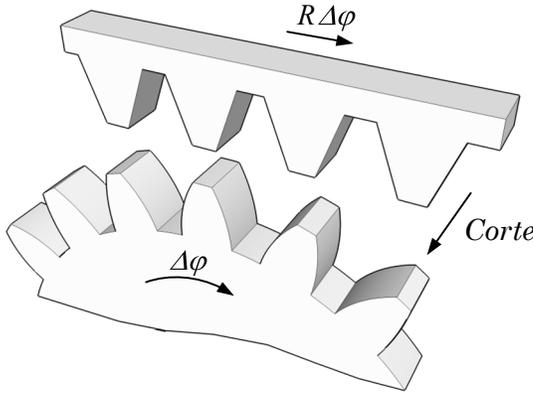


Figura 7.25: Tallado de un engranajes mediante cremallera.

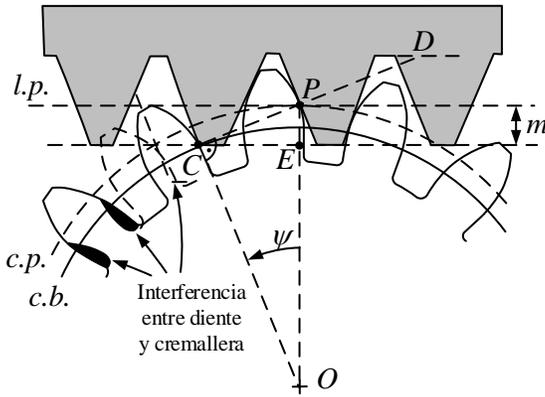


Figura 7.26: Interferencia de tallado.

de la figura 7.26, donde se representa la situación límite en que el punto C se encuentra sobre la circunferencia base. Si el addendum de la cremallera fuese mayor, la línea exterior de la cremallera sería como la indicada con línea de trazos, y la línea de engrane debería continuar hacia la izquierda del punto C . Como esto no ocurre, la cremallera interfiere con el diente recién generado debajo de la circunferencia base, generándose un perfil con forma cóncava que debilita el diente.

Teniendo en cuenta que las cremalleras normalizadas tienen un addendum igual al módulo, la condición para evitar la interferencia de tallado se puede escribir como:

$$m \leq \overline{PE} = \overline{OP} - \overline{OE} = R - R \cos^2 \psi = R \operatorname{sen}^2 \psi \quad (7.12)$$

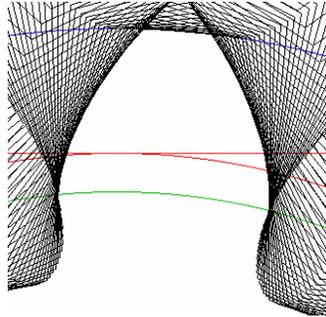


Figura 7.27: Diente con interferencia de tallado.

Sustituyendo $m = 2R/z$, la desigualdad queda finalmente

$$z \geq \frac{2}{\text{sen}^2\psi} \quad (7.13)$$

lo que representa una limitación al número mínimo de dientes que se pueden tallar sin que haya interferencia de tallado. En los engranajes normalizados el ángulo de presión es $\psi = 20^\circ$, lo que en la práctica implica que no se pueden tallar engranajes de menos de 18 dientes. La figura 7.27 muestra el efecto de la interferencia de tallado al tallar un engranaje de 10 dientes y $m = 1$ mm.

Cuando es necesario tallar engranajes de menos de 18 dientes, se ha de adoptar alguna de las siguientes alternativas:

- a. Disminuir el tamaño del addendum de la cremallera a $0,8m$. Entonces la limitación anterior se convierte en

$$z \geq \frac{1,6}{\text{sen}^2\psi} \quad (7.14)$$

que permite tallar engranajes de hasta 14 dientes.

- b. Aumentar el ángulo de presión a $\psi = 25^\circ$. La ecuación 7.11 limita entonces el número de dientes a 12.
- c. Tallar engranajes corregidos, es decir, con cremallera desplazada, como se explicará más detenidamente en apartados posteriores.

Por último, es necesario recordar que la generación con cremallera solamente genera perfil de evolvente por encima de la circunferencia base, por lo que el perfil existente por debajo de ésta no cumple la ley general de

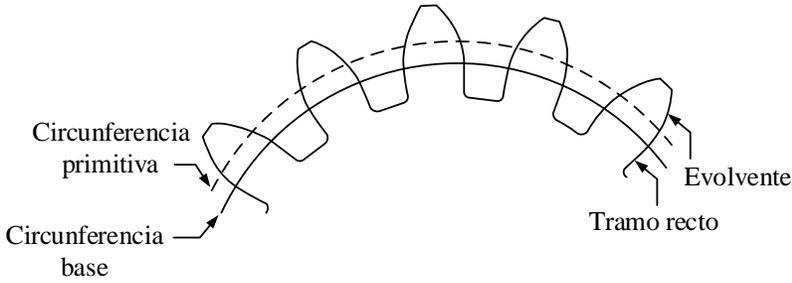


Figura 7.28: Perfil bajo la circunferencia base.

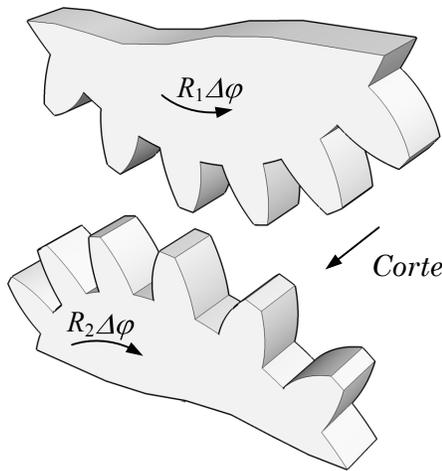


Figura 7.29: Tallado con piñón.

engrane, luego no sirve para engranar. Habitualmente este perfil está compuesto por tramos rectos terminados con radios de acuerdo, como se indica en la figura 7.28.

7.5.2. Generación por piñón

Como todos los perfiles de evoluta son conjugados entre sí, también podemos generar un engranaje utilizando una herramienta de corte con forma de piñón. El proceso de tallado, representado en la figura 7.29, es similar al de la generación con cremallera. En este caso también puede producirse la interferencia de tallado, aunque el problema es menos crítico pues, al ser curva la trayectoria de los dientes del piñón, se aleja del punto límite C de la figura 7.26. Una de las ventajas del tallado por piñón es

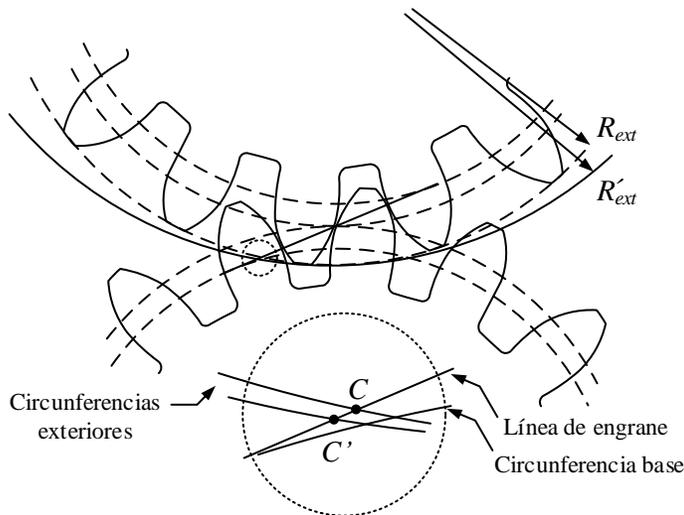


Figura 7.30: Interferencia de funcionamiento.

que sirve para fabricar engranajes interiores, que no pueden ser fabricados mediante cremallera.

En los engranajes tallados con piñón puede aparecer la denominada *interferencia de funcionamiento*, que se presenta cuando, tras tallar con piñón un engranaje de radio exterior R_{ext} , se le hace engranar con otro de radio exterior $R'_{ext} > R_{ext}$. La figura 7.30 muestra la zona donde se produce la interferencia. Como se aprecia en la ampliación, la línea de engrane producida al tallar con el piñón de radio R_{ext} termina en el punto C , mientras que para engranar con R'_{ext} debería terminar en C' , lo que implica que entre los puntos C y C' el contacto se producirá sin perfil de evolvente. Para evitar la interferencia de funcionamiento, los piñones de tallado suelen tener un addendum mayor que el módulo.

7.6. Arco de conducción y relación de contacto

La figura 7.31 muestra las circunferencias exterior, primitiva y base de dos engranajes cuyo segmento de engrane es \overline{AB} . La figura 7.32 muestra cómo el punto A del segmento de engrane representa la posición en que los dientes toman contacto por primera vez y B la posición en que lo pierden. Para pasar de A a B los engranajes deben girar un ángulo γ , denominado *ángulo de conducción* que, en general, es diferente para cada engranaje. Sin embargo, debido a que entre las circunferencias primitivas hay rodadura,

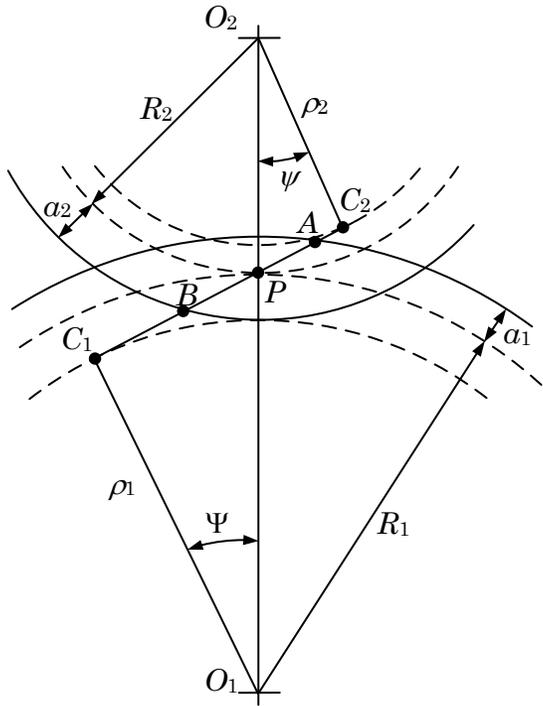


Figura 7.31

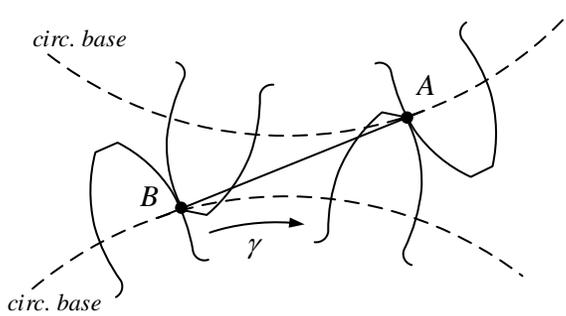


Figura 7.32: Toma y pérdida de contacto entre dientes.

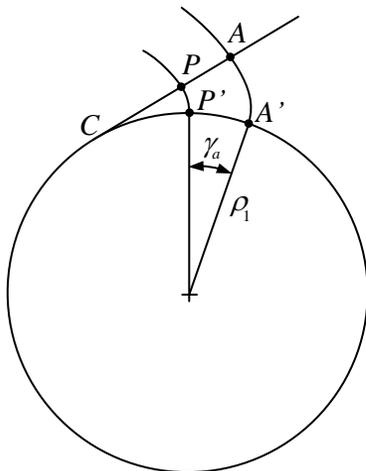


Figura 7.33

el arco interceptado sobre la circunferencia primitiva por cada uno de los dos ángulos de conducción es el mismo, y se le conoce como *arco de conducción*.

Al segmento \overline{AP} se le denomina *segmento de aproximación* y al \overline{PB} *segmento de alejamiento*. Al ángulo γ_a girado por el engranaje para pasar de A a P se le denomina *ángulo de aproximación* y al ángulo γ_r girado para pasar de P a B se le denomina *ángulo de alejamiento*.

La figura 7.33 muestra la circunferencia base y el flanco de un diente en dos posiciones distintas, correspondientes a los puntos A y P, separadas un ángulo γ_a . Por las propiedades de la evolvente, el flanco $A'A$ se puede imaginar generado por un hilo que inicialmente estuviese enrollado sobre CA' y que actualmente se encuentra coincidente con CA . Análogamente, el flanco $P'P$ se puede generar mediante un hilo que inicialmente estaba sobre CP' y que actualmente coincide con CP . Por tanto, el segmento \overline{CP} coincide con el arco $\widehat{A'P'}$. Matemáticamente:

$$\overline{AP} = \overline{A'P'} = \rho_1 \gamma_a \quad (7.15)$$

y análogamente para \overline{PB} :

$$\overline{PB} = \overline{P'B'} = \rho_1 \gamma_r \quad (7.16)$$

Despejando γ_a y γ_r , tenemos

$$\gamma_a = \frac{\overline{AP}}{\rho_1} \quad (7.17)$$

$$\gamma_r = \frac{\overline{PB}}{\rho_1} \quad (7.18)$$

De la figura 7.31 deducimos

$$\overline{AP} = \overline{AC}_1 - \overline{PC}_1 = \sqrt{(R_1 + a_1)^2 - \rho_1^2} - R_1 \operatorname{sen} \psi \quad (7.19)$$

$$\overline{PB} = \overline{BC}_2 - \overline{PC}_2 = \sqrt{(R_2 + a_2)^2 - \rho_2^2} - R_2 \operatorname{sen} \psi \quad (7.20)$$

Llamando α al arco de conducción, podemos escribir

$$\begin{aligned} \alpha = R_1 (\gamma_a + \gamma_r) &= R_1 \left(\frac{\overline{AP}}{\rho_1} + \frac{\overline{PB}}{\rho_1} \right) = \frac{R_1}{\rho_1} \left(\sqrt{(R_1 + a_1)^2 - \rho_1^2} + \right. \\ &\left. + \sqrt{(R_2 + a_2)^2 - \rho_2^2} - (R_1 + R_2) \operatorname{sen} \psi \right) \quad (7.21) \end{aligned}$$

Se llama *relación de contacto* al cociente entre el arco de conducción y el paso circular. En función del módulo, la relación de contacto se escribe como

$$r_c = \frac{\alpha}{m\pi} \quad (7.22)$$

La relación de contacto es un parámetro importante que cuantifica el número de dientes que están en contacto en cada instante. Por ejemplo, una relación de contacto de 1,8 equivale a que el 80 % del tiempo hay dos parejas de dientes en contacto y el 20 % sólo una pareja. La relación de contacto es, obviamente, mayor que la unidad y depende fundamentalmente del radio de los engranajes.

7.7. Cálculo del espesor del diente

Para estudiar el espesor de un diente partimos de la figura 7.34, en la que se consideran dos puntos cualesquiera T y A . Para el punto T definimos los ángulos θ_T y β_T , tomando como referencias, respectivamente, el punto de arranque del perfil de evolvente y el punto medio del diente. Análogamente,

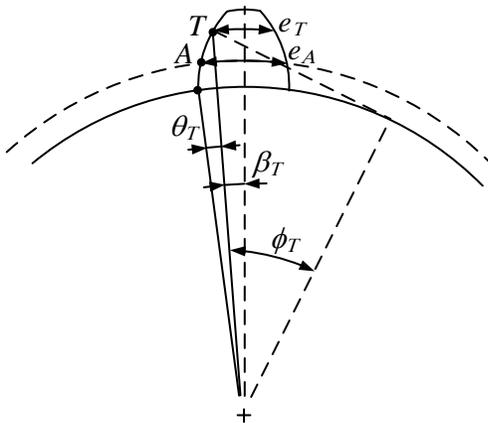


Figura 7.34

definimos los ángulos θ_A y β_A , no dibujados en la figura. Llamando R_T y R_A a los radios en T y A , y e_T y e_A a sus espesores, podemos escribir:

$$e_T = 2 R_T \beta_T \quad (7.23)$$

$$e_A = 2 R_A \beta_A \quad (7.24)$$

Por definición, se verifica la igualdad

$$\theta_T + \beta_T = \theta_A + \beta_A \quad (7.25)$$

Sustituyendo el valor del ángulo θ por la función $Ev(\phi)$ según se ha visto en la ecuación 7.3, se obtiene:

$$Ev(\phi_T) + \beta_T = Ev(\phi_A) + \beta_A \quad (7.26)$$

Despejando β_T y sustituyendo en la ecuación 7.23, tenemos

$$e_T = 2 R_T \beta_A + 2 R_T [Ev(\phi_A) - Ev(\phi_T)] \quad (7.27)$$

Despejando ahora β_A de la ecuación 7.24 y sustituyendo,

$$e_T = R_T \left\{ \frac{e_A}{\beta_A} + 2 [Ev(\phi_A) - Ev(\phi_T)] \right\} \quad (7.28)$$

expresión que permite calcular el espesor del diente en la circunferencia T conocido el espesor en la circunferencia A . Habitualmente, se conoce el espesor en la circunferencia primitiva, que es la mitad del paso circular,

es decir, $e_A = m\pi/2$. Por otra parte, se puede comprobar fácilmente que el ángulo ϕ_A sobre la circunferencia primitiva coincide con el ángulo de presión de tallado, cuyo valor es $\psi = 20^\circ$ para los engranajes normalizados.

Esta expresión permite verificar la condición de apuntamiento, consistente en evaluar el espesor del diente sobre la circunferencia exterior. En determinadas circunstancias, el espesor en la circunferencia exterior puede reducirse tanto que el diente adopte forma puntiaguda que debilita su resistencia.

7.8. Engranajes corregidos

7.8.1. Limitaciones de los engranajes normales

Los engranajes vistos hasta ahora se denominan *normales* o *tallados a cero*, y en su generación se hace rodar la línea primitiva de la cremallera sobre la circunferencia primitiva del engranaje que se fabrica. En dichos engranajes, la línea primitiva de la cremallera coincide con la línea media, es decir, aquélla en que el espesor del diente coincide con la anchura del hueco. Estos engranajes presentan dos limitaciones importantes:

- Hay un número mínimo de dientes por debajo del cual aparece el fenómeno de interferencia de tallado, dado por la desigualdad $z \geq 2 \operatorname{sen}^2 \psi$
- La distancia de funcionamiento sin holguras viene fijada por la relación $d = m(z_1 + z_2)/2$. Puesto que m está normalizado y sólo puede tomar valores discretos, y los números de dientes z_1 y z_2 son valores enteros, resulta que d sólo puede tomar un conjunto discreto de valores. Por tanto, en caso de que la distancia de funcionamiento venga fijada por otros criterios de diseño, no será posible elegir engranajes que funcionen sin holguras.

La solución a estas dos limitaciones se encuentra en los *engranajes corregidos*, tallados con la cremallera desplazada respecto a su posición normal. La figura 7.35 ilustra este concepto: en la cremallera normal, la línea primitiva coincide con la línea media; en la cremallera corregida ésta se desplaza, adoptándose como línea primitiva otra en que el espesor del diente es menor que la anchura del hueco. El desplazamiento de la cremallera se mide como una fracción x del módulo, que se denomina *factor de corrección*. Este factor es positivo cuando el desplazamiento de la cremallera la aleja del engranaje (como en la figura 7.35) y negativo en caso contrario.

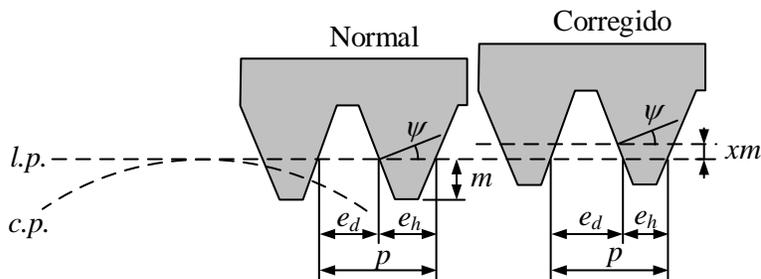


Figura 7.35: Cremallera normal y desplazada.

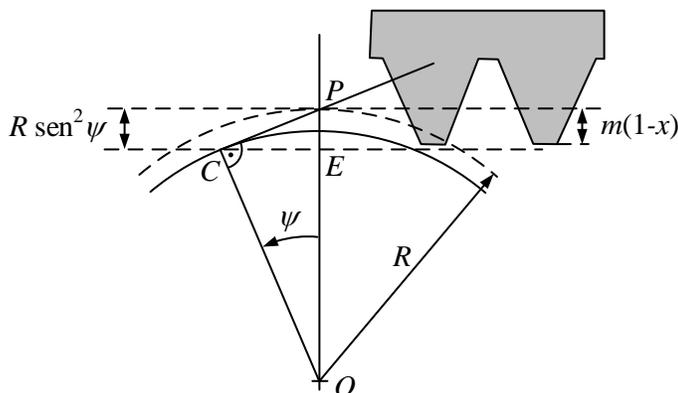


Figura 7.36

7.8.2. Corrección e interferencia de tallado

Una corrección positiva tiende a evitar la interferencia de tallado ya separa el extremo de los dientes del punto C . Para determinar la corrección mínima que evita la interferencia de tallado, observamos la figura 7.36, y de ella deducimos

$$m(1-x) \leq \overline{PE} = \overline{OP} - \overline{OE} = R - R \cos^2 \psi = \frac{mz}{2} \sin^2 \psi \quad (7.29)$$

y de aquí

$$x \geq 1 - \frac{z \sin^2 \psi}{2} \quad (7.30)$$

7.8.3. Distancia de funcionamiento de engranajes corregidos

Consideremos dos ruedas de radios R_1 y R_2 talladas con la misma cremallera pero con desplazamientos distintos x_1 y x_2 positivos. Debido a las

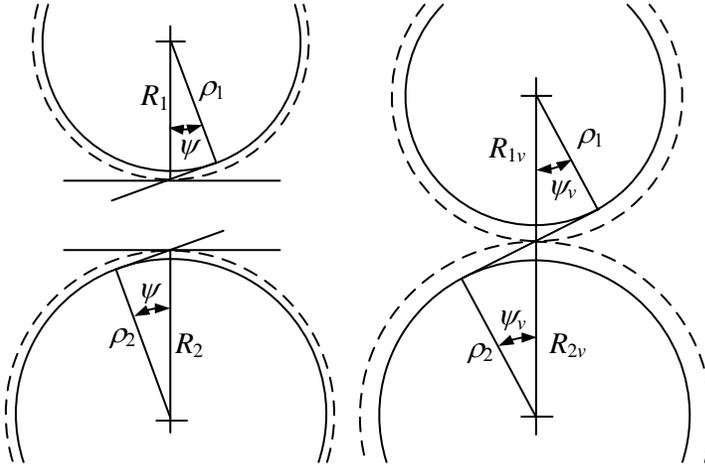


Figura 7.37: Condiciones de tallado y de funcionamiento.

correcciones, las ruedas no podrán engranar a la distancia $d = R_1 + R_2$ porque el espesor de los dientes en las circunferencias primitivas de tallado ha aumentado, y cada diente no cabrá en el hueco de la otra. En la figura 7.35 se aprecia cómo el espesor del diente e_d (que coincide con el espesor del hueco de la cremallera) es mayor en el engranaje con corrección positiva. Como los engranajes de evolvente pueden engranar a cualquier distancia entre centros, es cuestión de ir separando las dos ruedas hasta que un diente quepa en el hueco de otra. La consecuencia inmediata es que las ruedas no engranarán a la distancia $d = R_1 + R_2$, sino a otra distancia, que denominaremos distancia de funcionamiento $d_v = R_{1v} + R_{2v}$.

La figura 7.37 ilustra la diferencia entre las condiciones de tallado y las de funcionamiento. Durante el tallado, los radios primitivos de cada engranaje son R_1 y R_2 , con ángulo de presión ψ . En el funcionamiento, los engranajes se acercan progresivamente hasta que un diente encaja exactamente en el hueco del otro, momento en que los radios primitivos de funcionamiento son R_{1v} y R_{2v} , con ángulo de presión ψ_v (recuérdese que el ángulo de presión varía con la distancia entre centros). Sin embargo, las circunferencias base permanecen constantes en las condiciones de tallado y funcionamiento. Esta igualdad de los radios ρ_1 y ρ_2 en las condiciones de tallado y funcionamiento se puede expresar como

$$\rho_1 = R_1 \cos \psi = R_{1v} \cos \psi_v \quad (7.31)$$

$$\rho_2 = R_2 \cos \psi = R_{2v} \cos \psi_v \quad (7.32)$$

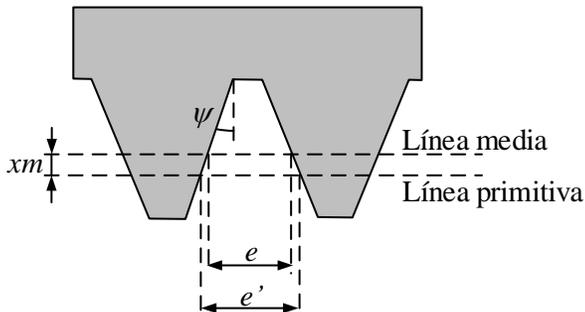


Figura 7.38

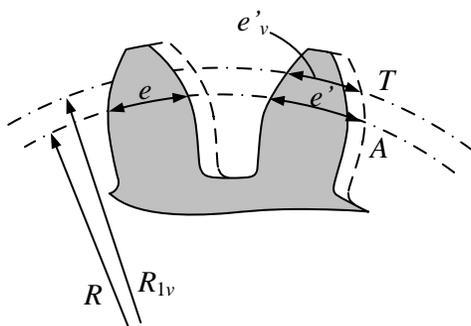


Figura 7.39

Sumando ambas ecuaciones se deduce

$$d \cos \psi = d_v \cos \psi_v \quad (7.33)$$

Para determinar la distancia de funcionamiento, estudiemos el espesor de los dientes corregidos. La figura 7.38 muestra una cremallera y sus líneas media y primitiva. La figura 7.39 muestra en línea continua los dientes sin corrección y con línea de trazos los dientes corregidos. Como se ve, el espesor del diente corregido e' medido sobre la circunferencia primitiva de tallado coincide con el espesor del hueco de la cremallera sobre la línea primitiva. Podemos escribir

$$e' = e + 2xm \tan \psi \quad (7.34)$$

donde e es el espesor sobre la línea media, que coincide con $m\pi/2$.

Teniendo en cuenta la ecuación 7.28, que $e_A = e'$, $\phi_A = \psi$ y $\phi_T = \psi_v$,

podemos escribir para los engranajes 1 y 2

$$e'_{1v} = R_{1v} \left\{ \frac{e'_1}{R_1} + 2 [Ev(\psi) - Ev(\psi_v)] \right\} \quad (7.35)$$

$$e'_{2v} = R_{2v} \left\{ \frac{e'_2}{R_2} + 2 [Ev(\psi) - Ev(\psi_v)] \right\} \quad (7.36)$$

Hemos visto que la distancia de funcionamiento era aquélla en la que el espesor de un diente coincide con el hueco del otro o, lo que lo mismo, en la que la suma de los espesores de los dos dientes coincide con el paso circular. Teniendo en cuenta que el paso circular en la circunferencia de radio R_{1v} es p_v , podemos escribir

$$e'_{1v} + e'_{2v} = p_v = \frac{2\pi R_{1v}}{z_1} = m\pi \frac{R_{1v}}{R_1} \quad (7.37)$$

Sustituyendo 7.35 y 7.36 y sacando factor común:

$$\begin{aligned} & \frac{R_{1v}}{R_1} \{ e'_1 + 2 R_1 [Ev(\psi) - Ev(\psi_v)] \} + \\ & \frac{R_{2v}}{R_2} \{ e'_2 + 2 R_2 [Ev(\psi) - Ev(\psi_v)] \} = m\pi \frac{R_{1v}}{R_1} \end{aligned} \quad (7.38)$$

De las ecuaciones 7.31 y 7.32 se deduce que las relaciones entre radios permanecen constantes, por lo que simplificando:

$$e'_1 + 2R_1 [Ev(\psi) - Ev(\psi_v)] + e'_2 + 2R_2 [Ev(\psi) - Ev(\psi_v)] = m\pi \quad (7.39)$$

De la ecuación 7.34 sabemos que

$$e'_1 = \frac{m\pi}{2} + 2x_1 m \tan \psi \quad (7.40)$$

$$e'_2 = \frac{m\pi}{2} + 2x_2 m \tan \psi \quad (7.41)$$

Sustituyendo, simplificando y sacando factor común tenemos

$$(x_1 + x_2) \tan \psi + \frac{z_1 + z_2}{2} [Ev(\psi) - Ev(\psi_v)] = 0 \quad (7.42)$$

Esta ecuación se puede utilizar para obtener las condiciones de engrane en dos situaciones diferentes:

- Se conocen las correcciones x_1 y x_2 y se quiere determinar la distancia de funcionamiento d_v : despejando de la ecuación 7.42 tenemos

$$Ev(\psi_v) = Ev(\psi) + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan \psi \quad (7.43)$$

De aquí se determina el ángulo de presión de funcionamiento ψ_v , y a través de la ecuación (5.40) se obtiene la distancia d_v .

- Se conoce la distancia de funcionamiento d_v y se quieren determinar las correcciones: despejando de la ecuación 7.42 se obtiene

$$x_1 + x_2 = (Ev(\psi_v) - Ev(\psi)) \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \psi} \quad (7.44)$$

Una vez conocida la suma de las correcciones hay que repartirla entre los dos engranajes de modo que se evite en ambos la interferencia de tallado. Si no hay problemas de interferencia, se puede repartir la corrección proporcionalmente al número de dientes de cada engranaje.

7.9. Relación de velocidades y número de dientes

Como se ha visto, la relación de velocidades en los engranajes viene dada por la ecuación

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (7.45)$$

Puesto que los números de dientes son números enteros, no podemos obtener cualquier relación de velocidades sino sólo un número discreto de ellas. Además, este cociente entre números enteros no puede ser cualquiera porque habitualmente existe una limitación en el máximo y mínimo número de dientes que podemos emplear.

Para aproximar una relación de velocidades dada podemos utilizar el *método de las fracciones continuas* que a continuación se explica con un ejemplo. Supongamos que queremos aproximar una relación de velocidades de $\pi/10 = 0,314149$. Procedemos del siguiente modo:

$$0,13141592 = \frac{314,1592}{1000} = \frac{1}{\frac{1000}{314,1592}} = \frac{1}{3 + \frac{57,5224}{314,1592}} = \quad (7.46)$$

$$= \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{314,1592}{57,5224}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{26,5472}{57,5224}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{4,428}{26,5472}}}} \quad (7.47)$$

Las distintas aproximaciones obtenidas son

Fracción	Error relativo
$\frac{1}{3} = 0,3333$	0,0610
$\frac{1}{3+\frac{1}{5}} = \frac{5}{16} = 0,3125$	0,00528
$\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}} = \frac{11}{35} = 0,3143$	0,00040
$\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}}} = \frac{60}{191} = 0,314136$	0,00007

Las soluciones posibles a nuestro problema, si no se puede bajar de 20 dientes, serían:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} \quad \frac{20}{60}, \frac{21}{63}, \frac{22}{66}, \dots \\ \frac{5}{16} \quad \frac{20}{64}, \frac{25}{80}, \frac{30}{96}, \dots \\ \frac{11}{35} \quad \frac{22}{70}, \frac{33}{105}, \frac{44}{140}, \dots \\ \frac{60}{191} \quad \frac{60}{191}, \frac{120}{382}, \frac{22}{66}, \dots \end{array}$$

Si, por ejemplo, no pudiéramos sobrepasar los 100 dientes la solución óptima sería $z_1 = 22$ y $z_2 = 70$.

7.10. Problemas

Prob. 7.1 Dos ejes situados a una distancia $d = 180 \text{ mm}$ deben ser unidos mediante dos ruedas dentadas de modo que la relación de velocidades sea lo más parecida posible al número $e = 2,7182818 \dots$, sin que ninguna de las ruedas pueda tener más de 120 dientes. Determinar los números de dientes z_1 y z_2 que mejor cumplan la condición anterior. Utilizando módulos normalizados y engranajes rectos corregidos, hallar el módulo m y las correcciones x_1 y x_2 de modo que la distancia entre centros sea exactamente la propuesta.

Prob. 7.2 El tren de engranajes de la figura 7.40 está proyectado con ruedas cilíndricas rectas de módulo $m = 2 \text{ mm}$. Los ejes O_1 , O_2 y O_3 están alineados, y la distancia $\overline{O_1O_3} = 116 \text{ mm}$. La relación ω_1/ω_3 debe ser igual a 5. Las ruedas de menos de 17 dientes deben corregirse con 1,5 veces la corrección mínima que evita la interferencia de tallado. Definir las tres ruedas.

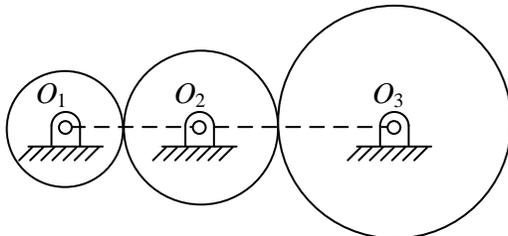


Figura 7.40

Prob. 7.3 Dos ruedas talladas, según norma americana, con un módulo $m_A = 2,54$ mm, tienen unos números de dientes $z_1 = 20$ y $z_2 = 45$, y han sido talladas sin corrección con una cremallera de $\psi = 20^\circ$. La rueda 1 se rompe y se desea sustituirla por otra tallada con una cremallera especial de módulo $m_E = 2,5$ mm y ángulo de presión ψ_E desconocido. Si deben conservarse la relación de velocidades y la distancia entre centros, determinar la corrección necesaria en la rueda de z_1 tallada con cremallera especial para que engrane correctamente con la rueda de $z_2 = 45$ tallada según norma americana. Hallar también el ángulo de presión de la cremallera especial. ¿Por qué este ángulo no puede ser de 20° ?

Prob. 7.4 Un piñón cilíndrico recto normal de $m = 4$ mm y $z = 30$ engrana con una cremallera de cabeza rebajada con coeficiente 0,8. Determinar la relación de contacto y las velocidades máximas de deslizamiento cuando el piñón gira a 3000 r.p.m.

Prob. 7.5 Dos ejes paralelos de una máquina se encuentran separados una distancia de 62,5 mm. Entre ambos se desea colocar un par de ruedas para obtener una relación de transmisión de $2/3$. Se desea emplear engranajes de módulo 2,75 o 3,5 mm. Esta máquina se va a fabricar en dos versiones: una más barata en la que se utilizarán engranajes rectos, y otra más cara con engranajes helicoidales, pero en ambos casos se desean utilizar los mismos módulos y números de dientes. Si estas ruedas se van a tallar con cremallera de $\psi = 20^\circ$, elegir el módulo más apropiado de los dos que se proponen y definir las ruedas, tanto con dientes rectos como con dientes helicoidales. Si en el caso de los engranajes rectos se toma un addendum igual a 1,2 veces el módulo, comprobar la interferencia de tallado.

Capítulo 8

Engranajes helicoidales

8.1. Concepto y transmisión de esfuerzos

En los engranajes cilíndricos rectos la relación de contacto es pequeña, lo que significa que los esfuerzos necesarios para transmitir la potencia se distribuyen entre un número reducido de dientes que, además, toman y pierden el contacto súbitamente en toda su sección. Esto se traduce en variaciones bruscas del esfuerzo soportado por cada diente, que pasa instantáneamente de estar descargado a estar cargado y viceversa. Cuando la potencia a transmitir y/o la velocidad de giro es elevada, se producen vibraciones, ruido y desgaste excesivo en los flancos de los dientes.

Una posible mejora consiste en utilizar *engranajes escalonados*, como los mostrados en la figura 8.1, que se componen de conjunto de engranajes rectos solidariamente unidos, cada uno de ellos con un pequeño giro respecto al anterior. De esta forma se consigue incrementar el número de contactos y reducir la magnitud del esfuerzo transmitido por cada par de dientes. Los dientes seguirán entrando en contacto y perdiéndolo súbitamente, pero ahora la carga que soportará cada diente será menor.

A medida que crece el número de escalones, la anchura de cada escalón decrece y el funcionamiento se va haciendo más suave. Al llevar al límite este proceso de partición, tomando escalones cada vez más delgados, se obtienen los *engranajes helicoidales*. En ellos, los escalones tienen espesor infinitesimal y dos escalones sucesivos están girados un ángulo infinitesimal. En cualquier caso, conviene resaltar una propiedad esencial que se deduce del proceso de paso al límite: cada sección recta de un engranaje helicoidal es exactamente igual a la de un engranaje recto, por lo que es aplicable lo visto en el capítulo anterior.

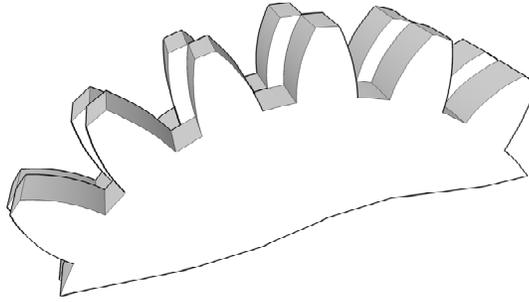


Figura 8.1: Engranajes rectos escalonados.

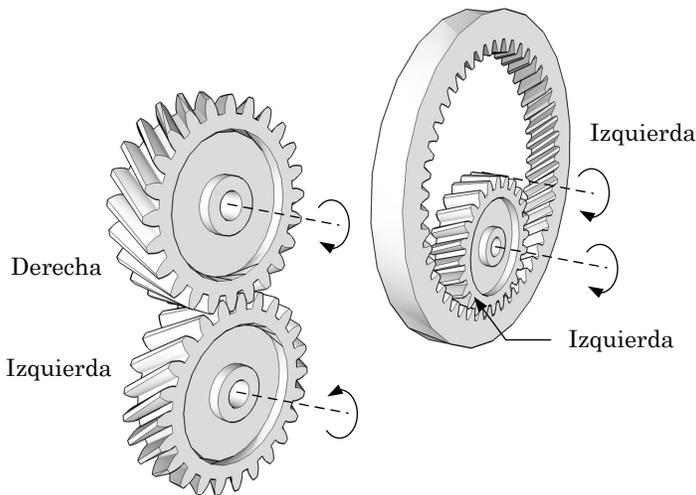


Figura 8.2: Disposición de las hélices.

La principal ventaja de los engranajes helicoidales frente a los rectos es su mayor relación de contacto, que les permite operar de forma menos ruidosa y con mayor suavidad. Sin embargo, la forma inclinada de sus dientes helicoidales causa una reacción axial que debe ser tenida en cuenta al diseñar los apoyos.

Los engranajes helicoidales pueden tener hélice a derecha o a izquierda, lo que obliga a extremar la precaución a la hora de elegirlos. Como se muestra en la figura 8.2, cuando el engrane se produce exteriormente, los engranajes deben tener hélices cambiadas: uno a derecha y otro a izquierda. En cambio, cuando el engrane es interior las hélices deben tener la misma mano.

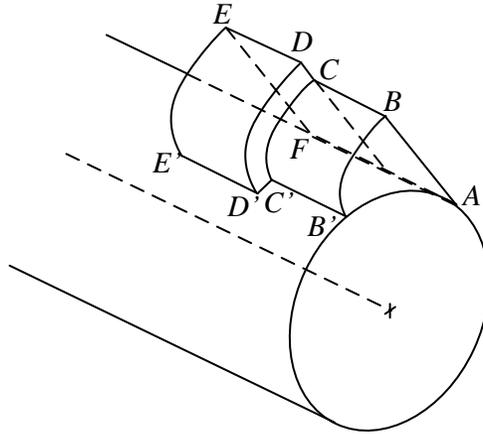


Figura 8.3: Generación de evolvente para engranajes escalonados.

8.2. Generación de un diente helicoidal

La figura 8.3 ilustra cómo la superficie $ABCDEF$, inicialmente enrollada alrededor del cilindro base, genera al desenrollarse dos perfiles de evolvente correspondientes a un engranaje de dientes escalonados. En el proceso de paso al límite, a medida que los escalones se van haciendo más pequeños, la figura 8.3 se convierte en la figura 8.4. El escalón $BCDE$ y sucesivos de la figura 8.3 se transforman en la recta BC de la figura 8.4. Al ángulo β que forma dicha recta con el eje del cilindro se le denomina *ángulo de la hélice*. El escalón $B'C'D'E'$ de la figura 8.3 se transforma en el arco de helicoide $B'C'$ de la figura 8.4. Cada sección recta del perfil helicoidal es un perfil de evolvente normal cuya circunferencia base coincide con el cilindro base.

Para construir los perfiles de un engranaje con dientes escalonados podríamos utilizar un dispositivo como el descrito en el capítulo anterior, con una ruleta y una barra inclinada solidariamente unida a ella que rueda sobre la circunferencia primitiva. La figura 8.5 ilustra esta construcción. El plano horizontal R rueda sobre el cilindro primitivo y lleva solidariamente unidos dos planos inclinados $ABA'B'$ y $CDC'D'$, que forman un ángulo ψ con la vertical. Las envolventes a las sucesivas posiciones que ocupan los planos inclinados son dos perfiles de evolvente correspondientes a dos dientes de engranaje escalonados. Se puede apreciar también cómo el plano perpendicular a $ABA'B'$ y $CDC'D'$, resaltado en gris, coincide con el plano que desenrollábamos en la figura 8.3.

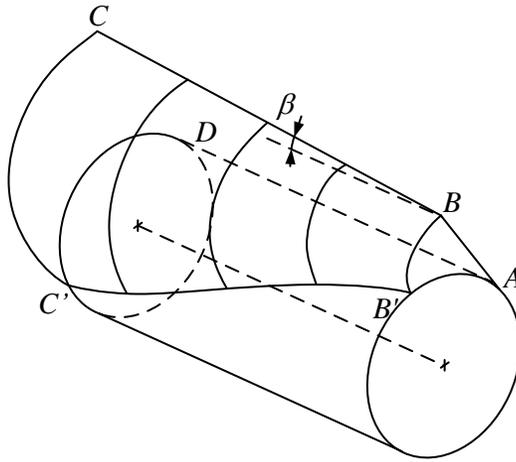


Figura 8.4: Generación del perfil de un diente helicoidal.

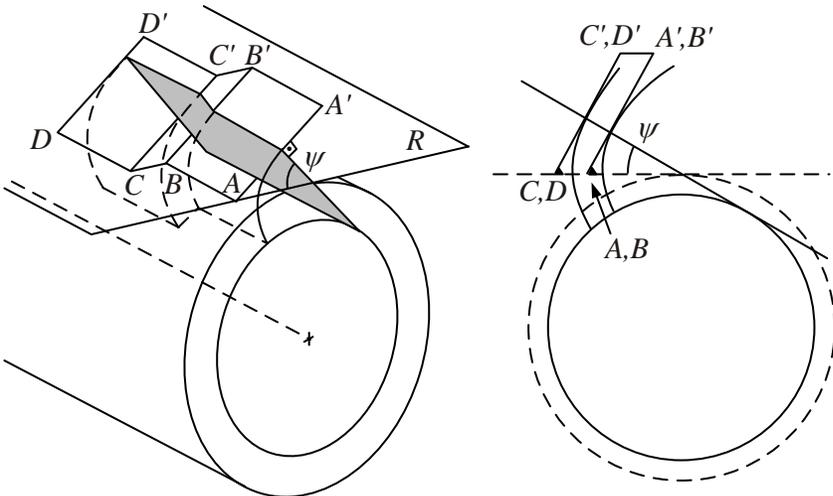


Figura 8.5: Generación con cremallera de perfiles rectos escalonados.

En el proceso de paso al límite, mostrado en la figura 8.6, podemos seguir estableciendo analogías con el caso de los engranajes escalonados. Fijémonos primeramente en el perfil de evolvente de la sección frontal. Para generar dicho perfil podemos fijar en el plano horizontal R una recta inclinada solidariamente unida a él y hacer rodar el plano sobre la circunferencia primitiva. La envolvente de las sucesivas posiciones de la recta dará origen al perfil de evolvente considerado. En una sección intermedia del cilindro, el perfil de evolvente está decalado respecto al de la sección frontal. La recta que lo genera al ser unida solidariamente a R es paralela a la de la sección frontal, pero está desplazada en dirección perpendicular al eje del cilindro. El conjunto de rectas solidariamente unidas al plano R que generan un diente helicoidal constituyen un plano inclinado oblicuo H cuya intersección con el plano R forma un ángulo β_a con el eje del cilindro, que recibe el nombre de *ángulo aparente de la hélice*. El plano E , resaltado en gris, es perpendicular al plano H y coincide con el $ABCD$ de la figura 8.4.

Podemos hacer la construcción gráfica mostrada en la figura 8.7. En ella, se muestra el plano gris E , perpendicular al plano H . La intersección del plano H con el plano horizontal R es una recta que forma un ángulo β_a con el eje del cilindro. Podemos escribir que

$$\overline{PB} = \overline{OP} \tan \beta \quad (8.1)$$

y también

$$\overline{PB} = \overline{AP} \cos \psi_a = \overline{OP} \tan \beta_a \cos \psi_a \quad (8.2)$$

Comparando ambas ecuaciones obtenemos la relación

$$\tan \beta = \tan \beta_a \cos \psi_a \quad (8.3)$$

De acuerdo con lo visto hasta ahora, un diente helicoidal se puede fabricar con la misma cremallera con que se fabrican los dientes rectos, pero en lugar de poner el eje de la cremallera paralelo al eje del cilindro se inclina un ángulo β_a , de manera que el corte de material se realiza en una dirección sesgada, como se muestra en la figura 8.8.

La figura 8.9 representa en la parte superior el perfil de la cremallera tal y como es en la realidad y en la parte inferior su sección recta. Como ya se ha dicho, esta cremallera es geoméricamente idéntica a las que se utilizan para tallar engranajes rectos, con módulo $m = p/\pi$, altura h , y ángulo de presión ψ . Las líneas inclinadas indican la dirección de corte de cada uno de los vértices de la cremallera, que forman un ángulo β_a con

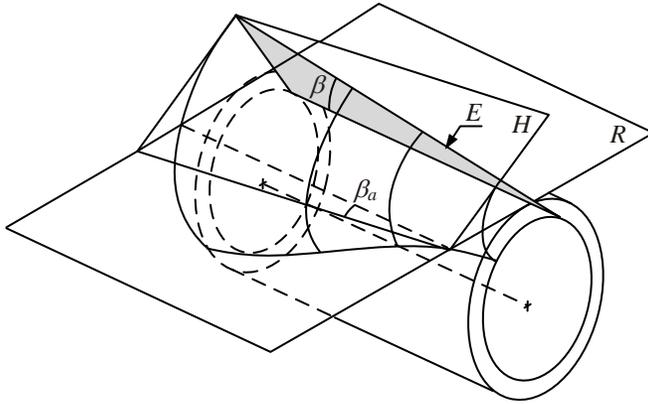


Figura 8.6: Generación con cremallera de un perfil helicoidal.

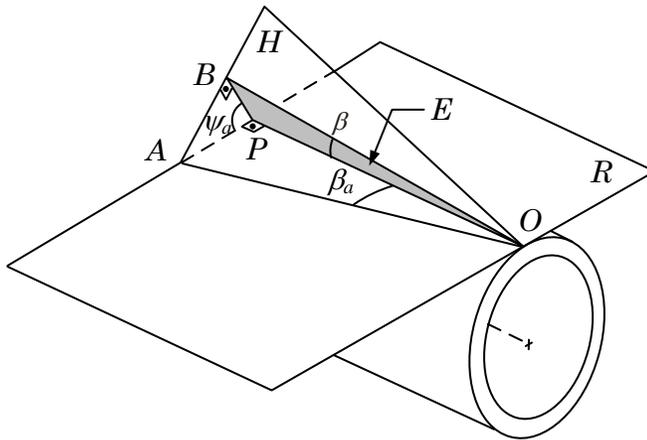


Figura 8.7: Ángulos principales en los dientes helicoidales.

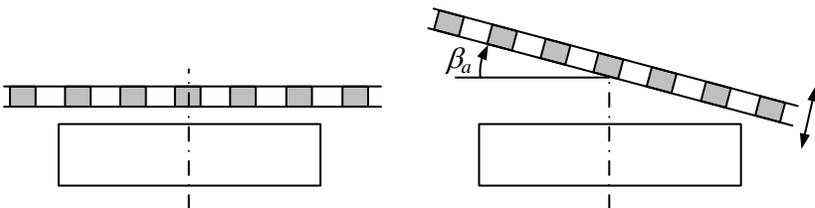


Figura 8.8: Generación con cremallera de engranajes rectos y helicoidales.

respecto al eje del cilindro. Cada sección perpendicular al eje del cilindro está formada por perfiles de evolvente, que hipotéticamente podrían generarse mediante cremalleras como la representada en la parte inferior de la figura 8.9. Evidentemente, en la práctica es imposible generar una sección infinitesimalmente delgada mediante una cremallera normal y después generar las siguientes con la misma cremallera ligeramente desplazada, por lo que la cremallera girada es una necesidad. En cualquier caso, la cremallera inferior nos sirve para caracterizar la geometría de las secciones rectas del engranaje. Como se ve, cada sección recta tiene un paso p_a y un ángulo de presión ψ_a que no coinciden con p y ψ . Las relaciones que los ligan son muy sencillas. Fácilmente puede verse que

$$p_a = \frac{p}{\cos \beta_a} \quad (8.4)$$

Teniendo en cuenta que $p = m\pi$, podemos definir un módulo aparente, análogo al módulo normal, como el cociente entre el paso aparente y ψ . Por tanto,

$$m_a = \frac{m}{\cos \beta_a} \quad (8.5)$$

Por otra parte, también podemos escribir la siguiente relación, en la que interviene el ángulo de presión aparente ψ_a :

$$\frac{h \tan \psi}{\cos \beta_a} = h \tan \psi_a \quad (8.6)$$

de donde

$$\tan \psi_a = \frac{\tan \psi}{\cos \beta_a} \quad (8.7)$$

Las ecuaciones 8.5 y 8.7 permiten obtener el módulo aparente y el ángulo de presión aparente en función del módulo normal, el ángulo de presión normal y el ángulo aparente de la hélice. Una vez determinados m_a y ψ_a , podemos manejar un engranaje helicoidal como uno recto, pero utilizando m_a en lugar de m y ψ_a en lugar de ψ .

Por ejemplo, la distancia entre ejes a la que funcionan dos engranajes helicoidales se obtiene de la expresión

$$d = m_a \frac{z_1 + z_2}{2} = m \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta_a} \quad (8.8)$$

Esta expresión indica que la distancia entre ejes se puede variar modificando el ángulo aparente de la hélice. En la práctica, esto significa que los

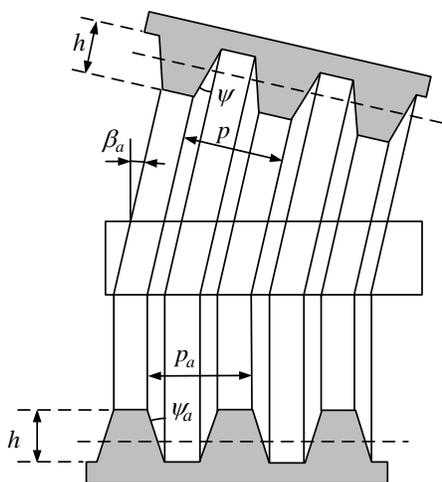


Figura 8.9

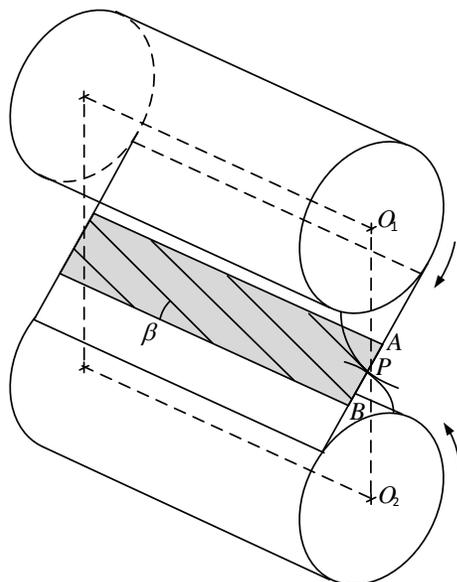


Figura 8.10: Segmentos de engrane.

engranajes helicoidales no necesitan ser corregidos para ajustar su distancia de funcionamiento a un valor dado, sino que basta con tomar el ángulo adecuado.

La interferencia de tallado también se puede dar en los engranajes helicoidales. El número mínimo de dientes que se pueden tallar sin que la interferencia aparezca se puede hallar sustituyendo m_a en lugar de m en la expresión vista en el capítulo anterior, y ψ_a en lugar de ψ .

8.3. Relación de contacto

La relación de contacto en los engranajes helicoidales se calcula de distinta forma que en los engranajes rectos. Para estudiarla, nos apoyaremos en la figura 8.10. Vemos que el contacto en la sección frontal se produce de forma instantánea en el punto P . Los dos dientes están en contacto únicamente en un punto en la sección frontal, pero estos dos dientes también están en contacto en otras secciones. El lugar geométrico de los puntos de contacto instantáneo entre dos dientes de engranajes helicoidales es una recta que forma un ángulo β con el eje del cilindro.

Los dos dientes mostrados en la figura 8.10 toman contacto por primera vez en el punto A . A medida que los engranajes rotan, el punto de contacto

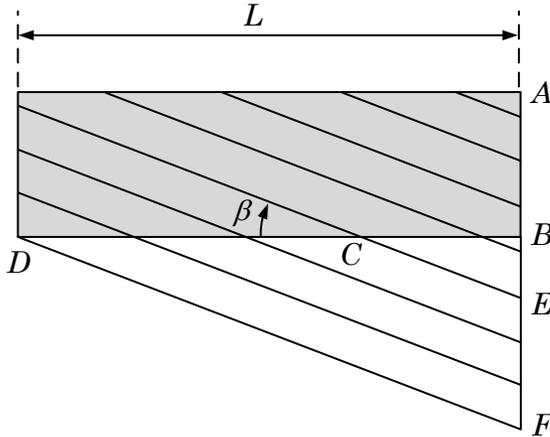


Figura 8.11: Longitud de los segmentos de engrane.

entre ellos en la sección frontal pasa por el punto intermedio P y llega hasta B . En el punto B , término de la línea de engrane sobre la sección frontal, los dos dientes pierden el contacto sobre dicha sección. Sin embargo, la pérdida de contacto en la sección frontal no conlleva en este caso la pérdida completa de contacto entre los dos dientes, puesto sigue habiendo contacto en secciones posteriores a la frontal. La pregunta que nos hacemos es ¿cuánto se prolonga el contacto entre dos dientes una vez que se pierde el contacto en la sección frontal? Para verlo, recordaremos que existe una relación sencilla entre las distancias medidas sobre la línea de engrane y el ángulo girado por las ruedas.

La figura 8.11 muestra el rectángulo gris que representa la superficie que engloba a todos los puntos de contacto entre dientes desde que toman el contacto hasta que lo pierden. Como ya hemos dicho, en A se produce el primer contacto, y en B se pierde el contacto en el plano frontal. A medida que los engranajes siguen rotando, el contacto llega a la sección intermedia C y va progresando hasta el punto D , donde se pierde completamente. Para pasar de A a B los engranajes giran una cantidad proporcional a la distancia \overline{AB} . Para pasar de B a C el giro es proporcional a la distancia \overline{BE} . Por tanto, el giro de los engranajes desde la toma de contacto en A hasta la pérdida en D es proporcional a la distancia \overline{AF} que es

$$\overline{AF} = \overline{AB} + L \tan \beta \quad (8.9)$$

Una vez conocida esta distancia, la relación de contacto se obtiene de forma análoga a como se vio en el capítulo anterior.

Capítulo 9

Trenes de engranajes

9.1. Introducción

En multitud de máquinas, la transmisión de rotaciones entre ejes no se puede lograr mediante un único par de engranajes, por lo que es necesario recurrir a combinaciones de engranajes unidos uno respecto al otro de formas distintas. Por ejemplo, la mayor parte de los motores giran a una velocidad elevada pero producen un par relativamente pequeño. Para poder utilizar su potencia se hace necesario reducir previamente su velocidad de rotación lo que, al mismo tiempo, multiplica el par de salida. Si la reducción de velocidades es elevada, no se puede conseguir en una sola etapa de dos engranajes, manteniendo a la vez el tamaño del reductor en unos límites razonables. Por ello, se hace necesario hacer la reducción de velocidades en varias etapas, utilizando reductores de ejes fijos o planetarios.

Además de los reductores, los trenes de engranajes se utilizan también en máquinas muy diversas. Los automóviles, por ejemplo, cuentan con otros dos trenes de engranajes bien conocidos: la caja de cambios y el diferencial. Con la caja de cambios se modifica la relación de transmisión del motor a las ruedas y con el diferencial se consigue que las dos ruedas motrices puedan girar a velocidades distintas manteniendo la tracción.

En las secciones siguientes estudiaremos la forma de calcular la relación de velocidades entrada/salida en los distintos tipos de trenes de engranajes.

9.2. Trenes ordinarios

Se denominan *trenes ordinarios simples* los trenes de engranajes en que todos los ejes están fijos y en cada eje se monta un solo engranaje. La figura

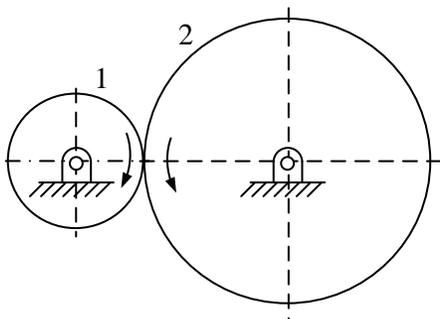


Figura 9.1: Engranajes exteriores.

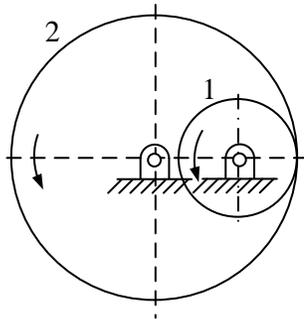


Figura 9.2: Engranajes interiores.

9.1 muestra un tren ordinario con dos engranajes exteriores. La relación de velocidades angulares es

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_2} \quad (9.1)$$

donde el signo menos es debido a que los dos engranajes giran en sentidos contrarios. En los engranajes interiores de la figura 9.2, la relación de velocidades es

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \quad (9.2)$$

Es fácil demostrar que en los trenes ordinarios simples la relación de velocidades depende solamente de los números de dientes de las ruedas de entrada y salida, y no de las ruedas intermedias, cuya única función es invertir el signo de la relación de velocidades. Por ejemplo, el tren de la figura 9.3 tiene una relación de velocidades

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\omega_s}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_e} = \left(-\frac{z_1}{z_s} \right) \left(-\frac{z_e}{z_1} \right) = \frac{z_e}{z_s} \quad (9.3)$$

Se denominan *trenes ordinarios compuestos* los trenes de engranajes en que todos los ejes son fijos pero que poseen más de un engranaje solidariamente unidos en cada eje. La figura 9.4 ilustra uno de estos trenes. Para su estudio, basta con establecer las relaciones de velocidades angulares para ruedas adyacentes, recordando que las velocidades angulares de los engranajes 1 y 2 son iguales y las de los engranajes 3 y 4 también. Podemos escribir:

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\omega_s}{\omega_4} \frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\omega_1}{\omega_e} = \left(-\frac{z_4}{z_s} \right) \left(-\frac{z_2}{z_3} \right) \left(-\frac{z_e}{z_1} \right) = -\frac{z_e z_2 z_4}{z_1 z_3 z_s} \quad (9.4)$$

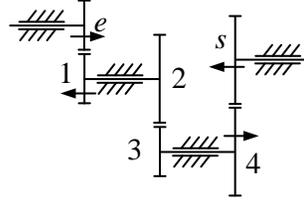
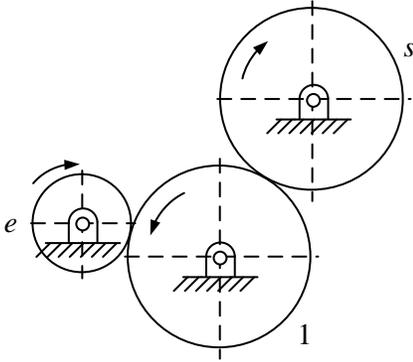


Figura 9.3: Tren ordinario simple.

Figura 9.4: Tren ordinario compuesto.

De forma general, la relación de velocidades en un tren ordinario compuesto se puede escribir mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = (\text{signo}) \frac{\prod z_{\text{conductoras}}}{\prod z_{\text{conducidas}}} \tag{9.5}$$

En el ejemplo de la figura 9.4, la rueda de entrada *e* se considerara (arbitrariamente) *conductora*, y su compañera la rueda 1, *conducida*. Análogamente, la rueda 2, montada sobre el mismo eje que la 1, se considera también *conductora*, y la rueda 3, *conducida*. Por último, la rueda 4 se considera *conductora* de la *s*. El signo debe ser determinado en función del número de ruedas que compongan el tren y de si engranan interior o exteriormente. Una forma práctica de hacerlo es indicando mediante flechas el sentido relativo de giro de cada eje. Si la flecha del eje de entrada apunta en la misma dirección que el de salida, el signo será positivo; por el contrario, si apuntan en direcciones contrarias será negativo.

9.3. Trenes planetarios

Se denominan *trenes planetarios* o *epicicloidales* aquéllos en los que los ejes de uno o varios de sus engranajes son móviles. Los trenes planetarios son más difíciles de estudiar que los ordinarios, puesto que los sentidos de giro de los engranajes no son fáciles de predecir a simple vista y la intuición no es de gran ayuda.

Para introducir el estudio sistemático de los trenes planetarios comenzaremos con un pequeño ejemplo que nos servirá para centrar la cuestión. Consideremos el mecanismo de la figura 9.5, en el que la rueda 2 está obli-

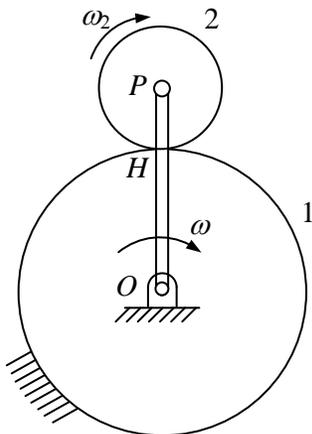


Figura 9.5

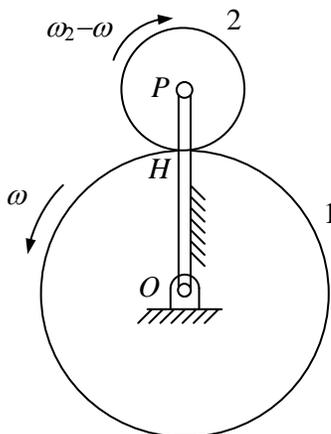


Figura 9.6

gada a rodar sobre la rueda fija 1. Suponiendo que la barra \overline{OP} gira con velocidad angular ω , tratamos de hallar la relación ω_2/ω .

La velocidad del extremo de la barra P se puede escribir como

$$v_P = \omega (R_1 + R_2) \quad (9.6)$$

Por otra parte, puesto que la rueda 2 está en rodadura, la velocidad de H es nula, por lo que podemos escribir

$$v_P = v_H + v_{PH} = \omega_2 R_2 \quad (9.7)$$

Igualando las dos expresiones de v_P , llegamos a

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (9.8)$$

Planteemos ahora el mismo problema de una forma ligeramente diferente. Consideremos la inversión del mecanismo mostrada en la figura 9.6, en la que la barra OP ha pasado a ser fija. En esta inversión se ha mantenido la relación de velocidades angulares, de manera que la rueda 1, antes fija, pasa a tener velocidad ω , mientras que la rueda 2 pasa a tener velocidad $\omega_2 - \omega$.

Esta inversión del movimiento equivale a representarlo desde el punto de vista de un observador unido a la barra OP y que viajase con ella. En efecto, el observador vería la propia barra como fija, al tiempo que vería girar a la rueda 1 con velocidad angular $-\omega$. La velocidad angular con que

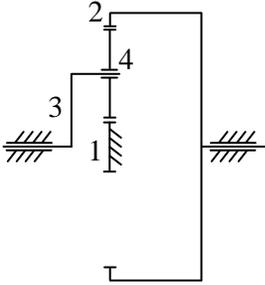


Figura 9.7: Tren planetario.

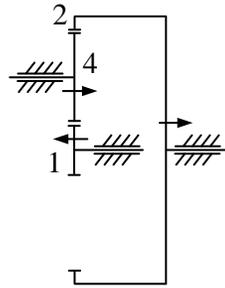


Figura 9.8: Tren invertido, con 3 inmóvil.

vería girar la rueda 2 sería la diferencia entre la velocidad ω_2 y la velocidad del observador ω , esto es, $\omega_2 - \omega$.

Resumiendo, el movimiento invertido es el que corresponde a un observador subido en \overline{OP} y equivale a restar ω a las velocidades angulares de todos los elementos. Ahora, podemos igualar la velocidad del punto H , lo que da

$$v_H = \omega R_1 = (\omega_2 - \omega) R_2 \tag{9.9}$$

Despejando, obtenemos

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{9.10}$$

que coincide con la expresión obtenida para el problema original.

Este será el método que seguiremos para estudiar los engranajes planetarios: por medio de inversiones cinemáticas transformaremos el tren planetario de ejes móviles en un tren ordinario de ejes fijos, que estudiaremos mediante las relaciones de velocidades vistas en el apartado 9.2.

La figura 9.7 muestra un típico tren planetario, en que el engranaje 4 suele denominarse *satélite* y el eje 3 *portasatélites*. Para obtener la relación de velocidades ω_2/ω_3 mediante el método recién expuesto, hemos de convertir el tren planetario en un tren ordinario. Para ello, detenemos el eje 3 restando ω_3 a todos los engranajes, lo que equivale a representar el movimiento tal y como lo vería un observador que estuviese subido en el eje 3 y girase solidariamente con él. La figura 9.8 muestra el tren ordinario resultante, en el que se han marcado mediante flechas los sentidos de giro relativos de cada uno de los engranajes. Es importante resaltar que los sentidos de estas flechas representan las velocidades relativas y no guardan relación con el sentido real del giro absoluto de cada engranaje, sino que

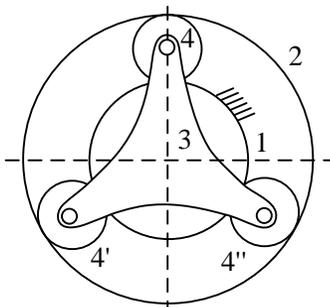


Figura 9.9

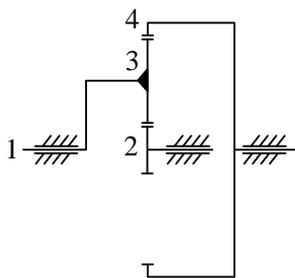


Figura 9.10

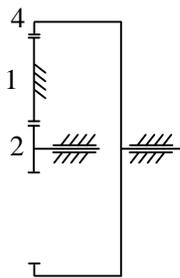


Figura 9.11

son meras herramientas intermedias que empleamos durante la resolución del tren ordinario invertido. El sentido de giro de cada engranaje en el tren planetario es, en principio, desconocido, y se obtendrá como solución al seguir estrictamente el criterio de signos adoptado.

La relación de velocidades angulares en el tren ordinario se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que a las velocidades angulares reales de cada engranaje hay que restarles ω_3 , de modo que

$$\frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = -\frac{z_1}{z_2} \quad (9.11)$$

donde el signo menos es consecuencia de que las ruedas 1 y 2 en el tren de la figura 9.8 giran en sentidos contrarios, como indican las flechas. Teniendo en cuenta que $\omega_1 = 0$ y operando, se obtiene finalmente

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{z_1 + z_2}{z_2} \quad (9.12)$$

Esta expresión nos proporciona, al mismo tiempo, el módulo de la relación de velocidades y su signo. Es decir, la rueda 2 y el eje 3 giran en la misma dirección en el tren planetario.

Ejemplo 9.1 La figura 9.9 representa un reductor de velocidad empleado en aviones de hélice, en el que la rueda 2 está dentada interiormente y gira solidariamente con el motor. La rueda 1 tiene dentado exterior y está fija. Entre las ruedas 1 y 2 están atrapadas tres ruedas 4, 4' y 4'', que funcionan como satélites y se encuentran unidas entre sí mediante el elemento 2, que transmite el movimiento a la hélice. Calcular ω_4/ω_3 .

Teniendo en cuenta que los tres engranajes 4, 4' y 4'' realizan una función cinemáticamente redundante, el esquema simplificado del tren es

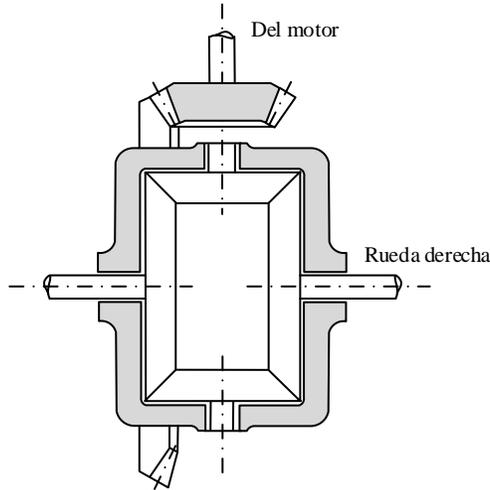


Figura 9.12: Diferencial de un automóvil.

idéntico al mostrado en figura 9.7, por lo que la relación ω_4/ω_3 es idéntica a la obtenida en la ecuación

Ejemplo 9.2 *Obtener la relación de velocidades ω_4/ω_1 para el tren de la figura 9.10.*

Parando el eje 1, resulta el tren de engranajes de la figura 9.11. Como la rueda 1 está fija, ni la rueda 2 ni la 4 pueden moverse, por lo que en el movimiento invertido la velocidad angular de la rueda 4 es nula, es decir:

$$\omega_4 - \omega_3 = 0 \quad (9.13)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\omega_4 = \omega_3 \quad (9.14)$$

Como se ve, este dispositivo no es un reductor aunque a simple vista lo parezca.

9.4. Diferenciales

Casi todos los trenes de engranajes ordinarios y planetarios tienen un solo grado de libertad, pues funcionan como reductores, multiplicadores o simplemente como elementos de transmisión entre ejes. Sin embargo, existe una importante aplicación de los trenes planetarios que posee dos grados de

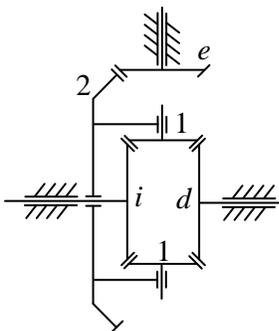


Figura 9.13: Diferencial.

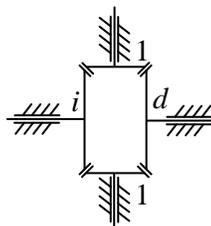


Figura 9.14: Movimiento invertido con 2 fijo.

libertad: los diferenciales. Los diferenciales se montan entre el motor y las ruedas motrices de los automóviles para permitir que cada rueda pueda dar distinto número de vueltas mientras recibe potencia. Por ejemplo, cuando el automóvil toma una curva hacia la derecha, la rueda izquierda recorre una distancia mayor que la derecha, por lo que debe dar más vueltas que ésta o alguna de las dos ruedas patinará.

El tren diferencial puede adoptar diversas formas, pero la más habitual es la mostrada en la figura 9.12. Esquemáticamente, se puede representar como se indica en la figura 9.13. El engranaje e corresponde al eje de entrada proveniente de la caja de cambios. La rueda 2 va unida a la carcasa que, a su vez, arrastra los ejes de las ruedas planetarias 1. Las dos ruedas 1 son redundantes y se montan por simetría, aunque cinemáticamente bastaría con una de ellas.

En el caso habitual de que el coche marche en línea recta, las ruedas planetarias funcionan como si su eje estuviese bloqueado y no pudiesen tener movimiento de rotación propia; simplemente arrastran los ejes i y d y los hace girar a la misma velocidad. Cuando el coche toma una curva, las ruedas 1 adquieren una cierta velocidad de rotación propia, lo que permite a las ruedas izquierda y derecha girar a distintas velocidades.

Para resolver matemáticamente el movimiento del diferencial, utilizamos el método descrito en la sección anterior, consistente en detener los ejes que se mueven, en este caso los de las ruedas 1. Para ello, detenemos la rueda 2 y obtenemos el tren mostrado en la figura 9.14, de donde deducimos

$$\frac{\omega_d - \omega_2}{\omega_i - \omega_2} = - \frac{z_i}{z_d} \quad (9.15)$$

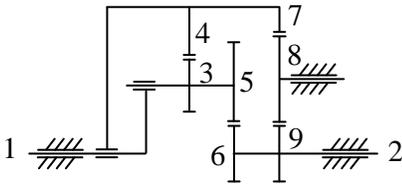


Figura 9.15

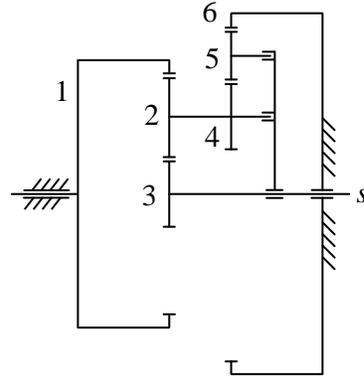


Figura 9.16

pero como los números de dientes z_i y z_d son iguales, resulta

$$\omega_d - \omega_2 = -(\omega_i - \omega_2) \tag{9.16}$$

Puesto que las engranajes cónicos 2 y e engranan directamente, podemos escribir

$$\frac{\omega_2}{\omega_e} = \frac{z_e}{z_2} \tag{9.17}$$

Despejando ω_2 y sustituyendo en la ecuación 9.15, obtenemos

$$\omega_i + \omega_d = 2\omega_e \frac{z_e}{z_2} \tag{9.18}$$

Esta expresión es la que relaciona las velocidades angulares del eje de entrada con los dos ejes de salida. De ella se deduce que para una misma velocidad de entrada, la suma de las velocidades de salida está fijada, pero no cada una de las velocidades de salida. También se puede comprobar que si el motor está parado ($\omega_e = 0$) y, por ejemplo, la rueda izquierda se hace girar en un sentido, la rueda derecha girará con la misma velocidad angular pero en sentido contrario.

9.5. Problemas

Prob. 9.1 En el tren de la figura 9.15, conocidos $z_3 = 20$, $z_4 = 64$, $z_6 = 16$, $z_7 = 76$, $z_9 = 16$, calcular: 1) Los números de dientes de las ruedas 5 y 8 suponiendo que todas tienen igual módulo. 2) La relación de velocidades

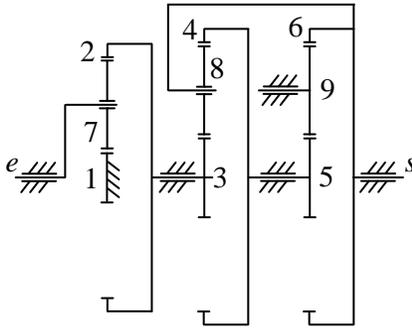


Figura 9.17

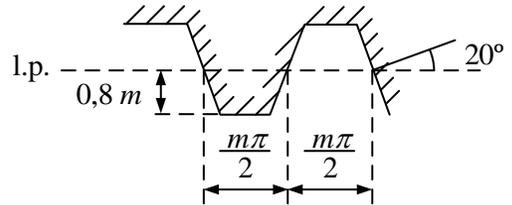


Figura 9.18

ω_2/ω_1 . 3) Si la distancia entre ejes es invariable y coincide con la correspondiente a las ruedas normales, ¿cómo habría que corregir las ruedas 5 y 6 para evitar interferencias?

Prob. 9.2 En el tren de la figura 9.16, siendo $m = 7$ para todos los engranajes y $z_2 = 12$, $z_3 = 28$, $z_4 = 22$, $z_5 = 18$, hallar: 1) Los números de dientes z_1 y z_6 . 2) La relación de velocidades ω_s/ω_e . 3) Si $d_{23} = 137$ mm, hallar las correcciones necesarias.

Prob. 9.3 Dado el tren epicicloidal de la figura 9.17 y conocidos $z_1 = 32$, $z_2 = 76$, $z_3 = 25$, $z_4 = 85$, $z_5 = 14$ y $z_6 = 56$, se pide: 1) Calcular la relación de velocidades ω_s/ω_e . 2) Si la distancia entre los centros de los engranajes 5 y 9 es de 105 mm, sus módulos son 6 mm y tallándose ambas ruedas con la cremallera de la figura 9.18, definir las condiciones de tallado de ambas ruedas. 3) Calcular el addendum de las ruedas que permiten obtener la máxima relación de contacto, así como el valor de la misma.

Prob. 9.4 En el tren de engranajes de la figura 9.19 todas las ruedas tienen módulo 2 mm y $d = 50$ mm. Hallar 1) La relación de velocidades ω_s/ω_e , dados $z_1 = 25$ y $z_4 = 25$. 2) Se quiere rediseñar el tren de engranajes para obtener que la relación de velocidades sea lo más pequeña posible, pero manteniendo la distancia d . Para ello, se van a cambiar las ruedas por otras de igual módulo pero distinto número de dientes. Se desea que todas las ruedas estén normalizadas (talladas con cremallera de ángulo de presión $\psi = 20^\circ$ y addendum igual al módulo), sin corrección, y que ninguna de ellas tenga interferencia de tallado. Determinar los números de dientes. 3) Si las ruedas 4 y 5 son de dientes rectos y tienen $z_4 = 25$ y $z_5 = 25$,

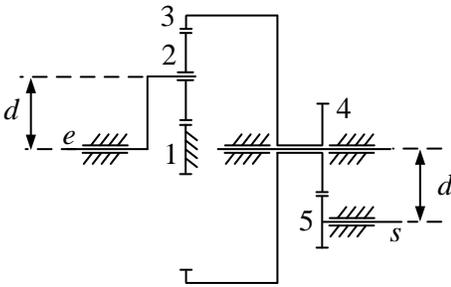


Figura 9.19

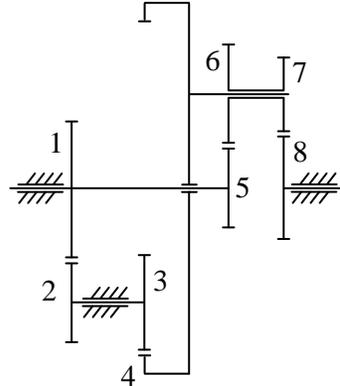


Figura 9.20

determinar las correcciones necesarias. 4) Si las ruedas 4 y 5 son de dientes helicoidales y tienen $z_4 = 25$ y $z_5 = 25$, determinar el ángulo de presión aparente.

Prob. 9.5 En el tren de engranajes de la figura 9.20, determinar 1) La relación de velocidades ω_8/ω_1 , en función de los números de dientes de las ruedas. 2) Su-poniendo que todas las ruedas tienen el mismo módulo y que los engranajes están sin corregir, determinar las relaciones que deben de cumplirse entre los números de dientes de las ruedas de dicho tren. 3) Si originalmente se tiene $z_5 = 25$, $z_6 = 40$, $z_7 = 18$, $z_8 = 47$, pero se desea cambiar z_8 por 46 dientes sin modificar las distancias entre ejes, determinar las correcciones a realizar en las ruedas 7 y 8 para que el tren de engranajes pueda funcionar.

Prob. 9.6 En el tren de engranajes de la figura 9.21 se conocen los números de dientes de las ruedas $z_A = 20$, $z_B = 20$, $z_C = 30$, $z_D = 21$, $z_E = 25$, $z_H = 18$, $z_I = 16$, $z_J = 18$. Se pide 1) Hallar la relación de velocidades ω_2/ω_1 . 2) Con las ruedas normales, por razones cinemáticas, se debe cambiar la rueda G por otra de número de dientes $z_G = 25$. Determinar las correcciones que han de hacerse para que el tren de engranajes funcione correctamente.

Prob. 9.7 Dado el tren epicicloidal de la figura 9.22, con ruedas de igual módulo $m = 8$ mm y dientes $z_1 = 20$, $z_2 = 40$, $z_3 = 20$, $z_4 = 24$, $z_6 = 30$, $z_7 = 30$, $z_8 = 30$, $z_9 = 40$, $z_{10} = 50$, se pide 1) Hallar la relación de velocidades ω_s/ω_e . 2) Se desea modificar la distancia entre las ruedas 9

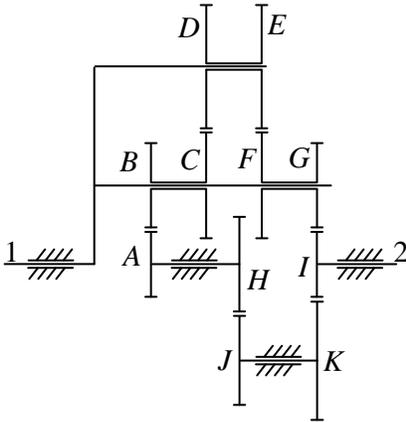


Figura 9.21

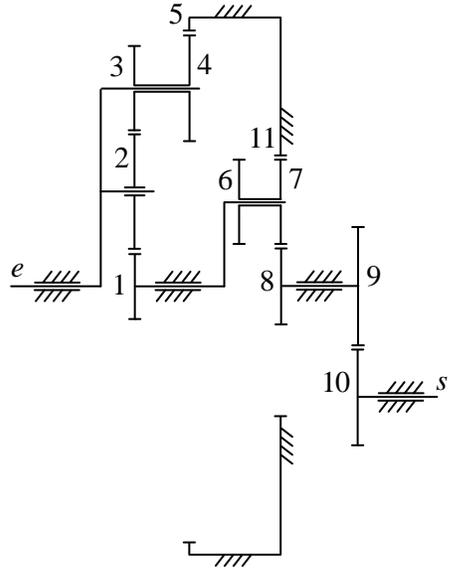


Figura 9.22

y 10 de manera que sea 350 mm. Determinar las correcciones necesarias comprobando la interferencia de tallado y las condiciones de apuntamiento.

Prob. 9.8 Se desea que el tren epicicloidal de la figura 9.23 sea sumador, es decir, $\omega_C = \omega_A + \omega_B$. Sabiendo que $z_1 = 28$ y $z_2 = 42$, que los dos portasatélites tienen igual radio y que todas las ruedas son de igual módulo, determinar los números de dientes z_3, z_4, z_5, z_6 , y z_7 .

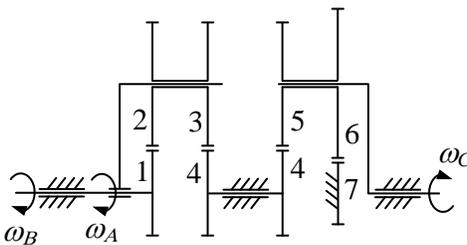


Figura 9.23

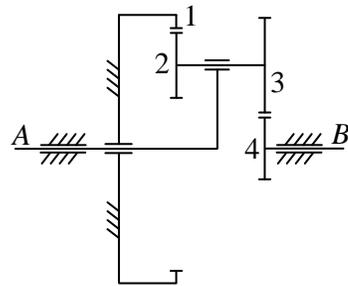


Figura 9.24

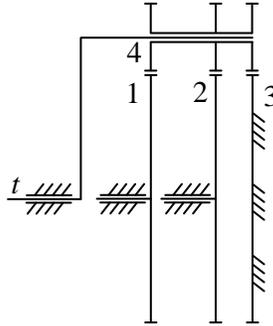


Figura 9.25

Prob. 9.9 En el tren de la figura 9.24 todas las ruedas tienen módulo $m = 2$ mm. Sabiendo que $z_1 = 100$, $z_2 = 30$ y $\omega_A/\omega_B = \frac{9}{149}$, definir las ruedas 3 y 4.

Prob. 9.10 El tren de engranajes de la figura 9.25 se conoce con el nombre de *paradoja de Ferguson*. El engranaje 3 está fijo, mientras que los engranajes 1 y 2 pueden girar libre e independientemente el uno del otro. Los engranajes 1, 2 y 3 tienen, respectivamente, 99, 101 y 100 dientes y engranan todos ellos con el engranaje 4 de 20 dientes, que está unido a la manivela t y puede girar alrededor de su eje. La paradoja consiste en que al girar la manivela en una dirección, la rueda 2 gira muy lentamente en la misma dirección, mientras que la rueda 1 gira muy lentamente en la dirección opuesta. Se pide 1) Hallar las relaciones de velocidades ω_2/ω_t y ω_1/ω_t en función de z_1 , z_2 , z_3 y z_4 . Una vez hecho esto, sustituir los valores numéricos de los números de dientes. 2) Determinar qué engranajes necesitan ser corregidos y el valor de dicha corrección. Nota: Todos los engranajes tienen módulo $m = 4$ mm y ángulo de presión de 20° .

Prob. 9.11 Al subir una cuesta, un ciclista apoya todo su peso de 80 kg sobre un pedal. El sistema de transmisión de potencia a la rueda no es el convencional, basado únicamente en platos y piñones, sino que además cuenta con un tren reductor epicicloidial como el mostrado en la figura 9.26. El plato 1 de 46 dientes conduce al piñón 2 de 16 dientes. El piñón 2 es hueco y en su interior se ha tallado un engranaje interno de $z_3 = 60$ dientes que arrastra a 4 satélites idénticos y los obliga a girar alrededor de un engranaje central fijo de $z_5 = 20$ dientes. Los satélites 4 están unidos mediante el elemento 6, con forma de cruz, que transmite el movimiento a

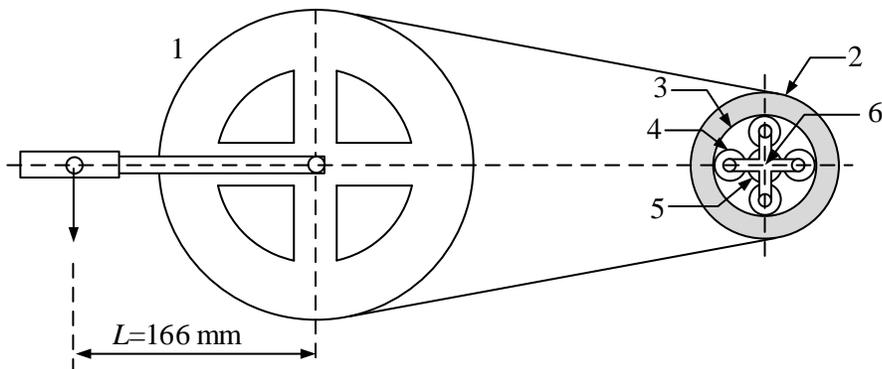


Figura 9.26

la rueda (no mostrada en la figura). 1) Calcular la relación de velocidades ω_6/ω_1 . 2) Calcular la fuerza tangencial nominal que actúa en cada una de las circunferencias primitivas de los engranajes 4 cuando el pedal se encuentra en posición horizontal, con la carga de 80 kg actuando sobre él. El módulo de todos los engranajes es $m = 0,79375$ mm y la longitud de la biela es $L = 166$ mm. Tomar $g = 9,8$ m/s².

Prob. 9.12 La figura 9.27 muestra un aerogenerador que convierte la energía cinética del viento en energía eléctrica. El viento impulsa el rotor, cuyo movimiento de giro es transmitido a un generador eléctrico, encargado de producir electricidad. Por diversas consideraciones económicas y técnicas, las velocidades de giro de los generadores eléctricos suelen ser de unas 1500 rpm. Por otro lado, para aprovechar la acción del viento el rotor suele ser de grandes dimensiones, por lo que su velocidad de giro no puede ser elevada y suele situarse en torno a las 30 rpm. La diferencia de velocidades angulares entre el rotor y el generador obliga a instalar cajas multiplicadoras. Para una máquina de 750 kw, la relación de multiplicación suele ser de aproximadamente 1/50. La máquina de la figura 9.27 dispone de una caja multiplicadora compuesta por cuatro trenes de engranajes: uno de tipo 1 y tres de tipo 2. Los esquemas internos de estas cajas pueden verse en la figura 9.28. Suponiendo conocidos los números de dientes de todos los engranajes, calcular la relación de velocidades ω_E/ω_A .

Prob. 9.13 Hallar la relación ω_s/ω_e de los trenes de engranajes de las figuras 9.29 y 9.30. Datos: $z_1 = 75$, $z_2 = 75$, $z_3 = 30$, $z_4 = 120$, $z_5 = 100$, $z_6 = 40$, $z_7 = 30$.

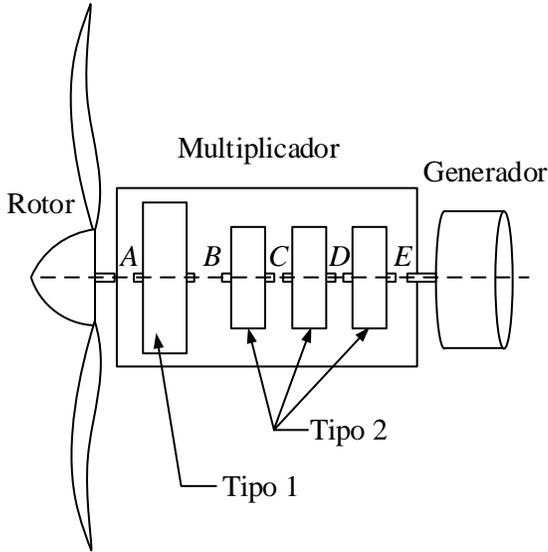


Figura 9.27

Prob. 9.14 El tren de engranajes de la figura 9.31 es un tren planetario empleado en una caja de cambios automática. Para modificar la relación de velocidades, se cambia mecánicamente el elemento fijo, de forma que cambia la relación de velocidades entrada y salida. Se pide, rellenar la tabla con las tres relaciones de velocidad posibles. Datos: $z_1 = 24$, $z_2 = 12$, $z_3 = 12$, $z_4 = 72$.

Entrada	Salida	Bloqueado	Hallar
1	t	4	ω_t/ω_1
t	4	1	ω_4/ω_t
1	4	t	ω_4/ω_1

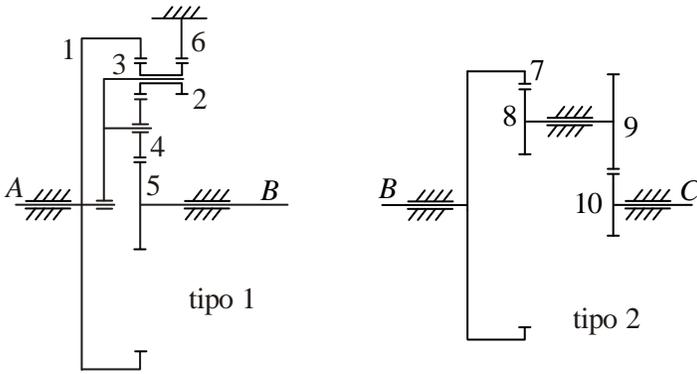


Figura 9.28

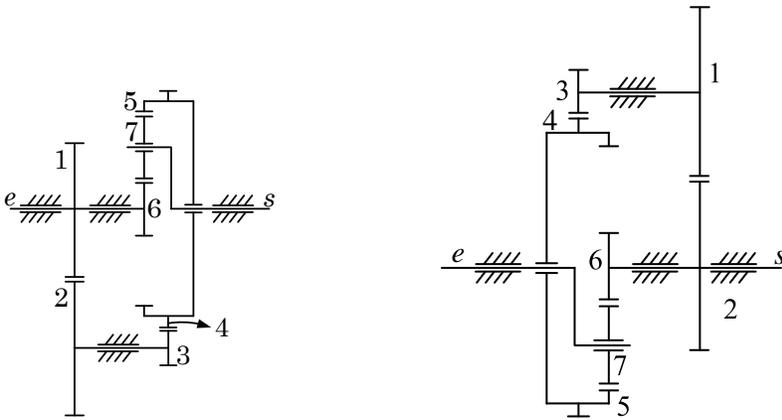


Figura 9.29

Figura 9.30

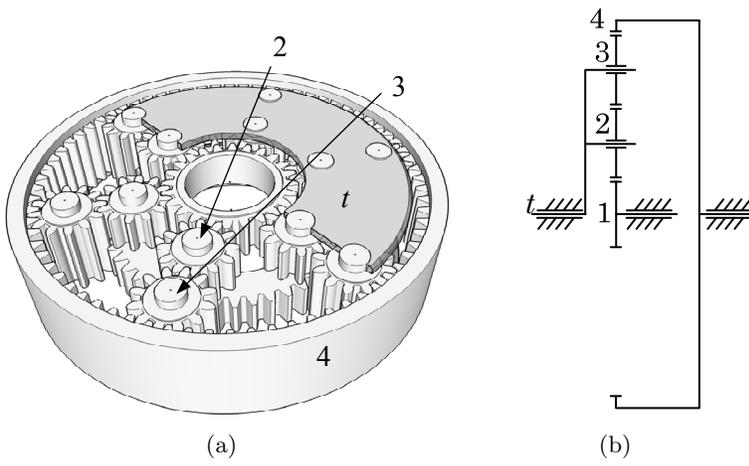


Figura 9.31

Capítulo 10

Equilibrado de rotores

10.1. Concepto de equilibrado

En las máquinas con elementos rotativos no equilibrados se producen fuerzas de excitación armónicas sobre los apoyos, que son proporcionales a las fuerzas de inercia y crecen con el cuadrado de la velocidad angular. Habitualmente, un sistema desequilibrado se caracteriza por la existencia de vibraciones, ruidos, desgastes y, en general, por un mal funcionamiento. Para minimizar el efecto de las fuerzas de excitación es necesario añadir masas puntuales de equilibrado que compensen el efecto de las fuerzas de inercia de desequilibrio, de manera que los ejes y apoyos no reciban fuerzas de excitación o, al menos, éstas sean mínimas.

Para ilustrar el concepto del equilibrado, podemos utilizar el ejemplo de la figura 10.1, que muestra un rotor con una masa m situada a distancia r

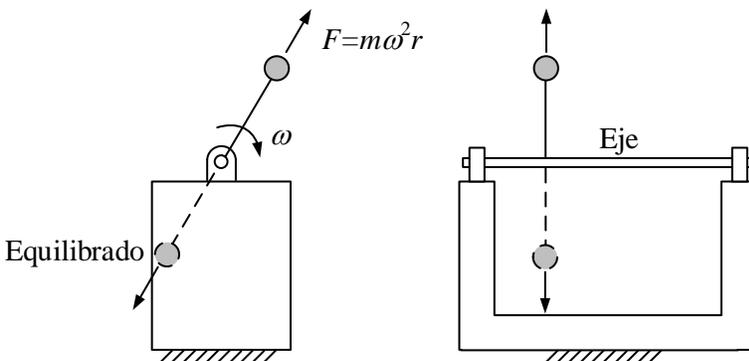


Figura 10.1: Fuerzas provocadas por un rotor desequilibrado.

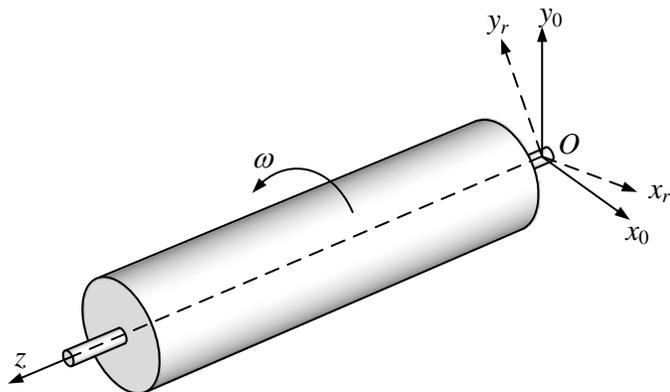


Figura 10.2

del eje, que gira a velocidad angular ω . La fuerza de desequilibrio $F = m\omega^2 r$ que se transmite al eje puede eliminarse por completo añadiendo otra masa m igual, situada simétricamente respecto del eje, que compense totalmente el desequilibrio.

10.2. Teoría del equilibrado de rotores

Consideremos el rotor representado en la figura 10.2, con dos sistemas de referencia, uno fijo $\{0\}$ y otro rígidamente unido al rotor $\{r\}$, que gira con velocidad angular constante ω .

Llamando \mathbf{R} a la resultante de las reacciones en los dos apoyos podemos aplicar las ecuaciones de Newton al rotor, con lo que obtenemos

$${}^r\mathbf{R} = m {}^r\mathbf{a}_G = m ({}^r\omega \times {}^r\omega \times {}^r\mathbf{r}_G) \quad (10.1)$$

donde \mathbf{a}_G es la aceleración del centro de gravedad del rotor y \mathbf{r}_G son sus coordenadas. El superíndice a la izquierda r indica que todas las componentes están referidas al sistema de referencia $\{r\}$ del rotor. La ecuación 10.1 se puede escribir como

$${}^r\mathbf{R} = m \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} {}^r x_G \\ {}^r y_G \\ {}^r z_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m\omega^2 ({}^r x_G) \\ -m\omega^2 ({}^r y_G) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.2)$$

Esta ecuación muestra que las reacciones en los apoyos crecen con el cuadrado de la velocidad angular. También indican que para eliminar las

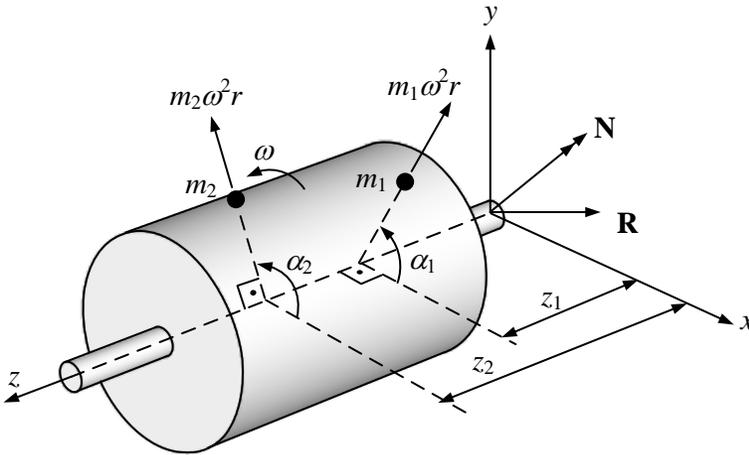


Figura 10.3

reacciones dinámicas es necesario hacer que las coordenadas ${}^r x_G$ e ${}^r y_G$ sean nulas, es decir, que el centro de gravedad del rotor se encuentre en su eje. Cuando un rotor satisface esta condición se dice que está *estáticamente equilibrado*.

Llamando \mathbf{N} al momento de reacción resultante en los apoyos respecto al punto O , podemos escribir las ecuaciones de Euler con respecto al punto O como

$$\begin{aligned}
 {}^r \mathbf{N} &= {}^r \boldsymbol{\omega} \times {}^r \mathbf{I}_O {}^r \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} {}^r I_x & -{}^r I_{xy} & -{}^r I_{xz} \\ -{}^r I_{xy} & {}^r I_y & -{}^r I_{yz} \\ -{}^r I_{xz} & -{}^r I_{yz} & {}^r I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} \omega^2 ({}^r I_{yz}) \\ -\omega^2 ({}^r I_{xz}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.3)
 \end{aligned}$$

Se puede ver que \mathbf{N} también crece con el cuadrado de la velocidad angular. En este caso, para que los momentos de reacción sean nulos, es necesario que los productos de inercia ${}^r I_{xz}$ e ${}^r I_{yz}$ sean nulos.

Cuando un rotor satisface simultáneamente la condición de que su centro de gravedad está sobre el eje y que los productos de inercia ${}^r I_{xz}$ e ${}^r I_{yz}$ son nulos, se dice que está *dinámicamente equilibrado*, y en él las reacciones en los apoyos son constantes e independientes de la velocidad de giro.

Para equilibrar dinámicamente un rotor es necesario utilizar al menos dos masas puntuales, normalmente situadas en la periferia del rotor, cuyo

cometido es anular las reacciones dinámicas producidas por el desequilibrio. Para demostrar por qué son necesarias dos masas y no es suficiente con una sola, consideramos el rotor de la figura 10.3, donde se han dibujado la fuerza \mathbf{R} y el momento \mathbf{N} de reacción, ambos proporcionales al cuadrado de la velocidad angular y con velocidad de rotación igual a la del rotor. A distancia r se coloca una masa m_1 en la periferia, de magnitud tal que equilibre la resultante \mathbf{R} , de modo que

$$\mathbf{R} = m_1 \omega^2 r \quad (10.4)$$

Con ello, el rotor queda estáticamente equilibrado pues la reacción \mathbf{R} se compensa con $m_1 \omega^2 r$. Ahora bien, además de \mathbf{R} hay que anular \mathbf{N} , lo que no es posible con la misma masa m_1 , pues aunque tanto \mathbf{R} como \mathbf{N} se encuentran en el plano perpendicular al eje, en general tienen direcciones diferentes. Por tanto, para anular ambas simultáneamente será necesario utilizar una segunda masa m_2 .

Otra forma de demostrar la necesidad de emplear dos masas para el equilibrado dinámico es escribiendo las ecuaciones que obligan a que las coordenadas ${}^r x_G$ e ${}^r y_G$ del centro de gravedad sean nulas y que los productos de inercia ${}^r I_{xz}$ e ${}^r I_{yz}$ sean también nulos. Las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} m ({}^r x_G) + m_1 r \cos \alpha_1 + m_2 r \cos \alpha_2 &= 0 \\ m ({}^r y_G) + m_1 r \sin \alpha_1 + m_2 r \sin \alpha_2 &= 0 \\ {}^r I_{xz} + m_1 r \cos \alpha_1 z_1 + m_2 r \cos \alpha_2 z_2 &= 0 \\ {}^r I_{yz} + m_1 r \sin \alpha_1 z_1 + m_2 r \sin \alpha_2 z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

donde m es la masa del rotor y los ángulos α_1 y α_2 se muestran en la figura 10.3. Las dos primeras ecuaciones imponen la condición de que el centro de gravedad esté en el eje, mientras que las dos últimas aseguran la condición de que los productos de inercia sean nulos. Puesto que los valores ${}^r x_G$, ${}^r y_G$, ${}^r I_{xz}$ e ${}^r I_{yz}$ toman valores arbitrarios en un rotor desequilibrado, queda claro que no ponemos anular las cuatro ecuaciones prescindiendo de la masa m_2 y variando solamente los parámetros m_1 , α_1 y z_1 , lo que demuestra que son necesarias al menos dos masas para el equilibrado dinámico.

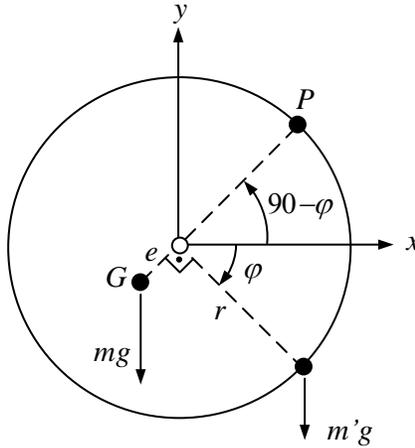


Figura 10.4: Equilibrado estático.

10.3. Método experimental de equilibrado estático

En este apartado se explica un sencillo método de equilibrado estático, que puede ser aplicado en algunos casos particulares en que el rotor gire a velocidades moderadas y el rozamiento en los apoyos sea suficientemente pequeño.

Consideremos un rotor desequilibrado de masa m y radio r , mostrado en la figura 10.4, cuyo centro de gravedad está separado del eje una cantidad e desconocida. Cuando el rotor se coloca sobre unos cojinetes, que supondremos sin rozamiento, la gravedad hará que el centro de masas del rotor se desplace hasta alcanzar su posición más baja, en donde permanecerá en reposo. En ese momento, colocamos una masa de prueba m' en la posición indicada en la figura, que rompe el equilibrio estático. Para recuperarlo, el rotor gira un ángulo φ , que puede ser medido experimentalmente, hasta alcanzar una nueva posición de equilibrio. La condición de equilibrio del rotor se puede escribir como

$$m'g r \cos \varphi = m g e \sin \varphi \quad (10.6)$$

de donde se puede determinar el valor de e como

$$e = \frac{m' r}{m \tan \varphi} \quad (10.7)$$

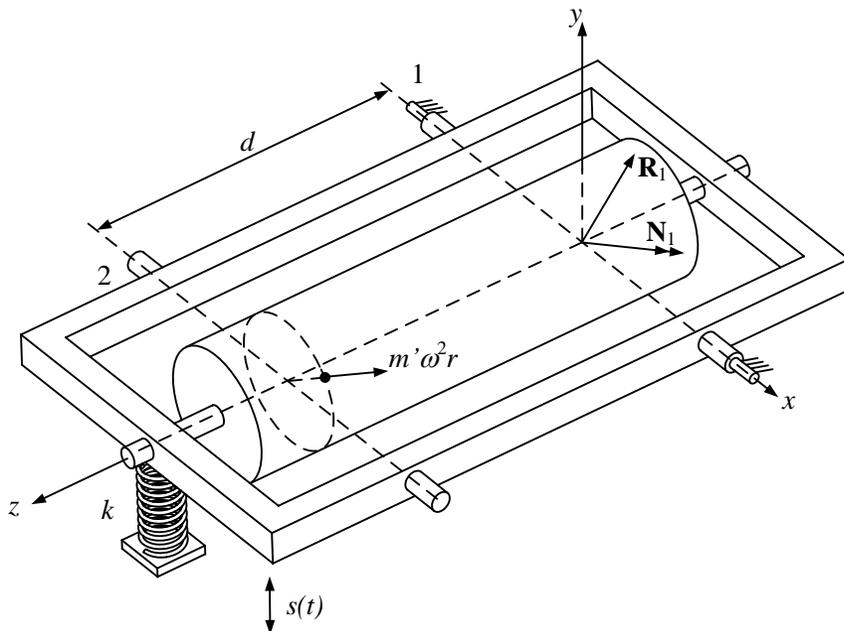


Figura 10.5: Bancada para el equilibrado dinámico de un rotor.

La masa de equilibrado m_e debe hacer que el centro de gravedad se sitúe en el eje, para lo cual se debe situar en el punto P , en posición opuesta a G . La magnitud de esta masa debe ser tal que el momento estático de primer orden sea nulo, lo que se puede escribir como

$$m_e r = m e \quad (10.8)$$

Despejando m_e y sustituyendo la ecuación 10.7 obtenemos finalmente

$$m_e = \frac{m e}{r} = \frac{m'}{\tan \varphi} \quad (10.9)$$

10.4. Método experimental de equilibrado dinámico

En la actualidad el equilibrado de rotores se puede llevar a cabo de muchas formas distintas, bien sea en bancos de ensayo o mediante métodos de equilibrado *in situ*. Los bancos de ensayo son los métodos preferidos para el equilibrado de rotores de tamaño pequeño o moderado, porque

vienen completamente equipados con sensores y programados para determinar automáticamente el lugar de colocación y la magnitud de las masas de equilibrado. En este apartado veremos, más con fin pedagógico que con fin práctico, un método experimental para equilibrar rotores en un banco de ensayos, que se ilustra en la figura 10.5. Se compone de un bastidor sobre el que se monta el rotor, que es impulsado hasta una velocidad de rotación ω constante por un motor que no se ha dibujado. El bastidor se puede articular al elemento fijo en dos planos distintos 1 y 2. Con el bastidor articulado en el plano 1, se coloca un muelle de rigidez k en el extremo opuesto, que mantiene el bastidor en posición horizontal antes de ponerlo en marcha.

Al poner en marcha el rotor, se producen sobre los apoyos reacciones de desequilibrio que, como sabemos, son proporcionales a ω y giran a la misma velocidad que éste. Puesto que el bastidor está soportado por un muelle, al aparecer fuerzas oscilatorias de desequilibrio todo él comienza a vibrar con un movimiento oscilatorio $s(t)$, que suponemos de pequeña amplitud. Es fácil demostrar que el movimiento $s(t)$ es armónico, de frecuencia ω y que su amplitud S_1 es proporcional al módulo del momento de desequilibrio N_1 respecto del plano 1. Llamando c a esta constante de proporcionalidad, podemos escribir

$$S_1 = c N_1 \quad (10.10)$$

Para equilibrar el rotor en el plano 1 colocaremos una masa de magnitud m_2 en el plano 2, de manera que las oscilaciones queden anuladas. El método seguido para anular estas vibraciones se denomina método de las tres carreras, y consta de los siguientes pasos:

- Se pone en marcha el rotor y se mide la amplitud de las oscilaciones S_1 .
- Se coloca una masa de prueba m' en una posición arbitraria α del plano 2, y se vuelven a medir la amplitud de la oscilación S_2 .
- Se elimina la masa del paso anterior, se coloca la misma masa m' en una posición $\alpha + \pi$ y se mide por tercera vez la amplitud de la oscilación S_3 .

Estas tres mediciones nos permiten determinar la masa m_2 que buscamos. Para entender el proceso que desarrollaremos a continuación, es preciso recordar que el momento de desequilibrio y la amplitud medida en

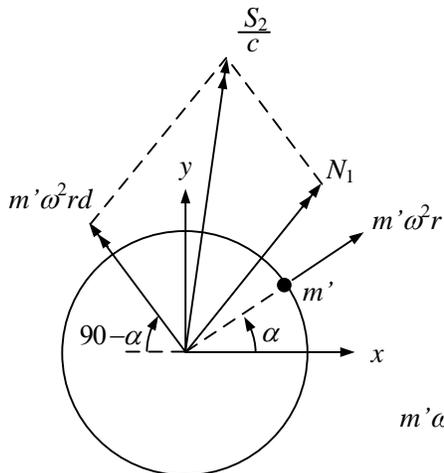


Figura 10.6

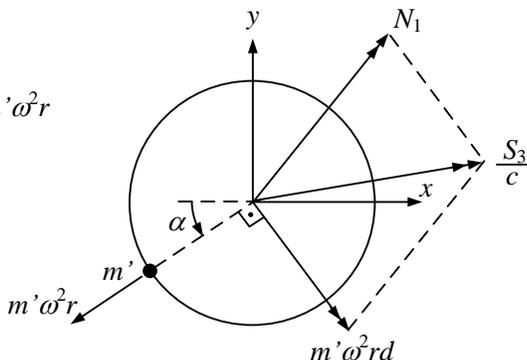


Figura 10.7

el extremo del bastidor son proporcionales y, por tanto, equivalentes salvo por un factor de escala.

En la segunda carrera, el rotor funciona con dos momentos de desequilibrio superpuestos: uno es el desequilibrio interno del rotor \mathbf{N}_1 y el otro el momento respecto al plano 1 que genera la masa de prueba m' . Puesto que ambos momentos actúan simultáneamente, la amplitud S_2 que medimos es proporcional a su suma, como se refleja en la figura 10.6, donde también se puede ver la masa m' y su fuerza de inercia $m'\omega^2 r$, que genera un momento $m'\omega^2 r d$ respecto del plano 1, perpendicular a la fuerza. El momento de desequilibrio total es, por tanto, la suma del momento N_1 y del momento $m'\omega^2 r d$, y es proporcional a la amplitud medida S_2 .

En la tercera carrera podemos hacer un razonamiento totalmente análogo, que queda plasmado en la figura 10.7.

Podemos fusionar las dos figuras 10.6 y 10.7 en la figura 10.8, que concentra las sumas de momentos de desequilibrio. Está claro el rotor quedará equilibrado si conseguimos compensar el momento de desequilibrio interno N_1 con otro momento igual y de signo contrario N_1^e , creado por medio de una masa de equilibrado m_2 . La fuerza de inercia correspondiente a dicha masa será $m_2\omega^2 r$ y estará situada en un plano ortogonal a N_1 . El momento correspondiente a m_2 será:

$$N_1^e = m_2\omega^2 r d \quad (10.11)$$

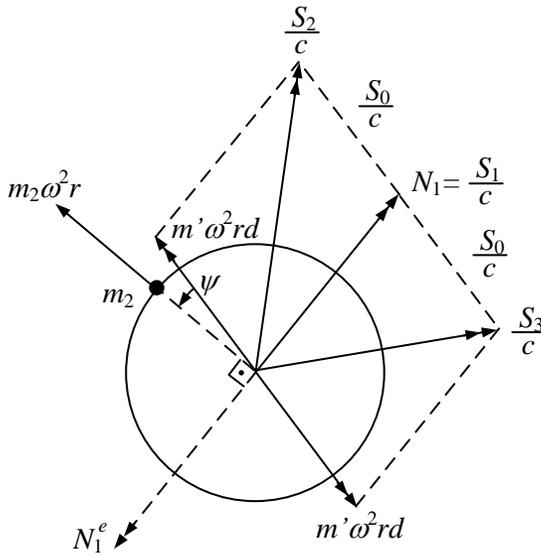


Figura 10.8

que debe coincidir con N_1 . Por tanto, la masa de equilibrado valdrá

$$m_2 = \frac{N_1}{\omega^2 r d} = \frac{S_1/c}{S_0/m'c} = m' \frac{S_1}{S_0} \tag{10.12}$$

siendo S_0/c la longitud del segmento $m' \omega^2 r$. El ángulo de colocación de la masa de equilibrado es ψ , medido respecto al momento $m' \omega^2 r$ generado por la primera masa de prueba, lo que equivale a un ángulo absoluto de $\alpha + \psi + \frac{\pi}{2}$.

Para calcular el ángulo ψ , se parte de tres amplitudes medidas S_1 , S_2 y S_3 , correspondientes a las tres carreras, y se realiza una construcción gráfica como la de la figura 10.8. Para ello, se dibujan los tres segmentos con un origen común y con sus extremos alineados, de manera que las longitudes de los dos segmentos interceptados por los extremos libres deben ser iguales entre sí. Llamando S_0 a la longitud de estos segmentos, se pueden hacer dos construcciones diferentes, dependiendo del orden en que se dibujen los segmentos S_1 , S_2 y S_3 , lo que da origen a dos posibles ángulos ψ diferentes. Como sólo uno de ellos equilibra el rotor, es necesario disponer de algún dato adicional que resuelva la indeterminación.

Normalmente, se recurre una cuarta carrera en la que la masa de prueba m' se sitúa en $\alpha + \frac{\pi}{2}$, y se mide una nueva amplitud S_4 . Esta nueva amplitud

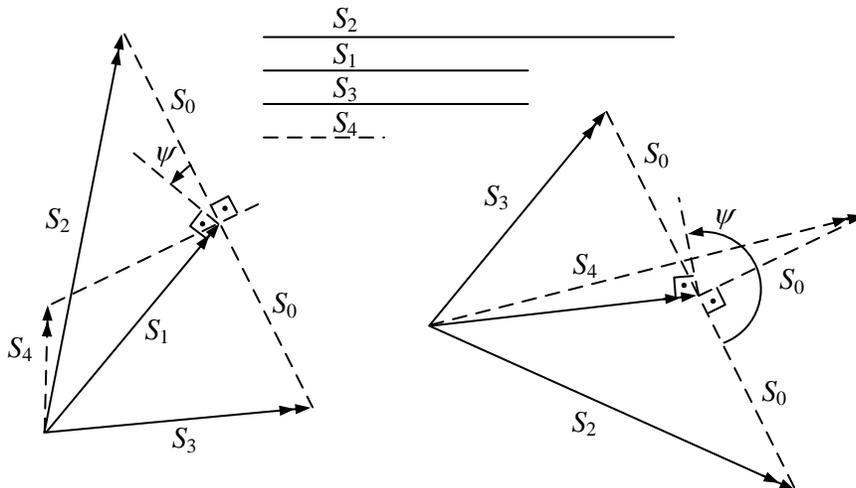


Figura 10.9

permite hacer una única construcción que, en nuestro caso particular (la amplitud S_4 medida es la pequeña) es la de la izquierda, por lo que la de la derecha queda descartada.

10.5. Normalización del equilibrado de los rotores

El equilibrado perfecto de un rotor sólo es posible en teoría, ya que en la práctica todo rotor tiene algún desequilibrio. La práctica obliga, por tanto, a definir niveles tolerables de desequilibrio para cada aplicación concreta, con objeto de evitar, por una parte, un excesivo y costoso equilibrado que puede ser innecesario y, por otra, un equilibrado insuficiente que impida el correcto funcionamiento de la máquina.

La norma ISO 1940 establece de forma orientativa los requerimientos de calidad del equilibrado de los rotores rígidos. La norma define un parámetro G , denominado *grado de calidad del equilibrado*, que se obtiene como el producto $G = e\omega$, donde e representa la excentricidad máxima del centro de gravedad y ω es la velocidad máxima de giro del rotor.

En función del tipo de rotor y de su uso, la norma establece un determinado grado de calidad. Por ejemplo, a los cigüeñales de motores diesel marinos con baja velocidad de giro y número de cilindros impar les asigna un valor $G = 4000$ mm/s, a las ruedas de automóvil un valor $G = 40$, y a los cabezales de las rectificadoras de precisión y giroscopios un valor $G = 0,4$

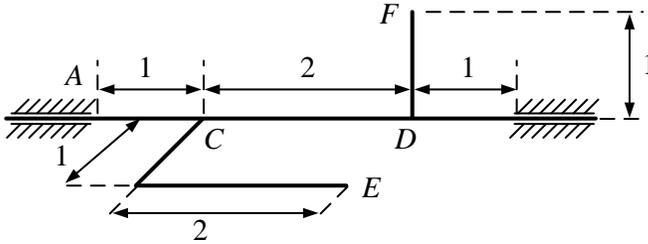


Figura 10.10

mm/s. A partir del valor de G , del peso del rotor y su máxima velocidad de giro, la norma establece cómo obtener el desequilibrio máximo permisible u_{per} , magnitud que establece el límite máximo tolerable de desequilibrio en los apoyos.

10.6. Problemas

Prob. 10.1 Se pretende equilibrar un rotor por el método de las tres carreras. Una vez articulado el bastidor en el plano 1 se mide una amplitud $S_1 = a$. Se coloca una masa $M = 50$ g y se miden las amplitudes $S_2 = a\sqrt{3}$, $S_3 = a$, $S_4 = 0,518 a$ para ángulos α , $\alpha + \pi$, $\alpha - \frac{\pi}{2}$. A continuación se articula el bastidor en el plano 2 y, siguiendo los mismos pasos, se hallan las amplitudes $S_1 = a'/\sqrt{2}$, $S_2 = a'$, $S_3 = a'$, $S_4 = a'\sqrt{2}$. Suponiendo que las masas de equilibrado se colocan a la misma distancia del eje que las masas de prueba, hallar las masas de equilibrado y el ángulo de colocación medido respecto a la masa de prueba.

Prob. 10.2 Sobre un eje horizontal apoyado en A y B están soldadas las barras CE y DF según la disposición y dimensiones de la figura 10.10. La masa por unidad de longitud de las barras es M . Se quieren colocar 2 masas, una de ellas m_1 en el plano C y otra m_2 en el plano D , ambos a 1 m del eje, de manera que el eje quede equilibrado. Suponiendo que el conjunto gira con velocidad ω constante, determinar m_1 , m_2 y los ángulos α_1 , α_2 a los que se deben colocar las masas.

Prob. 10.3 La pieza en forma de U de la figura 10.11 gira alrededor de un eje vertical con velocidad ω constante. Sabiendo que cada tramo tiene longitud L y masa M uniformemente distribuida, hallar las reacciones en A .

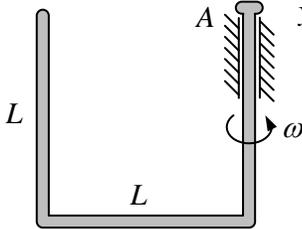


Figura 10.11

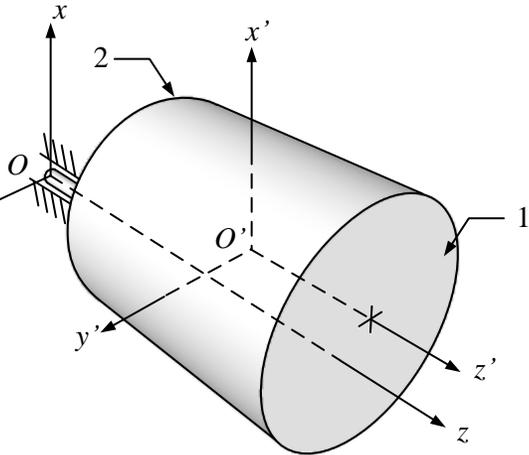


Figura 10.12

Prob. 10.4 La figura 10.12 representa una rueda de masa $M = 8$ kg, diámetro $D = 500$ mm y longitud $L = 120$ mm, rígidamente unido a los ejes xyz , que gira con velocidad angular $\omega = 1275$ rpm. Se supone que la rueda es un cilindro perfecto, sin defectos de construcción, y que $x'y'z'$ están situados en su centro de gravedad. Sabiendo que las coordenadas de O' en los ejes $x'y'z'$ son $(0,66, -0,75, 300)$ mm, hallar: 1) Reacciones y momentos en O . 2) Reacciones y momentos en O si el disco se equilibra estáticamente en el plano 1. 3) Masas de equilibrado y su orientación en los planos 1 y 2.

Capítulo 11

Vibraciones en sistemas con un grado de libertad

11.1. Introducción e historia

La teoría de vibraciones estudia el movimiento oscilatorio de los sistemas físicos. Las vibraciones aparecen en tantas situaciones relacionadas con la vida corriente y con las máquinas y estructuras que nos rodean, que tratar de hacer una lista sería casi imposible. Pensemos, por ejemplo, en las vibraciones que experimentamos al viajar en automóvil o avión, al viajar en tren, las producidas por la máquina-herramienta durante el corte, las que sufren los álabes de una turbina al girar a varios miles de revoluciones por minuto o en las que soportan los edificios durante un terremoto.

Las vibraciones aparecen en mayor o menor medida en todas máquinas rotativas por efecto del desequilibrio del rotor. En algunos motores, como los de explosión, el desequilibrio es inherente al funcionamiento del propio motor. Por ejemplo, algunos motores Diesel crean vibraciones en el suelo que originan molestias a las personas que se encuentran en las proximidades. Las vibraciones en las turbinas son la causa de accidentes espectaculares producidos por la rotura de los álabes, que los ingenieros no han sido aún capaces de evitar. Las estructuras diseñadas para soportar máquinas rotativas con fuerzas de inercia grandes o máquinas alternativas como bombas y motores también están sujetas a vibraciones. En todos estos casos, el material puede fallar debido a la fatiga provocada por esfuerzos alternados. Además, las vibraciones provocan el rápido desgaste de algunas partes de las máquinas, como los apoyos, rodamientos y engranajes, al tiempo que generan ruido. Si no se adoptan las debidas precauciones,

las vibraciones pueden causar que los tornillos y tuercas se aflojen. En la máquina herramienta, las vibraciones deterioran los acabados superficiales.

El diseño de sistemas mecánicos sometidos a vibraciones requiere métodos de cálculo muy diferentes de los utilizados en el análisis estructural convencional. Mientras que en el caso estático las cargas de una estructura son razonablemente intuitivas, siguiendo el patrón lineal por el que a mayor carga se precisa una mayor mayor sección, en el cálculo dinámico necesario para las vibraciones el proceso es mucho menos intuitivo. En él, la magnitud de las fuerzas ocupa una importancia secundaria, mientras que la frecuencia de la fuerza pasa a adquirir una importancia capital. La intuición puede, incluso, inducir a errores, pues en función de su frecuencia, algunas fuerzas periódicas pequeñas pueden tener efectos mucho más perjudiciales que otras estáticas de mayor magnitud.

Toda máquina tiene una o múltiples frecuencias naturales y, al ser excitada por fuerzas periódicas de frecuencia semejante a alguna de ellas, se produce el fenómeno de resonancia, que conduce a desplazamientos de amplitud creciente, pudiendo llegar al fallo por rotura. Por los serios efectos que las vibraciones pueden provocar en las máquinas y estructuras, muchos sistemas mecánicos deben ser diseñados y su comportamiento testado para verificar su comportamiento bajo vibraciones.

Probablemente, el primer investigador en tratar el movimiento oscilatorio fue Galileo (1564-1642), quien comenzó investigando las oscilaciones de un péndulo y dedujo la relación existente entre su periodo y la longitud. Galileo descubrió también la ley que rige la caída libre de los cuerpos e ideó el reloj de péndulo, que unos años más tarde sería construido por Huygens (1656).

Basándose en el trabajo de Galileo, Newton (1642-1727) formuló sus conocidas leyes, que constituyen el punto de referencia para escribir las ecuaciones del movimiento de los sistemas mecánicos vibratorios. D'Alembert (1717-1783) fue el primero en establecer su famoso principio, por el cual las fuerzas de inercia se pueden considerar de la misma manera que las fuerzas exteriores, transformando un problema dinámico en uno estático. El principio de D'Alembert dio pie a Lagrange (1763-1813) a desarrollar sus ecuaciones, que describen el movimiento de los sistemas dinámicos por medio de cantidades escalares (energía cinética y potencial) en lugar de vectoriales (momento lineal), como la segunda ley de Newton.

Hooke (1635-1703) estableció la relación entre la tensión y la deformación de los sólidos flexibles. Euler (1707-1783) y Bernoulli (1700-1782) obtuvieron la ecuación diferencial que gobierna la transmisión de vibraciones en vigas. Entre los frutos de los trabajos de estos dos autores se en-

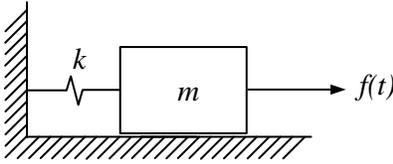


Figura 11.1: Sistema vibratorio.

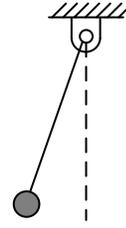


Figura 11.2: Sistema oscilatorio.

cuentra la teoría de vigas conocida como de Euler-Bernoulli, que se estudia en Resistencia de Materiales. En un terreno diferente, Fourier (1769-1830) realizó otra gran aportación al estudio de vibraciones, al desarrollar las series que llevan su nombre y que permiten expresar una función cualquiera como suma infinita de funciones armónicas elementales. El análisis de Fourier es la base del estudio de las vibraciones en el dominio de la frecuencia, que constituye probablemente la herramienta más fundamental del análisis experimental de vibraciones.

Otras aportaciones relevantes al estudio de vibraciones procede de Rayleigh (1842-1919), quien investigó la teoría del sonido, corrigió la teoría de vigas convencional incorporando el efecto de la inercia rotativa y desarrolló un método numérico para determinar la frecuencia natural más baja de un sistema. Por su parte, Timoshenko (1872-1972) dio un gran empuje a la teoría de vigas y placas, desarrollando la conocida viga de Timoshenko, que incluye el efecto del cortante despreciado en la viga de Euler-Bernoulli.

11.2. Conceptos previos

Veamos un conjunto de conceptos empleados habitualmente en el estudio de vibraciones y que conviene tener presentes antes de pasar al estudio matemático de las vibraciones.

- Vibración:** Es un movimiento oscilatorio que aparece, por lo general, en los sistemas mecánicos sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo. Distinguiremos entre *vibración*, que conlleva variación de energía potencial elástica, como en la figura 11.1, y *oscilación*, que no, como en el péndulo de la figura 11.2. Puesto que los sistemas vibratorios y oscilatorios se rigen por ecuaciones similares, es frecuente estudiarlos juntos y prescindir de la diferencia conceptual entre ambas.

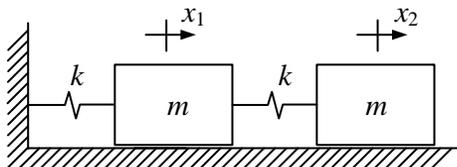


Figura 11.3: Sistema discreto.

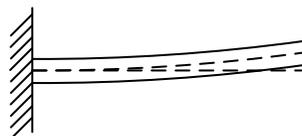


Figura 11.4: Sistema continuo.

- **Grados de libertad:** Son los parámetros necesarios para definir de forma unívoca la configuración del sistema vibratorio. Por ejemplo, el sistema de la figura 11.3 tiene 2 grados de libertad, que son las dos coordenadas x_1 y x_2 que definen del desplazamiento de cada bloque respecto a sus posiciones de referencia.
- **Sistemas discretos y sistemas continuos:** Se denominan *sistemas discretos* aquéllos que pueden ser definidos mediante un número finito de grados de libertad y *continuos* aquéllos que necesitan infinitos grados de libertad para ser exactamente definidos. Por ejemplo, el sistema de dos grados de libertad de la figura 11.3 es un sistema discreto. En cambio, la viga de la figura 11.4 es un sistema continuo pues para conocer su deformada es necesario especificar el desplazamiento vertical de cada uno de sus puntos, que viene dado por una función de la forma $y(x)$. Matemáticamente, los sistemas discretos conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que los sistemas continuos conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El movimiento vibratorio de los sistemas continuos, a excepción de unos pocos sistemas con geometrías sencillas, suele abordarse transformándolo en discreto a través de técnicas de discretización como el método de los elementos finitos.
- **Sistemas lineales:** Sea un sistema mecánico que responde con movimientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a dos fuerzas $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Dicho sistema se denomina lineal si a una fuerza $f_3(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ responde con un movimiento $x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$. Una de las características de los sistemas lineales es que en ellos se puede aplicar el principio de superposición, que establece que la respuesta a una excitación combinada se puede obtener combinando las respuestas a cada una de las excitaciones simples.
- **Sistemas definidos y semidefinidos:** Un sistema se denomina *definido* cuando cualquier movimiento que en él se produzca conlleva

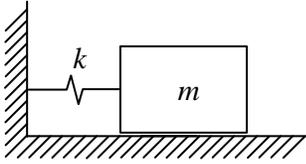


Figura 11.5: Sistema definido.

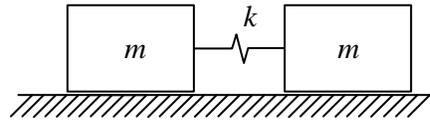


Figura 11.6: Sistema semidefinido.

una variación de la energía potencial elástica. En cambio, un sistema se denomina *semidefinido* cuando existe algún movimiento que no conlleva variación de la energía potencial elástica. La figura 11.5 es un ejemplo de un sistema definido. La figura 11.6, en cambio, muestra un sistema semidefinido, en el que un desplazamiento de igual magnitud en ambos bloques no produce variación de la energía potencial.

- **Vibraciones libres y forzadas:** Vibraciones *libres* son las que se producen al sacar un sistema de su posición de equilibrio y dejarlo oscilar libremente. Vibraciones *forzadas* son aquellas que se producen por acción de fuerzas dependientes del tiempo. Los principales tipos de fuerzas son *armónicas*, *periódicas*, *impulso*, *escalón*, *rampa* y *arbitrarias*.

- **Respuesta estacionaria y respuesta transitoria:** La respuesta vibratoria de los sistemas mecánicos suele estar formada por dos partes: una parte que tiende a cero con el tiempo y que se denomina respuesta *transitoria* y otra que permanece, y que se denomina respuesta *estacionaria*. Normalmente, la parte transitoria se debe a las condiciones iniciales y a las fuerzas independientes del tiempo, mientras que la estacionaria se debe a fuerzas dependientes del tiempo.

- **Vibraciones deterministas y vibraciones aleatorias:** Las vibraciones se denominan *deterministas* cuando se conocen las fuerzas excitadoras, y se denominan *aleatorias* cuando sólo se conocen valores estadísticos de las excitaciones. En este último caso, no se puede calcular la respuesta exacta y, en su lugar, se relacionan los valores estadísticos de la excitación con los de la respuesta. Ejemplos de fuerzas aleatorias son las provocadas por los terremotos o las originadas por el viento.

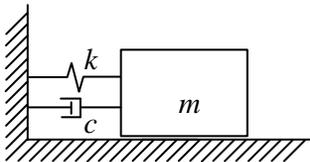


Figura 11.7

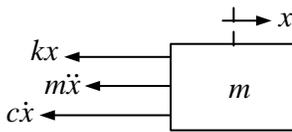


Figura 11.8

11.3. Vibraciones libres

La figura 11.7 muestra el sistema básico de un grado de libertad, compuesto por una masa puntual m , un muelle de rigidez k y un amortiguador de constante c . Llamando x al desplazamiento del bloque respecto de su posición inicial de equilibrio, el diagrama de sólido libre del sistema, incluyendo la fuerza de inercia, se muestra en la figura 11.8. Sumando las fuerzas horizontales e igualando a cero, se obtiene:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (11.1)$$

La ecuación 11.1 representa una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, cuya resolución se verá en los apartados posteriores para distintos valores de los coeficientes k y c .

11.3.1. Vibraciones libres no amortiguadas

Consideremos en primer lugar el caso más sencillo de amortiguamiento nulo. Particularizando la ecuación 11.1 para $c = 0$, tenemos

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (11.2)$$

Por conveniencia, se divide dicha ecuación por m , resultando

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (11.3)$$

donde ω_n es una constante que se denomina *frecuencia natural* del sistema, y que vale

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11.4)$$

La solución general a la ecuación homogénea 11.3 se obtiene ensayando soluciones del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$. Sustituyendo, se obtiene

$$A (\lambda^2 + \omega_n^2) e^{\lambda t} = 0 \quad (11.5)$$

Por lógica, ni A ni $e^{\lambda t}$ pueden ser nulos, ya que si no la respuesta $x(t)$ sería nula. Por tanto, el paréntesis debe ser nulo, lo que equivale a

$$\lambda = \pm i \omega_n \quad (11.6)$$

La solución $x(t)$ se obtiene como una combinación lineal de las dos soluciones posibles

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t} \quad (11.7)$$

Obsérvese que aunque en la ecuación 11.7 aparecen números complejos la respuesta $x(t)$ ha de ser real, ya que de otra forma no tendría sentido físico. Para ello, es necesario que las constantes A_1 y A_2 sean números complejos conjugados. De esta manera, las partes complejas de los dos sumandos de la ecuación se anulan y el resultado es real. La ecuación se puede reescribir utilizando funciones trigonométricas. Para ello, sustituimos los términos exponenciales complejos $e^{i\omega_n t}$ y $e^{-i\omega_n t}$ por sus equivalentes trigonométricos, mediante las expresiones

$$\begin{aligned} e^{i\omega_n t} &= \cos \omega_n t + i \operatorname{sen} \omega_n t \\ e^{-i\omega_n t} &= \cos \omega_n t - i \operatorname{sen} \omega_n t \end{aligned} \quad (11.8)$$

lo que conduce a

$$x(t) = (A_1 + A_2) \cos \omega_n t + i(A_1 - A_2) \operatorname{sen} \omega_n t \quad (11.9)$$

Puesto que A_1 y A_2 son complejos conjugados, la suma $A_1 + A_2$ es un número real al que podemos llamar B_1 , y el término $i(A_1 - A_2)$ también es un número real al que podemos llamar B_2 . Introduciendo estos dos nuevos términos, la ecuación 11.9, queda de la forma

$$x(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t \quad (11.10)$$

Una tercera forma de escribir la ecuación 11.7, o su análoga la 11.10, se obtiene realizando un cambio de variables que transforma las constantes B_1 y B_2 en las constantes A y ψ , según las ecuaciones:

$$\begin{aligned} B_1 &= A \cos \psi \\ B_2 &= A \operatorname{sen} \psi \end{aligned} \quad (11.11)$$

Sustituyendo en la ecuación 11.10 y agrupando términos, resulta

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \psi) \quad (11.12)$$

que es la forma más habitual de expresar la respuesta a las vibraciones libres no amortiguadas. Las constantes A y ψ se denominan *amplitud* y *desfase* y se determinan a partir de las condiciones iniciales de posición $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$. Para calcular A y ψ , escribimos

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 = A \cos \psi \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 = A \omega_n \sin \psi\end{aligned}\tag{11.13}$$

de donde despejamos sus valores como

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}\tag{11.14}$$

$$\tan \psi = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0}\tag{11.15}$$

La ecuación de $x(t)$ dada por la ecuación 11.12 (o sus análogas 11.7 y 11.10) muestra que la respuesta a las ecuaciones libres tiene siempre una frecuencia constante ω_n , que es la frecuencia natural, independientemente de las condiciones iniciales a las que esté sometida la masa. Es decir, el hecho de separar mucho el bloque respecto de su posición de equilibrio no obliga a éste a vibrar a mayor frecuencia, sino únicamente con mayor amplitud. Por este motivo, un sistema vibratorio de un grado de libertad sin amortiguamiento se comporta como un oscilador armónico. La frecuencia natural es una propiedad constante del sistema que solamente puede modificarse cambiando la rigidez o la masa.

11.3.2. Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso

Consideramos ahora un sistema amortiguado, como el mostrado en la figura 11.7, cuya ecuación de equilibrio viene dada por la ecuación 11.1. Dividiendo por la masa, se obtiene:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0\tag{11.16}$$

donde ω_n es la frecuencia natural ya definida y ξ se denomina amortiguamiento relativo y se define como

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n}\tag{11.17}$$

Ensayamos ahora soluciones de la forma $x(t) = Ae^{\lambda t}$, que al ser sustituida en la ecuación 11.16 conduce a

$$A(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2)e^{\lambda t} = 0\tag{11.18}$$

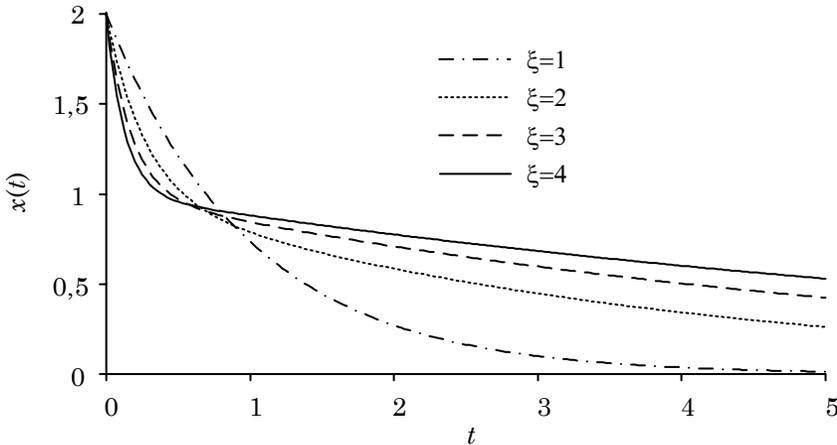


Figura 11.9: Respuesta con amortiguamiento crítico y supercrítico ($\xi \geq 1$)

Al igual que en el caso anterior, el paréntesis debe ser nulo para que la solución tenga sentido, por lo que las soluciones de λ son

$$\lambda = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (11.19)$$

Finalmente, la solución general de la ecuación homogénea original se obtiene como una combinación lineal de las soluciones obtenidas para λ , resultando

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (11.20)$$

En la ecuación (9.20) se pueden dar tres casos, dependiendo de si los exponentes λ_1 y λ_2 son reales, nulos o imaginarios. Cada uno de los tres casos da lugar a una respuesta diferente que a continuación se examina.

- **Amortiguamiento supercrítico** ($\xi > 1$): Las dos raíces λ_1 y λ_2 son reales y negativas. Entonces, la respuesta no es oscilatoria sino que se aproxima a cero asintóticamente, siguiendo una función exponencial decreciente mostrada en la figura 11.9.
- **Amortiguamiento crítico** ($\xi = 1$): Hay una única raíz doble $\lambda = -\xi \omega_n$. En este caso, la solución general de la homogénea no es como la de ecuación 11.20, sino de la forma

$$x(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} \quad (11.21)$$

Esta respuesta tiene forma exponencial decreciente, como se puede ver también en la figura 11.9.

- **Amortiguamiento subcrítico** ($\xi < 1$): En este caso, las raíces λ_1 y λ_2 son complejas conjugadas y su expresión es

$$\lambda = -\xi \omega_n \pm i \omega_d \quad (11.22)$$

donde ω_d se denomina *frecuencia de las vibraciones amortiguadas* y se define como

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (11.23)$$

Entonces, la solución general vendrá dada por

$$x(t) = A_1 e^{(-\xi \omega_n + i \omega_d)t} + A_2 e^{(-\xi \omega_n - i \omega_d)t} \quad (11.24)$$

Sacando factor común:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} (A_1 e^{i \omega_d t} + A_2 e^{-i \omega_d t}) \quad (11.25)$$

Esta ecuación se asemeja a la 11.7, pues en ambas aparece una suma de dos términos exponenciales complejos. Vimos anteriormente que dicha ecuación se podía escribir también de las formas dadas en las ecuaciones 11.10 y 11.12. Por analogía, la ecuación 11.25 se puede escribir de otras dos formas equivalentes:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \quad (11.26)$$

$$x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi) \quad (11.27)$$

En este caso, la respuesta es oscilatoria, de la forma mostrada en la figura 9.10.

11.4. Respuesta a las excitaciones armónicas

Las excitaciones armónicas son de suma importancia, por la frecuencia con que se dan en la práctica y porque cualquier excitación de tipo general puede expresarse como suma infinita de excitaciones armónicas mediante las series o la integral de Fourier. Teniendo en cuenta el principio de superposición, si una fuerza general es suma de fuerzas armónicas, la respuesta a una fuerza general puede obtenerse como suma de las respuestas a las fuerzas armónicas que la componen. Esta es la base de lo que se conoce como *análisis de Fourier*.

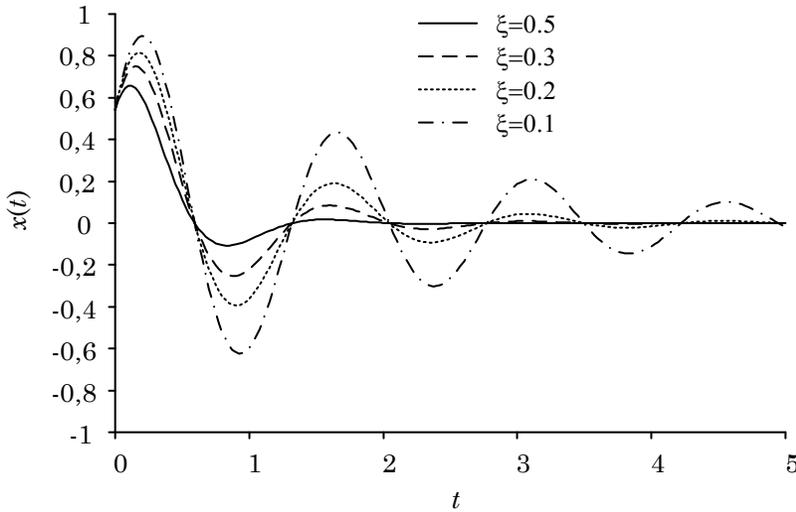


Figura 11.10: Respuesta con amortiguamiento subcrítico ($\xi < 1$)

11.4.1. Respuesta a las excitaciones armónicas en un sistema amortiguado

Tratamos de resolver la ecuación diferencial

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f(t) = F e^{i\omega t} \quad (11.28)$$

Dividiendo por m , análogamente a lo que se hizo en la ecuación 11.16, tenemos

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \quad (11.29)$$

Como es sabido, la respuesta a esta ecuación diferencial se obtiene sumando a la solución general de la ecuación homogénea una solución particular de la ecuación completa. La solución general de la homogénea se ha visto en el apartado anterior. Frecuentemente, dicha solución general se omite, pues representa una componente transitoria que tiende a cero a medida que el tiempo avanza. En cambio, la solución particular de la completa es estacionaria y, para calcularla, ensayamos una solución de la forma $x(t) = X e^{i\omega t}$. Sustituyendo en la ecuación 11.29 tenemos

$$(-\omega^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2) X e^{i\omega t} = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \quad (11.30)$$

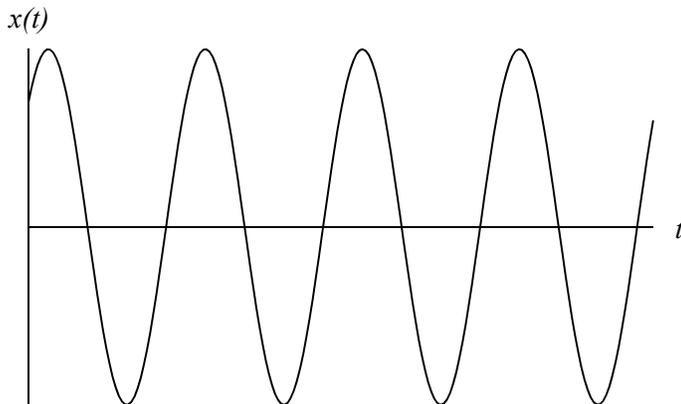


Figura 11.11: Respuesta estacionaria a una excitación armónica.

Despejando:

$$X = \frac{\frac{F}{m}}{-\omega^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} = \frac{\frac{F}{m\omega_n^2}}{-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2i\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1} \quad (11.31)$$

Llamando β a la relación entre la frecuencia de excitación ω y la frecuencia natural ω_n , resulta

$$X = \frac{F/k}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta} \quad (11.32)$$

Entonces, la respuesta a las excitaciones armónicas es también armónica, y de frecuencia igual a la frecuencia de excitación, y se puede escribir

$$x(t) = \frac{1/k}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta} F e^{i\omega t} \quad (11.33)$$

De forma más compacta

$$x(t) = H(\omega) f(t) \quad (11.34)$$

donde $H(\omega)$ se denomina función de transferencia, y se define como

$$H(\omega) = \frac{1/k}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta} \quad (11.35)$$

La respuesta $x(t)$ es compleja ya que la excitación también lo era. Su parte real tiene forma de función armónica, como la indicada en la figura

11.11. Para calcular la parte real (o imaginaria) de la respuesta tenemos que determinar primero el módulo de $x(t)$ y su ángulo de fase. El módulo de $x(t)$ se obtiene hallando el cociente entre el módulo del numerador y el del denominador de la ecuación 11.33, resultando

$$|x(t)| = \frac{F/k}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} \quad (11.36)$$

El módulo de la respuesta se suele escribir de forma compacta como

$$|x(t)| = D \frac{F}{k} \quad (11.37)$$

donde D se denomina *factor de amplificación dinámica* y se define como

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} \quad (11.38)$$

Obsérvese que el módulo de la respuesta, dado por la ecuación 11.37, contiene el factor F/k , que representa el desplazamiento estático, es decir, lo que se desplazaría el bloque en caso de que la fuerza $f(t)$ no fuese armónica, sino de magnitud constante F . El término D se puede ver como un factor que amplifica el desplazamiento estático del sistema, de ahí su nombre.

El ángulo de fase de $x(t)$ se obtiene sumando los ángulos de fase del numerador y restando los del denominador de la ecuación 11.33, resultando

$$\theta = \omega t - \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (11.39)$$

Puesto que el ángulo de fase de la fuerza es ωt , se deduce que la respuesta $x(t)$ está retrasada con respecto a $f(t)$ un ángulo ψ , cuyo valor es

$$\psi = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (11.40)$$

La representación gráfica de D respecto a β se muestra en la figura 11.12. Como se puede ver, el factor de amplificación dinámica presenta un máximo, tanto más acusado cuanto menor es el valor de ξ , en las proximidades de $\beta = 1$. Esto indica que, cuando un sistema es excitado a una frecuencia próxima a su frecuencia natural, responde con un movimiento oscilatorio cuya amplitud es mucho mayor que la que correspondería a la misma fuerza aplicada estáticamente. Un sistema excitado a su frecuencia natural se dice que está *en resonancia*.

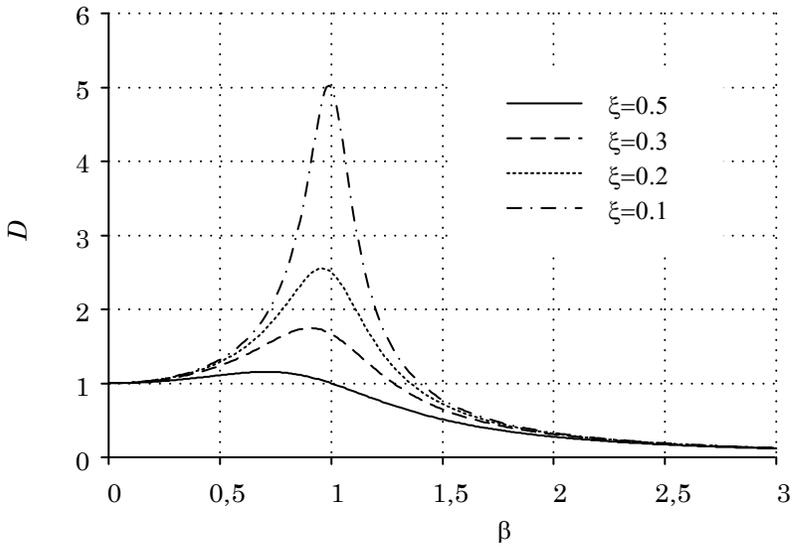


Figura 11.12: Factor de amplificación dinámica.

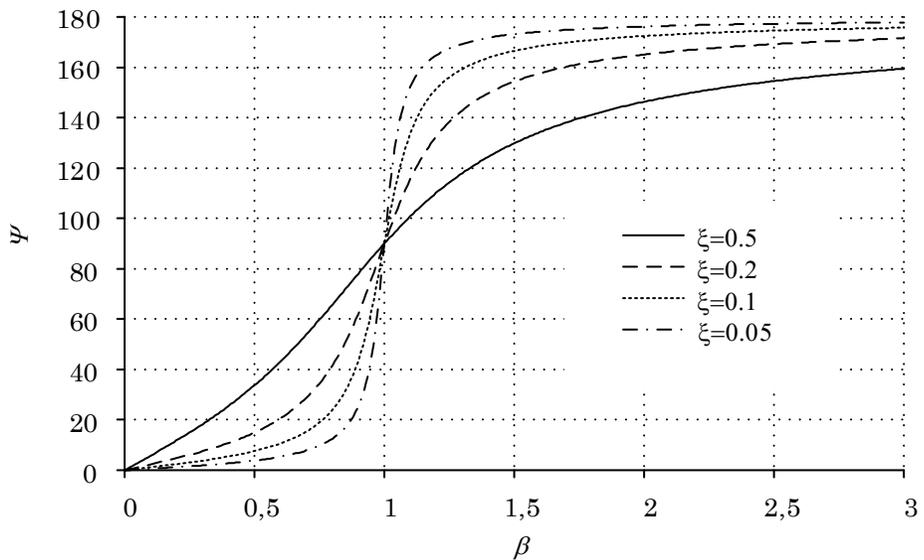


Figura 11.13: Desfase entre la excitación y la respuesta.

La representación gráfica del ángulo de desfase ψ entre la excitación y la respuesta se muestra en la figura 11.13. Como se puede ver, al excitar a la frecuencia de resonancia el ángulo de desfase es $\xi = \frac{\pi}{2}$, lo que significa que cuando la excitación pasa por su valor máximo, la respuesta toma valor nulo, y viceversa. Para valores de β grandes el ángulo de desfase se aproxima asintóticamente a 180° .

El valor máximo del factor de amplificación dinámica se produce en los alrededores de $\beta = 1$, en un punto que calcularemos a continuación. Para ello, consideremos la función D^2 , cuyo máximo ocurre para el mismo valor de β que la función D . Tomando la derivada parcial con respecto a β e igualando a cero, se obtiene

$$\frac{dD^2}{d\beta} = -\frac{2(1-\beta^2)(-2\beta) + 8\xi^2\beta}{\left[(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2\right]^2} = 0 \quad (11.41)$$

Igualando el numerador a cero y despejando β , obtenemos

$$\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (11.42)$$

cuyo valor es muy próximo a la unidad para valores pequeños de ξ . Sustituyendo en la ecuación 11.38 y simplificando, se obtiene el valor máximo del factor de amplificación dinámica

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (11.43)$$

Dado que habitualmente ξ es mucho menor que la unidad, se puede aproximar el máximo mediante la expresión

$$D_{max} \approx \frac{1}{2\xi} \quad (11.44)$$

que será utilizada posteriormente.

11.4.2. Excitación a la frecuencia de resonancia en sistemas no amortiguados

Un sistema no amortiguado excitado con una fuerza armónica de frecuencia ω viene gobernado por la ecuación

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos \omega_n t \quad (11.45)$$

Como se ha visto, la respuesta se puede escribir como suma de una componente transitoria $x_h(t)$

$$x_h(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t \quad (11.46)$$

y otra estacionaria $x_p(t)$, que es la parte real de la solución particular vista en la ecuación 11.33:

$$x_p(t) = \frac{1/k}{1 - \beta^2} F \cos \omega t \quad (11.47)$$

Por tanto, la solución general obtenida sumando ambas resulta

$$x(t) = B_1 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{F}{k} \cos \omega t \quad (11.48)$$

Cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia de resonancia ($\beta = 1$) el denominador se vuelve nulo, por lo que la respuesta tiende a infinito. Las constantes B_1 y B_2 se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, obteniéndose:

$$B_1 = x_0 - \frac{F}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad B_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (11.49)$$

Sustituyendo y agrupando términos, resulta

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F}{k} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \beta^2} \right) \quad (11.50)$$

Puesto que el último término se vuelve indeterminado cuando $\omega = \omega_n$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para calcular el límite de este término cuando ω tiende a ω_n :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \beta^2} &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{\frac{d}{d\omega} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{t \operatorname{sen} \omega t}{\frac{2\omega}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n t}{2} \operatorname{sen} \omega_n t \end{aligned} \quad (11.51)$$

Por tanto, la respuesta del sistema se convierte en

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F}{k} \frac{\omega_n t}{2} \operatorname{sen} \omega_n t \quad (11.52)$$

Esta ecuación, que expresa la respuesta del sistema, crece indefinidamente de forma oscilante, ganando energía en cada ciclo. La gráfica de $x(t)$ correspondientes a unas condiciones iniciales nulas se puede ver en la figura 11.14.

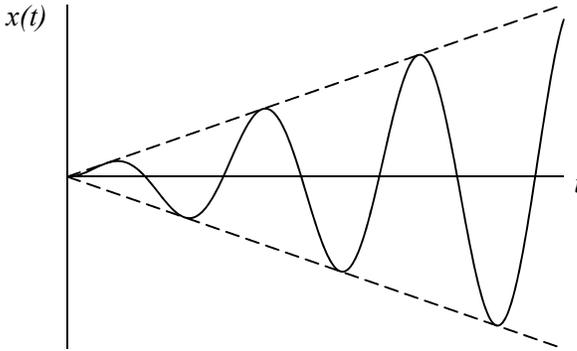


Figura 11.14: Respuesta a la excitación en frecuencia de resonancia.

11.4.3. Fenómeno de golpeteo

Cuando la frecuencia de excitación está próxima a la frecuencia de resonancia pero no coincide exactamente con ella, se puede producir el fenómeno de golpeteo, consistente en una respuesta que crece progresivamente y luego disminuye, repitiéndose cíclicamente.

Para explicar este fenómeno, consideremos de nuevo la solución dada por la ecuación 11.50 particularizada para el caso en que las condiciones iniciales sean nulas, es decir $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 0$

$$x(t) = \frac{F}{k} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \beta^2} \right) = \frac{F/m}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \quad (11.53)$$

Se puede comprobar mediante transformaciones trigonométricas que esta expresión es equivalente a

$$x(t) = \frac{F/m}{\omega_n^2 - \omega^2} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega + \omega_n}{2} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_n - \omega}{2} t \right) \quad (11.54)$$

Supongamos que la frecuencia de excitación es ligeramente inferior a la frecuencia natural, de forma que

$$\omega_n - \omega = 2\epsilon \quad (11.55)$$

donde ϵ es una cantidad pequeña y positiva. Entonces, los valores de ω_n y ω son muy parecidos, cumpliéndose la relación aproximada

$$\omega + \omega_n \approx 2\omega \quad (11.56)$$

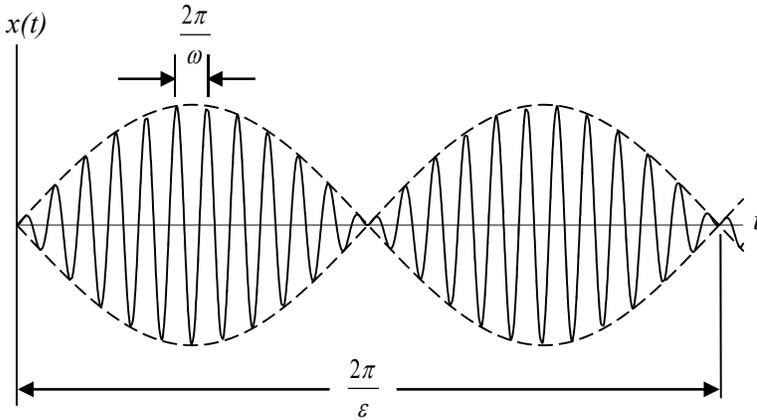


Figura 11.15: Fenómeno de golpeteo.

Multiplicando las ecuaciones 11.55 y 11.56, resulta

$$\omega_n^2 - \omega^2 \approx 4\xi\omega \quad (11.57)$$

Utilizando las expresiones 11.55-11.57 dentro de la ecuación 11.54, se obtiene

$$x(t) = \left(\frac{F/m}{2\epsilon\omega} \operatorname{sen} \epsilon t \right) \operatorname{sen} \omega t \quad (11.58)$$

Es fácil comprobar que el periodo del término $\operatorname{sen} \omega t$ es menor que el periodo del término $\operatorname{sen} \epsilon t$, como se muestra en la figura 11.15. Por ello, la amplitud de la respuesta crece y decrece cíclicamente con una frecuencia ϵ , produciéndose el fenómeno conocido como golpeteo.

11.4.4. Diagrama de Argand

El *diagrama de Argand* es una representación en el plano complejo de las distintas magnitudes que se presentan en las vibraciones armónicas. Tomemos, en primer lugar, la excitación y la respuesta que, como hemos visto, se pueden escribir

$$f(t) = F e^{i\omega t} \quad (11.59)$$

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (11.60)$$

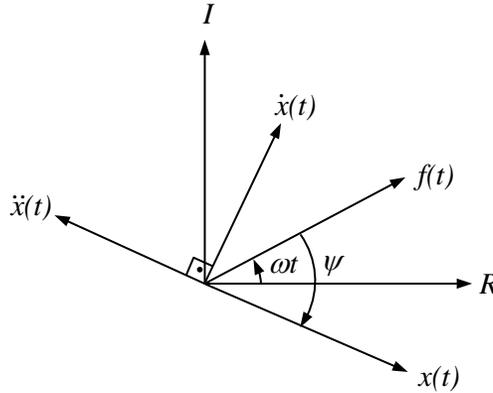


Figura 11.16: Diagrama de Argand.

La velocidad y la aceleración se obtienen derivando una y dos veces la respuesta, quedando:

$$\dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t} = i\omega x(t) \quad (11.61)$$

$$\ddot{x}(t) = (i\omega)^2 X e^{i\omega t} = -\omega^2 x(t) \quad (11.62)$$

La representación de estas magnitudes en el plano complejo es la que se muestra en la figura 11.16. En ella, se puede ver que el ángulo de fase de la fuerza $f(t)$ es ωt y que, como se ha citado en el apartado anterior, el ángulo de desfase entre la respuesta y la excitación es ψ . La velocidad $\dot{x}(t)$ y la aceleración $\ddot{x}(t)$ están adelantadas $\frac{\pi}{2}$ y π , respectivamente, respecto de $x(t)$.

En la figura 11.16, las posiciones relativas de los vectores dibujados se mantienen a lo largo del tiempo. Sin embargo, como el ángulo de fase de $f(t)$ aumenta con el tiempo, resulta que los cuatro vectores giran con velocidad angular ω . Recordemos que las cuatro magnitudes son complejas, pero en cada instante sólo tiene sentido físico su proyección sobre el eje real (o imaginario).

11.5. Medida del amortiguamiento relativo

A diferencia de la masa y de la rigidez, que son parámetros relativamente sencillos de determinar, el amortiguamiento es casi siempre desconocido. Se desconoce, por una parte, su valor numérico, y a veces hasta los mismos mecanismos de disipación de la energía son desconocidos. Es frecuente que

la energía se disipe por varios mecanismos diferentes: rozamiento seco, viscoso, estructural, etc. El amortiguamiento viscoso lineal es el más simple de introducir en los desarrollos matemáticos y, por ello, es el que con más frecuencia se utiliza. Por otra parte, cuando el amortiguamiento es pequeño, el resultado obtenido es suficientemente exacto.

Antes de revisar algunos métodos experimentales para la determinación del amortiguamiento, repasemos los modelos de rozamiento más empleados.

11.5.1. Rozamiento viscoso

Es modelo más utilizado en el estudio de las vibraciones. Cuando un elemento mecánico vibra en un medio fluido, la resistencia que el fluido ofrece al movimiento provoca una disipación de energía. La cantidad de energía disipada depende de varios factores, como la forma y el tamaño del sólido, la viscosidad del fluido, la velocidad y la frecuencia. En el amortiguamiento viscoso, la fuerza que se opone al movimiento es proporcional a la velocidad del sólido que vibra. Ejemplos típicos en los que el amortiguamiento es viscoso son el paso de una película de fluido entre las superficies que deslizan, el paso del fluido alrededor de un pistón que se mueve en un cilindro, el paso del fluido que atraviesa un orificio dentro de un pistón, etc.

11.5.2. Rozamiento seco o de Coulomb

En este caso, la fuerza de rozamiento se opone a la dirección del movimiento y su magnitud depende de la fuerza normal entre las superficies en contacto y del coeficiente de rozamiento. Este tipo de rozamiento se da normalmente cuando las superficies están secas o mal lubricadas.

11.5.3. Rozamiento estructural o con histéresis

Cuando se deforma un material, parte de la energía de deformación es disipada por los mecanismos internos de deformación del propio material, que están relacionados con la fricción de los planos cristalinos que deslizan u otros mecanismos similares. Cuando un material en que se da este tipo de rozamiento es sometido a vibraciones, la relación tensión-deformación presenta la forma de un bucle de histéresis, mostrado en la figura 11.17. El área encerrada por el lazo es la energía disipada por el material en un ciclo completo.

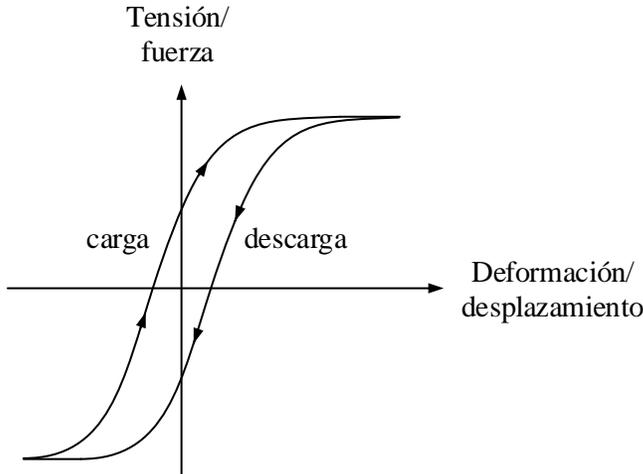


Figura 11.17: Relación tensión-deformación con histéresis.

11.5.4. Métodos para determinar experimentalmente el amortiguamiento

Los métodos que a continuación se presentan sirven para determinar experimentalmente el amortiguamiento relativo ξ . Todos ellos están basados en la respuesta teórica de un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso y suponen que el valor de ξ es pequeño.

Método del decremento logarítmico

Se basa en sacar un sistema de su posición de equilibrio y dejarlo oscilar libremente. Se miden los desplazamientos x_1 y x_2 del sistema en dos instantes separados un número n de ciclos. Recordando que la respuesta a las vibraciones libres venía dada por la expresión

$$x(t) = e^{\xi \omega_n t} A \cos(\omega_d t - \psi) \quad (11.63)$$

y llamando T al periodo, podemos particularizar $x(t)$ para los desplazamientos medidos, escribiendo

$$x_1 = e^{-\xi \omega_n t_1} A \cos(\omega_d t_1 - \psi) \quad (11.64)$$

$$x_2 = e^{-\xi \omega_n (t_1 + nT)} A \cos(\omega_d (t_1 + nT) - \psi) \quad (11.65)$$

donde t_1 es el instante en el que se hace la medición x_1 . Dividiendo las dos ecuaciones miembro a miembro y teniendo en cuenta que las funciones

coseno se pueden simplificar por estar evaluadas en instantes de tiempo separados un número entero de periodos, obtenemos

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\xi \omega_n n T} \quad (11.66)$$

Tomando logaritmos a ambos lados y sustituyendo la expresión

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (11.67)$$

en la ecuación 11.66, se llega a

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \xi n \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (11.68)$$

Puesto que ξ es pequeño, podemos aproximar la raíz cuadrada por la unidad, obteniendo

$$\xi \approx \frac{\ln(x_1/x_2)}{2\pi n} \quad (11.69)$$

expresión que proporciona el valor de ξ .

Método basado en la excitación a la frecuencia de resonancia

Consideremos un sistema de un grado de libertad que dispone de un generador de excitaciones armónicas de frecuencia variable y de un sensor para medir desplazamientos. Excitamos el sistema con una fuerza armónica cualquiera y vamos modificando el valor de la frecuencia ω hasta que la amplitud de los desplazamientos alcanza su máximo valor. Entonces, registramos el valor de la amplitud máxima X_{max} , que deberá cumplir

$$X_{max} = D_{max} \frac{F}{k} \quad (11.70)$$

Como se vio en la ecuación 11.44, el valor máximo del factor de amplificación dinámica se puede aproximar mediante la expresión

$$D_{max} \approx \frac{1}{2\xi} \quad (11.71)$$

Sustituyendo la ecuación 11.71 en la 11.70 y despejando ξ , se obtiene

$$\xi \approx \frac{F}{2k X_{max}} \quad (11.72)$$

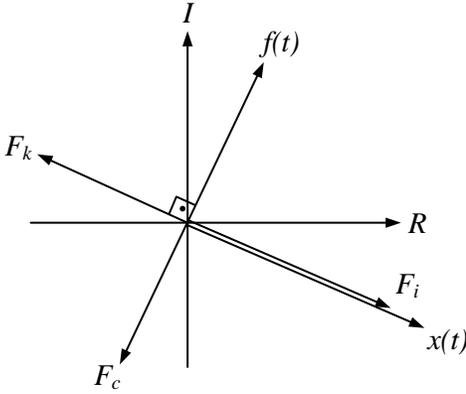


Figura 11.18: Diagrama de Argand.

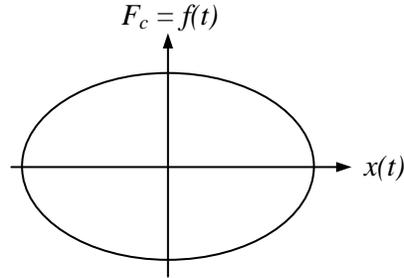


Figura 11.19: Diagrama teórico $f(t)/x(t)$.

teórico

Método de la pérdida de energía por ciclo

Partimos de un montaje similar al recién descrito, pero añadimos un dispositivo para medir el desfase entre la excitación y la respuesta. Excitamos el sistema y vamos modificando la frecuencia hasta que el desfase sea $\frac{\pi}{2}$, lo que indica que hemos llegado a la frecuencia de resonancia.

Sean F_k , F_c y F_i las fuerzas elástica, disipativa y de inercia, respectivamente. Podemos escribir estas tres fuerzas como

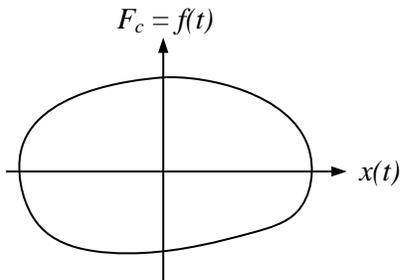
$$F_k = -k x(t) \tag{11.73}$$

$$F_c = -c \dot{x}(t) \tag{11.74}$$

$$F_i = -m \ddot{x}(t) \tag{11.75}$$

El diagrama de Argand correspondiente a estas fuerzas se puede ver en la figura 11.18. Por excitar a la frecuencia de resonancia, el ángulo de desfase entre $f(t)$ y $x(t)$ es $\frac{\pi}{2}$. El equilibrio dinámico del sistema obliga a que la suma de F_k , F_c , F_i y $f(t)$ sea nula. Pero como las cuatro fuerzas son ortogonales, se deduce que se deben anular dos a dos, por lo que $f(t) = F_c$, es decir, la fuerza en el amortiguador es igual a la fuerza excitadora.

La figura 11.19 muestra una representación gráfica de la fuerza en el amortiguador con respecto al desplazamiento. Es fácil demostrar que la gráfica de dos funciones armónicas desfasadas 90 grados, como es el caso de $x(t)$ y de $f(t)$, es una elipse. El área de dicha elipse representa la energía disipada por el amortiguador en un ciclo, es decir, en un vaivén completo de la masa. Llamando W_{Dt} a la energía teóricamente disipada en un ciclo,

Figura 11.20: Diagrama real $f(t)/x(t)$.

que es el área de la elipse, podemos escribir

$$W_{Dt} = \pi |F_c| |x(t)| = \pi c \omega |x(t)|^2 \quad (11.76)$$

En un sistema real podemos medir $x(t)$ y $f(t)$ y hacer una gráfica de una magnitud frente a la otra. Probablemente, el resultado no será una elipse perfecta sino una forma semejante a la elipse con ciertas irregularidades, similar a la de la figura 11.20. Llamando W_D al área encerrada por esta curva, que coincide con la energía real disipada en un ciclo, e igualando el valor de W_D a la expresión obtenida teóricamente en la ecuación 11.76, resulta

$$W_D = \pi c \omega |x(t)|^2 = \pi 2 m \xi \omega_n \omega |x(t)|^2 \quad (11.77)$$

y despejando, obtenemos finalmente

$$\xi = \frac{W_D}{2 \pi m \omega \omega_n |x(t)|^2} \quad (11.78)$$

11.6. Aislamiento de vibraciones: transmisibilidad

En este apartado estudiaremos el aislamiento de las vibraciones desde dos perspectivas diferentes: en primer lugar, estudiaremos el aislamiento de una estructura cuando sobre ella hay una máquina que vibra y, en segundo lugar, el aislamiento de una máquina cuando lo que vibra es la estructura.

11.6.1. Aislamiento de la estructura afectada por las vibraciones de una máquina

Para estudiar este primer caso, partiremos del sistema de un grado de libertad mostrado en la figura 11.21. El bloque representa la máquina, que

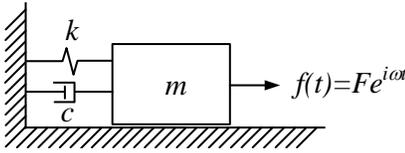


Figura 11.21

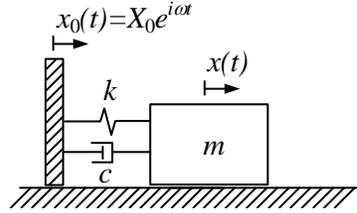


Figura 11.22

consideraremos unida a la estructura (en este caso la pared) a través de soportes con rigidez y amortiguamiento ideales, representados mediante un muelle y un amortiguador. La vibración de la máquina es producida por una fuerza armónica de la forma $F e^{i\omega t}$.

Definimos la *transmisibilidad* T como el cociente entre el módulo de la fuerza sobre la estructura y el módulo de la fuerza excitadora. Es decir,

$$T = \frac{|\text{Fuerza soporte}|}{|\text{Fuerza excitadora}|} \tag{11.79}$$

Para que un sistema esté bien aislado de las vibraciones necesita tener una transmisibilidad pequeña. La respuesta estacionaria a las vibraciones armónicas se vio en la ecuación 11.33 y vale

$$x(t) = \frac{1/k}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta} F e^{i\omega t} \tag{11.80}$$

Su módulo es

$$|x(t)| = \frac{F/k}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} = D \frac{F}{k} \tag{11.81}$$

La fuerza que llega hasta la estructura F_s es la suma de las fuerzas transmitidas por el muelle y por el amortiguador, que se puede escribir como

$$F_s = F_k + F_c = kx(t) + c\dot{x}(t) = (k + ic\omega)x(t) \tag{11.82}$$

Sacando k fuera del paréntesis, sustituyendo $c = 2m\xi\omega_n$ y $\beta = \omega/\omega_n$, queda

$$F_s = k(1 + i2\xi\beta)x(t) \tag{11.83}$$

Sustituyendo el módulo de F_s en la ecuación 11.79 y teniendo en cuenta que el módulo de la fuerza excitadora es F , se obtiene finalmente

$$T = D \sqrt{1 + 4\xi^2\beta^2} \tag{11.84}$$

Antes de extraer conclusiones sobre este resultado, estudiaremos el segundo caso de aislamiento de vibraciones.

11.6.2. Aislamiento de la máquina cuando vibra la estructura

En la figura 11.22, consideramos que es la estructura la que vibra con un movimiento armónico conocido $X_0 e^{i\omega t}$. En este caso, definimos un nuevo coeficiente de *transmisibilidad* como el cociente entre el módulo del desplazamiento de la máquina y el módulo del desplazamiento del soporte:

$$T = \frac{|\text{Desplazamiento máquina}|}{|\text{Desplazamiento soporte}|} \quad (11.85)$$

Como en el caso anterior, para que la máquina se encuentre bien aislada conviene que el factor de transmisibilidad sea pequeño. La ecuación del movimiento del sistema de la figura 11.22 es

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) = 0 \quad (11.86)$$

Definimos la variable relativa \bar{x} como

$$\bar{x} = x - x_0 \quad (11.87)$$

Escribiendo la ecuación 11.86 en función de \bar{x} , se obtiene

$$m \ddot{\bar{x}} + c \dot{\bar{x}} + k \bar{x} = m \omega^2 X_0 e^{i\omega t} \quad (11.88)$$

La ecuación 11.88 indica que la respuesta $\bar{x}(t)$ es idéntica a la respuesta a las vibraciones armónicas con una fuerza de módulo $m\omega^2 X_0$. Puesto que la solución a las vibraciones armónicas es conocida, podemos hallar la respuesta a esta excitación como

$$x(t) = \bar{x}(t) + x_0(t) = \left(\frac{m \omega^2 / k}{1 - \beta^2 + 2i \xi \beta} + 1 \right) X_0 e^{i\omega t} \quad (11.89)$$

Sacando factor común y sustituyendo las igualdades $k = m\omega_n^2$ y $\beta = \omega/\omega_n$, se obtiene

$$x(t) = \frac{1 + 2i \xi \beta}{1 - \beta^2 + 2i \xi \beta} X_0 e^{i\omega t} \quad (11.90)$$

Tomando ahora el módulo de la ecuación 11.90 y sustituyendo el resultado en la 11.85 se obtiene

$$T = D \sqrt{1 + 4\xi^2 \beta^2} \quad (11.91)$$

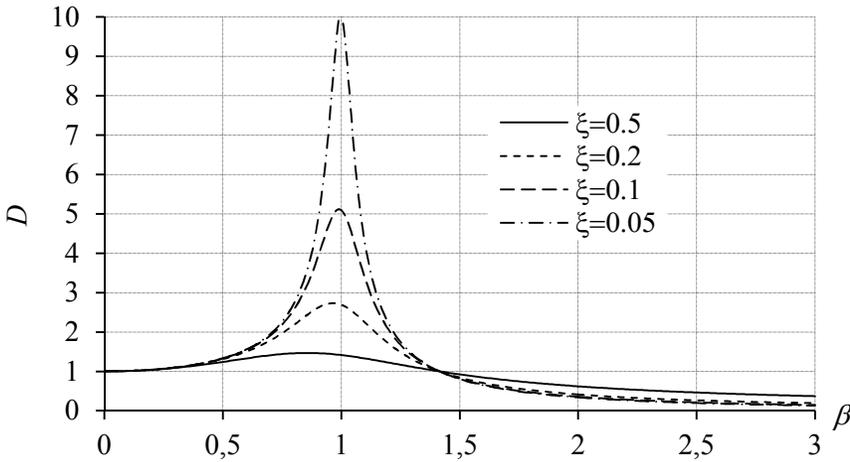


Figura 11.23: Transmisibilidad

que es un resultado idéntico al que se obtuvo en el apartado anterior. Aunque las definiciones de T son distintas en cada caso, el resultado numérico obtenido coincide, de forma que las conclusiones que a continuación se extraerán son igualmente válidas para los dos. La representación gráfica de la transmisibilidad en función de β se muestra en la figura 11.23.

En primer lugar, llama la atención el máximo que se produce en las proximidades de $\beta = 1$, que indica que cuando un sistema es excitado a una frecuencia próxima a la de resonancia, la transmisibilidad toma un valor elevado. En esta región de la gráfica, es conveniente que el valor de ξ sea lo más alto posible para que la transmisibilidad sea pequeña. En el punto $\beta = \sqrt{2}$ todas las curvas se cortan en un mismo punto e invierten su orden: las que estaban por encima pasan a estar por debajo y viceversa. Por tanto, en la región de la gráfica correspondiente a $\beta > \sqrt{2}$ es mejor que el sistema esté poco amortiguado para que la transmisibilidad sea pequeña. En resumidas cuentas, para aislar un sistema de las vibraciones es necesario conocer primero en qué rango de frecuencias va a ser excitado. Si el sistema va a ser excitado a frecuencias menores que $\sqrt{2}$ veces su frecuencia natural, es mejor que esté muy amortiguado. En cambio, si va a ser excitado a frecuencias superiores a $\sqrt{2}\omega_n$, es mejor que esté poco amortiguado.

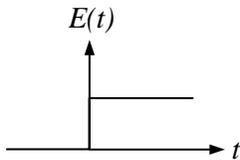


Figura 11.24: Escalón.

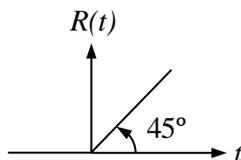


Figura 11.25: Rampa.

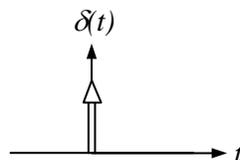


Figura 11.26: Impulso.

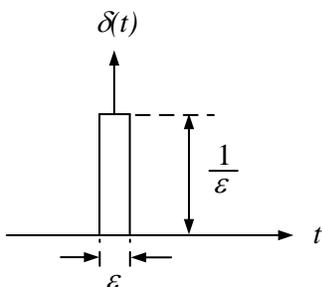


Figura 11.27

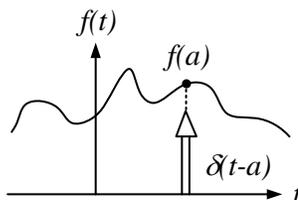


Figura 11.28

11.7. Respuesta a excitaciones impulso, escalón y rampa

Definimos la función escalón $E(t)$ mostrada en la figura 11.24 como

$$\begin{cases} E(t) = 1 & t \geq 0 \\ E(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (11.92)$$

A partir de ella, definimos la función rampa, por integración, y la función impulso, por derivación. La expresión de la función rampa $R(t)$ es

$$R(t) = \int_0^t E(t) dt \quad (11.93)$$

y su representación gráfica se puede ver en la figura 11.25. Por su parte, la función impulso $\delta(t)$ se define como

$$\delta(t) = \frac{dE(t)}{dt} \quad (11.94)$$

La función impulso toma valor nulo fuera del origen y valor infinito en el origen mismo. Su representación gráfica es la que se ve en la figura 11.26.

Una forma alternativa de definir la función impulso es como el límite de la función *pulso rectangular*, mostrada en la figura 11.27 cuando ϵ tiende

a cero. En el límite, la función tiende hacia el infinito, pero el área debajo del pulso es siempre la unidad. Matemáticamente podemos expresar esta propiedad como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (11.95)$$

Otra propiedad de la función impulso es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a) \quad (11.96)$$

cuya justificación se ilustra en la figura 11.28. El producto de $f(t)$ por $\delta(t - a)$ es cero en todos los puntos del eje de abscisas excepto en el punto a , donde su valor es $f(a)$ multiplicado por el impulso unitario, cuya integral vale 1.

En este apartado calcularemos las respuestas a las excitaciones de tipo impulso, escalón y rampa. Partimos de la ecuación diferencial

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t) \quad (11.97)$$

Tomando derivadas a ambos lados de la igualdad, tenemos

$$m \frac{d\ddot{x}}{dt} + c \frac{d\dot{x}}{dt} + k \frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \quad (11.98)$$

Integrando la ecuación 11.97 tenemos

$$m \int \ddot{x} dt + c \int \dot{x} dt + k \int x dt = \int f(t) dt \quad (11.99)$$

Las ecuaciones 11.98 y 11.99 sirven para generalizar el principio de superposición. En virtud de ellas, si la respuesta a una excitación $f(t)$ es $x(t)$, la respuesta a una excitación $df(t)/dt$ es $dx(t)/dt$, y la respuesta a una excitación $\int f(t)dt$ es $\int x(t)dt$.

Esta propiedad se puede aplicar a nuestro caso: puesto que las tres funciones impulso, escalón y rampa están relacionadas mediante derivación e integración, basta con calcular la respuesta a una de ellas y después derivarla e integrarla para obtener la respuesta a las otras dos.

La ecuación diferencial de un sistema sometido a una excitación $E(t)$ se puede escribir como

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 1 \quad (11.100)$$

Su respuesta $e(t)$ será suma de la solución general de la homogénea más una particular de la completa, que en este caso es $1/k$, quedando

$$e(t) = e^{-\xi\omega_n t} A \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{1}{k} \quad (11.101)$$

Las constantes A y ψ se calculan a partir de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. Particularizando para el caso en que $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$ se obtiene

$$A \cos \psi = -\frac{1}{k} \quad (11.102)$$

Derivando la ecuación 11.101, y teniendo en cuenta que $\dot{x}(0) = 0$, se obtiene

$$A \operatorname{sen} \psi = -\frac{\xi \omega_n}{k \omega_d} \quad (11.103)$$

Dividiendo las ecuaciones 11.102 y 11.103, se obtiene

$$\tan \psi = \frac{\frac{\xi \omega_n}{k \omega_d}}{\frac{1}{k}} = \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (11.104)$$

de donde podemos identificar numerador y denominador como $\operatorname{sen} \psi$ y $\cos \psi$,

$$\operatorname{sen} \psi = \xi$$

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (11.105)$$

Despejando A de la ecuación 11.103 obtenemos

$$A = -\frac{\omega_n}{k \omega_d} = \frac{-1}{k \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (11.106)$$

Finalmente, la respuesta a la excitación escalón se puede escribir como

$$e(t) = -\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{k \sqrt{1 - \xi^2}} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{1}{k} \quad (11.107)$$

Gráficamente, la respuesta a la función escalón es de la forma mostrada en la figura 11.29. Como se puede ver, la respuesta converge asintóticamente hacia el valor $1/k$, que es el desplazamiento estático correspondiente a una fuerza unidad.

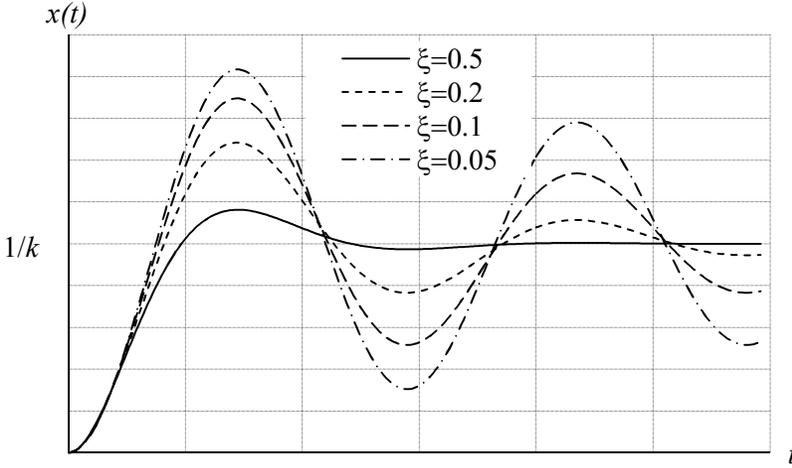


Figura 11.29: Respuesta a la excitación escalón.

Para calcular la respuesta $h(t)$ a la función impulso, podemos derivar la respuesta a la función escalón, obteniendo

$$h(t) = \frac{de(t)}{dt} = \frac{-e^{-\xi\omega_n t}}{k\sqrt{1-\xi^2}} [-\xi\omega_n \cos(\omega_d t - \psi) - \omega_d \text{sen}(\omega_d t - \psi)] \quad (11.108)$$

Teniendo en cuenta que $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, sustituyendo en la ecuación 11.105 y simplificando, resulta

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{-e^{-\xi\omega_n t}}{k\sqrt{1-\xi^2}} \omega_n [-\text{sen } \psi \cos(\omega_d t - \psi) - \cos \psi \text{sen}(\omega_d t - \psi)] = \\ &= \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_n^2 \sqrt{1-\xi^2}} \omega_n \text{sen } \omega_d t = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \text{sen } \omega_d t \end{aligned} \quad (11.109)$$

Gráficamente, la respuesta $h(t)$ tiene la forma que se muestra en la figura 11.30.

La respuesta a la excitación impulso se puede obtener también de otra forma diferente. Consideremos un sistema básico masa-muelle-amortiguador sobre el que actúa un impulso en el instante inicial. Mecánicamente, un impulso equivale a una percusión, que provoca una discontinuidad en el campo de velocidades, de tal forma que las velocidades antes y después del impulso difieren en una cantidad finita. Una vez producido el impulso, el sistema puede estudiarse como un problema de vibraciones libres, ya que sobre la masa no actúa ninguna fuerza. Las condiciones iniciales de las vibraciones

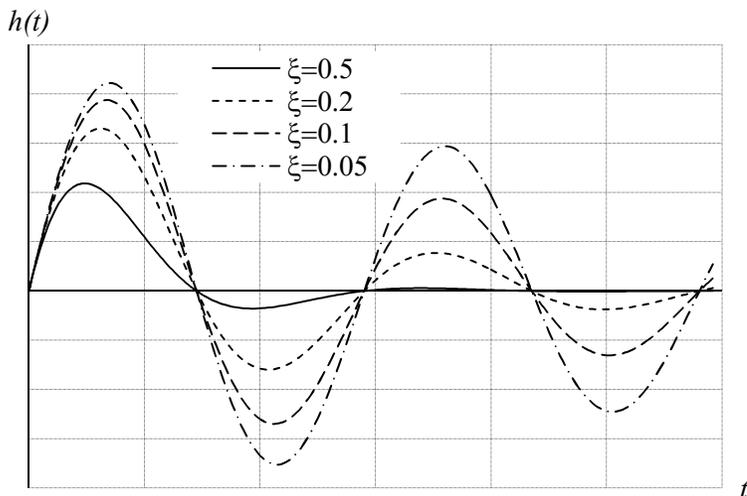


Figura 11.30: Respuesta a la excitación impulsivo.

libres son los valores de la posición y velocidad nada más producirse la percusión. El sistema antes de la percusión está en reposo. Para calcular la velocidad después de la percusión aplicamos la ecuación de equilibrio de las percusiones, que establece que la suma de las percusiones es igual a la variación de la cantidad de movimiento. Matemáticamente

$$\Sigma P = \Delta p \quad (11.110)$$

que aplicado a nuestro problema, equivale a

$$1 = m\dot{x}_0 \quad (11.111)$$

y despejando

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{m} \quad (11.112)$$

Observemos que en la ecuación 11.111 ni el muelle ni el amortiguador introducen percusiones, ya que ambos producen fuerzas finitas. Para resolver el problema podemos aplicar la respuesta a las vibraciones libres, vista en la ecuación 11.27, con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1/m$. La ecuación 11.27) era de la forma

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} A \cos(\omega_d t - \psi) \quad (11.113)$$

Imponiendo la condición $x(0) = 0$ resulta

$$A \cos \psi = 0 \tag{11.114}$$

que es lo mismo que

$$\psi = \frac{\pi}{2} \tag{11.115}$$

Derivando la expresión de $x(t)$ e imponiendo la condición $\dot{x}(0) = 1/m$ se obtiene

$$A = \frac{1}{m\omega_d} \tag{11.116}$$

Finalmente, sustituyendo los valores de ψ y A en la ecuación 11.113 se obtiene

$$x(t) = h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \tag{11.117}$$

que coincide con la que obtuvimos en la ecuación 11.109.

Para terminar, la respuesta a la función rampa $r(t)$ se obtiene integrando la respuesta a la función escalón. Su resultado es

$$r(t) = \int_0^t e(t) dt = \frac{t}{k} - \frac{1}{k\omega_d} \left[e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t - \theta) + \operatorname{sen} 2\theta \right] \tag{11.118}$$

Gráficamente, esta respuesta tiene la forma mostrada en la figura 11.31.

11.8. Respuesta a la excitación de tipo general: método de la integral de convolución

En este apartado abordamos el problema del cálculo de la respuesta a una excitación del tipo general. Para ello, nos apoyaremos en la respuesta a la excitación impulso que, como hemos visto en el apartado anterior, vale

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 & t &= 0 \\ h(t) &= \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t & t &\geq 0 \end{aligned} \tag{11.119}$$

Consideremos una excitación cualquiera $f(t)$. Podemos considerar que dicha excitación es equivalente a una sucesión de impulsos elementales infinitamente próximos de magnitud $f(\tau) d\tau$, como se muestra en la figura

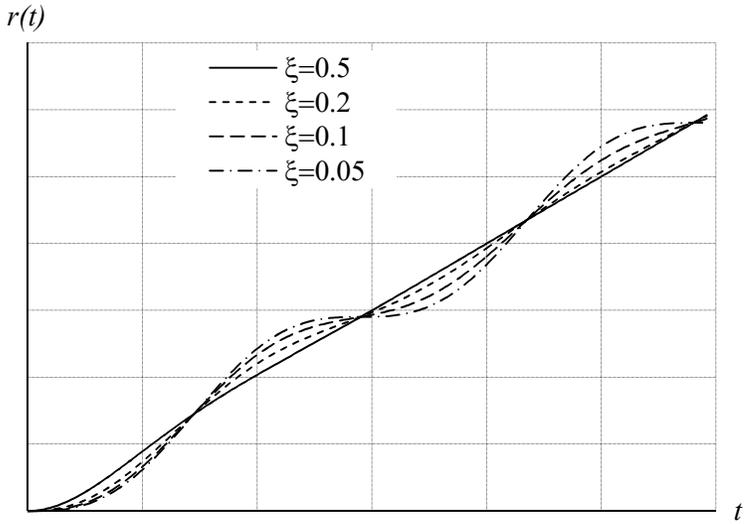


Figura 11.31: Respuesta a la excitación rampa.

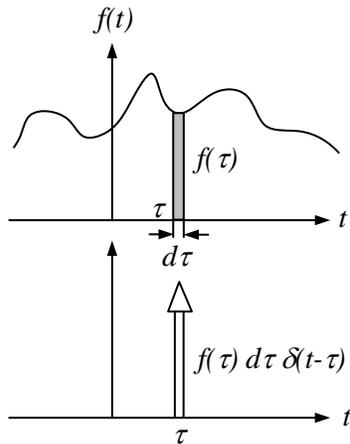


Figura 11.32

11.32. Por el principio de superposición, si la excitación $f(t)$ es suma de infinitos impulsos elementales, su respuesta será suma de las respuestas a cada uno de los impulsos elementales. Fijémonos en el impulso concreto que tiene lugar en el instante τ , que es $f(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$. La respuesta que este impulso produce es $f(\tau) d\tau h(t - \tau)$. La respuesta a la excitación en un instante t se obtiene como la integral de las respuestas a todos los impulsos que tienen lugar antes del instante t , lo que se puede escribir como

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (11.120)$$

Teniendo en cuenta que los impulsos que ocurren después del instante t no afecta a la respuesta en dicho instante, podemos extender el límite superior de esta integral y reescribirla como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (11.121)$$

A esta integral se la conoce con el nombre de *integral de convolución* o integral de *Duhamel*. La integral de convolución tiene también otra expresión alternativa, que se obtiene mediante el cambio de variables

$$\alpha = t - \tau \quad (11.122)$$

Con este cambio, la ecuación 11.121 queda como

$$x(t) = \int_{\infty}^{-\infty} h(\alpha) f(t - \alpha) d\alpha \quad (11.123)$$

Cambiando el orden de los extremos de integración y teniendo en cuenta que la variable α es interna y que, por tanto, puede ser sustituida por otra letra cualquiera, podemos escribir

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (11.124)$$

que es la otra forma de la integral de convolución.

La integral de convolución se puede utilizar para obtener la respuesta a una excitación de tipo general. Normalmente, es imposible obtener una expresión analítica, pero la integral de convolución se puede calcular numéricamente por ordenador para obtener la respuesta.

11.9. Linealización de las ecuaciones del movimiento

En este capítulo nos hemos centrado en el estudio de las vibraciones libres y forzadas alrededor de una posición de equilibrio estable. Las ecuaciones diferenciales que las rigen son lineales y de coeficientes constantes, y su resolución puede hacerse analíticamente en muchos casos. Hemos dejado de lado las vibraciones alrededor de un movimiento preestablecido para no alargar innecesariamente este capítulo. Estas vibraciones se producen, por ejemplo, cuando un sistema vibratorio está montado sobre un elemento que se desplaza con movimientos y rotaciones finitas, siendo excitado por las fuerzas de inercia que actúan sobre él. En este caso, las ecuaciones diferenciales a las que se llega son también lineales, pero pueden tener coeficientes dependientes del tiempo, lo que complica su resolución.

Al estudiar el movimiento vibratorio de los sistemas mecánicos, habitualmente se hace la hipótesis de que los desplazamientos y velocidades son pequeños. Para simplificar el problema, se suelen linealizar las ecuaciones del movimiento despreciando los infinitésimos de orden superior al primero. Esto equivale a despreciar los productos de la forma $x_i x_j$, $\dot{x}_i x_j$ y $\dot{x}_i \dot{x}_j$, tomar las aproximaciones de primer orden $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$ y, en general, sustituir todas las funciones racionales por los primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor. La forma más segura de garantizar que la linealización se hace correctamente es calcular primero las ecuaciones no lineales del movimiento y, después, linealizarlas introduciendo las simplificaciones citadas. Sin embargo, este proceso suele ser muy complejo y laborioso, incluso para problemas relativamente sencillos. En su lugar, suele ser suficiente con tomar una aproximación de primer orden en los desplazamientos y plantear el equilibrio en la posición deformada. Esta condición se puede relajar en algunos casos, en que basta con plantear el equilibrio de fuerzas en la posición indeformada. Trataremos de aclarar estas ideas mediante ejemplos.

Ejemplo 11.1 *Obtener la frecuencia natural del sistema de la figura 11.33, situado en un plano horizontal, suponiendo que toda la masa m está concentrada en el extremo de la barra.*

Resolvamos este problema obteniendo en primer lugar las ecuaciones no lineales del movimiento y linealizándolas posteriormente. Para ello, definimos una coordenada generalizada φ , que mide el giro de la barra respecto de su posición de equilibrio. La longitud del muelle l para un valor cualquiera de φ se obtiene del triángulo mostrado en la figura 11.34. Aplicando

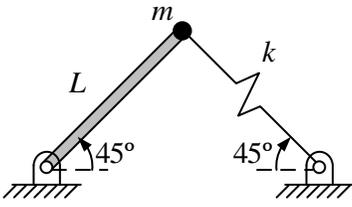


Figura 11.33

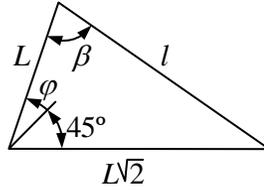


Figura 11.34

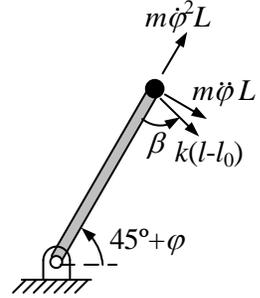


Figura 11.35

el teorema del coseno:

$$l = \sqrt{3L^2 - 2\sqrt{2}L^2 \cos(45 + \varphi)}$$

Y aplicando ahora el teorema del seno, se obtiene

$$\text{sen } \beta = \frac{L\sqrt{2} \text{sen}(45 + \varphi)}{l}$$

El diagrama de sólido libre, mostrado en la figura 11.35 da origen a la ecuación

$$m\ddot{\varphi}L^2 + kL(l - l_0) \text{sen } \beta = 0$$

Para linealizar esta ecuación tengamos en cuenta que $l_0 = L$ y supondremos que el valor de φ es lo suficientemente pequeño para que la aproximación de primer orden $\cos \varphi \approx 1$ y $\text{sen } \varphi \approx \varphi$ sea exacta. Antes de simplificar el segundo sumando de la ecuación anterior, realizamos las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{3L^2 - 2\sqrt{2}L^2 \cos(45 + \varphi)} = \\ &= \sqrt{3L^2 - 2\sqrt{2}L^2(\cos 45 \cos \varphi - \text{sen } 45 \text{sen } \varphi)} \approx \\ &\approx \sqrt{3L^2 - 2\sqrt{2}L^2 \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \varphi)} = L\sqrt{1 + 2\varphi} \approx L(1 + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(\beta) &= \frac{L\sqrt{2} \text{sen}(45 + \varphi)}{l} = \frac{L\sqrt{2}(\text{sen } 45 \cos \varphi + \text{sen } \varphi \cos 45)}{l} \approx \\ &\approx \frac{L(1 + \varphi)}{L(1 + \varphi)} = 1 \end{aligned}$$

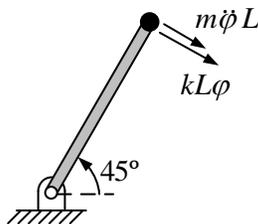


Figura 11.36

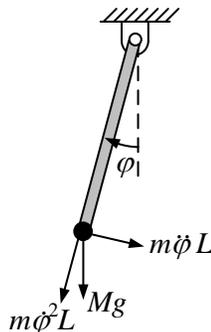


Figura 11.37

Sustituyendo estas aproximaciones, obtenemos

$$m\ddot{\phi}L^2 + kL^2\phi = 0$$

Finalmente, la frecuencia natural resulta ser

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Este resultado se podía haber hallado de forma mucho más directa suponiendo de partida que los desplazamientos son pequeños y estableciendo el equilibrio en la posición indeformada, mostrada en la figura 11.36. Con esta hipótesis, el desplazamiento del extremo de la barra vale $L\phi$ en la dirección normal a la barra, y la fuerza del muelle se considera actuando en esta misma dirección. Tomando momentos en la articulación se obtiene la ecuación de equilibrio

$$ML^2\ddot{\phi} + kL^2\phi = 0$$

El procedimiento visto en el ejemplo anterior, consistente en plantear el equilibrio en la posición indeformada, no es siempre aplicable. En particular, esta simplificación debe ser aplicada con precaución cuando hay fuerzas exteriores actuando, o bien cuando los muelles están pretensados en la posición de equilibrio. Un ejemplo trivial que lo muestra es el péndulo simple, en el que actúa la fuerza de la gravedad: en él, la ecuación de equilibrio debe ser obtenida en una posición que no sea la de equilibrio, como se indica en la figura 11.37.

Ejemplo 11.2 *Repetir el ejemplo 11.1, pero ahora en el plano vertical, incluyendo el efecto de la gravedad.*

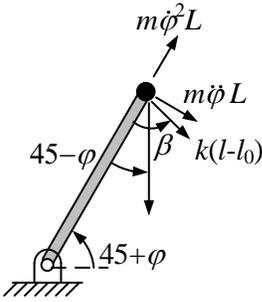


Figura 11.38

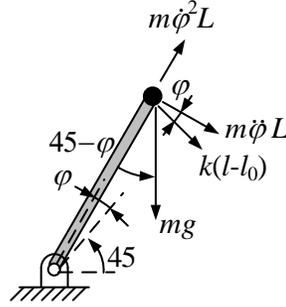


Figura 11.39

Resolvamos primero el problema de forma exacta, para luego linealizar la ecuación resultante. Para ello, dibujamos el diagrama de fuerzas de la figura 11.38, que conduce a la ecuación de equilibrio

$$ML^2\ddot{\varphi} + MgL \operatorname{sen}(45 - \varphi) + kL(l - l_0) \operatorname{sen} \beta = 0$$

donde l y β se calculan como en el ejemplo anterior. El valor de l_0 se puede calcular fácilmente planteando el equilibrio de momentos en la posición de equilibrio, y vale

$$l_0 = L + \frac{Mg\sqrt{2}}{2k}$$

Las linealizaciones del segundo y tercer sumandos conducen a:

$$kL(l - l_0) \operatorname{sen} \beta \approx kL \left[L(1 + \varphi) - L - \frac{Mg\sqrt{2}}{2k} \right] = kL^2\varphi - \frac{MgL\sqrt{2}}{2}$$

y también

$$MgL \operatorname{sen}(45 - \varphi) = MgL(\operatorname{sen} 45 \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos 45) \approx MgL \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \varphi)$$

Sustituyendo estas aproximaciones, resulta

$$ML^2\ddot{\varphi} + \left(kL^2 - MgL \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \varphi = 0$$

La frecuencia natural es, por tanto,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M} - g \frac{\sqrt{2}}{2L}}$$

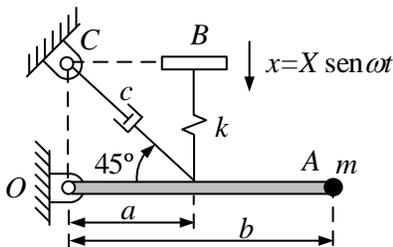


Figura 11.40

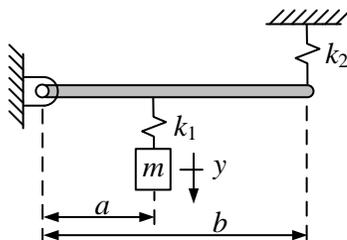


Figura 11.41

Este problema se puede resolver también aplicando el equilibrio en la posición deformada, suponiendo de entrada que las deformaciones son pequeñas, lo que da lugar al diagrama de fuerzas mostrado en la figura 11.39. Tomando momentos en la articulación y teniendo en cuenta que

$$l - l_0 = L\varphi - Mg\frac{\sqrt{2}}{2k}$$

se obtiene,

$$ML^2\ddot{\varphi} + MgL \operatorname{sen}(45 - \varphi) + kL \left(L\varphi - Mg\frac{\sqrt{2}}{2k} \right) \cos \varphi = 0$$

Puesto que $\cos \varphi \approx 1$ y $\operatorname{sen}(45 - \varphi) \approx \sqrt{2}/2(1 - \varphi)$, esta ecuación se convierte en la ya obtenida

$$ML^2\ddot{\varphi} + \left(kL^2 - MgL\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \varphi = 0$$

11.10. Problemas

Prob. 11.1 En el sistema de figura 11.40 la barra OA , de masa despreciable, tiene una masa puntual m concentrada en el extremo. Si el soporte B se somete a un desplazamiento vertical de la forma $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$, determinar la máxima reacción en C en régimen permanente.

Prob. 11.2 Hallar la frecuencia natural del sistema de la figura 11.41 considerando la barra sin masa.

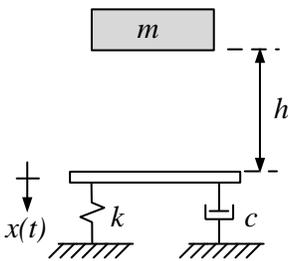


Figura 11.42

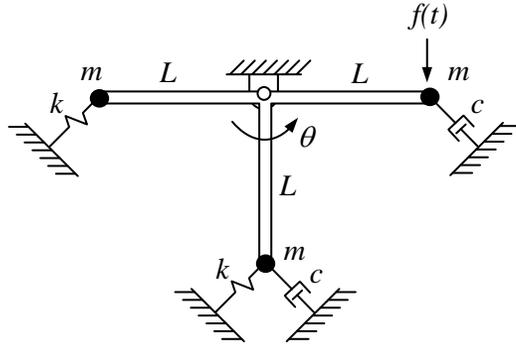


Figura 11.43

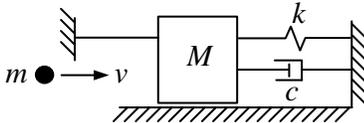


Figura 11.44

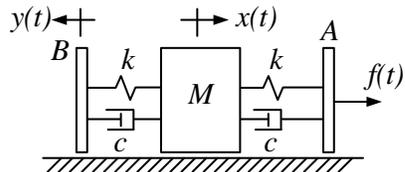


Figura 11.45

Prob. 11.3 El bloque de masa m mostrado en la figura 11.42 cae desde una altura h sobre una plataforma sin masa, unida a un muelle de rigidez k y a un amortiguador de constante c . Determinar el movimiento vibratorio que se produce suponiendo que la plataforma y el bloque quedan unidos al entrar en contacto. Tomando $m=1$ kg, $h=2$ m, $k=10000$ N/m y $c=50$ N s/m, hallar también la amplitud de las vibraciones al cabo de 2 segundos.

Prob. 11.4 Para el sistema de la figura 11.43, hallar la frecuencia natural y la amplitud de la respuesta en régimen permanente a una excitación $f(t) = F \text{ sen } \omega t$. Los ángulos que forman los muelles y amortiguadores con la horizontal son todos de 45° .

Prob. 11.5 El bloque de la figura 11.44 está sujeto mediante un hilo que lo desplaza una cantidad A respecto de su posición de equilibrio. Se dispara un proyectil de masa m y velocidad v contra el bloque. Suponiendo que después del impacto el bloque y el proyectil quedan unidos, determinar la ecuación del movimiento del conjunto. Se supone que el hilo se rompe en el momento del impacto sin producir percusión.

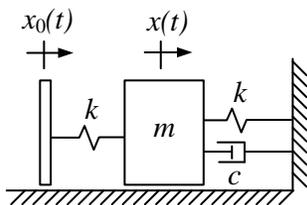


Figura 11.46

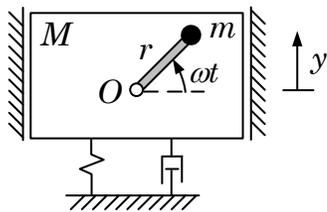


Figura 11.47

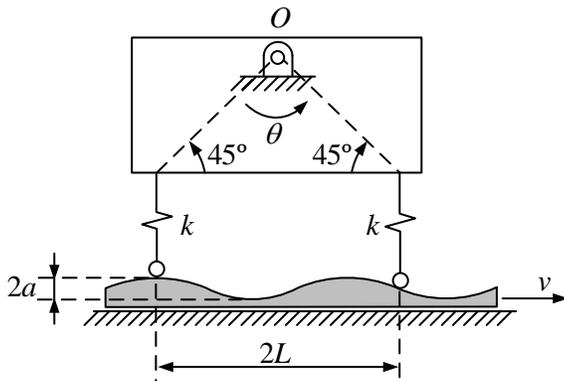


Figura 11.48

Prob. 11.6 Para el sistema de la figura 11.45 se pide: 1) Hallar la respuesta en régimen permanente cuando en el punto A se aplica una fuerza $f(t) = Fe^{i\omega t}$ y en el punto B se impone un movimiento $y(t) = Ye^{i\omega t}$. 2) Calcular la amplitud de los desplazamientos del bloque para $m = 1$, $c = 1$, $k = 1$, $F = 10$, $Y = 5$, $\omega = 5$, expresados en unidades coherentes.

Prob. 11.7 Hallar la máxima amplitud de las oscilaciones de la masa m cuando la placa izquierda de la figura 11.46 se mueve con un movimiento armónico conocido de amplitud X_0 y frecuencia ω . Datos: $m = 2$ kg, $c = 2,4 \cdot 10^{-2}$ N s/m, $k = 9$ N/m, $X_0 = 10$ cm, $\omega = 2,8$ rad/s.

Prob. 11.8 Sabiendo que la masa m de la figura 11.47 gira con velocidad angular constante ω alrededor del punto O , calcular la máxima oscilación de la masa M en régimen permanente.

Prob. 11.9 El balanceo del vehículo en una carretera ondulada se va a estudiar mediante el sistema de un grado de libertad de la figura 11.48.

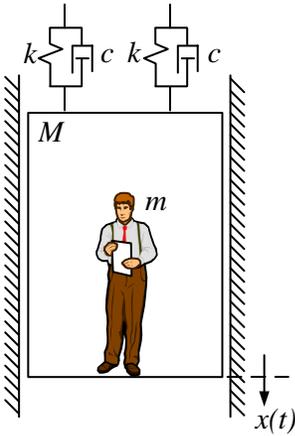


Figura 11.49

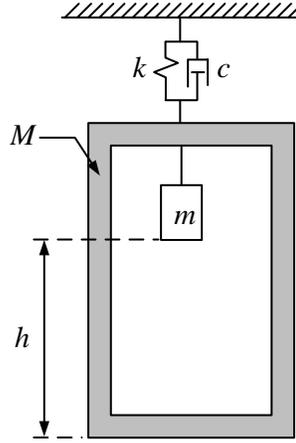


Figura 11.50

En lugar de considerar la carretera fija y el vehículo móvil, se considera al vehículo fijo y la carretera móvil, con velocidad uniforme v . Mediante medidas experimentales se ha comprobado que el perfil de la carretera se puede asimilar a una función armónica de ecuación $y(x) = a \text{sen } \bar{\omega}x$. Hallar 1) La ecuación del movimiento y su frecuencia natural. 2) Si, por motivos de confort la aceleración máxima no puede superar el valor $\ddot{\theta}_{max}$, hallar la velocidad límite del vehículo a la que se alcanza dicho valor. Datos: $k = 106 \text{ N/m}$, $L = 1,5 \text{ m}$, $\ddot{\theta}_{max} = 3 \text{ rad/s}^2$, $a = 0,01 \text{ m}$, $\bar{\omega} = \pi/3 \text{ rad/m}$, $I_O = 10000 \text{ kg m}^2$.

Prob. 11.10 El ascensor de masa M mostrado en la figura 11.49 está suspendido por medio de dos cables idénticos, que se representan mediante una combinación de hilos rígidos, muelles y amortiguadores ideales. Estando el ascensor en reposo, se sube una persona de masa m y uno de los cables se rompe súbitamente, comenzando el conjunto un movimiento oscilatorio amortiguado. Se pide: 1) Hallar la respuesta $x(t)$ del ascensor. 2) Hallar la amplitud de la oscilación en $t = 0,4 \text{ s}$ para los valores $M + m = 400 \text{ kg}$, $k = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}$, y $c = 1600 \text{ Ns/m}$.

Prob. 11.11 La figura 11.50 muestra una caja suspendida de un muelle y un amortiguador, dentro de la cual se halla suspendida otra masa más pequeña mediante un hilo rígido. Estando el conjunto en reposo, se corta el hilo de la masa interior, y ésta cae. Determinar el transitorio que se produce desde que se corta el hilo hasta que la masa pequeña golpea a la grande.

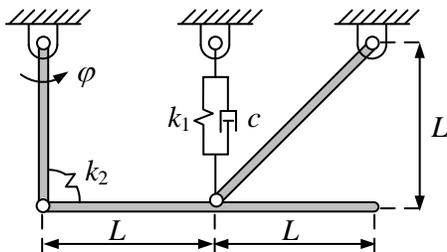


Figura 11.51

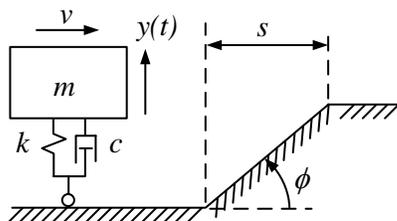


Figura 11.52

¿En qué instante se produce el impacto entre ambas? Datos: $k = 5000 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ Ns/m}$, $M = 100 \text{ kg}$, $m = 20 \text{ kg}$, $h = 2 \text{ m}$.

Prob. 11.12 El mecanismo de la figura 11.51 se encuentra en el plano horizontal. Deducir la expresión que rige las pequeñas vibraciones alrededor de la posición de equilibrio, tomando como grado de libertad el ángulo φ . Todas las barras tienen una distribución de masa uniforme m por unidad de longitud.

Prob. 11.13 El móvil de masa m mostrado en la figura 11.52 está suspendido sobre un resorte y un amortiguador de constantes k y c , y se mueve con velocidad horizontal v constante sobre la pista indicada. Determinar la ecuación del movimiento vertical a partir del instante $t = 0$ en que el móvil comienza a subir la rampa inclinada.

Prob. 11.14 Durante la fase preliminar de diseño de una nueva motocicleta se va a estudiar un modelo simplificado de su suspensión central y, para ello, se toma el modelo de un grado de libertad de la figura 11.53. Se consideran todos los elementos sin masa, excepto la rueda con centro en B , que no está dibujada y que tiene masa m y momento de inercia I . El muelle y amortiguador situados entre los puntos H y G se consideran en paralelo y con constantes k y c , respectivamente. Con la rueda frenada (rígidamente unida al brazo AB) se aplica una fuerza armónica de amplitud F y frecuencia ω en el centro de la rueda. Se pide, escribir la ecuación del movimiento y calcular la máxima reacción que aparece en el punto G . No considerar el peso.

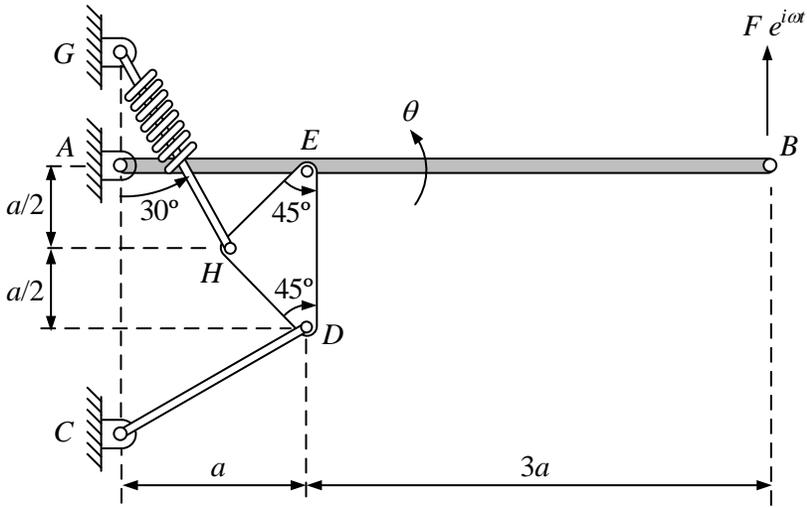


Figura 11.53

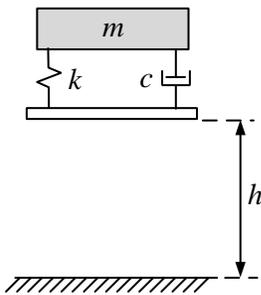


Figura 11.54

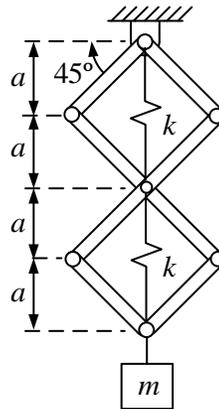


Figura 11.55

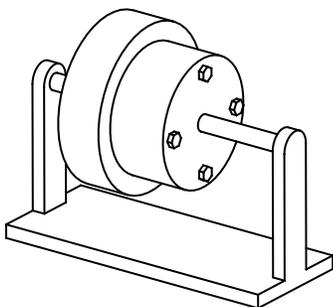


Figura 11.56

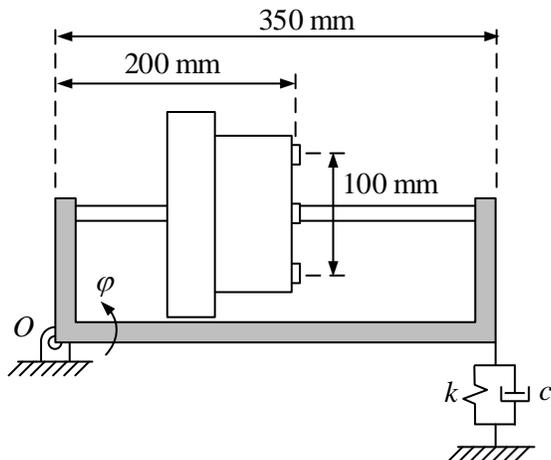


Figura 11.57

Prob. 11.15 El conjunto de la figura 11.54 está compuesto por una masa m y una placa sin masa, unidas mediante un amortiguador de constante c y un muelle de rigidez k . Estando el conjunto suspendido a una altura h , se deja caer por efecto de la gravedad, sin velocidad inicial, hasta que la placa golpea con el suelo. Se pide: 1) Calcular la respuesta del sistema suponiendo que la placa queda unida al suelo. 2) Si la placa no quedara pegada al suelo, ¿rebotaría el sistema para los valores $m = 100 \text{ kg}$, $c = 400 \text{ Ns/m}$, $k = 10000 \text{ N/m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $h = 1 \text{ m}$?

Prob. 11.16 La figura 11.55 muestra la posición de equilibrio de un sistema vibratorio de un grado de libertad situado en plano vertical. Sabiendo que la masa m sólo puede moverse verticalmente, que todas las barras tienen masa despreciable y que los dos muelles tienen rigidez k , calcular la frecuencia natural del sistema.

Prob. 11.17 El rotor mostrado en las figuras 11.56 y 11.57 consta de un eje y dos piezas cilíndricas de distintos diámetros atornilladas entre sí por medio de 4 tornillos pasantes con sus correspondientes tuercas. El conjunto se monta sobre un bastidor que pivota alrededor del punto O , a la vez que se hace girar con velocidad constante $\omega = 5000 \text{ rpm}$ alrededor de su eje. El bastidor está sujeto por medio de un apoyo elástico de rigidez $k = 20000 \text{ N/m}$ y constante de amortiguamiento $c = 100 \text{ Ns/m}$, quedando horizontal cuando el rotor está parado. Por un descuido, una de las tuercas ha quedado mal apretada y durante el funcionamiento sale despedida,

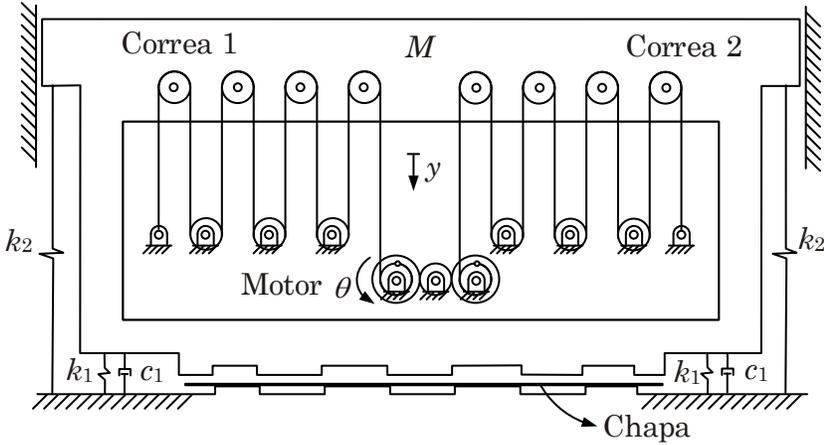


Figura 11.58

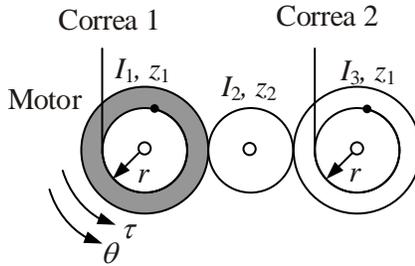


Figura 11.59

quedando el conjunto con una tuerca menos. Sabiendo que el rotor estaba inicialmente equilibrado, que la masa de la tuerca es $m = 0,03 \text{ kg}$, y que el momento de inercia del conjunto bastidor-rotor respecto del eje O es $I_O = 0,05 \text{ kg m}^2$, calcular la amplitud de las vibraciones del bastidor en régimen permanente.

Prob. 11.18 La figura 11.58 muestra una plegadora de chapa utilizada en numerosos procesos de fabricación. Su funcionamiento es muy sencillo: la parte móvil de la máquina se desplaza verticalmente, atrapando la chapa colocada entre los utillajes superior e inferior y provocando su deformación. La máquina de la figura emplea un accionamiento eléctrico, consiguiendo el movimiento vertical $y(t)$ por medio de un sistema de poleas. El elemento móvil tiene masa M y todas las poleas tienen radio r y masa despreciable. El sistema móvil es soportado por dos muelles verticales de rigidez k_2 , y por dos

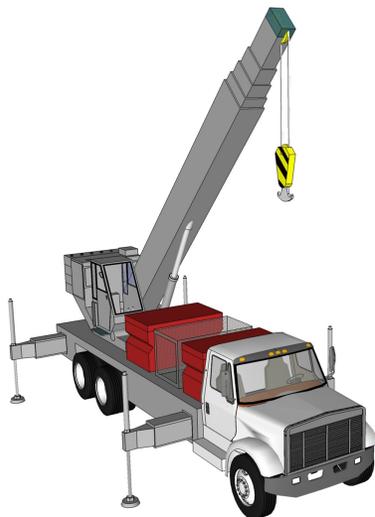


Figura 11.60

conjuntos muelle–amortiguador de rigidez k_1 y constante c_1 . La figura 11.59 muestra un esquema ampliado del contacto entre las dos correas, a través de engranajes. El número de dientes z y el momento de inercia I de cada una de las ruedas dentadas se indican en la figura. Se pide: 1) Relación entre el giro θ del motor y el movimiento vertical $y(t)$. 2) Ecuación diferencial del movimiento en función del grado de libertad $y(t)$. 3) Frecuencia natural del sistema. 4) Máximo desplazamiento en régimen permanente del utillaje cuando se introduce un par motor de valor $\tau(t) = T e^{i\omega t}$.

Prob. 11.19 La figura 11.60 muestra una grúa de brazo telescópico, en cuyo extremo dispone un sistema de cabrestante para la elevación de la carga. La figura 11.61 muestra el esquema mecánico del sistema de elevación, con sus poleas y cable. Un conjunto motorreductor planetario es el encargado de accionar el tambor donde se arrolla el cable, representado por la polea s . Los números de dientes de los engranajes son: $z_1 = z_2 = z_3 = z_e = 20$, $z_4 = 30$, $z_5 = 25$, $z_6 = 60$, $z_7 = 10$, $z_s = 65$. Para aumentar la estabilidad de la carga de masa M y poder transportar elementos frágiles, se intercala entre el brazo y la carga un conjunto muelle–amortiguador, de constantes k y c . Se quiere dimensionar tanto el sistema de elevación de la carga, como el de amortiguamiento, para lo cual se pide calcular: 1) Relación entre el giro θ del motor y el giro de la polea de salida β . 2) Relación entre el giro de la polea β y el movimiento vertical de la carga $y(t)$. 3) Ecuación

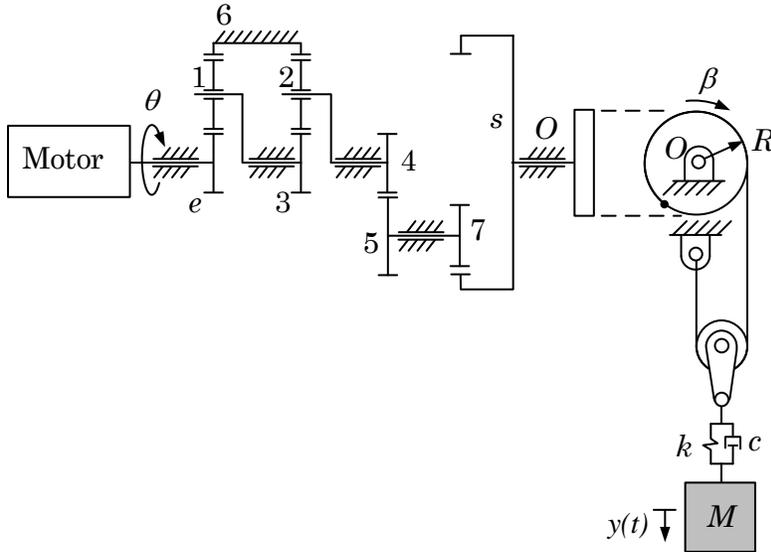


Figura 11.61

diferencial del movimiento de la masa M en función del grado de libertad $y(t)$. 4) Frecuencia natural del sistema.

Prob. 11.20 La figura 11.62 muestra un puente levadizo, muy utilizado en zona de canales para permitir el paso del tráfico fluvial. Para reducir los esfuerzos en el sistema de elevación, se contrapesa la parte móvil mediante un sistema de barras articuladas. El puente, de masa m y longitud L , se encuentra articulado en el punto O_1 y tiene momento de inercia I_G respecto a su centro de gravedad. A una altura h se coloca una barra paralela al puente, articulada en el punto O_2 , en uno de cuyos extremos se sitúa la masa de contrapesado M . El tirante vertical AB se considera de masa despreciable. Cuando el puente se encuentra horizontal, el sistema se apoya sobre un conjunto muelle-amortiguador de rigidez k y amortiguamiento c . Para estabilizar la barra superior O_2A , se introduce un amortiguador de torsión de constante c_T . Se quiere dimensionar el sistema de equilibrado y el de estabilización del puente, para lo cual se pide: 1) Calcular el valor de la masa M del contrapeso para que el puente esté equilibrado en la posición horizontal. 2) Ecuación diferencial del movimiento en función del grado de libertad $\theta(t)$. 3) Frecuencia natural del sistema. 4) Máxima amplitud del desplazamiento en régimen permanente cuando se introduce una fuerza vertical de valor $f(t) = Fe^{i\omega t}$.

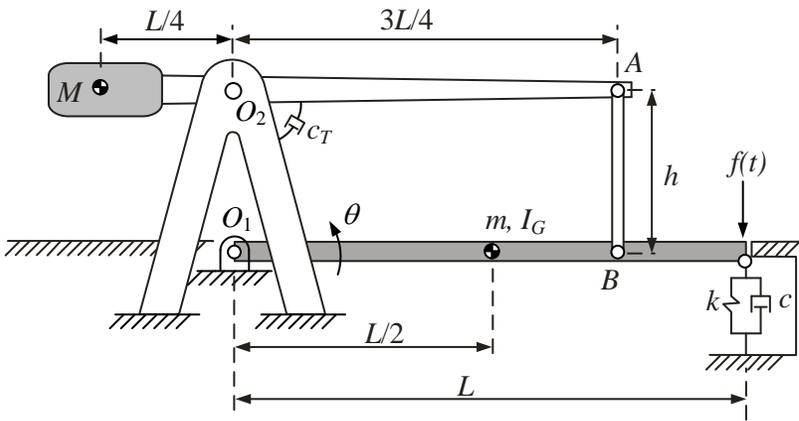


Figura 11.62

Capítulo 12

Vibraciones en sistemas con varios grados de libertad

12.1. Matrices de rigidez, inercia y amortiguamiento

Se puede demostrar que las ecuaciones lineales del movimiento de un sistema discreto de N grados de libertad sometido a pequeños desplazamientos, con coordenadas generalizadas representadas por el vector \mathbf{q} , de dimensión $N \times 1$, se pueden escribir como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \tag{12.1}$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son matrices de tamaño $N \times N$ y se denominan matrices de *inercia*, *amortiguamiento* y *rigidez*, respectivamente. La matriz \mathbf{M} es simétrica y positivo-definida. La matriz \mathbf{K} también es simétrica, pero puede ser positivo-definida o positivo-semidefinida. La matriz \mathbf{C} no goza, en general, de ninguna de las propiedades anteriores.

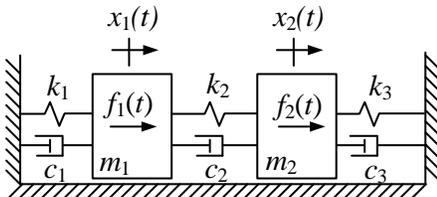


Figura 12.1

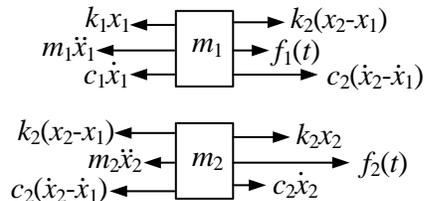


Figura 12.2

En lugar de justificar rigurosamente las afirmaciones anteriores, veamos un ejemplo de dos grados de libertad que puede servir para aclarar los conceptos.

Ejemplo 12.1 *Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar las matrices de masas, rigidez y amortiguamiento para el sistema de dos grados de libertad de la figura 12.1.*

Para hallar las ecuaciones de este sistema, basta con aplicar las ecuaciones de equilibrio a cada una de las dos masas. La figura 12.2 muestra los diagramas de sólido libre, con todas las fuerzas actuantes. Sumando las fuerzas e igualando a cero se llega a:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = f_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 = f_2(t)$$

Reordenando términos, estas dos ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Identificando con la ecuación 12.1, las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} resultan ser:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

12.2. Vibraciones libres de sistemas sin amortiguamiento

Particularizando la ecuación 12.1 para el caso de las vibraciones libres ($\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$) en sistemas no amortiguados ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$), se tiene

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{12.2}$$

sujeto a las condiciones iniciales $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$. Análogamente al caso de las vibraciones con un grado de libertad, asumimos una solución armónica de la forma

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}e^{st} \tag{12.3}$$

donde \mathbf{A} es un vector de amplitudes. Sustituyendo la ecuación 12.3 en la 12.2, resulta:

$$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{A}e^{st} = \mathbf{0} \quad (12.4)$$

Puesto que ni \mathbf{A} ni e^{st} pueden ser nulos, ya que de lo contrario tendríamos la solución trivial nula, se deduce que

$$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (12.5)$$

que representa una ecuación de la que se pueden calcular los valores de s y \mathbf{A} que satisfacen la ecuación diferencial.

12.2.1. Frecuencias naturales

Para calcular los valores de s y \mathbf{A} , debemos resolver la ecuación 12.5, que representa un problema de valores y vectores propios generalizado. Esta ecuación tiene solución distinta de la trivial nula si –y sólo si– la matriz de coeficientes es singular o, lo que es lo mismo, si su determinante es nulo, es decir

$$|s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0 \quad (12.6)$$

Se puede demostrar que si la matriz \mathbf{M} es positivo-definida y \mathbf{K} es positivo-definida o positivo-semidefinida, todos los valores propios s^2 son reales y negativos o nulos. Por ello, para manejar cantidades positivas, es costumbre realizar el cambio de variables

$$s^2 = -\omega^2 \quad (12.7)$$

que equivale a

$$s = \pm \omega i \quad (12.8)$$

Con este cambio, la ecuación 12.6 se convierte en

$$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \quad (12.9)$$

con valores propios $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ positivos o nulos. A las raíces cuadradas de estos valores se les denomina *frecuencias naturales* del sistema.

12.2.2. Modos de vibración

Con cada valor propio ω_i^2 hay un vector propio asociado \mathbf{A}_i de dimensión N , que se puede obtener de la ecuación

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{A}_i = \mathbf{0} \quad (12.10)$$

Este sistema de ecuaciones homogéneo tiene una matriz de coeficientes singular, por lo que tiene solución distinta de la trivial nula, de módulo indeterminado, que se obtiene dando valor arbitrario a una cualquiera de sus componentes. Dichos vectores propios reciben el nombre de *modos de vibración*.

La respuesta general a las vibraciones libres se puede escribir como una combinación lineal de todas las soluciones posibles que cumplen la ecuación 12.3. Es decir,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}_1 (\beta_{11} e^{i\omega_1 t} + \beta_{12} e^{-i\omega_1 t}) + \dots + \mathbf{A}_N (\beta_{N1} e^{i\omega_N t} + \beta_{N2} e^{-i\omega_N t}) \quad (12.11)$$

donde las constantes β_{ij} se obtienen a partir de las condiciones iniciales. Se puede demostrar fácilmente que esta ecuación puede también escribirse mediante funciones armónicas simples de la forma

$$\mathbf{q}(t) = B_1 \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + \dots + B_N \mathbf{A}_N \cos(\omega_N t - \psi_N) \quad (12.12)$$

donde, de nuevo, las constantes B_i y ψ_i se determinan de las condiciones iniciales.

Como se puede ver en la ecuación 12.12, la respuesta a las vibraciones libres es una combinación lineal de los modos de vibración. Cada coeficiente viene dado por una función armónica desfasada, cuya frecuencia de vibración es, precisamente, la frecuencia de vibración correspondiente al modo.

12.2.3. Propiedades de los modos de vibración

Ortogonalidad de los modos de vibración

Una propiedad de gran importancia en el estudio de las vibraciones es la ortogonalidad de los modos, gracias a la cual se pueden desacoplar las ecuaciones del movimiento, convirtiéndolas en N ecuaciones diferenciales independientes, a través del cambio de variables conocido como *transformación modal*, que veremos más adelante.

Basándonos en la ecuación 12.10, particularizada para las frecuencias naturales ω_i , ω_j , y sus correspondientes modos \mathbf{A}_i , \mathbf{A}_j , podemos escribir

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{A}_i \quad (12.13)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\mathbf{A}_j \quad (12.14)$$

Premultiplicando la ecuación 12.13 por el vector \mathbf{A}_j transpuesto, y la ecuación 12.14 por el vector \mathbf{A}_i transpuesto, obtenemos

$$\mathbf{A}_j^T \mathbf{K}\mathbf{A}_i = \omega_i^2 \mathbf{A}_j^T \mathbf{M}\mathbf{A}_i \quad (12.15)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{K}\mathbf{A}_j = \omega_j^2 \mathbf{A}_i^T \mathbf{M}\mathbf{A}_j \quad (12.16)$$

Restando ambas ecuaciones término a término y teniendo en cuenta que tanto \mathbf{M} como \mathbf{K} son simétricas, obtenemos

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{A}_i^T \mathbf{M}\mathbf{A}_j = 0 \quad (12.17)$$

Si ω_i y ω_j son valores propios distintos, concluimos que

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{M}\mathbf{A}_j = 0 \quad i \neq j \quad (12.18)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{M}\mathbf{A}_i = m_i \quad \forall i \quad (12.19)$$

donde m_i es un valor positivo, distinto de cero, lo que demuestra que los vectores propios asociados con valores propios distintos son ortogonales respecto a la matriz de masas.

Los modos de vibración también son ortogonales respecto a la matriz de rigidez. La prueba es evidente a partir de las ecuaciones 12.15, 12.16 y 12.19, que conducen a

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{K}\mathbf{A}_j = 0 \quad i \neq j \quad (12.20)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{K}\mathbf{A}_i = k_i \quad \forall i \quad (12.21)$$

siendo k_i un término escalar, positivo o nulo y constante.

Independencia lineal de los modos de vibración

La propiedad de ortogonalidad se puede utilizar para probar que los modos de vibración son linealmente independientes. Por definición, el conjunto de vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N$ es linealmente independiente si la relación

$$c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 + \dots + c_N \mathbf{A}_N = 0 \quad (12.22)$$

se cumple sólo cuando las constantes c_1, c_2, \dots, c_N son nulas. Premultiplicando la ecuación 12.22 por $\mathbf{A}_i^T \mathbf{M}$, resulta

$$c_i m_i = 0 \quad (12.23)$$

Y, como m_i es distinto de cero, se concluye que

$$c_i = 0 \quad \forall i \quad (12.24)$$

lo que demuestra la independencia lineal.

Al demostrar la ortogonalidad de los modos de vibración hemos asumido que los valores propios ω_i^2 y ω_j^2 eran distintos, pero en algunos casos particulares pueden aparecer valores propios repetidos. En el caso general, los vectores propios asociados con valores propios repetidos pueden ser independientes o no serlo. Sin embargo, como las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} son siempre reales y simétricas en todo sistema mecánico, se puede demostrar que los modos de vibración correspondientes a valores propios repetidos son también linealmente independientes.

Ejemplo 12.2 *Calculemos las frecuencias y modos de vibración del ejemplo 12.1 para los valores $m_1 = m_2 = 1$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y $k_1 = k_2 = 1$. Particularizando, las ecuaciones del movimiento para el caso de las vibraciones libres, resulta:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Las frecuencias naturales se calculan de la ecuación característica dada por la ecuación 12.9, que para este caso es

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 = 0$$

cuyas soluciones son

$$\omega^2 = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

de manera que $\omega_1^2 = 1$ y $\omega_2^2 = 3$. Para calcular el primer modo de vibración, particularizamos la ecuación 12.10. Para el primer modo, la ecuación se convierte en

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

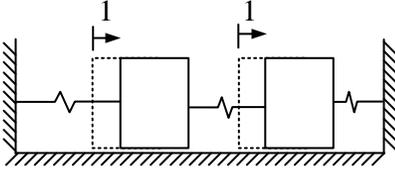


Figura 12.3

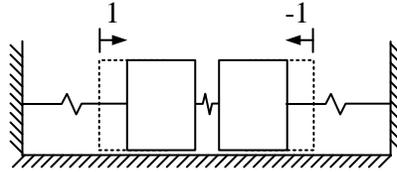


Figura 12.4

Dando arbitrariamente valor unitario a la primera componente de \mathbf{A}_1 , resulta

$$\mathbf{A}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Análogamente, para el segundo modo podemos escribir

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y dando valor unitario a la primera componente de \mathbf{A}_2 , se deduce

$$\mathbf{A}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

La solución a las vibraciones libres viene dada por la ecuación 12.12 que, para este caso, es

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = B_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(t - \psi_1) + B_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cos(\sqrt{3}t - \psi_2)$$

Los modos tienen una representación gráfica sencilla, que se muestra en las figuras 12.3 y 12.4.

12.2.4. Transformación modal

Definamos la matriz $N \times N$

$$\Phi = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_N] \quad (12.25)$$

cuyas columnas son los modos de vibración. Retomamos las ecuaciones diferenciales del movimiento de un sistema no amortiguado, que eran

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (12.26)$$

En ellas, realizamos el cambio de variables

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{y} \quad (12.27)$$

donde \mathbf{y} es un nuevo vector de coordenadas llamadas *coordenadas modales*. Puesto que Φ es una matriz constante, al sustituir se obtiene:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (12.28)$$

Premultiplicando esta ecuación por Φ^T , resulta:

$$\Phi^T\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{y}} + \Phi^T\mathbf{K}\Phi\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (12.29)$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración respecto de las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} , se obtiene:

$$\mathbf{M}_y\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_y\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (12.30)$$

donde

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \quad (12.31)$$

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_N \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

con $m_i = \mathbf{A}_i^T\mathbf{M}\mathbf{A}_i$ y $k_i = \mathbf{A}_i^T\mathbf{K}\mathbf{A}_i$. Como se ve, las matrices \mathbf{M}_y y \mathbf{K}_y son diagonales, y reciben el nombre de *matriz de masas modal* y *matriz de rigidez modal*.

Teniendo en cuenta la estructura diagonal de dichas matrices, podemos reescribir la ecuación (10.30) como

$$m_i\ddot{y}_i + k_i y_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (12.33)$$

lo que representa un sistema de N ecuaciones diferenciales desacopladas. Este resultado es muy importante ya que, en definitiva, hemos transformado un problema de vibraciones de N grados de libertad en N subproblemas de un grado de libertad, que podemos resolver independientemente uno del otro. La coordenada generalizada que caracteriza el movimiento de cada

subsistema es, precisamente, la coordenada modal y_i . Se puede comprobar también fácilmente que la frecuencia natural del subsistema i coincide con la frecuencia natural ω_i .

Para resolver cada una de las ecuaciones del sistema 12.33 podemos recurrir a la respuesta a las vibraciones libres que, según se vio en el capítulo precedente, es

$$y_i(t) = C_i \cos(\omega_i t - \psi_i) \quad (12.34)$$

donde C_i y ψ_i son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales. Como dichas condiciones iniciales se conocen en las coordenadas \mathbf{q} , para obtener las condiciones iniciales en las coordenadas modales es preciso realizar sobre ellas el cambio de variables

$$\mathbf{y}_0 = \Phi^{-1} \mathbf{q}_0 \quad (12.35)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_0 = \Phi^{-1} \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (12.36)$$

Operando, se obtiene

$$C_i = \sqrt{y_{0i}^2 + \left(\frac{\dot{y}_{0i}}{\omega_i}\right)^2} \quad (12.37)$$

$$\psi_i = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_{0i}}{\omega_i y_{0i}} \right) \quad (12.38)$$

Una vez obtenida la solución de cada una de las coordenadas modales se puede deducir la solución del sistema de N grados de libertad deshaciendo el cambio de variables:

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i y_i(t) \quad (12.39)$$

Es interesante observar que, cuando un sistema es sacado de su posición de equilibrio según un modo de vibración, es decir, de manera que sólo una de las coordenadas y_{0i} sea distinta de cero, el sistema vibra únicamente según ese grado de libertad, sin que la respuesta involucre a ningún otro modo. Además, todos los puntos vibran en fase, alcanzando sus valores extremos al unísono. Por el principio de superposición, esta propiedad se puede generalizar; cuando un sistema se saca de su posición de equilibrio según una combinación lineal de modos de vibración, su respuesta es una combinación lineal de las respuestas individuales a cada modo de vibración, de manera que la respuesta de cada modo no interfiere en la de los demás.

Como veremos más adelante, esta propiedad se cumple en los sistemas no amortiguados (y en algunos tipos muy particulares de amortiguamiento) pero, en general, no se cumple en los sistemas amortiguados.

12.2.5. Modos de vibración normalizados

El módulo de los modos de vibración no está determinado –por ser vectores propios– por lo que se puede elegir arbitrariamente. En muchos casos, interesa normalizar los modos de vibración respecto a la matriz de masas, de tal forma que el módulo del producto $\mathbf{A}_i^T \mathbf{M} \mathbf{A}_i$ sea la unidad. Para ello, se debe dividir cada uno de los modos de vibración por la raíz cuadrada del correspondiente coeficiente de masa modal, de modo que

$$\mathbf{A}_{im} = \frac{\mathbf{A}_i}{\sqrt{m_i}} = \frac{\mathbf{A}_i}{\sqrt{\mathbf{A}_i^T \mathbf{M} \mathbf{A}_i}} \quad (12.40)$$

donde \mathbf{A}_{im} es el modo i normalizado respecto a la matriz de masas. Consecuentemente,

$$\mathbf{A}_{im}^T \mathbf{M} \mathbf{A}_{im} = \frac{1}{m_i} \mathbf{A}_i^T \mathbf{M} \mathbf{A}_i = \frac{m_i}{m_i} = 1 \quad (12.41)$$

es decir,

$$\Phi_m^T \mathbf{M} \Phi_m = \mathbf{I} \quad (12.42)$$

siendo Φ_m la matriz de modos normalizados respecto a la matriz de masas e \mathbf{I} la matriz identidad de $N \times N$. También observamos que

$$\mathbf{A}_{im}^T \mathbf{K} \mathbf{A}_{im} = \frac{1}{m_i} \mathbf{A}_i^T \mathbf{K} \mathbf{A}_i = \frac{k_i}{m_i} = \omega_i^2 \quad (12.43)$$

por lo que

$$\Phi_m^T \mathbf{K} \Phi_m = \omega_m^2 \quad (12.44)$$

donde

$$\omega_m^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (12.45)$$

Utilizando la transformación modal con los modos normalizados, las ecuaciones del movimiento se pueden reescribir como

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0 \quad (12.46)$$

Ejemplo 12.3 Veamos cómo se realiza la transformación modal en el ejemplo 12.2. Para ello, calculamos en primer lugar las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} , que valen

$$\mathbf{M}_y = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_y = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Los modos normalizados resultan

$$\mathbf{A}_{1m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{A}_{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Por tanto,

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la transformación modal $\mathbf{q} = \Phi_m \mathbf{y}$, y premultiplicando por Φ_m^T , obtenemos

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 0$$

$$\ddot{y}_2 + 3y_2 = 0$$

12.2.6. Modos de sólido rígido

En la mayoría de los casos, los sistemas vibratorios son *sistemas definidos*, en los que todo movimiento posible conlleva la deformación de sus elementos elásticos. Se puede demostrar que, en estos sistemas, la matriz de rigidez es simétrica y positivo-definida, y que todos sus valores propios son positivos. Sin embargo, algunos sistemas tienen la posibilidad de trasladarse o de rotar como sólidos rígidos, lo que hace que la matriz de rigidez sea positivo-semidefinida, y que tenga determinante nulo. En estos sistemas, llamados *semidefinidos*, algunos valores propios toman valor nulo. Las frecuencias naturales nulas y sus correspondientes modos de vibración están relacionados con las posibilidades del sistema de trasladarse como sólido rígido. En estos casos, la ecuación modal correspondiente al modo k se puede escribir como

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = 0 \tag{12.47}$$

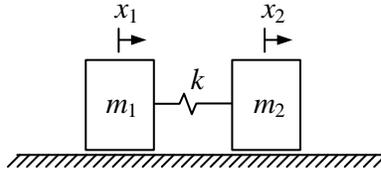


Figura 12.5

Si $\omega_k = 0$, la ecuación se reduce a

$$\ddot{y}_k = 0 \quad (12.48)$$

que al ser integrada, resulta

$$y_k(t) = y_{0k} + \dot{y}_{0k} t \quad (12.49)$$

donde y_{0k} y \dot{y}_{0k} son, respectivamente, las condiciones iniciales modales de posición y velocidad.

Observemos que la ecuación 12.10 particularizada para el modo k se convierte en

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_k = \mathbf{0} \quad (12.50)$$

Puesto que la matriz \mathbf{K} es positivo-semidefinida, hay vectores \mathbf{A}_k distintos del nulo que satisfacen la ecuación

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{K} \mathbf{A}_k = 0 \quad (12.51)$$

que expresa la energía potencia elástica producida en un desplazamiento \mathbf{A}_k . Como dicha energía es nula, se deduce que el vector \mathbf{A}_k representa un movimiento de sólido rígido, que no produce deformación, y que se denomina *modo de sólido rígido*.

A los modos de vibración que incrementan la energía potencial elástica se les denomina *modos de deformación*. La solución general del movimiento viene dada por una combinación lineal de los modos de sólido rígido y de los modos de deformación.

Ejemplo 12.4 *Calculemos las frecuencias y modos de vibración del sistema mostrado en la figura 12.5, para los valores $m_1 = m_2 = 1$, $k=1$. Sus ecuaciones del movimiento se obtienen fácilmente y valen*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La ecuación característica resulta

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \omega^4 - 2\omega^2 = 0$$

cuyas soluciones son $\omega_1 = 0$ y $\omega_2 = \sqrt{2}$. Los modos correspondientes son

$$\mathbf{A}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Como se puede ver, el modo asociado a la frecuencia natural nula se corresponde con un desplazamiento de igual magnitud en ambos sólidos, lo que supone un desplazamiento de sólido rígido que no modifica la longitud del muelle.

12.3. Sistemas con amortiguamiento viscoso

Hasta el momento, hemos visto que en los sistemas no amortiguados las frecuencias naturales y modos de vibración son magnitudes reales que, por ser ortogonales a las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} , conducen a un sistemas de ecuaciones desacoplados al aplicar la transformación modal. Como veremos a continuación, al introducir el amortiguamiento se modifican sustancialmente las conclusiones extraídas, ya que las frecuencias naturales y modos de vibración pueden tomar valores complejos.

Retomamos la ecuación general de las vibraciones en sistemas lineales, que es de la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (12.52)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento de la que, a priori, no se puede presuponer ninguna propiedad general, como la simetría. Por consiguiente, al aplicar la transformación modal con la matriz Φ de modos reales, cuyas columnas se obtienen de la ecuación 12.10, no se puede concluir que el triple producto $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ sea diagonal, por lo que la transformación modal no conduce a un sistema de ecuaciones desacopladas.

12.3.1. Amortiguamiento proporcional

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, la matriz de amortiguamiento es desconocida y su estimación no es tan sencilla como la de las matrices de masas y rigidez. De hecho, se trata de un problema complejo,

debido a que los mecanismos de disipación de energía son variados y, frecuentemente, desconocidos. Por tanto, es preciso realizar simplificaciones y asumir hipótesis que produzcan resultados razonablemente precisos. La primera de estas simplificaciones consiste en asumir que el amortiguamiento es de tipo viscoso, dependiente sólo de la velocidad, despreciando otros mecanismos disipativos como el rozamiento seco o el rozamiento estructural. Una vez asumido que el amortiguamiento es de tipo viscoso, una nueva aproximación consiste en presuponer que la matriz \mathbf{C} es combinación lineal de las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} , de modo que

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (12.53)$$

donde α y β son constantes. A este tipo de amortiguamiento se le conoce como *amortiguamiento proporcional*. Sustituyendo la ecuación 12.53 en la 12.52 y aplicando la transformación modal, se obtiene

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{y}} + \Phi^T (\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}) \Phi \dot{\mathbf{y}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{y} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (12.54)$$

Empleando la propiedad de ortogonalidad de los modos respecto de \mathbf{M} y \mathbf{K} , se obtiene

$$\mathbf{M}_y \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_y \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_y \mathbf{y} = \mathbf{Q} \quad (12.55)$$

donde $\mathbf{C}_y = \alpha\mathbf{M}_y + \beta\mathbf{K}_y$ y $\mathbf{Q} = \Phi^T \mathbf{F}$. Puesto que las matrices \mathbf{M}_y y \mathbf{K}_y son diagonales, la matriz \mathbf{C}_y también lo es. Los elementos de esta matriz, c_i , $i = 1, \dots, N$ reciben el nombre de *coeficientes de amortiguamiento modal*. Su expresión en función de los coeficientes modales de inercia y rigidez se obtiene como

$$c_i = \alpha m_i + \beta k_i \quad (12.56)$$

Podemos reescribir la ecuación 12.54 como

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i = Q_i \quad i = 1, \dots, N \quad (12.57)$$

Dividiendo cada ecuación por su coeficiente de inercia modal y estableciendo una analogía con los sistemas de un grado de libertad, podemos escribir

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{Q_i}{m_i} \quad (12.58)$$

donde el *coeficiente de amortiguamiento modal relativo* se define como

$$\xi_i = \frac{c_i}{2m_i \omega_i} \quad (12.59)$$

Cada una de las ecuaciones 12.58 representa un sistema amortiguado de un grado de libertad cuya respuesta se puede calcular de acuerdo con los métodos vistos en el capítulo anterior.

La hipótesis de amortiguamiento proporcional se suele utilizar cuando el amortiguamiento es pequeño. Normalmente, la matriz \mathbf{C}_y no es diagonal, pero si el amortiguamiento es pequeño suele ser suficiente con tomar los términos de la diagonal y despreciar los demás. Esta aproximación es aceptable en muchas aplicaciones de la ingeniería, en las que la disipación de energía se produce por medio de rozamiento estructural que, usualmente, es pequeño. También se pueden utilizar técnicas experimentales para estimar el valor de los coeficientes ξ_i correspondientes a cada modo.

12.3.2. Amortiguamiento viscoso general: coordenadas modales complejas

Cuando la matriz de amortiguamiento no se pueda expresar como combinación lineal de las matrices de inercia y rigidez, la transformación modal descrita en la sección 12.2.4 no produce el desacoplamiento de las ecuaciones del movimiento. En su lugar, se puede obtener una nueva transformación, para lo que se define un vector de estado

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (12.60)$$

de dimensión $2N \times 1$. Premultiplicando la ecuación 12.52 por \mathbf{M}^{-1} y despejando $\ddot{\mathbf{q}}$ resulta

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \quad (12.61)$$

Esta ecuación, junto con la trivial $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, se pueden escribir matricialmente de la forma

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{Bmatrix} \quad (12.62)$$

que, de forma más compacta se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{z} + \mathbf{R}(t) \quad (12.63)$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (12.64)$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{Bmatrix} \quad (12.65)$$

En el caso de las vibraciones libres, al no haber fuerzas exteriores el término de fuerzas exteriores es nulo ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), por lo que $\mathbf{R}(t)$ también es nulo. Por tanto, la ecuación 12.63 se reduce a

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B} \mathbf{z} \quad (12.66)$$

Para hallar su solución general ensayamos soluciones de la forma

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A} e^{\mu t} \quad (12.67)$$

donde \mathbf{A} es un vector de dimensión $2N \times 1$ y μ es una constante. Para calcular sus valores, sustituimos la ecuación 12.67 en la 12.66, obteniendo

$$\mu \mathbf{A} e^{\mu t} = \mathbf{B} \mathbf{A} e^{\mu t} \quad (12.68)$$

Pasando al otro miembro y simplificando el término exponencial, que no puede ser nulo, resulta

$$(\mathbf{B} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (12.69)$$

Esta ecuación representa un problema de valores y vectores propios de tamaño $2N$, cuya ecuación característica se obtiene al igualar a cero el determinante de su matriz de coeficientes, es decir

$$|\mathbf{B} - \mu \mathbf{I}| = 0 \quad (12.70)$$

Las raíces $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2N}$ de este polinomio son los valores propios de la matriz $\mathbf{B} - \mu \mathbf{I}$ y, en general, pueden ser complejos. Por cada valor propio μ_i hay un vector propio asociado \mathbf{A}_i , que se obtiene de la ecuación

$$(\mathbf{B} - \mu_i \mathbf{I}) \mathbf{A}_i = \mathbf{0} \quad (12.71)$$

que también puede ser complejo. Con estos nuevos vectores propios complejos, definimos una nueva matriz modal

$$\Phi = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{2N}] \quad (12.72)$$

Puesto que cada columna de Φ es un modo complejo, la ecuación 12.71 se puede generalizar, escribiendo

$$(\mathbf{B} - \mu \mathbf{I}) \Phi = \mathbf{0} \quad (12.73)$$

siendo $\boldsymbol{\mu}$ una matriz diagonal de la forma

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{2N} \end{bmatrix} \quad (12.74)$$

Premultiplicando la ecuación 12.73 por $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ y pasando al otro miembro, resulta

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi} \quad (12.75)$$

Definamos ahora una nueva transformación modal

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y} \quad (12.76)$$

donde \mathbf{y} es un vector de coordenadas modales de dimensión $2N \times 1$. Al derivar esta ecuación, se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{y}} \quad (12.77)$$

Sustituyendo las ecuaciones 12.76 y 12.77 en la 12.66, resulta

$$\boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y} \quad (12.78)$$

o bien

$$\dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y} \quad (12.79)$$

que, en virtud de la ecuación 12.75, se convierte en

$$\dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{y} \quad (12.80)$$

Este es un sistema de $2N$ ecuaciones diferenciales desacopladas que podemos escribir como

$$\dot{y}_i = \mu_i y_i \quad (12.81)$$

La integración de cada una de estas ecuaciones diferenciales de primer orden es muy sencilla. Se puede demostrar fácilmente que la solución de la ecuación i vale

$$y_i(t) = y_{i0} e^{\mu_i t} \quad (12.82)$$

donde y_{i0} es el valor inicial de y_i .

Una vez determinados los valores de $y_i(t)$, el vector $\mathbf{z}(t)$ se obtiene deshaciendo el cambio de variables de la ecuación 12.76. Finalmente, para obtener la respuesta $\mathbf{q}(t)$, se toman las N primeras componentes del vector $\mathbf{z}(t)$.

Aunque en este apartado nos hemos centrado en el estudio de las vibraciones libres, para no extendernos demasiado, al incluir las fuerzas exteriores no cambia el procedimiento de resolución.

12.3.3. Amortiguamiento viscoso general: integración numérica

El método visto hasta el momento, consistente en desacoplar las ecuaciones diferenciales del movimiento con ayuda de un conjunto de modos de vibración, se suele denominar *método de superposición modal*, y tiene varias ventajas que hace que su utilización sea muy extendida. Por una parte, la resolución permite al ingeniero mantener el sentido físico de los resultados parciales, pues la respuesta de cada modo de vibración tiene una representación física directa. Además, en muchos sistemas mecánicos la respuesta está dominada por los modos de frecuencia más baja, de manera que basta con calcular los primeros modos de vibración y hallar su solución.

Sin embargo, en algunos casos el método de superposición modal no es ventajoso, como por ejemplo en los problemas de impacto, en que la respuesta está dominada por los modos de frecuencia más alta, o bien cuando los sistemas son de gran tamaño y el cálculo de todos los modos de vibración puede convertirse en una tarea engorrosa. Por otra parte, en los problemas no lineales la técnica de superposición modal tampoco es ventajosa, ya que los coeficientes de inercia, rigidez y amortiguamiento son variables, por lo que también lo son los modos y las frecuencias.

La alternativa al método de superposición modal es la integración numérica de las ecuaciones diferenciales del movimiento. Existen muchos métodos, basados en fórmulas de diferencias finitas o similares, para convertir un problema continuo en el tiempo en otro discreto, que sólo debe ser resuelto en un número finito de instantes de tiempo. Un método muy común para la integración de los sistemas vibratorios es la regla trapezoidal, que utiliza la siguiente regla de derivación:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{x}_n + \dot{x}_{n+1}) \quad (12.83)$$

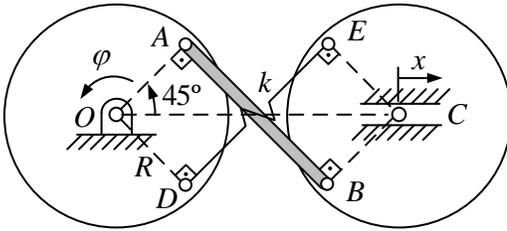


Figura 12.6

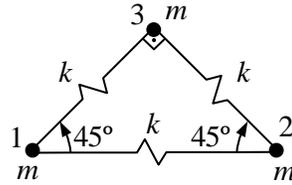


Figura 12.7

o bien, despejando \dot{x}_{n+1} ,

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t}(x_{n+1} - x_n) - \dot{x}_n \tag{12.84}$$

Particularizando la ecuación 12.63 para el instante t_{n+1} , se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}}_{n+1} = \mathbf{B} \mathbf{z}_{n+1} + \mathbf{R}(t_{n+1}) \tag{12.85}$$

Sustituyendo en ella la regla trapezoidal, resulta

$$\frac{2}{\Delta t}(\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n) - \dot{\mathbf{z}}_n = \mathbf{B} \mathbf{z}_{n+1} + \mathbf{R}(t_{n+1}) \tag{12.86}$$

y despejando \mathbf{z}_{n+1} , se obtiene

$$\mathbf{z}_{n+1} = \left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{B} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\Delta t} \mathbf{z}_n + \dot{\mathbf{z}}_n + \mathbf{R}(t_{n+1}) \right) \tag{12.87}$$

La ecuación 12.87 se puede utilizar para ir calculando los sucesivos valores de $\mathbf{z}(t)$ a lo largo del tiempo. Para calcular la respuesta $\mathbf{q}(t)$ nos quedamos únicamente con las N primeras componentes de $\mathbf{z}(t)$.

12.4. Problemas

Prob. 12.1 El sistema de dos grados de libertad de la figura 12.6 consta de dos discos sin masa unidos entre los puntos A y B por una barra de masa m y longitud $2R$, y entre los puntos D , y E por un resorte de rigidez k . La articulación C desliza horizontalmente sin rozamiento. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento en función de φ y x .

Prob. 12.2 La configuración de equilibrio de una molécula está representada en la figura 12.7 por tres átomos de igual masa m , situados en los

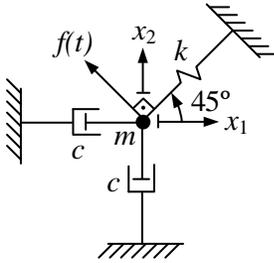


Figura 12.8

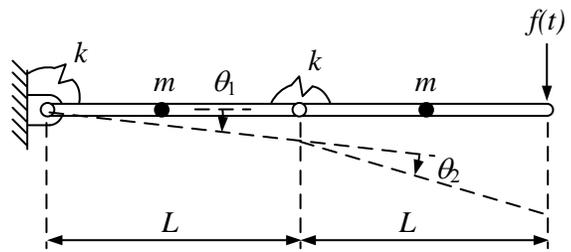


Figura 12.9

vértices de un triángulo rectángulo y unidos mediante muelles de igual rigidez k . Se pide 1) Obtener las ecuaciones del movimiento tomando como grados de libertad los desplazamientos x, y de cada átomo. 2) Si se toman como fijos los átomos 1 y 2, hallar las frecuencias y modos del sistema de dos grados de libertad resultante.

Prob. 12.3 El sistema de la figura 12.8 tiene dos grados de libertad indicados como x_1 y x_2 . La masa m está unida a dos amortiguadores de constante c y a un muelle de constante k . Hallar 1) Las ecuaciones diferenciales de las vibraciones libres. 2) Calcular las frecuencias y modos de vibración. 3) Hallar la respuesta del sistema cuando se aplica una fuerza $f(t) = e^{i\omega t}$ en la dirección indicada.

Prob. 12.4 Para simular el comportamiento dinámico del ala de un avión se va a emplear el modelo de la figura 12.9, compuesto por dos barras rígidas con masas puntuales concentradas en sus centros, y dos muelles de torsión de constantes k . Se pide 1) Hallar las ecuaciones del movimiento y las frecuencias y modos de vibración, dibujando estos últimos de modo aproximado. 2) Si se aplica una fuerza $f(t) = F \text{ sen } \omega t$ en el extremo, hallar la respuesta $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en función del tiempo.

Prob. 12.5 En el sistema de la figura 12.10 la masa m del disco es igual a la del bloque. Calcular 1) Las ecuaciones del movimiento en función de las variables x_1, x_2 y x_3 . 2) Las frecuencias naturales si $m = 1, R = 1, k = 100, c = 10$.

Prob. 12.6 La figura 12.11 representa esquemáticamente los apoyos de una máquina rotativa de $m_1 = 3 \text{ Tm}$, que se encuentra sometida a un

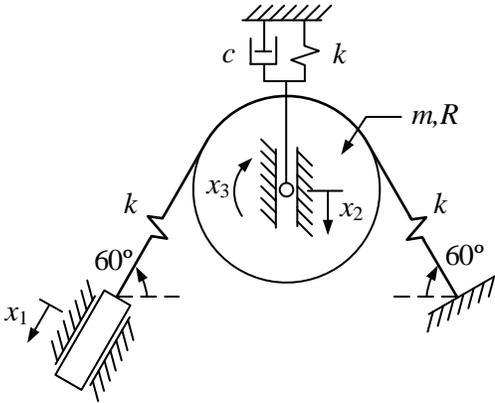


Figura 12.10

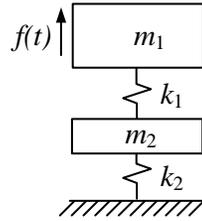


Figura 12.11

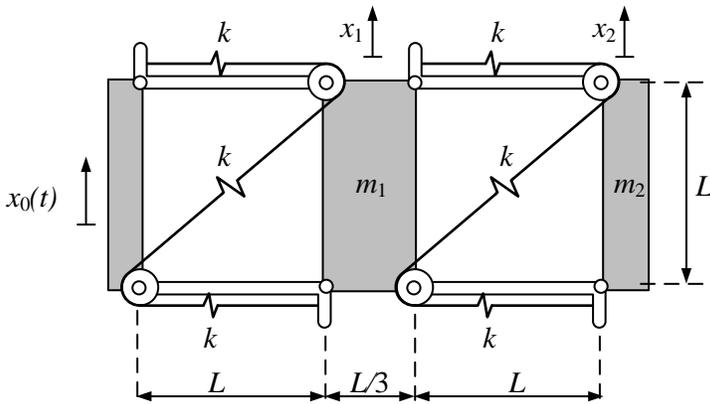


Figura 12.12

desequilibrio sinusoidal $f(t)$ de magnitud 50 kN a su velocidad de funcionamiento de 600 rpm. Dicha máquina está montada sobre una placa de hormigón de $m_2 = 9$ Tm con unas juntas elásticas de rigidez $k_1 = 4$ MN/m. El conjunto está soportado por unos flejes de acero de rigidez k_2 que flexionan 4 mm bajo el peso combinado de la máquina y la placa de hormigón. Encontrar las frecuencias naturales del sistema y predecir la amplitud de su vibración. Tomar $g = 9,8$ m/s².

Prob. 12.7 Para tomar planos de vídeo acompañando el movimiento de un objeto móvil, por ejemplo al seguir a una persona que camina, se utiliza un dispositivo mecánico cuyo cometido es aislar la cámara de vídeo de los

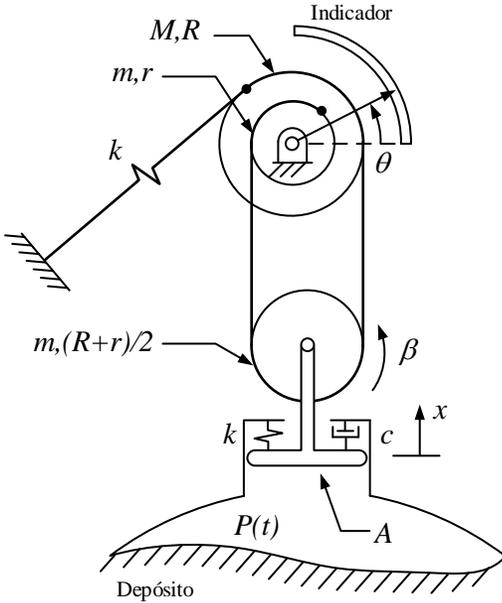


Figura 12.13

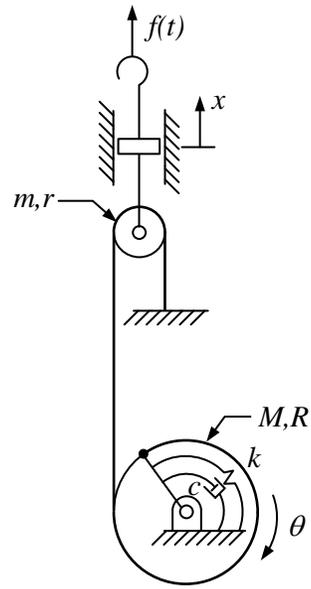


Figura 12.14

movimientos del portador. La figura 12.12 muestra esquemáticamente su estructura mecánica, consistente en dos cuadriláteros articulados unidos en serie, con muelles en la diagonal para soportar el peso de la cámara. Suponiendo que sólo dos elementos tienen masas m_1 y m_2 , y que el dispositivo se coloca en un plano horizontal, con los muelles sin tensión en la posición indicada, se pide 1) Utilizando las coordenadas x_1 y x_2 , obtener las ecuaciones del movimiento suponiendo que la base tiene un movimiento armónico conocido $x_0(t)$. 2) Tomando $m_1 = m_2 = 1$, $k = 300$, $L = \sqrt{13}$, determinar las frecuencias naturales del conjunto. Si la excitación se produce a frecuencia de 2 Hz, ¿cuál de las dos frecuencias naturales es más crítica? Nota: Las variables x_1 y x_2 son relativas, es decir, x_1 es el desplazamiento vertical respecto al elemento base y x_2 es el desplazamiento respecto al elemento m_1 .

Prob. 12.8 La figura 12.13 representa esquemáticamente el sistema mecánico de un sensor de presión. Por medio de un mecanismo de poleas se consiguen transformar los pequeños movimientos lineales x de una membrana en movimientos angulares θ de un puntero que indica las variaciones de presión del depósito. La polea superior está compuesta por dos cilindros

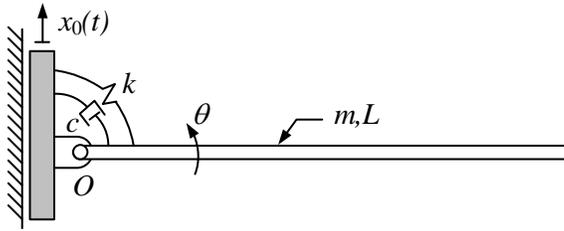


Figura 12.15

macizos solidarios, uno de ellos de masa M y radio R , y el otro de masa m y radio r . La polea inferior es también un cilindro macizo de de masa m y radio $(R+r)/2$. En el extremo del hilo inextensible hay colocado un muelle de rigidez k . Entre el hilo y las poleas hay rodadura. La parte del sistema que está en contacto con el fluido es una membrana de masa despreciable y sección A , cuya rigidez y amortiguamiento se representan mediante un muelle de constante k y un amortiguador de constante c . Se pide: 1) Expresar el desplazamiento x y el giro β en función del único grado de libertad θ . 2) Suponiendo que las variaciones de presión en el depósito son de la forma $P = P_0 e^{i\omega t}$, hallar el valor estacionario del movimiento del indicador $\theta(t)$, particularizando para los valores $M = 4$, $m = 2$, $R = 3$, $r = 1$.

Prob. 12.9 La figura 12.14 muestra un sensor de posición lineal, compuesto por un cable arrollado a una polea, un muelle de torsión y un sensor potenciométrico de giro. Al tirar del cable, se provoca un giro de la polea que, al estar conectada con el potenciómetro, proporciona una medida del desplazamiento del extremo del cable. Se quiere aumentar la resolución del sensor introduciendo una polea de radio r y masa m , mostrada en la figura, sobre la que se enrolla el cable, cuyo extremo se fija a la caja del sensor. El sensor dispone de un resorte de torsión de rigidez k unido a la polea de radio R y masa M . La fricción del conjunto polea-potenciómetro se puede modelizar por medio de un amortiguador de giro, de constante c , que ejerce un par proporcional a la velocidad angular. Sabiendo que se aplica una fuerza armónica $f(t) = F e^{i\omega t}$ en el enganche del sensor, calcular: 1) La ecuación diferencial del sistema en función de $\theta(t)$. 2) La amplitud del giro del potenciómetro en régimen permanente.

Prob. 12.10 Hallar la máxima oscilación angular de la barra de masa m y longitud L de la figura 12.15 cuando el soporte oscila verticalmente con un movimiento armónico conocido $x_0(t) = X_0 e^{i\omega t}$. En la posición de

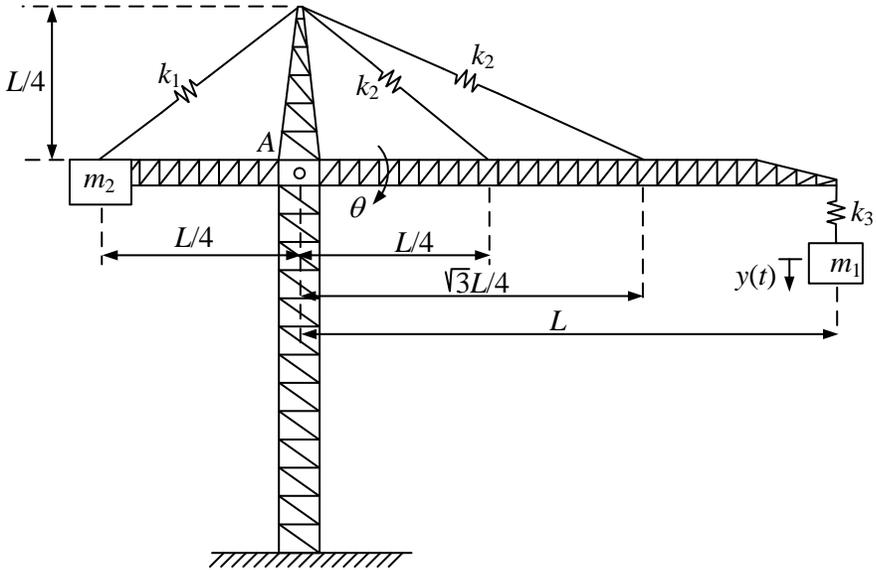


Figura 12.16

equilibrio estático la barra permanece horizontal. Datos: $L = 1$ m, $m = 1$ kg, $c = 1$ Ns/m, $k = 1$ N/m, $X_0 = 0,2$ m, $\omega = \sqrt{3}$ rad/s.

Prob. 12.11 En la grúa de la figura 12.16 se sabe que el muelle de rigidez k_3 se alarga 15 cm como consecuencia de la carga m_1 . Se pide: a) Hallar el valor de las masas m_1 y m_2 sabiendo que en la posición de equilibrio los muelles de rigidez k_1 y k_2 se encuentran sin deformación. b) Plantear las ecuaciones diferenciales del sistema en función de las variables $\theta(t)$ e $y(t)$. c) Calcular las frecuencias naturales del sistema. Datos: $g \approx 10$ m/s², $k_1 = 1,5 \cdot 10^5$ N/m, $k_2 = 2 \cdot 10^5$ N/m, $k_3 = 10^5$ N/m.

Capítulo 13

Soluciones a los problemas

Prob. 1.1

Fig. 1.27(a): Doble balancín

Fig. 1.27(b): Doble manivela

Fig. 1.27(c): Manivela-balancín

Prob. 1.2

Fig. 1.28: Watt

Fig. 1.29: Watt

Fig. 1.30: Watt

Fig. 1.31: Stephenson

Fig. 1.32: Stephenson

Prob. 1.3

Fig. 1.33: $G = 3$

Fig. 1.34: $G = 1$

Fig. 1.35: $G = 5$

Fig. 1.36: $G = 3$

Fig. 1.37: $G = 2$

Fig. 1.38: $G = 3$

Fig. 1.39: $G = 1$

Fig. 1.40: $G = 1$

Fig. 1.41: $G = 2$

Fig. 1.42: $G = 4$

Fig. 1.43: $G = 1$

Fig. 1.44: $G = 3$

Fig. 1.45: $G = 3$

Fig. 1.46: $G = 1$

Fig. 1.47: $G = 3$

Fig. 1.48: $G = 3$

Fig. 1.49: $G = 3$

Fig. 1.50: $G = 2$

Fig. 1.51: $G = 1$

Fig. 1.52: $G = 0$

Prob. 1.4

$$G = 1$$

Prob. 1.5

Fig. 1.54: $G = 1$

Fig. 1.55: $G = 5$

Fig. 1.56: $G = 3$

Fig. 1.57: $G = 3$

Fig. 1.58: $G = 6$

Fig. 1.59: $G = 2$

Fig. 1.60: $G = 2$

Prob. 2.1

$$v_P = 3093,74 \text{ mm/s}$$

Prob. 2.2

$$v_6 = 58,12 \text{ cm/s}$$

Prob. 2.3

$$v_B = 17,85 \text{ cm/s} \quad a_B = 15,69 \text{ cm/s}^2$$

Prob. 2.4

$$v = \frac{L}{2}$$

Prob. 2.5

$${}^a\mathbf{R}_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \quad {}^a\mathbf{R}_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$${}^b\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} -\cos 15 & -\operatorname{sen} 15 \\ \operatorname{sen} 15 & -\cos 15 \end{bmatrix}$$

Prob. 2.6

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \{\dot{\varphi}_2 \ 0 \ \dot{\varphi}_1\}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \{\ddot{\varphi}_2 \ \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \ \ddot{\varphi}_1\}^T$$

Prob. 2.7

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & -\operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Prob. 2.8

$$a) \mathbf{R}_{af} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{bf} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b) \gamma = 180^\circ, \beta = 0^\circ, \alpha = 90^\circ$$

$$c) \gamma = 0^\circ, \beta = 180^\circ, \alpha = 0^\circ$$

Prob. 2.9

$${}^0\mathbf{R}_a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Prob. 2.10

$${}^0\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Prob. 2.11

$${}^0\mathbf{R}_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$${}^b\mathbf{R}_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Prob. 3.2

$$F_1 = -11,12 \text{ N} \quad F_2 = 2371,7 \text{ N} \quad \tau_3 = 450 \text{ Nm}$$

Prob. 3.3

$$\tau = F L \operatorname{sen} \varphi \left(1 + \frac{\cos \varphi}{\cos \left(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} \right)} \frac{1}{2} \right)$$

$$\tau = F L - \frac{M L^2 \omega^2}{\sqrt{3}}$$

Prob. 3.4

$$\tau = 4 L \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(P + m \omega^2 L \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) \right)$$

Prob. 3.5

$$G = 2 \quad v_c = 4$$

Prob. 3.6

$$T_2 = 942,95 \text{ Nm} \quad \omega_3 = 9,54 \text{ rad/s}$$

$$v_r = 27,31 \text{ cm/s} \quad \alpha_3 = 715,99 \text{ rad/s}^2$$

Prob. 3.7

$$F = \frac{2 M g}{\tan \varphi} \quad F = 2 M g + 4 m g - \frac{\sqrt{2}}{L} v^2 \left(8 M + \frac{32}{3} m \right)$$

Prob. 3.8

$$\omega_{AB} = \frac{v\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v}{L}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{v^2}{L^2} (2 + \sqrt{2})$$

$$\alpha_{CB} = \frac{v^2}{L^2} (2\sqrt{2} + 1)$$

$$a_{Dx} = \frac{v^2}{2L}$$

$$a_{Dy} = -\frac{v^2}{L} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\tau = -\frac{M v^2}{3} (3 + 2\sqrt{2}) - 5 M g L \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$F = 7 M g - \frac{M v^2}{3 L} (1 + 2\sqrt{2})$$

Prob. 3.9

$$\ddot{x}_1 = \frac{3}{4m} (12m - 300)$$

Prob. 3.10

$$\alpha_{BC} = 0$$

$$\tau = \frac{T R}{2(R+r)} + (M+m) \frac{g R}{2}$$

Prob. 3.11

$$\alpha_{BC} = 0$$

$$\omega_{rodillo} = \frac{\omega R}{r}$$

$$\alpha_{rodillo} = \frac{\omega^2}{r} \left(\frac{R}{2} + \frac{R^2}{4(R+r)} \right)$$

$$\tau = (M+m)g \frac{R}{2} + \frac{TR}{2(R+r)} + \frac{mR^2\omega^2(3R+2r)}{8(R+r)}$$

Prob. 3.12

$$T_1 = 7,5 \text{ Nm}$$

Prob. 3.13

$$a_0 = 1,8538 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 - T_2 = 0,9269 \text{ N}$$

Prob. 3.14

$$\alpha_{BC} = 0$$

$$\alpha_{rodillo} = \frac{\omega^2(R+r)}{r}$$

$$\tau = Mg \frac{R+r}{2} - \frac{3}{2}m\omega^2(R+r)^2$$

Prob. 3.15

$$\tau = \frac{5}{3}M\omega^2R$$

Prob. 3.16

$$\alpha_{AB} = \frac{2v^2}{\sqrt{3}L^2}$$

$$\alpha_{AB} = \sqrt{3} \frac{v^2}{L^2}$$

$$F = -14Mg + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{Mv^2}{L}$$

Prob. 3.17

$$M_1 = M_2 = \frac{35}{6}mL$$

Prob. 3.18

$$\dot{s}_1 = \frac{1}{2} + \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

$$\dot{s}_2 = \frac{L}{2\sqrt{3}} - 1$$

$$\dot{s}_3 = \frac{1}{2} + \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

$$F_1 = -\frac{1}{3} \left(m + \frac{2\sqrt{3}}{L} I \right)$$

$$F_2 = \frac{2}{3} \left(m - \frac{\sqrt{3}}{L} I \right)$$

$$F_3 = -\frac{1}{3} \left(m + \frac{2\sqrt{3}}{L} I \right)$$

Prob. 3.19

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{r^2 (M + 6m)} (\tau_0 - (M + 4m) g r)$$

$$\tau = (M + 4m) g r$$

Prob. 3.20

$$\omega_{OA} = \frac{v}{L\sqrt{3}}$$

$$\omega_{OD} = \frac{v}{2L\sqrt{3}}$$

$$\alpha_{OA} = \frac{v^2}{6\sqrt{3}L^2}$$

$$\alpha_{OD} = \frac{7v^2}{12L^2\sqrt{3}}$$

$$F_x = -\frac{7}{288} \frac{m_1 v^2 \sqrt{3}}{L}$$

$$F_y = \frac{4m_2 v^2 - 72m_2 g L - 7m_1 v^2}{288L}$$

Prob. 3.21

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{\varphi} r \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m}{2} + M\right)}{\left(\frac{m}{3} + M\right) L}$$

$$\ddot{\varphi} = -8 \frac{(m + 3M)(-2\tau_0 + 2grm + grM)}{r^2(23m^2 + 76mM + 12M^2)}$$

Prob. 3.22

$$a_0 = \frac{F}{411m}$$

Prob. 3.23

$$\dot{\theta} = \frac{v\sqrt{2}}{L}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{r}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2v^2}{L^2}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2\sqrt{2}v^2}{rL}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgL\frac{\sqrt{2}}{4} + MgL\frac{\sqrt{2}}{2} - \tau}{I + \frac{mL^2}{4} + \frac{ML^2}{2}}$$

$$\ddot{\phi} = 0$$

Prob. 3.24

$$T = 2\sqrt{3}F$$

Prob. 3.25

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{h}$$

$$\ddot{x} = \frac{Ra}{r} \frac{\tau - mgr}{mR^2 + Ma^2}$$

$$t = \frac{h}{r\omega_0 \left(1 - \frac{mgr}{\tau_0}\right)} + \frac{dR - ha}{ra\omega_0 \left(1 - \frac{r}{4R}\right)}$$

Prob. 3.26

$$T = \frac{Mg}{2}$$

$$F = Mg \frac{\sqrt{3}}{6} (1 + \sqrt{2})$$

Prob. 3.27

$$N = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{Mg}{2}$$

$$\mu \geq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} = 0,7174$$

Prob. 3.28

$$a_B = \frac{60\sqrt{3}}{203}g$$

Prob. 3.29

$$\omega_p = \frac{v}{2L \operatorname{sen} 15}$$

$$\omega_a = \frac{v \cos 15}{\operatorname{sen} 15} \frac{1}{2L\sqrt{2}}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{5Mg - F\sqrt{2}/2}{26ML}$$

Prob. 3.30

$$\frac{\omega_4}{\omega_t} = \frac{3}{14}$$

$$\alpha_t = \frac{\tau}{(I_r + M R^2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-3})}$$

Prob. 3.31

$$\dot{x} = \sqrt{3} L \dot{\theta}$$

$$v_{Gx} = \dot{x}$$

$$v_{Gy} = \dot{\theta} \frac{2L}{3}$$

$$\ddot{x} = \frac{54F}{181M} - \frac{24g\sqrt{3}}{181}$$

Prob. 3.32

$$\dot{x}_A = \dot{\varphi} R$$

$$\dot{x}_C = \dot{\varphi} \left(R + \frac{6r}{5} \right)$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{\varphi}}{5}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}gr}{5R^2 + \frac{12r^2}{5} + 6rR}$$

Prob. 3.33

$$\omega_{BC} = \frac{2\dot{\varphi}r}{L}$$

$$v = \dot{\varphi} R$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{gr}{4r^2 + R^2 - 2\sqrt{3}Rr}$$

Prob. 3.34

$$\omega_{AB} = 0$$

$$\omega_{CD} = \frac{v}{2L}$$

$$a = \frac{F}{\frac{7M}{4} + \frac{11m}{6} + \frac{I_0}{L^2}}$$

Prob. 3.36

$$G = 1$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = \omega_5 = \frac{2v\sqrt{2}}{3L}$$

$$\omega_3 = \omega_6 = \omega_7 = 0$$

$$v_J = \frac{4v}{3}$$

$$F = \frac{4}{3}P$$

Prob. 3.37

$$\omega_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3L}\dot{x}_1$$

$$a_1 = 0$$

$$F_1 = 3Mg + 8\frac{M}{L}\dot{x}_1\dot{x}_2$$

$$F_2 = \frac{Mg}{2} - \frac{4M}{L}\dot{x}_1^2$$

Prob. 3.38

$$\tau_0 = Mg\frac{R}{3}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\ddot{\varphi}_2 = \frac{MgR/3}{(m+M)R^2 + I}$$

Prob. 3.39

$$\tau_0 = \frac{3MgR}{32}$$

$$v_A = \frac{R}{4}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \rightarrow$$

$$v_{Bx} = \dot{\varphi}_1 R \rightarrow$$

$$v_{By} = \frac{R}{4}(\dot{\varphi}_2 - 3\dot{\varphi}_1) \uparrow$$

Prob. 3.40

$$\ddot{\theta} = \frac{FR(1 + tg15)}{I_0 + \frac{mL^2}{\cos^2 15}}$$

Prob. 3.41

$$\ddot{\theta} = \frac{FR}{\frac{28}{15}mL^2 + \frac{5}{7}I_0}$$

Prob. 3.42

$$\omega_L = 2\sqrt{3}\omega$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I + 36i}$$

Prob. 3.43

$$\tau_a = \frac{8}{3}FL$$

$$\tau_c = 2FL$$

$$\ddot{\phi} = \frac{9\tau}{32mL^2} - \frac{6F}{8mL}$$

Prob. 3.44

$$\ddot{\phi}_0 = \frac{\tau}{I_0 + \frac{3mL^2}{5}}$$

$$\ddot{x}_0 = \frac{3L\sqrt{2}}{10} \frac{\tau}{I_0 + \frac{3mL^2}{5}}$$

Prob. 3.45

$$\omega_e = \frac{4\tau}{9c}$$

$$\alpha_e = \frac{4}{9} \frac{\tau}{m_2R^2 + 4I_2 + I_3}$$

Prob. 3.46

$$M = m$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{3F}{2mL}$$

Prob. 3.47

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}v}{L}$$

$$\omega_2 = \frac{v}{L}$$

$$\alpha_1 = \frac{v^2}{L} (3\sqrt{3} - 4)$$

$$\alpha_2 = \frac{v^2}{L^2} (3 - \sqrt{3})$$

$$F = Mg (\sqrt{3} - 1)$$

Prob. 3.48

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau \frac{R}{r}}{I + 2MR^2}$$

Prob. 3.49

$$\ddot{\varphi} = \frac{112}{423} \frac{b}{a} \frac{1}{mR^2} \tau - \frac{9}{47} \sqrt{3} \frac{g}{R}$$

Prob. 3.50

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\varphi}}{2}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{3}{4ML^2} \left(\tau - Mg \frac{L}{2} \right)$$

Prob. 3.51

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2v^2}{L^2}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \sqrt{3} \frac{v^2}{L^2}$$

$$\tau_1 = -mv^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$\tau_2 = -mv^2 \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Prob. 3.53

$$F = Mg\sqrt{3}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{F - Mg\sqrt{3}}{3ML}$$

Prob. 3.54

$$F = Mg\sqrt{3}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{F - Mg\sqrt{3}}{3ML}$$

Prob. 3.55

$$\tau = \frac{3FR}{4000}$$

Prob. 3.56

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{5}$$

$$T = -\frac{5}{2}F_x$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{7R}{5} \frac{F_x}{I}$$

Prob. 3.57

$$\ddot{x}_0 = \frac{\tau}{2Mr}$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{\tau}{20r}}$$

Prob. 3.58

$$\ddot{x}_0 = \frac{\tau}{2Mr} - \frac{g}{2}$$

$$\tau_e = Mgr$$

Prob. 4.2

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -16/7 \\ 12/7 \\ -13/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prob. 4.3

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Prob. 4.4

$$\omega_1 = 0$$

Prob. 4.5

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 2 \\ -4/\sqrt{13} \\ 4/\sqrt{13} \end{Bmatrix}$$

Prob. 4.6

$$\mathbf{q}_{(1)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -17/14 \\ \sqrt{2} - \sqrt{2}/28 \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{2}/28 \end{Bmatrix}$$

Prob. 4.7

$$\dot{x}_2 = -100$$

$$\ddot{x}_2 = 150$$

Prob. 4.8

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Prob. 4.9

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -7\sqrt{3}/2 \\ -3/2 \\ -7\sqrt{3}/2 \\ -3/4 \\ 9\sqrt{3}/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prob. 4.10

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prob. 4.11

$$\omega_1 = \frac{3\sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}} \frac{v}{L}$$

Prob. 4.12

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Prob. 5.1

$$\text{a) } \mathbf{M} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} \frac{M}{2} + \frac{I_G}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_G}{L^2} & \frac{M}{2} \\ 0 & \frac{M}{2} + \frac{I_G}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{M}{2} & \frac{I_G}{L^2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{I_G}{M^2} & -\frac{M}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M}{2} + \frac{I_G}{L^2} & 0 \\ \frac{M}{2} & \frac{I_G}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M}{2} + \frac{I_G}{L^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$\text{b) } \mathbf{M} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} M + \frac{I_G}{L^2} & 0 & -\frac{I_G}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M + \frac{I_G}{L^2} & 0 & -\frac{I_G}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{I_G}{L^2} & 0 & \frac{I_G}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_G}{L^2} & 0 & \frac{I_G}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Prob. 5.3

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ \varphi \end{array} \quad \mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ -8/3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad \ddot{\varphi} = \frac{1}{12} \quad \ddot{x}_3 = -\frac{1}{6}$$

$$\mathbf{Q}_{\text{deslizadera}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{3} \\ 0 \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{La reacción vale } R_1 = \frac{5}{3}$$

Prob. 5.4

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & y_1 & y_2 & \varphi \\ \hline 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \varphi \end{array} \quad \mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 8/7 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} = \left\{ \begin{array}{l} -10000 \\ -10000 \\ 10029,15 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \ddot{\varphi} = 2388,13$$

Prob. 5.5

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & 2 \\ \frac{M}{2} + \frac{m}{3} & 0 & \frac{m}{6} & 0 \\ 0 & \frac{M}{2} + \frac{m}{3} & 0 & \frac{m}{6} \\ \hline \frac{m}{6} & 0 & \frac{2m}{3} & 0 \\ 0 & \frac{m}{6} & 0 & \frac{2m}{3} \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad \mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{F}{5} \\ 0 \\ -\frac{4F}{5} \end{array} \right\}$$

Prob. 5.6**Prob. 5.7**

$$\mathbf{M} = m \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & 2 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ \hline -5 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 13 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad \mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 5 \end{array} \right\}$$

Prob. 5.8

$$\mathbf{M} = m \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} & 1 & & 2 & x_3 & \varphi & s & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ x_3 \\ \varphi \\ s \end{array} \quad \mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{-2} \\ \frac{2}{-2} \\ \frac{-2}{1} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ x_3 \\ \varphi \\ s \end{array}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{6m}(F - mg)$$

Prob. 5.9

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{array} \right\} \quad \mathbf{R} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ F \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{s}_1 = 0,7390 \frac{F}{m} \quad \ddot{s}_2 = 1,0103 \frac{F}{m}$$

Prob. 5.10

Prob. 5.11

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{y}_1 = 2,1253 \quad \ddot{\varphi} = -1,0671$$

Prob. 5.12

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 500\sqrt{3} \\ 500 \\ 0 \\ -Mg \end{Bmatrix} \quad \ddot{x}_1 = -14,84 \quad \ddot{x}_2 = 0$$

Prob. 5.13

Prob. 5.14

Prob. 9.1

$$z_5 = 28, \quad z_8 = 30 \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = -36,88$$

$$x_5 = -x_6 = -0,064 \quad (\text{para evitar la interferencia de tallado})$$

Prob. 9.2

$$z_1 = 52, \quad z_6 = 98 \quad \frac{\omega_s}{\omega_e} = -0,448$$

Prob. 9.3

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{(z_1 + z_2) z_5 z_3}{z_2 (z_4 z_6 + z_4 z_5 + z_5 z_3)}$$

Prob. 9.4

$$\begin{aligned} \frac{\omega_s}{\omega_e} &= -\frac{4}{3} & z_1 &= 18, z_2 = 32, z_3 = 82, z_4 = 18, z_5 = 32 \\ x_4 + x_5 &= 0,536 & \psi_a &= 20,375 \end{aligned}$$

Prob. 9.5

$$\frac{\omega_8}{\omega_1} = \frac{z_5 z_7}{z_6 z_8} \left(1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \right) - \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

Prob. 9.6

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1,6356$$

Prob. 9.7**Prob. 9.8**

$$z_3 = 30, z_4 = 40, z_5 = 30, z_6 = 42, z_7 = 28$$

Prob. 9.9

$$z_3 = 56, z_4 = 12 \quad x_1 + x_2 = 1,101$$

Prob. 9.10

$$\frac{\omega_2}{\omega_t} = \frac{1}{101}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_t} = -\frac{1}{99}$$

Prob. 9.11

$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = 2,16 \quad F_4 = 475,25 \text{ N}$$

Prob. 9.12

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{z_5}{z_1} \frac{z_1 - z_6}{z_5 - z_6} \quad \frac{\omega_B}{\omega_C} = -\frac{z_8 z_{10}}{z_9 z_7}$$

$$\frac{\omega_B}{\omega_E} = \left(-\frac{z_8 z_{10}}{z_9 z_7} \right)^3 \quad \frac{\omega_A}{\omega_E} = \frac{z_5}{z_1} \frac{z_1 - z_6}{z_5 - z_6} \left(-\frac{z_8 z_{10}}{z_9 z_7} \right)^3$$

Prob. 9.13

$$\text{a) } \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{13}{28}$$

$$\text{b) } \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{28}{13}$$

Prob. 9.14

$$\frac{\omega_t}{\omega_1} = -\frac{1}{2} \quad \frac{\omega_4}{\omega_t} = \frac{2}{3} \quad \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{1}{3}$$

Prob. 11.1

$$|F_c| = \frac{cka^2\omega\frac{\sqrt{2}}{2}X}{\sqrt{(-mb^2\omega^2 + ka^2)^2 + \left(\frac{ca^2\omega}{2}\right)^2}}$$

Prob. 11.2

$$\omega_n^2 = \frac{1}{m} \left(k_1 - \frac{k_1^2 a^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2} \right)$$

Prob. 11.3

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \theta) + \frac{mg}{k}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{1}{\omega_d^2} \left(\sqrt{2gh} - \frac{\xi g}{\omega_n}\right)^2} \quad \tan \theta = -\frac{\omega_n^2 \left(\sqrt{2gh} - \frac{\xi g}{\omega_n}\right)}{\omega_d g}$$

$$\text{En } t = 2 \text{ s, } x(t) \approx \frac{mg}{k}$$

Prob. 11.4

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{3m}} \quad |\theta| = \frac{\frac{F}{L^2}}{\sqrt{(-3m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}}$$

Prob. 11.5

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} B \cos(\omega_d t - \psi) + A$$

$$\tan(\psi) = -\frac{\left(\frac{mv}{m+M}\right) - \xi\omega_n A}{\omega_d A} \quad B = -\frac{A}{\cos(\psi)}$$

Prob. 11.6

$$x(t) = \frac{(F - ic\omega Y - kY)/k}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta} e^{i\omega t} \quad X = 1,04$$

Prob. 11.9

$$I\ddot{\theta} + 2kL^2\theta = -kaL^2 \cos(\bar{\omega}vt) \quad \omega_n = 30 \text{ rad/s} \quad v = 59,54 \text{ rad/s}$$

Prob. 11.10

$$x(t) = \frac{(M+m)g}{k} - \frac{\frac{g}{k}\left(\frac{M}{2} + m\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \theta)$$

Prob. 11.12

$$\left(\frac{15 + 2\sqrt{2}}{3}\right) ML^3 \ddot{\varphi} + cL^2 \dot{\varphi} + (k_1 L^2 + 4k_2) \varphi = 0$$

Prob. 11.14

$$(16ma^2 + I)\ddot{\theta} + a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{12}\right)^2 (c\dot{\theta} + k\theta) = 4aF e^{i\omega t}$$

$$|\theta| = \frac{4aF}{\sqrt{\left(- (16ma^2 + I)\omega^2 + ka^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{12}\right)^2\right)^2 + \left(c\omega a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{12}\right)^2\right)^2}}$$

$$|F| = a\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{12}\right) |\theta|$$

Prob. 11.15

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \theta) + \frac{mg}{k}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2gh}}{\omega_d} - \frac{\xi\omega_n mg}{k\omega_d}\right)^2} \quad \tan \theta = -\frac{mg}{kA}$$

Rebota en $t = 0,35$ s, cuando la reacción entre la placa y el suelo cambia de signo.

Prob. 11.16

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Prob. 11.18

$$\theta = \frac{8y}{r}$$

$$\underbrace{\left(M + \frac{64}{r^2} I_1 + \frac{z_1^2}{z_2^2} \frac{64}{r^2} I_2 + \frac{64}{r^2} I_3 \right)}_{\bar{M}} \ddot{y} + \underbrace{2c_1}_{\bar{c}} \dot{y} + \underbrace{2(k_1 + k_2)}_{\bar{k}} y = \frac{8}{r} T e^{i\omega t}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{M}}} \quad y(t) = \frac{\frac{8}{r} \tau(t)}{\sqrt{(-\bar{M}\omega^2 + \bar{k})^2 + \bar{c}^2 \omega^2}}$$

Prob. 11.19

$$\dot{\theta} = -86,67\dot{\beta}$$

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -c \frac{R\dot{\theta}}{2 \cdot 86,67} - k \frac{R\theta}{2 \cdot 86,67}$$

$$\omega_n = \sqrt{k/M}$$

Prob. 11.20

$$M = 2m$$

$$\left(\frac{3mL^2}{8} + I_G \right) \ddot{\theta} + (cL^2 + c_T) \dot{\theta} + kL^2 \theta = -FL$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kL^2}{\left(\frac{3mL^2}{8} + I_G \right)}}$$

$$|x| = \frac{FL}{\sqrt{\left(kL^2 - \left(\frac{3mL^2}{8} + I_G \right) \omega^2 \right)^2 + (cL^2 + c_T)^2 \omega^2}}$$

Prob. 12.1

$$\omega_{AB} = \frac{\dot{x}}{2R\sqrt{2}} \quad \omega_{EC} = \frac{\dot{x}\sqrt{2}}{2R} + \dot{\varphi} \quad mR^2\ddot{\varphi} = 0$$

$$\frac{m\ddot{x}}{6} + 2kx = 0$$

Prob. 12.2

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Prob. 12.3

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1 = 0, \quad \mathbf{A}_1^T = \{ 1 \quad -1 \}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \mathbf{A}_2^T = \{ 1 \quad 1 \}$$

$$y(t) = \frac{e^{i\omega t}}{\omega(m\omega - ic)}$$

Prob. 12.4

$$\frac{mL^2}{4} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = 0,367 \frac{k}{mL^2} \quad \mathbf{A}_1^T = \{ 3,30 \quad 1 \}$$

$$\omega_2^2 = 43,63 \frac{k}{mL^2} \quad \mathbf{A}_2^T = \{ -0,302 \quad 1 \}$$

Prob. 12.5

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & R \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ R & 0 & 2R^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = 0,159 \quad \mathbf{A}_1^T = \{ 0,880 \quad 0,325 \quad -0,458 \}$$

$$\omega_2^2 = 2,727 \quad \mathbf{A}_2^T = \{ -0,241 \quad 0,917 \quad 0,378 \}$$

$$\omega_3^2 = 4,614 \quad \mathbf{A}_3^T = \{ 0,284 \quad -0,116 \quad 0,926 \}$$

Prob. 12.7

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = -\ddot{x}_0 \begin{Bmatrix} m_1 + m_2 \\ m_2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_1 = 0,69 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 1,82 \text{ Hz} \quad \omega_2 \text{ es más crítica por estar más cerca de los } 2 \text{ Hz.}$$

Prob. 12.8

$$25\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + 10k\theta = P_0 A e^{i\omega t}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{5}}$$

$$\theta(t) = \frac{P_0 A}{-25\omega^2 + ic\omega + 10k} e^{i\omega t}$$

Prob. 12.9

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = -\frac{mL\omega^2}{2} X_0 e^{i\omega t} \quad |\theta| = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

Prob. 12.11

$$m_1 = 1500 \text{ kg} \quad m_2 = 6000 \text{ kg}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{m_2}{16} & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (2k_1 + 5k_2 + 64k_3)/64 & -k_3/L \\ -k_3/L & k_3/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\omega_1 = 19,43 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 3,09 \text{ rad/s}$$