

# Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural

Juan Tomás Celigüeta Lizarza

*Dr. Ingeniero Industrial*

*Profesor de Análisis Estructural de la Escuela Superior de  
Ingenieros de San Sebastián*

**tecnun**

CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA  
NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA  
Escuela Superior de Ingenieros • Ingeniarien Goi Mailako Eskola

© Juan Tomás Celigüeta Lizarza

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita del titular del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

ISBN: 84-921970-2-1

Depósito Legal: SS-42/2000

Primera edición, Febrero 2000.

Segunda edición, Septiembre 2004.

Tercera edición, Septiembre 2008.

Cuarta edición, Marzo 2011.

Impreso en España - *Printed in Spain*

Imprime: UNICOPIA C.B.

M. Lardizábal, 13

20018 San Sebastián - Gipuzkoa

*Para Carmen, José Mari,  
Iñigo y Coro*



# Contenido

<b>1. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas discretos y sistemas continuos	1
1.2. Hipótesis de discretización	2
1.3. Funciones de interpolación	6
1.4. Criterios de convergencia	8
<b>2. ECUACIONES GENERALES DEL MEF</b>	<b>15</b>
2.1. Campo de deformaciones	15
2.2. Deformaciones unitarias	16
2.3. Estado de tensiones. Ecuación constitutiva	18
2.4. Ecuación de equilibrio de un elemento	19
2.5. Ecuación de equilibrio del conjunto	23
2.6. Condiciones de ligadura	24
2.7. Energía potencial total	24
<b>3. ELASTICIDAD UNIDIMENSIONAL</b>	<b>26</b>
3.1. Introducción	26
3.2. Elemento de dos nudos	27
3.2.1 Elemento con área variable	29
3.2.2 Tensiones	29
3.3. Funciones de interpolación	30
3.4. Formulación isoparamétrica	33
3.4.1 Interpolación de deformaciones	34
3.4.2 Deformaciones unitarias. Matriz <b>B</b>	34
3.4.3 Matriz de rigidez	35

3.4.4	Vector de fuerzas nodales equivalentes	35
3.5.	Elemento isoparamétrico de tres nudos	36
<b>4.</b>	<b>ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL</b>	<b>39</b>
4.1.	Introducción	39
4.2.	Funciones de interpolación	40
4.3.	Deformaciones unitarias	41
4.4.	Estado de tensiones. Ecuación constitutiva	42
4.5.	Deformaciones unitarias iniciales. Temperaturas	44
4.6.	Elemento triangular	44
4.7.	Elemento rectangular	48
4.8.	Funciones de interpolación de tipo $C^0$	51
4.8.1	Elementos rectangulares. Formulación Serendipity	51
4.8.2	Elementos rectangulares - Interpolación de Lagrange	56
4.8.3	Elementos triangulares	57
4.9.	Formulación isoparamétrica	60
4.9.1	Interpolación de coordenadas	61
4.9.2	Matriz de rigidez	63
4.9.3	Fuerzas de volumen	65
4.9.4	Fuerzas de superficie	66
4.9.5	Elementos triangulares	67
4.10.	Conformabilidad geométrica	68
4.11.	Requerimientos de convergencia	70
4.12.	Elemento cuadrilátero de cuatro nudos no conforme	72
4.13.	Elemento plano híbrido de cuatro nudos	74
4.13.1	Deformaciones unitarias	76
4.13.2	Interpolación de tensiones	76
4.13.3	Ecuación de equilibrio	79
4.14.	Ejemplos. Comparación entre formulaciones	80
4.14.1	Patch test	80
4.14.2	Convergencia	82

4.14.3	Test de Cook	84
<b>5.</b>	<b>ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL</b>	<b>85</b>
5.1.	Introducción	85
5.2.	Campo de desplazamientos	85
5.3.	Deformaciones unitarias	86
5.4.	Relación tensión - deformación unitaria	88
5.5.	Tipos de elementos	89
5.5.1	Elementos prisma rectangular	89
5.5.2	Elementos tetraedro	91
5.5.3	Elementos prisma triangular	93
5.6.	Formulación isoparamétrica	94
<b>6.</b>	<b>PROBLEMAS CON SIMETRÍA DE REVOLUCIÓN</b>	<b>99</b>
6.1.	Introducción	99
6.2.	Funciones de interpolación	100
6.3.	Deformaciones unitarias	101
6.4.	Estado de tensiones. Ecuación constitutiva	103
6.5.	Temperaturas. Deformaciones unitarias iniciales	103
6.6.	Formulación isoparamétrica	104
6.6.1	Matriz de rigidez	105
6.6.2	Fuerzas de volumen	106
6.6.3	Fuerzas de superficie	107
6.6.4	Fuerzas de línea	108
6.7.	Cargas sin simetría de revolución	109
6.7.1	Campo de desplazamientos	109
6.7.2	Deformaciones unitarias	110
6.7.3	Interpolación de desplazamientos	112
6.7.4	Estado de tensiones	114
6.7.5	Energía elástica de deformación	114
6.7.6	Matriz de rigidez	116
6.7.7	Fuerzas nodales equivalentes	116

6.7.8	Ecuaciones de equilibrio	118
<b>7.</b>	<b>FLEXIÓN DE PLACAS PLANAS</b>	<b>120</b>
7.1.	Introducción	120
7.2.	Teoría clásica de flexión de placas	120
7.2.1	Estado de deformación	122
7.2.2	Deformaciones unitarias	123
7.2.3	Estado de tensiones	123
7.2.4	Esfuerzos internos	126
7.2.5	Relación fuerza deformación	127
7.2.6	Deformaciones unitarias de origen térmico	128
7.2.7	Ecuaciones de equilibrio	129
7.2.8	Relación entre tensiones y esfuerzos	131
7.2.9	Energía elástica de deformación	132
7.2.10	Condiciones de contorno	133
7.3.	Elemento placa rectangular de cuatro nudos	138
7.3.1	Campo de desplazamientos	138
7.3.2	Deformaciones unitarias	140
7.3.3	Matriz de rigidez	140
7.3.4	Vector de fuerzas nodales equivalentes	141
7.4.	Requerimientos de convergencia	141
7.5.	Elementos triangulares incompatibles	144
7.6.	Elementos conformes	145
<b>8.</b>	<b>FLEXIÓN DE PLACAS CON ENERGÍA DE ESFUERZO CORTANTE</b>	<b>147</b>
8.1.	Introducción	147
8.2.	Estado de deformación	147
8.3.	Relación tensión deformación	150
8.4.	Esfuerzos internos	151
8.5.	Ecuaciones de equilibrio	151
8.6.	Expresión de la energía elástica	152
8.7.	Elementos finitos para placas con energía de cortante	153

8.7.1	Funciones de interpolación	153
8.7.2	Interpolación de coordenadas.	154
8.7.3	Deformaciones unitarias	155
8.7.4	Ecuación de equilibrio	156
8.7.5	Matriz de rigidez	156
8.7.6	Fuerzas nodales	158
8.8.	Bloque por cortante	161
8.9.	Elemento de 4 nudos con integración reducida	162
8.10.	Elemento de 4 nudos con campo de cortante impuesto	164
8.10.1	Relaciones analíticas	167
8.11.	Elemento placa híbrido de 4 nudos	169
8.11.1	Deformaciones unitarias	170
8.11.2	Campo interpolado de deformaciones unitarias	171
8.11.3	Justificación de la interpolación de esfuerzos internos	172
8.11.4	Interpolación de esfuerzos interiores	175
8.11.5	Ecuación de equilibrio	176
8.12.	Ejemplos	177
8.12.1	Patch test	177
8.12.2	Influencia del espesor de la placa	178
8.12.3	Placa apoyada con carga uniforme	179
<b>9.</b>	<b>FLEXIÓN DE VIGAS PLANAS</b>	<b>181</b>
9.1.	Introducción	181
9.2.	Resumen de la teoría clásica de flexión de vigas	181
9.2.1	Deformaciones	181
9.2.2	Deformaciones unitarias	182
9.2.3	Ecuación constitutiva	182
9.2.4	Distribución de temperatura	183
9.2.5	Ecuaciones de equilibrio	183
9.3.	Teoría clásica. Resolución por el MEF	183
9.3.1	Interpolación de deformaciones	183

9.3.2	Matriz <b>B</b>	185
9.3.3	Matriz de rigidez	185
9.3.4	Fuerzas aplicadas sobre el elemento	186
9.3.5	Fuerzas debidas a las temperaturas	187
9.4.	Flexión de vigas con energía de cortante. Teoría de Timoshenko	187
9.4.1	Campo de desplazamientos	187
9.4.2	Deformaciones unitarias	188
9.4.3	Ecuación constitutiva. Estado de tensiones	189
9.4.4	Funciones de interpolación	189
9.4.5	Matriz <b>B</b>	189
9.4.6	Matriz de rigidez	190
9.4.7	Factor de rigidez a cortadura	190
9.4.8	Elemento de dos nudos	191
9.4.9	Elemento de tres nudos	194
9.4.10	Ejemplo	195
<b>10.</b>	<b>CÁSCARAS</b>	<b>196</b>
10.1.	Introducción	196
10.2.	Utilización de elementos planos	196
10.3.	Utilización de elementos sólidos tridimensionales	198
10.4.	Utilización de elementos cáscara	199
10.5.	Formulación basada en el continuo. Elementos de cuatro lados	200
10.5.1	Definición geométrica	200
10.5.2	Campo de deformaciones	203
10.5.3	Deformaciones unitarias	205
10.5.4	Estado de tensiones. Relación tensión - deformación unitaria	209
10.5.5	Matriz de rigidez	213
10.5.6	Elementos de tres lados	213
10.6.	Formulación basada en la teoría de cáscaras	214
10.6.1	Definición geométrica	214
10.6.2	Deformaciones	217

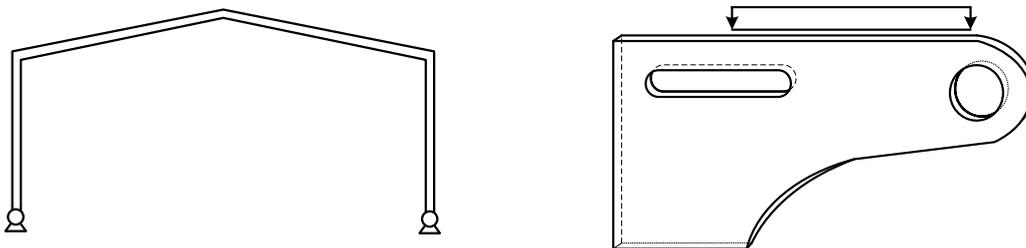
10.6.3	Formulación en coordenadas cartesianas	218
10.6.4	Deformaciones unitarias en coordenadas cartesianas	218
10.6.5	Interpolación isoparamétrica	221
10.6.6	Aproximación de las deformaciones unitarias	223
10.6.7	Esfuerzos interiores. Ecuación constitutiva	226
10.6.8	Formulación en desplazamiento. Ecuación de equilibrio	227
10.6.9	Formulación híbrida. Interpolación de los esfuerzos interiores	228
10.6.10	Formulación híbrida. Ecuación de equilibrio	229
10.7.	Transición sólido – cáscara	231
10.8.	Elementos de transición sólido cáscara	233
10.9.	Ejemplos	235
10.9.1	Bóveda cilíndrica	235
10.9.2	Semiesfera con orificio	237
10.9.3	Cilindro comprimido diametralmente	238
10.9.4	Viga alabeada	239
10.10	Anejos	241
<b>11.</b>	<b>INTEGRACIÓN NUMÉRICA APLICADA AL MEF</b>	<b>243</b>
11.1.	Introducción	243
11.2.	Integración numérica unidimensional	243
11.2.1	Método de Newton-Cotes	243
11.2.2	Cuadratura de Gauss	245
11.3.	Integración numérica en regiones rectangulares	245
11.4.	Integración en regiones triangulares	246
11.5.	Integración en tetraedros	247
11.6.	Orden de integración necesario	248
<b>12.</b>	<b>INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DINÁMICO</b>	<b>250</b>
12.1.	Introducción	250
12.2.	Principios energéticos en régimen dinámico	250
12.2.1	Ecuaciones de equilibrio	251
12.2.2	Principio del trabajo virtual	251

12.2.3 Principio de Hamilton	252
12.3. Ecuación de equilibrio dinámico de un elemento finito	253
12.4. Matrices de inercia de los elementos estructurales	256
12.4.1 Elemento de celosía plana de dos nudos	256
12.4.2 Elemento de celosía espacial de dos nudos	257
12.4.3 Elemento viga plana de dos nudos	258
12.4.4 Elementos bidimensionales	261
12.4.5 Elementos espaciales sólidos	263
12.4.6 Elementos placa con energía de cortante	265
12.5. Amortiguamiento	265
12.6. Energía cinética	266
12.7. Ecuaciones del movimiento de la estructura	267
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>268</b>
<b>ÍNDICE DE MATERIAS</b>	<b>271</b>

# Introducción al Método de los Elementos Finitos

## 1.1. SISTEMAS DISCRETOS Y SISTEMAS CONTINUOS

Al efectuar una clasificación de las estructuras, suelen dividirse en discretas o reticulares y continuas. Las primeras son aquellas que están formadas por un ensamblaje de elementos claramente diferenciados unos de otros y unidos en una serie de puntos concretos, de tal manera que el sistema total tiene forma de malla o retícula. La característica fundamental de las estructuras discretas es que su deformación puede definirse de manera exacta mediante un número finito de parámetros, como por ejemplo las deformaciones de los puntos de unión de unos elementos y otros. De esta manera el equilibrio de toda la estructura puede representarse mediante las ecuaciones de equilibrio en las direcciones de dichas deformaciones.



**Figura 1.1 Estructura reticular discreta y estructura continua**

Como contrapartida, en los sistemas continuos no es posible separar, a priori, el sistema en un número finito de elementos estructurales discretos. Si se toma una parte cualquiera del sistema, el número de puntos de unión entre dicha parte y el resto de la estructura es infinito, y es por lo tanto imposible utilizar el mismo método que en los sistemas discretos, pues los puntos de unión entre los distintos elementos, que allí aparecían de manera natural, no existen ahora.

Las estructuras continuas son muy frecuentes en ingeniería, como por ejemplo: bastidores de máquinas, carrocerías de vehículos, losas de cimentación de edificios, vasijas de reactores, elementos de máquinas (bielas, poleas, carcasas...), y para su análisis es necesario disponer de un método que tenga en cuenta su naturaleza continua.

Hasta la llegada del Método de los Elementos Finitos (MEF), los sistemas continuos se abordaban analíticamente, pero por esa vía sólo es posible obtener solución para sistemas con geometría muy sencilla, y/o con condiciones de contorno simples. También se han utilizado técnicas de diferencias finitas, pero éstas plantean problemas cuando los contornos son complicados.

Como precursores del MEF debe citarse a Argyris y Kelsey (Stuttgart, 1955) y a Turner, Clough, Martin y Topp (Boeing, 1956), aunque con posterioridad el número de autores en el campo del MEF ha sido enorme, siendo uno de los campos de la ingeniería a los que más esfuerzos de investigación se han dedicado.

## 1.2. HIPÓTESIS DE DISCRETIZACIÓN

En una estructura discreta, su deformación viene definida por un número finito de parámetros (deformaciones y/o giros), que juntos conforman el vector de deformaciones  $\Delta$ , y la estructura tiene tantas formas de deformarse como términos tenga dicho vector. Un medio continuo tiene infinitas formas posibles de deformarse, independientes unas de otras, ya que cada punto puede desplazarse manteniendo fijos cualquier número finito de los puntos restantes, por grande que sea este último. Por lo tanto la configuración deformada de la estructura no puede venir dada por un vector finito  $\Delta$  como el anterior, sino que es una función vectorial  $\mathbf{u}$ , que indica cuáles son las deformaciones de cualquier punto, y que tiene tres componentes escalares:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

Esta función es la solución de la ecuación diferencial que gobierna el problema, y si éste está bien planteado, cumplirá las condiciones de contorno impuestas, pero en principio no puede asegurarse que esta función  $\mathbf{u}$  tenga una expresión analítica manejable, ni siquiera que pueda calcularse. Por lo tanto la función  $\mathbf{u}$  no podrá conocerse en general.

Para resolver este problema, el Método de los Elementos Finitos recurre a la hipótesis de discretización, que se basa en lo siguiente:

- El continuo se divide por medio de líneas o superficies imaginarias en una serie de regiones contiguas y disjuntas entre sí, de formas geométricas sencillas y normalizadas, llamadas *elementos finitos*.

- Los elementos finitos se unen entre sí en un número finito de puntos, llamados *nudos*.
- Los desplazamientos de los nudos son las incógnitas básicas del problema, y éstos determinan unívocamente la configuración deformada de la estructura. Sólo estos desplazamientos nodales se consideran independientes.
- El desplazamiento de un punto cualquiera, viene unívocamente determinado por los desplazamientos de los nudos del elemento al que pertenece el punto. Para ello se definen para cada elemento, unas *funciones de interpolación* que permiten calcular el valor de cualquier desplazamiento interior por interpolación de los desplazamientos nodales. Estas funciones de interpolación serán de tal naturaleza que se garantice la compatibilidad de deformaciones necesaria en los contornos de unión entre los elementos.
- Las funciones de interpolación y los desplazamientos nodales definen unívocamente el estado de deformaciones unitarias en el interior del elemento. Éstas, mediante las ecuaciones constitutivas del material definen el estado de tensiones en el elemento y por supuesto en sus bordes.
- Para cada elemento, existe un sistema de fuerzas concentradas en los nudos, que equilibran a las tensiones existentes en el contorno del elemento, y a las fuerzas exteriores sobre él actuantes.

Los dos aspectos más importantes de esta hipótesis, sobre los que hay que hacer hincapié son:

- La función solución del problema  $u$  es aproximada de forma independiente en cada elemento. Para una estructura discretizada en varios elementos, pueden utilizarse funciones de interpolación distintas para cada uno de ellos, a juicio del analista, aunque deben cumplirse ciertas condiciones de compatibilidad en las fronteras entre los elementos.
- La función solución es aproximada dentro de cada elemento, apoyándose en un número finito (y pequeño) de parámetros, que son los valores de dicha función en los nudos que configuran el elemento y a veces sus derivadas.

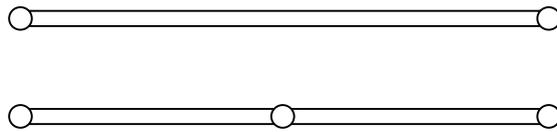
Esta hipótesis de discretización es el pilar básico del MEF, por lo que se suele decir de éste, que es un método discretizante, de parámetros distribuidos. La aproximación aquí indicada se conoce como la formulación en desplazamiento.

Claramente se han introducido algunas aproximaciones. En primer lugar no es siempre fácil asegurar que las funciones de interpolación elegidas satisfarán al requerimiento de continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes, por lo que puede violarse la condición de compatibilidad en las fronteras entre unos y otros. En segundo lugar al concentrar las cargas equivalentes en los nudos, las condiciones de equilibrio se satisfarán solamente en ellos, y no se cumplirán usualmente en las fronteras entre elementos.

El proceso de discretización descrito tiene una justificación intuitiva, pero lo que de hecho se sugiere es la minimización de la energía potencial total del sistema, para un campo de deformaciones definido por el tipo de elementos utilizado en la discretización.

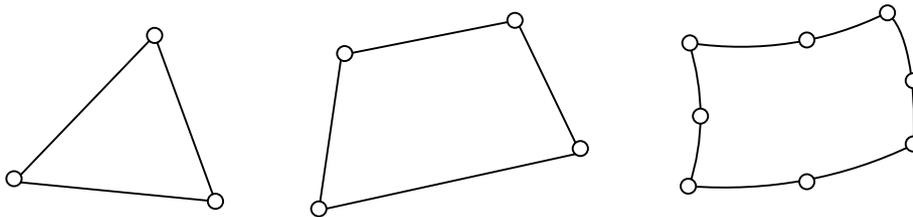
Con independencia de que más adelante se estudien en detalle, se representan a continuación algunos de los elementos más importantes.

- Elasticidad unidimensional



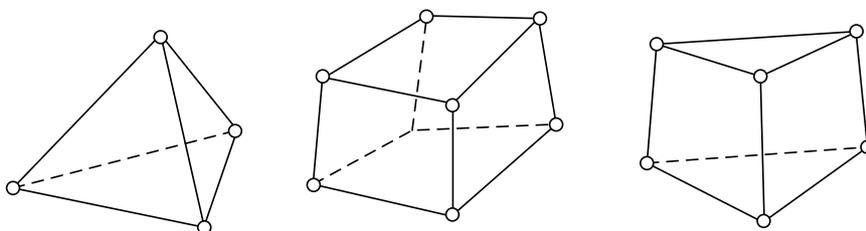
**Figura 1.2 Elementos para elasticidad unidimensional**

- Elasticidad bidimensional



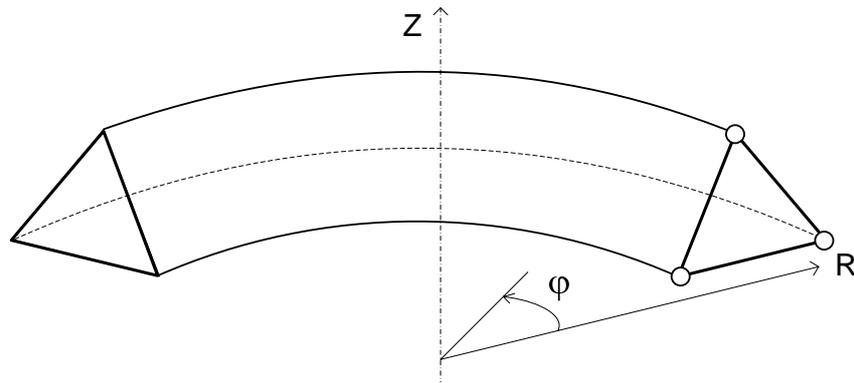
**Figura 1.3 Elementos para elasticidad bidimensional**

- Elasticidad tridimensional



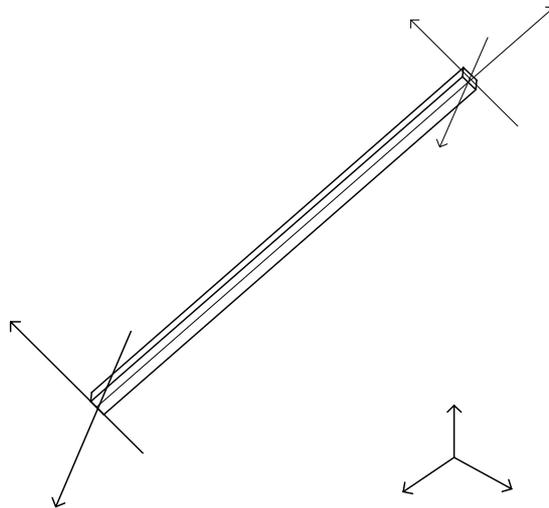
**Figura 1.4 Elementos para elasticidad tridimensional**

- Elasticidad con simetría de revolución



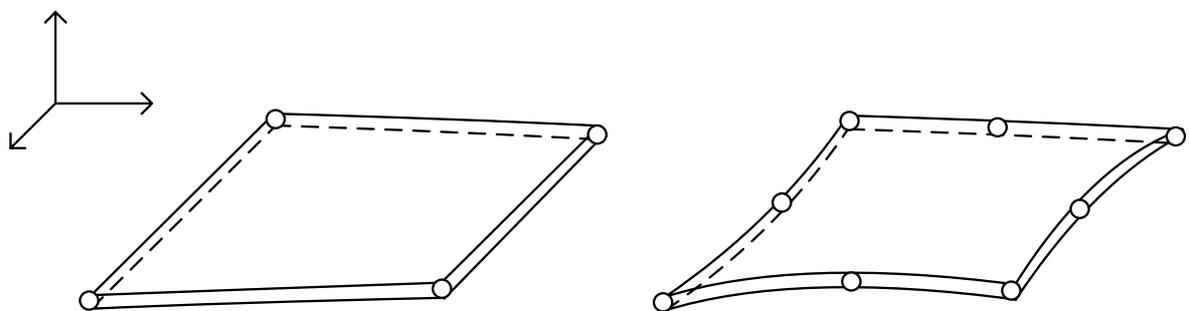
**Figura 1.5 Elemento axisimétrico**

- Vigas



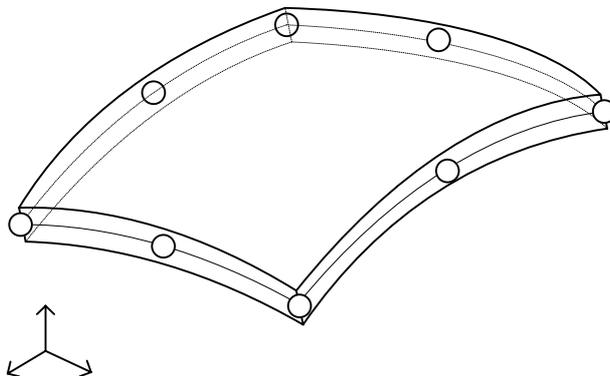
**Figura 1.6 Elemento viga**

- Flexión de placas planas



**Figura 1.7 Elementos placa plana**

- Cáscaras laminares curvas



**Figura 1.8 Elemento cáscara curva**

### 1.3. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

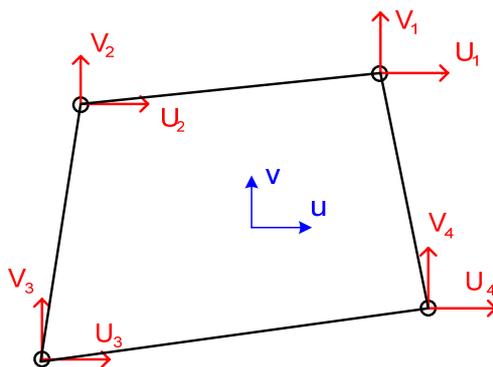
Consideremos un elemento finito cualquiera, definido por un número de nudos  $n$ . Para facilitar la exposición se supondrá un problema de elasticidad plana. Un punto cualquiera del elemento tiene un desplazamiento definido por un vector  $\mathbf{u}$ , que en este caso tiene dos componentes:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Los nudos del elemento tienen una serie de grados de libertad, que corresponden a los valores que adopta en ellos el campo de desplazamientos, y que forman el vector denominado  $\delta^e$ . Para el caso plano este vector es:

$$\delta^e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n]^T \quad (1.3)$$

En este ejemplo se supone que como deformaciones de los nudos se emplean sólo los desplazamientos, pero no los giros, lo cual es suficiente para elasticidad plana, como se verá más adelante. En otros elementos (p.e. vigas o cáscaras) se emplean además los giros.



**Figura 1.9** Deformaciones en un elemento finito

El campo de deformaciones en el interior del elemento se aproxima haciendo uso de la hipótesis de interpolación de deformaciones:

$$u = \sum N_i U_i \quad v = \sum N_i V_i \quad (1.4)$$

donde  $N_i$  son las funciones de interpolación del elemento, que son en general funciones de las coordenadas  $x, y$ . Nótese que se emplean las mismas funciones para interpolar los desplazamientos  $u$  y  $v$ , y que ambos desplazamientos se interpolan por separado, el campo  $u$  mediante las  $U_i$  y el campo  $v$  mediante las  $V_i$ . Es decir que la misma  $N_i$  define la influencia del desplazamiento del nudo  $i$  en el desplazamiento total del punto P, para las dos direcciones  $x$  e  $y$ .

La interpolación de deformaciones (1.4) puede ponerse en la forma matricial general:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e \quad (1.5)$$

La matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  tiene tantas filas como desplazamientos tenga el punto P y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nudos del elemento.

Las funciones de interpolación son habitualmente polinomios, que deben poderse definir empleando las deformaciones nodales del elemento. Por lo tanto se podrán usar polinomios con tantos términos como grados de libertad tenga el elemento.

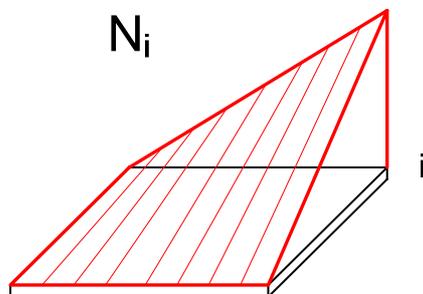
Para problemas de elasticidad la estructura de esta matriz es normalmente del tipo:

$$\mathbf{N} = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{array} \right] \quad (1.6)$$

Sin embargo, el aspecto de esta matriz puede ser distinto para otros elementos, como las vigas o las placas a flexión.

Las funciones de interpolación están definidas únicamente para el elemento, y son nulas en el exterior de dicho elemento. Estas funciones tienen que cumplir determinadas condiciones y aunque éstas se verán en detalle más adelante, con la expresión anterior se puede deducir que la función de interpolación  $N_i$  debe valer 1

en el nudo  $i$  y 0 en los restantes nudos. Esta condición resulta evidente si se tiene en cuenta que los términos del vector  $\delta^e$  son grados de libertad y por lo tanto son independientes, y deben poder adoptar cualquier valor.



**Figura 1.10** Función de interpolación

#### 1.4. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Antes de estudiar los criterios para garantizar la convergencia en el MEF es necesario definir dicho concepto, en el ámbito del MEF. Se dice que un análisis por el MEF es convergente si al disminuir el tamaño de los elementos, y por lo tanto aumentar el número de nudos y de elementos, la solución obtenida tiende hacia la solución exacta.

Hay que indicar que en el análisis por el MEF, se introducen, además de la hipótesis de discretización, otras aproximaciones, que son fuentes de error en la solución: integración numérica, errores de redondeo por aritmética finita... El concepto de convergencia aquí analizado se refiere solamente a la hipótesis de discretización, prescindiendo de los otros errores, que deben ser estudiados aparte, y cuyo valor debe en todo caso acotarse.

Las funciones de interpolación elegidas para representar el estado de deformación de un medio continuo deben satisfacer una serie de condiciones, a fin de que la solución obtenida por el MEF, converja hacia la solución real.

##### **Criterio 1**

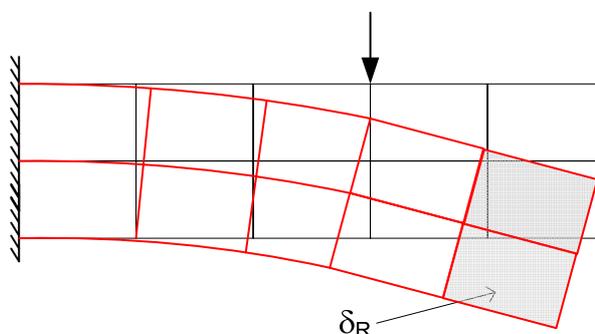
Las funciones de interpolación deben ser tales que cuando los desplazamientos de los nudos del elemento correspondan a un movimiento de sólido rígido, no aparezcan tensiones en el elemento.

Este criterio se puede enunciar también de forma más sencilla: las funciones de interpolación deben ser capaces de representar los desplazamientos como sólido rígido, sin producir tensiones en el elemento.

Esta condición es evidente, pues todo sólido que se desplaza como un sólido rígido, no sufre ninguna deformación ni por lo tanto tensión. Sin embargo adoptando unas

funciones de interpolación incorrectas, pueden originarse tensiones al moverse como sólido rígido.

Por ejemplo en la figura 1.11, los elementos del extremo se desplazan como un sólido rígido, al no existir tensiones más allá de la fuerza aplicada.



**Figura 1.11** Deformación de sólido rígido

Empleando la formulación desarrollada más adelante, si se aplican unas deformaciones en los nudos de valor  $\delta^R$  que representan un movimiento de sólido rígido, las deformaciones unitarias en el interior del elemento son:

$$\epsilon^R = \mathbf{B} \delta^R \quad (1.7)$$

Según este criterio, las tensiones correspondientes deben ser nulas en todo punto del elemento:

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon^R = \mathbf{D} \mathbf{B} \delta^R = 0 \quad (1.8)$$

## Criterio 2

Las funciones de interpolación deben ser tales que cuando los desplazamientos de los nudos correspondan a un estado de tensión constante, este estado tensional se alcance en realidad en el elemento.

Claramente, a medida que los elementos se hacen más pequeños, el estado de tensiones que hay en ellos se acerca al estado uniforme de tensiones. Este criterio lo que exige es que los elementos sean capaces de representar dicho estado de tensión constante.

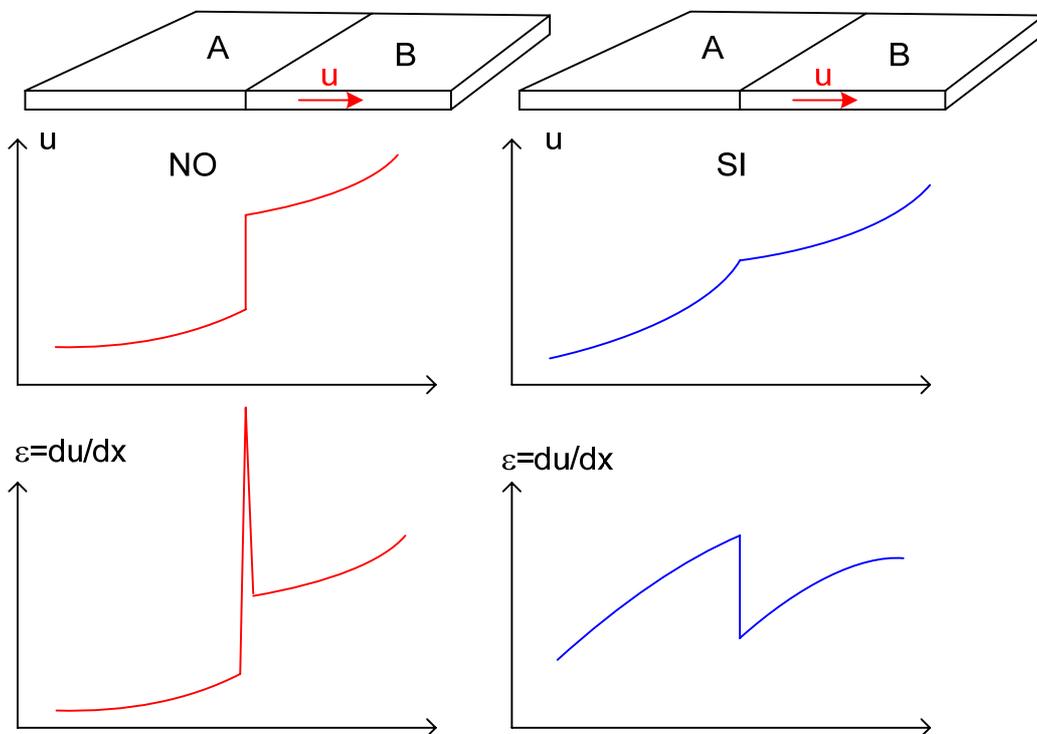
Se observa que este criterio de hecho es un caso particular del criterio 1, ya que un movimiento como sólido rígido (con tensión nula) es un caso particular de un estado de tensión constante. En muchas ocasiones ambos criterios se formulan como un sólo criterio.

A los elementos que satisfacen los criterios 1 y 2 se les llama elementos completos.

### Criterio 3

Las funciones de interpolación deben ser tales que las deformaciones unitarias que se produzcan en las uniones entre elementos deben ser finitas. Esto es lo mismo que decir que debe existir continuidad de desplazamientos en la unión entre elementos aunque puede haber discontinuidad en las deformaciones unitarias (y por lo tanto en las tensiones, que son proporcionales a ellas).

La figura 1.12 ilustra las posibles situaciones, para un caso unidimensional donde la única incógnita es el desplazamiento  $u$  en la dirección  $x$ . En la situación de la izquierda existe una discontinuidad en el desplazamiento  $u$ , que da lugar a una deformación unitaria infinita: esta situación no está permitida por el criterio 3. En la situación mostrada a la derecha la deformación es continua, aunque la deformación unitaria no lo es: esta situación está permitida por el criterio 3.



**Figura 1.12 Criterio de convergencia 3 en una dimensión**

Este criterio debe cumplirse para poder calcular la energía elástica  $U$  almacenada en toda la estructura, como suma de la energía de todos los elementos.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dv = \frac{1}{2} \sum_e \int_{ve} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dv + U_{cont} \quad (1.9)$$

donde el sumando  $U_{cont}$  representa la energía elástica acumulada en el contorno entre los elementos, que debe ser nula.

Si este requerimiento no se cumple, las deformaciones no son continuas y existen deformaciones unitarias  $\epsilon$  infinitas en el borde entre elementos. Si la deformación unitaria en el contorno es infinita, la energía que se acumula en él es:

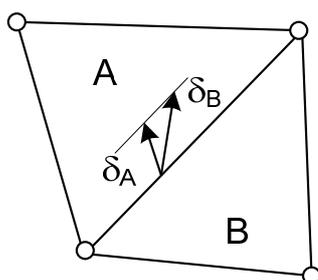
$$U_{cont} = \frac{1}{2} \int_{v=0} \sigma^T (\infty) dv = \text{indeterminado} \quad (1.10)$$

ya que, aunque el volumen de integración (volumen del contorno) es nulo, su integral puede ser distinta de cero, con lo que se almacena energía en los bordes entre elementos, lo cual no es correcto.

Sin embargo, si la deformación unitaria en el contorno es finita (aunque no sea continua entre los elementos unidos), la energía que se acumula es:

$$U_{cont} = \frac{1}{2} \int_{v=0} \sigma^T \epsilon_{cont} dv = 0 \quad (1.11)$$

En el caso plano o espacial este requerimiento aplica a la componente del desplazamiento perpendicular al borde entre elementos, ya que ésta es la única que acumula energía.



**Figura 1.13 Compatibilidad de desplazamientos en el contorno**

Este criterio puede expresarse de manera más general diciendo que en los contornos de los elementos deben ser continuas las funciones de interpolación y sus derivadas hasta un orden  $n-1$ , siendo  $n$  el orden de las derivadas existentes en la expresión de la energía potencial  $\Pi$  del sistema. Es decir que las funciones de interpolación deben ser continuas de tipo  $C^{n-1}$ .

El orden  $n$  de las derivadas existentes en la energía potencial  $\Pi$  del sistema, siempre es la mitad del orden de la ecuación diferencial que gobierna el problema  $m$  ( $n=m/2$ ).

Para elementos de tipo celosía o viga, este requerimiento es fácil de cumplir pues la unión entre elementos se hace en puntos discretos, y se usan los mismos desplazamientos y giros para todos los elementos que se unen en un nudo.

Para elasticidad plana la ecuación diferencial es de orden  $m=2$ , con lo que energía potencial es de orden  $n=1$ . En efecto esta última se expresa en términos de  $\epsilon$ , que

son las derivadas primeras de las deformaciones. Luego las funciones de interpolación deben ser continuas en los contornos de tipo  $C^0$ , es decir no se exige continuidad a la derivada de la función de interpolación en el contorno del elemento, sino sólo a la propia función.

Para problemas de flexión de vigas y de placas delgadas, la ecuación diferencial es de orden  $m=4$ , luego la energía potencial es de orden  $n=2$ . Por lo tanto las funciones de interpolación elegidas deben ser continuas  $C^1$  en el contorno del elemento: tanto la función como su derivada primera deben ser continuas.

A los elementos que cumplen este tercer criterio se les llama compatibles.

### Resumen de los tres criterios

Los criterios 1 y 2 pueden agruparse de manera más matemática diciendo que las funciones de interpolación deben permitir representar cualquier valor constante de su derivada  $n$ -sima en el interior del elemento (siendo  $n$  el orden de la derivada necesaria para pasar de las deformaciones a las deformaciones unitarias, que es el orden de derivación de las deformaciones en el potencial).

Esto puede comprobarse mediante el siguiente sencillo razonamiento: los criterios 1 y 2 obligan a representar cualquier valor constante (incluido el valor nulo) de la tensión  $\sigma$ , lo cual equivale a representar cualquier valor constante (incluido el valor nulo) de la deformación unitaria  $\varepsilon$ . Pero la deformación unitaria es la derivada  $n$ -sima de la deformación, luego en consecuencia es necesario poder representar cualquier valor constante de dicha derivada. Esto se satisface siempre, si se adoptan como funciones de interpolación, polinomios completos de orden  $n$  como mínimo.

Por ejemplo, si se adopta una función lineal  $N=Ax+B$ , sólo es válida para problemas de elasticidad ( $n=1$ ), ya que se representa cualquier valor constante de la derivada  $n$ -sima  $dN/dx=A$ . Sin embargo, no vale para problemas de flexión de vigas ni de placas delgadas ( $n=2$ ), pues siempre es  $d^2N/dx^2=0$ , es decir que no se puede representar cualquier valor constante de la derivada segunda.

El criterio 3 exige que las deformaciones unitarias sean finitas en el contorno entre los elementos. Como estas deformaciones unitarias son las derivadas  $n$ -simas de las deformaciones, lo que se exige es que haya continuidad de las deformaciones y sus derivadas hasta orden  $n-1$  en el contorno del elemento. Esto es equivalente a imponer la compatibilidad de desplazamientos en el contorno.

Como resumen de los tres criterios, para problemas de elasticidad ( $n=1$ ) es necesario emplear polinomios completos de orden 1, con continuidad  $C^0$  entre ellos para garantizar la convergencia. Es suficiente con usar funciones del tipo lineal, que aproximan la solución mediante una línea quebrada, aunque se produzcan discontinuidades en las tensiones entre los elementos, como se indica en la figura 1.14.

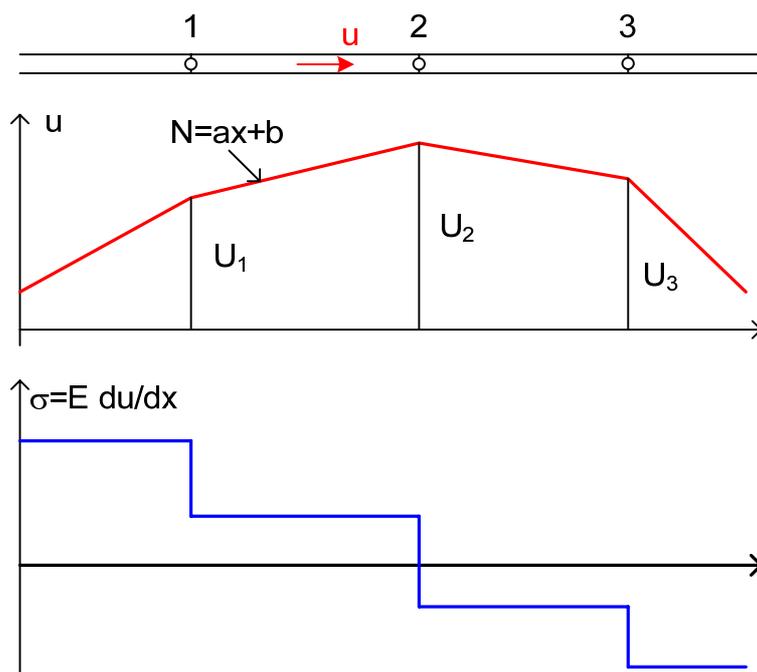


Figura 1.14 Compatibilidad en elasticidad unidimensional

Para problemas de flexión de vigas y placas, ( $n=2$ ) es necesario emplear como mínimo polinomios de grado 2, con continuidad  $C^1$  entre ellos, es decir que hay que garantizar la continuidad de la flecha y el giro entre los elementos. En la práctica, para la flexión de vigas planas se usan 4 parámetros para ajustar la solución (flecha y giro en cada extremo) por lo que el tipo de funciones empleadas son polinomios de grado 3.

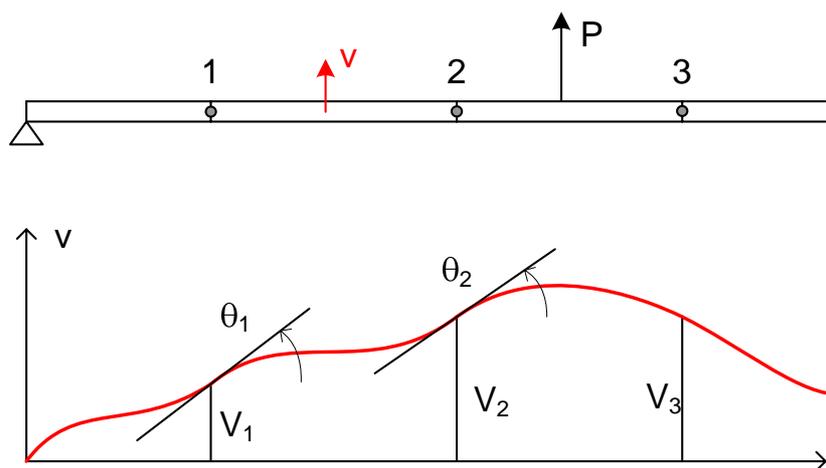


Figura 1.15 Compatibilidad en flexión de vigas

Con respecto a la velocidad de convergencia se pueden resumir las siguientes conclusiones de los análisis efectuados. Si se utiliza una discretización uniforme con elementos de tamaño nominal  $h$ , y se usa para interpolar los desplazamientos un polinomio completo de grado  $c$  (que representa exactamente variaciones del

desplazamiento de dicho grado), el error local en los desplazamientos se estima que es del orden  $O(h^{c+1})$ .

Respecto a las tensiones, son las derivadas  $n$ -simas de los desplazamientos, luego el error en ellas es de orden  $O(h^{c+1-m})$ .

## Ecuaciones generales

### 2.1. CAMPO DE DEFORMACIONES

El campo de deformaciones en un punto cualquiera del dominio está definido por un vector  $\mathbf{u}$  que tiene tantas componentes como deformaciones existen en el dominio. Para el caso de un problema espacial es:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Si se considera un elemento finito cualquiera, el campo de deformaciones en su interior se aproxima, haciendo uso de la hipótesis de interpolación, como un promedio ponderado de las deformaciones en cada uno de los  $n$  nudos del elemento, siendo los factores de ponderación las funciones de interpolación:

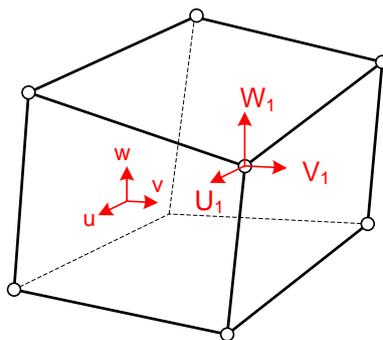
$$u = \sum N_i U_i \quad v = \sum N_i V_i \quad w = \sum N_i W_i \quad (2.2)$$

Esta interpolación puede ponerse en forma matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (2.3)$$

donde  $\boldsymbol{\delta}^e$  es el vector de todas las deformaciones nodales del elemento (figura 2.1):

$$\boldsymbol{\delta}^e = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n \quad W_n]^T \quad (2.4)$$



**Figura 2.1** Deformaciones en un elemento finito

La matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  tiene tres filas y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nudos del elemento. La estructura de esta matriz siempre es del tipo:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

## 2.2. DEFORMACIONES UNITARIAS

Las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento, con la suposición de pequeñas deformaciones, son:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Se pueden poner en la forma matricial siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} \quad (2.7)$$

En esta expresión se identifica el operador matricial  $\boldsymbol{\partial}$  que permite pasar de las deformaciones de un punto  $\mathbf{u}$  a las deformaciones unitarias  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Este operador tiene tantas filas como deformaciones unitarias haya en el problema y tantas columnas como componentes tenga el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ .

Sustituyendo las deformaciones  $\mathbf{u}$  en función de las deformaciones nodales, mediante las funciones de interpolación, se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (2.8)$$

En esta relación se identifica la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \quad (2.9)$$

tal que se cumple que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (2.10)$$

Esta matriz  $\mathbf{B}$  relaciona las deformaciones de los nudos del elemento  $\boldsymbol{\delta}^e$  con las deformaciones unitarias en un punto interior cualquiera del elemento. Por lo tanto  $\mathbf{B}$  representa el campo de deformaciones unitarias que se supone existe en el interior del elemento finito, como consecuencia de la hipótesis de interpolación de deformaciones efectuada, y juega un papel fundamental en el método de los elementos finitos.

Dada la estructura de la matriz  $\mathbf{N}$ , la matriz  $\mathbf{B}$  se puede poner siempre en la forma:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} = \boldsymbol{\partial} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n] \quad (2.12)$$

Cada una de las matrices  $\mathbf{B}_i$  tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{B}_i = \partial \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Aunque el valor de  $\mathbf{B}$  se ha obtenido para el caso de elasticidad tridimensional, su valor en función de  $\partial$  y  $\mathbf{N}$  es totalmente general para otros tipos de problemas de elasticidad, como flexión de placas, problemas de revolución, etc.

### 2.3. ESTADO DE TENSIONES. ECUACIÓN CONSTITUTIVA

Las tensiones en un punto cualquiera del dominio están definidas por el tensor de tensiones en dicho punto, cuya expresión general es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Asimismo se conoce la ecuación constitutiva del material que forma el dominio, y que relaciona las tensiones con las deformaciones unitarias. Para un material elástico lineal esta ecuación constitutiva se puede poner en la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.15)$$

Siendo:

- $\mathbf{D}$  la matriz elástica, que para un material elástico lineal es constante y depende de sólo dos parámetros: el módulo de elasticidad  $E$  y el módulo de Poisson  $\nu$ .
- $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  el vector de las deformaciones unitarias iniciales existentes en el material en el punto considerado, que deben ser conocidas. Las más habituales son las debidas

a las temperaturas, aunque pueden incluirse en ellas las debidas a los errores de forma, etc.

- $\sigma_0$  las tensiones iniciales presentes en el material, que normalmente son tensiones residuales debidas a procesos anteriores sobre el material (p.e. tratamiento térmico) y que por lo tanto son conocidas.

Las expresiones particulares de la matriz elástica  $\mathbf{D}$  y de los vectores  $\epsilon_0$  y  $\sigma_0$  dependen del tipo de problema considerado y serán estudiadas en cada caso particular.

## 2.4. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE UN ELEMENTO

Una vez que han quedado establecidas las expresiones que relacionan los desplazamientos, las deformaciones unitarias y las tensiones, en función de los desplazamientos de los nudos, se está ya en condiciones de calcular las ecuaciones de equilibrio de un elemento finito. Si se considera un elemento finito cualquiera, las fuerzas que actúan sobre él, en el caso más general, son las siguientes (figura 2.2):

- Fuerzas exteriores de volumen aplicadas en el interior del elemento  $\mathbf{q}_v$ , que son en general variables dentro del elemento, y tienen tantas componentes como desplazamientos haya en cada punto.
- Fuerzas exteriores de superficie aplicadas en el contorno libre del elemento  $\mathbf{q}_s$ , que son en general variables a lo largo del contorno, y tienen tantas componentes como desplazamientos tenga cada punto del contorno. Al contorno sobre el que actúan las fuerzas de superficie se le denomina  $s$ .
- Fuerzas interiores  $\mathbf{q}_c$ , aplicadas en la superficie del contorno de unión del elemento con los elementos vecinos, que son desconocidas. A dicho contorno de unión se le denomina  $c$ .
- Fuerzas exteriores puntuales aplicadas sobre los nudos del elemento  $\mathbf{P}_N^e$ .

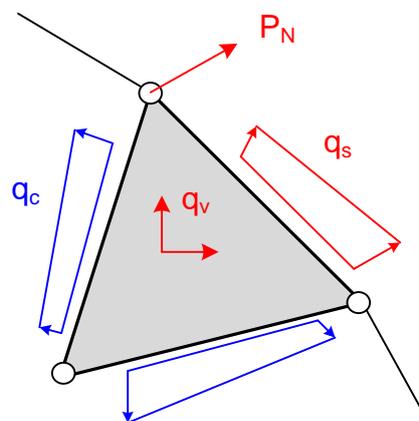


Figura 2.2 Fuerzas actuantes sobre un elemento finito

El trabajo virtual que producen estas fuerzas es:

$$\delta W^e = \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \delta^{eT} \mathbf{P}_N^e \quad (2.16)$$

Donde  $\delta \mathbf{u}$  es una variación virtual del campo de deformaciones  $\mathbf{u}$  y  $\delta \delta^e$  es la variación correspondiente a los grados de libertad de los nudos. Durante estas variaciones, las fuerzas exteriores se mantienen constantes.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales se obtiene que para que haya equilibrio, el trabajo virtual de las fuerzas debe ser igual a la variación de la energía elástica  $U$  acumulada en el elemento, para cualquier  $\delta \mathbf{u}$ :

$$\delta W^e = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \equiv \delta U^e \quad (2.17)$$

Donde  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  es la variación en las deformaciones unitarias producida por la variación en las deformaciones  $\delta \mathbf{u}$ . Por lo tanto la ecuación de equilibrio del elemento es:

$$\int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \delta^{eT} \mathbf{P}_N^e = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (2.18)$$

Aplicando la hipótesis de interpolación de deformaciones, la variación virtual del campo de deformaciones es:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \delta^e \quad (2.19)$$

La variación de las deformaciones unitarias se relaciona con la variación de las deformaciones nodales a través de la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \delta^e \quad (2.20)$$

Sustituyendo las variaciones  $\delta \mathbf{u}$  y  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  en la expresión (2.18) se obtiene la ecuación de equilibrio aproximada mediante la hipótesis de interpolación de deformaciones:

$$\delta \delta^{eT} \left[ \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \mathbf{N}^T \mathbf{q}_c ds + \mathbf{P}_N^e \right] = \delta \delta^{eT} \left[ \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \right] \quad (2.21)$$

Considerando que esta ecuación se debe cumplir para cualquier variación arbitraria de las deformaciones, se obtiene:

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \mathbf{N}^T \mathbf{q}_c ds + \mathbf{P}_N^e = \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (2.22)$$

Esta ecuación representa el equilibrio del elemento finito. Antes de seguir desarrollándola, la integral debida a las fuerzas distribuidas  $\mathbf{q}_c$  sobre el contorno de unión (desconocidas) se sustituye por:

$$\int_c \mathbf{N}^T \mathbf{q}_c ds = \mathbf{P}_c^e \quad (2.23)$$

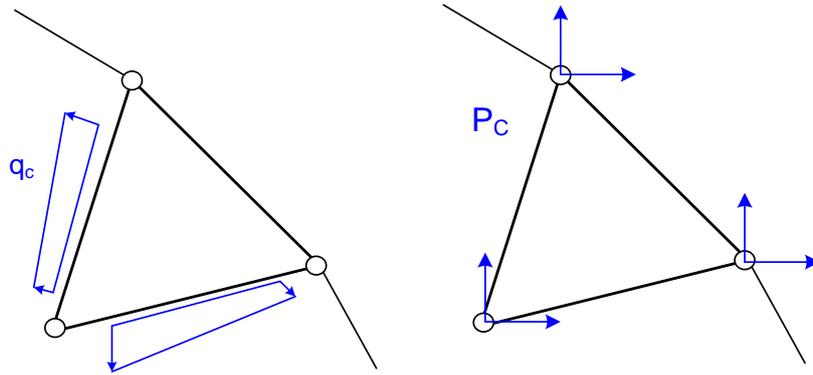


Figura 2.3 Fuerzas de conexión entre elementos

Donde  $\mathbf{P}_c^e$  son unas fuerzas que están aplicadas sobre los nudos del elemento, y que son equivalentes a las fuerzas distribuidas aplicadas sobre los contornos de unión con los elementos vecinos. Ambas fuerzas producen el mismo trabajo virtual. La ecuación de equilibrio del elemento queda finalmente:

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e = \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (2.24)$$

Sustituyendo en ella el valor de la tensión mediante la ecuación constitutiva (2.15) se obtiene:

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e = \int_v \mathbf{B}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0) dv \quad (2.25)$$

Sustituyendo a continuación el valor de la deformación unitaria en función de la matriz  $\mathbf{B}$  se obtiene:

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e = \int_v \mathbf{B}^T (\mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0) dv \quad (2.26)$$

Reordenando los distintos términos se llega a:

$$\int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \boldsymbol{\delta}^e = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv - \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e \quad (2.27)$$

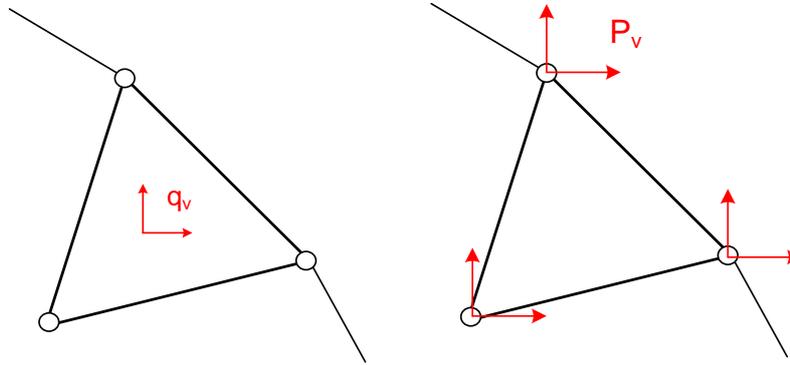
Esta es la ecuación final de equilibrio del elemento finito considerado. En ella se identifican los siguientes términos:

- Matriz de rigidez del elemento finito. Se trata de una matriz cuadrada simétrica de tamaño igual al número de grados de libertad del elemento.

$$\mathbf{K}^e = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (2.28)$$

- Vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas actuantes por unidad de volumen (figura 2.4).

$$\mathbf{P}_v^e = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv \quad (2.29)$$



**Figura 2.4 Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de volumen**

- Vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores de superficie.

$$\mathbf{P}_s^e = \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds \quad (2.30)$$

- Vector de fuerzas nodales equivalentes producidas por las deformaciones iniciales existentes en el material:

$$\mathbf{P}_T^e = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv \quad (2.31)$$

- Vector de fuerzas nodales equivalentes debidas a las tensiones iniciales existentes en el material:

$$\mathbf{P}_b^e = - \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv \quad (2.32)$$

La ecuación de equilibrio del elemento puede ponerse en forma compacta como:

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{P}_v^e + \mathbf{P}_s^e + \mathbf{P}_T^e + \mathbf{P}_b^e + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e \quad (2.33)$$

Esta ecuación de equilibrio está referida al sistema de ejes en el que se hayan definido las coordenadas y las deformaciones de los nudos, y al que lógicamente también se habrán referido las distintas fuerzas actuantes. En ella son conocidos todos los términos de carga salvo el debido a las fuerzas distribuidas interiores  $\mathbf{P}_c^e$  que se producen en el contorno de unión con los elementos vecinos.

## 2.5. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DEL CONJUNTO

La ecuación de equilibrio obtenida para un elemento puede aplicarse a todos y cada uno de los elementos en que se ha dividido el sistema continuo. De esta manera se garantiza el equilibrio de todos y cada uno de ellos individualmente, apareciendo en dichas ecuaciones las fuerzas de conexión entre unos y otros elementos.

Para obtener la ecuación de equilibrio de toda la estructura es necesario además imponer el equilibrio de las fronteras de unión entre los elementos. En estas fronteras se han introducido las fuerzas de conexión entre los elementos  $\mathbf{q}_c$ , que a su vez han dado lugar a las fuerzas nodales equivalentes correspondientes  $\mathbf{P}_c$ , y que como se ha visto son energéticamente equivalentes a ellas. Por lo tanto el considerar el equilibrio de las fronteras es equivalente a considerar el equilibrio de los nudos de unión entre los elementos.

Si se plantean conjuntamente las ecuaciones de equilibrio de todos los nudos de unión entre todos los elementos, se obtiene un conjunto de ecuaciones que representa el equilibrio de toda la estructura. Estas ecuaciones se obtienen por ensamblado de las ecuaciones de equilibrio de los distintos elementos finitos que la forman, en la forma:

$$\bigcup_e \mathbf{K}^e \delta^e = \bigcup_e [\mathbf{P}_v^e + \mathbf{P}_s^e + \mathbf{P}_T^e + \mathbf{P}_b^e + \mathbf{P}_N^e] + \bigcup_e \mathbf{P}_c^e \quad (2.34)$$

Donde se ha empleado el símbolo  $\bigcup_e$  para indicar el ensamblado de las distintas magnitudes según los grados de libertad de la estructura.

En este proceso de ensamblado se cancelan todas las fuerzas de conexión entre unos elementos y los vecinos, pues se trata de fuerzas iguales y de signo contrario:

$$\bigcup_e \mathbf{P}_c^e = 0 \quad (2.35)$$

Al ser el sistema lineal, el término de la izquierda puede ponerse siempre como:

$$\bigcup_e \mathbf{K}^e \delta^e = \mathbf{K} \Delta \quad (2.36)$$

Siendo:

- $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez de la estructura completa, obtenida por ensamblaje de las matrices de los distintos elementos según los grados de libertad correspondientes a cada uno.
- $\Delta$  es el vector de grados de libertad de toda la estructura, que agrupa a los grados de libertad de todos los nudos.

De esta manera, la ecuación de equilibrio del conjunto de la estructura queda:

$$\mathbf{K} \Delta = \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_T + \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_N \quad (2.37)$$

En esta ecuación:

- $\mathbf{P}_N$  es el vector de fuerzas exteriores actuantes sobre los nudos de unión de los elementos.
- $\mathbf{P}_v$ ,  $\mathbf{P}_s$ ,  $\mathbf{P}_T$ ,  $\mathbf{P}_b$ , son los vectores de fuerzas nodales equivalentes producidos por las fuerzas de volumen, de superficie, las deformaciones iniciales y las tensiones iniciales. Son todos conocidos y se obtienen por ensamblado de los correspondientes a los distintos elementos, según los nudos y direcciones adecuados. Respecto al vector  $\mathbf{P}_b$  hay que decir que si el estado de tensiones iniciales actuantes sobre la estructura está auto-equilibrado, este vector es nulo. Esto ocurre normalmente con las tensiones residuales. Sin embargo estas tensiones no están equilibradas si la estructura se obtiene partir de un material con unas tensiones auto-equilibradas y se elimina parte de ese material.

## 2.6. CONDICIONES DE LIGADURA

La ecuación de equilibrio deducida antes representa el equilibrio del conjunto de la estructura, considerando todos los elementos que la forman, así como todas las fuerzas exteriores. Para poderla resolver es necesario imponer las condiciones de ligadura, que indican cómo está sustentada la estructura.

La introducción de estas condiciones de ligadura se efectúa exactamente igual que en el método de rigidez para estructuras reticulares.

## 2.7. ENERGÍA POTENCIAL TOTAL

La densidad de energía elástica acumulada en un punto del elemento es:

$$U_0^e = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0)^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.38)$$

El potencial total acumulado en un elemento finito cualquiera es igual a la suma de la energía elástica acumulada en él más el potencial de las fuerzas exteriores  $V$ :

$$\Pi^e = U^e + V^e = \int_v U_0^e dv + V^e \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_v \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_v \boldsymbol{\sigma}_0^T \boldsymbol{\varepsilon} dv \\ & - \int_v \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv - \int_s \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds - \int_c \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds - \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{P}_N^e \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sustituyendo las deformaciones unitarias  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y los desplazamientos  $\mathbf{u}$  en función de las deformaciones nodales mediante las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{N}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} \delta^{eT} \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \delta^e - \delta^{eT} \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv + \delta^{eT} \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv \\ & - \delta^{eT} \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv - \delta^{eT} \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds - \delta^{eT} \int_c \mathbf{N}^T \mathbf{q}_c ds - \delta^{eT} \mathbf{P}_N^e \end{aligned} \quad (2.41)$$

En esta expresión se identifican la matriz de rigidez del elemento, así como los distintos vectores de fuerzas nodales equivalentes, con lo que se puede poner en forma más compacta:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \delta^{eT} \mathbf{K}^e \delta^e - \delta^{eT} \mathbf{P}_T^e - \delta^{eT} \mathbf{P}_b^e - \delta^{eT} \mathbf{P}_v^e - \delta^{eT} \mathbf{P}_s^e - \delta^{eT} \mathbf{P}_c^e - \delta^{eT} \mathbf{P}_N^e \quad (2.42)$$

El potencial total para el medio continuo se obtiene sumando el potencial de cada uno de los elementos que lo forman:

$$\Pi = \sum_e \Pi^e \quad (2.43)$$

Al sumar el potencial de los distintos elementos, se pueden ir ensamblando la matriz de rigidez y los vectores de fuerzas de los elementos según los distintos grados de libertad de la estructura, para obtener la siguiente expresión:

$$\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{P}_T - \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{P}_b - \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{P}_v - \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{P}_s - \Pi_c - \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{P}_N \quad (2.44)$$

En ella aparecen la matriz de rigidez de toda la estructura, y los correspondientes vectores de grados de libertad y fuerzas nodales equivalentes.

El término  $\Pi_c$  corresponde al potencial acumulado en las fronteras de conexión entre los elementos por las fuerzas de conexión  $\mathbf{q}_c$ . Este término es nulo si las funciones de interpolación se eligen con la condición de que no se acumule energía en las fronteras, como así se hace (véase el tercer criterio de convergencia).

El equilibrio de la estructura implica que el potencial total sea estacionario, para cualquier variación de las deformaciones nodales:

$$\delta \Pi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\Delta}} = 0 \quad (2.45)$$

Se obtiene así la ecuación de equilibrio de toda la estructura:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{P}_T + \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_N \quad (2.46)$$

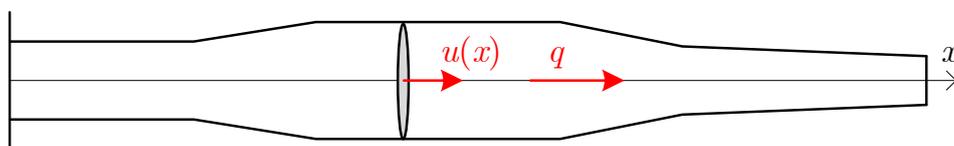
# Elasticidad unidimensional

## 3.1. INTRODUCCIÓN

En el problema unidimensional el dominio continuo que se analiza se extiende según una única dimensión  $x$ , teniendo el material un área variable con dicha coordenada  $A(x)$  (figura 3.1). Como fuerzas exteriores pueden actuar:

- Fuerzas por unidad de volumen  $q$ , en sentido axial.
- Fuerzas puntuales aplicadas  $F_{ci}$ .

El campo de deformaciones es una función  $u(x)$  de una sola variable, que define la deformación axial de un punto cualquiera del dominio. La deformación unitaria tiene sólo la componente axial  $\varepsilon = du / dx$ .



**Figura 3.1 Problema de elasticidad unidimensional**

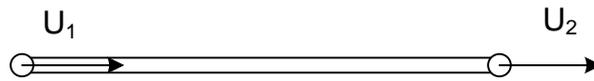
El problema de elasticidad unidimensional no es de gran aplicación práctica, pero su estudio tiene interés pues permite conocer las peculiaridades del MEF con ejemplos muy sencillos.

La ecuación diferencial que gobierna el problema se obtiene aplicando el equilibrio de fuerzas a un elemento diferencial (figura 3.2):

$$F = (F + dF) + q A dx \quad (3.1)$$

$$\frac{dF}{dx} + q A = 0 \quad (3.2)$$





**Figura 3.3 Elemento de dos nudos**

Con dos parámetros nodales, se puede interpolar una línea recta:  $u = ax + b$

Particularizando en los nudos 1 y 2 se obtiene:

$$\begin{aligned} U_1 &= ax_1 + b \\ U_2 &= ax_2 + b \end{aligned} \quad (3.8)$$

De estas expresiones se obtienen  $a$  y  $b$ ,

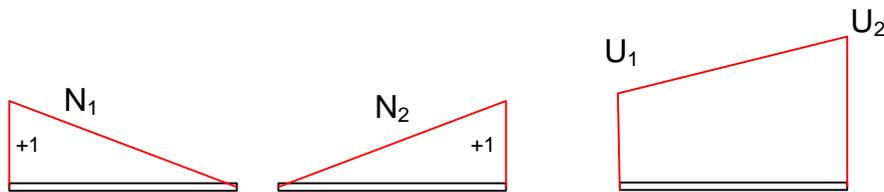
$$a = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad b = \frac{x_2 U_1 - x_1 U_2}{L} \quad (3.9)$$

Sustituyendo en la expresión inicial y reordenando, se obtiene la ley de interpolación:

$$u = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} U_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} U_2 \quad (3.10)$$

Las funciones de interpolación son líneas rectas que valen 1 en el nudo  $i$  y 0 en el otro nudo:

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.11)$$



**Figura 3.4 Funciones de interpolación. Elemento de dos nudos**

La deformación unitaria es:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \mathbf{B} \mathbf{N} \delta^e = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Se define la matriz  $\mathbf{B}$  como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Siendo  $L = x_2 - x_1$  la longitud del elemento.

La matriz elástica es sencillamente  $\mathbf{D} = [E]$

La matriz de rigidez resulta ser:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} A dx \quad (3.14)$$

Suponiendo  $E$  y  $A$  constantes se obtiene:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L^2} \int \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Esta es la matriz de rigidez del elemento de celosía, ya que este elemento finito de dos nudos coincide con dicho elemento estructural.

### 3.2.1 Elemento con área variable

Los grados de libertad, las funciones de interpolación y la matriz  $\mathbf{B}$  son las mismas que en el elemento de área constante.

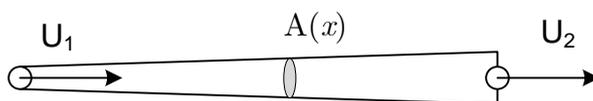


Figura 3.5 Elemento de área variable

La matriz de rigidez es:

$$\mathbf{K} = \int \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} A dx = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int A dx \quad (3.16)$$

En la integral se identifica el área media del elemento  $A_m$ , con lo que se obtiene:

$$\mathbf{K} = \frac{EA_m}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Se obtiene la misma expresión que para el elemento de área constante, pero usando el área media del elemento.

### 3.2.2 Tensiones

La tensión en el elemento (no incluyendo el efecto de las temperaturas) es:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{du}{dx} = E \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\sigma = \frac{E}{L} U_2 - U_1 \quad (3.19)$$

Se observa que el elemento produce un campo de tensión constante en todo su interior.

Además la tensión también es constante si el elemento es de área variable, en contradicción con la estática, pues lo que debe ser constante en este caso es la fuerza axial  $N$ , y no la tensión. Esto es debido a la hipótesis efectuada de variación lineal de la deformación  $u$ , que no es correcta para un elemento de área variable.

### 3.3. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

Se trata de definir las funciones de interpolación para elementos de tipo general, con dos o más nudos. Para ello resulta muy práctico el utilizar una coordenada  $\xi$  local al elemento, de tal forma que ésta siempre varíe de -1 en el nudo inicial a +1 en el nudo final. En este sistema de coordenadas local, el elemento siempre es de longitud 2.

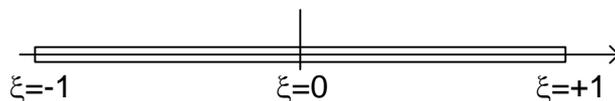


Figura 3.6 Coordenadas locales

- Elemento de dos nudos.

Las funciones de interpolación son:

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.20)$$

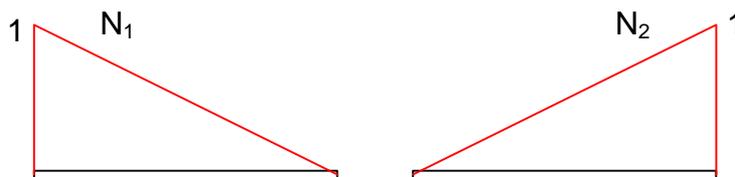


Figura 3.7 Elemento de dos nudos. Funciones de interpolación

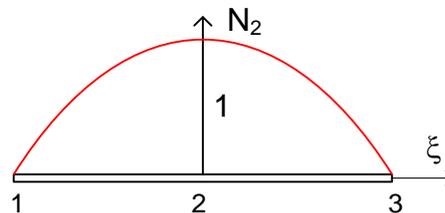
- Elemento de tres nudos.

La función  $N_2$  es una parábola que debe valer cero en las dos esquinas y 1 en el nudo central 2, luego su ecuación debe ser del tipo:

$$N_2 = C(1 - \xi)(1 + \xi) \quad (3.21)$$

Pero en  $\xi=0$  debe ser  $N_2(0)=1$ , de donde se deduce que el coeficiente  $C$  debe valer 1. Por consiguiente la función es:

$$N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) = 1 - \xi^2 \quad (3.22)$$



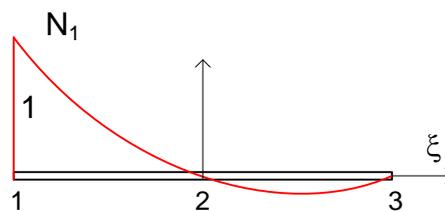
**Figura 3.8 Elemento de 3 nudos. Función de interpolación del nudo central**

La función  $N_1$  es una parábola que debe valer cero en los nudos 2 y 3, y debe valer la unidad en el nudo 1 (figura 3.9), luego debe ser del tipo:

$$N_1 = C\xi(1 - \xi) \quad (3.23)$$

Pero en  $\xi=-1$  debe ser  $N_1(-1)=1$ , luego el coeficiente  $C$  debe ser  $-1/2$ . Por consiguiente la función es:

$$N_1 = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \quad (3.24)$$

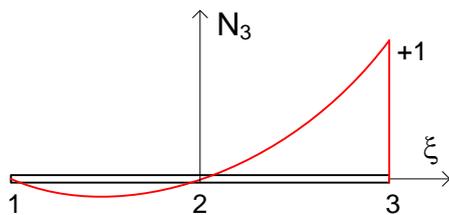


**Figura 3.9 Elemento de 3 nudos. Función de interpolación de nudo esquina**

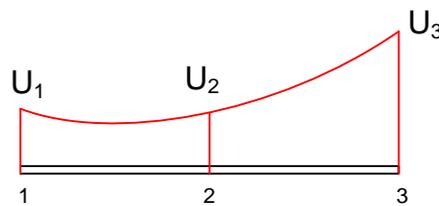
Análogamente, para el nudo 3 se obtiene (figura 3.10):

$$N_3 = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \quad (3.25)$$

Por lo tanto este elemento tiene una ley parabólica para al interpolación del desplazamiento (figura 3.11).



**Figura 3.10** Elemento de 3 nudos.  
Interpolación de nudo esquina



**Figura 3.11** Elemento de 3 nudos.  
Campo de deformaciones

▪ Elemento de cuatro nudos.

Sus funciones de interpolación se obtienen de forma análoga al elemento de tres nudos.

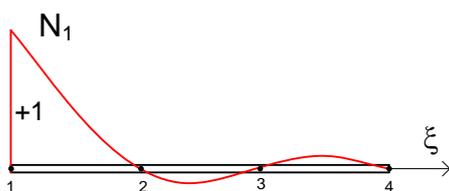
$$N_1 = \frac{-1}{16}(1-\xi)(1-3\xi)(1+3\xi) \quad (3.26)$$

$$N_2 = \frac{9}{16}(1+\xi)(1-\xi)(1-3\xi) \quad (3.27)$$

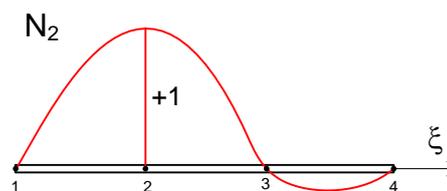
La obtención de las funciones de interpolación siguiendo este método requiere en algunas ocasiones cierta dosis de buena suerte, y fue bautizada por Zienkiewicz como formulación “serendipity”, inspirándose en la obra de Horace Walpole “*Los Príncipes de Serendip*” (1754).



**Figura 3.12** Elemento de cuatro nudos



**Figura 3.13** Elemento de 4 nudos.  
Interpolación de nudo esquina



**Figura 3.14** Elemento de 4 nudos.  
Interpolación de nudo interior

### 3.4. FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA

En el apartado anterior se han definido las funciones de interpolación en la coordenada local  $\xi$ . Para calcular la matriz  $\mathbf{B}$  es necesario hallar las derivadas de las funciones de interpolación respecto de  $x$ , y por lo tanto se hace necesario establecer algún tipo de relación entre la coordenada  $\xi$  y la  $x$  a fin de poder completar la derivación.

En la formulación isoparamétrica, esta relación se introduce mediante las mismas funciones de interpolación  $N$  usadas para interpolar la deformación, estableciendo la relación:

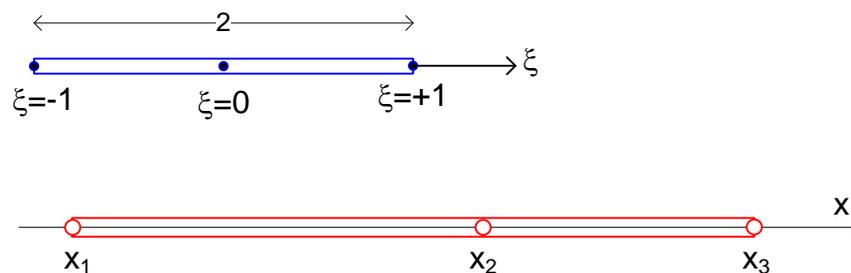
$$x = \sum N_i x_i = \mathbf{N} \mathbf{x}^e \quad (3.28)$$

El vector  $\mathbf{x}^e$  contiene las coordenadas de todos los nudos del elemento.

Así, para el elemento de tres nudos, la ley de interpolación de las coordenadas es:

$$x = \frac{\xi(\xi-1)}{2} x_1 + (1+\xi)(1-\xi) x_2 + \frac{\xi(\xi+1)}{2} x_3 \quad (3.29)$$

La principal ventaja de esta formulación radica en que los tres nudos no tienen porqué ser equidistantes, sino que el central (2) puede estar en cualquier posición entre el 1 y el 3 (sin coincidir con ellos). En coordenadas locales, sin embargo, el nudo central sigue estando en  $\xi=0$ . Esta transformación de coordenadas corresponde a una distorsión del elemento, que pasa a ser curvo, y cuyo mayor interés se manifiesta en los elementos bidimensionales.



**Figura 3.15 Interpolación de coordenadas**

Es posible asimismo generar elementos subparamétricos, en los cuales las funciones usadas para interpolar las coordenadas son de orden inferior a las usadas para interpolar las deformaciones. Lo más habitual en este caso es usar funciones lineales para interpolar las coordenadas, es decir apoyarse sólo en los dos nudos extremos para definir la geometría, con lo que los nudos interiores deben estar centrados en el elemento. El interés por los elementos subparamétricos se pone de manifiesto en el problema bidimensional.

### 3.4.1 Interpolación de deformaciones

La ley de interpolación de deformaciones para un elemento general de  $n$  nudos es:

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_n \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (3.30)$$

Empleando las funciones anteriores, esta ley será un polinomio de orden  $n-1$ .

### 3.4.2 Deformaciones unitarias. Matriz $\mathbf{B}$

La expresión general de las deformaciones unitarias es:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \dots & \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Esta expresión define la matriz  $\mathbf{B}$  como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \dots & \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Para obtener las derivadas de las funciones de interpolación respecto de  $x$ , se aplica la derivación en cadena:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (3.33)$$

La derivada de la función  $N$  respecto de la coordenada local  $\xi$  es conocida para cada elemento. La derivada de una coordenada respecto de la otra se puede evaluar empleando la ley de interpolación de coordenadas:

$$\frac{dx}{d\xi} = \sum \frac{dN_i}{d\xi} x_i = J \quad (3.34)$$

Donde se ha definido el jacobiano  $J$  de la transformación de coordenadas. Por lo tanto queda:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{1}{J} \quad (3.35)$$

La matriz  $\mathbf{B}$  queda finalmente:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \dots & \frac{dN_n}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Obsérvese que esta matriz no puede calcularse si  $J=0$ , lo cual ocurre si la transformación de coordenadas  $x/\xi$  no es correcta. Esto último puede ocurrir si algunos de los nudos son coincidentes entre sí, o no están dispuestos de forma ordenada en el elemento.

### 3.4.3 Matriz de rigidez

La expresión general de la matriz de rigidez es:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (3.37)$$

En ella la matriz elástica es un escalar  $\mathbf{D}=E$ , y el diferencial de volumen es:

$$dv = A dx = A J d\xi \quad (3.38)$$

Sustituyendo la matriz  $\mathbf{B}$ , se obtiene:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \dots & \frac{dN_n}{d\xi} \end{bmatrix} \frac{E}{J} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} \\ \dots \\ \frac{dN_n}{d\xi} \end{bmatrix} A J d\xi \quad (3.39)$$

Puede desarrollarse como:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{+1} \frac{E A}{J} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_1}{d\xi} \frac{dN_2}{d\xi} & \dots & \frac{dN_1}{d\xi} \frac{dN_n}{d\xi} \\ \frac{dN_2}{d\xi} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} \frac{dN_2}{d\xi} & \dots & \frac{dN_2}{d\xi} \frac{dN_n}{d\xi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dN_n}{d\xi} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_n}{d\xi} \frac{dN_2}{d\xi} & \dots & \frac{dN_n}{d\xi} \frac{dN_n}{d\xi} \end{bmatrix} d\xi \quad (3.40)$$

Estudiando la naturaleza de los distintos términos del integrando se puede deducir que si el jacobiano  $J$  es constante, el integrando es un polinomio. Sin embargo si  $J$  no es constante, el integrando es un cociente de polinomios. En el primer caso la integral puede efectuarse de forma exacta empleando métodos numéricos adecuados, mientras que en el segundo la integración numérica siempre es aproximada.

### 3.4.4 Vector de fuerzas nodales equivalentes

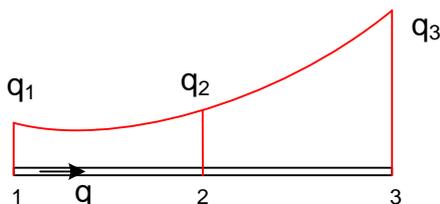
Su expresión general, para el caso unidimensional es:

$$\mathbf{P}_v = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q} dv \quad (3.41)$$

Donde  $q$  es la fuerza de volumen actuante sobre el elemento, que en este caso es un escalar  $q$ , pues sólo tiene componente en  $x$ . Esta fuerza es en principio es variable, pero con objeto de simplificar la práctica del método, es habitual restringir la posible variación de la fuerza de volumen y limitarla sólo a aquellas que pueden ser representadas por las propias funciones de interpolación. De esta forma la variación de la fuerza de volumen se puede representar mediante una interpolación de sus valores nodales, empleando las propias funciones de interpolación:

$$q = \mathbf{N} \mathbf{q}_v^e \quad (3.42)$$

Siendo  $\mathbf{q}_v^e$  los valores nodales de la fuerza de volumen, que son constantes.



**Figura 3.16 Fuerza distribuida axial**

Con esta aproximación, perfectamente válida a efectos prácticos, se obtiene la siguiente expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{P}_v = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \mathbf{q}_v^e = \mathbf{M} \mathbf{q}_v^e \quad (3.43)$$

Considerando la estructura de la matriz  $\mathbf{N}$ , la expresión de la matriz  $\mathbf{M}$  es:

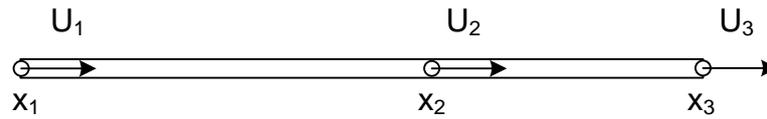
$$\mathbf{M} = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv = \int \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & \dots & N_1 N_n \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & \dots & N_2 N_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_n N_1 & N_n N_2 & \dots & N_n N_n \end{bmatrix} A J d\xi \quad (3.44)$$

El cálculo de la matriz  $\mathbf{M}$  no presenta ningún problema, efectuándose en el sistema local de coordenadas, en el que se conoce la matriz de interpolación  $\mathbf{N}$ . Todos los términos que la forman son polinomios, por lo que se puede evaluar de forma exacta por métodos numéricos.

### 3.5. ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE TRES NUDOS

La matriz de funciones de interpolación para este elemento es:

$$\mathbf{N} = \left[ \frac{\xi(\xi-1)}{2} \quad (1-\xi)(1+\xi) \quad \frac{\xi(\xi+1)}{2} \right] \quad (3.45)$$



**Figura 3.17 Elemento isoparamétrico de tres nudos**

El jacobiano de la transformación es:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum \frac{dN_i}{d\xi} x_i = \frac{2\xi - 1}{2} x_1 - 2\xi x_2 + \frac{2\xi + 1}{2} x_3 \quad (3.46)$$

No es, en general, constante, y mide la distorsión en la transformación  $x/\xi$ . Ocurren varios casos:

- Si  $x_1 < x_2 < x_3$  el valor de  $J$  es siempre positivo.
- Si  $x_1 = x_2$ , es decir que el elemento está colapsado, el valor de  $J$  es nulo en  $\xi = -1/2$ .
- Si  $x_2 = x_3$ , es decir que el elemento está colapsado, el valor de  $J$  es nulo en  $\xi = +1/2$ .
- Si el nudo central está en el centro del elemento:  $x_2 = (x_1 + x_3)$ , el valor de  $J$  es constante:

$$J = \frac{x_3 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (3.47)$$

En este caso el elemento no está distorsionado

La matriz **B** es:

$$\mathbf{B} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{2\xi - 1}{2} & -2\xi & \frac{2\xi + 1}{2} \end{array} \right] \quad (3.48)$$

La matriz de rigidez vale:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{+1} \frac{E A}{J} \left[ \begin{array}{ccc} \xi^2 - \xi + \frac{1}{4} & -2\xi^2 + \xi & \xi^2 - \frac{1}{4} \\ & 4\xi^2 & -2\xi^2 - \xi \\ \text{simétrica} & & \xi^2 + \xi + \frac{1}{4} \end{array} \right] d\xi \quad (3.49)$$

Para tratar elementos de área variable, se procede a interpolar ésta a través de sus valores nodales, al igual que se ha hecho con las coordenadas:

$$A = \mathbf{N} \mathbf{A}^e \quad (3.50)$$

Siendo  $\mathbf{A}^e$  los valores nodales del área. Por supuesto que esta aproximación limita la variación del área a aquellos casos en los que dicha variación pueda representarse de forma exacta mediante las funciones de interpolación.

La matriz  $\mathbf{M}$  que proporciona las fuerzas nodales equivalentes vale:

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^{+1} A J \begin{bmatrix} \frac{(\xi^2 - \xi)^2}{4} & \frac{(\xi^2 - \xi)(1 - \xi^2)}{2} & \frac{(\xi^2 - \xi)(\xi^2 + \xi)}{4} \\ & (1 - \xi^2)^2 & \frac{(\xi^2 + \xi)(1 - \xi^2)}{2} \\ \text{simétrica} & & \frac{(\xi^2 + \xi)^2}{4} \end{bmatrix} d\xi \quad (3.51)$$

La distribución de tensiones es:

$$\sigma = E\varepsilon = E \mathbf{B} \delta^e = \frac{E}{J} \left( \frac{2\xi - 1}{2} U_1 - 2\xi U_2 + \frac{2\xi + 1}{2} U_3 \right) \quad (3.52)$$

*Caso particular:* elemento de tres nudos, de longitud  $L$ , con el nudo central centrado y área constante  $A$ . Las expresiones anteriores se simplifican pues  $J = L/2$ .

Matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Matriz de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{M} = \frac{AL}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Distribución de tensiones: es lineal en el elemento, por ser  $J$  constante.

$$\sigma = \frac{E}{L} (2\xi - 1)U_1 - 4\xi U_2 + (2\xi + 1)U_3 \quad (3.55)$$

## Elasticidad bidimensional

### 4.1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de elasticidad bidimensional son muy frecuentes en Ingeniería, y son asimismo los primeros en los que se aplicó el MEF. En este caso el medio continuo que se analiza es plano, y se considera situado en el plano XY. Se denomina  $t$  al espesor del dominio en su dirección transversal, el cual se considera despreciable frente a las dimensiones del dominio en el plano XY.

La posición de un punto está definida por dos coordenadas  $(x,y)$ , y su deformación tiene dos componentes  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  en las direcciones  $x,y$  respectivamente. El campo de deformaciones es por lo tanto un vector:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Dentro de la elasticidad en dos dimensiones existen dos problemas diferentes:

- Tensión plana: cuando la tensión  $\sigma_z$  en sentido perpendicular al plano XY es cero, ya que el sólido puede dilatarse libremente en el sentido de su espesor. Por lo tanto existe una deformación unitaria  $\varepsilon_z$  no nula en dicha dirección.
- Deformación plana: cuando en el sentido del espesor del sólido no hay posibilidad de deformación, es decir  $\varepsilon_z=0$  por lo que se genera una tensión en dicha dirección  $\sigma_z$  no nula.

En ambos casos la tensión y la deformación en la dirección  $z$  no contribuyen a la energía elástica del sistema.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el problema son de orden  $m=2$  en las deformaciones, pues contienen la derivada primera de las tensiones, que a su vez son derivadas de las deformaciones. En la expresión del potencial total del sistema (ver apartado 2.7) aparecen las deformaciones unitarias  $\varepsilon$ , que son las derivadas primeras

de las deformaciones  $\mathbf{u}$ , luego el orden de derivación de las incógnitas primarias  $\mathbf{u}$  en el potencial es  $n=1$ . Se requieren por lo tanto funciones de interpolación con continuidad  $C^0$  para asegurar la convergencia del método.

## 4.2. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

El campo de deformaciones en el interior del elemento se aproxima mediante la expresión habitual:

$$u = \sum N_i U_i \quad v = \sum N_i V_i \quad (4.2)$$

En forma matricial es:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.3)$$

Las deformaciones nodales del elemento  $\boldsymbol{\delta}^e$  se agrupan en un vector columna:

$$\boldsymbol{\delta}^e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n]^T \quad (4.4)$$

siendo  $n$  el número de nudos del elemento. La matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  tiene 2 filas y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nudos del elemento. La estructura de esta matriz siempre es la misma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

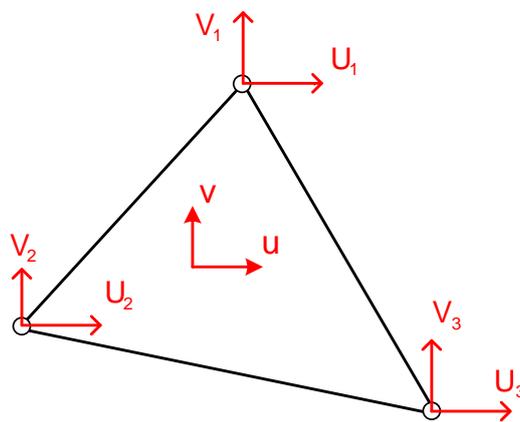


Figura 4.1 Interpolación de deformaciones

## 4.3. DEFORMACIONES UNITARIAS

Las deformaciones unitarias en un punto del elemento finito son:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Se pueden poner en la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} \quad (4.7)$$

donde se identifica al operador matricial  $\boldsymbol{\partial}$  que pasa de las deformaciones  $\mathbf{u}$  a las deformaciones unitarias. Sustituyendo las deformaciones  $\mathbf{u}$  en función de las deformaciones nodales, a través de las funciones de interpolación, se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.8)$$

Se identifica de esta forma la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Esta matriz relaciona las deformaciones de los nudos con las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento. Por lo tanto  $\mathbf{B}$  representa el campo de deformaciones unitarias que se supone existe en el interior del elemento finito, como consecuencia de la hipótesis de interpolación de deformaciones efectuada.

Esta matriz se puede poner en la forma:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n] \quad (4.10)$$

Siendo cada una de las submatrices  $\mathbf{B}_i$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Nótese que debido a la estructura de  $\mathbf{B}$ , las deformaciones unitarias en el interior del elemento se pueden poner en función de las deformaciones nodales en la forma:

$$\varepsilon_x = \sum \frac{\partial N_i}{\partial x} U_i \quad \varepsilon_y = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y} V_i \quad \gamma_{xy} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y} U_i + \sum \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i \quad (4.12)$$

#### 4.4. ESTADO DE TENSIONES. ECUACIÓN CONSTITUTIVA

El estado de tensiones en dos dimensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

La ecuación constitutiva, en ausencia de temperaturas, es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.14)$$

Para un material elástico lineal e isótropo la matriz elástica  $\mathbf{D}$  es constante. Su expresión es diferente para los dos problemas de elasticidad plana.

- *Tensión plana.* En este caso la tensión en dirección transversal al material ( $z$ ) es nula, pero éste es libre de dilatarse en dicha dirección  $z$ :  $\sigma_z = 0 \quad \varepsilon_z \neq 0$

Se parte de la ecuación constitutiva en el estado tridimensional:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Imponiendo en la tercera ecuación la condición  $\sigma_z = 0$  se obtiene:

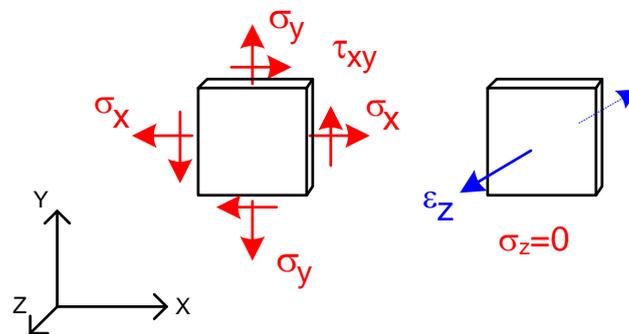
$$\lambda \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z = 0 \quad (4.16)$$

De donde se calcula el valor de la deformación unitaria transversal al material:

$$\varepsilon_z = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.17)$$

Sustituyendo en la expresión inicial del estado tridimensional (y considerando además que  $\sigma_{yz}=0$ ,  $\sigma_{zx}=0$ ), se obtiene la matriz elástica del estado plano:

$$\mathbf{D}^{TP} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$



**Figura 4.2 Estado de tensión plana**

- *Deformación plana.* En este caso la deformación unitaria transversal al material ( $z$ ) es nula, pues éste es incapaz de dilatarse en dirección  $z$ . En consecuencia debe existir tensión en dicha dirección, es decir:  $\varepsilon_z = 0 \quad \sigma_z \neq 0$

Para obtener la ecuación constitutiva es suficiente con hacer cero las deformaciones unitarias correspondientes en la ecuación tridimensional: basta por lo tanto con extraer las filas y columnas correspondientes al estado plano. De esta forma se obtiene la siguiente matriz elástica:

$$\mathbf{D}^{DP} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Nótese que aparece una tensión en la dirección  $z$ , cuyo valor se deduce simplemente de la ecuación en la dirección  $z$ :

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.20)$$

#### 4.5. DEFORMACIONES UNITARIAS INICIALES. TEMPERATURAS

La presencia de deformaciones unitarias iniciales introduce un nuevo término en la ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (4.21)$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  el vector de las deformaciones unitarias iniciales existentes en el material en el punto considerado, que deben ser conocidas.

Si las deformaciones unitarias iniciales  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  están producidas por un incremento de temperatura  $T$ , su valor es, para el estado de tensión plana:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0Tx} \\ \varepsilon_{0Ty} \\ \gamma_{0Txy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Las deformaciones unitarias iniciales son iguales en ambas direcciones  $x$  e  $y$ , y además no se genera deformación de cortante.

Para el caso de deformación plana, a la dilatación  $\alpha T$  en las dos direcciones  $x, y$  se suma la imposibilidad de dilatarse según  $z$ , lo que origina una tensión en dicho sentido, la cual genera a su vez una deformación unitaria según los ejes  $x, y$ , por efecto de Poisson, y que se suma a las iniciales:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0Tx} \\ \varepsilon_{0Ty} \\ \gamma_{0Txy} \end{Bmatrix} = (1+\nu) \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

#### 4.6. ELEMENTO TRIANGULAR

Este elemento tiene seis desplazamientos en los nudos, que forman un vector:

$$\boldsymbol{\delta}^e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3]^T \quad (4.24)$$

Los desplazamientos de un punto cualquiera dentro del elemento se pueden representar en función de estos seis valores nodales, mediante una expresión

polinómica. Dado que hay seis deformaciones nodales, el polinomio sólo podrá tener seis términos:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (4.25)$$

Estas expresiones pueden ponerse en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.27)$$

Los seis parámetros  $\alpha_i$  se pueden calcular aplicando la expresión (4.26) a los tres nudos del elemento, y agrupando las seis ecuaciones obtenidas (dos en cada nudo):

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

es decir:

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.29)$$

Despejando  $\boldsymbol{\alpha}$  y sustituyendo en la expresión de  $\mathbf{u}$  se obtiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.30)$$

Esta expresión define las funciones de interpolación como:

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \mathbf{C}^{-1} \quad (4.31)$$

Efectuando el producto de matrices anterior se obtiene la expresión:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Las tres funciones de interpolación correspondientes a los tres nudos son:

$$N_1 = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2A} \quad N_2 = \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2A} \quad N_3 = \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2A} \quad (4.33)$$

Las distintas constantes dependen de la geometría del elemento:

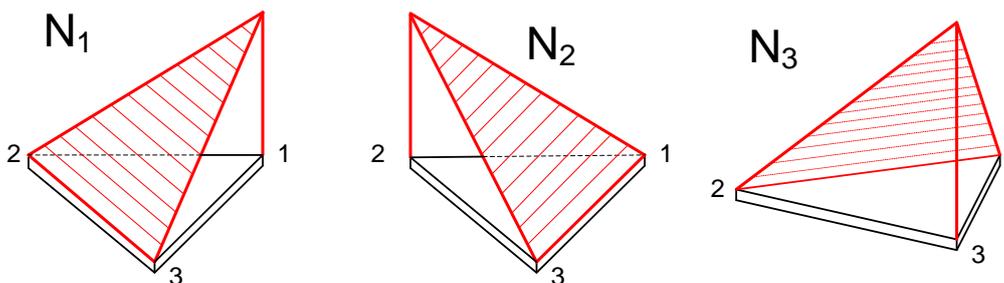
$$\begin{aligned}
 a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\
 a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\
 a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

En la ecuación anterior,  $A$  es el área del elemento, cuyo valor se obtiene mediante el determinante:

$$A = \frac{1}{2} \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}
 \tag{4.35}$$

Se observa que si el elemento tiene área nula (dos nudos coincidentes) eso se manifiesta en  $A=0$  y no se pueden calcular las  $N_i$ . Estas funciones son planos de valor 1 en el nudo  $i$  y 0 en los otros dos nudos.

Al ser las tres funciones de interpolación planos (Figura 4.3), el campo de desplazamientos en el interior del elemento es también un plano que pasa por los tres valores nodales del desplazamiento. En consecuencia, si se emplea este elemento, el campo de deformaciones en una dirección cualquiera  $u$  o  $v$  se aproxima mediante una superficie poliédrica de facetas triangulares.



**Figura 4.3** Funciones de interpolación del elemento triangular

- El estado de deformación unitaria viene definido por la matriz  $\mathbf{B}$ , que en este caso vale:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}
 \tag{4.36}$$

Efectuando las derivadas, la expresión de esta matriz es:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Esta matriz se puede poner en la forma:

$$\mathbf{B} = \left[ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \right] \quad (4.38)$$

Se observa que la matriz  $\mathbf{B}$  es constante, y no depende de  $x, y$ . Por lo tanto las deformaciones unitarias  $\epsilon$  son constantes en todo el elemento, y también lo serán las tensiones, que son proporcionales a ellas.

- La matriz de rigidez del elemento se obtiene a partir de su expresión general. Dada la estructura de  $\mathbf{B}$ , se puede poner en la forma:

$$\mathbf{K} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{D} \left[ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \right] t dx dy \quad (4.39)$$

siendo  $t$  el espesor del elemento. La matriz  $\mathbf{K}$  se puede dividir en 3x3 submatrices, que relacionan a los tres nudos entre sí:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Cada una de ellas tiene la expresión:

$$\mathbf{K}^{ij} = \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dx dy \quad (4.41)$$

Dado que  $\mathbf{B}_i$  y  $\mathbf{D}$  son constantes, su valor resulta ser (suponiendo espesor  $t$  uniforme):

$$\mathbf{K}^{ij} = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_j D_{11} + c_i c_j D_{33} & b_i c_j D_{12} + c_i b_j D_{33} \\ c_i b_j D_{12} + b_i c_j D_{33} & c_i c_j D_{11} + b_i b_j D_{33} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

donde  $D_{ij}$  son los coeficientes de la matriz elástica  $\mathbf{D}$ .

- El estado de tensiones en un punto cualquiera del elemento es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.43)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \dots \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Se observa que el estado de tensiones no depende de las coordenadas  $x, y$  sino que es uniforme en todo el elemento. Por lo tanto, si se emplea este elemento el campo de tensiones en el material se aproxima mediante una serie de valores constantes, formando una superficie escalonada. En consecuencia este elemento sólo debe utilizarse con mallados muy finos si se prevé un campo de tensiones variable.

- Las fuerzas nodales equivalentes a las deformaciones iniciales térmicas son:

$$\mathbf{P}_T = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{0T} dv = \int \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \end{Bmatrix} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{0T} t dx dy \quad (4.45)$$

Suponiendo un incremento de temperatura  $T$  uniforme en todo el elemento, el integrando de la expresión anterior resulta ser constante con lo que se obtiene, para el caso de tensión plana:

$$\mathbf{P}_T = \begin{Bmatrix} P_{T1x} \\ P_{T1y} \\ P_{T2x} \\ P_{T2y} \\ P_{T3x} \\ P_{T3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA\alpha T t}{1-\nu} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

#### 4.7. ELEMENTO RECTANGULAR

El desarrollo de este elemento sigue un camino paralelo al del triángulo. Para mayor sencillez en la formulación se utiliza en este elemento el sistema de ejes local mostrado en la figura 4.4.

- El vector columna de desplazamientos nodales es:

$$\boldsymbol{\delta}^e = \left[ U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad U_4 \quad V_4 \right]^T \quad (4.47)$$

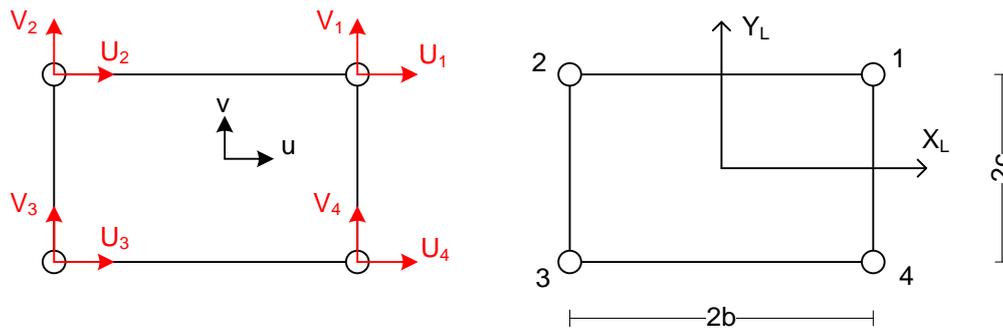


Figura 4.4 Elemento rectangular

Con los ocho grados de libertad, el campo de desplazamientos en el interior del elemento se puede representar mediante dos polinomios bilineales, de cuatro términos:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.49)$$

El cálculo de  $\boldsymbol{\alpha}$  se efectúa nuevamente particularizando la ecuación anterior para los cuatro nudos, a base de sustituir en  $x, y$  las coordenadas de dichos nudos, que con el sistema de ejes elegido son muy sencillas. Queda una ecuación del tipo:

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.50)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es de tamaño  $8 \times 8$  y sus términos son todos conocidos en función del tamaño del elemento. Por ejemplo sus dos primeras filas son:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & +b & +c & +bc & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & +b & +c & +bc \\ \hline 1 & -b & +c & -bc & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Despejando  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\delta}^e$  y sustituyendo en la ecuación (4.49) se obtiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\delta}^e \quad (4.52)$$

Se identifica la matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N} = \mathbf{R}\mathbf{C}^{-1}$ . Operando se llega a:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Las distintas funciones de interpolación son del tipo bilineal:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (b+x)(c+y)/A \\
 N_2 &= (b-x)(c+y)/A \\
 N_3 &= (b-x)(c-y)/A \\
 N_4 &= (b+x)(c-y)/A
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

La figura 4.5 muestra el aspecto de dos de estas funciones.

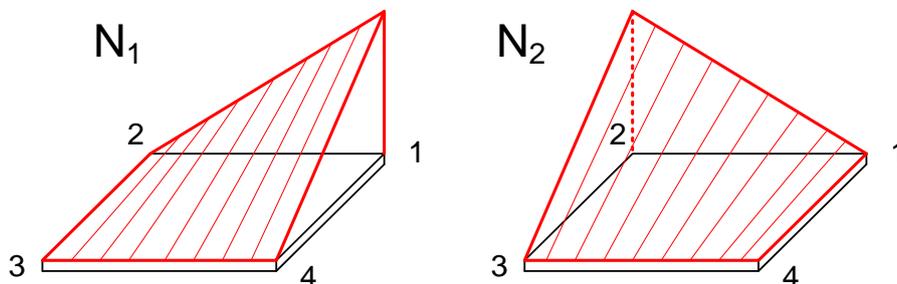


Figura 4.5 Funciones de interpolación del elemento rectangular

- La matriz  $\mathbf{B}$  para este elemento es de  $3 \times 8$ , y está formada por cuatro matrices  $\mathbf{B}_i$  de  $3 \times 2$ , una para cada nudo:

$$\mathbf{B} = \left[ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4 \right]
 \tag{4.55}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{A} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc}
 (c+y) & 0 & -(c+y) & 0 & -(c-y) & 0 & (c-y) & 0 \\
 0 & (b+x) & 0 & (b-x) & 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) \\
 (b+x) & (c+y) & (b-x) & -(c+y) & -(b-x) & -(c-y) & -(b+x) & (c-y)
 \end{array} \right]$$

Se observa que esta matriz tiene términos lineales, por lo que ésta es la variación permitida para el campo de deformaciones unitarias en el interior del elemento. De la misma forma, las tensiones también pueden tener una variación lineal en el elemento. Este elemento es por lo tanto bastante más preciso que el triangular, que sólo permitía valores constantes de la tensión y la deformación unitaria.

- La matriz de rigidez de este elemento es de tamaño  $8 \times 8$ , y se calcula utilizando la expresión habitual:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{B}_4^T \end{bmatrix} \mathbf{D} \left[ \mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_4 \right] t dx dy
 \tag{4.56}$$

La matriz  $\mathbf{K}$  se puede dividir en  $4 \times 4$  submatrices, que relacionan a los cuatro nudos entre sí. Cada una de ellas vale:

$$\mathbf{K}^{ij} = \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dx dy
 \tag{4.57}$$

Esta matriz se obtiene referida al sistema de ejes local del elemento. Para pasarla al sistema general se aplica una transformación de coordenadas plana.

#### 4.8. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN DE TIPO $C^0$

En los apartados anteriores se han desarrollado elementos finitos sencillos, a base de definir un polinomio interpolante de las deformaciones y a continuación determinar los coeficientes de dicho polinomio a base de ajustarlo a los valores nodales de las deformaciones. Una vez ajustado este polinomio y determinadas las funciones de interpolación  $N_i$ , el proceso de cálculo de las propiedades del elemento es siempre el mismo, con independencia del tipo de elemento. La definición de las funciones de interpolación es por lo tanto el paso fundamental en el análisis por el MEF, y de él depende en gran manera la precisión de los resultados obtenidos.

La matriz  $\mathbf{N}$  tiene tantas filas como desplazamientos se consideren para un punto del continuo (dos en el caso plano), y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nudos del elemento. La estructura de esta matriz siempre es la misma, y para el caso plano es:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

siendo  $n$  el número de nudos del elemento. Resulta por lo tanto de gran interés definir las funciones de interpolación de los nudos  $N_i$ , para cada tipo de elemento.

En los apartados siguientes se presentan funciones de interpolación con compatibilidad de tipo  $C^0$ , es decir que garantizan la continuidad de la propia función en los bordes entre elementos.

Las funciones de interpolación siempre son del tipo polinómico. El número de términos de éste polinomio viene determinado por el número de grados de libertad del elemento, que define el número de parámetros independientes que pueden utilizarse para definir el polinomio. En general se trata de utilizar polinomios completos del mayor grado posible. El número de términos que aparecen en un polinomio de grado dado y dos variables  $x, y$ , se puede deducir del triángulo de Pascal. Por ejemplo: un polinomio completo de grado 1 requiere tres términos, el de grado 2 requiere seis términos, el de grado 3, diez términos, etc.

##### 4.8.1 Elementos rectangulares. Formulación Serendipity

En esta formulación las funciones de interpolación se definen de la siguiente manera:

- Se utilizan únicamente nudos situados en los contornos del elemento.
- Se utiliza un sistema de coordenadas local al elemento  $\xi, \eta$ , con origen en su centro y normalizadas de tal forma que valen +1 y -1 en sus extremos. En este

sistema de coordenadas local, el elemento queda representado como un cuadrado de lado 2.

- El número de nudos existente en cada lado del elemento define el grado del polinomio interpolado en dicho lado.
- La función de interpolación completa es el producto de las funciones en cada dirección.

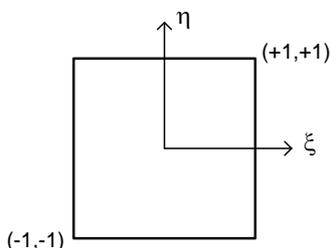


Figura 4.6 Coordenadas locales normalizadas

#### 4.8.1.1 Elemento de cuatro nudos

Las funciones de este elemento son:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1, 4 \quad (4.59)$$

Siendo  $\xi_i, \eta_i$  las coordenadas del nudo  $i$ . Estas funciones son bilineales, y son las mismas que se dedujeron para el elemento rectangular, aunque ahora están expresadas en las coordenadas locales  $\xi, \eta$ . Para desarrollos posteriores, a las funciones de este elemento se les denomina funciones básicas, y se designan como  $\hat{N}$ .

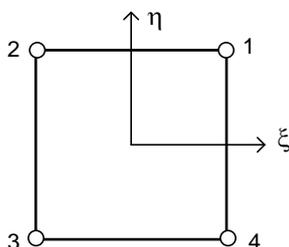


Figura 4.7 Elemento de cuatro nudos

#### 4.8.1.2 Elemento de ocho nudos

En cada lado las funciones de interpolación varían cuadráticamente, ya que hay tres nudos en cada uno. Adoptando la numeración de la figura 4.8, las funciones para los nudos centrales de los distintos lados son:

$$\begin{aligned}
 N_k &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_k) & k = 2 - 6 & & \xi_k = 0 \\
 N_k &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_k) & k = 4 - 8 & & \eta_k = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

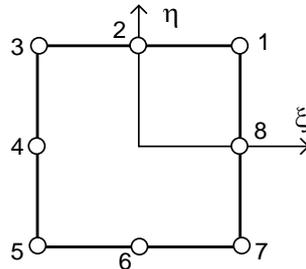


Figura 4.8 Elemento de ocho nudos

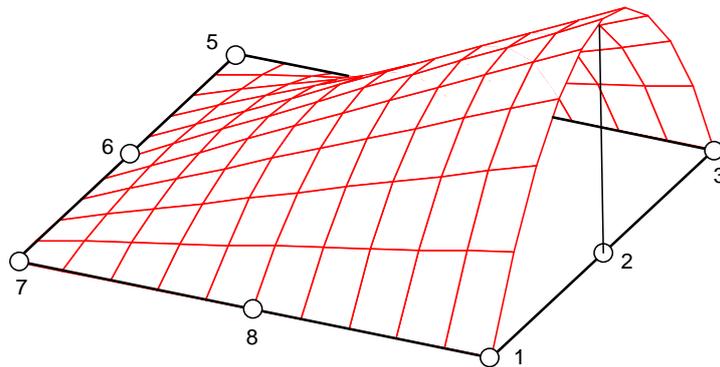


Figura 4.9 Elemento de 8 nudos. Función de interpolación de un nudo central

Al introducirse un nudo en el centro de un lado, las funciones de los nudos de las esquinas se calculan modificando las básicas  $\hat{N}_i$  de la forma siguiente (figura 4.10):

$$N_i = \hat{N}_i - \frac{1}{2} N_{k1} - \frac{1}{2} N_{k2}
 \tag{4.61}$$

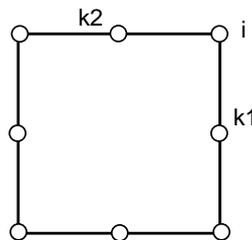


Figura 4.10 Corrección de nudos esquina

Es decir que a cada función básica de una esquina se le resta 1/2 de la función de los dos nudos intermedios de los lados adyacentes. Efectuando dicha operación para los cuatro nudos de las esquinas se obtienen sus funciones de interpolación:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad i = 1 - 3 - 5 - 7 \quad (4.62)$$

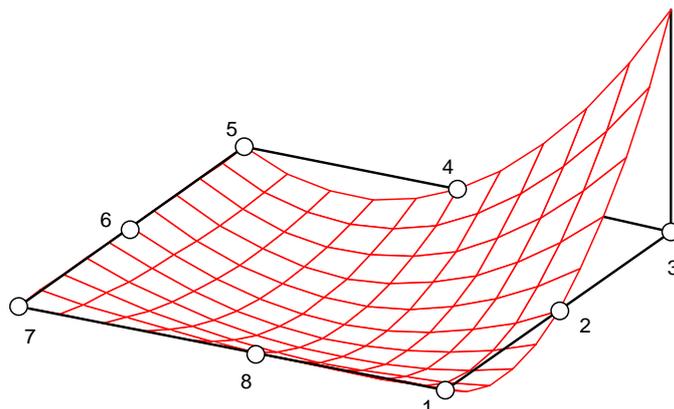


Figura 4.11 Elemento de 8 nudos. Función de interpolación de nudo esquina

### 4.8.1.3 Elemento de doce nudos

En cada lado del elemento la variación de las funciones de interpolación es cúbica, al disponerse de cuatro nudos para definirla.

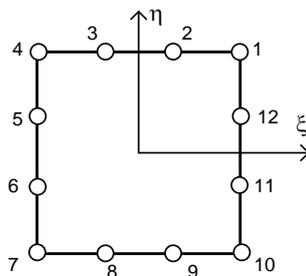


Figura 4.12 Elemento de doce nudos

Los dos nudos intermedios de un lado cualquiera corresponden a valores  $+1/3$  y  $-1/3$  de la coordenada. Las funciones de dichos nudos intermedios se pueden obtener de forma intuitiva, definiendo una cúbica que adopte los valores deseados en los nudos:

$$N_k = \frac{9}{32}(1 + \xi\xi_k)(1 + 9\eta\eta_k)(1 - \eta^2) \quad i = 5 - 6 - 11 - 12 \quad \xi_k = \pm 1$$

$$N_k = \frac{9}{32}(1 + \eta\eta_k)(1 + 9\xi\xi_k)(1 - \xi^2) \quad i = 2 - 3 - 8 - 9 \quad \eta_k = \pm 1 \quad (4.63)$$

Para los nudos de esquina se parte de las funciones básicas del elemento de cuatro nudos  $\hat{N}_i$ . Al introducir los nudos intermedios las funciones básicas se ven afectadas de la forma siguiente:

$$N_i = \hat{N}_i - \frac{2}{3} N_{k1} - \frac{1}{3} N_{k2} \quad (4.64)$$

donde  $i$  es el nudo esquina, y  $k1$  y  $k2$  son los dos nudos intermedios adyacentes, siendo  $k1$  el más próximo a  $i$  y  $k2$  el más lejano (figura 4.13).

Para el otro nudo esquina del lado, que llamaremos  $j$ , es:

$$N_j = \hat{N}_j - \frac{2}{3}N_{k2} - \frac{1}{3}N_{k1} \quad (4.65)$$

Esta corrección debe hacerse para todos los lados y todas las esquinas del elemento. Se obtiene la expresión siguiente, que es válida para los cuatro nudos esquina:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(-10 + 9\xi^2 + 9\eta^2) \quad i = 1 - 4 - 7 - 10 \quad (4.66)$$

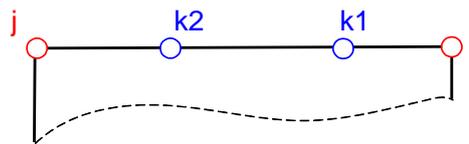


Figura 4.13 Corrección de nudos esquina

#### 4.8.1.4 Elementos con número de nudos variable

Estos elementos se usan para servir de transición entre zonas discretizadas con distintos tipos de elementos, como se muestra en la figura 4.14.

La obtención de sus funciones de interpolación puede hacerse de forma directa, pero dada la gran cantidad de casos que pueden presentarse, lo mejor es seguir un camino sistemático:

- Para los nudos intermedios de los lados, se calculan sus  $N_k$  según las expresiones antes indicadas, en función de cuántos nudos intermedios haya en ese lado.
- Para los nudos de las esquinas se corrigen las funciones básicas del elemento de cuatro nudos  $\hat{N}_i$ , en función de los nudos que aparezcan en los lados adyacentes a cada esquina, como se ha indicado para los elementos de tres y cuatro nudos por lado.

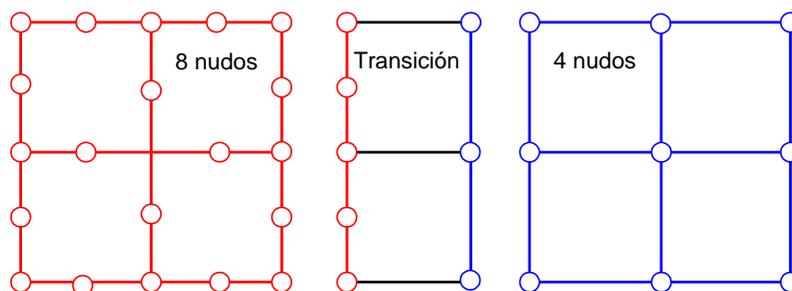
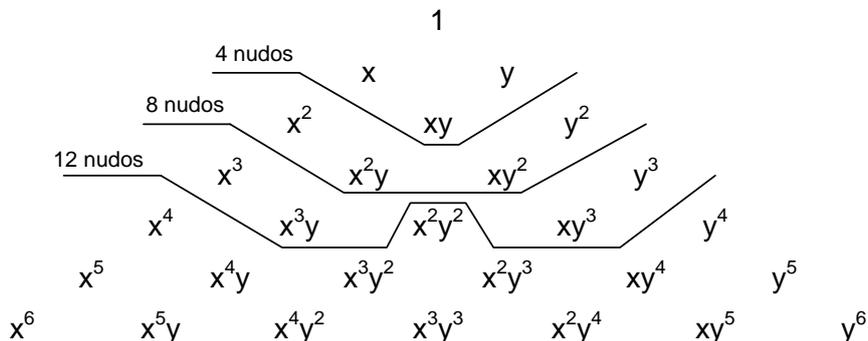


Figura 4.14 Elementos con número de nudos variable

### 4.8.1.5 Grado de los polinomios generados

Los términos de los polinomios utilizados por los distintos elementos en formulación Serendipity se pueden observar en el triángulo de Pascal:



Se observa que disminuye el número de términos de grado elevado, con respecto a la interpolación de Lagrange. Por ejemplo en el elemento cuadrático se disminuye el número de términos en exceso de tres a dos, y en el cúbico se disminuye de seis a dos.

Sin embargo utilizando únicamente nudos situados en los contornos, como máximo se puede generar un polinomio completo hasta grado 3. Si se quiere pasar a grado cuatro o superior, hay que añadir nudos intermedios. Esto ocurre en el elemento de cinco nudos por lado, que tiene 17 nudos (16 en los lados y uno interior).

### 4.8.2 Elementos rectangulares - Interpolación de Lagrange

Se utilizan polinomios de Lagrange como funciones de interpolación, que tienen la propiedad de valer 1 en un nudo y 0 en los demás nudos. Se utilizan las coordenadas locales al elemento  $\xi, \eta$ , normalizadas de tal forma que valen +1 y -1 en los extremos del elemento.

En una dimensión, el polinomio de Lagrange de grado  $n$  que pasa por el nudo  $i$ , se ajusta a  $n+1$  puntos, y vale 1 en el nudo  $i$ , y cero en los demás (Figura 4.15):

$$l_i^n(\xi) = \prod_{j=0, n; j \neq i} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \tag{4.67}$$

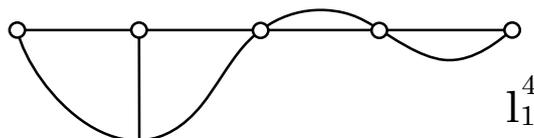
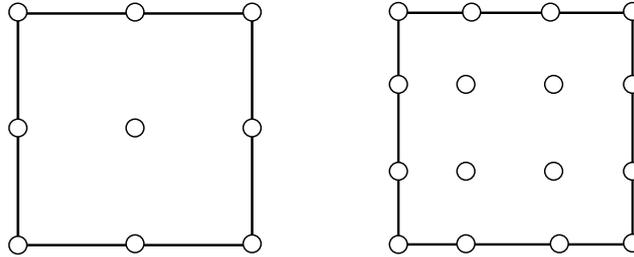


Figura 4.15 Interpolación de Lagrange

En dos dimensiones, la función de interpolación del nudo  $i$  se obtiene como producto de dos polinomios de Lagrange, uno en cada dirección. El orden de cada polinomio depende del número de nudos en cada dirección:

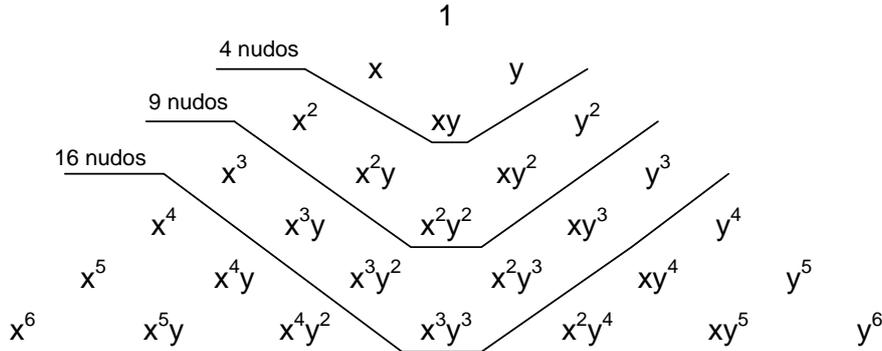
$$N_i(\xi, \eta) = l_i^n(\xi) l_i^m(\eta) = \prod_{j=0, n; j \neq i} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \prod_{k=0, n; k \neq i} \frac{(\eta - \eta_k)}{(\eta_i - \eta_k)} \tag{4.68}$$

siendo  $n$  y  $m$  el número de divisiones en cada dirección.



**Figura 4.16 Elementos con interpolación de Lagrange en dos dimensiones**

Estas funciones  $N_i$  son muy fáciles de generar, pero tienen dos problemas: el primero es el gran número de nudos que introducen en el elemento, aumentando el número de ecuaciones a resolver. El segundo es que no utilizan polinomios completos, sino que consideran muchos términos de grado elevado, que son peores para ajustar la solución, pues introducen ondulaciones en ella (términos parásitos). Sin embargo, por esta característica, son más adecuados para tratar problemas de transmisión de ondas que requieren de términos de orden alto en la solución.



### 4.8.3 Elementos triangulares

En los elementos triangulares se utilizan unas coordenadas locales muy particulares, que son las coordenadas de área (figura 4.17). Estas coordenadas se definen como:

$$L_1 = \frac{Area(P23)}{Area(123)} \tag{4.69}$$

y análogamente las otras 2 coordenadas  $L_2$  y  $L_3$ .

La expresión general es:

$$L_I = \frac{Area(PJK)}{Area(IJK)} \tag{4.70}$$

Evidentemente se cumple que  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$

Las líneas de  $L_i$  constante son rectas paralelas al lado  $JK$  (figura 4.18).

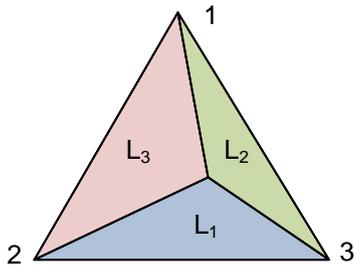


Figura 4.17 Coordenadas de área

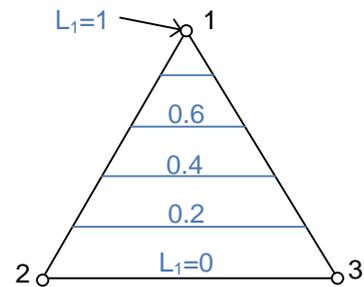


Figura 4.18 Valores constantes de la coordenada de área  $L_1$

#### 4.8.3.1 Elemento de tres nudos

Las funciones de interpolación son:  $N_i = L_i \quad i = 1, 3$

La función del nudo  $i$  es un plano que pasa por el lado opuesto al vértice  $i$ , y que vale 1 en dicho nudo. Al igual que en los rectángulos estas funciones se llaman básicas  $\hat{N}_i$ .

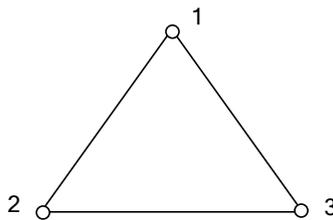
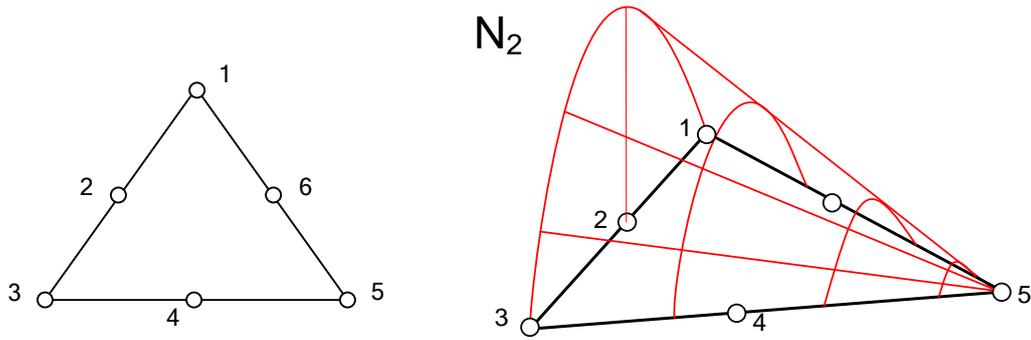


Figura 4.19 Elemento de tres nudos

#### 4.8.3.2 Elemento de seis nudos

En sus lados las funciones de interpolación varían de forma cuadrática. Cada nudo intermedio tiene una función que vale:

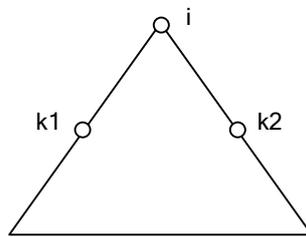
$$N_2 = 4L_1L_2 \quad N_4 = 4L_2L_3 \quad N_6 = 4L_3L_1 \quad (4.71)$$



**Figura 4.20** Elemento de seis nudos y función de interpolación del nudo 2

Las funciones de los nudos de esquina se calculan a partir de las funciones básicas, restando a cada una de ellas 1/2 de las funciones correspondientes a los nudos intermedios que hay en los lados adyacentes (figura 4.21):

$$N_i = \hat{N}_i - \frac{1}{2} N_{k1} - \frac{1}{2} N_{k2} \tag{4.72}$$



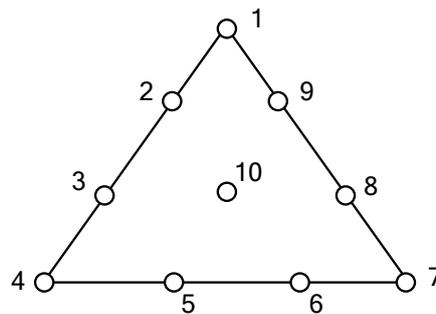
**Figura 4.21** Corrección de nudo esquina

Se obtienen las siguientes funciones de interpolación:

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1 \quad N_3 = (2L_2 - 1)L_2 \quad N_5 = (2L_3 - 1)L_3 \tag{4.73}$$

### 4.8.3.3 Elemento de diez nudos

En este elemento se debe incluir un nudo en su centro con el fin de cubrir todo un polinomio completo de grado tres, que requiere diez términos.



**Figura 4.22** Elemento triangular de diez nudos

Las funciones de los nudos intermedios son:

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1) & N_3 &= \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1) \\ N_5 &= \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1) & N_6 &= \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1) \\ N_8 &= \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_3 - 1) & N_9 &= \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_1 - 1) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Para el nudo central la función de interpolación es la función de la burbuja:  $N_{10} = 27L_1L_2L_3$ , que tiene valor nulo en todo el contorno del triángulo.

Las funciones de las esquinas se obtienen de manera análoga al caso de los rectángulos. Cada lado con dos nudos afecta a los dos nudos de esquina del lado de la forma siguiente (figura 4.23):

$$N_i = \hat{N}_i - \frac{2}{3} N_{k1} - \frac{1}{3} N_{k2} \quad (4.75)$$

donde  $i$  es el nudo esquina, y  $k1$  y  $k2$  son los dos nudos intermedios adyacentes, siendo  $k1$  el más próximo a  $i$  y  $k2$  el más lejano. Para el otro nudo esquina del lado, que llamaremos  $j$  la corrección es:

$$N_j = \hat{N}_j - \frac{2}{3} N_{k2} - \frac{1}{3} N_{k1} \quad (4.76)$$

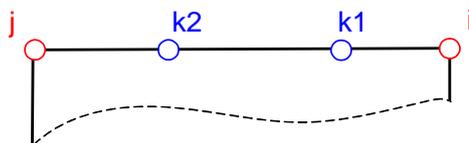


Figura 4.23 Corrección de nudos esquina

#### 4.9. FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA

Se han estudiado hasta el momento diversos tipos de elementos que se caracterizan por un número creciente de nudos, lo que les permite interpolar el campo de desplazamientos de forma sofisticada, y alcanzar una gran precisión en el análisis. Sin embargo para todos ellos se han utilizado formas sencillas como triángulos o rectángulos, mediante los cuales resulta difícil el adaptarse a la forma de la estructura a estudiar, que normalmente tiene forma curva. En este apartado se trata de estudiar elementos finitos con forma más compleja: así, por ejemplo un elemento que es rectangular en sus coordenadas locales puede ser transformado en uno que es curvilíneo en coordenadas cartesianas.

Para ello es necesario definir alguna relación entre las coordenadas de un punto en el sistema local y las mismas en el sistema general:

$$x = f(\xi, \eta) \quad y = g(\xi, \eta) \quad (4.77)$$

Esta transformación de coordenadas define la forma del elemento en el sistema cartesiano.

#### 4.9.1 Interpolación de coordenadas

Uno de los métodos más convenientes para definir la relación entre coordenadas locales y generales anterior consiste en usar funciones de interpolación, de la misma forma que se hizo para el campo de deformaciones dentro del elemento. Por ejemplo se puede poner:

$$x = \sum_{1,n} N'_i x_i \quad y = \sum_{1,n} N'_i y_i \quad (4.78)$$

donde  $N'$  son algunas funciones de interpolación definidas en las coordenadas locales  $\xi, \eta$ . Estas  $N'$  deben de valer 1 en el nudo  $i$  y cero en los demás. De inmediato se ve la posibilidad de utilizar para estas  $N'$  a las funciones de interpolación empleadas para interpolar los desplazamientos, que satisfacen dicha condición.

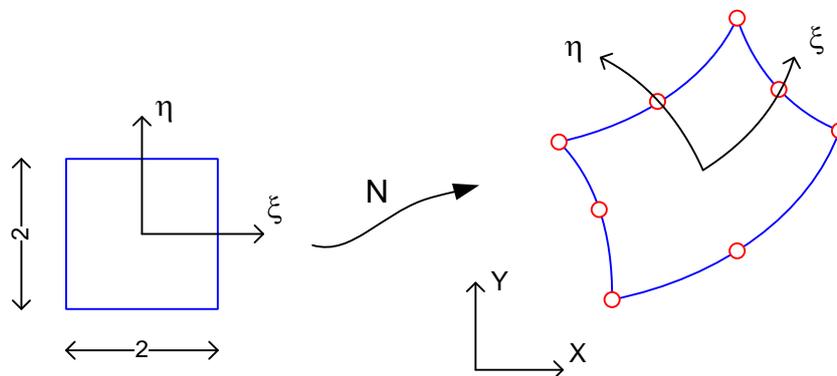


Figura 4.24 Interpolación de coordenadas

En principio no hay por qué utilizar como funciones de interpolación de coordenadas a las mismas funciones de interpolación de desplazamientos, sino que pueden ser otras. A los elementos que utilizan las mismas funciones para interpolación de coordenadas que las usadas para la interpolación de desplazamientos, se les llama isoparamétricos. Es decir que estos elementos usan las coordenadas de todos sus nudos para definir el cambio de coordenadas, o lo que es lo mismo, la forma del elemento.

Por lo tanto, en la formulación isoparamétrica se puede poner:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{x}^e \quad (4.80)$$

El vector  $\mathbf{x}^e$  agrupa a las coordenadas  $(x, y)$  de todos los nudos del elemento.

Con esta definición un elemento isoparamétrico tiene una forma geométrica real que está definida por el tipo de funciones de interpolación que emplea. La forma real de cada lado está definida por el número de nudos que hay en ese lado: así los lados con dos nudos son rectos (funciones lineales), los lados de tres nudos pueden ser parábolas (las funciones son cuadráticas) y los lados de cuatro nudos pueden ser curvas cúbicas. En el sistema local  $\xi, \eta$  del elemento, éste siempre es un cuadrado de lado 2.

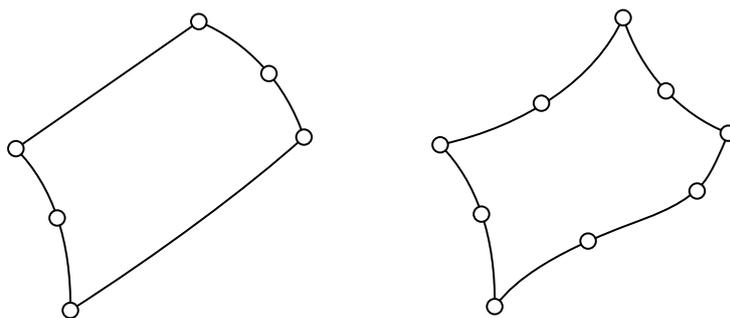


Figura 4.25 Elementos con lados curvos

### **Elementos sub y super paramétricos**

Otro tipo de elementos que pueden definirse son los subparamétricos. En ellos se utilizan como funciones  $N'$  para interpolar las coordenadas, una funciones de orden inferior a las de interpolación de desplazamientos. Es decir que no se utilizan las coordenadas de todos los nudos para definir la forma del elemento, sino únicamente las de algunos de ellos (normalmente las esquinas).

Así, un elemento de tres nudos por lado ( $N_i$  parabólicas) puede utilizar sólo los nudos esquina para definir las coordenadas, usando unas  $N'$  lineales: en este caso sus lados son forzosamente rectos, y el nudo central está siempre en el centro del lado (figura 4.26). Análogamente ocurre para el elemento de cuatro nudos por lado, en que se emplean los 4 nudos de esquina para definir sus coordenadas.

Estos elementos son prácticos cuando la geometría es sencilla, y el elemento tiene lados rectos, pero el campo de deformaciones varía mucho y debe aproximarse con funciones de orden superior. Computacionalmente no tienen una gran ventaja, pero permiten ahorrar gran cantidad de datos en la definición de las coordenadas de los nudos, pues basta definir las coordenadas de las esquinas.

Los elementos superparamétricos son aquellos que utilizan más puntos para definir su forma geométrica, que para definir el campo de deformaciones. Es decir que las  $N'$  son de orden superior a las  $N$ . Así por ejemplo se pueden usar los elementos de la figura 4.27.

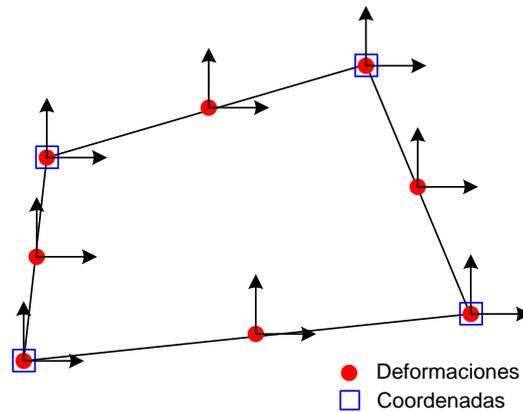


Figura 4.26 Elemento subparamétrico

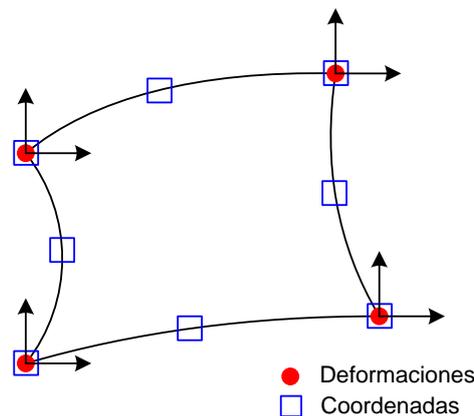


Figura 4.27 Elemento superparamétrico

El primero permite una forma parabólica del contorno del elemento y sólo una variación lineal en los desplazamientos. Estos elementos no son usados en la práctica, pues requieren dar gran cantidad de coordenadas de nudos y sin embargo no aprovechan dichos nudos para interpolar los desplazamientos.

#### 4.9.2 Matriz de rigidez

La expresión obtenida para la matriz de rigidez de un elemento plano cualquiera es:

$$\mathbf{K} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (4.81)$$

En ella aparece la matriz  $\mathbf{B}$ , que se obtiene derivando la matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  respecto a las coordenadas  $x$  e  $y$ . Sin embargo, la matriz  $\mathbf{N}$  está definida en las coordenadas locales normalizadas del elemento  $\xi, \eta$ , por lo que es necesario transformar las derivadas entre unas coordenadas y otras. Una vez obtenida la matriz  $\mathbf{B}$  hay que efectuar la integral anterior al dominio de todo el elemento. Ésta es muy simple en coordenadas locales pero es complicada en general en coordenadas generales, dado que el elemento puede ser curvo.

Para resolver este problema lo que se hace es evaluar la integral anterior en coordenadas locales  $\xi, \eta$ , pasando todas las expresiones necesarias a dichas coordenadas. En la expresión de la matriz  $\mathbf{B}$  se observa que es necesario disponer de todas las derivadas de las funciones de interpolación respecto a las coordenadas generales  $x, y$ .

Siguiendo las reglas de la derivación se puede poner la siguiente relación matricial entre las derivadas en ambos sistemas de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

La matriz  $\mathbf{J}$  es la Jacobiana de la transformación de coordenadas  $(x, y)$  a  $\xi, \eta$ . Despejando se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

El vector de la derecha es conocido sin más que derivar las  $N_i$  respecto a  $\xi, \eta$ , y conociendo  $\mathbf{J}$  se pueden obtener de la expresión anterior todas las derivadas que forman la matriz  $\mathbf{B}_i$ .

- El cálculo de  $\mathbf{J}$  se hace apoyándose en la interpolación de coordenadas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Esta expresión puede ser evaluada fácilmente ya que las funciones  $N$  son conocidas en función de  $\xi, \eta$  y  $x_i, y_i$  son las coordenadas de los nudos que definen la forma del elemento.

- El dominio de integración expresado en coordenadas locales es:

$$dv = t \, dx dy = t J \, d\xi d\eta \quad (4.85)$$

donde aparece el determinante  $J$  de la matriz Jacobiana, que se calcula a partir de la expresión de ésta, y es en general una función de  $\xi, \eta$ .

La presencia del espesor del elemento  $t$  en la integral anterior permite tratar con gran sencillez elementos de espesor variable. Para ello la solución práctica más habitual consiste en suponer que la ley de variación del espesor puede aproximarse

por interpolación de los valores del espesor en los nudos  $t_i$ , mediante la expresión habitual:

$$t = \sum N_i t_i \quad (4.86)$$

- Considerando la estructura de la matriz  $\mathbf{B}$ , la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  es:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{B}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} t dx dy \quad (4.87)$$

La matriz  $\mathbf{K}$  se puede dividir en  $n \times n$  submatrices, que relacionan a los  $n$  nudos entre sí:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \dots & \mathbf{K}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}^{n1} & \dots & \mathbf{K}^{nn} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Cada una de las submatrices tiene la expresión:

$$\mathbf{K}^{ij} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t J d\xi d\eta \quad (4.89)$$

Sustituyendo los valores de las distintas matrices se obtiene:

$$\mathbf{K}^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} D_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} & D_{11} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} t J d\xi d\eta \quad (4.90)$$

Estudiando la naturaleza de los distintos términos del integrando se observa que si el determinante del Jacobiano  $J$  es constante, el integrando es un polinomio. Sin embargo si  $J$  no es constante, el integrando es un cociente de polinomios. En el primer caso la integral puede efectuarse de forma exacta empleando métodos numéricos adecuados, mientras que en el segundo la integración numérica siempre es aproximada.

### 4.9.3 Fuerzas de volumen

Su expresión general es:

$$\mathbf{P}_v = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv \quad (4.91)$$

Con objeto de simplificar la implementación práctica del método, es habitual restringir la posible variación de las fuerzas de volumen y limitarla sólo a aquellas que

pueden ser representadas por las propias funciones de interpolación. De esta forma la variación de las fuerzas de volumen se puede representar mediante una interpolación de sus valores nodales, empleando las propias funciones de interpolación:

$$\mathbf{q}_v = \mathbf{N} \mathbf{q}_v^e \quad (4.92)$$

siendo  $\mathbf{q}_v^e$  los valores nodales de las fuerzas de volumen, que son constantes. Con esto se obtiene la siguiente expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{P}_v = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \mathbf{q}_v^e = \mathbf{M} \mathbf{q}_v^e \quad (4.93)$$

Considerando la estructura de la matriz  $\mathbf{N}$ , la matriz  $\mathbf{M}$  es:

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv = \int \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{N}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} t dx dy \quad (4.94)$$

con lo que la matriz  $\mathbf{M}$  se puede dividir en  $n \times n$  submatrices, que relacionan a los  $n$  nudos entre sí:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \dots & \mathbf{M}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}^{n1} & \dots & \mathbf{M}^{nn} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

siendo cada una de ellas:

$$\mathbf{M}^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} t J d\xi d\eta \quad (4.96)$$

El cálculo de la matriz  $\mathbf{M}$  no presenta ningún problema, efectuándose en el sistema local de coordenadas, en el que se conoce la matriz de interpolación  $\mathbf{N}$ . Todos los términos que la forman son polinomios, por lo que se puede evaluar de forma exacta por métodos numéricos.

#### 4.9.4 Fuerzas de superficie

En elasticidad plana, las fuerzas de superficie actúan distribuidas sobre los lados de los elementos, y pueden definirse de dos formas distintas: como fuerzas distribuidas por unidad de superficie lateral del elemento  $\mathbf{q}_s$ , o como fuerzas distribuidas por unidad de longitud  $\mathbf{q}_L$ . La relación entre unas y otras es sencillamente el espesor del elemento:  $\mathbf{q}_L = t \mathbf{q}_s$ .

La expresión general del vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de superficie es:

$$\mathbf{P}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds \quad (4.97)$$

Al igual que con las fuerzas de volumen, se restringe la posible variación de las fuerzas de superficie sólo a aquellas que pueden ser representadas por las propias funciones de interpolación. De esta forma las fuerzas de superficie se representan mediante una interpolación de sus valores nodales, empleando las propias funciones de interpolación:

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{N} \mathbf{q}_s^e \quad (4.98)$$

siendo  $\mathbf{q}_s^e$  los valores nodales de las fuerzas de superficie, que son constantes. Con esto queda:

$$\mathbf{P}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \mathbf{q}_s^e = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} t dl \mathbf{q}_s^e = \mathbf{M}_s \mathbf{q}_s^e \quad (4.99)$$

donde se ha introducido la matriz  $\mathbf{M}_s$  que tiene una expresión muy similar a la matriz  $\mathbf{M}$ , pero integrando al lado del elemento donde se aplican las fuerzas. Está compuesta por submatrices del tipo:

$$\mathbf{M}_s^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} t dl \quad (4.100)$$

- El valor del diferencial de longitud es:  $dl^2 = dx^2 + dy^2$

Pero los valores de  $dx$  y  $dy$  son:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = J_{11} d\xi + J_{21} d\eta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta = J_{12} d\xi + J_{22} d\eta \end{aligned} \quad (4.101)$$

- Para una cara donde  $\xi$  es constante será  $d\xi=0$  luego:

$$dl^2 = J_{21}^2 d\eta^2 + J_{22}^2 d\eta^2 \quad dl = \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2} d\eta \quad (4.102)$$

- Análogamente, en una cara donde  $\eta$  es constante se obtiene:

$$dl = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2} d\xi \quad (4.103)$$

#### 4.9.5 Elementos triangulares

Todo el desarrollo anterior se ha efectuado considerando como coordenadas locales las  $\xi, \eta$  de los elementos rectangulares, pero todo él es válido para cualquier tipo de

coordenadas locales, y en particular para las coordenadas de área usadas en elementos de forma triangular.

La mayor parte de las expresiones anteriores son válidas si se cambian adecuadamente los nombres de las variables locales, aunque hay algunas diferencias. La primera se refiere al hecho de que al haber tres coordenadas locales de área en el plano, y sólo dos coordenadas generales  $\xi, \eta$  la matriz  $\mathbf{J}$  sería rectangular; y la segunda es que los límites de integración ya no son constantes entre -1 y +1, sino que dependen de las coordenadas.

La forma más sencilla de resolver estos problemas es efectuar un cambio en los nombres de las variables, en la forma:

$$L_1 \equiv \xi \quad L_2 \equiv \eta \quad (4.104)$$

La tercera coordenada de área es una variable dependiente:

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2 = 1 - \xi - \eta \quad (4.105)$$

Las derivadas de las funciones de interpolación son, por lo tanto:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \quad (4.106)$$

Pueden calcularse fácilmente, al conocerse la expresión de  $N_i$  en función de  $L_j$ . Análogamente se obtiene:

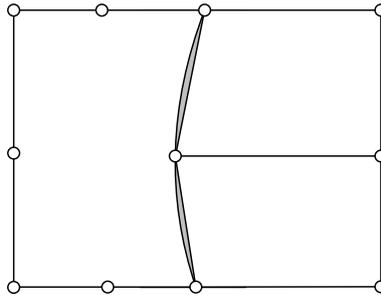
$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \quad (4.107)$$

Utilizando estas ecuaciones, se pueden emplear todas las expresiones ya obtenidas para los elementos rectangulares.

#### 4.10. CONFORMABILIDAD GEOMÉTRICA

Los elementos isoparamétricos pueden tener lados curvos y un número de nudos variable en cada uno de ellos, lo que les permite adaptarse bien a la forma del continuo, pero esta misma cualidad puede dar lugar a problemas de conformabilidad geométrica.

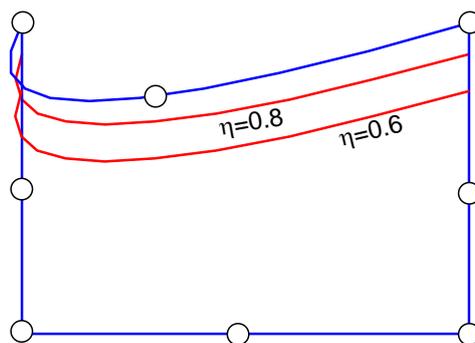
*Huecos entre elementos.* Esto puede ocurrir si se unen dos elementos que utilizan funciones de interpolación diferentes en el contorno de unión, como por ejemplo un elemento de tres nudos por lado (parabólico) unido a dos elementos lineales (dos nudos por lado) en un contorno curvo (figura 4.28). La ausencia de huecos en la discretización se garantiza si los dos elementos contiguos utilizan las mismas funciones de interpolación en su borde de unión, es decir si emplean el mismo número de nudos en el lado común.



**Figura 4.28 Huecos e interferencias entre elementos**

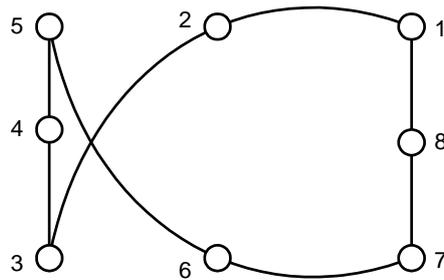
*Deformación excesiva de los elementos.* La forma de los elementos viene definida por la transformación entre las coordenadas locales y las generales, con lo que la forma de un elemento particular queda determinada por las coordenadas de sus nudos  $\mathbf{x}^e$ . Unos valores incorrectos para éstas pueden dar lugar a elementos muy deformados, en los que existirán problemas para efectuar las integrales de área necesarias para calcular sus propiedades de rigidez.

Ocurren dos efectos simultáneos: algunos puntos interiores del elemento quedan definidos por dos valores distintos de las coordenadas locales, y por otra parte algunos puntos interiores en coordenadas locales se salen fuera del contorno del elemento. En la figura 4.29 se observa un elemento excesivamente deformado en el que las líneas  $\eta=0.6$  y  $\eta=0.8$  se sale fuera de él, y además se cortan entre sí.



**Figura 4.29 Distorsión excesiva en un elemento curvo**

Otro error muy habitual es de la numeración incorrecta de un elemento (figura 4.30): aunque las coordenadas definan un elemento no deformado, un error en el orden de los nudos implica una deformación excesiva.



**Figura 4.30 Numeración incorrecta**

Los efectos de distorsión excesiva de los elementos se manifiestan, entre otras formas, en que la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  no es definida positiva en todos los puntos del elemento. Nótese que esta matriz  $\mathbf{J}$  debe invertirse para poder calcular las derivadas de las funciones de interpolación en coordenadas generales y por lo tanto poder calcular la matriz de rigidez. Por lo tanto la matriz Jacobiana (y su determinante) monitorizan el estado de distorsión del elemento. De hecho para un elemento cuadrado el valor de  $J$  es constante en todo él e igual a 4 veces su área. A medida que el elemento se separa de la forma ideal cuadrada el valor de  $J$  cambia en algunos de sus puntos interiores, en la medida que dichos puntos estén situados en zonas más o menos deformadas respecto a la forma ideal.

Se suelen manejar distintos parámetros para cuantificar la distorsión de los elementos. Uno de los más sencillos y habituales es:

$$DP = \frac{4J_{\min}}{A} \quad (4.108)$$

donde  $J_{\min}$  es el valor mínimo del determinante de la Jacobiana en cualquier punto del elemento y  $A$  su área. Normalmente el valor mínimo de  $J$  se considera igual al menor valor obtenido en cualquier punto de integración. Si el elemento es un paralelogramo el valor de  $DP=1$ . Habitualmente se considera que si  $DP < 0.2$  la distorsión es excesiva.

Puede demostrarse que si las funciones de interpolación son lineales, la condición necesaria para obtener una transformación correcta es que ningún ángulo interior sea mayor que  $180^\circ$ . Para funciones de interpolación cuadráticas, además debe cumplirse que los nudos intermedios se encuentren en el tercio central de la distancia entre los vértices del lado. Para elementos cúbicos no se puede dar una regla simple, y hay que comprobar numéricamente el valor del Jacobiano.

#### 4.11. REQUERIMIENTOS DE CONVERGENCIA

La convergencia está garantizada si se cumplen las tres condiciones inicialmente indicadas de forma general para el MEF, que son, para problemas de elasticidad: continuidad de tipo  $C^0$ , y capacidad de representar cualquier estado de tensión constante.

El requerimiento de continuidad  $C^0$  se cumple siempre usando elementos isoparamétricos con las funciones de interpolación adecuadas, incluso con elementos muy deformados. Para ello se requiere que se cumpla la misma condición ya indicada antes para la ausencia de huecos en la discretización, es decir que en dos elementos adyacentes se usen las mismas funciones de interpolación en el borde de unión entre ellos, o lo que es lo mismo, que tengan el mismo número de nudos en él.

El requerimiento de representar cualquier estado de tensión constante indica que las funciones de interpolación deben de permitir representar cualquier valor constante de la derivada primera del desplazamiento.

Para poder representar dicho valor constante, el campo de desplazamientos debe de tener como mínimo los términos siguientes:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (4.109)$$

ya que adoptando los valores adecuados de  $\alpha_i$  se puede representar cualquier estado de tensión constante y cualquier movimiento como sólido rígido. Particularizando la expresión anterior a los nudos se obtiene (en dirección  $x$ ):

$$U_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \quad (4.110)$$

Pero por definición de los elementos ocurre que  $u = \sum N_i U_i$  luego, sustituyendo el valor de  $U_i$

$$u = \sum N_i U_i = \sum N_i \alpha_1 + \sum N_i \alpha_2 x_i + \sum N_i \alpha_3 y_i \quad (4.111)$$

Comparando con la expresión inicial se deduce que:

$$\sum N_i = 1 \quad \sum N_i x_i = x \quad \sum N_i y_i = y \quad (4.112)$$

Las dos últimas expresiones no son otras que las de interpolación de las coordenadas, pero se añade una nueva, que dice que la suma de las funciones de interpolación tiene que ser 1, a fin de poder representar cualquier estado de tensión constante.

El desarrollo anterior es para elementos isoparamétricos; para los de tipo subparamétrico se puede demostrar, de forma análoga, que las funciones  $N'$  usadas para interpolar las coordenadas, deben de cumplir esta misma relación, con tal de que las  $N'$  se puedan expresar como una combinación lineal de las funciones  $N$  usadas para interpolar el campo de desplazamientos.

#### 4.12. ELEMENTO CUADRILÁTERO DE CUATRO NUDOS NO CONFORME

El elemento de cuatro nudos isoparamétrico puede tener forma de cuadrilátero, y admite una variación lineal de los desplazamientos, lo cual le hace muy atractivo para los problemas de elasticidad plana.

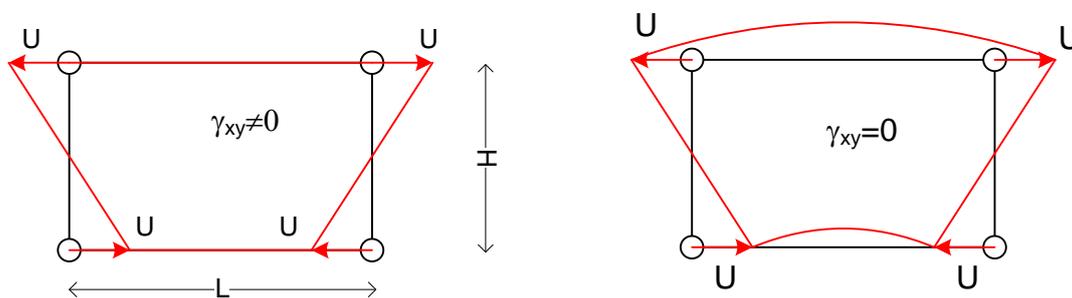
Sin embargo se ha encontrado que aún en ejemplos muy simples, como el de una viga en voladizo, este elemento se comporta muy mal, y ello es debido a que no es capaz de representar adecuadamente una deformada curva. En efecto, si se aplican unos desplazamientos de flexión  $U$  a sus nudos extremos (figura 4.31), el elemento se deforma como se muestra en la parte izquierda de la figura, manteniendo sus lados rectos, siguiendo la ley:

$$u = U\xi\eta \quad v = 0 \quad (4.113)$$

Sin embargo la forma correcta de deformación de flexión en el plano es la mostrada en la parte derecha de la figura 4.31, cuya expresión analítica es:

$$u = U\xi\eta \quad v = (1 - \xi^2)LU / (2H) + (1 - \eta^2)\nu UH / (2L) \quad (4.114)$$

Esta última ecuación proporciona el valor correcto de la deformación de cortadura  $\gamma_{xy}=0$ . Sin embargo la deformación del elemento, dada por la ecuación (4.113), proporciona un valor de  $\gamma_{xy} = U\xi$  distinto de 0. Por lo tanto el elemento proporciona un valor incorrecto de  $v$  debido a que en su interior aparece una distorsión de cortadura  $\gamma_{xy}$  distinta de cero, llamada cortante parásito. Esto hace que el elemento sea excesivamente rígido ante una flexión en su plano.



**Figura 4.31 Deformación aproximada y exacta del elemento de 4 nudos**

Con objeto de corregir este error Wilson y otros (1973) introdujeron dos nuevos términos entre las funciones de interpolación del elemento, que representan precisamente las formas de deformación necesarias para modelizar la deformación vertical  $v$  en el problema de flexión en su plano:

$$u = \sum N_i U_i + (1 - \xi^2)a_1 + (1 - \eta^2)a_3 \quad (4.115)$$

$$v = \sum N_i V_i + (1 - \xi^2)a_2 + (1 - \eta^2)a_4$$

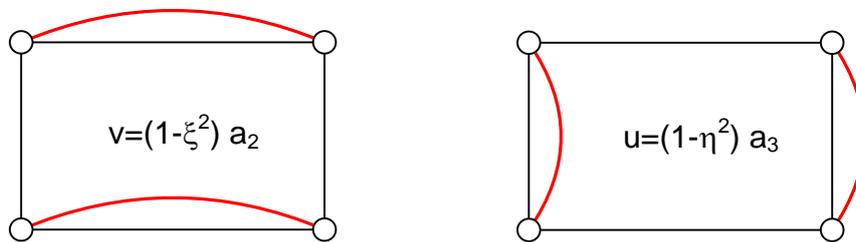
donde  $a_i$  son unos coeficientes, en principio desconocidos, que se añaden a las variables nodales del elemento y dan lugar a un vector de grados de libertad ampliado:

$$\delta_a^e = [U_1 \quad \dots \quad V_4 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T \quad (4.116)$$

Por lo tanto el elemento posee ahora doce grados de libertad en lugar de los ocho iniciales. La matriz de funciones de interpolación es:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & 0 & (1-\xi^2) & 0 & (1-\eta^2) & 0 \\ 0 & \dots & N_4 & 0 & (1-\xi^2) & 0 & (1-\eta^2) \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

Los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  representan la colaboración de la forma  $(1-\xi^2)$  a la deformación total, y los coeficientes  $a_3$  y  $a_4$  la colaboración de la forma  $(1-\eta^2)$ . Se les suele llamar variables no-nodales, al no estar asignadas a ningún nudo en concreto, como lo están las otras funciones de interpolación (figura 4.32).



**Figura 4.32 Formas de deformación no nodales**

Análogamente, la matriz  $\mathbf{B}$  tiene el aspecto siguiente:

$$\epsilon = \mathbf{B} \delta^e + \mathbf{B}_a \mathbf{a} \quad (4.118)$$

Donde  $\mathbf{B}_a$  es la parte asociada a las variables no nodales  $\mathbf{a}$ :

$$B_{ai} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad i = 5 - 6 \quad (4.119)$$

Siguiendo el proceso general, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_w$  que se obtiene es de 12 x 12 pues corresponde a los doce parámetros empleados para representar la deformación del elemento, y su estructura es la siguiente:

$$\mathbf{K}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{au} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad \text{Rigidez convencional (8x8) asociada a los } \delta^e.$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \int \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a dv \quad \text{Rigidez añadida (4x4), debida a los parámetros } \mathbf{a}.$$

$$\mathbf{K}_{ua} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a dv \quad \text{Rigidez de acople (8x4) entre los } \delta^e \text{ y los parámetros } \mathbf{a}.$$

La nueva matriz de rigidez se puede reducir a una de tamaño 8x8 que considera únicamente los desplazamientos de los cuatro nudos. Para ello se eliminan los valores no-nodales  $a_i$ , mediante una técnica de condensación estática de grados de libertad.

El elemento así obtenido muestra un comportamiento excelente cuando su forma es rectangular o de paralelogramo. Sin embargo se comporta mal cuando su forma no es un paralelogramo y sus lados dejan de ser paralelos. Ello es debido a que las nuevas funciones de interpolación añadidas lo convierten en un elemento incompatible: por ejemplo uno cualquiera de los nuevos términos añadidos al campo de deformaciones puede activarse en un elemento, pero no en su vecino, incumpliendo el tercer criterio de convergencia.

Para corregir este comportamiento, Taylor y otros propusieron en 1976 un método para hacer que aun siendo incompatible, el elemento pase el "patch test". La condición que se impone para ello es que si el elemento está sometido a unos desplazamientos de los nudos tales que definan un estado de tensión constante, se cumpla que:

- No se exciten las dos nuevas funciones de interpolación añadidas, es decir que  $\mathbf{a}=0$ .
- No se produzcan fuerzas sobre los grados de libertad no nodales  $\mathbf{a}$ .

El elemento así obtenido sigue siendo incompatible, pero se garantiza que es capaz de representar un estado de tensión constante aun si no es un cuadrilátero, y por otra parte es capaz asimismo de representar la flexión en su plano. Todo esto hace que este elemento sea muy utilizado en la práctica, dadas sus excelentes propiedades y su reducido número de nudos, con lo que genera un número de ecuaciones relativamente pequeño.

#### 4.13. ELEMENTO PLANO HÍBRIDO DE 4 NUDOS

En un elemento híbrido, se interpolan de manera independiente el campo de desplazamientos y el campo de tensiones; es decir que este último no se obtiene a través de la ecuación constitutiva aplicada a las deformaciones unitarias, sino que se emplea para las tensiones otra interpolación diferente.

El campo de deformaciones en el interior del elemento se aproxima mediante la expresión habitual, en función de las deformaciones nodales del elemento  $\delta^e$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.121)$$

Siendo  $\boldsymbol{\delta}^e$  el vector de todas las deformaciones nodales del elemento:

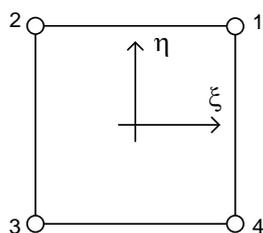
$$\boldsymbol{\delta}^e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad U_4 \quad V_4]^T \quad (4.122)$$

y  $\mathbf{N}$  la matriz de funciones de interpolación:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Las funciones de interpolación son bilineales, empleando coordenadas normalizadas:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad i = 1, 4$$



**Figura 4.33 Elemento híbrido de 4 nudos**

Las 4 funciones de interpolación se pueden agrupar en un vector:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \xi + \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \eta + \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \xi \eta \quad (4.124)$$

$$\mathbf{N}_v = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \xi + \mathbf{a}_2 \eta + \mathbf{a}_3 \xi \eta$$

Los vectores que contienen las coordenadas  $x$  e  $y$  de los 4 nudos son:

$$\mathbf{x}_N = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \quad \mathbf{y}_N = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T \quad (4.125)$$

La forma del elemento se define mediante la transformación isoparamétrica habitual:

$$x = \mathbf{x}_N^T \mathbf{N}_v \quad y = \mathbf{y}_N^T \mathbf{N}_v \quad (4.126)$$

La matriz jacobiana de dicha transformación es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N^T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \eta) & \mathbf{y}_N^T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \eta) \\ \mathbf{x}_N^T(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \xi) & \mathbf{y}_N^T(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \xi) \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Su determinante es lineal, y vale:

$$\begin{aligned} J &= j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta \\ j_0 &= (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_2) - (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_2)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_1) \\ j_1 &= (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_3) - (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_3)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_1) \\ j_2 &= (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_3)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_2) - (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_2)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_3) \end{aligned} \quad (4.128)$$

#### 4.13.1 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias compatibles, producidas por las deformaciones  $\mathbf{u}$  son:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.129)$$

Sustituyendo la interpolación de las deformaciones  $\mathbf{u}$  se obtiene la expresión habitual del campo de deformaciones unitarias interpolado, que define la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.130)$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

Las derivadas de las funciones de interpolación en coordenadas cartesianas se obtienen de la forma habitual, mediante la jacobiana de la transformación de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.132)$$

### 4.13.2 Interpolación de tensiones

En la formulación híbrida, el campo de tensiones no se obtiene a partir de las deformaciones unitarias, sino que se supone para él una cierta variación dentro del elemento. En este elemento de 4 nudos, el campo de tensiones supuesto corresponde a un campo lineal en sus coordenadas locales, diferente para cada una de las tres componentes de la tensión en los ejes locales, en función de 9 parámetros de ajuste  $\bar{\beta}$ , en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \sigma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \dots \\ \bar{\beta}_9 \end{Bmatrix} \quad (4.133)$$

Este campo de tensiones en coordenadas locales se transforma a las coordenadas generales por medio de la matriz jacobiana. Esta transformación es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^0)^T \begin{bmatrix} \sigma_\xi & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\xi\eta} & \sigma_\eta \end{bmatrix} \mathbf{J}^0 \quad (4.134)$$

La transformación se efectúa mediante la jacobiana evaluada en el centro del elemento  $\mathbf{J}^0$ , con objeto de garantizar el cumplimiento del patch test.

$$\mathbf{J}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{\xi=\eta=0} = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

El campo de tensiones en el sistema cartesiano que se obtiene es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (J_{11}^0)^2 \eta & (J_{21}^0)^2 \xi & (J_{11}^0)^2 \xi & (J_{21}^0)^2 \eta & 2J_{11}^0 J_{21}^0 \xi & 2J_{11}^0 J_{21}^0 \eta \\ 0 & 1 & 0 & (J_{12}^0)^2 \eta & (J_{22}^0)^2 \xi & (J_{12}^0)^2 \xi & (J_{22}^0)^2 \eta & 2J_{12}^0 J_{22}^0 \xi & 2J_{12}^0 J_{22}^0 \eta \\ 0 & 0 & 1 & J_{11}^0 J_{12}^0 \eta & J_{21}^0 J_{22}^0 \xi & J_{12}^0 J_{22}^0 \xi & J_{21}^0 J_{22}^0 \eta & A_J \xi & A_J \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_9 \end{Bmatrix} \quad (4.136)$$

Siendo la constante  $A_J = J_{11}^0 J_{22}^0 + J_{12}^0 J_{21}^0$ . Los coeficientes  $\beta_i$  del ajuste en el sistema cartesiano son combinación lineal de los coeficientes iniciales  $\bar{\beta}_i$  y de los términos de  $\mathbf{J}^0$  y son por lo tanto independientes.

El campo de tensiones interpolado debe satisfacer la ecuación de equilibrio, en sentido débil. Esto se cumple si se impone la condición de que el campo de tensiones no acumule energía con cualquier estado de deformación unitaria no contenida en la interpolación de deformaciones unitarias supuesta, denominada deformación unitaria incompatible  $\epsilon_{in}$ . Dicha condición es:

$$\int \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}_{in} dA = 0 \quad (4.137)$$

La restricción anterior se puede cumplir eliminando de la expresión de interpolación de tensiones los términos afectados por los coeficientes  $\beta_6$  a  $\beta_9$ , dejando sólo un término en  $\xi$  y otro en  $\eta$  para cada tensión. De esta forma se obtiene la interpolación propuesta por Pian y Sumihara que emplea 5 parámetros  $\beta$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (J_{11}^0)^2 \eta & (J_{21}^0)^2 \xi \\ 0 & 1 & 0 & (J_{12}^0)^2 \eta & (J_{22}^0)^2 \xi \\ 0 & 0 & 1 & J_{11}^0 J_{12}^0 \eta & J_{21}^0 J_{22}^0 \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_5 \end{Bmatrix} \quad (4.138)$$

En el caso de que no existan deformaciones incompatibles, como es el caso en este elemento, es posible emplear la interpolación de tensiones inicial completa, con los 9 parámetros, pero los estudios efectuados han demostrado que si se emplean 5 parámetros los resultados obtenidos son más precisos.

Desde el punto de vista de la estabilidad, está demostrado (Pian y Wu, 1988) que, en un elemento sin deformaciones incompatibles, la condición necesaria para que no haya modos de energía cero en el elemento es  $n_\beta \geq n_u - r$ , siendo  $n_\beta$  el número de parámetros empleados para interpolar las tensiones,  $n_u$  el empleado para interpolar las deformaciones  $\mathbf{u}$  y  $r$  el número de modos de sólido rígido. Para el caso de un elemento plano de 4 nudos  $n_u=8$  y  $r=3$ , con lo que se debe emplear como mínimo  $n_\beta=5$  parámetros.

La ley de interpolación de tensiones en el interior del elemento sufre una última modificación y se pone en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & J_{11}^0 J_{11}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{21}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ 0 & 1 & 0 & J_{12}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{22}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ 0 & 0 & 1 & J_{11}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_5 \end{Bmatrix} \quad (4.139)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} \quad (4.140)$$

Siendo  $\mathbf{S}$  una matriz de tamaño  $3 \times 5$  y  $\boldsymbol{\beta}$  un vector con los 5 parámetros del ajuste.

Las constantes  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  se introducen en la ley de interpolación con objeto de obtener matrices desacopladas y representan las coordenadas del centro de gravedad del elemento:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A} \int \xi dA = \frac{1}{A} \int \xi J d\xi d\eta \quad \bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta dA = \frac{1}{A} \int \eta J d\xi d\eta$$

El área del elemento se obtiene empleando la expresión habitual del determinante de la jacobiana:

$$A = \int dA = \int_{-1}^{+1} J d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} (j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta) d\xi d\eta = 4j_0$$

El valor de las constantes es:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A} \int \xi dA = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \xi J d\xi d\eta = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \xi (j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta) d\xi d\eta = \frac{j_1}{3 j_0}$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta dA = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \eta J d\xi d\eta = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \eta (j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta) d\xi d\eta = \frac{j_2}{3 j_0}$$

#### 4.13.3 Ecuación de equilibrio

Al ser los campos de deformaciones  $\mathbf{u}$  y de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  independientes, la ecuación de equilibrio se obtiene empleando un principio variacional, basado en la funcional de Hellinger-Reissner. Como el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  contiene únicamente desplazamientos compatibles, pues la interpolación de deformaciones cumple las condiciones de compatibilidad entre elementos, la expresión de dicha funcional es:

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_v \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \right) dv - \int_v \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{q}_S dS \quad (4.141)$$

El vector  $\mathbf{q}_v$  define las fuerzas de volumen actuantes sobre el elemento y el  $\mathbf{q}_S$  las fuerzas de superficie.

La matriz  $\mathbf{D}$  es la matriz constitutiva del estado plano elástico lineal, cuya inversa en la expresión anterior proporciona las deformaciones unitarias producidas por el campo interpolado de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ .

La condición estacionaria de la funcional anterior es:

$$\delta \Pi_{HR} = \int_v \left[ -\delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right] dv - \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv - \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_S dS = 0$$

Sustituyendo las expresiones del campo de deformaciones unitarias  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y de las tensiones interpoladas  $\boldsymbol{\sigma}$  se obtiene:

$$\delta \Pi_{HR} = \int_v \left[ -\delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} + \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} + \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{S}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \right] dv$$

$$- \int_v \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv - \int_S \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_S dS = 0 \quad (4.142)$$

Agrupando por una parte los términos correspondientes a los coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  y por otra los correspondientes a las deformaciones de los nudos queda:

$$\delta \Pi_{HR} = \delta \boldsymbol{\beta}^T \left[ - \int_v \mathbf{S}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} dv \boldsymbol{\beta} + \int_v \mathbf{S}^T \mathbf{B} dv \boldsymbol{\delta}^e \right] +$$

$$\delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \left[ \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{S} dv \boldsymbol{\beta} - \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q}_S dS \right] = 0 \quad (4.143)$$

Definiendo las matrices:

$$\mathbf{H} = \int_v \mathbf{S}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} dv \quad \mathbf{G} = \int_v \mathbf{S}^T \mathbf{B} dv \quad (4.144)$$

y los vectores de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{P}_v = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv \quad \mathbf{P}_s = \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s dS \quad (4.145)$$

la condición estacionaria se puede poner en forma compacta:

$$\delta \Pi_{HR} = \delta \boldsymbol{\beta}^T \left[ -\mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}^e \right] + \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \left[ \mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} - \mathbf{P}_v - \mathbf{P}_s \right] = 0 \quad (4.146)$$

Para que esta condición se cumpla ante cualquier variación de las deformaciones nodales y de los coeficientes de la interpolación de tensiones  $\boldsymbol{\beta}$ , se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} -\mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}^e &= 0 \\ \mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} - \mathbf{P}_v - \mathbf{P}_s &= 0 \end{aligned} \quad (4.147)$$

Estas son las ecuaciones de equilibrio del elemento y permiten obtener los valores de los distintos parámetros  $\boldsymbol{\delta}^e$  y  $\boldsymbol{\beta}$ . De la primera de ellas, se puede obtener directamente el valor de los coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  de la interpolación de esfuerzos, sin necesidad de ensamblarlas con los restantes elementos:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4.148)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_s \quad (4.149)$$

que define su matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (4.150)$$

## 4.14. EJEMPLOS. COMPARACIÓN ENTRE FORMULACIONES

### 4.14.1 Patch test

Este test ha sido empleado con frecuencia en la bibliografía (Pian y Sumihara, 1984). En él se analiza un dominio rectangular de dimensiones 10 x 2 y espesor unidad, sustentado de manera isostática en su cara izquierda. El material tiene  $E=1500$  y  $\nu=0.25$ . Se malla mediante 5 elementos, con un mallado irregular de elementos distorsionados, como muestra la figura 4.34.

Se consideran dos casos de carga distintos:

Caso A: un momento puro, producido por dos fuerzas iguales y de sentido contrario de valor 1000 aplicadas en la cara derecha.

Caso B: carga transversal, formada por dos fuerzas verticales iguales de valor 150 aplicadas en la cara derecha.

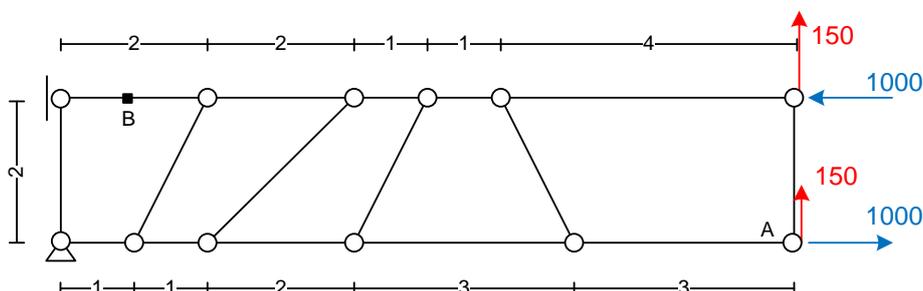


Figura 4.34 Modelo para el patch test

El modelo se analiza mediante tres tipos de elementos: el elemento isoparamétrico en formulación estándar, con 4 y 8 nudos, el elemento incompatible de Wilson y el elemento híbrido con campo de tensiones impuesto, considerando en éste un número variable de parámetros para el campo de tensiones. En cada caso se determinan la deformación vertical del punto A situado en el extremo y la tensión en dirección X en el punto B junto al apoyo.

La tabla 4.1 muestra los resultados obtenidos y la solución exacta. Se observa que el elemento estándar de 4 nudos es excesivamente rígido, por su propia naturaleza, y que la formulación de Wilson mejora la respuesta, aunque todavía está lejos de la tensión correcta, dada la naturaleza deformada de la malla. En todo caso el elemento híbrido con 5 parámetros es el de mejores prestaciones para deformación y tensión. Si se emplean 7 o 9 parámetros, las prestaciones del elemento se degradan y con 9 parámetros, el elemento se comporta de forma similar al bilineal de 4 nudos.

Elemento	Caso A. Momento		Caso B. Carga vertical	
	$\Delta_{AY}$	$\sigma_{xB}$	$\Delta_{AY}$	$\sigma_{xB}$
Bilineal estándar de 4 nudos	45.65	-1761	50.95	-2447
Incompatible de Wilson	98.40	-2659	100.31	-3615
Híbrido 5 parámetros	96.18	-3014	98.05	-4073
Híbrido 7 parámetros	92.59	-3041	94.55	-4110
Híbrido 9 parámetros	45.96	-2122	51.27	-2956
Isoparamétrico de 8 nudos	99.98	-2965	103.3	-4842
Exacto	100	-3000	102.6	-4050

Tabla 4.1 Resultados del patch test.

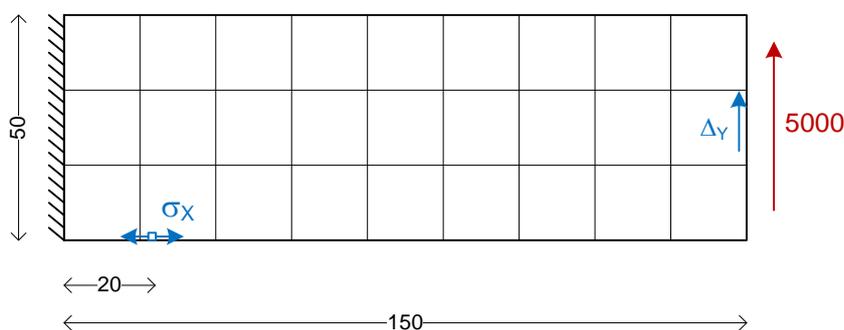
#### 4.14.2 Convergencia

Se analiza un dominio rectangular de dimensiones 150 mm x 50 mm y espesor 10 mm, fijo en su cara izquierda (figura 4.35). El material tiene  $E=21000 \text{ kg/mm}^2$  y  $\nu=0.3$ .

Se malla mediante elementos de 4 nudos, con un mallado regular de elementos cuadrados de tamaño decreciente. El número de elementos en la dimensión menor se hace variar entre 1 y 7, en la dimensión mayor entre 3 y 21, para un número total de elementos entre 3 y 147.

Sobre la cara de la derecha se aplica una fuerza vertical de valor total 5000 kg, aplicada en forma de fuerzas puntuales actuando sobre los distintos nudos existentes en dicha cara.

Se emplean tres formulaciones distintas: el elemento bilineal estándar de 4 nudos, el elemento incompatible de Wilson y el elemento híbrido con campo de tensión impuesto, con ajuste de tensiones de 5 parámetros.



**Figura 4.35 Ejemplo para verificación de la convergencia**

La figura 4.36 muestra el valor de la deformación vertical  $\Delta_y$  en el borde de la derecha, donde está aplicada la fuerza, frente al número total de nudos del mallado, el cual da una idea del tamaño de la malla. Dicha deformación se ha obtenido promediando las deformaciones de todos los nudos existentes en dicho borde derecho. Se observa que la formulación estándar produce una solución muy rígida y de convergencia más lenta que las demás. Los elementos incompatible de Wilson e híbrido producen la misma solución, por ser una malla no distorsionada, hecho que ya ha sido demostrado en la bibliografía.

La figura 4.37 muestra el valor de la tensión horizontal en un punto situado en la cara inferior del dominio, a una distancia de  $x=20 \text{ mm}$  del empotramiento, frente al número de nudos del mallado. Esta tensión se ha obtenido por promediado simple de las tensiones en los nudos y posterior interpolación bilineal de los valores promedio en los nudos. Son aplicables a los resultados las mismas consideraciones que para la deformación.

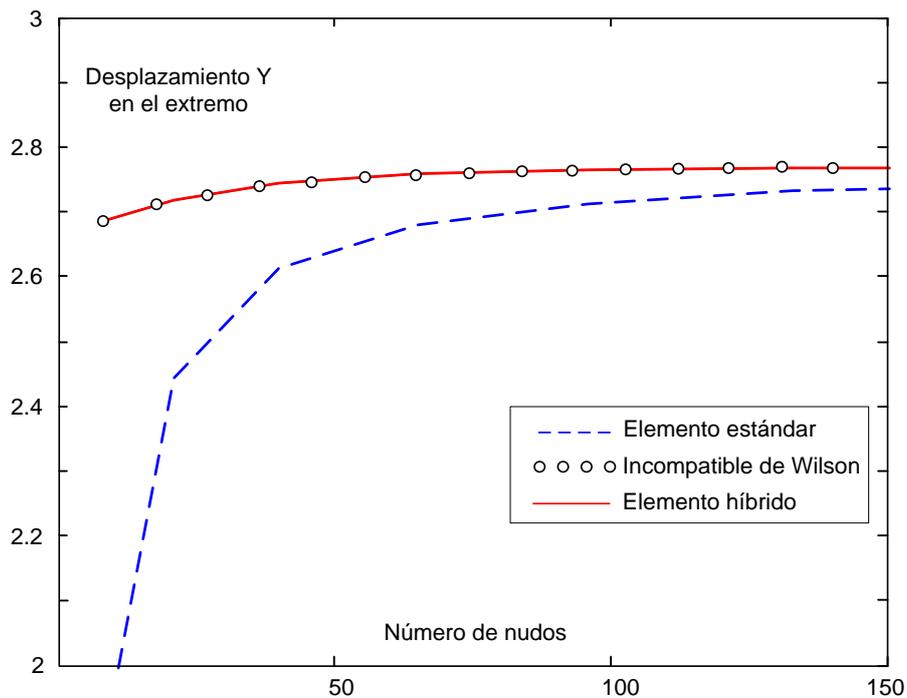


Figura 4.36 Convergencia de la deformación al refinar la malla

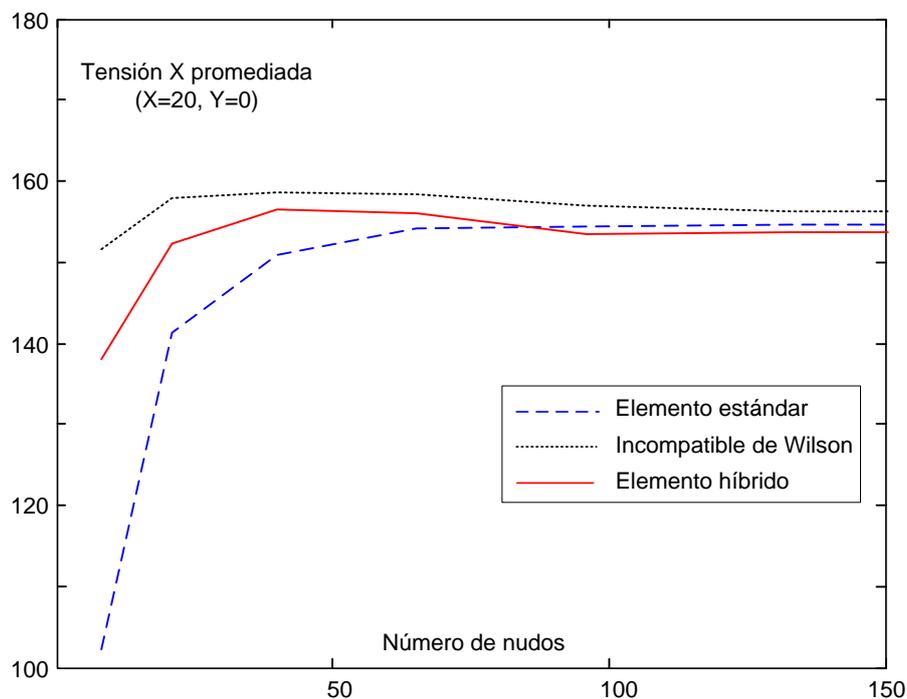


Figura 4.37 Convergencia de la tensión al refinar la malla

### 4.14.3 Test de Cook

En este ejemplo se analiza un dominio en forma de trapecio irregular cuyas dimensiones se indican en la figura 4.38. Está fijo en uno de sus lados y sometido a una carga unidad en el lado opuesto. El material tiene  $E=1$  y  $\nu=0.33$  y el espesor es 1.

Se malla mediante elementos de 4 nudos, con un mallado regular de elementos de tamaño decreciente, fuertemente distorsionados. Se emplean las tres formulaciones habituales: el elemento bilineal estándar, el elemento incompatible de Wilson y el elemento híbrido.

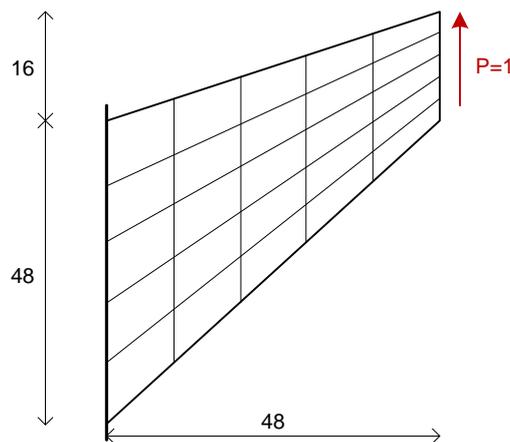


Figura 4.38. Test de Cook

La tabla 4.2 muestra el valor de la deformación en el centro de la cara donde se aplica la carga unitaria, para distintos mallados. Puede comprobarse la buena convergencia de los distintos elementos, incluso para mallados relativamente groseros.

Mallado	Estándar 4 nudos	Incompatible de Wilson	Híbrido 4 nudos
1 x 1	6.089	23.688	17.418
2 x 2	11.775	22.839	21.024
4 x 4	18.253	23.421	22.968
8 x 8	22.043	23.763	23.647
16 x 16	23.403	23.883	23.854
24 x 24	23.692	23.915	23.901
32 x 32	23.780	23.929	23.921

Tabla 4.2 Resultados del test de Cook

# Elasticidad tridimensional

## 5.1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de elasticidad en tres dimensiones son bastante frecuentes en la práctica ingenieril, y se presentan sobre todo en elementos que por su proceso de fabricación, o necesidades funcionales no pueden tener una dimensión mucho menor que las otras dos. Esto ocurre con piezas fundidas o forjadas (p.e. carcasas de maquinaria, bancadas de máquinas herramienta, soportes y aparatos de apoyo, etc.), con elementos estructurales en hormigón para apoyo y cimentación (apoyos de puentes, cimentaciones de máquinas, obras hidráulicas...), y en general en cualquier estructura en la que no pueda asumirse la hipótesis de que la tensión en la dirección del espesor sea nula.

El cálculo de tensiones y deformaciones en un sólido tridimensional es un problema que no tiene mayor complejidad conceptual que el caso bidimensional, por lo que el MEF se aplicó desde un principio a este tipo de problemas.

Las ecuaciones diferenciales que controlan el problema son similares a las del problema bidimensional, pero incluyendo una tercera coordenada  $z$ , y un tercer desplazamiento en dicha dirección  $w$ . Estas ecuaciones son de orden  $m=2$ . La energía potencial del sistema contiene a las derivadas primeras de las deformaciones, es decir  $n=1$ , con lo que es suficiente con emplear funciones de interpolación de tipo  $C^0$  para asegurar la convergencia en este problema.

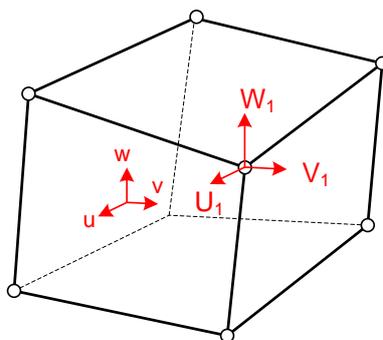
## 5.2. CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS

Un punto cualquiera del sólido tiene tres desplazamientos  $u, v, w$ , que son función de las coordenadas  $(x, y, z)$  del punto, y que se agrupan en un vector:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Un nudo cualquiera de un elemento tiene tres desplazamientos  $U_i, V_i, W_i$ . Todos ellos se agrupan formando el vector de desplazamientos nodales del elemento:

$$\boldsymbol{\delta}^e = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \dots]^T \quad (5.2)$$



**Figura 5.1 Elemento finito tridimensional de 8 nudos**

Los desplazamientos se interpolan en función de los desplazamientos nodales mediante las funciones de interpolación:

$$u = \sum N_i U_i \quad v = \sum N_i V_i \quad w = \sum N_i W_i \quad (5.3)$$

Esta interpolación se representa en la forma matricial habitual:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (5.4)$$

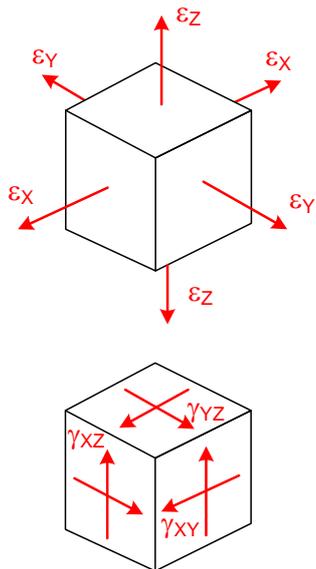
siendo  $\mathbf{N}$  la matriz de funciones de interpolación, cuya estructura en este caso es:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

### 5.3. DEFORMACIONES UNITARIAS

En un punto del sólido tridimensional, el vector de deformaciones unitarias contiene seis términos (Figura 5.2), que corresponden a las tres deformaciones unitarias  $\epsilon$ , y a las tres deformaciones de cortadura ingenieriles  $\gamma$ .

Su valor en función de las derivadas de los desplazamientos es, en el caso de pequeñas deformaciones:



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Figura 5.2 Deformación unitaria

Esta expresión se puede poner en la forma habitual:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} \quad (5.7)$$

donde se identifica al operador matricial  $\boldsymbol{\partial}$ , de tamaño  $6 \times 3$ , que pasa de las deformaciones  $\mathbf{u}$  a las deformaciones unitarias. Sustituyendo las deformaciones  $\mathbf{u}$  en función de las deformaciones nodales, a través de las funciones de interpolación se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (5.8)$$

La matriz  $\mathbf{B}$  relaciona las deformaciones de los nudos con las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \quad (5.9)$$

Dada la estructura de  $\mathbf{N}$ , la matriz  $\mathbf{B}$  se puede poner en la forma:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} = \partial \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n] \quad (5.11)$$

Cada una de las matrices  $\mathbf{B}_i$  tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{B}_i = \partial \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

#### 5.4. RELACIÓN TENSIÓN - DEFORMACIÓN UNITARIA

Las tensiones en un punto cualquiera del dominio están definidas por el tensor de tensiones en tres dimensiones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

La ecuación constitutiva del material para un material elástico lineal es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (5.14)$$

siendo:

- $\mathbf{D}$  la matriz elástica, que para un material elástico lineal es constante y depende de sólo dos parámetros: el módulo de elasticidad  $E$  y el módulo de Poisson  $\nu$ . Su valor es:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  el vector de las deformaciones unitarias iniciales existentes en el material en el punto considerado, debidas normalmente a las temperaturas, aunque pueden incluirse en ellas las debidas a los errores de forma, etc.
- $\boldsymbol{\sigma}_0$  son las tensiones iniciales presentes en el material, de valor conocido.

## 5.5. TIPOS DE ELEMENTOS

El orden de derivación de las funciones de interpolación en la matriz  $\mathbf{B}$  es la unidad, por lo que es suficiente con emplear funciones de interpolación con continuidad  $C^0$ . Estas funciones se presentan a continuación para los distintos elementos existentes, empleando sistemas de coordenadas locales adecuados a cada uno de ellos.

### 5.5.1 Elementos prisma rectangular

Para definir las funciones de interpolación se utilizan tres coordenadas locales  $\xi, \eta, \zeta$ , con límites entre -1 a +1. Cuando se representa en este sistema de ejes local, el elemento es un cubo de lado 2.

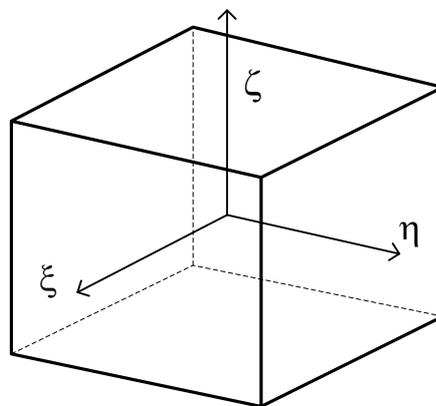


Figura 5.3 Coordenadas locales normalizadas en el espacio

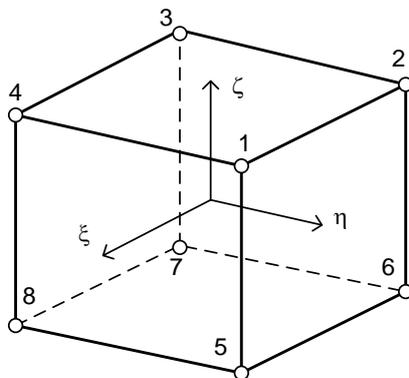
Existe una familia completa de elementos prismáticos de base rectangular, que se corresponden con los elementos rectangulares planos.

**5.5.1.1 Elemento lineal de ocho nudos**

Es el correspondiente al rectángulo plano de cuatro nudos. Cada una de sus caras es un elemento rectangular de cuatro nudos (figura 5.4). Sus funciones de interpolación son:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 1,8 \tag{5.16}$$

En esta expresión  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  son las coordenadas del nudo  $i$ .



**Figura 5.4 Elemento de 8 nudos**

**5.5.1.2 Elemento cuadrático de veinte nudos**

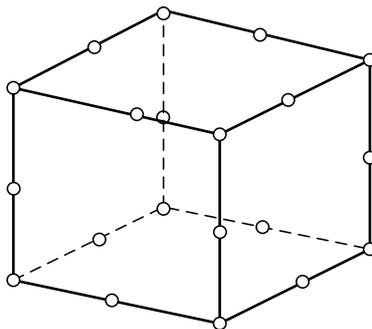
Tiene tres nudos por arista (figura 5.5), por lo que éstas pueden ser parábolas, y cada una de sus caras tiene ocho nudos, como un elemento plano. Cada cara puede ser una superficie curva parabólica.

Las funciones de los nudos de esquina son:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i)(\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2) \tag{5.17}$$

Las de los nudos intermedios para la cara con  $\xi_i=0$  son:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \tag{5.18}$$



**Figura 5.5 Elemento de 20 nudos**

### 5.5.1.3 Elemento cúbico de 32 nudos

Tiene cuatro nudos por arista y cada cara tiene doce nudos. Sus caras pueden por lo tanto aproximar superficies de grado 3.

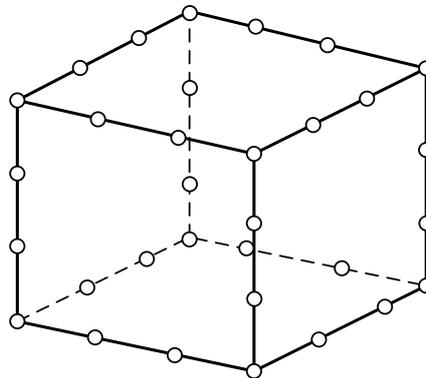


Figura 5.6 Elemento de 32 nudos

### 5.5.1.4 Elementos lagrangianos

Se pueden desarrollar elementos tridimensionales empleando polinomios de Lagrange como funciones de interpolación. Las funciones de interpolación se definen como el producto de tres polinomios de Lagrange, uno en cada dirección.

Los elementos así obtenidos contienen gran cantidad de nudos en las caras y en su interior, y son muy poco usados en la práctica.

### 5.5.1.5 Elementos con número de nudos por lado variable

De la misma forma que en el plano, existen en el espacio elementos con número de nudos variable en sus distintas aristas. Las posibles formas son muy numerosas, y para generar una función de interpolación se aplica la misma técnica que en el caso plano, aunque aquí cada nudo de esquina se ve afectado por las tres aristas que confluyen en él.

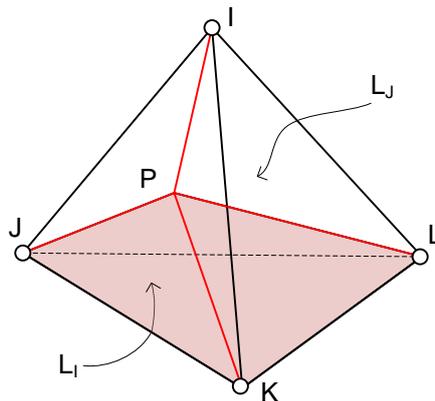
## 5.5.2 Elementos tetraedro

Esta familia de elementos espaciales es la variante tridimensional de los elementos triangulares planos. Para la definición de las funciones de interpolación se usan unas coordenadas locales del elemento, que son de volumen (Figura 5.7), y se definen como:

$$L_1 = \frac{\text{Volumen}(PJKL)}{\text{Volumen}(IJKL)} \quad (5.19)$$

Existen cuatro coordenadas de este tipo, que evidentemente no son independientes, ya que se cumple que  $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$

En su sistema de ejes local normalizado, los elementos son tetraedros de caras iguales y volumen unidad.

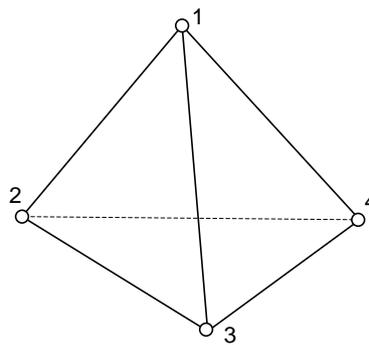


**Figura 5.7** Coordenadas de volumen

### 5.5.2.1 Elemento tetraedro de cuatro nudos

Las funciones de interpolación son:  $N_i = L_i \quad i = 1, 4$

Este elemento representa en su interior un estado de tensión constante. A pesar de su pobre representación del campo de tensiones, ha sido muy usado por la facilidad para generar de forma automática mallas de tetraedros; sin embargo en la actualidad ha sido desbancado por los elementos hexaedros de cuatro u ocho nudos.



**Figura 5.8** Elemento tetraedro lineal de 4 nudos

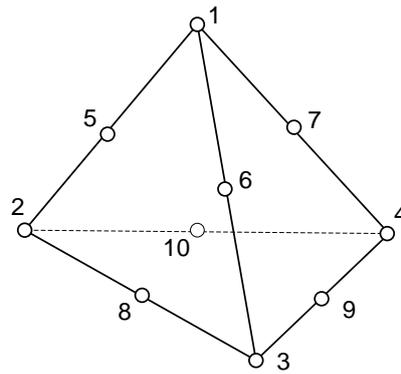
### 5.5.2.2 Elemento tetraedro cuadrático de diez nudos

Tiene tres nudos por arista y seis por cara. Las funciones de interpolación de las esquinas son:

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 & N_4 &= (2L_4 - 1)L_4 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para los nudos intermedios son:

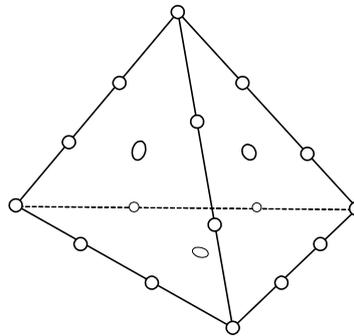
$$N_5 = 4L_1L_2 \quad N_6 = 4L_1L_3 \quad (5.21)$$



**Figura 5.9 Elemento tetraedro de 10 nudos**

### 5.5.2.3 Elemento tetraedro de veinte nudos

Tiene cuatro nudos por arista y diez por cara. Hay un nudo extra en el centro de cada cara, al igual que en el elemento plano correspondiente. De esta forma se utiliza un polinomio completo de orden 3 en las tres coordenadas.

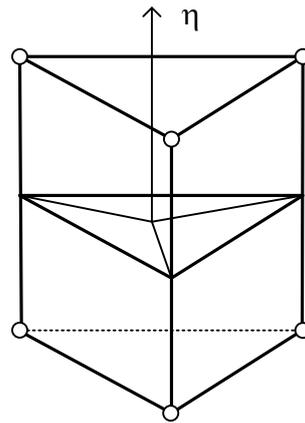


**Figura 5.10 Elemento tetraedro de 20 nudos**

### 5.5.3 Elementos prisma triangular

Estos elementos tienen forma de prisma con base triangular. Utilizan un sistema de coordenadas mixto: para el triángulo de la base se utilizan tres coordenadas de área  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ , y a ellas se añade otra coordenada  $\eta$  para definir la altura respecto de la base, la cual varía entre -1 y +1 (figura 5.11).

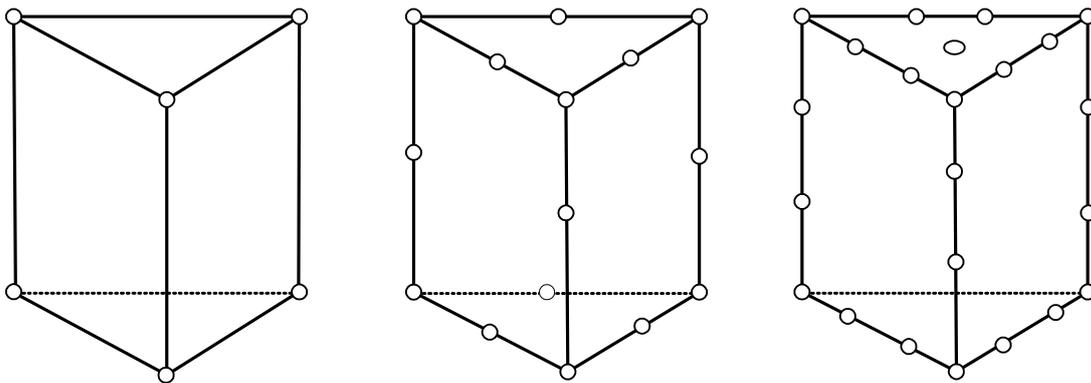
En su sistema local el elemento es un prisma con base triangular de área unidad y altura igual a 2.



**Figura 5.11** Coordenadas locales para elementos prisma triangular

Forman esta familia (Figura 5.12) los elementos equivalentes a los ya presentados antes.

- Prisma triangular lineal de seis nudos, con dos nudos por arista.
- Prisma triangular cuadrático, de 15 nudos en total, con tres nudos por arista.
- Prisma triangular cúbico, de 26 nudos, con cuatro nudos por arista, y un nudo en el centro de cada una de las dos caras triangulares.



**Figura 5.12** Elementos prisma triangular

## 5.6. FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA

La formulación isoparamétrica en tres dimensiones sigue exactamente los mismos pasos que en el caso bidimensional, pero añadiendo la coordenada  $z$ .

- La interpolación de coordenadas en el espacio se establece en la forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{x}^e \quad (5.23)$$

donde el vector  $\mathbf{x}^e$  agrupa a las coordenadas  $(x, y, z)$  de todos los nudos del elemento.

Con esta definición un elemento isoparamétrico espacial tiene una forma geométrica real que está definida por el tipo de funciones de interpolación que emplee. La forma real de cada cara o lado está definida por el número de nudos que haya en esa cara o lado: así los lados con dos nudos son rectos, los lados de tres nudos pueden ser parábolas y los lados de cuatro nudos pueden ser curvas cúbicas. Las caras con tres nudos son planas, con cuatro nudos son superficies bilineales, etc.

Es posible utilizar asimismo elementos subparamétricos, que pueden tener cierto interés desde el punto de vista práctico, ya que pueden emplear unos pocos nudos (p.e. sólo los cuatro vértices) para definir la forma del elemento, y sin embargo emplear muchos nudos intermedios en los lados para representar el campo de deformaciones con gran precisión.

- Las derivadas de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas locales se pueden obtener mediante la regla de derivación en cadena:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

De esta expresión se pueden despejar las derivadas en coordenadas generales:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

El vector de la derecha es conocido sin más que derivar las  $N_i$  respecto a  $\xi, \eta, \zeta$ . Conociendo  $\mathbf{J}$  se pueden obtener de la expresión (5.25) todas las derivadas que forman la matriz  $\mathbf{B}_i$ .

- El cálculo de  $\mathbf{J}$  se efectúa apoyándose en la interpolación de coordenadas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Esta expresión puede ser evaluada con facilidad, ya que las funciones  $N_i$  son conocidas en función de  $\xi, \eta, \zeta$  y  $x_i, y_i, z_i$  son las coordenadas de los nudos que definen la forma del elemento.

- **Matriz de rigidez.** Su expresión general es:

$$\mathbf{K} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (5.27)$$

Todos los términos que aparecen en ella son conocidos. Su evaluación se efectúa de forma numérica, siendo aplicables las mismas consideraciones que en el caso plano.

El dominio de integración en este caso es un volumen, cuyo elemento diferencial se expresa como:

$$dv = dx dy dz = J d\xi d\eta d\zeta \quad (5.28)$$

siendo  $J$  el determinante de la matriz Jacobiana, que es, en general, una función de  $\xi, \eta, \zeta$ .

- **Fuerzas de volumen.** Su expresión general es:

$$\mathbf{P}_v = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv \quad (5.29)$$

Se supone, al igual que en el caso plano, que las fuerzas de volumen se pueden interpolar a partir de sus valores nodales, empleando las propias funciones de interpolación:

$$\mathbf{q}_v = \mathbf{N} \mathbf{q}_v^e \quad (5.30)$$

siendo  $\mathbf{q}_v^e$  los valores nodales de las fuerzas de volumen, que son constantes. Con esto se obtiene la siguiente expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{P}_v = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \mathbf{q}_v^e = \mathbf{M} \mathbf{q}_v^e \quad (5.31)$$

Considerando la estructura de  $\mathbf{N}$ , la matriz  $\mathbf{M}$  es:

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv = \int \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{N}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} dx dy dz \quad (5.32)$$

La matriz  $\mathbf{M}$  se puede dividir en  $n \times n$  submatrices, que relacionan a los  $n$  nudos entre sí:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \dots & \mathbf{M}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}^{n1} & \dots & \mathbf{M}^{nn} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

siendo cada una de ellas:

$$\mathbf{M}^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} J d\xi d\eta d\zeta \quad (5.34)$$

El cálculo de la matriz  $\mathbf{M}$  no presenta ningún problema, efectuándose en el sistema local de coordenadas, en el que se conoce la matriz de interpolación  $\mathbf{N}$ . Todos los términos que la forman son polinomios, por lo que se puede evaluar de forma exacta por métodos numéricos.

- **Fuerzas de superficie.** En este caso estas fuerzas actúan sobre una de las caras del elemento finito, pudiendo tener componentes en las tres direcciones del espacio (figura 5.13).

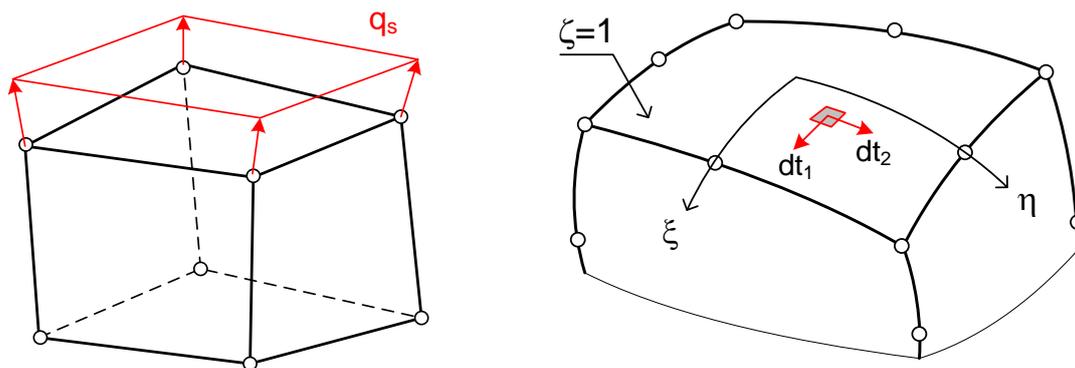
La expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes a ellas es:

$$\mathbf{P}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds \quad (5.35)$$

Al igual que con las fuerzas de volumen, se supone que las fuerzas de superficie se representan mediante una interpolación de sus valores nodales, empleando las propias funciones de interpolación, particularizadas para la cara donde se aplica la fuerza:

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{N} \mathbf{q}_s^e \quad (5.36)$$

siendo  $\mathbf{q}_s^e$  los valores nodales de las fuerzas de superficie, que son constantes.



**Figura 5.13** Fuerzas de superficie sobre un elemento espacial

El vector de fuerzas nodales equivalentes es por lo tanto:

$$\mathbf{P}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \mathbf{q}_s^e = \mathbf{M}_s \mathbf{q}_s^e \quad (5.37)$$

donde se ha introducido la matriz  $\mathbf{M}_s$  que tiene una expresión muy similar a la matriz  $\mathbf{M}$ , pero integrando en la cara del elemento donde se aplican las fuerzas. Está compuesta por submatrices del tipo:

$$\mathbf{M}_s^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} ds \quad (5.38)$$

Por ejemplo, si la fuerza se aplica en la cara  $\zeta = +1$  (figura 5.13), el valor del diferencial de área es:  $ds = |d\mathbf{t}_1 \times d\mathbf{t}_2|$  donde  $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$  son dos vectores tangentes a las líneas  $\eta = Cte$  y  $\xi = Cte$ , cuyo valor es:

$$d\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{12} \\ J_{13} \end{bmatrix} d\xi \quad d\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \\ J_{23} \end{bmatrix} d\eta \quad (5.39)$$

Sustituyendo estos vectores en la expresión de  $ds$  se obtiene el valor de éste en función de las dos coordenadas locales  $\xi, \eta$ . El dominio de la integración queda así reducido a un cuadrado de lado 2.

# Problemas con simetría de revolución

## 6.1. INTRODUCCIÓN

Se dice que un problema tiene simetría de revolución cuando tanto el dominio sólido del problema, como las cargas aplicadas y las condiciones de ligadura son simétricas respecto a un eje. La solución del problema, es decir los estados de deformaciones y tensiones tienen asimismo simetría respecto a dicho eje.

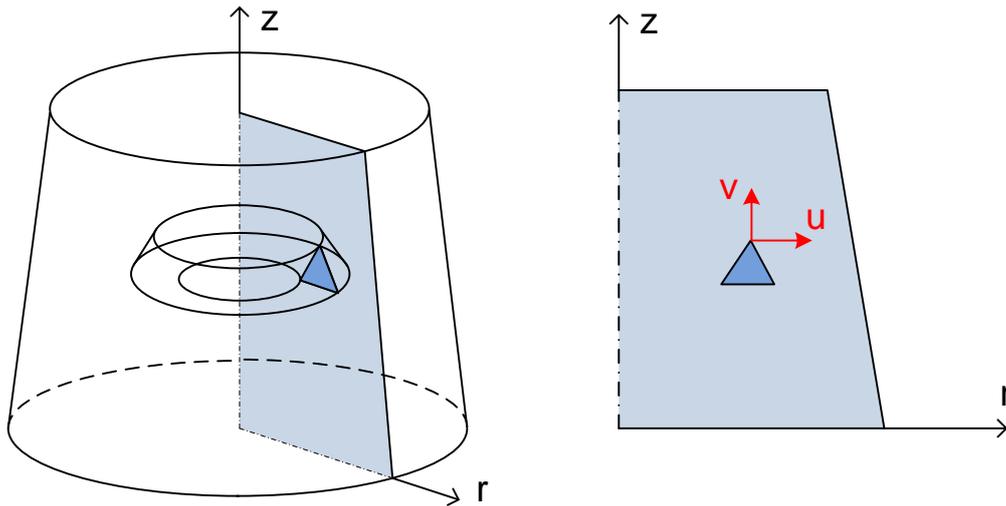
Si se considera una sección del sólido que contiene al eje de revolución, su estado de deformación queda definido por las dos componentes del desplazamiento  $u$ ,  $v$  contenidas en dicha sección (figura 6.1). Por lo tanto el problema queda reducido a un problema en dos dimensiones (radial y axial), aunque el dominio sólido sea tridimensional.

Por lo tanto el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  del problema es:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

donde  $r$  y  $z$  representan respectivamente las coordenadas radial y axial de un punto y  $u$ ,  $v$  son los correspondientes desplazamientos radial y axial.

Desde el punto de vista de la resolución por el método de los elementos finitos, el dominio sólido a considerar por cada elemento corresponde a un anillo de revolución con sección transversal igual a la forma del elemento. Al ser el estado de deformación bidimensional, se pueden usar las mismas funciones de interpolación utilizadas en el caso plano para definir el campo de desplazamientos dentro del elemento. Sin embargo el dominio del elemento sigue siendo el anillo de revolución, por lo que la energía, la rigidez y las fuerzas nodales equivalentes deberán calcularse para todo el anillo.



**Figura 6.1** Problema con simetría de revolución

En un problema de elasticidad plana la energía almacenada está asociada sólo a las tres componentes de la tensión y la deformación contenidas en el plano del problema. No contribuyen a la energía ni la tensión ni la deformación perpendiculares a dicho plano, por ser nulas bien dicha tensión (caso de tensión plana) o bien la deformación unitaria correspondiente (caso de deformación plana). Sin embargo, en un problema de revolución todo desplazamiento radial  $u$  induce automáticamente una deformación en dirección circunferencial, y como las tensiones en esta dirección circunferencial no son nulas, hay que considerar esta cuarta componente de la tensión y de la deformación unitaria. Este es el punto clave que marca la diferencia esencial en el tratamiento de los problemas de revolución con respecto a los problemas planos.

## 6.2. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

Al ser la deformación plana, el campo de deformaciones en el interior del elemento se aproxima mediante la expresión habitual:

$$u = \sum N_i U_i \quad v = \sum N_i V_i \quad (6.2)$$

siendo  $U_i$  las deformaciones en dirección radial y  $V_i$  las deformaciones en dirección axial, que forman el vector de deformaciones nodales del elemento:

$$\delta^e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n]^T \quad (6.3)$$

donde  $n$  es el número de nudos del elemento. La expresión (6.2) puede ponerse en forma matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e \quad (6.4)$$

La matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  tiene dos filas y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nudos del elemento. La estructura de esta matriz es la misma que en un problema de elasticidad plana:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

### 6.3. DEFORMACIONES UNITARIAS

La deformación unitaria en un problema con simetría de revolución tiene cuatro componentes (figura 6.2), cuya expresión en función de los dos desplazamientos del punto es:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

En esta expresión  $\varepsilon_\theta$  es la deformación unitaria circunferencial, producida por la deformación radial, al ser el dominio de revolución. La expresión de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se puede poner en la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

En esta expresión se identifica al operador matricial  $\boldsymbol{\partial}$  que pasa de las deformaciones  $\mathbf{u}$  a las deformaciones unitarias.

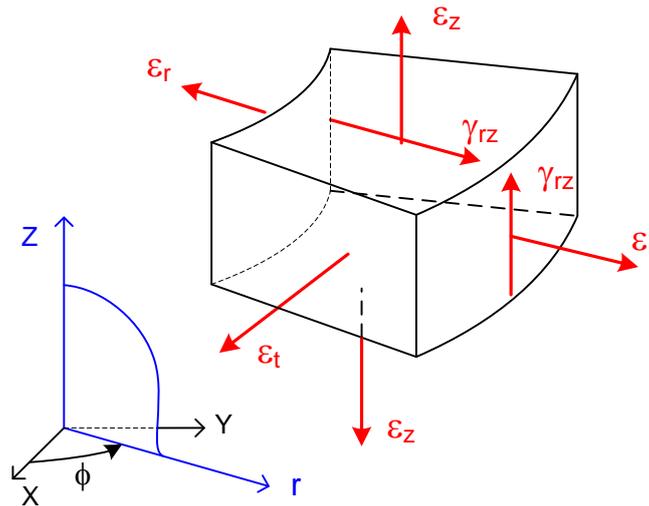


Figura 6.2 Deformaciones unitarias con simetría de revolución

Sustituyendo las deformaciones  $\mathbf{u}$  en función de las deformaciones nodales, a través de las funciones de interpolación se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \tag{6.8}$$

La expresión de la matriz  $\mathbf{B}$  es:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \dots & \frac{N_n}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Esta matriz se puede poner en la forma:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n] \tag{6.10}$$

siendo cada una de las matrices:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

#### 6.4. ESTADO DE TENSIONES. ECUACIÓN CONSTITUTIVA

El estado de tensiones correspondiente a un problema con simetría de revolución, en coordenadas cilíndricas, tiene cuatro componentes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

La ecuación constitutiva, en ausencia de temperaturas, es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

donde se identifica la matriz elástica  $\mathbf{D}$ .

#### 6.5. TEMPERATURAS. DEFORMACIONES UNITARIAS INICIALES

La presencia de deformaciones unitarias iniciales introduce un nuevo término en la ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (6.14)$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  el vector de las deformaciones unitarias iniciales existentes en el material en el punto considerado, que son conocidas. Si éstas están producidas por un incremento de temperatura  $T$ , se producen deformaciones unitarias iguales en las direcciones radial, axial y circunferencial, sin deformación de cortadura.

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_{0Tr} \\ \epsilon_{0Tz} \\ \epsilon_{0T\theta} \\ \gamma_{0Trz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.15}$$

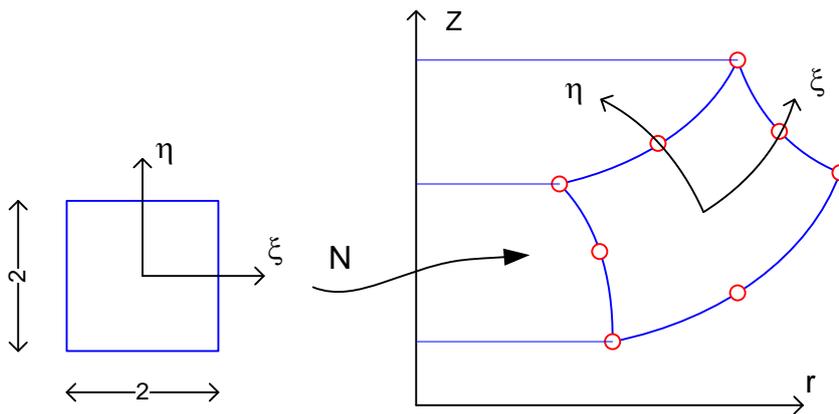
**6.6. FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA**

La interpolación de coordenadas se emplea de la misma forma que en los problemas de elasticidad bidimensional, pero aplicada a la definición de las coordenadas radial y axial:

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ z_1 \\ r_2 \\ z_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \tag{6.16}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{x}^e \tag{6.17}$$

El vector  $\mathbf{x}^e$  agrupa a las coordenadas  $(r, z)$  de todos los nudos del elemento.



**Figura 6.3 Interpolación de coordenadas**

De la misma forma, existen elementos de tipo sub y superparamétrico, en función del número de nudos usados para definir la forma del elemento. Pueden emplearse asimismo elementos triangulares, tal y como se indica en el estudio de la elasticidad bidimensional.

El cálculo de las propiedades del elemento requiere conocer las derivadas de las funciones de interpolación respecto a las coordenadas generales. Siguiendo las reglas de la derivación se puede poner la siguiente relación matricial entre las derivadas en ambos sistemas de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

La matriz  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas  $(r, z)$  a  $(\xi, \eta)$ . Despejando se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

El vector de la derecha se puede calcular sin más que derivar las  $N_i$  respecto a  $\xi, \eta$ . Conociendo  $\mathbf{J}$  se pueden obtener de la expresión (6.19) todas las derivadas que forman la matriz  $\mathbf{B}_i$ .

El cálculo de  $\mathbf{J}$  se hace apoyándose en la interpolación de coordenadas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Esta expresión puede ser evaluada fácilmente, ya que las funciones  $N$  son conocidas en función de  $\xi, \eta$  y  $r_i, z_i$  son las coordenadas de los nudos que definen la forma del elemento.

### 6.6.1 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  del elemento es:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (6.21)$$

El dominio de integración expresado en las coordenadas locales es:

$$dv = 2 \pi r dr dz = 2 \pi r J d\xi d\eta \quad (6.22)$$

El valor del radio se aproxima según la ley de interpolación de coordenadas, con lo que el diferencial de volumen queda:

$$dv = 2 \pi r dr dz = 2 \pi \sum N_i r_i J d\xi d\eta \quad (6.23)$$

Considerando la estructura de  $\mathbf{B}$ , la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  es:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = 2\pi \int \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{B}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} J \sum N_i r_i d\xi d\eta \quad (6.24)$$

La matriz  $\mathbf{K}$  se puede dividir en  $n \times n$  submatrices, que relacionan a los  $n$  nudos entre sí:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \dots & \mathbf{K}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}^{n1} & \dots & \mathbf{K}^{nn} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Cada una de ellas tiene la expresión:

$$\mathbf{K}^{ij} = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \sum N_i r_i J d\xi d\eta \quad (6.26)$$

Sobre la naturaleza de estas integrales, pueden hacerse las mismas consideraciones que en el caso de elasticidad bidimensional. Únicamente debe hacerse notar que el orden de los polinomios es mayor que en aquel caso, debido a la presencia del término  $\sum N_i r_i$  en el integrando.

### 6.6.2 Fuerzas de volumen

Las fuerzas de volumen que pueden considerarse en un problema axisimétrico están distribuidas sobre el volumen de todo el anillo de revolución asociado a cada elemento finito. Tienen dos componentes, radial y axial, que pueden ser ambas función de las coordenadas  $r$  y  $z$ , pero por simetría de revolución no pueden ser función del ángulo  $\theta$ :

$$\mathbf{q}_v = \begin{Bmatrix} q_{vr} \\ q_{vz} \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

Como ya es habitual, se supone que la variación de las fuerzas de volumen se puede representar mediante una interpolación de sus valores nodales empleando las propias funciones de interpolación:

$$\mathbf{q}_v = \mathbf{N} \mathbf{q}_v^e \quad (6.28)$$

siendo  $\mathbf{q}_v^e$  los valores nodales de las fuerzas de volumen, que son constantes. Con esto se obtiene la siguiente expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{P}_v = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \mathbf{q}_v^e = \mathbf{M} \mathbf{q}_v^e \quad (6.29)$$

Considerando la estructura de  $\mathbf{N}$ , la matriz  $\mathbf{M}$  es:

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv = 2\pi \int \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{N}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} r dr dz \quad (6.30)$$

La matriz  $\mathbf{M}$  se puede dividir en  $n \times n$  submatrices, que relacionan a los  $n$  nudos entre sí:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \dots & \mathbf{M}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}^{n1} & \dots & \mathbf{M}^{nn} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Cada una de ellas vale:

$$\mathbf{M}^{ij} = 2\pi \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} J \sum N_i r_i d\xi d\eta \quad (6.32)$$

El cálculo de la matriz  $\mathbf{M}$  no presenta ningún problema, efectuándose en el sistema local de coordenadas, en el que se conoce la matriz de interpolación  $\mathbf{N}$ . Todos los términos que la forman son polinomios, por lo que se puede evaluar de forma exacta de forma numérica.

### 6.6.3 Fuerzas de superficie

Estas fuerzas corresponden a fuerzas aplicadas sobre la superficie lateral del sólido, y se transforman en fuerzas aplicadas sobre el lado de los elementos (figura 6.4).

Al igual que con las fuerzas de volumen, las fuerzas de superficie se representan mediante una interpolación de sus valores nodales, empleando las propias funciones de interpolación del elemento:

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{N} \mathbf{q}_s^e \quad (6.33)$$

siendo  $\mathbf{q}_s^e$  los valores nodales de las fuerzas de superficie, que son constantes. Con esto el vector de fuerzas nodales equivalentes resulta ser:

$$\mathbf{P}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \mathbf{q}_s^e = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} 2\pi r dl \mathbf{q}_s^e = \mathbf{M}_s \mathbf{q}_s^e \quad (6.34)$$

donde se ha introducido la matriz  $\mathbf{M}_s$  que tiene una expresión muy similar a la matriz  $\mathbf{M}$ , pero integrando al lado del elemento donde se aplican las fuerzas. Está compuesta por submatrices del tipo:

$$\mathbf{M}_s^{ij} = 2\pi \int \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} \sum N_i r_i dl \quad (6.35)$$

El valor del diferencial de longitud se calcula igual que para los elementos bidimensionales.

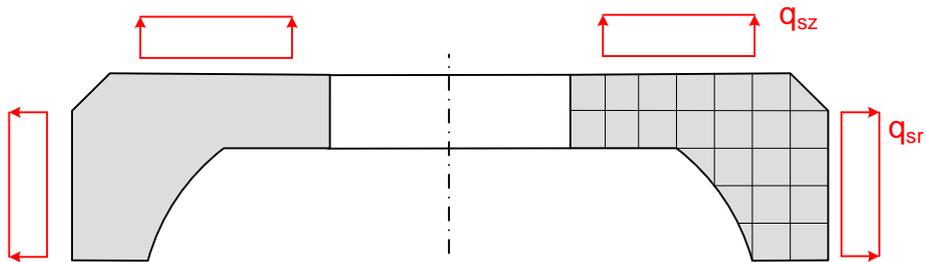


Figura 6.4 Fuerzas de superficie con simetría de revolución

#### 6.6.4 Fuerzas de línea

Sobre el sólido pueden actuar fuerzas de línea, que deben estar distribuidas sobre una circunferencia con centro en el eje de revolución (figura 6.5). Para guardar la simetría de revolución, estas fuerzas deben ser de módulo constante.

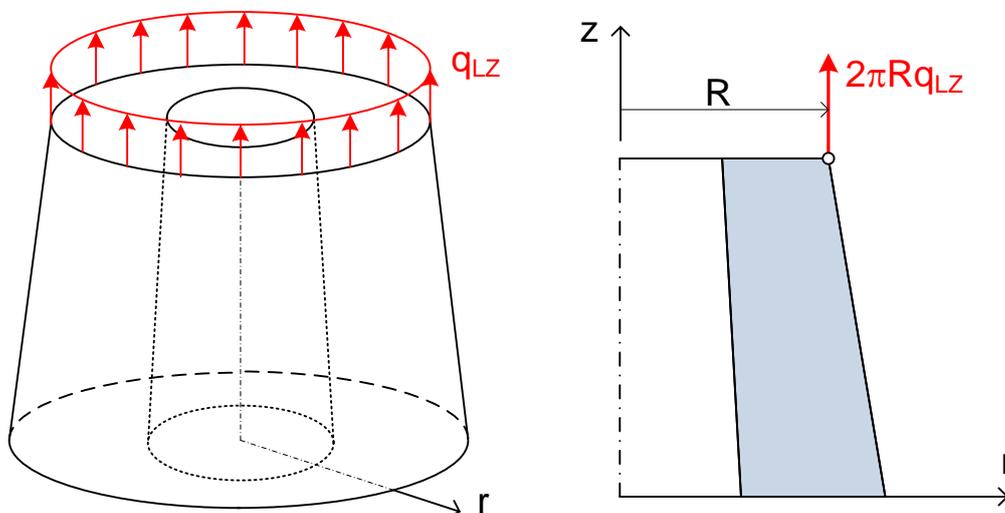


Figura 6.5 Fuerzas de línea con simetría de revolución

Sea una fuerza de línea con componentes en las direcciones radial y axial, expresadas como una fuerza por unidad de longitud circunferencial:

$$\mathbf{q}_L = \begin{Bmatrix} q_{Lr} \\ q_{Lz} \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

Si la fuerza de línea actúa sobre una circunferencia de radio  $R$ , la fuerza equivalente a ella es una fuerza nodal de magnitud:

$$\mathbf{P}_L = \begin{Bmatrix} 2\pi R q_{Lr} \\ 2\pi R q_{Lz} \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

Esta fuerza debe aplicarse sobre un nudo de la discretización de elementos finitos coincidente con la circunferencia de radio  $R$ .

## 6.7. CARGAS SIN SIMETRÍA DE REVOLUCIÓN

Se pretende estudiar ahora un sólido con simetría de revolución, pero sometido a cargas exteriores que no tienen dicha simetría. En consecuencia las tensiones y las deformaciones del sólido no tendrán simetría de revolución. Sin embargo quiere hacerse uso de la simetría del dominio, y emplear elementos finitos planos, en lugar de elementos tridimensionales.

### 6.7.1 Campo de desplazamientos

Al no haber simetría de revolución en las cargas, tampoco la hay en las deformaciones, y ahora el campo de desplazamientos en el interior del sólido es función de las tres coordenadas  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$ , y tiene tres componentes:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

Dado que el sólido tiene simetría de revolución, la dependencia de las tres componentes de  $\mathbf{u}$  de la coordenada  $\theta$  puede expresarse mediante un desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{rk}^1 \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} u_{rk}^2 \sin k\theta \\ u_z &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{zk}^1 \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} u_{zk}^2 \sin k\theta \\ u_\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{\theta k}^1 \sin k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} u_{\theta k}^2 \cos k\theta \end{aligned} \quad (6.39)$$

Los coeficientes del desarrollo se han separado en dos grupos: el grupo con superíndice 1 corresponde al estado simétrico de deformaciones, y el grupo con superíndice 2 corresponde al estado antisimétrico. En el estado simétrico los desplazamientos radial y axial varían según la ley del coseno, que es simétrica respecto a  $\theta$ , mientras que el desplazamiento circunferencial varía según el seno, a fin de obtener  $u_\theta = 0$  para  $\theta=0$  y  $\theta=\pi$ , así como el cambio de signo con  $\pi < \theta < 2\pi$ . En el grupo antisimétrico, las funciones seno y coseno están cambiadas respecto al caso simétrico.

Todos los coeficientes del desarrollo en serie son sólo funciones de  $r$  y  $\theta$ , y constituyen las incógnitas del problema.

### 6.7.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias para este problema corresponden a las de la elasticidad en tres dimensiones, y dada la geometría resulta conveniente manejarlas en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
 \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
 \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\
 \gamma_{\theta r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Derivando en las expresiones de los desplazamientos y reagrupando los términos en seno y coseno, se obtiene la relación entre las deformaciones unitarias y los coeficientes del desarrollo en serie del campo de desplazamientos. Dicha expresión se puede poner en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{\theta r} \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\theta \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & \frac{k}{r} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{k}{r} & \frac{\partial}{\partial z} & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{k}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{rk}^1 \\ u_{zk}^1 \\ u_{\theta k}^1 \\ u_{rk}^2 \\ u_{zk}^2 \\ u_{\theta k}^2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sin k\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{r} & 0 & -\frac{k}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & -\frac{k}{r} & \frac{\partial}{\partial z} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{rk}^1 \\ u_{zk}^1 \\ u_{\theta k}^1 \\ u_{rk}^2 \\ u_{zk}^2 \\ u_{\theta k}^2 \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^C \mathbf{u}_k^{12} \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^S \mathbf{u}_k^{12} \sin k\theta \quad (6.42)$$

Los operadores  $\partial_k^C$  y  $\partial_k^S$  corresponden a los términos en coseno y seno respectivamente del desarrollo en serie de  $\epsilon$ . Por su estructura pueden separarse cada uno de ellos por columnas en dos submatrices, de tamaño 6x3, que corresponden a los estados 1 y 2, con lo que la ecuación anterior queda:

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^{C1} \cos k\theta + \partial_k^{S1} \sin k\theta \mathbf{u}_k^1 + \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^{C2} \cos k\theta + \partial_k^{S2} \sin k\theta \mathbf{u}_k^2 \quad (6.43)$$

Agrupando entre sí a los operadores de los estados 1 y 2 se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{\theta r} \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \cos k\theta \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & \frac{k}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sin k\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{k}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_{rk}^1 \\ u_{zk}^1 \\ u_{\theta k}^1 \end{Bmatrix}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \cos k\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{k}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \end{bmatrix} + \sin k\theta \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{k}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_{rk}^2 \\ u_{zk}^2 \\ u_{\theta k}^2 \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^1 \mathbf{u}_k^1 + \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^2 \mathbf{u}_k^2 \quad (6.45)$$

El primer operador  $\partial_k^1$  corresponde al estado simétrico (estado 1), es de tamaño  $6 \times 3$ , y está formado por las tres primeras columnas de los operadores  $\partial_k^C$  y  $\partial_k^S$ . Análogamente el operador  $\partial_k^2$ , que corresponde al estado antisimétrico (estado 2), está formado por las tres últimas columnas de los operadores anteriores. Hay que notar que tanto el operador simétrico como el antisimétrico tienen en su composición términos en seno y en coseno.

### 6.7.3 Interpolación de desplazamientos

En las expresiones anteriores se han manejado los desplazamientos  $\mathbf{u}$  de un punto cualquiera del sólido. Éstos se interpolan en función de los correspondientes a los nudos del elemento donde se sitúa el punto, según la expresión habitual:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e \quad (6.46)$$

donde  $\delta^e$  contiene a los tres desplazamientos ( $U$  en dirección radial,  $V$  en dirección axial y  $W$  en dirección circunferencial  $\theta$ ) de los  $n$  nudos del elemento:

$$\delta^e = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \dots]^T \quad (6.47)$$

y la matriz  $\mathbf{N}$  es de  $3 \times 3n$ :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & 0 & \vdots & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & 0 & N_2 & 0 & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & 0 & 0 & N_2 & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

De la misma forma pueden interpolarse las componentes de cualquiera de los armónicos que forman la descomposición en serie de la respuesta total, tanto para el caso simétrico como para el antisimétrico:

$$\mathbf{u}_k^1 = \mathbf{N} \delta_k^{e1} \quad \mathbf{u}_k^2 = \mathbf{N} \delta_k^{e2} \quad (6.49)$$

Donde  $\delta_k^{e1}$  y  $\delta_k^{e2}$  contienen los  $3n$  desplazamientos de los  $n$  nudos del elemento  $e$ , en el armónico  $k$ , en los casos 1 y 2 respectivamente. Sustituyendo esta expresión en la de las deformaciones unitarias se obtiene:

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^1 \mathbf{N} \delta_k^{e1} + \sum_{k=0}^{\infty} \partial_k^2 \mathbf{N} \delta_k^{e2} \quad (6.50)$$

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k^1 \delta_k^{e1} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k^2 \delta_k^{e2} \quad (6.51)$$

Esta expresión define las dos matrices  $\mathbf{B}^1$  y  $\mathbf{B}^2$  que relacionan los desplazamientos nodales con las deformaciones unitarias. Hay tantas matrices como armónicos se emplean en cada uno de los estados 1 y 2. Su expresión es:

$$\mathbf{B}_k^1 = \partial_k^{c1} \mathbf{N} \cos k\theta + \partial_k^{s1} \mathbf{N} \sin k\theta = \mathbf{B}_k^{c1} \cos k\theta + \mathbf{B}_k^{s1} \sin k\theta \quad (6.52)$$

$$\mathbf{B}_k^2 = \partial_k^{c2} \mathbf{N} \cos k\theta + \partial_k^{s2} \mathbf{N} \sin k\theta = \mathbf{B}_k^{c2} \cos k\theta + \mathbf{B}_k^{s2} \sin k\theta \quad (6.53)$$

Cada una de las matrices  $\mathbf{B}^1$  y  $\mathbf{B}^2$  tiene una estructura similar a los operadores  $\partial$  correspondientes, con 3 filas y  $3n$  columnas:

$$\mathbf{B}_k^{c1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \dots \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{kN_1}{r} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_k^{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{kN_1}{r} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots \\ -\frac{kN_1}{r} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} - \frac{N_1}{r} & \dots \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{B}_k^{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{kN_1}{r} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots \\ \frac{kN_1}{r} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} - \frac{N_1}{r} & \dots \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_k^{s2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \dots \\ \frac{N_1}{r} & 0 & -\frac{kN_1}{r} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

### 6.7.4 Estado de tensiones

El vector de tensiones corresponde al estado tridimensional, en coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_\theta \quad \sigma_{rz} \quad \sigma_{z\theta} \quad \sigma_{\theta r} \right]^T \quad (6.56)$$

La ecuación constitutiva tiene la forma  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ , donde los valores de los coeficientes de  $\mathbf{D}$  son los mismos que se emplean en elasticidad tridimensional.

### 6.7.5 Energía elástica de deformación

Su expresión en régimen lineal es:

$$U = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (6.57)$$

Sustituyendo la expresión de las deformaciones unitarias se obtienen tres sumandos diferentes:

$$U = U^1 + U^2 + U^{12} \quad (6.58)$$

siendo:

$$U^1 = \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \delta_p^{e1T} \int \mathbf{B}_p^{1T} \mathbf{D} \mathbf{B}_q^1 dv \delta_q^{e1} \quad (6.59)$$

$$U^2 = \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \delta_p^{e2T} \int \mathbf{B}_p^{2T} \mathbf{D} \mathbf{B}_q^2 dv \delta_q^{e2} \quad (6.60)$$

$$U^{12} = \sum_p \sum_q \delta_p^{e1T} \int \mathbf{B}_p^{1T} \mathbf{D} \mathbf{B}_q^2 dv \delta_q^{e2} \quad (6.61)$$

El primer término corresponde a la energía que se acumula en el caso simétrico 1, el segundo a la energía en el estado antimétrico 2, y el tercero a la que se acumula cuando sobre las deformaciones del estado simétrico actúan las tensiones del estado antimétrico.

A continuación se desarrollan las integrales de los distintos términos.

#### 6.7.5.1 Término 1

Uno cualquiera de los sumandos de estos términos vale:

$$\begin{aligned} U_{pq}^1 = & \frac{1}{2} \delta_p^{e1T} \int \mathbf{B}_p^{e1T} \mathbf{D} \mathbf{B}_q^{c1} \cos p\theta \cos q\theta dv + \int \mathbf{B}_p^{c1T} \mathbf{D} \mathbf{B}_q^{s1} \cos p\theta \sin q\theta dv \delta_q^{e1} + \\ & + \frac{1}{2} \delta_p^{e1T} \int \mathbf{B}_p^{s1T} \mathbf{D} \mathbf{B}_q^{c1} \sin p\theta \cos q\theta dv + \int \mathbf{B}_p^{s1T} \mathbf{D} \mathbf{B}_q^{s1} \sin p\theta \sin q\theta dv \delta_q^{e1} \quad (6.62) \end{aligned}$$

Todas las integrales están extendidas al volumen del elemento finito, cuyo elemento diferencial es  $dv = r dr dz d\theta$ .

Dado que las matrices  $\mathbf{B}$  no dependen de la coordenada circunferencial  $\theta$ , es posible efectuar en primer lugar la integración en dicha coordenada. Esta integración en la coordenada  $\theta$  puede efectuarse con sencillez si se tiene en cuenta que:

$$\int \sin p\theta \sin q\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{para } p = q = 0 \\ \pi & \text{para } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{para } p \neq q \end{cases} \quad (6.63)$$

$$\int \cos p\theta \cos q\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{para } p = q = 0 \\ \pi & \text{para } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{para } p \neq q \end{cases} \quad (6.64)$$

$$\int \sin p\theta \cos q\theta d\theta = 0 \quad \text{para todo } p, q \quad (6.65)$$

Con esto la expresión de la energía queda:

$$\begin{aligned} U^1 &= \frac{1}{2} \delta_0^{e1T} 2\pi \int \mathbf{B}_0^{c1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_0^{c1} dA \delta_0^{e1} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^{e1T} \pi \int \mathbf{B}_p^{c1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{c1} dA + \pi \int \mathbf{B}_p^{s1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{s1} dA \delta_p^{e1} \end{aligned} \quad (6.66)$$

siendo  $dA = r dr dz$ , y estando ahora todas las integrales extendidas al dominio plano del elemento.

### 6.7.5.2 Término 2

Este término tiene una expresión similar a la del término 1, cambiando únicamente el superíndice 1 por el 2; por lo tanto efectuando el mismo desarrollo se llega a:

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{2} \delta_0^{e2T} 2\pi \int \mathbf{B}_0^{c2T} \mathbf{D}\mathbf{B}_0^{c2} dA \delta_0^{e2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^{e2T} \pi \int \mathbf{B}_p^{c2T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{c2} dA + \pi \int \mathbf{B}_p^{s2T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{s2} dA \delta_p^{e2} \end{aligned} \quad (6.67)$$

### 6.7.5.3 Término 1-2

Uno cualquiera de los sumandos de este término de la energía se puede expandir de la misma forma que para los términos anteriores, empleando las mismas integrales. Resulta ser:

$$\begin{aligned} U^{12} &= \frac{1}{2} \delta_0^{e1T} 2\pi \int \mathbf{B}_0^{c1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_0^{c2} dA \delta_0^{e2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^{e1T} \pi \int \mathbf{B}_p^{c1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{c2} dA + \pi \int \mathbf{B}_p^{s1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{s2} dA \delta_p^{e2} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Dada la estructura de las distintas matrices involucradas en los integrandos, resulta que todas las integrales son nulas, para cualquier valor de  $p$ . Por lo tanto este término de la energía es nulo  $U^{12}=0$ .

### 6.7.6 Matriz de rigidez

Analizando las expresiones de los distintos términos de la energía elástica se identifican en ellas una serie de matrices de rigidez, que corresponden a los distintos armónicos en que se ha descompuesto el análisis.

- Caso simétrico 1:

$$\mathbf{K}_0^1 = 2\pi \int_A \mathbf{B}_0^{c1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_0^{c1} r dr dz \quad (6.69)$$

$$\mathbf{K}_p^1 = \pi \int_A \mathbf{B}_p^{c1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{c1} r dr dz + \pi \int_A \mathbf{B}_p^{s1T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{s1} r dr dz \quad p = 1, \infty \quad (6.70)$$

- Caso antisimétrico 2:

$$\mathbf{K}_0^2 = 2\pi \int_A \mathbf{B}_0^{c2T} \mathbf{D}\mathbf{B}_0^{c2} r dr dz \quad (6.71)$$

$$\mathbf{K}_p^2 = \pi \int_A \mathbf{B}_p^{c2T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{c2} r dr dz + \pi \int_A \mathbf{B}_p^{s2T} \mathbf{D}\mathbf{B}_p^{s2} r dr dz \quad p = 1, \infty \quad (6.72)$$

### 6.7.7 Fuerzas nodales equivalentes

A las fuerzas exteriores actuantes sobre el sólido se les aplica el mismo proceso de descomposición en serie de Fourier que a los desplazamientos. Para simplificar, en el desarrollo siguiente se considerarán solamente las fuerzas de volumen, definidas por sus tres componentes:

$$\mathbf{q}_v = \begin{Bmatrix} q_{vr} \\ q_{vz} \\ q_{v\theta} \end{Bmatrix} \quad (6.73)$$

Las restantes fuerzas se tratan de un modo similar. La dependencia de las tres componentes de  $\mathbf{q}_v$  de la coordenada  $\theta$  puede expresarse mediante un desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$q_{vr} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{vrk}^1 \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} q_{vrk}^2 \sin k\theta \quad (6.74)$$

$$q_{vz} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{vzk}^1 \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} q_{vzk}^2 \sin k\theta \quad (6.75)$$

$$q_{v\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{v\theta k}^1 \sin k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} q_{v\theta k}^2 \cos k\theta \quad (6.76)$$

Estas expresiones pueden ponerse en forma matricial como:

$$\mathbf{q}_v = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k^1 \mathbf{q}_{vk}^1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k^2 \mathbf{q}_{vk}^2 \quad (6.77)$$

Las matrices  $\mathbf{A}^1$  y  $\mathbf{A}^2$  son:

$$\mathbf{A}_k^1 = \begin{bmatrix} \cos k\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos k\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin k\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_k^2 = \begin{bmatrix} \sin k\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin k\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\theta \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

El campo de desplazamientos puede también expresarse mediante las mismas matrices:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k^1 \mathbf{u}_k^1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k^2 \mathbf{u}_k^2 \quad (6.79)$$

e introduciendo la ley de interpolación queda:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k^1 \mathbf{N} \delta_k^{e1} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k^2 \mathbf{N} \delta_k^{e2} \quad (6.80)$$

El potencial de las fuerzas de volumen es:

$$V = - \int_v \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv \quad (6.81)$$

Sustituyendo  $\mathbf{q}_v$  y  $\mathbf{u}$  se obtienen 4 términos:  $V = V^1 + V^2 + V^{12} + V^{21}$

- Término  $V^1$ : corresponde al potencial acumulado por la componente simétrica de las fuerzas sobre la componente simétrica de las deformaciones.

$$V^1 = - \sum_p \sum_q \delta_p^{e1T} \int \mathbf{N}^T \mathbf{A}_p^{1T} \mathbf{A}_q^1 \mathbf{q}_{vq}^1 dv \quad (6.82)$$

Considerando la naturaleza de las matrices  $\mathbf{A}$ , la integral en  $\theta$  puede efectuarse de forma independiente, teniendo en cuenta las integrales ya empleadas para el cálculo de la energía elástica. Se obtiene:

$$V^1 = -2\pi \delta_0^{e1T} \int \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} q_{vr0}^1 \\ q_{vz0}^1 \\ 0 \end{Bmatrix} dA - \pi \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^{e1T} \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{vp}^1 dA \quad (6.83)$$

$$V^1 = - \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^{e1T} \mathbf{P}_{vp}^1 \quad (6.84)$$

donde se han definido los vectores de fuerzas nodales equivalentes

$$\mathbf{P}_{v0}^1 = 2\pi \int \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} q_{vr0}^1 \\ q_{vz0}^1 \\ 0 \end{Bmatrix} dA \quad \mathbf{P}_{vp}^1 = \pi \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{vp}^1 dA \quad (6.85)$$

- Término  $V^2$ : corresponde al potencial acumulado por la componente antisimétrica de las fuerzas sobre la componente antisimétrica de las deformaciones.

$$V^2 = -\sum_p \sum_q \delta_p^{e2T} \int \mathbf{N}^T \mathbf{A}_p^{2T} \mathbf{A}_q^2 \mathbf{q}_{vq}^2 dv \quad (6.86)$$

Considerando la naturaleza de las matrices  $\mathbf{A}$ , la integral en  $\theta$  puede efectuarse de forma independiente, teniendo en cuenta las integrales ya empleadas para el cálculo de la energía elástica. Se obtiene:

$$V^2 = -2\pi \delta_0^{e2T} \int \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{v\theta 0}^2 \end{Bmatrix} dA - \pi \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^{e2T} \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{vp}^2 dA \quad (6.87)$$

$$V_2 = -\sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^{e2T} \mathbf{P}_{vp}^2 \quad (6.88)$$

donde se han definido los vectores de fuerzas nodales equivalentes

$$\mathbf{P}_{v0}^2 = 2\pi \int \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{v\theta 0}^1 \end{Bmatrix} dA \quad \mathbf{P}_{vp}^2 = \pi \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{vp}^2 dA \quad (6.89)$$

- Términos  $V^{12}$  y  $V^{21}$ . Estos términos corresponden al potencial producido por las fuerzas del caso simétrico sobre las deformaciones del caso antisimétrico y viceversa. Dada la naturaleza de las matrices  $\mathbf{A}$ , estos términos son ambos nulos.

### 6.7.8 Ecuaciones de equilibrio

El potencial total del elemento es:

$$\Pi^e = U + V = U^1 + U^2 + V^1 + V^2 \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} \delta_0^{e1T} \mathbf{K}_0^1 \delta_0^{e1} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^{e1T} \mathbf{K}_p^1 \delta_p^{e1} + \frac{1}{2} \delta_0^{e2T} \mathbf{K}_0^2 \delta_0^{e2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^{e2T} \mathbf{K}_p^2 \delta_p^{e2} \\ & - \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^{e1T} \mathbf{P}_{vp}^1 - \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^{e2T} \mathbf{P}_{vp}^2 \end{aligned} \quad (6.91)$$

El equilibrio del elemento finito requiere que este potencial sea estacionario para cualquier variación de sus grados de libertad. De esta condición se obtienen las

ecuaciones de equilibrio del elemento, que son independientes para cada uno de los armónicos. Las distintas ecuaciones que se obtienen son:

- Caso simétrico 1:

$$\mathbf{K}_0^1 \delta_0^{e1} = \mathbf{P}_0^1 \quad (6.92)$$

$$\mathbf{K}_p^1 \delta_p^{e1} = \mathbf{P}_p^1 \quad p = 1, \infty \quad (6.93)$$

- Caso antisimétrico 2:

$$\mathbf{K}_0^2 \delta_0^{e2} = \mathbf{P}_0^2 \quad (6.94)$$

$$\mathbf{K}_p^2 \delta_p^{e2} = \mathbf{P}_p^2 \quad p = 1, \infty \quad (6.95)$$

En la práctica se emplea un número finito  $N$  de armónicos para el análisis, en cantidad suficiente para representar adecuadamente la respuesta de la estructura. En consecuencia la ecuación de equilibrio del elemento se expresa mediante  $2N$  sistemas de ecuaciones, que son independientes unos de otros. Estos sistemas de ecuaciones se ensamblan con los de los restantes elementos en la forma habitual, y se resuelven de manera independiente.

Cada uno de los  $2N$  casos a resolver corresponde a un dominio plano situado en el plano  $r, z$ , discretizado con elementos planos, y con tres incógnitas de desplazamiento en cada nudo  $U_r, U_z, U_\theta$ . Lógicamente el interés de emplear este método frente a un mallado tridimensional completo reside en el número de armónicos a emplear para representar la respuesta del sistema. Si éste es alto, resulta más conveniente estudiar el problema como tridimensional, pero si es bajo, esta técnica puede resultar más ventajosa.

## Flexión de placas planas

### 7.1. INTRODUCCIÓN

Las placas son estructuras continuas, formadas por un dominio material plano, de espesor constante o variable  $h$  mucho menor que las dimensiones transversales del dominio, y sobre el que actúan unas cargas exteriores que pueden ser fuerzas perpendiculares al plano de la placa, o bien momentos contenidos en dicho plano (figura 7.1). Estas cargas son absorbidas por el sólido por medio de un efecto de flexión y deformación transversal. En sentido estricto, no se consideran en la flexión de placas las fuerzas contenidas en el plano de la placa, las cuales harían trabajar al material en su plano, y por lo tanto su tratamiento corresponde a un problema de elasticidad en dos dimensiones, ya estudiado.

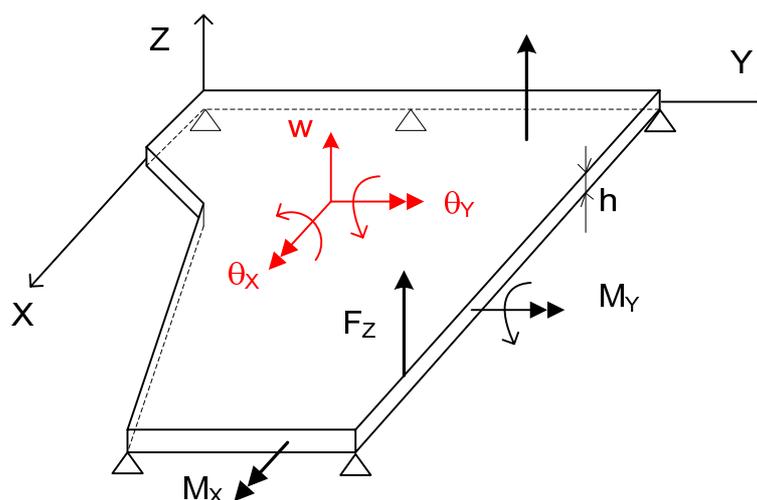


Figura 7.1 Placa plana a flexión

En los problemas de elasticidad estudiados hasta ahora no se ha introducido ninguna simplificación relativa al estado de deformaciones unitarias  $\epsilon$  del sólido: éste es

introducido de forma exacta en la formulación, y únicamente se introduce la hipótesis de discretización del campo de desplazamientos, inherente al MEF. Sin embargo en la teoría de flexión de placas se introducen ciertas hipótesis para simplificar el problema, y reducirlo a dos dimensiones. Estas simplificaciones son:

- Las tensiones en la dirección perpendicular a la placa son nulas, es decir  $\sigma_z=0$ . Esto sólo ocurre si el espesor es muy pequeño frente a las dimensiones transversales de la placa.
- Las secciones rectas perpendiculares al plano medio de la placa permanecen rectas durante la deformación, aunque no siempre se supone que siguen siendo perpendiculares al plano medio. Más adelante se estudiarán ambas situaciones.

En el planteamiento por el método de los elementos finitos, estas dos hipótesis se siguen manteniendo, por lo que las soluciones que se obtengan serán exactas en la medida que se cumplan dichas hipótesis.

## 7.2. TEORÍA CLÁSICA DE FLEXIÓN DE PLACAS

La teoría clásica de flexión de placas se basa en la suposición de que las secciones rectas perpendiculares al plano medio de la placa permanecen rectas y perpendiculares a dicho plano medio en el estado deformado de la placa. La teoría completa de la flexión de placas usando esta hipótesis fue enunciada por G. R. Kirchhoff en 1850, aunque deben mencionarse asimismo otros trabajos previos como los de Sophie Germain (1816), Navier (1823), Lagrange (1828) o Poisson (1829).

Como consecuencia de la hipótesis de deformación efectuada, el giro que sufre una sección recta perpendicular al plano medio de la placa es igual a la pendiente de dicho plano medio. Con el sistema de ejes adoptado, esto implica las siguientes relaciones entre los dos giros de la sección recta y las derivadas parciales de la flecha  $w$  (figura 7.2):

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.1)$$

En consecuencia, la deformación de la placa queda perfectamente definida conociendo únicamente el valor de la deformación  $w$  en dirección  $z$  transversal a ella, que es una función  $w(x,y)$ .

Como se verá más adelante, esta suposición respecto a la deformación equivale a despreciar la deformación de cortadura que existe transversalmente en la placa y por lo tanto a despreciar la energía debida al esfuerzo cortante. Este planteamiento es únicamente válido cuando el espesor de la placa es muy pequeño, de tal manera que realmente pueda despreciarse la energía debida a las deformaciones de cortadura.

Este planteamiento se corresponde con la teoría clásica de flexión de vigas, pues de hecho la hipótesis de deformación efectuada se corresponde con la hipótesis de Navier.

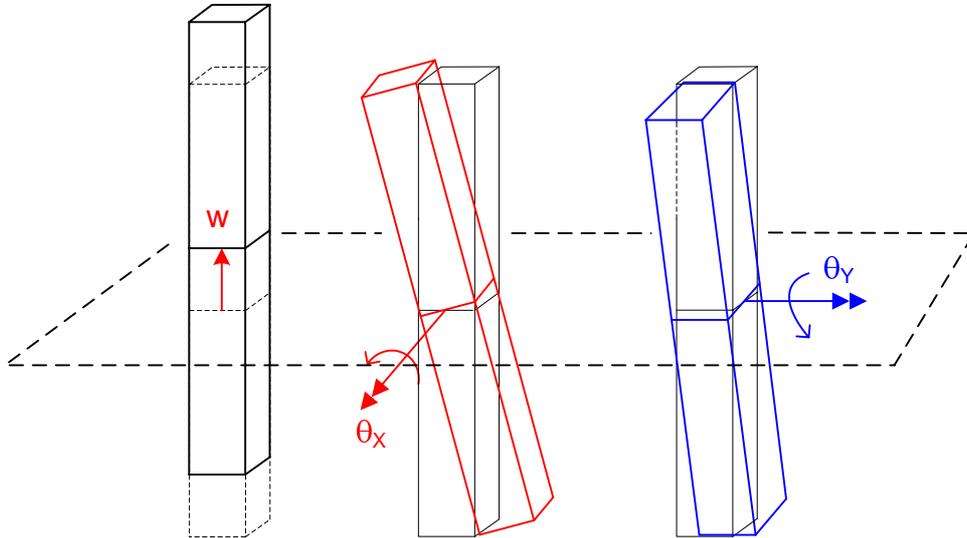


Figura 7.2 Deformaciones en el plano medio de una placa

### 7.2.1 Estado de deformación

Un punto situado en el plano medio de la placa ( $z=0$ ), sólo tiene una deformación transversal  $w$  en dirección  $z$ . Sin embargo, los puntos que están fuera del plano medio sufren además deformaciones laterales  $u$ ,  $v$  en las direcciones  $x$ ,  $y$ , que son debidas al giro de la normal a la placa (figura 7.3).

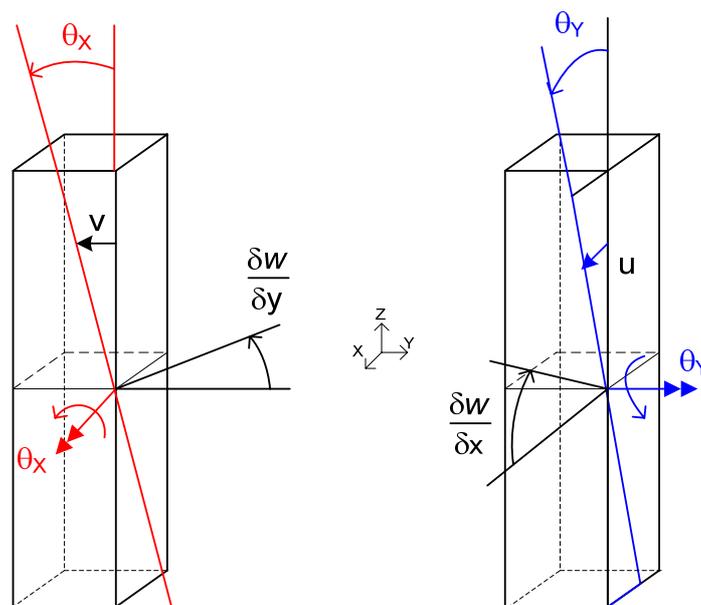


Figura 7.3 Deformaciones interiores en una placa

Para un punto cualquiera P, situado a una distancia  $z$  del plano medio las deformaciones son:

$$u = z\theta_y \quad v = -z\theta_x \quad (7.2)$$

En base a la hipótesis de Kirchhoff los giros de la sección recta son iguales a las derivadas de la flecha  $w$ , respecto a  $x$  e  $y$ . Por lo tanto las deformaciones  $u$ ,  $v$  del punto P son:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7.3)$$

### 7.2.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en el punto P son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

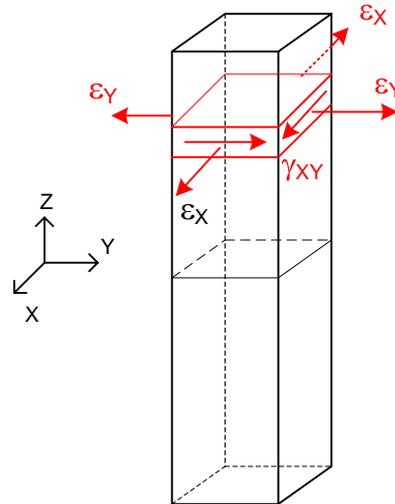
Se observa que no aparecen distorsiones de cortante en dirección vertical, como consecuencia de la hipótesis de deformación que se ha efectuado de que los giros coinciden con las derivadas de la flecha. Las tres únicas deformaciones unitarias no nulas tienen una distribución lineal en el espesor de la placa, y se pueden poner agrupadas en forma de vector:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \mathbf{b} \quad (7.5)$$

En esta expresión se ha definido el vector de curvaturas  $\mathbf{b}$ , habitual en la teoría de placas, que contiene las tres derivadas parciales segundas de la superficie deformada de la placa. Este vector de curvaturas no depende de  $z$ , sino sólo de la posición en la superficie media de la placa. Para los desarrollos posteriores conviene poner la expresión anterior en la forma siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} w = z \boldsymbol{\partial} w \quad (7.6)$$

donde se identifica al operador  $\boldsymbol{\partial}$  que en este caso es de orden 2.



**Figura 7.4 Deformaciones unitarias en una placa. Teoría clásica**

### 7.2.3 Estado de tensiones

El estado de tensiones en la placa tiene cinco componentes:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ . Para facilitar el estudio posterior, estas tensiones se agrupan en dos vectores diferentes (figura 7.5): el vector  $\boldsymbol{\sigma}$  contiene las tres tensiones contenidas en el plano de la placa, y el vector  $\boldsymbol{\tau}$  contiene las dos tensiones cortantes perpendiculares a ella.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

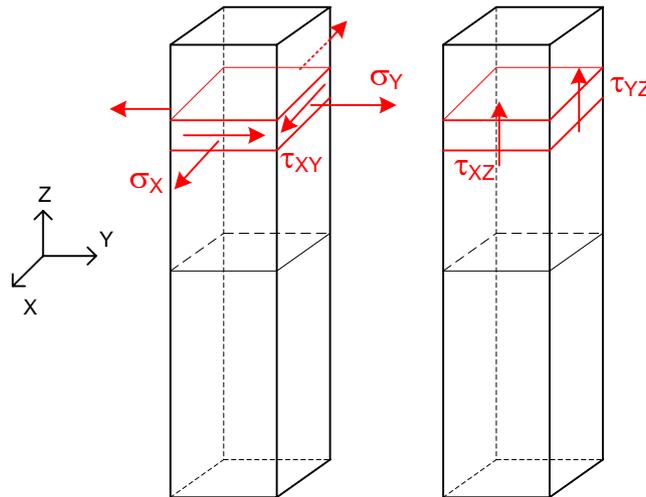


Figura 7.5 Estado de tensiones en una placa

Dado que  $\sigma_z=0$  y que sólo existen las tres deformaciones unitarias situadas en el plano XY, la relación entre las tensiones y dichas deformaciones unitarias es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (7.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (7.9)$$

Siendo  $\mathbf{D}$  la matriz elástica y  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  el vector de deformaciones unitarias iniciales. Cuando está originado por una variación de temperatura  $T$  este vector tiene el valor siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{0T} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Al ser la variación de las deformaciones unitarias lineal en el espesor, también las tensiones varían de forma lineal en él. Cada punto del material está sometido a un estado plano de tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  situado en el plano XY, que varía de forma lineal a lo largo del espesor de la placa.

Las tensiones cortantes verticales  $\tau$  son proporcionales a las deformaciones unitarias correspondientes  $\gamma$ , que según la hipótesis de deformación efectuada son ambas nulas:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Pero en realidad deben existir tensiones cortantes verticales  $\tau$ , para que pueda existir esfuerzo cortante vertical. Esta incoherencia se resuelve considerando que el módulo de elasticidad de cortadura  $G$  es infinito, es decir que la placa no se deforma ante la cortadura vertical, aunque existan tensiones en dicha dirección. Más adelante se obtendrá una expresión de las tensiones cortantes verticales, basándose en criterios de equilibrio en lugar de en la ecuación constitutiva.

#### 7.2.4 Esfuerzos internos

En lugar de las tensiones, se suelen utilizar en el estudio de las placas los esfuerzos internos (fuerzas y momentos) correspondientes a dichas tensiones, que son sus integrales a lo largo del espesor  $h$  de la placa.

**Momentos flectores.** Son el momento estático de las tensiones respecto al plano medio de la placa, por unidad de anchura de la misma (figura 7.6).

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz \quad (7.12)$$

**Momento torsor.** Es el momento estático de las tensiones cortantes situadas en el plano de la placa, respecto al plano medio de la misma, y por unidad de anchura (figura 7.7).

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz \quad (7.13)$$

Estos tres momentos se suelen agrupar en un vector de momentos  $\mathbf{M}$ :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{+h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz \quad (7.14)$$

**Esfuerzos cortantes.** Son la resultante de las tensiones cortantes transversales a la placa (figura 7.7).

$$\begin{Bmatrix} Q_{zx} \\ Q_{zy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} dz \quad \mathbf{Q} = \int_{-h/2}^{+h/2} \boldsymbol{\tau} dz \quad (7.15)$$

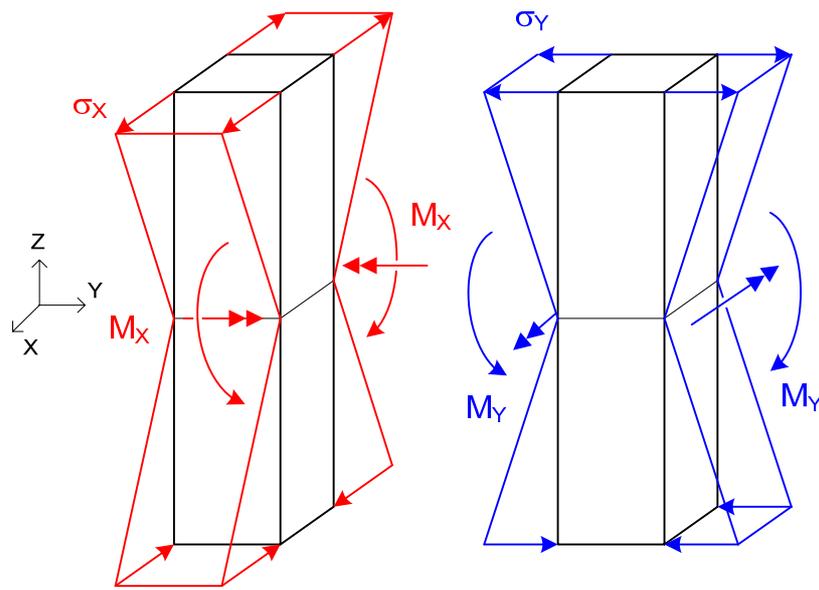


Figura 7.6 Esfuerzos de flexión en una placa

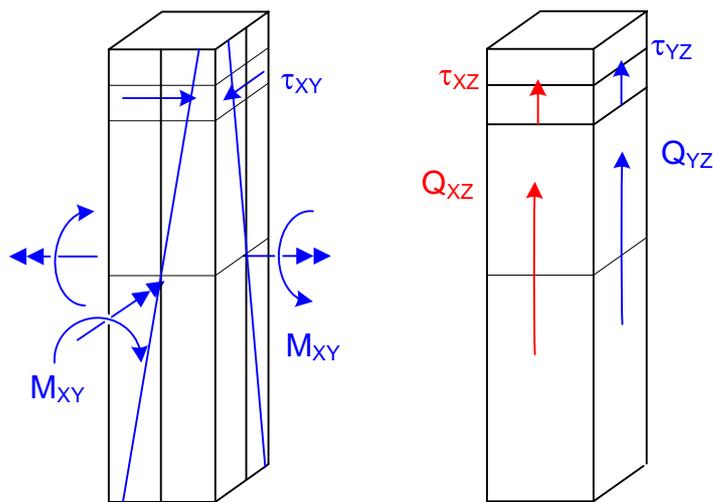


Figura 7.7 Esfuerzos cortantes y de torsión en una placa

### 7.2.5 Relación fuerza deformación

Sustituyendo la expresión de  $\sigma$  en la definición de los esfuerzos internos  $M$ , y a continuación la expresión de las deformaciones unitarias en función de las curvaturas se obtiene:

$$M = \int \sigma z dz = \int D(\epsilon - \epsilon_0) z dz = D b \int z^2 dz - D \int \epsilon_0 z dz \quad (7.16)$$

La primera integral proporciona el momento de inercia por unidad de anchura de la placa, y la segunda corresponde a los momentos producidos por las deformaciones iniciales, que se definen como:

$$\mathbf{M}_0 = -\mathbf{D} \int \varepsilon_0 z dz \quad (7.17)$$

Por lo tanto la expresión de los momentos puede ponerse de forma más compacta como:

$$\mathbf{M} = \frac{h^3}{12} \mathbf{D} \mathbf{b} + \mathbf{M}_0 \quad (7.18)$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0xy} \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

siendo  $D$  la rigidez equivalente de la placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.20)$$

La ecuación (7.19) relaciona los momentos interiores de flexión y torsión  $\mathbf{M}$  en la placa, con sus deformaciones, a través de las curvaturas  $\mathbf{b}$ : es el equivalente para placas de la ecuación de la elástica de las vigas con cargas térmicas. El segundo término de dicha ecuación corresponde a los momentos que se originan en la placa debido a las curvaturas iniciales producidas por la variación de temperatura.

### 7.2.6 Deformaciones unitarias de origen térmico

Se supone un campo de temperatura lineal en el espesor de la placa, variando entre un valor  $+T_s$  en la cara superior y uno  $-T_s$  en la cara inferior. En un punto cualquiera situado a una distancia  $z$  del plano medio, la temperatura vale:

$$T = zT_g \quad (7.21)$$

siendo  $T_g = 2T/h$  el gradiente de temperatura a lo largo del espesor  $h$ . Las deformaciones unitarias iniciales producidas por este campo de temperaturas son:

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} \alpha T_g z \\ \alpha T_g z \\ 0 \end{Bmatrix} = \alpha T_g z \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

Los momentos iniciales debidos a esta temperatura son:

$$\mathbf{M}_0 = -\mathbf{D} \int \epsilon_0 z dz = -\alpha T_g \frac{h^3}{12} \mathbf{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

Cuyas componentes son:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{Bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0xy} \end{Bmatrix} = -\frac{E h^3 \alpha T_g}{12(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.24)$$

### 7.2.7 Ecuaciones de equilibrio

Para obtener las ecuaciones de equilibrio de una placa se considera el equilibrio estático de un trozo diferencial de placa sobre el que actúan los esfuerzos internos de flexión y cortadura y la carga exterior en dirección  $z$  (figura 7.8).

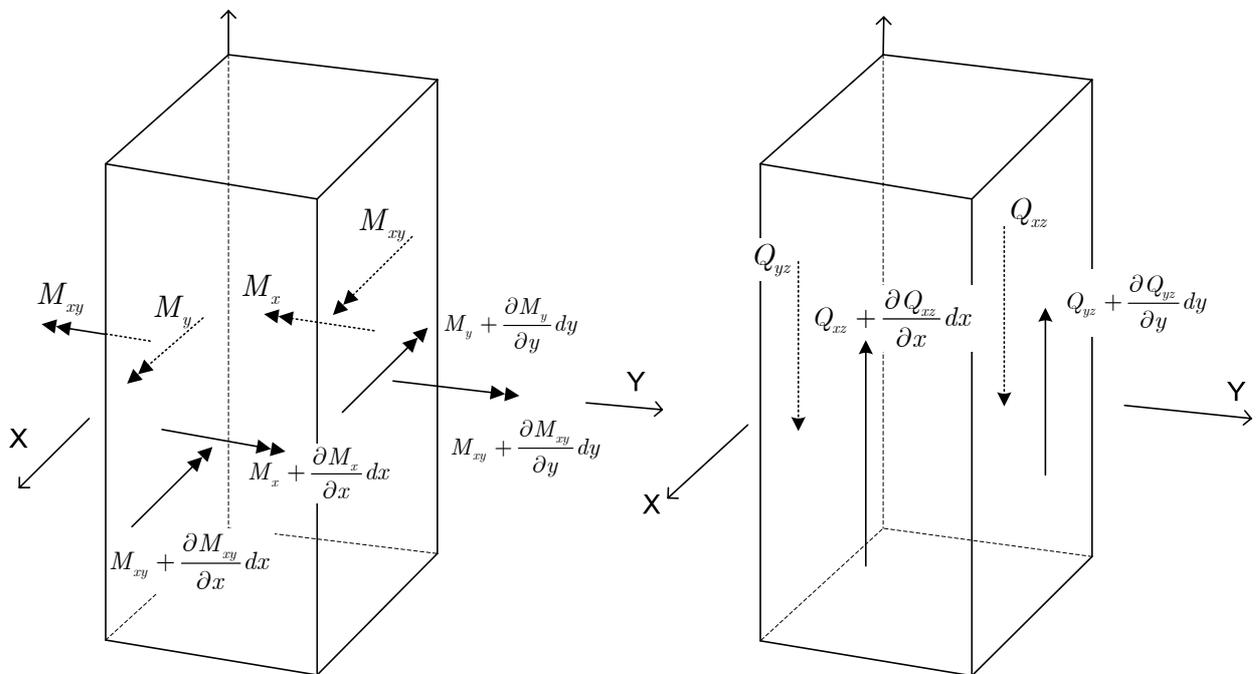


Figura 7.8. Equilibrio de un elemento diferencial de placa

- El equilibrio de momentos respecto del eje X implica que:

$$Q_{yz} dx dy + M_y dx - M_y dx - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + M_{xy} dy - M_{xy} dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy = 0 \quad (7.25)$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_{yz} \quad (7.26)$$

- El equilibrio de momentos respecto del eje Y implica que :

$$-Q_{xz} dy dx + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy dx = 0 \quad (7.27)$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_{xz} \quad (7.28)$$

- El equilibrio en la dirección z es:

$$\frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} dy dx + q_z dx dy = 0 \quad (7.29)$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} + q_z = 0 \quad (7.30)$$

Donde  $q_z$  es la fuerza distribuida por unidad de superficie de la placa.

Sustituyendo los valores de los esfuerzos cortantes dados por las ecuaciones (7.28) y (7.26) en la (7.29) se obtiene una ecuación que relaciona sólo a los tres momentos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q_z = 0 \quad (7.31)$$

Sustituyendo los valores de los momentos en función de la deformación  $w$  dados por (7.19) (no incluyendo el término debido a la temperatura), se obtiene una única ecuación:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D} \quad (7.32)$$

que es la ecuación diferencial que controla el problema de la flexión de placas en la teoría clásica, en ausencia de temperaturas. Obsérvese la similitud con la ecuación diferencial de la flexión de una viga, pero extendida a un problema de dos dimensiones. Se trata de la ecuación bi-armónica, que puede ponerse en la forma compacta siguiente empleando el operador laplaciano  $\nabla^2$ :

$$\nabla^2 (\nabla^2 w) = \frac{q_z}{D} \quad (7.33)$$

La relación entre los esfuerzos cortantes y la deformación puede obtenerse a base de sustituir la expresión de los momentos (7.19) en las ecuaciones (7.26) y (7.28):

$$Q_{yz} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (7.34)$$

$$Q_{xz} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)$$

### 7.2.8 Relación entre tensiones y esfuerzos

Para obtener una relación entre las tensiones y los momentos en la placa, resulta conveniente despejar de la expresión (7.18) el valor de las curvaturas  $\mathbf{b}$  en función de los momentos:

$$\mathbf{b} = \frac{12}{h^3} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) \quad (7.35)$$

Por otra parte la expresión de las tensiones en función de las curvaturas es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = z \mathbf{D}\mathbf{b} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

Sustituyendo el valor de las curvaturas se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{12z}{h^3} \mathbf{M} - \frac{12z}{h^3} \mathbf{M}_0 - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

Sustituyendo las expresiones detalladas de  $\mathbf{M}_0$  y de  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , se anulan los dos últimos sumandos debidos a las temperaturas, y se obtiene la expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{12z}{h^3} \mathbf{M} \quad (7.36)$$

$$\sigma_x = \frac{z M_x}{(h^3 / 12)} \quad \sigma_y = \frac{z M_y}{(h^3 / 12)} \quad \sigma_{xy} = \frac{z M_{xy}}{(h^3 / 12)} \quad (7.37)$$

En la que se identifica el momento de inercia de la sección recta de la placa, por unidad de anchura.

- Para obtener la expresión de las tensiones cortantes resulta ventajoso emplear las ecuaciones de equilibrio del elemento diferencial expresadas en función de las tensiones. Así la ecuación de equilibrio en la dirección x es:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (7.38)$$

Empleando las expresiones de las tensiones dadas por (7.37) y la expresión del esfuerzo cortante dada por (7.28) se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{12z}{h^3} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = -\frac{12z}{h^3} Q_{xz}$$

Integrando esta ecuación en  $z$  e imponiendo la condición de que la tensión cortante en la cara superior ( $z=h/2$ ) es nula se obtiene:

$$\tau_{xz} = \frac{3h^2 - 12z^2}{2h^3} Q_{xz} \quad (7.39)$$

Que corresponde a una distribución parabólica, igual que la existente en una sección rectangular de canto  $h$  y anchura unidad.

De la misma forma, la otra tensión cortante es:

$$\tau_{yz} = \frac{3h^2 - 12z^2}{2h^3} Q_{yz} \quad (7.40)$$

### 7.2.9 Energía elástica de deformación

La energía elástica acumulada en toda la placa es:

$$U = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv \quad (7.41)$$

- Energía elástica en función de las deformaciones

Sustituyendo las deformaciones unitarias en función de las curvaturas se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} z^2 dz dA - \int z \mathbf{b}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dz dA \quad (7.42)$$

En el primer término se puede integrar en la coordenada  $z$ , y en el segundo se identifica el valor de los momentos debidos a las deformaciones unitarias iniciales:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{h^3}{12} \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dA + \int \mathbf{b}^T \mathbf{M}_0 dA \quad (7.43)$$

Desarrollando el valor de las curvaturas en el primer sumando se obtiene:

$$U = \frac{D}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA + U_T \quad (7.44)$$

donde se ha denominado  $U_T$  al segundo sumando, que corresponde a la energía debida a las deformaciones unitarias iniciales. Si éstas se deben a una distribución lineal de temperatura, su valor es:

$$U_T = \int \mathbf{b}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left( -\frac{E h^3 \alpha T_g}{12(1-\nu)} \right) dA \quad (7.45)$$

$$U_T = -\int \frac{E h^3 \alpha T_g}{12(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dA$$

- Energía elástica en función de los esfuerzos internos.

El valor de las curvaturas en función de los momentos es:

$$\mathbf{b} = \frac{12}{h^3} (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_0) \quad (7.46)$$

Sustituyendo en (7.43) y operando se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{12}{h^3} (\mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{M}_0^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_0) dA \quad (7.47)$$

### 7.2.10 Condiciones de contorno

Para profundizar en el estudio de las condiciones de contorno sin complicar excesivamente el desarrollo algebraico, se considera una placa rectangular de dimensiones  $(a \times b)$ , sometida a una carga uniforme. Aplicando el principio del trabajo virtual se obtienen las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno asociadas a ellas:

$$\delta W_{EX} = \int_A q \delta w dA = \delta W_{IN} = \int \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (7.48)$$

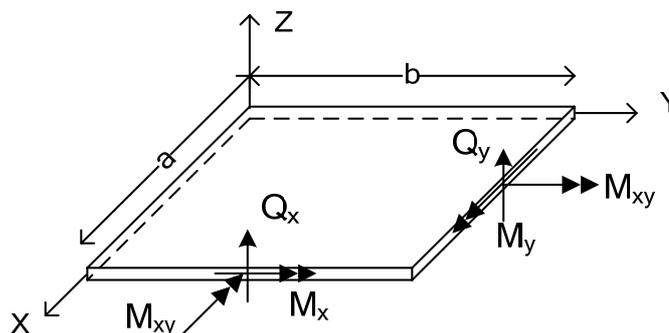


Figura 7.9 Placa rectangular

Sustituyendo el valor de las deformaciones unitarias en función de las curvaturas:

$$\int_A q \delta w dA = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \mathbf{b} z dz dA$$

Integrado en la variable  $z$  el término de la derecha, se identifican los momentos en la placa:

$$\int_A q \delta w \, dA = \int_A \mathbf{M}^T \delta \mathbf{b} \, dA$$

Sustituyendo los valores y agrupando las dos integrales se obtiene:

$$\int_A \left( M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) dA + \int_A q \delta w \, dA = 0$$

El tercer sumando del integrando de la izquierda se puede descomponer en dos sumandos:

$$\int_A \left( M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial x} \right) dA + \int_A q \delta w \, dA = 0$$

Integrando por partes la integral de la izquierda se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \right) \delta w \, dA + \int_A \left[ M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^a dy + \int_A \left[ M_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^b dx \\ & - \int_A \left[ \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w \right]_0^a dy - \int_A \left[ \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w \right]_0^b dx \\ & + \int_A \left[ M_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^b dx + \int_A \left[ M_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^a dy = 0 \end{aligned}$$

En las integrales 4ª y 5ª se identifican los esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \right) \delta w \, dA + \int_A \left[ M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^a dy + \int_A \left[ M_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^b dx \\ & - \int_A [Q_{xz} \delta w]_0^a dy - \int_A [Q_{yz} \delta w]_0^b dx + \int_A \left[ M_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^b dx + \int_A \left[ M_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^a dy = 0 \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales se pueden volver a integrar por partes:

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \right) \delta w \, dA + \int_A \left[ M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^a dy + \int_A \left[ M_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^b dx \\ & - \int_A [Q_{xz} \delta w]_0^a dy - \int_A [Q_{yz} \delta w]_0^b dx - \int_A \left[ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta w \right]_0^b dx + \left[ (M_{xy} \delta w) \right]_0^b \Big|_0^a \\ & - \int_A \left[ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta w \right]_0^a dy + \left[ (M_{xy} \delta w) \right]_0^a \Big|_0^b = 0 \end{aligned}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right) \delta w \, dA + \int_A \left[ M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^a dy + \int_A \left[ M_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^b dx \\ & - \int_A \left[ \left( Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w \right]_0^a dy - \int_A \left[ \left( Q_{yz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w \right]_0^b dx \\ & + \left[ (M_{xy} \delta w) \right]_0^a \Big|_0^b + \left[ (M_{xy} \delta w) \right]_0^a \Big|_0^b = 0 \end{aligned}$$

Intercambiando la derivada y la variación en las integrales 2ª y 3ª se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_A \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right) \delta w \, dA \\ & + \int_A \left[ M_x \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^a dy + \int_A \left[ M_y \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]_0^b dx \\ & - \int_A \left[ \left( Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w \right]_0^a dy - \int_A \left[ \left( Q_{yz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w \right]_0^b dx \\ & + \left[ (M_{xy} \delta w) \right]_0^a \Big|_0^b + \left[ (M_{xy} \delta w) \right]_0^a \Big|_0^b = 0 \end{aligned} \tag{7.49}$$

Esta ecuación debe satisfacerse para cualquier variación arbitraria de la flecha  $\delta w$ , y por lo tanto deben ser nulos todos los factores que afectan a la  $\delta w$  o a su derivada.

La anulación del integrando de la primera integral proporciona la ecuación de equilibrio, ya obtenida anteriormente por otro método:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0$$

Además, la anulación de los integrandos de las restantes integrales proporcionan las condiciones de contorno que deben cumplirse en los 4 lados. Éstas pueden ser de distintos tipos:

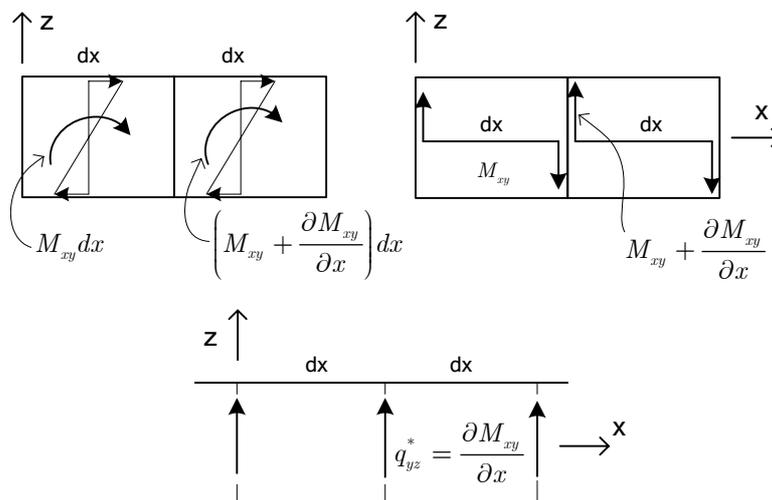
- Lados paralelos al eje Y ( $x=0$  y  $x=a$ ):
  - a.  $M_x = 0$  o bien
  - b.  $\delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = Cte$
  - c.  $Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$  o bien
  - d.  $\delta w = 0 \rightarrow w = Cte$
- Lados paralelos al eje X ( $y=0$  y  $y=b$ ):

- a.  $M_y = 0$  o bien
- b.  $\delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = Cte$
- c.  $Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$  o bien
- d.  $\delta w = 0 \rightarrow w = Cte$

Las condiciones de apoyo encontradas habitualmente en la práctica se consiguen mediante combinación de dos de estas condiciones de contorno, una del tipo (a) o (b) y la otra del tipo (c) o (d). Así un empotramiento implica las condiciones (b) y (d); un apoyo simple consiste en las condiciones (a) y (d) y un lado libre corresponde a las condiciones (a) y (c).

Resulta a veces sorprendente la condición de tipo (c) que corresponde en realidad a un lado libre de tensiones cortantes en él, como es el caso de un lado libre (añadiendo por otra parte la condición (a) de momento flector nulo).

Una explicación más intuitiva a esta condición fue presentada por Thomson y Tait, analizando para ello un lado de la placa paralelo al eje X, sobre el que actúa el momento torsor  $M_{xy}$ . Considerando un elemento diferencial  $dx$ , el momento total actuante sobre él vale  $M_{xy} dx$ . Este momento se puede sustituir de forma estáticamente equivalente por un par de fuerzas iguales y de sentido contrario de módulo  $M_{xy}$ , separadas una distancia  $dx$ .



**Figura 7.10** Esfuerzos sobre el lado de una placa.

Considerando ahora otro elemento diferencial contiguo al anterior, el valor del momento en él es  $M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial x) dx$ , y su resultante sobre todo el elemento vale:  $[M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial x) dx] dx$ . Este momento se puede a su vez considerar como formado por un par de fuerzas iguales de valor  $M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial x) dx$  separadas la distancia  $dx$ .

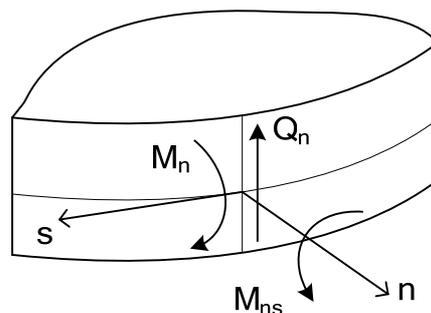
En la frontera  $m-n$  entre ambos elementos diferenciales, la fuerza neta resultante es vertical en la dirección  $z$  y de valor  $M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial x)dx - M_{xy}$ .

Así pues, con este artificio se ha sustituido el momento torsor en el lado  $M_{xy}$  por una fuerza transversal distribuida sobre dicho lado de valor  $\partial M_{xy} / \partial x$ . La fuerza lateral total se denomina fuerza cortante *efectiva*  $V_y$ , y es la suma de la fuerza equivalente al torsor, más el esfuerzo cortante en el lado  $Q_y$ . Esta fuerza efectiva total es la que debe ser nula si el lado está libre, es decir:

$$V_y \equiv Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$

Todo este desarrollo se ha efectuado para una placa rectangular, a fin de simplificar la formulación, pero de la misma manera puede hacerse para un lado curvo, obteniéndose expresiones similares. Si se denominan  $n$  y  $s$  a la normal y tangente al lado respectivamente, las condiciones resultan ser:

- $M_n = 0$  o bien
- $\delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial n} = Cte$
- $V_n \equiv Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0$  o bien
- $\delta w = 0 \rightarrow w = Cte$

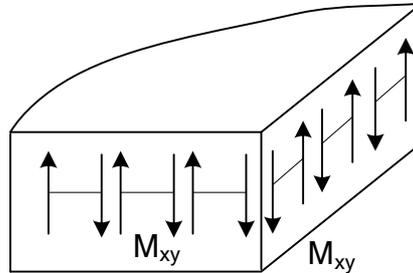


**Figura 7.11 Normal y tangente a un lado curvo**

*Fuerzas en las esquinas.* Los dos últimos términos de la ecuación de los trabajos virtuales introducen las condiciones en las cuatro esquinas de la placa. Todas estas condiciones son de la forma:  $2M_{xy} \delta w$ . Para que se satisfagan ante cualquier variación de  $w$ , debe cumplirse bien que  $w=ccte$  es decir que la esquina esté apoyada o bien que el momento torsor sea nulo.

En cualquier caso estos términos  $2M_{xy} \delta w$  representan el trabajo virtual efectuado por una fuerza de valor  $2 M_{xy}$  cuando la esquina se mueve un valor  $\delta w$ , con lo que puede concluirse que realmente existe una fuerza en la esquina de valor  $M_{xy}$ . De

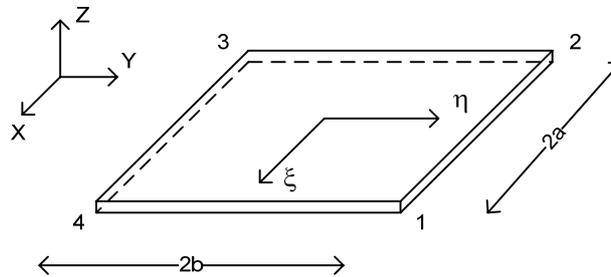
hecho estas fuerzas en las esquinas son la consecuencia de la transformación del momento torsor del lado en la fuerza efectiva cortante equivalente: en los extremos del lado las fuerzas debidas a los distintos pares de fuerzas no se cancelan entre sí y producen la fuerza en la esquina.



**Figura 7.12 Fuerzas en las esquinas debidas al momento torsor.**

### 7.3. ELEMENTO PLACA RECTANGULAR DE CUATRO NUDOS

Como ejemplo de un elemento finito basado en la teoría clásica de placas se estudia a continuación un elemento rectangular de cuatro nudos, que fue uno de los primeros elementos placa desarrollados (Melosh, 1963, Zienkiewicz, Cheung, 1964). Se supone que el elemento es rectangular, con lados  $2a$  y  $2b$  (figura 7.13).



**Figura 7.13 Elemento placa rectangular**

#### 7.3.1 Campo de desplazamientos

Se utilizan como parámetros nodales la flecha y los dos giros en cada uno de sus cuatro nudos, lo cual da un total de doce grados de libertad para el elemento.

$$\delta^e = \left[ W_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad W_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad W_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad W_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \right]^T \quad (7.50)$$

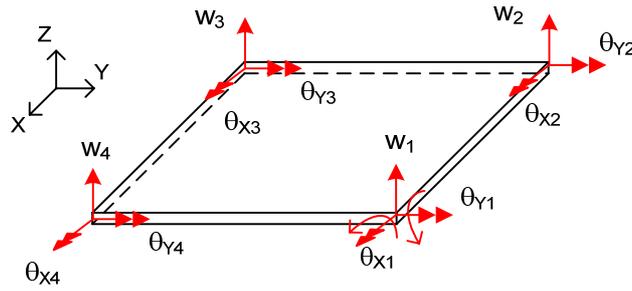


Figura 7.14 Grados de libertad del elemento rectangular

Esto permite emplear como función de interpolación de  $w$  un polinomio de 12 términos. De todos los posibles se utiliza uno incompleto de grado cuatro, en el que faltan los términos  $x^4$ ,  $y^4$ ,  $x^2y^2$ . Por lo tanto, el polinomio interpolante es:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (7.51)$$

que se puede poner en la forma:

$$w = \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} \quad (7.52)$$

siendo:

- $\boldsymbol{\alpha}$  un vector con todos los coeficientes del polinomio  $\alpha_i$
- $\mathbf{R}$  un vector fila que contiene todas las potencias de  $x$  e  $y$  del polinomio.

Particularizando la expresión de  $w$ , y sus dos derivadas parciales respecto a  $x, y$  para los cuatro nudos se obtienen doce expresiones del tipo:

$$W_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^3 + \alpha_8 x_i^2 y_i + \alpha_9 x_i y_i^2 + \alpha_{10} y_i^3 + \alpha_{11} x_i^3 y_i + \alpha_{12} x_i y_i^3 \quad (7.53)$$

$$\theta_{x_i} = \alpha_3 + \alpha_5 x_i + 2\alpha_6 y_i + \alpha_8 x_i^2 + 2\alpha_9 x_i y_i + 3\alpha_{10} y_i^2 + \alpha_{11} x_i^3 + 3\alpha_{12} x_i y_i^2$$

$$\theta_{y_i} = -\alpha_2 - 2\alpha_4 x_i - \alpha_5 y_i - 3\alpha_7 x_i^2 - 2\alpha_8 x_i y_i - \alpha_9 y_i^2 - 3\alpha_{11} x_i^2 y_i - \alpha_{12} y_i^3$$

donde  $i=1,4$ . Estas doce ecuaciones se pueden agrupar en la forma:

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \quad (7.54)$$

siendo  $\mathbf{C}$  una matriz constante de dimensión  $12 \times 12$ , cuyos términos son función únicamente de las coordenadas de los nudos. Se puede demostrar que la matriz  $\mathbf{C}$  tiene inversa siempre que las coordenadas de los nudos definan un rectángulo correctamente.

Despejando  $\boldsymbol{\alpha}$  y sustituyendo en la expresión de  $w$  se obtiene:

$$w = \mathbf{R} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (7.55)$$

con lo que se define la matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  para la flecha  $w$ . La forma explícita de  $\mathbf{N}$  se puede calcular analíticamente, resultando un conjunto de 12 funciones, que pueden agruparse para los cuatro nudos en la forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

donde  $\mathbf{N}_i$  son matrices  $1 \times 3$  que contienen las tres funciones de interpolación del nudo  $i$ . Para simplificar el cálculo de las funciones de interpolación se emplea un sistema de ejes  $\xi, \eta$ , local al elemento y situado en su centro (cuyas coordenadas son  $x_c, y_c$ ) de tal manera que las coordenadas locales varían entre  $-1$  y  $+1$ . Por lo tanto:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad \eta = \frac{y - y_c}{b} \quad (7.57)$$

El valor de las funciones de interpolación del nudo  $i$  es:

$$\mathbf{N}_i = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} (\xi \xi_i + 1)(\eta \eta_i + 1)(2 + \xi \xi_i + \eta \eta_i - \xi^2 - \eta^2) \quad \dots \\ \dots \quad a \xi_i (\xi \xi_i + 1)^2 (\xi \xi_i - 1)(\eta \eta_i + 1) \quad a \eta_i (\xi \xi_i + 1)(\eta \eta_i + 1)^2 (\eta \eta_i - 1) \end{array} \right] \quad (7.58)$$

### 7.3.2 Deformaciones unitarias

Sustituyendo el valor de  $w$  en la expresión de las deformaciones unitarias se obtiene la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\epsilon = z \partial w = z \partial \mathbf{N} \delta^e = z \bar{\mathbf{B}} \delta^e = \mathbf{B} \delta^e \quad (7.59)$$

que está compuesta por 4 submatrices y cuyo valor es:

$$\mathbf{B} = -z \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_3}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_4}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_3}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_4}{\partial y^2} \\ \hline 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_3}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_4}{\partial x \partial y} \end{array} \right] \quad (7.60)$$

También se puede poner como:

$$\mathbf{B} = z \partial \mathbf{N} = z \partial \mathbf{R} \mathbf{C}^{-1} = z \mathbf{Q} \mathbf{C}^{-1} \quad (7.61)$$

donde la matriz  $\mathbf{Q}$  puede calcularse explícitamente, y vale

$$\mathbf{Q} = \partial \mathbf{R} = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{array} \right] \quad (7.62)$$

En ella se observa que se puede alcanzar un estado de  $\varepsilon$  constante si  $\alpha_7$  a  $\alpha_{12}$  son cero con lo que desaparecen todos los términos en  $x, y$ .

### 7.3.3 Matriz de rigidez

La expresión general para la matriz de rigidez de un elemento finito es:

$$\mathbf{K} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \, dz \quad (7.63)$$

Sustituyendo  $\mathbf{B}$  mediante (7.61) y sacando fuera de la integral los términos que no dependen de  $x, y$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int z^2 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \, dx \, dy \, dz = \frac{h^3}{12} \int \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \, dx \, dy \\ \mathbf{K} &= \frac{h^3}{12} \mathbf{C}^{-T} \left[ \int \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} \, dx \, dy \right] \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (7.64)$$

Tras laboriosos cálculos, es posible obtener expresiones explícitas de esta matriz de rigidez, que están publicadas en la literatura especializada.

### 7.3.4 Vector de fuerzas nodales equivalentes

El vector de fuerzas nodales equivalentes para una carga distribuida por unidad de superficie  $q$  normal a la placa es:

$$\mathbf{P}_s = \int_s \mathbf{N}^T q \, dx \, dy = \mathbf{C}^{-T} \int_s \mathbf{R}^T q \, dx \, dy \quad (7.65)$$

cuyo valor puede ser asimismo evaluado analíticamente y en el que se observa la existencia de componentes tanto según  $w$  como según los giros.

## 7.4. REQUERIMIENTOS DE CONVERGENCIA

El elemento rectangular de placa delgada desarrollado satisface los dos primeros criterios de convergencia, pero no cumple el tercero, es decir que es incompatible. Sin embargo este elemento se comporta bastante bien y fue muy utilizado en la práctica.

Para poner de manifiesto la incompatibilidad de deformaciones, considérese la situación mostrada en la figura 7.15, en la que dos elementos A y B comparten un lado 2-3. Para mayor sencillez, se supone que este lado es la recta  $x=0$ . La flecha y los giros en este lado son:

$$w_{x=0} = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3$$

$$\theta_{x(x=0)} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=0} = \alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2 \quad (7.66)$$

$$\theta_{y(x=0)} = - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = -\alpha_2 - \alpha_5 y - \alpha_9 y^2 - \alpha_{12} y^3$$

Particularizando en el nudo 2 ( $y=0$ ):

$$w_2 = \alpha_1 \quad (7.67)$$

$$\theta_{x2} = \alpha_3 \quad (7.68)$$

$$\theta_{y2} = -\alpha_2 \quad (7.69)$$

Particularizando en el nudo 3 ( $y=b$ ):

$$w_3 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3 \quad (7.70)$$

$$\theta_{x3} = \alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2 \quad (7.71)$$

$$\theta_{y3} = -\alpha_2 - \alpha_5 b - \alpha_9 b^2 - \alpha_{12} b^3 \quad (7.72)$$

Las 4 ecuaciones (7.67), (7.68), (7.70) y (7.71) permiten hallar los 4 parámetros  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}$  en función de las 4 deformaciones nodales  $w_2, w_3, \theta_{x2}, \theta_{x3}$ . Por lo tanto la deformación  $w$  y el giro  $\theta_x$  quedan unívocamente definidos en el lado  $x=0$  mediante las deformaciones nodales existentes sólo en dicho lado (figura 7.15).

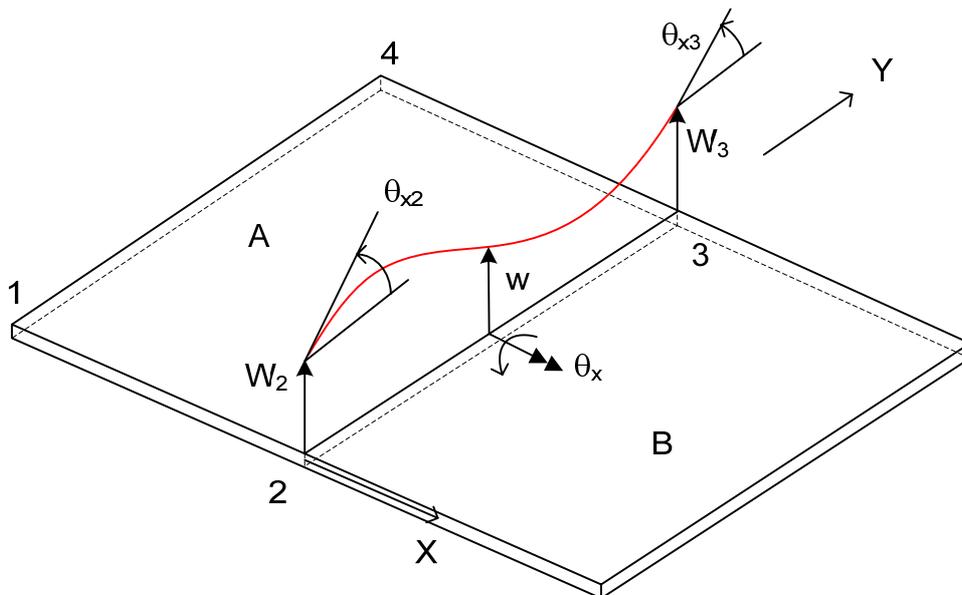
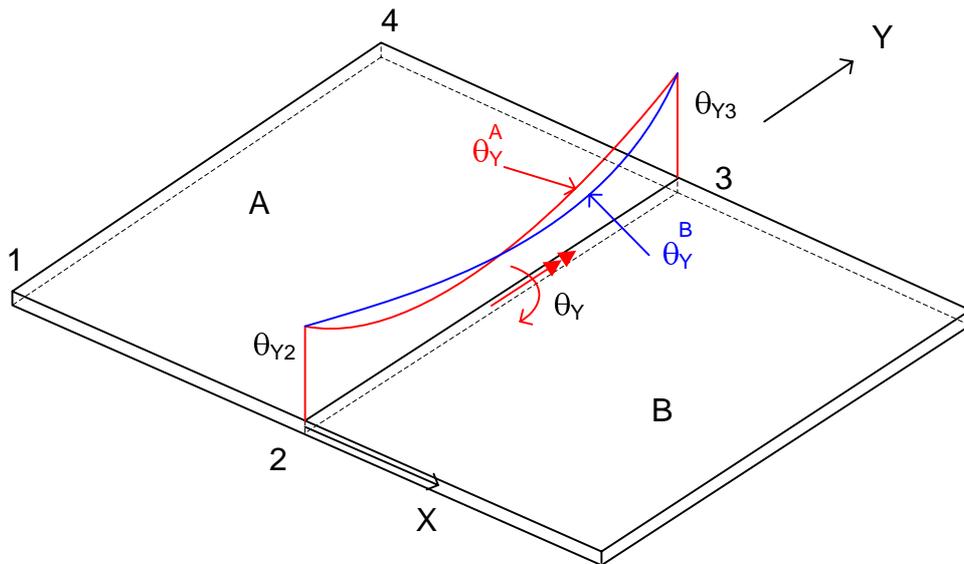


Figura 7.15 Deformación de la frontera entre dos elementos placa

Para definir el giro  $\theta_y$  en el lado 2-3 se necesitan los cuatro parámetros  $\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{12}$  (ver la tercera ecuación de (7.66)). Sin embargo para ello sólo se dispone de las dos

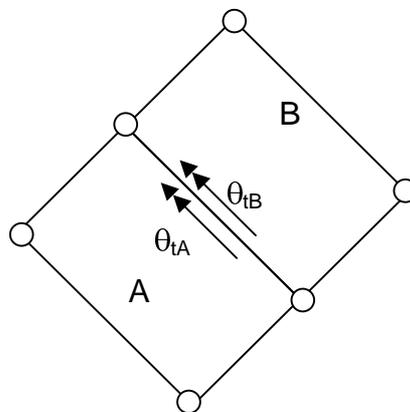
ecuaciones (7.69) y (7.72), por lo que dicho giro no queda unívocamente definido empleando únicamente los grados de libertad del lado 2-3. En consecuencia, cada uno de los dos elementos A, o B definirá un valor diferente del giro  $\theta_y$ , con lo que no queda garantizada la continuidad del giro  $\theta_y$  en el lado. De esta manera se incumple el tercer criterio de convergencia que exige la continuidad hasta la derivada de orden 1 en los lados entre los elementos.

La figura 7.16 ilustra la situación de incompatibilidad en el giro  $\theta_y$ .



**Figura 7.16 Incompatibilidad del giro normal a la frontera entre 2 elementos placa**

Esta conclusión ha sido deducida para una situación particular, pero el fenómeno puesto de manifiesto es general en elementos placa que empleen la formulación aquí descrita: existen discontinuidades entre elementos en el giro normal al lado, sea cual sea su orientación (figura 7.17). A los elementos que muestran este comportamiento se les denomina no conformes.



**Figura 7.17 Continuidad de giros en la frontera entre dos elementos placa**

Una primera solución a este problema es adoptar otro polinomio interpolante diferente, que garantice la compatibilidad del giro normal. En esta línea, Melosh presentó otro elemento en el que, utilizando como grados de libertad la flecha y los dos giros, el polinomio interpolante garantiza la compatibilidad del giro normal al lado. Sin embargo, dicho polinomio no tiene el término  $(xy)$ , por lo que no es capaz de representar estados de curvatura de torsión constante (que es proporcional a la derivada segunda cruzada), y por lo tanto no satisface los criterios 1 y 2 de convergencia.

En realidad se puede demostrar que es imposible definir, mediante polinomios sencillos, unas funciones de interpolación que aseguren la compatibilidad completa, cuando sólo se usan como parámetros nodales, la flecha  $w$  y sus derivadas primeras. O bien se incumple la compatibilidad del giro normal, o bien el elemento es incapaz de representar algún estado de tensión constante.

Una solución más adecuada al problema consiste en adoptar otros parámetros, además de la flecha y el giro, como grados de libertad en los nudos. De esta manera se pueden generar elementos compatibles, como se describe a continuación.

## 7.5. ELEMENTOS TRIANGULARES INCOMPATIBLES

De la misma forma que el elemento rectangular ya explicado, se han desarrollado muchos elementos placa de tres lados. El principal problema para su desarrollo está en el hecho de que si se emplean como grados de libertad la flecha y los giros en los tres nudos, se dispone de 9 parámetros para definir la función de interpolación de la flecha, lo cual no permite emplear un polinomio completo de grado 3, que requiere un total de 10 parámetros. En función de cuál sea el término del polinomio no incluido en la función de interpolación, pueden formularse diversos elementos, aunque muchos de ellos no tienen la calidad suficiente para su empleo práctico.

Un elemento triangular que sí muestra un comportamiento aceptable es el desarrollado por Cheung, King y Zienkiewicz en 1968. Emplea un polinomio cúbico incompleto, que le permite representar campos de curvatura constante (es decir momentos flectores y torsor) de valor arbitrario. Es incompatible, pues no garantiza la continuidad del giro según la normal a las fronteras, pero sin embargo garantiza la convergencia. Además se han efectuado sobre su formulación inicial varias modificaciones, añadiendo términos de grados más elevados, lo cual ha permitido mejorar la calidad de los resultados obtenidos con él.

Como ejemplo de un elemento incompatible curioso debe citarse el propuesto por Morley en 1971. Este elemento emplea como grados de libertad la flecha lateral en cada uno de los tres nudos (sin los giros), y el giro normal en el centro de cada uno de sus lados. Estos 6 grados de libertad permiten emplear un polinomio completo de grado 2, el cual permite representar cualquier estado de curvatura constante dentro

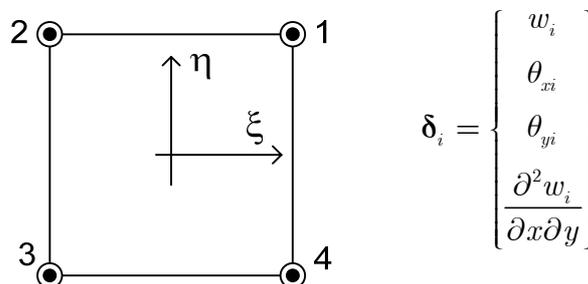
del elemento. Sin embargo el elemento no permite una variación cúbica de la flecha en sus lados, con lo que no se garantiza la continuidad de los giros en los mismos, incumpliendo el tercer criterio. A pesar de ello, el elemento converge.

## 7.6. ELEMENTOS CONFORMES

Para tratar de resolver el problema de los elementos incompatibles se han desarrollado otros, que se llaman conformes, y que básicamente lo que hacen es añadir nuevos términos a las funciones de interpolación, de tal manera que se satisfagan a la vez la compatibilidad de giros en los bordes del elemento, y se representen estados de deformación unitaria constante.

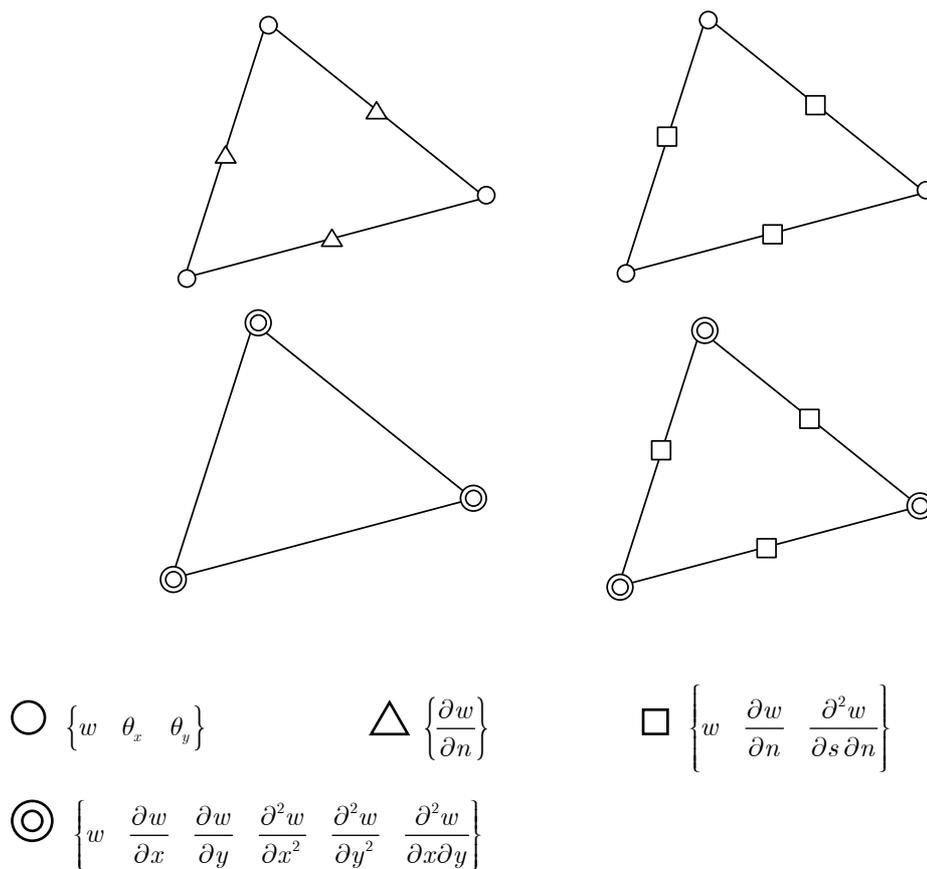
Para poder añadir estos nuevos términos a las funciones de interpolación, se requiere introducir grados de libertad adicionales en el elemento. Entre ellos se suelen incluir los giros según la tangente al punto medio de los lados, o incluso derivadas segundas de la flecha. Estos elementos pueden tener distinto número de grados de libertad en cada nudo, y se han desarrollado gran cantidad de ellos. Los resultados obtenidos en casos comparativos entre distintos tipos de ellos son bastante dispares y no puede decirse cuál es el mejor de todos, incluyendo en la comparación elementos conformes y no conformes.

Entre los elementos conformes de cuatro lados, debe mencionarse el elemento hermítico de 16 grados de libertad desarrollado por Bogner, Fox y Schmidt en 1967. Tiene cuatro variables en cada nudo: la flecha, los dos giros  $x$  e  $y$  y la derivada segunda cruzada de la flecha (figura 7.18). El elemento utiliza como función interpolante de la flecha  $w$  un producto de dos polinomios de Hermite de grado 3, uno en cada dirección. Este elemento cumple los tres criterios de convergencia, y resulta ser más preciso que el de Melosh, debido a que utiliza un polinomio interpolante de mayor grado. En todo caso, no es posible generalizarlo a formas no rectangulares, lo cual limita su aplicación.



**Figura 7.18** Elemento rectangular hermítico

En lo que respecta a los elementos triangulares compatibles, se han desarrollado varios de ellos, con distintos tipos de grados de libertad. La figura 7.19 muestra algunos de ellos.



**Figura 7.19 Elementos triangulares compatibles**

# Flexión de placas con energía de esfuerzo cortante

## 8.1. INTRODUCCIÓN

Cuando la energía debida al esfuerzo cortante no es despreciable, debe emplearse una teoría adecuada que la tenga en cuenta. Esto ocurre en placas cuyo espesor no es totalmente despreciable frente a sus dimensiones transversales, aunque si debe seguir siendo lo suficientemente pequeño para que la tensión en la dirección  $z$  sea despreciable.

Los primeros desarrollos de la teoría de flexión de placas incluyendo la energía de esfuerzo cortante son debidos a Reissner (1945) y Mindlin (1950). En esta teoría no se emplea la hipótesis de Kirchhoff, por lo que las secciones rectas normales al plano medio de la placa no se mantienen normales a dicho plano medio en el estado deformado. Es decir que el ángulo que gira una sección plana cualquiera no tiene por qué coincidir con la tangente a la deformada.

Como consecuencia de la diferencia entre giro y tangente a la deformada aparece en el material una deformación de cortadura que, asociada a las tensiones cortantes verticales existentes, hace que se acumule energía de cortadura.

## 8.2. ESTADO DE DEFORMACIÓN

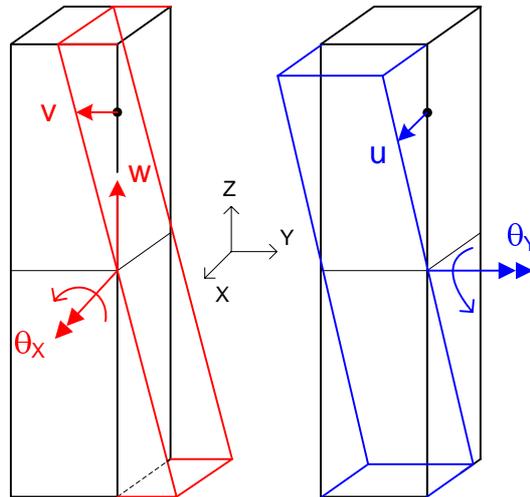
En un punto del plano medio de la placa, las deformaciones son la flecha  $w$  y los dos giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$ . Estas deformaciones se agrupan en el vector de deformaciones  $\mathbf{w}$ , que es función de la situación del punto  $(x, y)$  dentro de la placa:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

Las deformaciones de un punto cualquiera de la placa, situado a una altura  $z$  respecto al plano medio, son (figura 8.1):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \theta_y \\ -z \theta_x \\ w \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

Con este planteamiento el estado de deformación de la placa ya no queda definido únicamente por la flecha  $w$ , sino que intervienen también los giros de cada sección recta, que ya no coinciden con las derivadas de  $w$ .



**Figura 8.1 Estado de deformación interior en placas Mindlin**

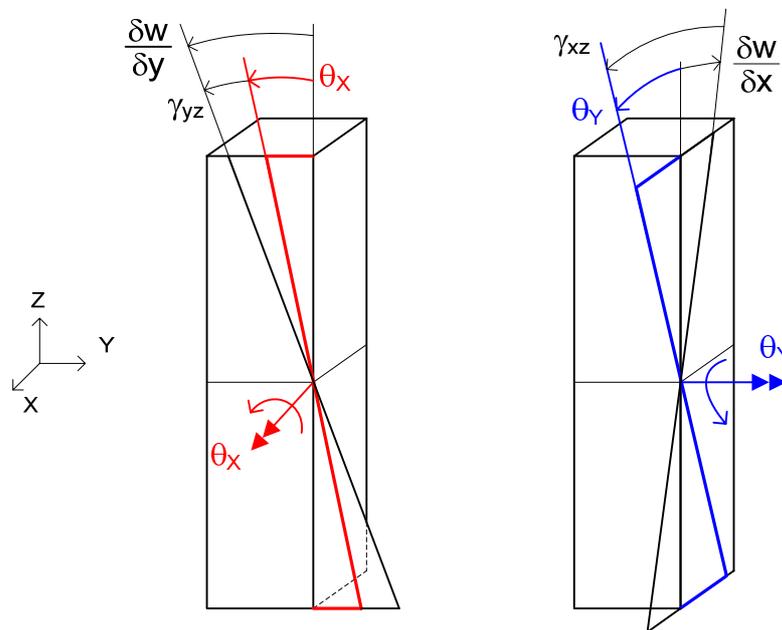
Las deformaciones unitarias producidas por estas deformaciones son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}$$

En esta expresión se observa que:

- Las deformaciones unitarias varían linealmente en el espesor de la placa, como en la teoría clásica.
- No aparecen las derivadas segundas de la flecha  $w$  como en las placas delgadas, sino las derivadas primeras de los giros de la sección.
- Aparecen dos deformaciones de cortadura verticales que se deben a la diferencia entre el giro de la sección y la pendiente a la deformada (derivada), y que no existían en la teoría clásica.



**Figura 8.2 Rotaciones en placas Mindlin**

- Las tres primeras deformaciones unitarias se pueden poner en la forma:

$$\epsilon_F = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \kappa \quad (8.4)$$

Donde se ha introducido el vector de curvaturas  $\kappa$  propio de esta teoría, que es diferente del de la teoría clásica pues ahora contiene las derivadas primeras de los giros. Introduciendo el operador de derivación  $\partial_1$  de orden 1, se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_F = z \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = z \boldsymbol{\mathcal{D}}_1 \mathbf{w} \quad (8.5)$$

- Las deformaciones de cortadura valen:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{D}}_2 \mathbf{w} \quad (8.6)$$

Se observa que estas deformaciones son constantes en todo el espesor de la placa, mientras que en la solución real varían de forma parabólica. Esto es debido a que la hipótesis de deformación efectuada no es perfecta, ya que en la realidad las secciones rectas perpendiculares al plano medio no se mantienen rectas en el estado deformado, sino que se distorsionan debido a la deformación de cortadura.

### 8.3. RELACIÓN TENSIÓN DEFORMACIÓN

La relación entre las tensiones y las deformaciones unitarias es la correspondiente al estado plano de tensiones, ya que la tensión en dirección  $z$  es nula. Suponiendo un material isótropo dicha relación es:

$$\boldsymbol{\sigma}_F = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (8.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_F = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_F - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (8.8)$$

que es la misma que se emplea en la teoría clásica. Además, las dos tensiones cortantes verticales se relacionan con las correspondientes deformaciones de cortadura, a través de la parte correspondiente de la ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G \gamma_{xz} \\ G \gamma_{yx} \end{Bmatrix} = G \boldsymbol{\gamma} \quad (8.9)$$

donde  $G$  es el módulo de elasticidad en cortadura.

### 8.4. ESFUERZOS INTERNOS

La definición de los esfuerzos internos en la placa en función de las tensiones es la misma que en la teoría clásica. Sustituyendo las tensiones en función de las deformaciones unitarias y éstas en función de las curvaturas e integrando en  $z$ , se obtiene, para los momentos de flexión y torsión:

$$\mathbf{M} = \frac{h^3}{12} \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{M}_0 \quad (8.10)$$

Sustituyendo las curvaturas  $\boldsymbol{\kappa}$  se obtiene:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\ D \left( \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\ \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0xy} \end{Bmatrix} \quad (8.11)$$

Los esfuerzos cortantes son la resultante de las tensiones cortantes verticales:

$$\mathbf{Q} = \int_{-h/2}^{+h/2} \boldsymbol{\tau} dz = h G \boldsymbol{\gamma} \quad (8.12)$$

### 8.5. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

La obtención de las ecuaciones de equilibrio en esta teoría sigue los mismos pasos que en la teoría clásica, con lo que obtienen las mismas ecuaciones de equilibrio expresadas en función de los esfuerzos internos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_{xz} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= Q_{yz} \\ \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{zy}}{\partial y} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

Sustituyendo en ellas los valores de los momentos y los cortantes en función de las tres deformaciones, mediante (8.11) y (8.12), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = \frac{G t}{D} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = \frac{G t}{D} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) + \frac{q_z}{G t} = 0$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que son las deformaciones del plano medio de la placa. Este sistema de ecuaciones es de orden 2, en comparación con el orden 4 obtenido en la teoría clásica. Para resolverlo por el MEF será necesario emplear funciones de interpolación con continuidad  $C^0$ , en lugar de las funciones de tipo  $C^1$  necesarias en la teoría clásica.

## 8.6. EXPRESIÓN DE LA ENERGÍA ELÁSTICA

La densidad de energía elástica acumulada en un punto de la placa incluye dos sumandos: uno debido a las tres tensiones incluidas en el vector  $\sigma$  y otro debido a las dos tensiones cortantes  $\tau$ .

$$U_0 = \int_0^\epsilon \sigma_F^T d\epsilon_F + \int_0^\gamma \tau^T d\gamma = \int_0^\epsilon \epsilon_F^T \mathbf{D} d\epsilon_F - \int_0^\epsilon \epsilon_0^T \mathbf{D} d\epsilon_F + \int_0^\gamma G \gamma^T d\gamma \quad (8.15)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \epsilon_F^T \mathbf{D} \epsilon_F - \epsilon_0^T \mathbf{D} \epsilon_F + \frac{1}{2} G \gamma^T \gamma \quad (8.16)$$

La energía elástica acumulada en toda la placa es:

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon_F^T \mathbf{D} \epsilon_F dv - \int \epsilon_F^T \mathbf{D} \epsilon_0 dv + \frac{1}{2} \int G \gamma^T \gamma dv \quad (8.17)$$

Sustituyendo las deformaciones unitarias  $\epsilon_F$  en función de las curvaturas se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} z^2 dz dA - \int z \mathbf{b}^T \mathbf{D} \epsilon_0 dz dA + \frac{1}{2} \int G \gamma^T \gamma dz dA$$

En el primer término se puede integrar en la coordenada  $z$ , y en el segundo se identifican los momentos debidos a las deformaciones unitarias iniciales:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{h^3}{12} \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dA + \int \mathbf{b}^T \mathbf{M}_0 dA + \frac{1}{2} \int G k t \gamma^T \gamma dA \quad (8.18)$$

En esta ecuación se ha incluido, en el término del cortante, un factor  $k$  denominado factor de corrección de la energía de cortante. Su misión es corregir el valor de la energía calculada con la distribución uniforme de tensiones cortantes e igualarla al valor real de la energía, que está producida por una distribución parabólica de las tensiones cortantes.

## 8.7. ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS CON ENERGÍA DE CORTANTE

### 8.7.1 Funciones de interpolación

Para resolver por el MEF un problema de flexión de placas empleando la teoría de Mindlin-Reissner se puede usar cualquier tipo de función de interpolación que tenga continuidad  $C^0$ . En particular todas las utilizadas para los problemas de elasticidad plana son aplicables, tanto en formulación de Lagrange como Serendipity.

Estas funciones de interpolación se usan para interpolar las tres incógnitas del problema, que son la flecha  $w$  y los dos giros:

$$w = \sum N_i W_i \quad \theta_x = \sum N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum N_i \theta_{yi} \quad (8.19)$$

Las tres leyes de interpolación se pueden agrupar como:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \dots \\ W_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \end{Bmatrix} \quad (8.20)$$

Que puede ponerse en la forma matricial habitual:

$$\mathbf{w} = \mathbf{N} \delta^e \quad (8.21)$$

donde  $\delta^e$  es el vector de todas las deformaciones nodales del elemento (figura 8.3):

$$\delta^e = [W_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ W_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ W_n \ \theta_{xn} \ \theta_{yn}]^T \quad (8.22)$$

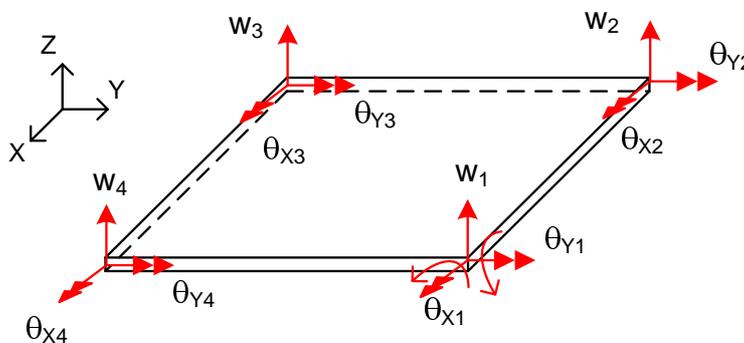


Figura 8.3 Grados de libertad del elemento placa rectangular

Las funciones de interpolación se definen habitualmente en un sistema de coordenadas local al elemento. A este efecto se emplean los mismos sistemas usados para los elementos de elasticidad plana: para elementos de cuatro lados se emplean las coordenadas  $\xi, \eta$  normalizadas tal que el elemento es un cuadrado de lado 2 (figura 8.4) y para triángulos de emplean las tres coordenadas de área  $L_i$ .

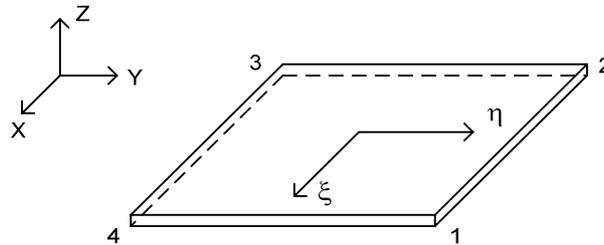


Figura 8.4 Coordenadas locales para elementos placa

### 8.7.2 Interpolación de coordenadas.

Para definir la forma del elemento en el plano XY se emplea la interpolación de coordenadas habitual en el MEF. Pueden emplearse elementos iso, sub o super paramétricos, tal y como se ha explicado para el problema plano. De hecho la forma de un elemento placa y de un elemento para elasticidad plana es la misma. Por lo tanto la ley de interpolación es del tipo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (8.23)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{x}^e \quad (8.24)$$

El vector  $\mathbf{x}^e$  agrupa a las coordenadas  $(x, y)$  de todos los nudos del elemento. Esta ley permite obtener elementos con lados curvos en el plano de la placa.

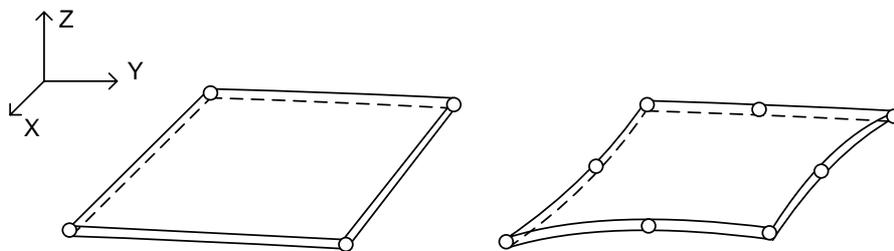


Figura 8.5 Elementos placa con lados curvos

### 8.7.3 Deformaciones unitarias

- Las deformaciones unitarias  $\boldsymbol{\varepsilon}$  son:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_F = z \boldsymbol{\kappa} = z \boldsymbol{\partial}_1 \mathbf{w} = z \boldsymbol{\partial}_1 \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = z \mathbf{B}_F \boldsymbol{\delta}^e \quad (8.25)$$

que define la matriz  $\mathbf{B}_F$ , cuya estructura es:

$$\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{F1} & \mathbf{B}_{F2} & \dots & \mathbf{B}_{Fn} \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

Cada una de las submatrices es de tamaño 3x3 y vale:

$$\mathbf{B}_{Fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

- Las deformaciones unitarias de cortadura son:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\partial}_2 \mathbf{w} = \boldsymbol{\partial}_2 \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B}_C \boldsymbol{\delta}^e \quad (8.28)$$

que define una nueva matriz  $\mathbf{B}_C$ , cuya estructura es:

$$\mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{C1} & \mathbf{B}_{C2} & \dots & \mathbf{B}_{Cn} \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

donde cada una de las submatrices es de tamaño 2x3 y vale:

$$\mathbf{B}_{Ci} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

### 8.7.4 Ecuación de equilibrio

Para obtener la ecuación de equilibrio de un elemento se parte de la expresión del potencial total acumulado en él, que es la suma de la energía elástica acumulada y del potencial de las fuerzas exteriores:

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}_F^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_F dv - \int \boldsymbol{\varepsilon}_F^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv + \frac{1}{2} \int G \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} dv - \int \mathbf{w}^T \mathbf{q}_s ds \quad (8.31)$$

donde  $\mathbf{q}_s$  son las fuerzas exteriores actuantes sobre la superficie del elemento, según cada uno de los tres grados de libertad existentes en el plano medio de la placa. En la expresión anterior no se ha incluido el potencial de las fuerzas de conexión entre los elementos, que desaparecen al ensamblar los elementos.

Sustituyendo las deformaciones unitarias en función de las matrices  $\mathbf{B}$  y las deformaciones  $\mathbf{w}$  en función de la matriz  $\mathbf{N}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \delta^{eT} \int z^2 \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \mathbf{B}_F dv \delta^e - \delta^{eT} \int z \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \epsilon_0 dv + \\ & + \frac{1}{2} \delta^{eT} \int G \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C dv \delta^e - \delta^{eT} \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds \end{aligned} \quad (8.32)$$

Haciendo este potencial estacionario con respecto a las deformaciones nodales  $\delta^e$  se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio del elemento:

$$\int z^2 \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \mathbf{B}_F dv \delta^e + \int G \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C dv \delta^e = \int z \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \epsilon_0 dv + \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds \quad (8.33)$$

que puede ponerse en la forma compacta habitual:

$$\left( \mathbf{K}_F + \mathbf{K}_C \right) \delta^e = \mathbf{P}_T + \mathbf{P}_s \quad (8.34)$$

donde se identifica la matriz de rigidez, y los vectores de fuerzas nodales equivalentes a la temperatura y a las cargas distribuidas.

### 8.7.5 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez tiene dos sumandos. El primero de ellos es debido a las tensiones  $\sigma$ , y se denomina habitualmente rigidez debida a la flexión. Su valor es:

$$\mathbf{K}_F = \int z^2 \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \mathbf{B}_F dv \quad (8.35)$$

Integrando en primer lugar la coordenada  $z$ , y pasando a las coordenadas locales del elemento, esta matriz puede ponerse en la forma:

$$\mathbf{K}_F = \int \frac{h^3}{12} \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \mathbf{B}_F dx dy = \int_{-1}^{+1} \frac{h^3}{12} \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \mathbf{B}_F J d\xi d\eta \quad (8.36)$$

siendo  $J$  el determinante de la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ .

El segundo sumando de la matriz de rigidez es debido a la energía de cortante, y su valor es:

$$\mathbf{K}_C = \int G \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C dv \quad (8.37)$$

Integrando en primer lugar la coordenada  $z$ , y pasando a las coordenadas locales del elemento, esta matriz puede ponerse en la forma:

$$\mathbf{K}_C = \int h k G \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C dx dy = \int_{-1}^{+1} h k G \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C J d\xi d\eta \quad (8.38)$$

donde se ha introducido el factor de corrección de cortante  $k$ , necesario para igualar la energía de cortadura a su valor real.

El cálculo de las matrices **B** requiere conocer las derivadas de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas generales; pero estas derivadas deben ser expresadas en las coordenadas locales del elemento, a fin de poder ser integradas en el dominio normalizado definido por dichas coordenadas locales.

Para evaluar dichas derivadas, se plantea la relación entre ellas empleando la regla de la derivación en cadena:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.39)$$

La matriz **J** es el jacobiano de la transformación de coordenadas  $x,y$  a  $\xi,\eta$ . Despejando se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (8.40)$$

El vector de la derecha es conocido sin más que derivar las funciones  $N_i$  respecto a  $\xi,\eta$ . Conociendo **J** se pueden obtener de la expresión anterior todas las derivadas que forman las matrices **B**.

El cálculo de **J** se hace apoyándose en la interpolación de coordenadas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

Esta expresión puede ser evaluada fácilmente, ya que las funciones  $N$  son conocidas en función de  $\xi,\eta$  y  $x_i,y_i$  son las coordenadas de los nudos del elemento.

## 8.7.6 Fuerzas nodales

### 8.7.6.1 Fuerzas de superficie

El vector de fuerzas de superficie  $\mathbf{q}_s$  puede tener tres componentes, en la dirección de los tres grados de libertad de la placa. Sin embargo, de ellas sólo la componente  $z$  tiene interés práctico (figura 8.6), ya que las otras dos corresponden a momentos distribuidos sobre la placa, en la dirección de los dos giros  $x$  e  $y$ , cuyo sentido físico es dudoso. Aunque la teoría permite tratar los tres tipos de fuerzas, habitualmente será:

$$\mathbf{q}_s = \begin{Bmatrix} q_z \\ q_{\theta x} \\ q_{\theta y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.42)$$

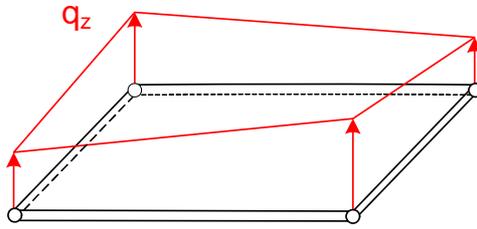


Figura 8.6 Fuerza perpendicular a la superficie en una placa

El vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de superficie es:

$$\mathbf{P}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds \quad (8.43)$$

Como es habitual, se supone que las fuerzas de superficie se representan mediante una interpolación de sus valores nodales, empleando las funciones de interpolación:

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{N} \mathbf{q}_s^e \quad (8.44)$$

siendo  $\mathbf{q}_s^e$  los valores nodales de las fuerzas de superficie, que son constantes, y de los que sólo se emplea el de la dirección  $z$ .

$$\mathbf{q}_s^e = [q_{z1} \quad 0 \quad 0 \quad q_{z2} \quad 0 \quad 0 \quad \dots]^T \quad (8.45)$$

De esta forma el vector de fuerzas nodales equivalentes queda:

$$\mathbf{P}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \mathbf{q}_s^e = \mathbf{M}_s \mathbf{q}_s^e \quad (8.46)$$

donde se ha introducido la matriz  $\mathbf{M}_s$  cuyo valor es:

$$\mathbf{M}_s = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds = \int \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{N}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} dx dy = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^{11} & \dots & \mathbf{M}_s^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}_s^{n1} & \dots & \mathbf{M}_s^{nn} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Está compuesta por submatrices del tipo:

$$\mathbf{M}_s^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} J d\xi d\eta \quad (8.48)$$

### 8.7.6.2 Fuerzas de línea

Estos elementos admiten la aplicación de fuerzas distribuidas de forma lineal sobre sus aristas  $\mathbf{q}_L$ , cuyo vector de fuerzas nodales equivalentes es:

$$\mathbf{P}_L = \int \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dl \quad (8.49)$$

Al igual que para las fuerzas de superficie, las fuerzas de línea tienen tres componentes en la dirección de los tres grados de libertad de la placa. De ellos la componente  $z$  es la de mayor interés, ya que las otras dos corresponden a momentos distribuidos sobre la arista, en la dirección de los dos giros según  $x$  e  $y$ , de los cuales sólo el paralelo a la arista es de interés (figura 8.7).

$$\mathbf{q}_L = \begin{Bmatrix} q_{Lz} \\ q_{L\theta x} \\ q_{L\theta y} \end{Bmatrix} \quad (8.50)$$

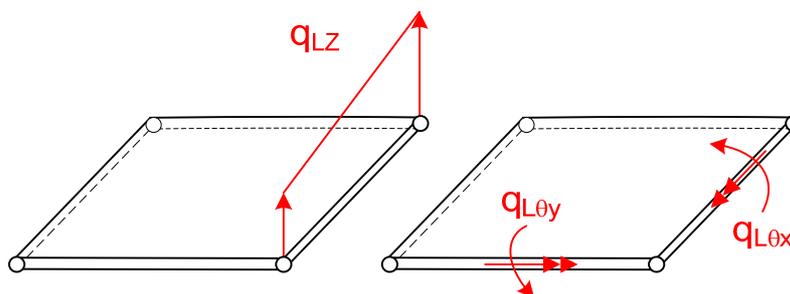


Figura 8.7 Fuerzas de lado en placas

Como es habitual, se supone que las fuerzas de línea se representan mediante una interpolación de sus valores nodales, empleando las funciones de interpolación:

$$\mathbf{q}_L = \mathbf{N} \mathbf{q}_L^e \quad (8.51)$$

siendo  $\mathbf{q}_L^e$  los valores nodales de las fuerzas de superficie. Con esto queda:

$$\mathbf{P}_L = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dl \mathbf{q}_L^e = \mathbf{M}_L \mathbf{q}_L^e \quad (8.52)$$

donde se ha introducido la matriz  $\mathbf{M}_L$  cuya estructura es:

$$\mathbf{M}_L = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} dl = \int \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{N}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} dl = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_L^{11} & \dots & \mathbf{M}_L^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}_L^{n1} & \dots & \mathbf{M}_L^{nn} \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

Está compuesta por submatrices del tipo:

$$\mathbf{M}_L^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} dl \quad (8.54)$$

El cálculo del diferencial de longitud se efectúa como se ha indicado para los problemas de elasticidad plana.

### 8.7.6.3 Deformaciones iniciales conocidas

El vector de fuerzas nodales equivalentes a las deformaciones unitarias iniciales es:

$$\mathbf{P}_T = \int z \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv \quad (8.55)$$

Se supone una variación de la temperatura lineal en el espesor de la placa, con valor medio  $T_m$  y gradiente  $T_g$ .

$$\mathbf{P}_T = \int z \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \alpha T_m + \alpha z T_g \\ \alpha T_m + \alpha z T_g \\ 0 \end{Bmatrix} dv = \int \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left[ \int_{-h/2}^{+h/2} (z \alpha T_m + \alpha z^2 T_g) dz \right] dA \quad (8.56)$$

La integral correspondiente a la temperatura media resulta ser nula: un aumento de temperatura uniforme en la placa no produce ningún efecto en la flexión. Se obtiene:

$$\mathbf{P}_T = \int \frac{h^3 \alpha T_g}{12} \mathbf{B}_F^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dA = \int \frac{E h^3 \alpha T_g}{12(1-\nu)} \mathbf{B}_F^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dA \quad (8.57)$$

Dada la estructura de la matriz  $\mathbf{B}_F$ , el vector de fuerzas nodales equivalentes es:

$$\mathbf{P}_T = \int \frac{E h^3 \alpha T_g}{12(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{array} \right\} dA \quad (8.58)$$

La expresión anterior permite utilizar campos de temperatura variables en el elemento, sin más que interpolar la temperatura gradiente en función de sus valores en los nudos:

$$T_g = \sum N_i T_{gi} \quad (8.59)$$

## 8.8. BLOQUEO POR CORTANTE

Los elementos de placa isoparamétricos con energía de cortante son muy utilizados en la práctica. Se pueden utilizar elementos con dos, tres o cuatro nudos por lado, o con número de nudos por lado variable, y que pueden tener lados rectos o curvos. Su formulación es muy parecida a los elementos de membrana planos, por lo que su desarrollo es sencillo. Además permiten analizar estructuras con placas medianamente gruesas, que son relativamente frecuentes.

Sin embargo precisamente esta característica es un inconveniente si se pretende utilizar estos elementos para analizar placas delgadas, donde la energía de cortadura es realmente muy pequeña. Si para este problema se utiliza un elemento placa isoparamétrico de cuatro nudos con energía de cortante, éste no puede representar adecuadamente la energía de cortadura nula real de la estructura, y la rigidez del elemento sobrestima la rigidez real (al incluir la rigidez debida al cortante), lo que hace que la solución obtenida tenga grandes errores. A este fenómeno que ocurre al modelizar estructuras de pequeño espesor con elementos de placa que incluyen la energía de cortante se le llama bloqueo por cortante (*"shear locking"*) del elemento. El siguiente razonamiento permite poner de manifiesto, de forma cualitativa el fenómeno.

Consideramos la ecuación de equilibrio una placa apoyada sometida a cargas puntuales y estudiaremos su respuesta cuando el espesor de la misma  $h$  tiende a

cero. Deseamos que en ese caso la solución obtenida tienda a la solución de la teoría clásica.

$$(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_C)\delta = \mathbf{F} \quad (8.60)$$

La matriz de rigidez a flexión es proporcional a  $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$  y la matriz de rigidez a cortante lo es a  $Gh$ . Sacando estos términos como factores comunes:

$$\left( \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \bar{\mathbf{K}}_F + Gh \bar{\mathbf{K}}_C \right) \delta = \mathbf{F} \quad (8.61)$$

Pasando el factor  $D$  al término independiente:

$$(\bar{\mathbf{K}}_F + \alpha \bar{\mathbf{K}}_C) \delta = \frac{12(1 - \nu^2)}{Eh^3} \mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}$$

$$\text{Con } \alpha = \frac{12(1 - \nu^2)G}{Eh^2}$$

La solución de la teoría de Kirchhoff cuando el espesor tiende a cero es proporcional al factor  $12(1 - \nu^2) / Eh^3$ , por lo tanto el nuevo vector de cargas  $\bar{\mathbf{F}}$  es del orden de las deformaciones que se desean obtener. Por lo tanto es necesario que la matriz de rigidez esté acotada a fin de que la solución por el MEF tienda a la solución de Kirchhoff. Estudiando esta matriz de rigidez se observa que cuando  $h \rightarrow 0$  el factor  $\alpha \rightarrow \infty$  y por lo tanto el término debido a  $\mathbf{K}_C$  se hace dominante, pudiéndose despreciar el término de la rigidez a flexión, y obteniéndose unas deformaciones:

$$\bar{\mathbf{K}}_C \delta = \frac{1}{\alpha} \bar{\mathbf{F}} \quad (8.62)$$

Claramente a medida que la placa se hace más delgada, el factor  $\alpha$  se hace mucho más grande con lo que la ecuación de equilibrio se transforma en:

$$\bar{\mathbf{K}}_C \delta = \mathbf{0} \quad (8.63)$$

y las deformaciones obtenidas tienden a cero y no a la solución de Kirchhoff, produciéndose el bloqueo de la solución por efecto de la rigidez a cortante.

La única forma de obtener en la ecuación anterior una solución distinta de la solución bloqueada  $\delta = \mathbf{0}$  es que la matriz de rigidez a cortante sea singular. Esta condición de singularidad de la  $\bar{\mathbf{K}}_C$  proporciona así pues una condición necesaria (pero no suficiente) para poder obtener una solución correcta en el límite, para placas de pequeño espesor.

## 8.9. ELEMENTO DE 4 NUDOS CON INTEGRACIÓN REDUCIDA.

Un método sencillo para obtener la condición de singularidad de  $\bar{\mathbf{K}}_C$  es efectuar una integración incompleta de la misma. De hecho si se integra la matriz  $\bar{\mathbf{K}}_C$  del elemento

de 4 nudos con un solo punto de integración se garantiza su singularidad y se resuelve el problema del bloqueo.

La tabla siguiente muestra los órdenes de integración necesarios para la integración de las dos matrices de rigidez, en distintos tipos de integración.

	$\mathbf{K}_F$	$\mathbf{K}_C$
Completa	2 x 2	2 x 2
Selectiva	2 x 2	1 x 1
Reducida	1 x 1	1 x 1

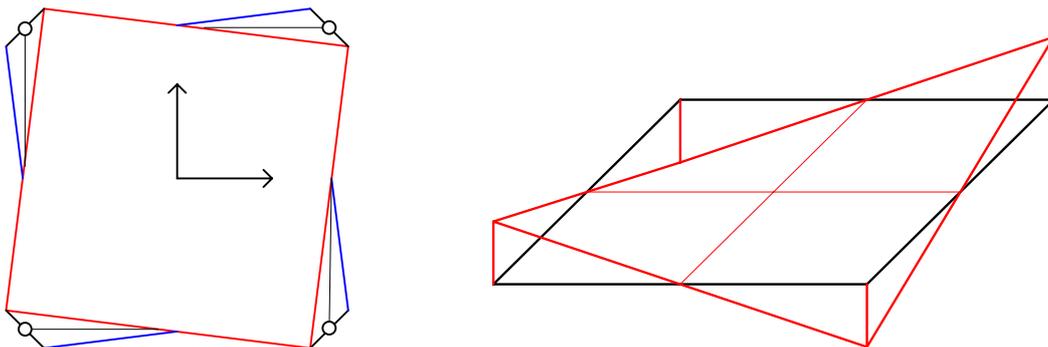
El problema de la integración reducida o selectiva es que introduce en el elemento nuevos modos de deformación de sólido rígido (con energía nula), además de los 3 modos de sólido rígido que un elemento placa tiene siempre.

Así por ejemplo la integración reducida de este elemento produce en él 7 modos de energía nula, 3 de ellos de sólido rígido y otros 4 más de deformación espuria, por lo que este tipo de integración reducida no puede emplearse con este elemento.

Si se emplea la integración selectiva, el elemento posee 5 modos de energía nula, 3 de sólido rígido y dos más espurios. De entre estos dos, uno de ellos corresponde a una deformación de torsión en el plano del elemento, con ambas caras girando en su plano en sentidos opuestos:

$$w = 0 \quad \theta_x = x \quad \theta_y = -y$$

Este modo de energía nula no puede propagarse en la malla pues dos elementos adyacentes no pueden adoptarlo a la vez.



**Figura 8.8 Modos de energía nula espurios**

El segundo modo de energía nula corresponde a una deformación lateral bilineal, sin giros.

$$w = xy \quad \theta_x = 0 \quad \theta_y = 0$$

Este mecanismo si que puede propagarse en una malla, dependiendo de cuales sean las condiciones de apoyo de la misma (p.e. en una malla apoyada). En todo caso se

han desarrollado técnicas específicas para estabilizar este modo de energía nula, permitiendo emplear este elemento con integración selectiva.

### 8.10. ELEMENTO DE 4 NUDOS CON CAMPO DE DEFORMACIÓN CORTANTE IMPUESTO

Una solución para eliminar el problema del bloqueo por cortante consiste en introducir en la formulación del elemento un campo de deformación unitaria de cortante que satisfaga en el límite la condición de anularse cuando el espesor de la placa tienda a cero. Para ello se estudia cuál es la variación de la deformación unitaria cortante en el interior del elemento, y las condiciones para que esta deformación cortante sea nula. Para simplificar el desarrollo, consideramos un elemento cuadrado de lado  $2a$ . Para el caso de la deformación  $\gamma_{xz}$  esta variación es:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} W_i + \sum N_i \theta_{y_i} \quad (8.64)$$

Sustituyendo las funciones de interpolación bilineales del elemento:

$$\gamma_{xz} = \sum \frac{1}{4} (1 + \eta \eta_i) \xi_i \frac{1}{a} W_i + \sum \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \theta_{y_i}$$

Reagrupando:

$$\gamma_{xz} = \sum \left( \frac{\xi_i}{4a} W_i + \frac{1}{4} \theta_{y_i} \right) + \sum \left( \frac{\xi_i \eta_i}{4a} W_i + \frac{\eta_i}{4} \theta_{y_i} \right) \eta + \sum \left( \frac{\xi_i}{4} \theta_{y_i} \right) \xi + \sum \left( \frac{\xi_i \eta_i}{4} \theta_{y_i} \right) \xi \eta \quad (8.65)$$

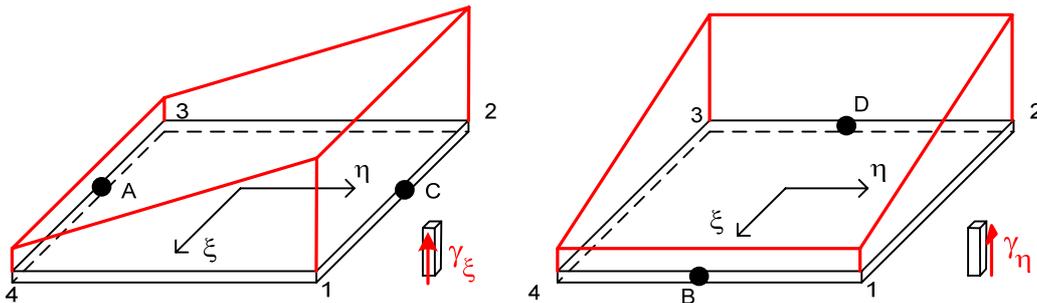
Los dos primeros términos se anulan fácilmente pues imponen relaciones entre las flechas y los giros de los nudos. Sin embargo los términos 3º y 4º no los puede satisfacer el elemento, pues obligan a una solución absurda  $\theta_{y_i} = 0$ . Una solución para conseguir que esta deformación de cortante sea nula consiste en evaluarla en la línea  $\xi=0$ , con lo que los términos 3º y 4º se anulan.

Un razonamiento similar con la otra deformación  $\gamma_{yz}$  lleva a la conclusión de que para conseguir que se anule, debe evaluarse en la línea  $\eta=0$ . De esta manera se concluye que la evaluación de las deformaciones de cortante en el centro del elemento permite la anulación de las mismas cuando sea necesario. Esto justifica el empleo de la integración reducida, en el centro del elemento, para evaluar la matriz de rigidez a cortante, pues permite anular las deformaciones de cortante.

Este estudio de la variación de las deformaciones de cortadura en el elemento abre la puerta a un método más sofisticado para conseguir que el elemento represente bien los estados de deformación cortante nula. La expresión obtenida para la  $\gamma_{xz}$  muestra que si a esta deformación se le permite sólo una variación en la coordenada  $\eta$ , es decir se eliminan los términos 3º y 4º que contienen la coordenada, se podrá cumplir la condición de que la deformación cortante sea nula en el límite. En el caso de la otra deformación  $\gamma_{yz}$ , se le debería permitir sólo una variación en la coordenada  $\xi$ .

En base a esta idea, se puede desarrollar un elemento en el que el campo de deformación cortante esté impuesto y siga la variación que se acaba de describir. Este campo de deformación cortante se impone en las coordenadas locales normalizadas del elemento, y posteriormente se referirá a las coordenadas generales. Su expresión es por lo tanto:

$$\begin{aligned}\gamma_\xi &= \alpha_1 + \alpha_2\eta \\ \gamma_\eta &= \alpha_3 + \alpha_4\xi\end{aligned}\quad (8.66)$$



**Figura 8.8 Campo de deformación cortante impuesto**

El campo de  $\gamma_\xi$  es variable linealmente en la dirección  $\eta$  y por lo tanto se puede ajustar con los valores de dicha tensión en los puntos A ( $\eta=-1$ ) y C ( $\eta=1$ ):

$$\gamma_\xi = \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_\xi^A + \frac{1}{2}(1+\eta)\gamma_\xi^C \quad (8.67)$$

El campo  $\gamma_\eta$  es variable en la dirección  $\xi$  y se ajusta con los valores en los puntos B y D.

$$\gamma_\eta = \frac{1}{2}(1+\xi)\gamma_\eta^B + \frac{1}{2}(1-\xi)\gamma_\eta^D \quad (8.68)$$

Estas dos ecuaciones se pueden agrupar en forma matricial, definiendo la matriz de funciones de interpolación de la deformación unitaria cortante:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\eta) & 0 & 0 & 0 & (1+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\xi) & 0 & 0 & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_\xi^A \\ \gamma_\eta^A \\ \gamma_\xi^B \\ \gamma_\eta^B \\ \gamma_\xi^C \\ \gamma_\eta^C \\ \gamma_\xi^D \\ \gamma_\eta^D \end{Bmatrix} \quad (8.69)$$

$$\gamma_L = \mathbf{N}_\gamma \gamma_L^P$$

Se ha introducido, por conveniencia para el desarrollo posterior, el vector  $\gamma_L^P$  que contiene todas las deformaciones cortantes en los 4 puntos de apoyo A-D.

Las deformaciones cortantes en los puntos A-D en el sistema local se relacionan con las correspondientes en el sistema general mediante la jacobiana de la transformación:

$$\begin{bmatrix} \gamma_\xi^A \\ \gamma_\eta^A \\ \gamma_\xi^B \\ \gamma_\eta^B \\ \gamma_\xi^C \\ \gamma_\eta^C \\ \gamma_\xi^D \\ \gamma_\eta^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^A & & & \\ & \mathbf{J}^B & & \\ & & \mathbf{J}^C & \\ & & & \mathbf{J}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^A \\ \gamma_{yz}^A \\ \gamma_{xz}^B \\ \gamma_{yz}^B \\ \gamma_{xz}^C \\ \gamma_{yz}^C \\ \gamma_{xz}^D \\ \gamma_{yz}^D \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

$$\gamma_L^P = \mathbf{J}^P \gamma_G^P$$

Las deformaciones cortantes en los 4 puntos se obtienen en función del campo de desplazamientos interpolado, mediante la expresión habitual, con la matriz  $\mathbf{B}_C$ :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz}^A \\ \gamma_{yz}^A \\ \gamma_{xz}^B \\ \gamma_{yz}^B \\ \gamma_{xz}^C \\ \gamma_{yz}^C \\ \gamma_{xz}^D \\ \gamma_{yz}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_C^A \\ \mathbf{B}_C^B \\ \mathbf{B}_C^C \\ \mathbf{B}_C^D \end{bmatrix} \delta^e \quad (8.71)$$

$$\gamma_G^P = \mathbf{B}_C^P \delta^e$$

Agrupando todas las expresiones anteriores se puede expresar el campo de deformaciones cortantes (en el sistema local) en función de las deformaciones nodales:

$$\gamma_L = \mathbf{N}_\gamma \mathbf{J}^P \mathbf{B}_C^P \delta^e \quad (8.72)$$

Este campo impuesto se debe referir al sistema general, empleando para ello la jacobiana:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_L \quad (8.73)$$

Con lo que el campo de deformación cortante impuesto en coordenadas generales es:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}_\gamma \mathbf{J}^P \mathbf{B}_C^P \boldsymbol{\delta}^e \quad (8.74)$$

Esta expresión define la nueva matriz  $\mathbf{B}_C$  propia de esta formulación, denominada matriz de deformación de cortante sustitutiva  $\bar{\mathbf{B}}_C$ :

$$\bar{\mathbf{B}}_C = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}_\gamma \mathbf{J}^P \mathbf{B}_C^P \quad (8.75)$$

Por lo tanto la matriz de rigidez debida a la deformación de cortante es:

$$\mathbf{K}_C = \int G \bar{\mathbf{B}}_C^T \bar{\mathbf{B}}_C dv \quad (8.76)$$

### 8.10.1 Relaciones analíticas

La interpolación bilineal empleada para el elemento de 4 nudos permite simplificar las ecuaciones anteriores y obtener expresiones analíticas.

- Transformación geométrica.

Las funciones de interpolación del elemento son las bilineales habituales  $N_i = (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)/4$ , que se pueden agrupar en un vector:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \xi + \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \eta + \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \xi \eta \quad (8.77)$$

$$\mathbf{N}_v = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \xi + \mathbf{a}_2 \eta + \mathbf{a}_3 \xi \eta$$

Los vectores que contienen las coordenadas  $x$  e  $y$  de los 4 nudos son:

$$\mathbf{x}_N = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \quad \mathbf{y}_N = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T \quad (8.78)$$

La forma del elemento se define mediante la transformación isoparamétrica habitual:

$$x = \mathbf{x}_N^T \mathbf{N}_v \quad y = \mathbf{y}_N^T \mathbf{N}_v \quad (8.79)$$

- Matriz jacobiana de la transformación de coordenadas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N^T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \eta) & \mathbf{y}_N^T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \eta) \\ \mathbf{x}_N^T(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \xi) & \mathbf{y}_N^T(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \xi) \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

El determinante es lineal, y vale:

$$\begin{aligned}
J &= j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta \\
j_0 &= (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_2) - (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_2)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_1) \\
j_1 &= (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_3) - (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_3)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_1) \\
j_2 &= (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_3)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_2) - (\mathbf{x}_N^T \mathbf{a}_2)(\mathbf{y}_N^T \mathbf{a}_3)
\end{aligned} \tag{8.81}$$

- Deformaciones cortantes en los puntos de apoyo A-D.

La relación entre las deformaciones cortantes en el sistema local y general es:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \tag{8.82}$$

En un punto cualquiera  $M \in \{A, C\}$  se cumple:

$$\begin{aligned}
\gamma_\xi^M &= x_{,\xi}^M \gamma_x^M + y_{,\xi}^M \gamma_y^M = x_{,\xi}^M (\theta_y^M + w_{,x}^M) + y_{,\xi}^M (-\theta_x^M + w_{,y}^M) \\
\gamma_\xi^M &= x_{,\xi}^M \theta_y^M - y_{,\xi}^M \theta_x^M + (w_{,x}^M x_{,\xi}^M + w_{,y}^M y_{,\xi}^M) \\
\gamma_\xi^M &= x_{,\xi}^M \theta_y^M - y_{,\xi}^M \theta_x^M + w_{,\xi}^M
\end{aligned} \tag{8.83}$$

Análogamente para un punto cualquiera  $L \in \{B, D\}$  se cumple:

$$\gamma_\eta^L = x_{,\eta}^L \theta_y^L - y_{,\eta}^L \theta_x^L + w_{,\eta}^L \tag{8.84}$$

Al ser la interpolación en los lados lineal, los valores de los giros y deformaciones en los puntos L y M se obtienen fácilmente; así por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\theta_x^A &= \frac{1}{2}(\theta_{3x} + \theta_{4x}) & \theta_x^C &= \frac{1}{2}(\theta_{1x} + \theta_{2x}) \\
w_{,\xi}^A &= \frac{1}{2}(w_4 - w_3) & w_{,\eta}^B &= \frac{1}{2}(w_1 - w_4) \\
x_{,\xi}^A &= \frac{1}{2}(x_4 - x_3) & x_{,\eta}^B &= \frac{1}{2}(x_1 - x_4)
\end{aligned} \tag{8.85}$$

- Campo de deformaciones cortantes en el sistema local.

El campo en la dirección local  $\xi$  es:

$$\gamma_\xi = \frac{1}{2}(1 - \eta)\gamma_\xi^A + \frac{1}{2}(1 + \eta)\gamma_\xi^C \tag{8.86}$$

Sustituyendo los valores anteriores de las deformaciones en los puntos A y C:

$$\gamma_\xi = \frac{1}{2}(1 - \eta) \left( x_{,\xi}^A \theta_y^A - y_{,\xi}^A \theta_x^A + w_{,\xi}^A \right) + \frac{1}{2}(1 + \eta) \left( x_{,\xi}^C \theta_y^C - y_{,\xi}^C \theta_x^C + w_{,\xi}^C \right) \tag{8.87}$$

Sustituyendo los valores de los giros, derivadas de las coordenadas y deformación en función de sus valores nodales se obtiene:

$$\begin{aligned} \gamma_\xi = \frac{1}{2}(1-\eta) \left( x_{,\xi}^A \left( \frac{\theta_{3y} + \theta_{4y}}{2} \right) - y_{,\xi}^A \left( \frac{\theta_{3x} + \theta_{4x}}{2} \right) + \left( \frac{W_4 - W_3}{2} \right) \right) \\ + \frac{1}{2}(1+\eta) \left( x_{,\xi}^C \left( \frac{\theta_{1y} + \theta_{2y}}{2} \right) - y_{,\xi}^C \left( \frac{\theta_{1x} + \theta_{2x}}{2} \right) + \left( \frac{W_1 - W_2}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (8.88)$$

Reordenando términos y agrupando según los distintos grados de libertad se obtiene:

$$\gamma_\xi = \sum N_{i,\xi} W_i - \sum N_{i,\xi} \xi_i y_{,\xi}^{M(i)} \theta_{xi} + \sum N_{i,\xi} \xi_i x_{,\xi}^{M(i)} \theta_{yi}$$

En esta expresión el índice  $M$  depende del índice  $i$ , según:  $M(i)=\{B, D, D, B\}$ .

Análogamente se obtiene en la otra dirección:

$$\gamma_\eta = \sum N_{i,\eta} W_i - \sum N_{i,\eta} \eta_i y_{,\eta}^{L(i)} \theta_{xi} + \sum N_{i,\eta} \eta_i x_{,\eta}^{L(i)} \theta_{yi} \quad (8.89)$$

El índice  $L$  es ahora:  $L(i)=\{C, C, A, A\}$ .

Las dos expresiones anteriores permiten poner la matriz de deformación de cortante sustitutiva en la forma explícita:

$$\bar{\mathbf{B}}_{Ci} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & -\sum N_{i,\xi} \xi_i y_{,\xi}^{M(i)} & \sum N_{i,\xi} \xi_i x_{,\xi}^{M(i)} \\ N_{i,\eta} & \sum N_{i,\eta} \eta_i y_{,\eta}^{L(i)} & \sum N_{i,\eta} \eta_i x_{,\eta}^{L(i)} \end{bmatrix} \quad (8.90)$$

### 8.11. ELEMENTO PLACA HÍBRIDO DE 4 NUDOS

Se considera un elemento placa de 4 nudos, en formulación Mindlin-Reissner. El campo de deformaciones en el plano medio de la placa se interpola según la ley habitual:

$$\begin{aligned} w = \sum N_i W_i & \quad \theta_x = \sum N_i \theta_{xi} & \quad \theta_y = \sum N_i \theta_{yi} & \quad (8.91) \\ \mathbf{w} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \end{aligned}$$

Las funciones de interpolación son las bilineales habituales:  $N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)$

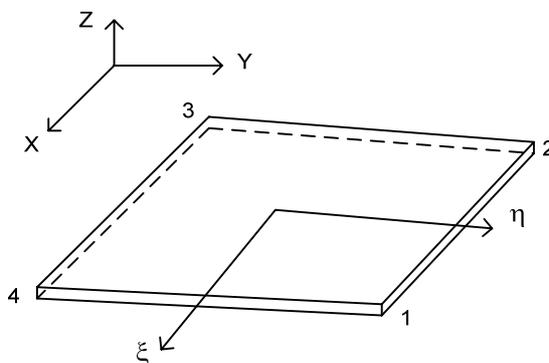


Figura 8.9 Elemento placa híbrido de 4 nudos

### 8.11.1 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en un punto cualquiera situado a una distancia  $z$  del plano medio vienen dadas por la ecuación (8.3). Los tres primeros términos de dichas deformaciones unitarias son lineales en  $z$  y están producidos por las curvaturas de flexión y alabeo, que se agrupan en un vector  $\kappa$ . Los dos últimos términos corresponden a las deformaciones transversales de cortante, que son constantes y se agrupan en un vector  $\gamma$ . De esta manera las deformaciones unitarias de un punto cualquiera son:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} z \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (8.92)$$

Se define el vector de deformaciones unitarias de la placa  $\bar{\epsilon}$  como la parte de  $\epsilon$  que no depende de  $z$ :

$$\bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (8.93)$$

#### 8.11.1.1 Esfuerzos

Los dos momentos flectores, el momento torsor y los dos esfuerzos cortantes se agrupan en el vector de esfuerzos resultantes de las tensiones  $\bar{\mathbf{m}}$ :

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8.94)$$

## 8.11.2 Campo interpolado de deformaciones unitarias

### 8.11.2.1 Curvaturas

Sustituyendo la interpolación de deformaciones en las expresiones de las 3 curvaturas se obtiene su expresión interpolada habitual en la teoría de Mindlin:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_F \boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} B_{F1} & B_{F2} & B_{F3} & B_{F4} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^e \quad (8.95)$$

Siendo:

$$\mathbf{B}_{Fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.96)$$

### 8.11.2.2 Deformaciones de cortante

Siguiendo el mismo método que en el elemento con campo de cortante impuesto, se impone un campo de deformación cortante con variación lineal en coordenadas locales (figura 8.8).

$$\gamma_\xi = \alpha_1 + \alpha_2 \eta \quad \gamma_\eta = \alpha_3 + \alpha_4 \xi \quad (8.97)$$

El campo de  $\gamma_\xi$  es variable linealmente en la dirección  $\eta$  y se puede ajustar con los valores de dicha deformación en los puntos A ( $\eta = -1$ ) y C ( $\eta = 1$ ). El campo  $\gamma_\eta$  es variable linealmente en la dirección  $\xi$  y se ajusta con los valores en los puntos B y D. Por lo tanto se emplea la misma matriz de funciones de interpolación de la deformación unitaria cortante ya empleada para el elemento con campo de cortante impuesto (ecuación (8.69)):

$$\boldsymbol{\gamma}_L = \mathbf{N}_\gamma \boldsymbol{\gamma}_L^P \quad (8.98)$$

Las 8 deformaciones cortantes en el sistema local en los puntos A, B, C, D se relacionan con las correspondientes en el sistema general mediante la jacobiana de la transformación, según la ecuación (8.70).

A su vez, las deformaciones cortantes en los 4 puntos se obtienen en función del campo de desplazamientos interpolado, mediante la expresión habitual, con la matriz  $\mathbf{B}_C$ , según la ecuación (8.71). La expresión de las matrices  $\mathbf{B}_C^M$   $M \in \{A, B, C, D\}$  que aparece en ella es:

$$\mathbf{B}_C^M = \left[ \mathbf{B}_{C1} \quad \mathbf{B}_{C2} \quad \mathbf{B}_{C3} \quad \mathbf{B}_{C4} \right]^M \quad \mathbf{B}_{Ci}^M = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix}^M \quad (8.99)$$

Agrupando todas las expresiones anteriores se puede expresar el campo de deformaciones cortantes (en el sistema local) en función de las deformaciones nodales:

$$\gamma_L = \mathbf{N}_\gamma \mathbf{J}^P \mathbf{B}_C^P \delta^e \quad (8.100)$$

El campo de deformación cortante impuesto en coordenadas generales es:

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbf{J}^{-1} \gamma_L \\ \gamma &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}_\gamma \mathbf{J}^P \mathbf{B}_C^P \delta^e = \bar{\mathbf{B}}_C \delta^e \end{aligned} \quad (8.101)$$

Esta expresión define la nueva matriz  $\bar{\mathbf{B}}_C$  propia de esta formulación, denominada matriz de deformación de cortante sustitutiva:

$$\bar{\mathbf{B}}_C = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}_\gamma \mathbf{J}^P \mathbf{B}_C^P \quad (8.102)$$

Su cálculo puede efectuarse numéricamente, aunque para el caso del elemento de 4 nudos, existen expresiones analíticas parciales de ella.

Agrupando las curvaturas y las deformaciones transversales se obtiene:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_F \\ \bar{\mathbf{B}}_C \end{bmatrix} \delta^e = \mathbf{B} \delta^e \quad (8.103)$$

### 8.11.3 Justificación de la interpolación de esfuerzos internos

#### 8.11.3.1 Interpolación de momentos

El campo de momentos supuesto dentro del elemento corresponde a un campo lineal en las coordenadas locales del elemento, que puede expresarse en función de unos parámetros de ajuste  $\bar{\alpha}$  en la forma:

$$\begin{Bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \dots \\ \bar{\alpha}_9 \end{Bmatrix} \quad (8.104)$$

Este campo de momentos en coordenadas locales se transforma a las coordenadas generales por medio de la matriz jacobiana de la transformación isoparamétrica:

$$\begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{yx} & M_y \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^0)^T \begin{bmatrix} M_\xi & M_{\xi\eta} \\ M_{\xi\eta} & M_\eta \end{bmatrix} \mathbf{J}^0 \quad (8.105)$$

La transformación se efectúa mediante una jacobiana constante  $\mathbf{J}^0$ , evaluada en el centro del elemento, con objeto de garantizar el cumplimiento del patch test.

$$\mathbf{J}^0 = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}_{\xi=\eta=0} = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (8.106)$$

El campo de momentos en el sistema cartesiano que se obtiene es:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (J_{11}^0)^2 \eta & (J_{21}^0)^2 \xi & (J_{11}^0)^2 \xi & (J_{21}^0)^2 \eta & 2J_{11}^0 J_{21}^0 \xi & 2J_{11}^0 J_{21}^0 \eta \\ 0 & 1 & 0 & (J_{12}^0)^2 \eta & (J_{22}^0)^2 \xi & (J_{12}^0)^2 \xi & (J_{22}^0)^2 \eta & 2J_{12}^0 J_{22}^0 \xi & 2J_{12}^0 J_{22}^0 \eta \\ 0 & 0 & 1 & J_{11}^0 J_{12}^0 \eta & J_{21}^0 J_{22}^0 \xi & J_{12}^0 J_{22}^0 \xi & J_{21}^0 J_{22}^0 \eta & A_J \xi & A_J \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_9 \end{Bmatrix} \quad (8.107)$$

Siendo  $A_J = J_{11}^0 J_{22}^0 + J_{12}^0 J_{21}^0$ . Los coeficientes  $\alpha_i$  del ajuste en el sistema cartesiano son combinación lineal de los coeficientes iniciales  $\bar{\alpha}_i$  y de los términos de  $\mathbf{J}^0$  y son por lo tanto independientes.

El campo de momentos interpolado debe satisfacer la ecuación de equilibrio, en sentido débil, con objeto de evitar el shear locking. Esto se cumple si se impone la condición de que el campo de momentos no acumule energía con cualquier estado de deformación no contenida en la interpolación de deformaciones supuesta, denominada deformación incompatible (Weissman y Taylor, 1990, 1992). Dicha condición es:

$$\int \mathbf{M}^T \boldsymbol{\kappa}_{in} dA = 0 \quad (8.108)$$

Siendo  $\boldsymbol{\kappa}_{in}$  las curvaturas producidas por las deformaciones incompatibles  $\mathbf{w}_{in}$ , cuyo valor es:

$$\boldsymbol{\kappa}_{in} = \partial_F \mathbf{w}_{in} \quad (8.109)$$

Donde a su vez el operador  $\partial_F$  relaciona las curvaturas con las deformaciones.

El cumplimiento de la ecuación de restricción anterior es sencillo, sin más que eliminar de la expresión de interpolación de momentos los términos afectados por los coeficientes  $\alpha_6$  a  $\alpha_9$ , dejando sólo un término en  $\xi$  y otro en  $\eta$  para cada momento, en la forma:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (J_{11}^0)^2 \eta & (J_{21}^0)^2 \xi \\ 0 & 1 & 0 & (J_{12}^0)^2 \eta & (J_{22}^0)^2 \xi \\ 0 & 0 & 1 & J_{11}^0 J_{12}^0 \eta & J_{21}^0 J_{22}^0 \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (8.110)$$

Este campo de momentos ha demostrado ser muy eficiente para el desarrollo de elementos finitos, tanto si se emplean campos de deformaciones incompatibles como en caso contrario, y es empleado en numerosas ocasiones.

### 8.11.3.2 Interpolación de cortantes

El campo de esfuerzos cortantes supuesto dentro del elemento corresponde a un campo lineal en las coordenadas locales:

$$\begin{Bmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}'_1 \\ \dots \\ \bar{\alpha}'_6 \end{Bmatrix} \quad (8.111)$$

Este campo de cortantes en coordenadas locales se transforma a las coordenadas generales por medio de la matriz jacobiana, evaluada en el centro del elemento, con objeto de garantizar el cumplimiento del patch test:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = (\mathbf{J}^0)^T \begin{Bmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \end{Bmatrix} \quad (8.112)$$

El campo de cortantes en el sistema cartesiano que se obtiene es:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & J_{11}^0 \eta & J_{21}^0 \xi & J_{11}^0 \xi & J_{21}^0 \eta \\ 0 & 1 & J_{12}^0 \eta & J_{22}^0 \xi & J_{12}^0 \xi & J_{22}^0 \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha'_1 \\ \dots \\ \alpha'_6 \end{Bmatrix} \quad (8.113)$$

Los coeficientes  $\alpha'_i$  del ajuste en el sistema cartesiano son combinación lineal de los coeficientes iniciales  $\bar{\alpha}'_i$  y de los términos de  $\mathbf{J}^0$  y son por lo tanto independientes.

El campo de cortantes interpolado debe satisfacer la ecuación de equilibrio, en sentido débil, con objeto de evitar el shear locking. Esto se cumple si se impone la condición de que el campo de cortantes no acumule energía con cualquier estado de deformación incompatible, no contenida en la interpolación de deformaciones supuesta. Dicha condición es:

$$\int \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\gamma}_{in} dA = 0 \quad (8.114)$$

Siendo  $\boldsymbol{\gamma}_{in}$  las deformaciones cortantes producidas por las deformaciones incompatibles  $\mathbf{w}_{in}$  y cuyo valor se obtiene aplicando el operador  $\partial_C$  sobre las deformaciones:

$$\boldsymbol{\gamma}_{in} = \partial_C \mathbf{w}_{in} \quad (8.115)$$

El cumplimiento de la ecuación de restricción anterior es sencillo, sin más que eliminar de la expresión de interpolación de cortantes los términos afectados por los

coeficientes  $\alpha'_5$  y  $\alpha'_6$ , dejando sólo un término en  $\xi$  y otro en  $\eta$  para cada cortante, en la forma:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & J_{11}^0 \eta & J_{21}^0 \xi \\ 0 & 1 & J_{12}^0 \eta & J_{22}^0 \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha'_1 \\ \dots \\ \alpha'_4 \end{Bmatrix} \quad (8.116)$$

#### 8.11.4 Interpolación de los esfuerzos interiores

El campo de esfuerzos en el interior del elemento  $\bar{\mathbf{m}}$  se interpola agrupando las dos interpolaciones de momentos y cortantes anteriores, de acuerdo con la ley lineal siguiente:

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{S}\beta \quad (8.117)$$

Siendo  $\mathbf{S}$  una matriz de tamaño  $5 \times 9$  y  $\beta$  un vector con los 9 parámetros del ajuste.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11}^0 J_{11}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{21}^0 (\xi - \bar{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & J_{12}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{22}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & J_{11}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & J_{11}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \end{bmatrix} \quad (8.118)$$

En esta expresión los términos  $J_{ij}^0$  son los valores de la matriz jacobiana evaluada en el centro del elemento. Su presencia es debida a la transformación de los esfuerzos desde el sistema local del elemento al sistema general. El empleo de una jacobiana constante, evaluada en el centro del elemento, permite el cumplimiento del patch test (Gruttmann y Wagner, 2004).

Las constantes  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  se introducen en la ley de interpolación con objeto de obtener matrices desacopladas y representan las coordenadas del centro de gravedad del elemento:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A} \int \xi dA = \frac{1}{A} \int \xi J d\xi d\eta \quad \bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta dA = \frac{1}{A} \int \eta J d\xi d\eta \quad (8.119)$$

El área del elemento se obtiene empleando la expresión habitual del determinante de la jacobiana:

$$A = \int dA = \int_{-1}^{+1} J d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} (j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta) d\xi d\eta = 4j_0$$

El valor de las constantes es:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A} \int \xi dA = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \xi J d\xi d\eta = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \xi (j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta) d\xi d\eta = \frac{j_1}{3j_0}$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta dA = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \eta J d\xi d\eta = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \eta (j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta) d\xi d\eta = \frac{j_2}{3j_0}$$

### 8.11.5 Ecuación de equilibrio

Al ser los campos de deformaciones  $\mathbf{w}$  y de esfuerzos  $\bar{\mathbf{m}}$  independientes, la ecuación de equilibrio se obtiene empleando un principio variacional, basado en la funcional de Hellinger-Reissner. Si el campo de desplazamientos contiene únicamente desplazamientos compatibles  $\mathbf{w}$  (como es el caso), la expresión de dicha funcional es:

$$\Pi_{HR}(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{m}}) = \int_A \left( -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{m}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{m}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{m}} \right) dA - \int_A \mathbf{w}^T \mathbf{q} dA - \int_L \mathbf{w}^T \mathbf{q}_L dL \quad (8.120)$$

donde  $\mathbf{q}$  son las fuerzas actuantes sobre la superficie de la placa, de las cuales sólo la perpendicular a ella es relevante y  $\mathbf{q}_L$  son las fuerzas distribuidas por unidad de longitud sobre el lado de la placa.  $L$  es el perímetro del contorno lateral de la placa.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_Z & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{q}_L = \begin{bmatrix} q_{LZ} & m_{LX} & m_{LY} \end{bmatrix}^T$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es la matriz constitutiva del estado elástico lineal, cuya inversa proporciona las deformaciones unitarias producidas por los esfuerzos interiores  $\bar{\mathbf{m}}$ .

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_F & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_C \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_F = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_C = kGh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.121)$$

La condición estacionaria de la funcional anterior es:

$$\delta \Pi_{HR} = \int_A \left[ -\delta \bar{\mathbf{m}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{m}} + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{m}} + \delta \bar{\mathbf{m}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dA - \int_A \delta \mathbf{w}^T \mathbf{q} dA - \int_L \delta \mathbf{w}^T \mathbf{q}_L dL = 0 \quad (8.122)$$

Sustituyendo las expresiones de los campos de deformaciones unitarias y esfuerzos interpolados y de sus variaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR} = & \int_A \left[ -\delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} + \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} + \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{S}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \right] dA \\ & - \int_A \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA - \int_L \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL = 0 \end{aligned} \quad (8.123)$$

Agrupando los términos correspondientes a los coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  y los correspondientes a las deformaciones de los nudos se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} = \delta\beta^T & \left[ -\int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} dA \beta + \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{B} dA \delta^e \right] + \\ \delta\delta^{eT} & \left[ \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{S} dA \beta - \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA - \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL \right] = 0 \end{aligned} \quad (8.124)$$

Definiendo las matrices:

$$\mathbf{H} = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} dA \quad \mathbf{G} = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{B} dA \quad (8.125)$$

y los vectores de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{P}_q = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA \quad \mathbf{P}_L = \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL \quad (8.126)$$

la condición estacionaria se puede poner en forma compacta:

$$\delta\Pi_{HR} = \delta\beta^T \left[ -\mathbf{H} \beta + \mathbf{G} \delta^e \right] + \delta\delta^{eT} \left[ \mathbf{G}^T \beta - \mathbf{P}_q - \mathbf{P}_L \right] = 0 \quad (8.127)$$

Para que esta condición se cumpla ante cualquier variación de las deformaciones nodales y de los coeficientes de la interpolación de esfuerzos  $\beta$ , se debe cumplir:

$$\begin{aligned} -\mathbf{H} \beta + \mathbf{G} \delta^e &= 0 \\ \mathbf{G}^T \beta - \mathbf{P}_q - \mathbf{P}_L &= 0 \end{aligned} \quad (8.128)$$

Estas son las ecuaciones de equilibrio del elemento y permiten obtener los valores de los distintos parámetros  $\delta^e$  y  $\beta$ . De la primera de ellas, se puede obtener directamente el valor de los coeficientes  $\beta$  de la interpolación de esfuerzos, sin necesidad de ensamblarlas con los restantes elementos:

$$\beta = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \delta^e \quad (8.129)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento, que define su matriz de rigidez:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \delta^e = \mathbf{P}_q + \mathbf{P}_L \quad (8.130)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (8.131)$$

## 8.12. EJEMPLOS

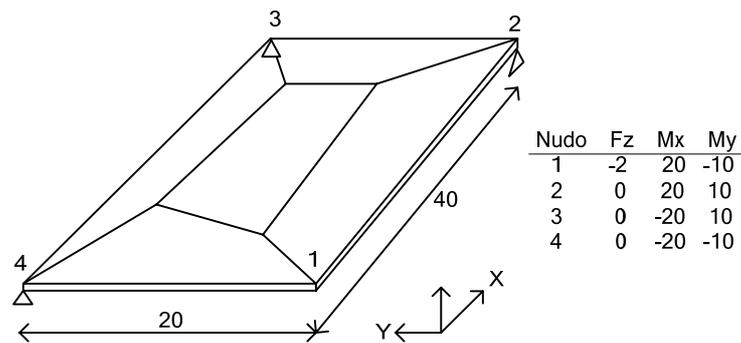
### 8.12.1 Patch test

Se analiza una placa rectangular de dimensiones 40 x 20 y espesor  $h=0.1$ , apoyada en tres esquinas. Está sometida a una carga puntual vertical en la esquina libre, así como a un conjunto de momentos aplicados en las 4 esquinas que hacen que en su

interior el campo de momentos sea uniforme y de valor  $M_x=M_y=M_{xy}=1$ . El material tiene  $E=10^6$  y  $\nu=0.3$ .

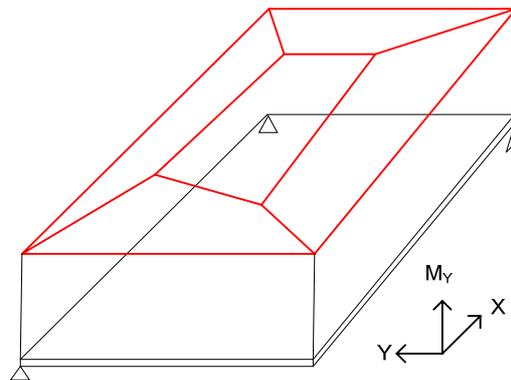
La solución analítica para la flecha en la esquina libre es  $w=-12.48$ .

La placa se malla mediante 5 elementos, con un mallado irregular de elementos distorsionados, como muestra la figura 8.10.



**Figura 8.10 Modelo para el patch test.**

Se han empleado elementos con campo de cortante impuesto e híbridos y se ha comprobado que ambos elementos representan con exactitud los campos de momento constante, como muestra la figura 8.11. Además ambos elementos suministran también un valor muy preciso de la flecha en la esquina libre, con errores inferiores al 0.006 %.



**Figura 8.11 Momento flector  $M_y$  constante obtenido en el patch test.**

### 8.12.2 Influencia del espesor de la placa

Se analiza una placa cuadrada apoyada en su contorno, de espesor uniforme, sometida a una carga puntual en el centro. Se discretiza con un mallado regular de 8 x 8 elementos cuadrados de 4 nudos, y se emplean 4 formulaciones distintas:

Formulación de Mindlin-Reissner estándar, con integración de 2 x 2 puntos.

Idem, con integración de la rigidez a cortante reducida a 1 punto.

Elemento con campo de cortante impuesto.

Elemento híbrido.

En todos los casos se hace variar el espesor de la placa desde una relación  $h/L=0.01$  hasta  $h/L=0.20$  a fin de observar el comportamiento del elemento en el límite de la teoría de Kirchhoff y ver si se presenta el fenómeno de bloqueo por cortante.

La figura 8.12 muestra el valor de la relación entre la flecha obtenida con el modelo de elementos finitos y la flecha teórica de la teoría de Kirchhoff, frente a la esbeltez de la placa  $h/L$ . Se observa que el elemento con integración completa 2 x 2 presenta un fenómeno de shear locking clarísimo, no pudiéndose adaptar a la solución de Kirchhoff para espesores muy pequeños. Sin embargo el elemento con integración reducida converge a la solución de Kirchhoff para espesores muy pequeños.

Los elementos con campo de cortante impuesto e híbrido muestran un comportamiento excelente, muy similar entre ellos, representando muy bien la deformación en todo el rango de espesores.

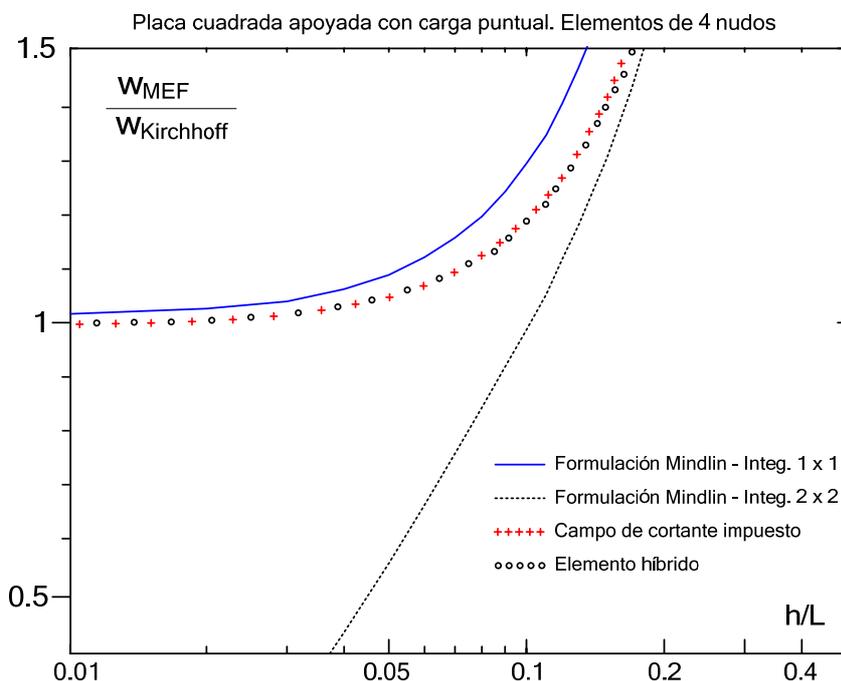


Figura 8.12. Resultados para la placa apoyada con carga puntual.

### 8.12.3 Placa apoyada con carga uniforme

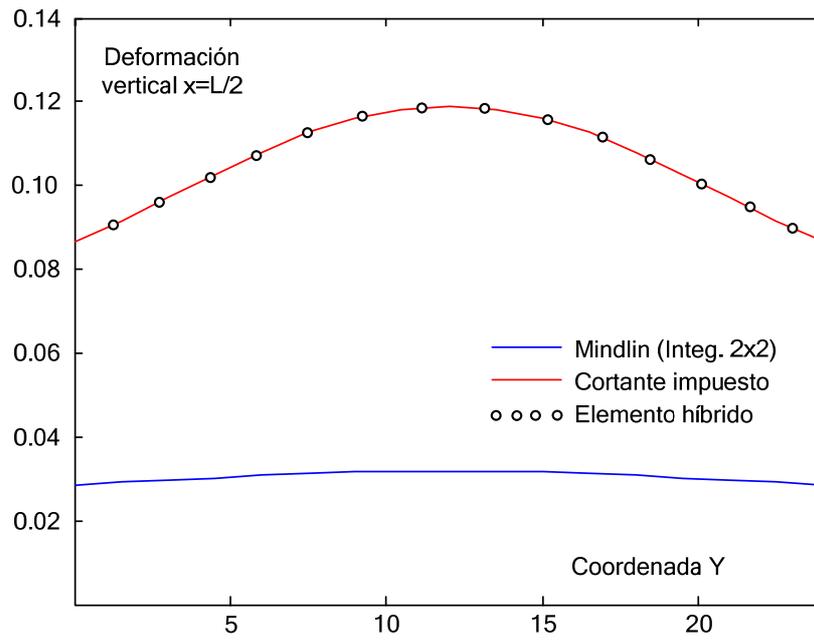
En este ejemplo, extraído de la bibliografía (Gruttmann y Wagner, 2004), se analiza una placa cuadrada de lado  $L=24$ , apoyada en sus 4 esquinas, con espesor uniforme

$h=0.375$ , sometida a una carga uniforme  $q=0.03125$ . El material tiene  $E=430000$  y  $\nu=0.38$ . Se discretiza con un mallado regular de  $16 \times 16$  elementos cuadrados de 4 nudos, y se emplean 4 formulaciones distintas: la formulación de Mindlin-Reissner estándar, con integración de  $2 \times 2$  puntos y con integración de la rigidez a cortante reducida a 1 punto, el elemento con campo de cortante impuesto y el elemento híbrido.

La tabla 8.1 muestra el valor de la flecha en el centro de la placa y en el centro del lado, para las diversas formulaciones. La figura 8.13 muestra la variación de la deformación vertical de la placa a lo largo del eje central de la misma ( $x=L/2$ ). Nuevamente se observa que los elementos con campo de cortante impuesto e híbrido muestran un comportamiento excelente. El elemento Mindlin estándar con integración completa  $2 \times 2$  presenta bloqueo por cortante y proporciona una deformación incorrecta. El empleo de la integración reducida aparentemente mejora algunos resultados, pero la realidad es que aparecen fenómenos de modos de deformación espurios, que provocan fuertes oscilaciones en la deformación vertical en el interior de la placa.

Formulación	Flecha en el centro de la placa	Flecha en el centro del lado
Mindlin- Reissner, integración $2 \times 2$	0.031917	0.028548
Mindlin- Reissner, integración reducida	0.073322	0.031244
Campo de cortante impuesto	0.118998	0.086501
Híbrido	0.118622	0.086074
Solución exacta	0.122531	0.090843

**Tabla 8.1 Deformación de la placa cuadrada apoyada en sus esquinas, con carga uniforme.**



**Figura 8.13** Deformación vertical del eje central ( $x=L/2$ ) de la placa apoyada en las 4 esquinas, con carga uniforme

# Flexión de vigas planas

## 9.1. INTRODUCCIÓN

La flexión de vigas puede estudiarse por el Método de los Elementos Finitos como un problema más de elasticidad. Para simplificar su estudio, no se consideran la deformación ni el esfuerzo axial, que se sabe están desacoplados de la flexión en el caso habitual de pequeñas deformaciones.

Existen dos suposiciones diferentes relativas a la forma de deformación de la viga:

- Teoría clásica de flexión de vigas, o teoría de Euler. Se supone que las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformar se mantienen rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado deformado (hipótesis de Navier). Con esta hipótesis y suponiendo pequeñas deformaciones, se cumple que el giro que sufre una sección recta de la viga es igual a la pendiente de la curva deformada elástica. En términos energéticos esta hipótesis corresponde a despreciar la energía de esfuerzo cortante.
- Teoría de vigas con energía de esfuerzo cortante, o teoría de Timoshenko, en la que se supone que las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformar se mantienen rectas en el estado deformado, pero no perpendiculares a la fibra neutra. Con esta hipótesis el giro de la sección recta no es igual a la pendiente de la deformada elástica, y la diferencia entre ellas corresponde a la distorsión debida al esfuerzo cortante.

## 9.2. RESUMEN DE LA TEORÍA CLÁSICA DE FLEXIÓN DE VIGAS

### 9.2.1 Deformaciones

Si se denomina  $v(x)$  a la deformación vertical del centro de gravedad  $G$  de la sección, las deformaciones de un punto  $P$  situado a una distancia  $y$  de  $G$  son (figura 9.1):

$$u_P = -\theta y = -\frac{dv}{dx} y \quad (9.1)$$

$$v_P = v \quad (9.2)$$

### 9.2.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en el punto P son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = -\frac{d^2 v}{dx^2} y \quad (9.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = 0 \quad (9.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \quad (9.5)$$

El material está en un estado unidimensional de deformación unitaria, sometido sólo a una deformación unitaria longitudinal  $\varepsilon_x$ , que en adelante se denominará simplemente  $\varepsilon$ . No aparece ninguna deformación unitaria de cortadura  $\gamma$ , con lo que esta teoría no considera la energía debida al esfuerzo cortante.

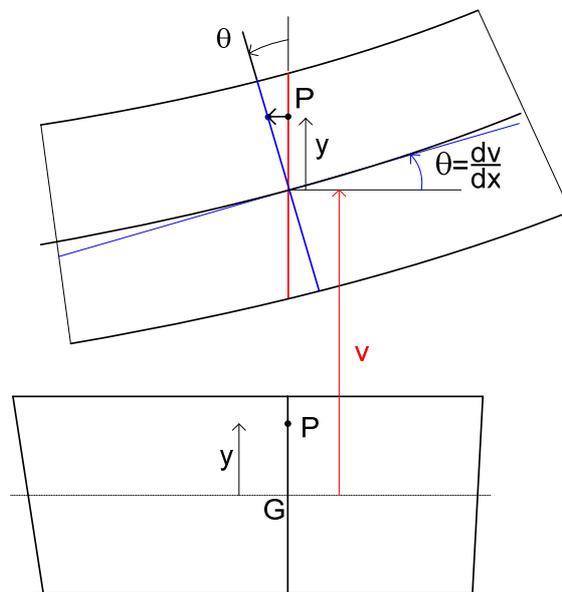


Figura 9.1 Deformaciones en vigas planas. Teoría clásica

### 9.2.3 Ecuación constitutiva

Suponiendo un material elástico lineal la relación tensión – deformación unitaria es:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (9.6)$$

Sustituyendo el valor de la deformación unitaria se obtiene la expresión de la tensión en el punto P:

$$\sigma = E\left(-\frac{d^2v}{dx^2}y - \varepsilon_0\right) \quad (9.7)$$

#### 9.2.4 Distribución de temperatura

Al no considerarse el esfuerzo axial, la única distribución de temperatura que puede admitir la viga es una variación lineal en su sección, desde un valor  $T_s$  en la cara superior hasta un valor  $-T_s$  en la cara inferior. El gradiente de esta distribución es:

$$T_g = \frac{T_s - (-T_s)}{h} = \frac{2T_s}{h} \quad (9.8)$$

siendo  $h$  el canto de la viga. La distribución de temperaturas queda entonces como:

$$T = yT_g \quad (9.9)$$

Con esto la distribución de deformaciones unitarias térmicas es:

$$\varepsilon_0 = \alpha T = \alpha y T_g \quad (9.10)$$

#### 9.2.5 Ecuaciones de equilibrio

El equilibrio de un elemento diferencial lleva a la siguiente ecuación de equilibrio:

$$q = -\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} + EI \alpha T_g \right) \quad (9.11)$$

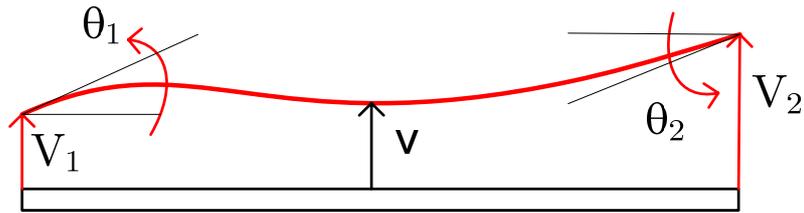
Al ser esta ecuación diferencial de orden 4, requiere el empleo de funciones de interpolación con continuidad  $C^1$  entre los elementos.

### 9.3. TEORÍA CLÁSICA. RESOLUCIÓN POR EL MEF

#### 9.3.1 Interpolación de deformaciones

Se emplean cuatro grados de libertad en el elemento: la deformación y el giro en cada nudo extremo. De esta forma se garantiza la compatibilidad de la deformación lateral  $v$  y su derivada primera (el giro) en los extremos de la viga. Los vectores de grados de libertad y de fuerzas nodales son:

$$\delta^e = \left[ V_1 \quad \theta_1 \quad V_2 \quad \theta_2 \right]^T \quad \mathbf{P}^e = \left[ P_{1Y} \quad M_1 \quad P_{2Y} \quad M_2 \right]^T \quad (9.12)$$



**Figura 9.2 Elemento viga plana a flexión**

Con cuatro grados de libertad, se puede emplear una ley cúbica de interpolación de deformaciones:

$$v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (9.13)$$

Particularizando esta ley de interpolación a los valores de los cuatro grados de libertad, y agrupando las cuatro ecuaciones obtenidas en forma matricial se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (9.14)$$

De este sistema se pueden calcular los cuatro coeficientes  $a_i$  en función de los grados de libertad. Sustituyéndolos en la ecuación (9.13) y reagrupando los términos de los diferentes grados de libertad se obtiene la ley de interpolación de la deformación lateral:

$$v = N_1V_1 + N_2\theta_1 + N_3V_2 + N_4\theta_2 = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (9.15)$$

Las cuatro funciones de interpolación son:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (9.16)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (9.17)$$

siendo  $\xi$  una coordenada local normalizada que vale -1 en el nudo inicial de la viga, y +1 en el nudo final, con lo que la interpolación de coordenadas es lineal:

$$x = x_1 \left( \frac{1 - \xi}{2} \right) + x_2 \left( \frac{1 + \xi}{2} \right) \quad (9.18)$$

Se cumple que el jacobiano de la transformación es  $dx/d\xi = L/2$ , siendo  $L$  la longitud del elemento.

### 9.3.2 Matriz B

Sustituyendo la ley de interpolación del desplazamiento lateral  $v$  en la expresión de la deformación unitaria se obtiene:

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2v}{dx^2}y = -y \left( \frac{d^2N_1}{dx^2}V_1 + \frac{d^2N_2}{dx^2}\theta_1 + \frac{d^2N_3}{dx^2}V_2 + \frac{d^2N_4}{dx^2}\theta_2 \right) \quad (9.19)$$

Esta expresión define la matriz  $\mathbf{B}$  como:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \delta^e \quad (9.20)$$

$$\mathbf{B} = -y \begin{bmatrix} \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_2}{dx^2} & \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

Las derivadas de las funciones de interpolación son:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{2}{L} \quad (9.22)$$

$$\frac{d^2N_i}{dx^2} = \frac{d^2N_i}{d\xi^2} \frac{d\xi}{dx} \frac{2}{L} = \frac{d^2N_i}{d\xi^2} \frac{4}{L^2} \quad (9.23)$$

La matriz  $\mathbf{B}$  puede ponerse como:

$$\mathbf{B} = -y \begin{bmatrix} \frac{d^2N_1}{d\xi^2} & \frac{d^2N_2}{d\xi^2} & \frac{d^2N_3}{d\xi^2} & \frac{d^2N_4}{d\xi^2} \end{bmatrix} \frac{4}{L^2} = -y \mathbf{B}_s \quad (9.24)$$

En esta expresión se han separado los términos que dependen sólo de la coordenada longitudinal  $\xi$ , para lo que se ha introduciendo la matriz:

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{L^2} & \frac{3\xi-1}{L} & \frac{-6\xi}{L^2} & \frac{3\xi+1}{L} \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

### 9.3.3 Matriz de rigidez

Su expresión es la habitual para cualquier elemento finito. Sustituyendo el diferencial de volumen se obtiene:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} b dx dy \quad (9.26)$$

siendo  $b(y)$  la anchura de la viga. Al estar el material en un estado unidimensional de tensiones, la matriz elástica es el módulo de elasticidad  $E$ . Sustituyendo el valor de  $\mathbf{B}$  se obtiene:

$$\mathbf{K} = \iint E \mathbf{B}^T \mathbf{B} b dx dy = \int E \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s \left( \int by^2 dy \right) dx \quad (9.27)$$

En la ecuación anterior se identifica el momento de inercia de la sección  $I$ . Suponiendo que el producto  $EI$  es constante e introduciendo el cambio de coordenadas  $x/\xi$  se obtiene:

$$\mathbf{K} = EI \int \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s dx = EI \int \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s \left(\frac{L}{2}\right) d\xi \quad (9.28)$$

Cada uno de los términos de la matriz de rigidez tiene la expresión:

$$K_{ij} = EI \int_{-1}^{+1} \left(\frac{4}{L^2}\right)^2 \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \frac{d^2 N_j}{d\xi^2} \left(\frac{L}{2}\right) d\xi \quad (9.29)$$

Integrando se obtiene:

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

Esta expresión corresponde a la matriz de rigidez del elemento viga plana utilizada en el análisis de estructuras reticulares.

### 9.3.4 Fuerzas aplicadas sobre el elemento

En las vigas las fuerzas se definen habitualmente como fuerzas distribuidas por unidad de longitud de la viga  $q$ . En este caso, el vector de fuerzas nodales equivalentes se puede poner como:

$$\mathbf{P}_L = \int \mathbf{N}^T q dx \quad (9.31)$$

donde  $q$  se considera positiva si actúa en la dirección de la deformación  $v$ . Las fuerzas obtenidas mediante esta expresión son ya directamente fuerzas actuantes sobre los nudos, y su sentido positivo corresponde al de los grados de libertad del nudo.

Si la fuerza exterior es uniforme, que es el caso más habitual,  $q$  es constante, y la expresión de las fuerzas nodales equivalentes resulta ser:

$$\mathbf{P}_L = q \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \left(\frac{L}{2}\right) d\xi = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix} \quad (9.32)$$

que lógicamente coincide con las fuerzas de empotramiento perfecto de una viga.

### 9.3.5 Fuerzas debidas a las temperaturas

Su expresión es:

$$\mathbf{P}_T = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv \quad (9.33)$$

Sustituyendo el valor de las deformaciones unitarias de origen térmico dado por (9.10), la matriz elástica  $\mathbf{D}$  por  $E$  y el diferencial de volumen se obtiene:

$$\mathbf{P}_T = \int (-y) \mathbf{B}_s^T E \alpha y T_g b dx dy \quad (9.34)$$

En el integrando se identifica el momento de inercia de la sección, con lo que obtiene:

$$\mathbf{P}_T = - \int_{-1}^{+1} EI \alpha T_g \mathbf{B}_s^T \left( \frac{L}{2} \right) d\xi \quad (9.35)$$

Suponiendo que las propiedades de la viga y la distribución de temperaturas no dependen de  $x$ , se obtiene:

$$\mathbf{P}_T = \begin{Bmatrix} P_{1Y} \\ M_1 \\ P_{2Y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ EI \alpha T_g \\ 0 \\ -EI \alpha T_g \end{Bmatrix} \quad (9.36)$$

Esta expresión coincide con la obtenida para las fuerzas de empotramiento perfecto en el método de rigidez, pero con el signo cambiado. Ello es debido a que el vector de fuerzas aquí obtenido corresponde a las fuerzas nodales equivalentes aplicadas ya en los nudos de la discretización de elementos finitos. Sin embargo, en el método de rigidez se obtienen las fuerzas actuantes sobre la barra en la fase de empotramiento perfecto, que después deben ser aplicadas sobre los nudos, cambiándolas de signo.

## 9.4. FLEXIÓN DE VIGAS CON ENERGÍA DE CORTANTE. TEORÍA DE TIMOSHENKO

En esta teoría no se considera que las secciones rectas perpendiculares al eje de la viga se mantengan perpendiculares a dicho eje en el estado deformado. Ello origina que aparezcan una tensión y una deformación unitaria cortantes no nulas en la sección de la viga, y en consecuencia se acumule energía debida a ellas.

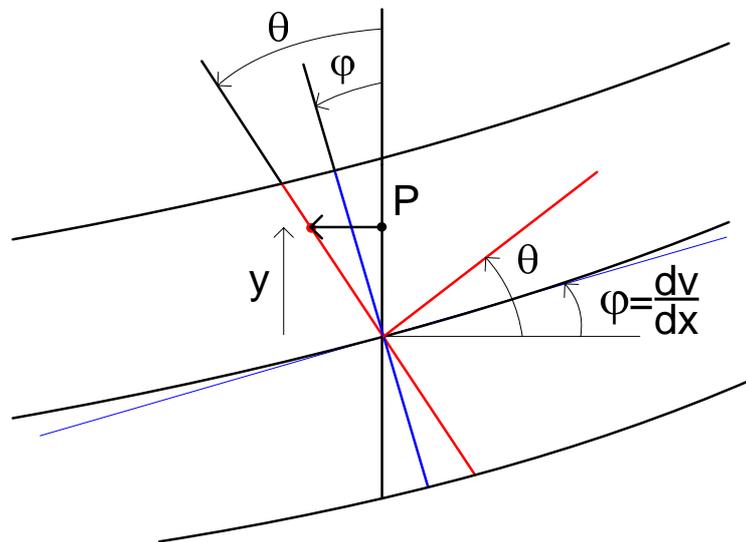
### 9.4.1 Campo de desplazamientos

Las deformaciones de la sección recta de la viga son:

- Desplazamiento vertical  $v(x)$
- Giro de la sección  $\theta(x)$

Las deformaciones de un punto P, situado a una distancia  $y$  de la fibra neutra son (figura 9.3):

- Desplazamiento vertical  $v(x)$
- Desplazamiento horizontal  $u = -y \theta$



**Figura 9.3** Deformaciones en una viga plana. Teoría de Timoshenko

#### 9.4.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en el punto P son:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx} \quad (9.37)$$

$$\varepsilon_y = 0 \quad (9.38)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\theta + \frac{dv}{dx} \quad (9.39)$$

En cada punto de la sección hay dos deformaciones unitarias: una de deformación axial y otra de cortadura vertical (que no era predicha por la teoría clásica).

Matricialmente se pueden poner como:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -y \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \partial \mathbf{u} \quad (9.40)$$

El orden de derivación del operador  $\partial$ , que pasa de las deformaciones  $\mathbf{u}$  a las deformaciones unitarias  $\varepsilon$  es en este caso 1, mientras que en la teoría clásica es 2.

### 9.4.3 Ecuación constitutiva. Estado de tensiones

En cualquier punto de la viga existen dos tensiones: una tensión simple  $\sigma_x$  asociada a la deformación unitaria axial correspondiente y una tensión de cortadura simple  $\sigma_{xy}$  asociada a la distorsión de cortadura vertical. Suponiendo un material elástico lineal, la relación con las deformaciones unitarias correspondientes es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (9.41)$$

### 9.4.4 Funciones de interpolación

Se requieren funciones con continuidad  $C^0$ , pues el orden de derivación de las deformaciones para obtener las deformaciones unitarias es 1 (ver (9.40)). Se interpolan de la misma forma las dos incógnitas del problema:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ \dots \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (9.42)$$

Las funciones de interpolación se definen en función de una coordenada  $\xi$  adimensional, que varía entre -1 en el nudo inicial y +1 en el nudo final. Nótese que esta coordenada es diferente a la usada en la teoría clásica.

### 9.4.5 Matriz B

Su expresión es:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -y \frac{dN_1}{dx} & 0 & -y \frac{dN_2}{dx} & \dots \\ \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

Se puede dividir en dos partes, una para cada fila, de tal manera que la primera fila corresponde a la deformación unitaria axial, habitualmente denominada de flexión (subíndice F) y la segunda a la de cortadura (subíndice C).

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_F \\ \mathbf{B}_C \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

Las derivadas de las funciones de interpolación son:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_1}{d\xi} \frac{1}{J} \quad (9.45)$$

Siendo  $J$  el jacobiano de la transformación  $x/\xi$ . La parte de flexión de  $\mathbf{B}$  se puede poner:

$$\mathbf{B}_F = \frac{-y}{J} \left[ 0 \quad \frac{dN_1}{d\xi} \quad \left| \quad 0 \quad \frac{dN_2}{d\xi} \quad \left| \quad \dots \right. \right] = \frac{-y}{J} \mathbf{B}_{F1} \quad (9.46)$$

#### 9.4.6 Matriz de rigidez

Su expresión general es:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \begin{bmatrix} \mathbf{B}_F^T & \mathbf{B}_C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_F \\ \mathbf{B}_C \end{bmatrix} dv \quad (9.47)$$

$$\mathbf{K} = \int E \mathbf{B}_F^T \mathbf{B}_F dv + \int G \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C dv$$

El primer sumando es la rigidez debida a la energía de flexión y el segundo la debida al esfuerzo cortante. En el término debido a la energía de cortadura se introduce el factor de corrección por cortante  $k$ , a fin de tener en cuenta que la distribución de tensiones cortantes que se ha supuesto es uniforme, cuando en realidad es variable. La deducción del valor de este coeficiente se efectúa en el punto siguiente.

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}_{F1}^T \mathbf{B}_{F1} \frac{Ey^2}{J^2} b J d\xi dy + \int \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C G k A dx \quad (9.48)$$

Efectuando la integral en  $y$ , la expresión final queda:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}_{F1}^T \mathbf{B}_{F1} \frac{EI}{J} d\xi + \int \mathbf{B}_C^T \mathbf{B}_C G k A J d\xi \quad (9.49)$$

El primer término se denomina habitualmente rigidez a flexión y el segundo rigidez a cortante. Nótese que debido a la estructura de la matriz  $\mathbf{B}_F$  el primer término, que es debido a la energía de flexión, sólo aporta rigidez en los grados de libertad de giro  $\theta$ , y no en los de deformación  $V$ . El segundo término aporta rigidez en todos los grados de libertad.

#### 9.4.7 Factor de rigidez a cortadura

La densidad de energía debida a la tensión y deformación de cortante predicha por esta teoría es:

$$U_{0cort} = \frac{1}{2} \sigma_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^2}{2G} \quad (9.50)$$

Integrando al área de la viga se obtiene la energía acumulada por unidad de longitud, debida a la deformación de cortadura:

$$U_{Lcor} = \int U_{0cor} dA = \int \frac{\sigma_{xy}^2}{2G} dA \quad (9.51)$$

Como la tensión cortante es constante en toda la sección de la viga, la integral a la sección puede ponerse fácilmente en función del esfuerzo cortante existente en la sección  $Q$  (que es la resultante de todas las tensiones cortantes  $Q = \sigma_{xy}A$ ).

$$U_{Lcor} = \frac{\sigma_{xy}^2 A}{2G} = \frac{Q^2}{2GA} \quad (9.52)$$

La distribución de tensiones cortantes exacta, empleando la teoría del esfuerzo cortante es:

$$\tau^{ex} = \frac{Q\bar{A}}{bI} \quad (9.53)$$

Siendo  $Q$  el esfuerzo cortante,  $\bar{A}$  el momento estático del área situada entre el punto donde se calcula la tensión y el exterior de la sección de la viga,  $b$  el ancho de la sección en el punto donde se calcula la tensión cortante e  $I$  el momento de inercia de la sección respecto de su centro de gravedad.

La energía acumulada por unidad de longitud debida a esta tensión es:

$$U_{Lcort} = \int \frac{1}{2} \tau^{ex} \gamma^{ex} dA = \int \frac{\tau^{ex}}{2G} dA = \frac{Q^2}{2GI^2} \int \frac{\bar{A}^2}{b^2} dA \quad (9.54)$$

Comparando esta expresión con el valor de la energía predicho por esta teoría, se observa que entre ambos valores hay un factor de valor:

$$k = \frac{A}{I^2} \int \frac{\bar{A}^2}{b^2} dA \quad (9.55)$$

Este es el valor que se ha introducido en la expresión de la matriz de rigidez debida al cortante, a fin de igualar la energía acumulada al valor exacto. Su valor es fácilmente calculable para las secciones más típicas. Para una sección rectangular resulta ser de 6/5, y para una circular maciza es de 10/9.

#### 9.4.8 Elemento de dos nudos

Las funciones de interpolación para este elemento son lineales:

$$N_1 = (1 - \xi)/2 \quad N_2 = (1 + \xi)/2 \quad (9.56)$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \quad (9.57)$$

El jacobiano es:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum \frac{dN_i}{d\xi} x_i = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{L}{2} \quad (9.58)$$

Las matrices  $\mathbf{B}$  son:

$$\mathbf{B}_{F1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9.59)$$

$$\mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2J} & -\frac{1-\xi}{2} & \frac{1}{2J} & -\frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

La matriz de rigidez debida a la flexión es:

$$\mathbf{K}_F = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.61)$$

La matriz de rigidez debida al cortante es:

$$\mathbf{K}_C = \frac{GAk}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 1 & -\frac{2}{L} & 1 \\ 1 & \frac{2L}{3} & -1 & \frac{L}{3} \\ -\frac{2}{L} & -1 & \frac{2}{L} & -1 \\ 1 & \frac{L}{3} & -1 & \frac{2L}{3} \end{bmatrix} \quad (9.62)$$

#### 9.4.8.1 Bloqueo por cortante

De la misma manera que se ha expuesto para la flexión de placas planas, las vigas en formulación de Timoshenko pueden manifestar el problema del bloqueo por cortante. Para estudiarlo se toma como ejemplo una viga en voladizo con una carga puntual  $P$  en el extremo (figura 9.4). Se modeliza con un elemento de dos nudos, empotrado en el nudo 1 y libre en el 2.

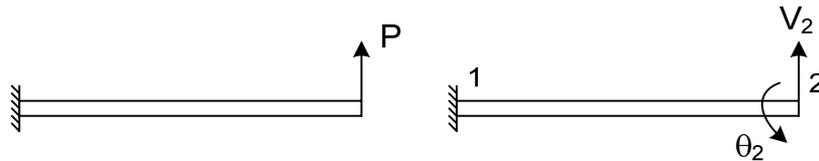


Figura 9.4 Modelo de viga en voladizo

La ecuación de equilibrio, para los dos grados de libertad del nudo 2, es:

$$\begin{bmatrix} \frac{GAk}{L} & \frac{-GAk}{2} \\ \frac{-GAk}{2} & \left( \frac{-GAkL}{3} + \frac{EI}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.63)$$

Para simplificar las expresiones se adopta  $E = 2G$  (que corresponde a  $\nu = 0$ ) y  $k=1$ . Además se sustituyen:

$$I = Ar^2 \quad \lambda = L/r \quad (9.64)$$

siendo  $r$  el radio de giro de la sección y  $\lambda$  la esbeltez de la viga. La deformación vertical que se obtiene del sistema (9.63) es:

$$V_2 = \frac{4PL(\lambda^2 + 6)}{GA(\lambda^2 + 24)} \quad (9.65)$$

La solución exacta, obtenida por integración analítica de la ecuación de la elástica, según la teoría de Timoshenko, es:

$$V_{ex} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GAk} \quad (9.66)$$

Con las simplificaciones anteriores esta solución exacta es:

$$V_{ex} = \frac{PL}{GA} \left( \frac{\lambda^2}{6} + 1 \right) \quad (9.67)$$

Se comprueba que:

- Si  $\lambda=0$ , ambas soluciones coinciden.
- A medida que  $\lambda$  crece, las dos soluciones se separan cada vez más. La exacta crece parabólicamente, mientras que la obtenida con el modelo de un elemento finito se estabiliza, tendiendo a un valor:

$$V_{MEF(\lambda \rightarrow \infty)} = \frac{4PL}{GA} \quad (9.68)$$

Este valor es claramente inferior al valor real. Este fenómeno se denomina *bloqueo por cortante* y es debido a que la formulación anterior sobrestima la rigidez a cortante. Este efecto aparece de forma clara en el elemento de dos nudos pero no se manifiesta casi en el de tres nudos.

#### 9.4.8.2 Integración reducida

El problema del bloqueo por cortante se origina por la presencia del término  $\lambda^2$  en el denominador de la expresión de la flecha (9.65). Para evitar este problema una solución simple consiste sencillamente en evaluar la matriz de rigidez a cortante suponiendo  $\xi = 0$ . Un ejemplo aclara el origen de esta suposición. Sea una viga

sometida a un estado de deformación que corresponde a una flexión pura (momento flector constante en la viga), en la que no aparece esfuerzo cortante. Este estado de deformación se representa mediante las siguientes deformaciones nodales:

$$\delta^e = \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 & -\theta \end{bmatrix}^T \quad (9.69)$$

El estado de deformaciones unitarias que se obtiene es:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2y\theta}{L} \\ \frac{\xi\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (9.70)$$

La deformación unitaria axial es independiente de  $\xi$ , lo cual es correcto pues el momento flector es constante. Sin embargo la deformación unitaria de cortante es lineal con  $\xi$ , cuando debería ser nula. La solución por lo tanto consiste en evaluar la matriz  $\mathbf{B}_C$  con la suposición de  $\xi = 0$ . El valor que se obtiene es:

$$\mathbf{B}_C^{red} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2J} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2J} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9.71)$$

La matriz de rigidez de cortante obtenida con esta suposición es:

$$\mathbf{K}_C^{red} = \frac{GAk}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 1 & -\frac{2}{L} & 1 \\ 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{2}{L} & -1 & \frac{2}{L} & -1 \\ 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad (9.72)$$

La forma práctica de efectuar esto es sencillamente efectuar una integración reducida de la matriz de rigidez a cortante, empleando una regla de integración de un sólo punto, que está localizado en  $\xi = 0$ . De ahí el nombre del método, que por otra parte da muy buenos resultados.

#### 9.4.9 Elemento de tres nudos

Las funciones de interpolación de este elemento son:

$$N_1 = (\xi^2 - \xi)/2 \quad N_2 = (1 - \xi^2) \quad N_3 = (\xi^2 + \xi)/2 \quad (9.73)$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \xi - \frac{1}{2} \quad \frac{dN_2}{d\xi} = -2\xi \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \xi + \frac{1}{2} \quad (9.74)$$

El jacobiano es:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum \frac{dN_i}{d\xi} x_i = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)x_1 - 2\xi x_2 + \left(\xi + \frac{1}{2}\right)x_3 \quad (9.75)$$

La matriz de rigidez tiene la expresión general indicada antes, y se calcula por integración numérica.

#### 9.4.10 Ejemplo

Sea una viga en voladizo con una carga puntual  $P=1$  en el extremo libre (figura 9.4), y con las siguientes características (en  $kg$  y  $cm$ ):

$$L = 1000 \quad E = 2 \cdot 10^6 \quad G = 10^6 \quad kA = 10^3 \quad I = 10^5$$

Se trata de una viga muy esbelta, donde la deformación debida al esfuerzo cortante es despreciable. El valor exacto de la flecha en el extremo, según la teoría de flexión de vigas Timoshenko es:

$$V_{ex} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GAk} = 1.66766 \cdot 10^{-3} \quad (9.76)$$

El valor de la flecha según la teoría de vigas de Euler es:

$$V_{ex} = \frac{PL^3}{3EI} = 1.66666 \cdot 10^{-3} \quad (9.77)$$

Este valor es muy parecido al anterior pues al ser la viga muy esbelta ambas teorías proporcionan valores muy parecidos, ya que la deformación debida al cortante es despreciable. Las diferencias aparecen cuando el problema se resuelve empleando elementos finitos basados en la teoría de vigas con energía de cortante:

- Si se modeliza la viga empleando un elemento finito tipo viga de dos nudos, calculando con integración exacta la matriz de rigidez debida al cortante, la flecha que se obtiene es:

$$V^{2nudos} = 0.00399 \cdot 10^{-3} \quad (9.78)$$

Este valor es claramente incorrecto, debido al bloqueo por cortante.

- Con el mismo tipo de elemento, pero si la matriz de rigidez a cortante se calcula con integración reducida, el resultado es mucho más próximo al exacto:

$$V^{reduc} = 1.251 \cdot 10^{-3} \quad (9.79)$$

- Modelizando la viga con un elemento finito de tres nudos, incluyendo la energía de cortante y sin integración reducida, la flecha es:

$$V^{(3nudos)} = 1.2559 \cdot 10^{-3} \quad (9.80)$$

Este valor es mejor, pero está todavía algo lejos de la solución analítica.

# Cáscaras

## 10.1. INTRODUCCIÓN

Las cáscaras son estructuras laminares curvas, en las que el material está agrupado alrededor de una superficie directriz curva, de tal manera que el espesor en sentido normal a dicha superficie directriz es pequeño en comparación con las otras dimensiones transversales. Una característica fundamental de las cáscaras es precisamente su curvatura, ya que si la superficie directriz fuese plana, la estructura podría tratarse utilizando los elementos planos, tipo membrana o placa, ya conocidos. Otra característica muy importante es que, por el hecho de ser curvas, los efectos de esfuerzo axial y de flexión están acoplados, es decir que el esfuerzo axial provoca esfuerzos de flexión y viceversa. En una estructura plana ambos efectos son independientes. Ejemplos de cáscaras son los depósitos, las bóvedas laminares, las carrocerías, etc. y en general cualquier pieza delgada con forma de superficie curva.

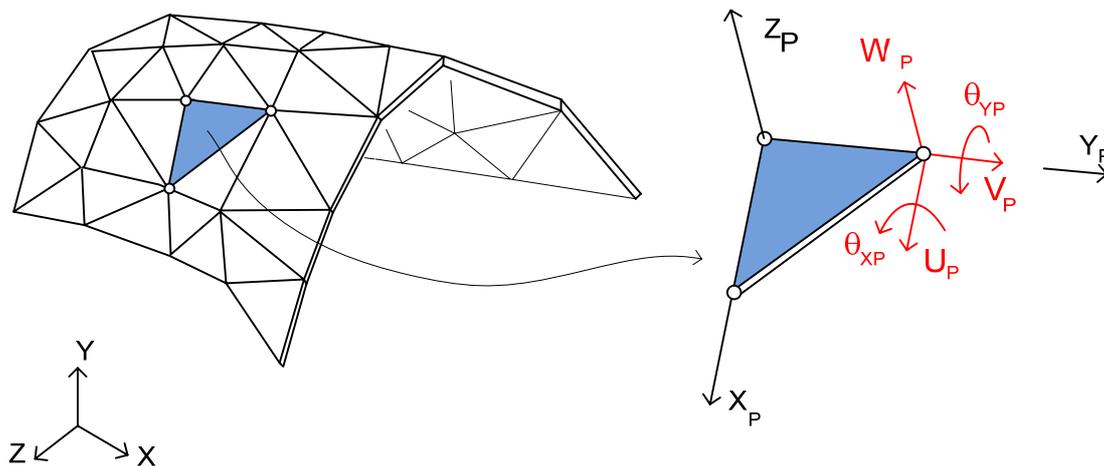
Para el tratamiento de las láminas pueden plantearse varias alternativas: aproximar la cáscara mediante una serie de facetas planas y utilizar elemento planos, utilizar elementos sólidos tridimensionales y prescindir de la naturaleza real de la cáscara, o utilizar una formulación específica para cáscaras curvas. En los siguientes apartados se describen las distintas alternativas.

## 10.2. UTILIZACIÓN DE ELEMENTOS PLANOS

Esta opción es la más simple tanto de formulación como de uso. Consiste en aproximar la superficie curva de la cáscara mediante una superficie poliédrica facetada, formada por elementos planos.

Un trozo cualquiera de la cáscara se aproxima por un elemento plano, de tres o cuatro lados (Figura 10.1), al que se asocia un sistema de ejes, que se denomina sistema planar del elemento, y en el que se pueden obtener sus características de rigidez, considerándolo por separado como una membrana y como una placa. Cada

nudo tiene cinco grados de libertad: dos de ellos como membrana  $U_P$ ,  $V_P$  y tres como placa  $W_P$ ,  $\theta_{xP}$ ,  $\theta_{yP}$ , todos ellos referidos al sistema de ejes planar del elemento. El sexto grado de libertad  $\theta_{zP}$  no aparece en la formulación. Sin embargo, este grado de libertad se suele considerar, asignándole una rigidez nula, con objeto de tener seis grados de libertad en cada nudo. Al ensamblar las matrices de rigidez de los distintos elementos, se irán sumando rigideces en dicho grado de libertad.



**Figura 10.1 Cáscara modelizada mediante elementos planos**

La matriz de rigidez total del elemento se puede poner en el sistema planar como:

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Donde  $\mathbf{K}_M$  es la matriz de rigidez debida al efecto membrana, que corresponde a las deformaciones en el plano  $X_P$ ,  $Y_P$ , y  $\mathbf{K}_F$  es la matriz de rigidez debida al efecto de flexión, que relaciona a los otros tres grados de libertad. Esta matriz se proyecta sobre el sistema general de la estructura, empleando para ello la matriz de rotación entre ambos sistemas. La matriz de rigidez así obtenida se ensambla para dar lugar a la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  de toda la estructura.

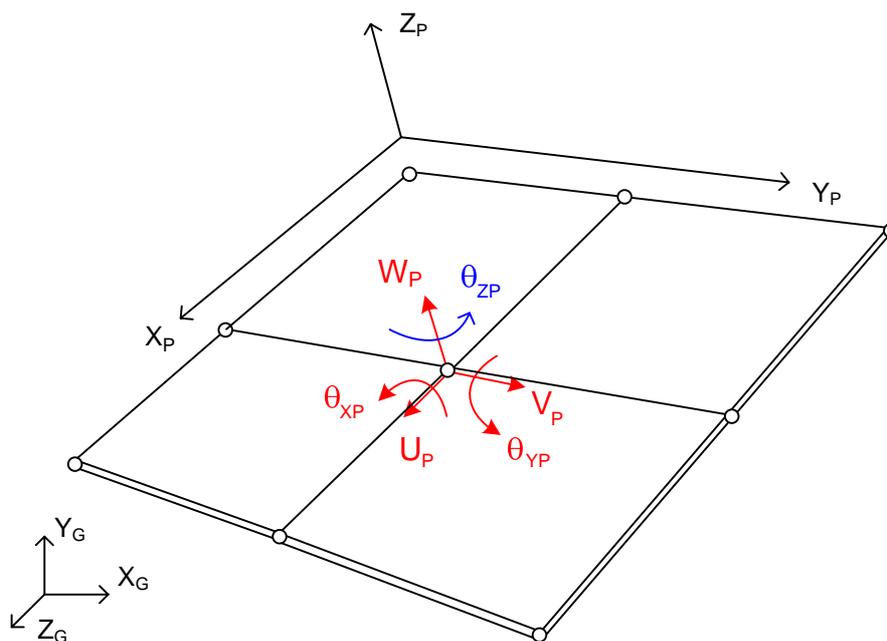
Existen varias posibilidades de elegir el sistema planar pero la más habitual es poner su origen en el nudo 1, y su eje  $X_P$  según el primer lado del elemento.

Este método puede utilizarse empleando elementos isoparamétricos para el efecto membrana, y en formulación Mindlin para el efecto placa, con lo que los elementos pueden tener lados curvos, pero siempre contenidos en su plano.

Esta técnica es simple de formular, requiere pocos datos y cumple con los criterios de convergencia, por lo que parece una buena solución para las cáscaras. Sin embargo tiene ciertos inconvenientes: es un método poco preciso, y requiere el empleo de gran cantidad de elementos de pequeño tamaño, tantos más cuanto más curva sea la cáscara. Además el acople entre los efectos membrana y cáscara se origina

únicamente al ensamblar unos elementos con otros, y no dentro de cada elemento, por ser planos. Esto hace que aparezcan momentos flectores donde no los hay: por ejemplo en un cilindro infinito sometido a presión interior aparecen momentos de flexión en los elementos, cuando en realidad el material está sometido sólo a esfuerzo de tracción.

Otro problema ocurre cuando todos los elementos que llegan a un nudo son coplanares, ya que en este caso no aparece ninguna rigidez en el giro normal a los elementos  $\theta_{ZP}$  (Figura 10.2), y la matriz de rigidez global de la estructura es singular.



**Figura 10.2 Elementos coplanares**

Para evitar este problema se suele emplear a veces una técnica que consiste en introducir una rigidez ficticia según el giro  $\theta_{ZP}$  no nula, dada por la expresión siguiente, para un elemento de cuatro nudos:

$$\begin{Bmatrix} M_{ZP1} \\ M_{ZP2} \\ M_{ZP3} \\ M_{ZP4} \end{Bmatrix} = \alpha EV \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{ZP1} \\ \theta_{ZP2} \\ \theta_{ZP3} \\ \theta_{ZP4} \end{Bmatrix} \quad (10.2)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $V$  el volumen del elemento, y  $\alpha$  un valor comprendido entre  $10^{-6}$  y  $10^{-2}$ . Esta rigidez es tal que permite el movimiento como sólido rígido del elemento.

### 10.3. UTILIZACIÓN DE ELEMENTOS SÓLIDOS TRIDIMENSIONALES

Esta técnica consiste en discretizar toda la cáscara mediante elementos sólidos (Figura 10.3), situando normalmente uno o dos elementos sólidos en el espesor de la cáscara. Un primer inconveniente de esta técnica es que origina gran cantidad de nudos en el modelo. Otro problema a tener en cuenta es que si el elemento es poco grueso en el sentido del espesor  $\zeta$  frente a las otras dimensiones transversales  $\xi, \eta$ , su rigidez en dicha dirección  $\zeta$  es demasiado grande, mayor que la real, dando lugar a una rigidez excesivamente alta en su dirección transversal, la cual produce deformaciones incorrectas. Por lo tanto este método sólo debe emplearse cuando la cáscara sea muy gruesa, y se aproxime más a un sólido tridimensional que a una cáscara laminar, y en todo caso cuidando siempre de no tener elementos con una dimensión mucho menor que las otras dos.

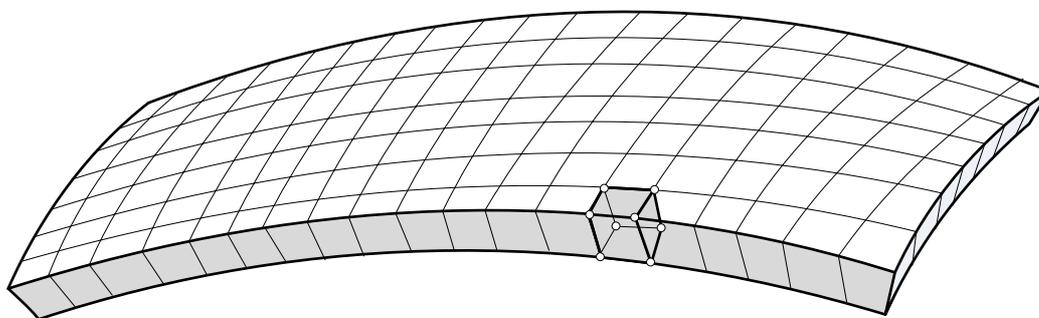


Figura 10.3 Cáscara modelizada mediante elementos sólidos

### 10.4. UTILIZACIÓN DE ELEMENTOS CÁSCARA

El desarrollo de un elemento específico para el análisis de cáscaras es un problema complejo, y se han propuesto bastantes de ellos. Hay dos problemas a resolver, el primero de los cuales, que es común con las placas planas, es la consideración o no de la energía del esfuerzo cortante, es decir si la cáscara se supone muy delgada o medianamente gruesa. Para este problema, que está agravado por la particular geometría curva de las cáscaras, existen las mismas soluciones que para las placas planas. Así, puede emplearse la teoría clásica de cáscaras delgadas, en la que se supone que las secciones rectas normales a la superficie media de la cáscara se mantienen normales a ella en la situación deformada, y en consecuencia no se considera la energía debida a las tensiones cortantes. En este caso los giros son iguales a las derivadas de las deformaciones, y se obtienen elementos que presentan los mismos problemas de compatibilidad que las placas delgadas. Siguiendo estas hipótesis hay diversos elementos cáscara desarrollados, cada uno con sus ventajas e inconvenientes.

Existen asimismo muchos elementos basados en la teoría de cáscaras con esfuerzo cortante: en este caso es posible emplear una formulación isoparamétrica, obteniéndose elementos cáscara que pueden tener lados curvos, varios nudos por lado, y que son perfectamente compatibles entre sí, formando una familia de elementos, tanto de tres como de cuatro lados.

Otro de los problemas en la teoría de cáscaras es el relativo al grado de curvatura de la cáscara, y en esta línea existen elementos aptos sólo para cáscaras poco curvas (denominadas *shallow*), y elementos que admiten valores amplios de la curvatura. Los elementos en formulación isoparamétrica, antes mencionados, no tienen en este sentido ninguna limitación desde el punto de vista teórico, dentro de unos límites muy amplios de curvatura.

En todo caso, los elementos más empleados en la actualidad se engloban en dos grandes categorías: los basados en el continuo, y los basados en la teoría de cáscaras, también conocidos como basados en las resultantes de las tensiones.

## 10.5. FORMULACIÓN BASADA EN EL CONTINUO. ELEMENTOS DE CUATRO LADOS

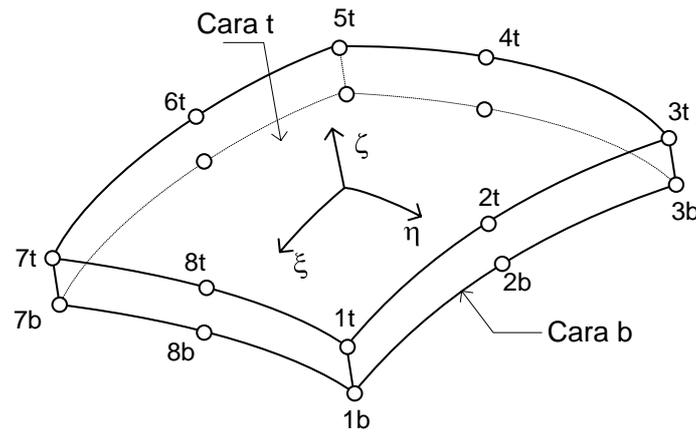
La idea básica en esta formulación es considerar un elemento sólido tridimensional y constreñir su comportamiento de tal manera que se corresponda con el de una cáscara de pequeño espesor frente a sus otras dimensiones. Para ello las deformaciones independientes de los nudos de las caras superior e inferior se sustituyen por desplazamientos y rotaciones del plano medio de la cáscara y se emplea una interpolación lineal en el espesor. El estado de tensión y deformación unitaria considerado es el general para un sólido continuo en el espacio (de ahí el nombre de la formulación), pero añadiendo la condición de tensión nula en la dirección del espesor de la cáscara, pues se considera espesor pequeño.

### 10.5.1 Definición geométrica

Considerando un elemento típico, las caras exteriores son curvas, mientras que las secciones a través del espesor son líneas rectas. La forma del elemento queda definida por parejas de puntos situados en ambas caras del elemento.

Sean  $\xi, \eta$  unas coordenadas curvilíneas situadas en la superficie media del elemento y  $\zeta$  una coordenada lineal en la dirección del espesor (Figura 10.4). Todas ellas varían entre  $-1$  y  $+1$ . Supongamos que la forma del elemento se define mediante una serie de  $2n$  puntos situados en sus caras superior e inferior. Los puntos situados en la cara superior se identifican con el subíndice  $t$ , y los de la cara inferior con el subíndice  $b$ . Se denomina fibra directora a la recta que une los dos puntos  $t$  y  $b$  de las caras superior e inferior.

Al ser pequeño el espesor, la variación de la forma del elemento en la dirección  $\zeta$  se puede suponer lineal.



**Figura 10.4** Cáscara definida mediante nudos es sus caras superior e inferior

Las coordenadas de un punto cualquiera del interior de la cáscara son:

$$\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{x}_{it} \frac{(1 + \zeta)}{2} N_i + \sum_i \mathbf{x}_{ib} \frac{(1 - \zeta)}{2} N_i \quad (10.3)$$

donde  $N_i$  son funciones de interpolación definidas en función de las coordenadas  $\xi, \eta$ . Para ellas pueden usarse cualquiera de las empleadas para los elementos isoparamétricos planos, generándose de esta forma elementos cáscara de tres o cuatro lados, con dos, tres o cuatro nudos por lado. El sumatorio está extendido a todos los puntos del elemento.

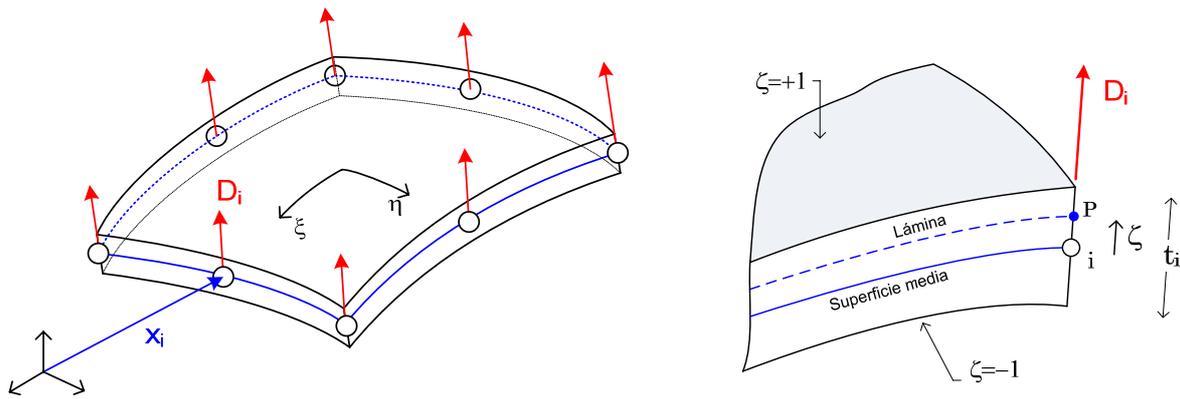
Para utilizar la expresión (10.3) habría que definir puntos en ambas caras del elemento, pero en la práctica esto no se hace, sino que los nudos se sitúan en la superficie media del elemento. Las coordenadas  $\mathbf{x}_i$  de uno cualquiera de dichos nudos son:

$$\mathbf{x}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{it} + \mathbf{x}_{ib}) \quad (10.4)$$

Se define asimismo un vector unitario  $\mathbf{D}^i$  situado en el nudo  $i$ , en la dirección de la fibra directora (Figura 10.5):

$$\mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{x}_{it} - \mathbf{x}_{ib}}{|\mathbf{x}_{it} - \mathbf{x}_{ib}|} \quad (10.5)$$

Este vector se denomina vector director de la cáscara y puede no ser normal a la superficie media de la misma. Se calcula con facilidad a partir de las coordenadas de los puntos  $t$  y  $b$  situados en ambas caras. En otros casos puede definirse como ortogonal a la cáscara y obtenerse analíticamente si se conoce la ecuación de la superficie media. Nótese que la coordenada local  $\zeta$  está medida en la dirección del vector director.



**Figura 10.5 Definición geométrica de la cáscara**

Las coordenadas de un punto P cualquiera situado en la fibra directora que pasa por el nudo  $i$ , y a una distancia  $\zeta$  de dicho nudo, pueden expresarse como:

$$\mathbf{x}_i^P(\zeta) = \mathbf{x}_i + \zeta \frac{t_i}{2} \mathbf{D}_i \tag{10.6}$$

donde  $\mathbf{x}_i$  son las coordenadas del nudo  $i$  y  $t_i$  el espesor de la cáscara en dicho nudo (Figura 10.5).

La cáscara se considera formada por una serie de superficies laminares curvas, cada una de las cuales corresponde a un valor constante de la coordenada  $\zeta$ . Por lo tanto las coordenadas de un punto cualquiera interior a la cáscara pueden expresarse como una interpolación de las de los puntos P situados en la fibra directora de cada nudo, a un mismo valor de la coordenada  $\zeta$ :

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i \mathbf{x}_i^P(\zeta) N_i(\xi, \eta) = \sum_i \mathbf{x}_i N_i + \frac{\zeta}{2} \sum_i N_i t_i \mathbf{D}_i \tag{10.7}$$

**10.5.1.1 Sistema director en los nudos**

Se definen asimismo, en cada nudo  $i$ , dos vectores perpendiculares al vector director. En principio hay infinitas posibilidades de elección, y una de ellas, bastante habitual, es la siguiente:

- ◆ Tomar el primero de los dos vectores  $\mathbf{D}_{i1}$  como contenido en el plano XZ general de la estructura. Por lo tanto su expresión es:

$$\mathbf{D}_{i1} = \frac{\mathbf{e}_Y \times \mathbf{D}_i}{|\mathbf{e}_Y \times \mathbf{D}_i|} \tag{10.8}$$

siendo  $\mathbf{e}_Y$  el vector unitario según el eje Y general. Si el vector  $\mathbf{D}_i$  coincide con el eje Y, se puede tomar por convenio  $\mathbf{D}_{i1} = \mathbf{e}_Z$ .

♦ El segundo vector  $\mathbf{D}_{i2}$  es ortogonal a los dos anteriores:

$$\mathbf{D}_{i2} = \mathbf{D}_i \times \mathbf{D}_{i1} \quad (10.9)$$

De esta forma los tres vectores  $\mathbf{D}_i$ ,  $\mathbf{D}_{i1}$ ,  $\mathbf{D}_{i2}$  forman un triedro ortogonal situado en el nudo  $i$ , que se denominará sistema director del nudo (Figura 10.6) y que es diferente para cada nudo de la cáscara si ésta es curva.

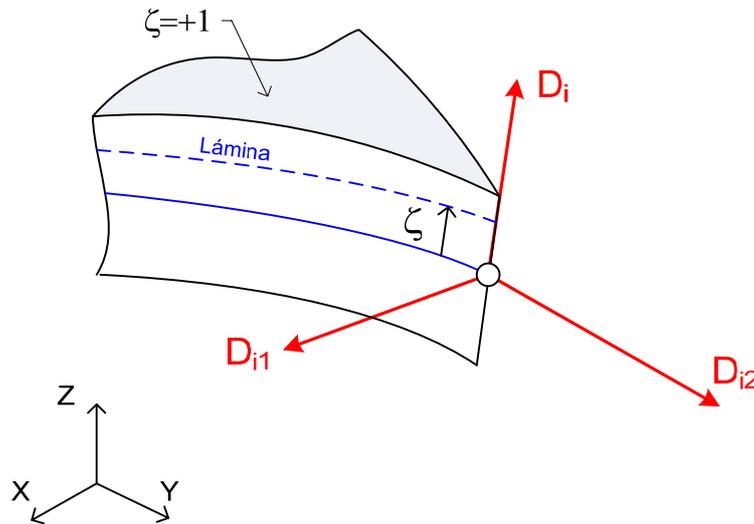


Figura 10.6 Sistema director en un nudo

### 10.5.2 Campo de deformaciones

Al producirse la deformación de la cáscara, el vector director en un nudo  $\mathbf{D}_i$  sufre una rotación y pasa a la posición deformada  $\mathbf{D}_i^d$ . Esta deformación de rotación de la fibra directora de la cáscara donde está el nudo  $i$  viene dada por la diferencia entre ambos vectores (Figura 10.7):

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \mathbf{D}_i^d - \mathbf{D}_i \quad (10.10)$$

En la hipótesis de pequeñas deformaciones, el vector  $\hat{\mathbf{d}}_i$  que define la rotación de la fibra está contenido en el plano 1-2, y por lo tanto puede expresarse como combinación lineal de los vectores  $\mathbf{D}_{i1}$ ,  $\mathbf{D}_{i2}$ , que están contenidos en él y son ortogonales:

$$\hat{\mathbf{d}}^i = -\alpha_i \mathbf{D}_{i2} + \beta_i \mathbf{D}_{i1} \quad (10.11)$$

Dado que los dos coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  definen la posición deformada del vector director de la cáscara, pueden considerarse como las dos rotaciones del nudo  $i$ .

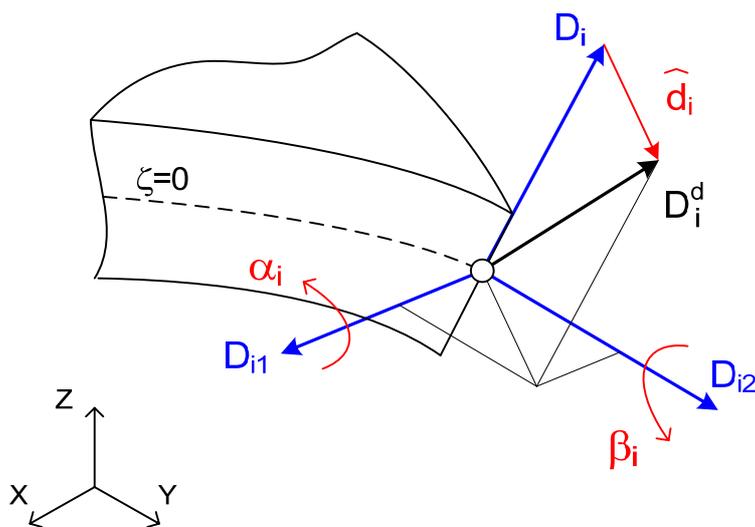


Figura 10.7 Rotación del vector director en un nudo

Las deformaciones en coordenadas generales de un punto cualquiera  $P$  situado en la fibra directora del nudo  $i$ , a una distancia  $\zeta$  de la superficie de referencia se pueden poner:

$$\mathbf{u}_i^P(\zeta) = \mathbf{U}_i + \frac{\zeta}{2} t_i \hat{\mathbf{d}}_i \quad (10.12)$$

Siendo  $\mathbf{U}_i$  las 3 deformaciones en coordenadas generales del nudo  $i$ :

$$\mathbf{U}_i = [U_i \quad V_i \quad W_i]^T$$

Las deformaciones en coordenadas generales  $\mathbf{u} = [u \quad v \quad w]^T$  de un punto cualquiera de la cáscara se pueden expresar por interpolación de las deformaciones de los puntos situados en la fibra directora con un mismo valor de  $\zeta$ :

$$\mathbf{u} = \sum_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i^P(\zeta) = \sum_i N_i \left( \mathbf{U}_i + \frac{\zeta}{2} t_i \hat{\mathbf{d}}_i \right) \quad (10.13)$$

Sustituyendo el vector  $\hat{\mathbf{d}}^i$  en función de los parámetros de rotación  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  queda:

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{U}_i N_i + \frac{\zeta}{2} \sum_i N_i t_i \left( -\alpha_i \mathbf{D}_{i2} + \beta_i \mathbf{D}_{i1} \right) \quad (10.14)$$

Por lo tanto, los grados de libertad que se emplean en el nudo  $i$  son las tres deformaciones según los tres ejes generales de la estructura y las dos rotaciones  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  respecto al sistema de ejes director definido en dicho nudo:

$$\delta_i = [U_i \quad V_i \quad W_i \quad \alpha_i \quad \beta_i]^T \quad (10.15)$$

Se introducen dos nuevos vectores colineales con  $\mathbf{D}_{i1}, \mathbf{D}_{i2}$ , de módulo  $t/2$ :

$$\mathbf{g}_{i1} = -\frac{t_i}{2} \mathbf{D}_{i2} \quad \mathbf{g}_{i2} = \frac{t_i}{2} \mathbf{D}_{i1} \quad (10.16)$$

Se obtiene de esta manera la siguiente expresión de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  de un punto cualquiera del elemento, en función de las cinco deformaciones de los nudos:

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{U}_i N_i + \zeta \sum_i N_i \alpha_i \mathbf{g}_{i1} + \zeta \sum_i N_i \beta_i \mathbf{g}_{i2} \quad (10.17)$$

Esta expresión define la matriz de funciones de interpolación del elemento:

$$\mathbf{u} = \left[ \mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \dots \quad \mathbf{N}_n \right] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (10.18)$$

Cada una de las matrices  $\mathbf{N}_i$  es de tres filas y cinco columnas, en la forma:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta g_{i1x} & \zeta g_{i2x} \\ 0 & 1 & 0 & \zeta g_{i1y} & \zeta g_{i2y} \\ 0 & 0 & 1 & \zeta g_{i1z} & \zeta g_{i2z} \end{bmatrix} N_i(\xi, \eta) \quad (10.19)$$

$$\mathbf{N}_i = \left[ \mathbf{I}_3 \quad \zeta \mathbf{g}_{i1} \quad \zeta \mathbf{g}_{i2} \right] N_i \quad (10.20)$$

### 10.5.3 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en un punto cualquiera de la cáscara, expresadas en el sistema de ejes general son:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (10.21)$$

$$\varepsilon = \boldsymbol{\mu} \mathbf{h}_G \quad (10.22)$$

En esta expresión  $\boldsymbol{\mu}$  es una matriz 6x9 con 1 y 0 en las posiciones adecuadas, que reordena las derivadas de las deformaciones para obtener el vector de deformaciones unitarias, y es  $\mathbf{h}_G$  un vector que contiene el gradiente de las deformaciones en coordenadas generales, es decir las 9 derivadas de los desplazamientos  $u, v, w$  respecto de las coordenadas generales  $x, y, z$ .

Las derivadas en coordenadas generales  $x, y, z$  se relacionan con las derivadas en coordenadas naturales  $\xi, \eta, \zeta$  a través de la matriz Jacobiana de la transformación  $\mathbf{J}$ :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (10.23)$$

Para las tres componentes de la deformación, la relación entre  $\mathbf{h}_G$  y  $\mathbf{h}_L$  se puede poner:

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{\partial u}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\
 \frac{\partial v}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial v}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\
 \frac{\partial w}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial w}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial w}{\partial \zeta}
 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix}
 \mathbf{J} & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{J} & 0 \\
 0 & 0 & \mathbf{J}
 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{c}
 \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \frac{\partial u}{\partial z} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{array} \right\} \quad (10.24)
 \end{array}$$

Definiendo la matriz  $\mathbf{J}_3$  de tamaño 9x9 formada por la agrupación diagonal de tres matrices  $\mathbf{J}$  la relación entre los gradientes queda, en forma compacta:

$$\mathbf{h}_L = \mathbf{J}_3 \mathbf{h}_G \quad (10.25)$$

La expresión de  $\mathbf{J}$  se puede obtener derivando en la interpolación de coordenadas (10.7)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \zeta}
 \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left( \mathbf{x}_i^T + \frac{\zeta t_i}{2} \mathbf{D}_i^T \right) \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left( \mathbf{x}_i^T + \frac{\zeta t_i}{2} \mathbf{D}_i^T \right) \\
 N_i \frac{t_i}{2} \mathbf{D}_i^T
 \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

Las derivadas de los desplazamientos de un punto  $\mathbf{u}$  respecto de las coordenadas naturales, contenidas en  $\mathbf{h}_L$ , se obtienen derivando en la ecuación (10.17). Su expresión resulta ser:

$$\mathbf{h}_L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta g_{i1x} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta g_{i2x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta g_{i1x} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta g_{i2x} \\ 0 & 0 & 0 & N_i g_{i1x} & N_i g_{i2x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta g_{i1y} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta g_{i2y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta g_{i1y} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta g_{i2y} \\ 0 & 0 & 0 & N_i g_{i1y} & N_i g_{i2y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta g_{i1z} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta g_{i2z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta g_{i1z} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta g_{i2z} \\ 0 & 0 & 0 & N_i g_{i1z} & N_i g_{i2z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (10.27)$$

$$\mathbf{h}_L = \sum_i \mathbf{H}_L^i \delta_i = \mathbf{H}_L \delta^e \quad (10.28)$$

La matriz  $\mathbf{H}_L$  se obtiene agrupando por filas las matrices  $\mathbf{H}_L^i$  de cada nudo, y su tamaño es de  $9 \times 5n$ .

El gradiente de las deformaciones respecto de las coordenadas generales se obtiene mediante la ecuación (10.24):

$$\mathbf{h}_G = \mathbf{J}_3^{-1} \mathbf{h}_L = \mathbf{J}_3^{-1} \mathbf{H}_L \delta^e \quad (10.29)$$

De esta manera se define la matriz de derivadas de las deformaciones respecto de las coordenadas generales:

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{J}_3^{-1} \mathbf{H}_L \quad \mathbf{h}_G = \mathbf{H}_G \delta^e \quad (10.30)$$

Esta matriz está compuesta por 3 submatrices, una para cada componente de la deformación:

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{Gu} \\ \mathbf{H}_{Gv} \\ \mathbf{H}_{Gw} \end{bmatrix} \quad (10.31)$$

Así, para las 3 derivadas de la deformación  $u$ , la matriz  $\mathbf{H}_{Gu}$  se obtiene agrupando las matrices  $\mathbf{H}_{Gu}^i$  de cada nudo:

$$\mathbf{H}_{Gu} = \left[ \mathbf{H}_{Gu}^1 \quad \mathbf{H}_{Gu}^2 \quad \dots \quad \mathbf{H}_{Gu}^n \right] \quad (10.32)$$

Siendo la contribución de cada nudo:

$$\mathbf{H}_{Gu}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & A_{ix} g_{i1x} & A_{ix} g_{i2x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & A_{iy} g_{i1x} & A_{iy} g_{i2x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & A_{iz} g_{i1x} & A_{iz} g_{i2x} \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

Para las derivadas de  $v$  y  $w$  se obtienen otras matrices similares  $\mathbf{H}_{Gv}$  y  $\mathbf{H}_{Gw}$ .

En la ecuación anterior, las derivadas de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas generales son:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J_{(1,1)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{(1,2)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (10.34)$$

Asimismo, el vector auxiliar  $\mathbf{A}_i$  está definido como:

$$\begin{aligned} A_{ix} &= \zeta J_{(1,1)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \zeta J_{(1,2)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + J_{(1,3)}^{-1} N_i \\ A_{iy} &= \zeta J_{(2,1)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \zeta J_{(2,2)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + J_{(2,3)}^{-1} N_i \\ A_{iz} &= \zeta J_{(3,1)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \zeta J_{(3,2)}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + J_{(3,3)}^{-1} N_i \end{aligned} \quad (10.35)$$

Finalmente, sustituyendo (10.30) en la ecuación (10.22), se obtiene la expresión de la matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}_G \quad (10.36)$$

#### 10.5.4 Estado de tensiones y relación tensión - deformación unitaria

La hipótesis fundamental empleada en la teoría de cáscaras delgadas es que la tensión en la dirección normal a la cáscara es nula:  $\sigma_{Lz} = 0$ , siendo  $z_L$  un eje

perpendicular a las láminas que forman la cáscara (es decir a aquellas superficies de valor  $\zeta$  constante).

El estado de tensiones en un punto interior de la cáscara debe expresarse en un sistema de ejes ortogonales con objeto de poder plantear con sencillez la ecuación constitutiva. Además se debe poder introducir la condición de tensión nula en su dirección perpendicular a la lámina. Lo más sencillo para ello es definir un sistema de ejes cartesianos cuyo eje  $z_L$  sea ortogonal a la lámina, que se denomina sistema de ejes de la lámina (Figura 10.8). Existen muchas posibilidades para definirlo, y una manera simple de construirlo es la siguiente:

- Para una lámina cualquiera,  $\zeta = \text{constante}$ , se determinan dos vectores tangentes a ella. Lo más simple es considerar los vectores tangentes a las líneas de  $\xi$  y  $\eta$  constante (que no son ortogonales):

$$\mathbf{t}_\xi(\zeta) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \quad \mathbf{t}_\eta(\zeta) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \quad (10.37)$$

- El vector unitario en la dirección del eje  $z_L$  se determina como ortogonal a dichos vectores tangentes:

$$\mathbf{z}_L = \frac{\mathbf{t}_\xi \times \mathbf{t}_\eta}{|\mathbf{t}_\xi \times \mathbf{t}_\eta|} \quad (10.38)$$

- Los vectores unitarios de los ejes restantes se determinan como:

$$\mathbf{x}_L = \frac{\mathbf{t}_\eta \times \mathbf{z}_L}{|\mathbf{t}_\eta \times \mathbf{z}_L|} \quad \mathbf{y}_L = \frac{\mathbf{z}_L \times \mathbf{x}_L}{|\mathbf{z}_L \times \mathbf{x}_L|} \quad (10.39)$$

Estos tres vectores forman la matriz de rotación entre las coordenadas de la lámina y las coordenadas cartesianas globales:

$$\mathbf{R}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L & \mathbf{y}_L & \mathbf{z}_L \end{bmatrix} \quad (10.40)$$

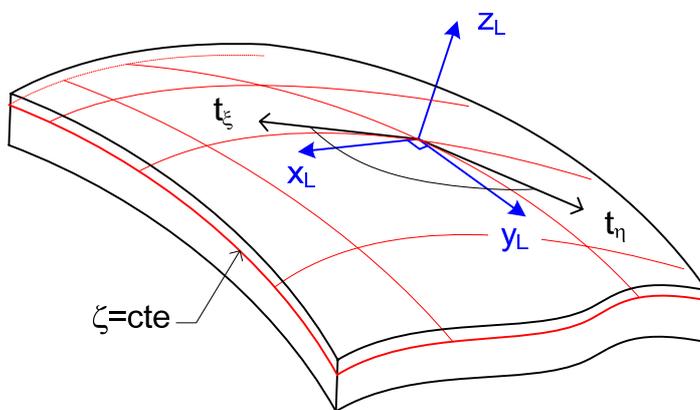


Figura 10.8 Sistema de ejes de la lámina

En este sistema de ejes la tensión y la deformación unitaria son (Figura 10.9):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_L &= \left[ \sigma_{Lx} \quad \sigma_{Ly} \quad 0 \quad \sigma_{Lxy} \quad \sigma_{Lyz} \quad \sigma_{Lzx} \right]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_L &= \left[ \varepsilon_{Lx} \quad \varepsilon_{Ly} \quad 0 \quad \gamma_{Lxy} \quad \gamma_{Lyz} \quad \gamma_{Lzx} \right]^T \end{aligned} \tag{10.41}$$

La relación entre ambas es la correspondiente al estado plano de tensiones en el plano  $x_L y_L$ , y puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{Lx} \\ \sigma_{Ly} \\ \sigma_{Lz} \\ \sigma_{Lxy} \\ \sigma_{Lxz} \\ \sigma_{Lyz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{Lx} \\ \varepsilon_{Ly} \\ \varepsilon_{Lz} \\ \gamma_{Lxy} \\ \gamma_{Lxz} \\ \gamma_{Lyz} \end{Bmatrix} \tag{10.42}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_L = \mathbf{C}_L \boldsymbol{\varepsilon}_L \tag{10.43}$$

En ella se ha introducido la tensión en la dirección  $z_L$ , que es nula, y para ello se ha incluido una fila y columna nulas en la matriz  $\mathbf{C}_L$ . Esto facilita el proceso posterior al disponer de seis componentes en la tensión, lo mismo que se dispone de seis componentes en la deformación unitaria.

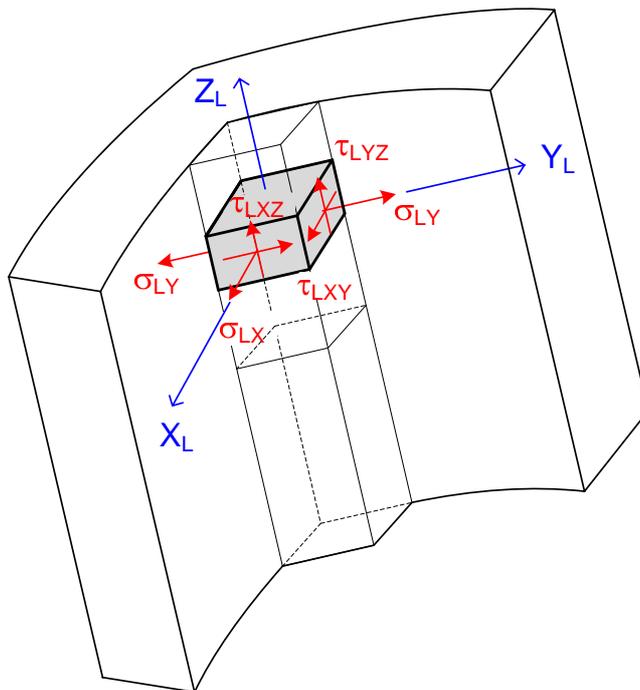


Figura 10.9 Estado de tensiones en una cáscara

La relación entre las tensiones en el sistema de la lámina  $\sigma_L$  y el sistema general  $\sigma$  se expresa de forma sencilla mediante la matriz de rotación  $\mathbf{R}_L$ , si dichas tensiones se representan en su forma de tensor (indicado mediante el subíndice 2):

$$\sigma_{L2} = \mathbf{R}_L^T \sigma_2 \mathbf{R}_L$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Lx} & \sigma_{Lxy} & \sigma_{Lxz} \\ \sigma_{Lxy} & \sigma_{Lyy} & \sigma_{Lyz} \\ \sigma_{Lxz} & \sigma_{Lyz} & \sigma_{Lz} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_L^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \mathbf{R}_L \quad (10.44)$$

Efectuando la proyección del tensor de tensiones indicada, y expresando de nuevo las tensiones en forma de vector se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Lx} \\ \sigma_{Lyy} \\ \sigma_{Lz} \\ \sigma_{Lxy} \\ \sigma_{Lyz} \\ \sigma_{Lzx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Lx}^2 & x_{Ly}^2 & x_{Lz}^2 & 2x_{Lx}x_{Ly} & 2x_{Ly}x_{Lz} & 2x_{Lz}x_{Lx} \\ y_{Lx}^2 & y_{Ly}^2 & y_{Lz}^2 & 2y_{Lx}y_{Ly} & 2y_{Ly}y_{Lz} & 2y_{Lz}y_{Lx} \\ z_{Lx}^2 & z_{Ly}^2 & z_{Lz}^2 & 2z_{Lx}z_{Ly} & 2z_{Ly}z_{Lz} & 2z_{Lz}z_{Lx} \\ x_{Lx}y_{Lx} & x_{Ly}y_{Ly} & x_{Lz}y_{Lz} & x_{Lx}y_{Ly} + y_{Lx}x_{Ly} & x_{Ly}y_{Lz} + y_{Ly}x_{Lz} & x_{Lz}y_{Lx} + y_{Lz}x_{Lx} \\ y_{Lx}z_{Lx} & y_{Ly}z_{Ly} & y_{Lz}z_{Lz} & y_{Lx}z_{Ly} + z_{Lx}y_{Ly} & y_{Ly}z_{Lz} + z_{Ly}y_{Lz} & y_{Lz}z_{Lx} + z_{Lz}y_{Lx} \\ z_{Lx}x_{Lx} & z_{Ly}x_{Ly} & z_{Lz}x_{Lz} & z_{Lx}x_{Ly} + x_{Lx}z_{Ly} & z_{Ly}x_{Lz} + x_{Ly}z_{Lz} & z_{Lz}x_{Lx} + x_{Lz}z_{Lx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_L = \mathbf{Q}_\sigma \sigma \quad (10.45)$$

Un proceso de proyección análogo permite relacionar las deformaciones unitarias en los sistemas de la lámina y general. En este caso debe tenerse en cuenta que en la forma vector se manejan las deformaciones unitarias ingenieriles a cortadura.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{Lx} \\ \varepsilon_{Lyy} \\ \varepsilon_{Lz} \\ \gamma_{Lxy} \\ \gamma_{Lyz} \\ \gamma_{Lzx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Lx}^2 & x_{Ly}^2 & x_{Lz}^2 & x_{Lx}x_{Ly} & x_{Ly}x_{Lz} & x_{Lz}x_{Lx} \\ y_{Lx}^2 & y_{Ly}^2 & y_{Lz}^2 & y_{Lx}y_{Ly} & y_{Ly}y_{Lz} & y_{Lz}y_{Lx} \\ z_{Lx}^2 & z_{Ly}^2 & z_{Lz}^2 & z_{Lx}z_{Ly} & z_{Ly}z_{Lz} & z_{Lz}z_{Lx} \\ 2x_{Lx}y_{Lx} & 2x_{Ly}y_{Ly} & 2x_{Lz}y_{Lz} & x_{Lx}y_{Ly} + y_{Lx}x_{Ly} & x_{Ly}y_{Lz} + y_{Ly}x_{Lz} & x_{Lz}y_{Lx} + y_{Lz}x_{Lx} \\ 2y_{Lx}z_{Lx} & 2y_{Ly}z_{Ly} & 2y_{Lz}z_{Lz} & y_{Lx}z_{Ly} + z_{Lx}y_{Ly} & y_{Ly}z_{Lz} + z_{Ly}y_{Lz} & y_{Lz}z_{Lx} + z_{Lz}y_{Lx} \\ 2z_{Lx}x_{Lx} & 2z_{Ly}x_{Ly} & 2z_{Lz}x_{Lz} & z_{Lx}x_{Ly} + x_{Lx}z_{Ly} & z_{Ly}x_{Lz} + x_{Ly}z_{Lz} & z_{Lz}x_{Lx} + x_{Lz}z_{Lx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_L = \mathbf{Q}_\varepsilon \varepsilon \quad (10.46)$$

Se puede comprobar que se cumple:  $\mathbf{Q}_\sigma^{-1} = \mathbf{Q}_\varepsilon^T$

Sustituyendo ambas relaciones en la ecuación constitutiva en coordenadas de la lámina se obtiene:

$$\mathbf{Q}_\sigma \sigma = \mathbf{C}_L \mathbf{Q}_\varepsilon \varepsilon \quad (10.47)$$

Por lo tanto la ecuación constitutiva en coordenadas cartesianas generales queda:

$$\sigma = \mathbf{Q}_\epsilon^T \mathbf{C}_L \mathbf{Q}_\epsilon \epsilon \quad (10.48)$$

### 10.5.5 Matriz de rigidez

La expresión de la matriz de rigidez del elemento es:

$$\mathbf{K} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dv = \int \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_\epsilon^T \mathbf{C}_L \mathbf{Q}_\epsilon \mathbf{B} J d\xi d\eta d\zeta \quad (10.49)$$

Esta expresión se evalúa numéricamente, utilizando las coordenadas locales  $\xi, \eta, \zeta$ . Hay que hacer notar que en cada punto de la integración numérica se deben evaluar tanto la matriz  $\mathbf{B}$  (que depende de las coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$ ) como la matriz  $\mathbf{Q}_\epsilon$ , ya que esta última depende de la orientación de los ejes  $x_L, y_L, z_L$  y esta orientación es variable en cada punto de la cáscara. Únicamente si la cáscara es plana ocurre que la matriz  $\mathbf{Q}_\epsilon$  es constante en todo el elemento, por lo que el producto  $\mathbf{Q}_\epsilon^T \mathbf{C}_L \mathbf{Q}_\epsilon$  puede ser evaluado sólo una vez.

El orden de integración necesario depende del número de nudos que posee el elemento, y de su distorsión. En todo caso para la integración según el espesor  $\zeta$  se adoptan normalmente uno o dos puntos de integración. Para elementos de tres nudos por lado (cuadráticos) se suelen emplear reglas de 2x2 o 3x3 puntos, según el grado de distorsión del elemento.

En estos elementos cáscara aparece el mismo fenómeno de bloque por cortante que en las placas en formulación Mindlin, y son aplicables las mismas técnicas para solucionarlo. Asimismo aparecen fenómenos de bloqueo por excesiva rigidez en su plano frente a la rigidez a flexión, cuyo tratamiento puede consultarse en la bibliografía especializada.

### 10.5.6 Elementos de tres lados

Puede desarrollarse una familia de elementos cáscara de forma triangular, siguiendo exactamente el mismo proceso que para los de cuatro lados. Estos elementos así obtenidos son totalmente compatibles con los de cuatro lados, y en su desarrollo las únicas peculiaridades son:

- ◆ La utilización de tres coordenadas de área  $L_i$  para definir la posición de un punto en la superficie media de la cáscara, en lugar de las dos coordenadas  $\xi, \eta$  de los elementos cuadriláteros.
- ◆ La utilización de la coordenada lineal  $\zeta$  en el sentido del espesor de la cáscara, igual que en los elementos cuadriláteros.
- ◆ La utilización como funciones de interpolación  $N_i$  de las ya conocidas para los elementos triangulares planos, con sus correspondientes correcciones por nudos intermedios.

## 10.6. FORMULACIÓN BASADA EN LA TEORÍA DE CÁSCARAS

A diferencia de la formulación basada en el continuo, esta formulación se apoya en la teoría de cáscaras para definir la geometría de la misma, empleando coordenadas convectivas curvilíneas. El estado de esfuerzos en el material no se representa mediante el tensor de tensiones en un punto interior de la cáscara, sino que se emplean las fuerzas resultantes y los momentos producidos por dichas tensiones en una sección recta de la cáscara, de forma similar a la teoría de placas. Este hecho de considerar las resultantes de las tensiones hace que esta formulación se denomine habitualmente como formulación *stress resultant* en inglés. De la misma forma, las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del material se expresan en función de las deformaciones unitarias de extensión y curvatura medidas en la superficie media de la cáscara.

### 10.6.1 Definición geométrica

La configuración geométrica de la cáscara en el estado sin deformar se define en la forma:

$$\mathbf{X}^P = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{D}(\xi^1, \xi^2) \quad (10.50)$$

$\mathbf{X}^P$ : coordenadas cartesianas de un punto cualquiera de la cáscara, respecto de una base ortogonal fija  $\mathbf{e}_i$ .

$\mathbf{X}$ : coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie media de la cáscara.

$\mathbf{D}$ : vector director unitario, en cada punto de la superficie media de la cáscara, en la dirección del espesor. No es necesariamente normal al plano tangente a la cáscara.

$\xi^1, \xi^2$ : coordenadas curvilíneas que definen la superficie media.

$\xi^3$ : coordenada en la dirección del vector director, cuyo valor es  $h_I < \xi^3 < h_S$ , siendo el espesor de la cáscara  $h = h_S - h_I$ .

Esta definición corresponde a lo que se conoce como una superficie de director simple de Cosserat.

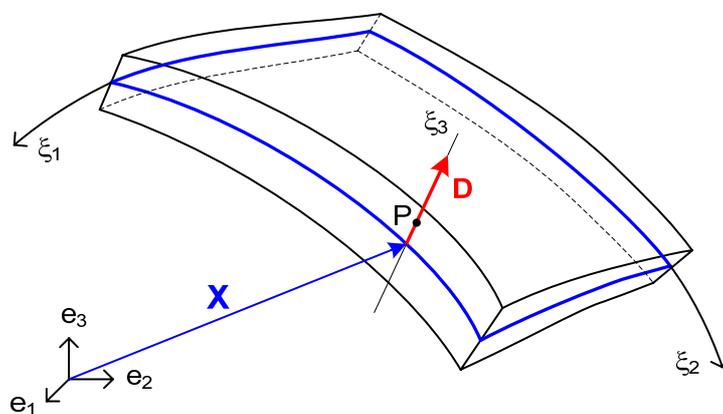


Figura 10.10 Definición geométrica de la cáscara

**10.6.1.1 Sistema convectivo**

Se define como la base covariante  $\mathbf{a}^P$  formada por los tres vectores tangentes a las coordenadas curvilíneas, en un punto cualquiera de la cáscara:

$$\mathbf{a}_i^P = \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \xi^i} \tag{10.51}$$

El tercer vector coincide con el vector director:

$$\mathbf{a}_3^P = \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \xi^3} = \mathbf{D} \tag{10.52}$$

El sistema convectivo en el plano medio está formado por los tres vectores de la base covariante (no ortogonal en general) en la superficie media de la cáscara  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^P \big|_{\xi^3=0}$ . Los dos primeros de ellos definen el plano tangente a la cáscara (Figura 10.11):

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \xi^\alpha} \bigg|_{\xi^3=0} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} \quad \alpha = 1,2 \tag{10.53}$$

*Nota:* los índices con letras griegas varían de 1 a 2.

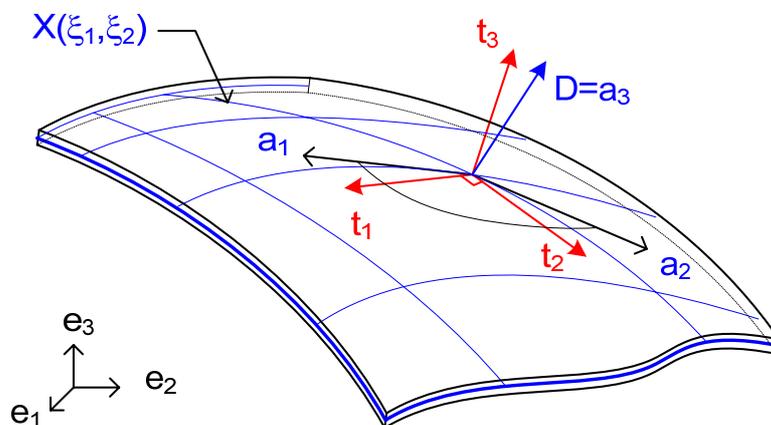
El tercer vector de esta base coincide con el vector director:  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3^P = \mathbf{D}$ . El tensor métrico de la superficie media es:

$$\mathbf{a} = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta \quad a_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\beta} \tag{10.54}$$

Siendo  $\mathbf{a}^\alpha$  los vectores de la base dual definida por  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_{ij}$

El diferencial de área en la superficie media es:

$$dA = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \right| d\xi^1 d\xi^2 \tag{10.55}$$



**Figura 10.11** Sistemas convectivo (a) y cartesiano (t) en el plano medio

### 10.6.1.2 Sistema cartesiano director

Se trata de un sistema de ejes ortogonales unitarios, situados en el plano medio de la cáscara, de tal manera que el tercero de ellos sea el vector director de la cáscara. Los vectores unitarios de dicho sistema se denominan  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{D}$  y se pueden definir mediante una transformación ortogonal de la base fija  $\mathbf{e}$ . Por ejemplo, Simó y Fox (1989) proponen la transformación ortogonal siguiente:

$$\Lambda_D = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}) \mathbf{I}_3 + [\widetilde{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}}] + \frac{1}{1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}) \quad (10.56)$$

La notación  $[\widetilde{\quad}]$  indica la matriz hemisimétrica asociada a un vector y el símbolo  $\otimes$  indica en producto tensorial.

Con dicha transformación se cumple que:

$$\Lambda_D \mathbf{e}_a = \mathbf{D}_a \quad (a = 1, 2) \quad \Lambda_D \mathbf{e}_3 = \mathbf{D} \quad (10.57)$$

La matriz de la transformación está formada por la agrupación por columnas de los tres vectores de la base del sistema cartesiano director:

$$\Lambda_D = [\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \mathbf{D}] \quad (10.58)$$

Al no ser  $\mathbf{D}$  ortogonal al plano medio de la cáscara, este sistema no es en general tangente a dicho plano medio (Figura 10. 12).

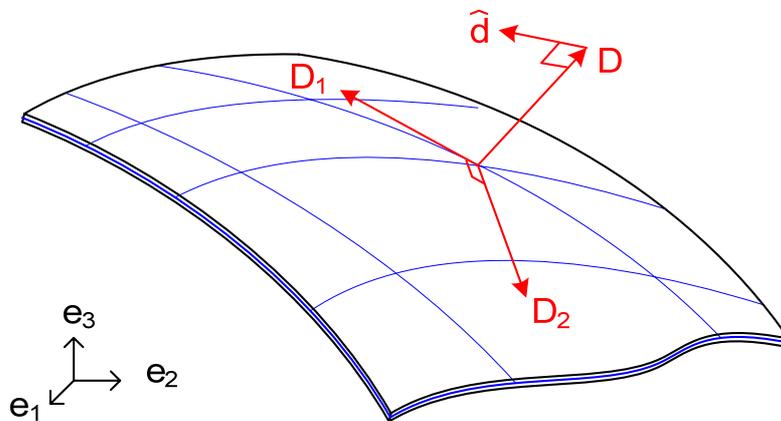


Figura 10. 12 Sistema cartesiano director

### 10.6.2 Deformaciones

El estado de deformación está formado por los desplazamientos  $\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2)$  del plano medio de la cáscara y el cambio en el vector director  $\hat{\mathbf{d}}(\xi^1, \xi^2)$ .

Las coordenadas de un punto cualquiera en el estado deformado son:

$$\mathbf{x}^P = (\mathbf{X} + \mathbf{u}) + (\mathbf{D} + \hat{\mathbf{d}}) \xi^3 \quad (10.59)$$

En la hipótesis de pequeñas deformaciones el cambio del vector director  $\hat{\mathbf{d}}$  es un vector ortogonal al vector director  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0 \quad (10.60)$$

Por lo tanto el cambio del vector director se puede poner como una combinación lineal de los otros dos vectores de la base directora:  $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{D}_1 \theta_1 + \mathbf{D}_2 \theta_2$ . Agrupando los dos vectores en una matriz, el cambio del vector director se puede expresar en forma compacta como:

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_R \boldsymbol{\theta} \quad (10.61)$$

siendo  $\boldsymbol{\theta}$  el vector con las dos componentes de los dos vectores  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$ , que dan lugar al cambio en la orientación del vector director.

La naturaleza del vector  $\boldsymbol{\theta}$  puede aclararse si se considera que el cambio del vector director se puede obtener siempre mediante una rotación por medio de la misma matriz  $\mathbf{\Lambda}_D$  de algún vector  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ :

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{\Lambda}_D \bar{\boldsymbol{\theta}}$$

Sustituyendo en la condición de ortogonalidad de  $\mathbf{D}$  y  $\hat{\mathbf{d}}$  se obtiene:

$$(\mathbf{\Lambda}_D \mathbf{e}_3)^T (\mathbf{\Lambda}_D \bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_3^T \bar{\boldsymbol{\theta}} = 0$$

Es decir que el vector  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  es ortogonal al vector  $\mathbf{e}_3$ , por lo que sólo tiene componentes en los otros dos ejes.

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Por lo tanto el vector de cambio del director es, como se había deducido:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{\Lambda}_D \bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}_1 \theta_1 + \mathbf{D}_2 \theta_2$$

### 10.6.3 Formulación en coordenadas cartesianas

La formulación podría desarrollarse en las coordenadas curvilíneas de la superficie de referencia  $\xi$ , pero sin embargo resulta más práctico, a efectos de introducción de las ecuaciones constitutivas y de los campos interpolados de tensiones, el empleo de un sistema de coordenadas cartesianas local en cada punto de la cáscara.

El vector unitario normal a la superficie de referencia de la cáscara  $\mathbf{t}_3$  es:

$$\mathbf{t}_N = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \quad \mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{t}_N}{|\mathbf{t}_N|} \quad (10.62)$$

Definimos una base cartesiana local al punto  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$  mediante la transformación ortogonal siguiente, que transforma el vector  $\mathbf{e}_3$  de la base inercial en el vector normal  $\mathbf{t}_3$  por medio de una rotación alrededor del eje perpendicular a  $\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{t}_3$ .

$$\Lambda_n = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}_3) \mathbf{I}_3 + [\widetilde{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_3}] + \frac{1}{1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}_3} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_3) \otimes (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_3) \quad (10.63)$$

Es decir:

$$\Lambda_n \mathbf{e}_a = \mathbf{t}_a \quad (a = 1 - 3) \quad (10.64)$$

Con esta construcción, los vectores  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  están contenidos en el plano tangente a la cáscara en su superficie de referencia (Figura 10.11).

Denominamos  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  a las coordenadas cartesianas medidas en dirección de los vectores  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  de la base local.

La matriz jacobiana de la transformación entre el sistema convectivo en la superficie media  $\mathbf{a}_i$  y el sistema cartesiano local  $\mathbf{t}_i$ , está compuesta por los tres vectores de la base convectiva agrupados en columnas:

$$\mathbf{J}_n = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^1} \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^2} \quad \mathbf{D} \right] \quad (10.65)$$

Las componentes de estos vectores en el sistema cartesiano local son:

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{D} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{D} \cdot \mathbf{t}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{D} \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \quad (10.66)$$

### 10.6.4 Deformaciones unitarias en coordenadas cartesianas

La medida más general de las deformaciones unitarias es el tensor de Green-Lagrange, que es la diferencia entre los tensores métricos en las posiciones deformada e inicial del sólido. Esta medida de la deformación unitaria es general y válida para cualquier magnitud de la deformación, por lo que será necesario efectuar

un proceso de linealización de la misma para adaptarla al caso de pequeñas deformaciones.

- En un punto P cualquiera de la cáscara, los vectores de la base en las direcciones  $\bar{x}_1 \bar{x}_2$  en los estados inicial y deformado son:

$$\mathbf{t}_a^P = \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \bar{x}_a} \quad \mathbf{t}_{0a}^P = \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_a} \quad a = 1, 2 \quad (10.67)$$

Los tensores métricos en dicho punto son:

$$g_{ab}^P = \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \bar{x}_b} \quad G_{ab}^P = \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_b} \quad a, b = 1, 2 \quad (10.68)$$

Por lo tanto el tensor de Green-Lagrange en las direcciones  $\bar{x}_1 \bar{x}_2$  es:

$$E_{ab}^P = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \bar{x}_b} - \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_b} \right) \quad a, b = 1, 2 \quad (10.69)$$

Sustituyendo las expresiones de  $\mathbf{x}^P$  y  $\mathbf{X}^P$ :

$$E_{ab}^P = \frac{1}{2} \left[ \left( (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,a} + \xi^3 (\mathbf{D} + \hat{\mathbf{d}})_{,a} \right) \cdot \left( (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,b} + \xi^3 (\mathbf{D} + \hat{\mathbf{d}})_{,b} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{X} + \xi^3 \mathbf{D})_{,a} \cdot (\mathbf{X} + \xi^3 \mathbf{D})_{,b} \right] \right] \quad a, b = 1, 2$$

Se ha empleado  $(\bullet)_{,a} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial \bar{x}_a}$  para indicar la derivada respecto de las coordenadas cartesianas tangentes a la cáscara  $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ . Desarrollando y reagrupando se obtiene:

$$E_{ab}^P = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{u} + \xi^3 \hat{\mathbf{d}})_{,a} \cdot (\mathbf{X} + \xi^3 \mathbf{D})_{,b} + (\mathbf{u} + \xi^3 \hat{\mathbf{d}})_{,b} \cdot (\mathbf{X} + \xi^3 \mathbf{D})_{,a} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{u} + \xi^3 \hat{\mathbf{d}})_{,a} \cdot (\mathbf{u} + \xi^3 \hat{\mathbf{d}})_{,b} \right]$$

Agrupando en potencias de la coordenada  $\xi^3$  se obtiene:

$$E_{ab}^P = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,a} \cdot \mathbf{X}_{,b} + \mathbf{X}_{,a} \cdot \mathbf{u}_{,b}) \\ + \frac{1}{2} \xi^3 (\mathbf{u}_{,a} \cdot \mathbf{D}_{,b} + \mathbf{u}_{,b} \cdot \mathbf{D}_{,a} + \mathbf{X}_{,a} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{,b} + \mathbf{X}_{,b} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{,a}) \\ + \frac{1}{2} (\xi^3)^2 (\hat{\mathbf{d}}_{,a} \cdot \mathbf{d}_{,b} + \mathbf{d}_{,a} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{,b}) \\ + \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{u} + \xi^3 \hat{\mathbf{d}})_{,a} \cdot (\mathbf{u} + \xi^3 \hat{\mathbf{d}})_{,b} \right]$$

El último término, que es todo él cuadrático en las deformaciones, se desprecia en el caso lineal. El tercer término, que es cuadrático en  $\xi^3$ , corresponde a curvaturas de segundo orden y se desprecia para cáscaras delgadas.

Despreciando dichos términos se obtiene la expresión linealizada del tensor de deformaciones unitarias en P, que se denominará  $\varepsilon^P$ , y que es válida sólo para el caso de pequeñas deformaciones:

$$\varepsilon_{ab}^P = \varepsilon_{ab} + \xi^3 \kappa_{ab} \quad a, b = 1, 2 \quad (10.70)$$

El primer sumando son las deformaciones unitarias de membrana  $\varepsilon_{ab}$ , que son constantes, y el segundo son las debidas a la flexión, que varían linealmente en el espesor. Recordando que  $\mathbf{X}_{,a} = \mathbf{t}_a$  la expresión de los distintos términos es:

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,a} \cdot \mathbf{t}_b + \mathbf{t}_a \cdot \mathbf{u}_{,b}) \quad (10.71)$$

$$\kappa_{ab} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,a} \cdot \mathbf{D}_{,b} + \mathbf{u}_{,b} \cdot \mathbf{D}_{,a} + \mathbf{t}_a \cdot \hat{\mathbf{d}}_{,b} + \mathbf{t}_b \cdot \hat{\mathbf{d}}_{,a}) \quad (10.72)$$

• Las dos deformaciones unitarias de cortadura tienen expresiones similares, pero considerando la coordenada  $\xi^3$ :

$$E_{a3}^P = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \xi^3} \right) \quad a = 1, 2 \quad (10.73)$$

$$E_{a3}^P = \frac{1}{2} \left[ \left( (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,a} + \xi^3 (\mathbf{D} + \hat{\mathbf{d}})_{,a} \right) \cdot (\mathbf{D} + \hat{\mathbf{d}}) - (\mathbf{X} + \xi^3 \mathbf{D})_{,a} \cdot \mathbf{D} \right]$$

Desarrollando, despreciando los términos cuadráticos en las deformaciones y los lineales en la coordenada  $\xi^3$ , se obtienen las deformaciones de cortadura linealizadas, que son constantes en el espesor de la cáscara:

$$\gamma_a = 2\varepsilon_{a3} = \mathbf{u}_{,a} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{t}_a \cdot \hat{\mathbf{d}} \quad a = 1, 2 \quad (10.74)$$

Todas las deformaciones unitarias anteriores se agrupan, para los desarrollos posteriores, en forma de 3 vectores:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} \quad (10.75)$$

### 10.6.5 Interpolación isoparamétrica

La interpolación de las coordenadas del plano medio de la cáscara sigue el planteamiento isoparamétrico, apoyándose en las coordenadas de los nudos situados en el plano medio  $\mathbf{X}_I$ :

$$\mathbf{X} = \sum_I N_I(\xi, \eta) \mathbf{X}_I \quad (10.76)$$

La interpolación de los desplazamientos sigue el mismo método, en función de las deformaciones de los nudos  $\mathbf{U}_I$

$$\mathbf{u} = \sum_I N_I(\xi, \eta) \mathbf{U}_I \quad (10.77)$$

En particular, se considera el elemento de 4 nudos (Figura 10.13), en el que la interpolación corresponde a la ley bilineal clásica:

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \quad (10.78)$$

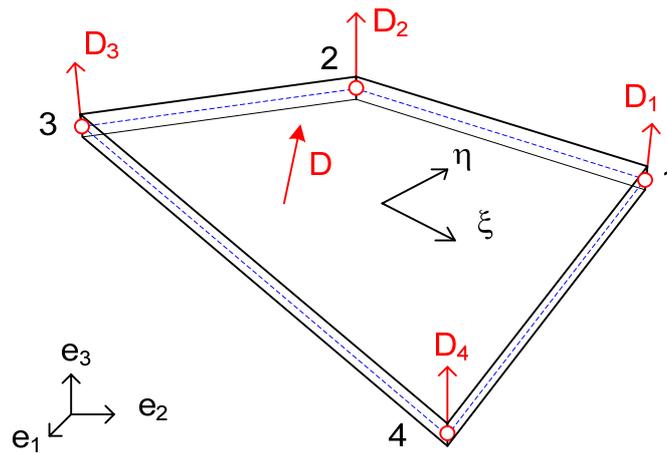


Figura 10.13 Elemento finito cáscara de 4 nudos

La interpolación del vector director  $\mathbf{D}$  requiere un tratamiento un poco diferente. Sean  $\mathbf{D}_I$  los vectores directores en los nudos del elemento; consideramos la interpolación siguiente para el vector director dentro del elemento:

$$\mathbf{D} = \frac{\sum_I N_I \mathbf{D}_I}{\left| \sum_I N_I \mathbf{D}_I \right|} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{|\tilde{\mathbf{D}}|} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{\tilde{D}} \quad (10.79)$$

siendo  $\tilde{D}$  el módulo del vector director promediado  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

### 10.6.5.1 Derivada del vector director

Las deformaciones unitarias debidas a la flexión requieren el empleo de la derivada del vector director respecto de las coordenadas locales. Su expresión se desarrolla en el anejo.

$$\mathbf{D}_{,a} = \frac{1}{\tilde{D}} \left( \mathbf{I}_3 - \mathbf{D}\mathbf{D}^T \right) \sum_I N_{I,a} \mathbf{D}_I \quad (10.80)$$

### 10.6.5.2 Interpolación del cambio del vector director $\hat{\mathbf{d}}$

Se trata de obtener una interpolación del vector  $\hat{\mathbf{d}}$  (cambio del vector director) que sea consistente con la interpolación del propio vector director  $\mathbf{D}$ , es decir que el vector  $\hat{\mathbf{d}}$  interpolado debe estar contenido en el plano tangente al  $\mathbf{D}$  interpolado. Su expresión se desarrolla en el anejo, y resulta ser:

$$\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{\tilde{D}} \left( \mathbf{I}_3 - \mathbf{D}\mathbf{D}^T \right) \sum_I N_I \hat{\mathbf{d}}_I \quad (10.81)$$

Definiendo la matriz

$$\bar{\mathbf{T}}^I = \frac{1}{\tilde{D}} \left( \mathbf{I}_3 - \mathbf{D}\mathbf{D}^T \right) N_I \quad (10.82)$$

el cambio del vector director se puede poner en la forma:

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_I \bar{\mathbf{T}}^I \hat{\mathbf{d}}_I \quad (10.83)$$

En las expresiones anteriores, el vector  $\hat{\mathbf{d}}_I$  representa el cambio del vector director  $\mathbf{D}_I$  en el nudo  $I$ . Su valor se puede expresar en función de las dos rotaciones del nudo  $\{\theta_{1I}, \theta_{2I}\}$ , mediante una matriz de rotación  $\Lambda_{RI}$  de tamaño 3x2, cuyas columnas son los dos vectores del sistema cartesiano director en el nudo  $I$ :

$$\hat{\mathbf{d}}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1I} & \mathbf{D}_{2I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \end{Bmatrix} = \Lambda_{RI} \boldsymbol{\theta}_I \quad (10.84)$$

### 10.6.5.3 Derivada del cambio del vector director $\hat{\mathbf{d}}$

Su expresión se obtiene derivando en la ecuación (10.83) de interpolación de  $\hat{\mathbf{d}}$ :

$$\hat{\mathbf{d}}_{,a} = \sum_I \mathbf{T}_a^I \hat{\mathbf{d}}_I \quad (10.85)$$

Las matrices  $\mathbf{T}_a^I$  se obtienen derivando las  $\bar{\mathbf{T}}^I$  respecto a  $\bar{x}_a$  y valen:

$$\mathbf{T}_a^I = \frac{1}{\tilde{D}} \left[ \bar{\bar{\mathbf{D}}} N_{I,a} - \left( \mathbf{D}_{,a} \mathbf{D}^T + \mathbf{D} \mathbf{D}_{,a}^T + \frac{\mathbf{D}^T \mathbf{D}_{,a}}{\tilde{D}} \bar{\bar{\mathbf{D}}} \right) N_I \right] \quad (10.86)$$

con:  $\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{D}\mathbf{D}^T$ .

#### 10.6.5.4 Jacobiana de la transformación

La matriz jacobiana de la transformación entre las coordenadas naturales  $\xi, \eta$  y las cartesianas  $\bar{x}$  es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{,\xi} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_{,\xi} \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{X}_{,\eta} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_{,\eta} \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (10.87)$$

La relación entre las derivadas de las funciones de interpolación en ambos sistemas es:

$$\begin{Bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix} \quad (10.88)$$

Siendo las derivadas:  $\mathbf{X}_{,\xi} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}$ ,  $\mathbf{X}_{,\eta} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta}$  y  $N_{I,a} \equiv \frac{\partial N_I}{\partial \bar{x}_a}$ ,  $a = 1, 2$ .

#### 10.6.6 Aproximación de las deformaciones unitarias

Sustituyendo las interpolaciones definidas en el apartado anterior en las expresiones de las deformaciones unitarias (10.72) se obtiene el valor de éstas en función de las deformaciones de los nudos.

##### 10.6.6.1 Deformaciones unitarias de membrana

Las tres deformaciones unitarias contenidas en el plano tangente, definidas en (10.71), dependen de los desplazamientos pero no de los giros. Sustituyendo la expresión de la interpolación de desplazamientos su valor resulta ser:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1,4} \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{t}_1^T & 0 & 0 \\ N_{I,2} \mathbf{t}_2^T & 0 & 0 \\ N_{I,1} \mathbf{t}_2^T + N_{I,2} \mathbf{t}_1^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix} \quad (10.89)$$

Agrupando las expresiones de todos los nudos en una sola matriz, las tres deformaciones unitarias de membrana se pueden poner en forma compacta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M = \mathbf{B}_M \boldsymbol{\delta}^e \quad (10.90)$$

##### 10.6.6.2 Deformaciones unitarias de flexión y torsión

La expresión de las tres curvaturas  $\kappa$  definidas en (10.75) y (10.72) dependen de los desplazamientos, del vector director y de su cambio. Sustituyendo las expresiones de la interpolación de dichas magnitudes, se obtiene:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1,4} \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{D}_{,1}^T & \mathbf{t}_1^T \mathbf{T}_1^I \boldsymbol{\Lambda}_{RI} \\ N_{I,2} \mathbf{D}_{,2}^T & \mathbf{t}_2^T \mathbf{T}_2^I \boldsymbol{\Lambda}_{RI} \\ N_{I,1} \mathbf{D}_{,2}^T + N_{I,2} \mathbf{D}_{,1}^T & (\mathbf{t}_1^T \mathbf{T}_2^I + \mathbf{t}_2^T \mathbf{T}_1^I) \boldsymbol{\Lambda}_{RI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix} \quad (10.91)$$

Agrupando las expresiones de todos los nudos, las curvaturas se pueden poner en forma compacta en función de las deformaciones nodales como:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_F \boldsymbol{\delta}^e \quad (10.92)$$

### 10.6.6.3 Deformaciones unitarias de cortadura

Las dos deformaciones unitarias de cortante definidas en (10.74) dependen asimismo de los desplazamientos, del vector director y de su cambio. Sustituyendo las expresiones de la interpolación de dichas magnitudes, las deformaciones de cortadura se pueden expresar en función de las deformaciones nodales en la forma:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \sum_{I=1,4} \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{D}^T & \mathbf{t}_1^T \bar{\mathbf{T}}^I \boldsymbol{\Lambda}_{RI} \\ N_{I,2} \mathbf{D}^T & \mathbf{t}_2^T \bar{\mathbf{T}}^I \boldsymbol{\Lambda}_{RI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix} \quad (10.93)$$

Agrupando las expresiones de todos los nudos se puede poner que:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_C \boldsymbol{\delta}^e \quad (10.94)$$

Esta representación de las deformaciones cortantes de lugar al fenómeno de bloqueo por cortante, ya conocido en las placas. Por esta razón se emplean en su lugar los campos impuestos de deformación de cortante, como se explica a continuación.

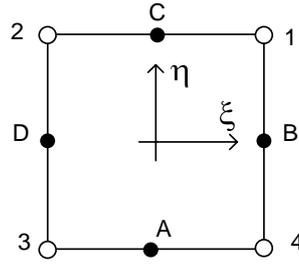
### 10.6.6.4 Campo impuesto de deformaciones unitarias de cortadura

Siguiendo el mismo método que en los elementos placa Mindlin, se emplea un campo de cortante impuesto lineal en las coordenadas naturales del elemento. El campo de  $\gamma_\xi$  es variable en la dirección  $\eta$  y se ajusta con los valores de dicha tensión en los puntos A ( $\eta=-1$ ) y C ( $\eta=1$ ) (Figura 10.14):

$$\gamma_\xi = \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_\xi^A + \frac{1}{2}(1+\eta)\gamma_\xi^C \quad (10.95)$$

El campo  $\gamma_\eta$  es variable en la dirección  $\xi$  y se ajusta con los valores en los puntos B y D:

$$\gamma_\eta = \frac{1}{2}(1-\xi)\gamma_\eta^D + \frac{1}{2}(1+\xi)\gamma_\eta^B \quad (10.96)$$



**Figura 10.14** Puntos para la definición del campo de cortadura

Los valores de las deformaciones de cortante en los puntos de ajuste son:

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi}^A &= \mathbf{u}_{,\xi}^A \cdot \mathbf{D}^A + \mathbf{X}_{,\xi}^A \cdot \hat{\mathbf{d}}^A & \gamma_{\xi}^C &= \mathbf{u}_{,\xi}^C \cdot \mathbf{D}^C + \mathbf{X}_{,\xi}^C \cdot \hat{\mathbf{d}}^C \\ \gamma_{\eta}^B &= \mathbf{u}_{,\eta}^B \cdot \mathbf{D}^B + \mathbf{X}_{,\eta}^B \cdot \hat{\mathbf{d}}^B & \gamma_{\eta}^D &= \mathbf{u}_{,\eta}^D \cdot \mathbf{D}^D + \mathbf{X}_{,\eta}^D \cdot \hat{\mathbf{d}}^D \end{aligned} \quad (10.97)$$

Las derivadas de las deformaciones en los puntos del ajuste tienen expresiones inmediatas, en base a la hipótesis de interpolación bilineal:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\xi}^A &= (\mathbf{U}_4 - \mathbf{U}_3) / 2 & \mathbf{u}_{,\xi}^C &= (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) / 2 \\ \mathbf{u}_{,\eta}^B &= (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_4) / 2 & \mathbf{u}_{,\eta}^D &= (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_3) / 2 \end{aligned} \quad (10.98)$$

El cambio del vector director en los puntos del ajuste tiene asimismo expresiones inmediatas aproximadas en función de sus valores en los nudos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}^A &= (\hat{\mathbf{d}}_3 + \hat{\mathbf{d}}_4) / 2 & \hat{\mathbf{d}}^B &= (\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_4) / 2 \\ \hat{\mathbf{d}}^C &= (\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_2) / 2 & \hat{\mathbf{d}}^D &= (\hat{\mathbf{d}}_2 + \hat{\mathbf{d}}_3) / 2 \end{aligned} \quad (10.99)$$

Por otra parte, estos cambios en el vector director se expresan en función de los dos giros nodales en la forma  $\hat{\mathbf{d}}_I = \mathbf{\Lambda}_{RI} \boldsymbol{\theta}_I$  según (10.61), donde  $\mathbf{\Lambda}_{RI}$  está formada por los dos vectores directores  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$  en el nudo I.

Sustituyendo todas las expresiones anteriores en el campo de deformaciones cortantes impuesto (10.95) y (10.96), se puede expresar éste en función de las deformaciones nodales, lo cual define la matriz  $\mathbf{B}_{LC}$ :

$$\boldsymbol{\gamma}_L = \mathbf{B}_{LC} \boldsymbol{\delta}^e \quad (10.100)$$

$$\mathbf{B}_{LC} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 + \eta)\mathbf{D}^{C^T} & (1 + \eta)\mathbf{X}_{,\xi}^{C^T} \mathbf{\Lambda}_{R1} & -(1 + \eta)\mathbf{D}^{C^T} & (1 + \eta)\mathbf{X}_{,\xi}^{C^T} \mathbf{\Lambda}_{R2} \\ (1 + \xi)\mathbf{D}^{B^T} & (1 + \xi)\mathbf{X}_{,\eta}^{B^T} \mathbf{\Lambda}_{R1} & (1 - \xi)\mathbf{D}^{D^T} & (1 - \xi)\mathbf{X}_{,\eta}^{D^T} \mathbf{\Lambda}_{R2} \\ \dots & & & \\ -(1 - \eta)\mathbf{D}^{A^T} & (1 - \eta)\mathbf{X}_{,\xi}^{A^T} \mathbf{\Lambda}_{R3} & (1 - \eta)\mathbf{D}^{A^T} & (1 - \eta)\mathbf{X}_{,\xi}^{A^T} \mathbf{\Lambda}_{R4} \\ \dots & -(1 - \xi)\mathbf{D}^{D^T} & (1 - \xi)\mathbf{X}_{,\eta}^{D^T} \mathbf{\Lambda}_{R3} & -(1 + \xi)\mathbf{D}^{B^T} & (1 + \xi)\mathbf{X}_{,\eta}^{B^T} \mathbf{\Lambda}_{R4} \end{bmatrix} \quad (10.101)$$

Finalmente, estas deformaciones de cortadura se expresan en el sistema general mediante la matriz jacobiana inversa:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_L = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_{LC} \boldsymbol{\delta}^e = \bar{\mathbf{B}}_C \boldsymbol{\delta}^e \quad (10.102)$$

#### 10.6.6.5 Matriz B

Agrupando las expresiones de las distintas deformaciones unitarias se obtiene la expresión de la matriz  $\mathbf{B}$ , que las relaciona con todos los grados de libertad nodales. Suponiendo que se ha empleado la representación de las deformaciones de cortadura mediante un campo impuesto, dicha matriz es:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_M \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_M \\ \mathbf{B}_F \\ \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_{LC} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (10.103)$$

Si las deformaciones unitarias de cortadura se representan en su forma directa a partir de las derivadas de las deformaciones, la expresión de la matriz  $\mathbf{B}$  es la misma anterior, sustituyendo en la última fila la matriz  $\mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_{LC}$  por la matriz  $\mathbf{B}_C$ .

#### 10.6.7 Esfuerzos interiores. Ecuación constitutiva

Los esfuerzos interiores son las integrales en el espesor de las tensiones en la cáscara. Se pueden separar en tres tipos (Figura 10.15): fuerzas efectivas contenidas en el plano tangente a la superficie media  $\mathbf{n}_M$  (habitualmente conocidas como fuerzas de membrana), momentos de flexión y torsión englobados en el vector  $\mathbf{m}_F$  y esfuerzos cortantes en dirección normal a la superficie media  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{n}_M = \begin{Bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m}_F = \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (10.104)$$

Todos estos esfuerzos se agrupan en un único vector:

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_M \\ \mathbf{m}_F \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (10.105)$$

Estos esfuerzos interiores son energéticamente conjugados de las deformaciones unitarias definidas anteriormente (Simó y Fox, 1989).

Los esfuerzos interiores se relacionan con las deformaciones unitarias por medio de las ecuaciones constitutivas, las cuales se pueden expresar en la forma siguiente, para un material elástico lineal:

$$\mathbf{n}_M = \mathbf{C}_M \boldsymbol{\varepsilon}_M \quad \mathbf{m}_F = \mathbf{C}_F \boldsymbol{\kappa} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{C}_C \boldsymbol{\gamma} \quad (10.106)$$

$$\mathbf{C}_M = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_F = \frac{h^2}{12} \mathbf{C}_M \quad (10.107)$$

$$\mathbf{C}_C = kGh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agrupando todas las expresiones anteriores:

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_M & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_C \end{bmatrix} \quad (10.108)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es la matriz constitutiva del estado elástico lineal, cuya inversa proporciona las deformaciones unitarias producidas por los esfuerzos interiores  $\bar{\mathbf{m}}$ .

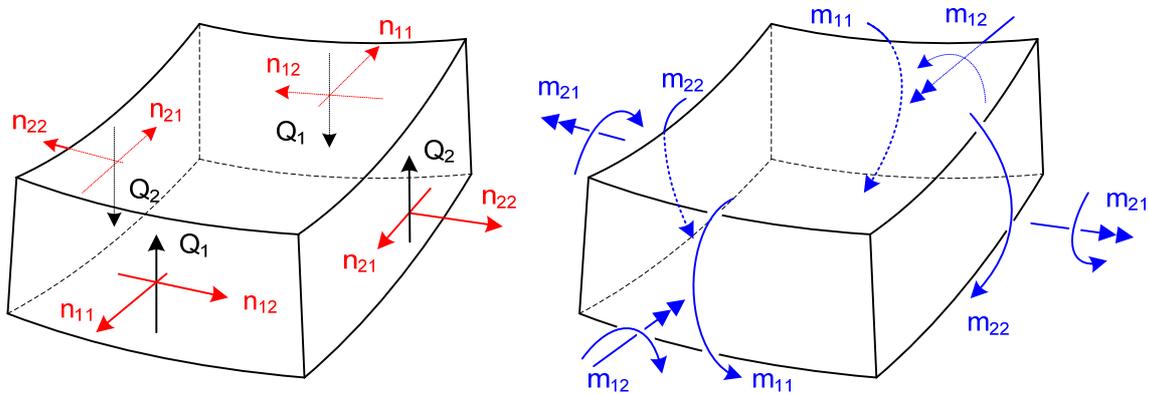


Figura 10.15 Esfuerzos interiores en una cáscara

### 10.6.8 Formulación en desplazamiento. Ecuación de equilibrio

La energía elástica acumulada en la cáscara puede ponerse en función de las deformaciones unitarias y de los esfuerzos interiores en ella:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_M^T \mathbf{n}_M dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{m}_F dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{Q} dA \quad (10.109)$$

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas (10.106):

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_M^T \mathbf{C}_M \boldsymbol{\varepsilon}_M dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_F \boldsymbol{\kappa} dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_C \boldsymbol{\gamma} dA \quad (10.110)$$

Aplicando una variación virtual a las deformaciones unitarias se obtiene:

$$\delta U = \int_A (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_M)^T \mathbf{C}_M \boldsymbol{\varepsilon}_M dA + \int_A (\delta \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{C}_F \boldsymbol{\kappa} dA + \int_A (\delta \boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{C}_C \boldsymbol{\gamma} dA$$

Sustituyendo las deformaciones unitarias en función de las distintas matrices  $\mathbf{B}$  definidas por (10.90), (10.92) y (10.102) se obtiene

$$\delta U = (\delta \boldsymbol{\delta}^e)^T \left[ \int_A \mathbf{B}_M^T \mathbf{C}_M \mathbf{B}_M dA + \int_A \mathbf{B}_F^T \mathbf{C}_F \mathbf{B}_F dA + \int_A \bar{\mathbf{B}}_C^T \mathbf{C}_C \bar{\mathbf{B}}_C dA \right] \boldsymbol{\delta}^e$$

Sean  $\mathbf{q}$  las fuerzas distribuidas actuantes sobre la superficie de la cáscara ( $A$ ) y  $\mathbf{q}_L$  las fuerzas distribuidas actuantes sobre su borde lateral ( $L$ ); el trabajo virtual de las mismas es:

$$\delta W = \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA + \int_L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_L dL$$

Sustituyendo la ley de interpolación se obtiene su forma discreta:

$$\delta W = (\delta \boldsymbol{\delta}^e)^T \left[ \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA + \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL \right] \quad (10.111)$$

Aplicando el principio del trabajo virtual  $\delta U = \delta W$ ,  $\forall \delta \boldsymbol{\delta}^e$  se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_A \mathbf{B}_M^T \mathbf{C}_M \mathbf{B}_M dA + \int_A \mathbf{B}_F^T \mathbf{C}_F \mathbf{B}_F dA + \int_A \bar{\mathbf{B}}_C^T \mathbf{C}_C \bar{\mathbf{B}}_C dA \right] \boldsymbol{\delta}^e \\ & = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA + \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL \end{aligned} \quad (10.112)$$

En ella se identifican la matriz de rigidez del elemento, que tiene tres sumandos, uno para cada tipo de deformación unitaria, y los vectores de fuerzas nodales equivalentes.

### 10.6.9 Formulación híbrida. Interpolación de los esfuerzos interiores

Utilizando una formulación híbrida, el campo de esfuerzos no se relaciona directamente con las deformaciones unitarias mediante la ecuación constitutiva, sino que se interpola en el interior del elemento de acuerdo con la ley lineal siguiente:

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} \quad (10.113)$$

Siendo  $\mathbf{S}$  una matriz de tamaño  $8 \times 14$  y  $\boldsymbol{\beta}$  un vector con los 14 parámetros del ajuste. La estructura de  $\mathbf{S}$  es:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_M & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_C \end{bmatrix} \quad (10.114)$$

$$\mathbf{S}_M = \mathbf{S}_F = \begin{bmatrix} J_{11}^0 J_{11}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{21}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ J_{12}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{22}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ J_{11}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \end{bmatrix} \quad (10.115)$$

$$\mathbf{S}_C = \begin{bmatrix} J_{11}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \end{bmatrix} \quad (10.116)$$

La interpolación de esfuerzos de membrana y flexión sigue lo propuesto por Simó, Fox y Rifai (1989), y la interpolación de cortantes corresponde a Gruttmann y Wagner (2005). Los términos  $J_{ij}^0$  son los valores de la matriz jacobiana evaluada en el centro del elemento. Su presencia es debida a la transformación de los esfuerzos desde el sistema local del elemento al sistema general. El empleo de una jacobiana constante (evaluada en el centro del elemento) permite el cumplimiento del patch test.

La traslación de coordenadas definida por las constantes  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  se introduce en la ley de interpolación con objeto de obtener matrices desacopladas.  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  representan las coordenadas locales del centro de gravedad del elemento:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A} \int \xi dA = \frac{1}{A} \int \xi J d\xi d\eta \quad \bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta dA = \frac{1}{A} \int \eta J d\xi d\eta$$

El área del elemento  $A$  se obtiene empleando la expresión habitual del determinante de la jacobiana:  $A = \int J d\xi d\eta$ .

### 10.6.10 Formulación híbrida. Ecuación de equilibrio

Al ser independientes los campos de deformaciones  $\mathbf{u}$  y de esfuerzos  $\bar{\mathbf{m}}$ , la ecuación de equilibrio se obtiene empleando un principio variacional, basado en la funcional de Hellinger-Reissner. Sean  $\mathbf{q}$  las fuerzas distribuidas actuantes sobre el área de la cáscara ( $A$ ) y  $\mathbf{q}_L$  las fuerzas distribuidas actuantes sobre su borde lateral ( $L$ ). Si el campo de desplazamientos contiene únicamente desplazamientos compatibles, como es el caso, la expresión de dicha funcional es:

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{m}}) = \int_A \left( -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{m}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{m}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{m}} \right) dA - \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA - \int_L \mathbf{u}^T \mathbf{q}_L dL \quad (10.117)$$

La condición estacionaria de la funcional anterior es:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} = \int_A \left[ -\delta\bar{\mathbf{m}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{m}} + \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{m}} + \delta\bar{\mathbf{m}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dA \\ - \int_A \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q} dA - \int_L \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q}_L dL = 0 \end{aligned} \quad (10.118)$$

Sustituyendo las expresiones de la variación del campo de deformaciones unitarias  $\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B} \delta\boldsymbol{\delta}^e$  y del campo de esfuerzos interpolado  $\delta\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{S} \delta\boldsymbol{\beta}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} = \int_A \left[ -\delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{S}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \right] dA \\ - \int_A \delta\boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA - \int_L \delta\boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL = 0 \end{aligned} \quad (10.119)$$

Agrupando los términos correspondientes a los coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  y los correspondientes a las deformaciones de los nudos se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[ -\int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} dA \boldsymbol{\beta} + \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{B} dA \boldsymbol{\delta}^e \right] + \\ \delta\boldsymbol{\delta}^{eT} \left[ \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{S} dA \boldsymbol{\beta} - \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA - \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL \right] = 0 \end{aligned} \quad (10.120)$$

Definiendo las matrices:

$$\mathbf{H} = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} dA \quad \mathbf{G} = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{B} dA \quad (10.121)$$

y los vectores de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{P}_q = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA \quad \mathbf{P}_L = \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q}_L dL \quad (10.122)$$

la condición estacionaria de la funcional se puede poner en forma compacta:

$$\delta\Pi_{HR} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[ -\mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}^e \right] + \delta\boldsymbol{\delta}^{eT} \left[ \mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} - \mathbf{P}_q - \mathbf{P}_L \right] = 0 \quad (10.123)$$

Para que esta condición se cumpla ante cualquier variación de las deformaciones nodales  $\delta\boldsymbol{\delta}^e$  y de los coeficientes de la interpolación de esfuerzos  $\boldsymbol{\beta}$ , se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} -\mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}^e &= 0 \\ \mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} - \mathbf{P}_q - \mathbf{P}_L &= 0 \end{aligned} \quad (10.124)$$

Estas son las ecuaciones de equilibrio del elemento y permiten obtener los valores de los distintos parámetros  $\boldsymbol{\delta}^e$  y  $\boldsymbol{\beta}$ . De la primera de ellas, se puede obtener directamente el valor de los coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  de la interpolación de esfuerzos en el elemento, sin necesidad de ensamblarla con los restantes elementos:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \boldsymbol{\delta}^e \quad (10.125)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento cáscara, que define su matriz de rigidez:

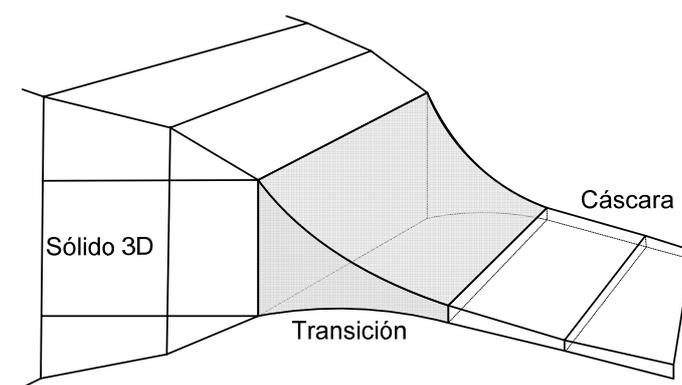
$$\mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \delta^e = \mathbf{P}_q + \mathbf{P}_L \quad (10.126)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (10.127)$$

## 10.7. TRANSICIÓN SÓLIDO - CÁSCARA

En el análisis efectuado hasta ahora se han considerado dos tipos de elementos distintos: por una parte los elementos tridimensionales sólidos, que permiten modelizar un dominio continuo en el que el material se extiende en tres direcciones; y por otra parte los elementos cáscara que se adaptan a dominios laminares curvos, con una dimensión menor que las otras dos. Con ellos se pueden resolver gran cantidad de problemas estructurales, pero sin embargo hay muchas estructuras en las que se encuentran a la vez zonas que se extienden claramente en tres dimensiones y zonas laminares, existiendo transiciones más o menos suaves entre ambas zonas (Figura 10.16). Las zonas sólidas se modelizan adecuadamente empleando elementos tridimensionales, y las zonas laminares mediante cáscaras, pero el problema es cómo modelizar la unión entre ambas zonas.

El problema se agrava por el hecho de que en estas zonas de transición suele haber concentraciones de tensión, ya que se trata de una zona de cambio en la forma del material. Por lo tanto interesa modelizar la transición de la mejor forma posible, si se desean calcular las tensiones con un mínimo de precisión.

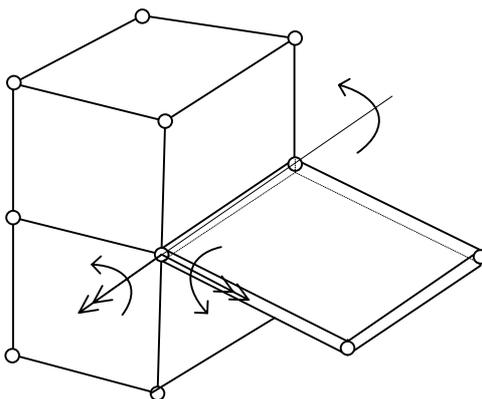


**Figura 10.16** Transición sólido cáscara

Una solución, a veces empleada en la práctica, consiste en unir directamente el elemento sólido con el elemento cáscara (Figura 10.17). Esto no es correcto desde el punto de vista teórico, al no haber compatibilidad de deformaciones entre un elemento y otro, ya que las funciones de interpolación y las deformaciones de los nudos son distintas en ambos elementos. Los giros presentes en la cáscara no

encuentran su continuidad en el elemento sólido, por lo que esta unión se comporta de alguna manera como una articulación.

Esta modelización de la unión no es por lo tanto correcta, y una solución de este tipo sólo se justifica para el análisis de una estructura en la que la unión sólido cáscara no tenga mucha importancia, siendo otras zonas de la estructura las que condicionen el campo general de deformaciones y tensiones; y en todo caso únicamente para obtener resultados en zonas alejadas de la unión.

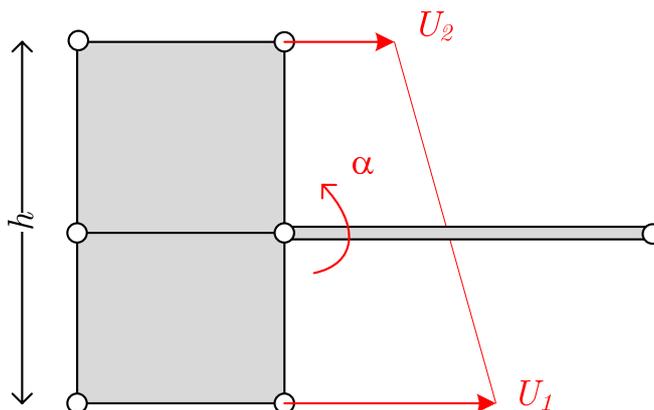


**Figura 10.17 Conexión imperfecta entre elementos sólidos y cáscara**

Una solución empleada a veces para cumplir con la continuidad del giro consiste en establecer una correspondencia entre el giro de la cáscara y los desplazamientos del sólido a través de alguna relación geométrica entre ambos. Para establecerla se debe efectuar alguna suposición relativa a que las caras de unión del sólido sean rígidas; por ejemplo en el caso mostrado en la Figura 10.18, puede establecerse la siguiente relación aproximada entre el giro de la cáscara  $\alpha$  y las deformaciones laterales  $U$ :

$$\alpha = \frac{U_1 - U_2}{h}$$

Esta relación geométrica se introduce como ecuación de restricción en el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura. Lógicamente esta aproximación sólo es válida si el tamaño  $h$  del elemento sólido es pequeño. Cuando la configuración geométrica de la conexión sólido cáscara es sencilla, es fácil plantear ecuaciones de compatibilidad geométrica del tipo anterior, pero si la disposición geométrica es compleja (p.e. con elementos no orientados según los ejes cartesianos), las relaciones geométricas entre unos y otros grados de libertad no son sencillas de escribir.



**Figura 10.18** Conexión aproximada del giro entre sólido y cáscara

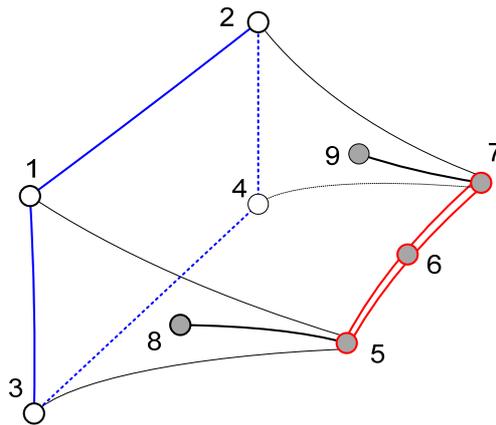
### 10.8. ELEMENTOS DE TRANSICIÓN SÓLIDO CÁSCARA

La solución más correcta al problema de la transición entre elementos sólido y cáscara consiste en utilizar unos elementos finitos de un tipo especial, que se llaman elementos de transición. Se trata de elementos híbridos entre los sólidos y las cáscaras (Figura 10.19) y tienen tres tipos de caras:

- ◆ Caras como sólido (S): son las que les permiten unirse a elementos tridimensionales.
- ◆ Caras como cáscara (C), que les permiten unirse con elementos cáscara como los ya desarrollados.
- ◆ Caras de transición (T), que pueden unirse a otras caras de transición de estos mismos elementos.

Estos elementos tienen dos tipos de nudos: los nudos como elemento sólido (marcados con ○), que tienen tres desplazamientos cada uno, y los nudos como cáscara (marcados con ●) que tienen cinco grados de libertad (tres desplazamientos y dos giros). Los nudos situados en las caras de transición se consideran del segundo tipo, con cinco grados de libertad.

Como ejemplo, en la Figura 10.19 se muestra un elemento de transición entre un sólido y una cáscara. El elemento tiene una cara S con cuatro nudos (1 a 4), otra cara C con tres nudos (5 a 7) y dos caras de transición T (nudos 8 y 9).



**Figura 10.19** Elemento de transición sólido cáscara

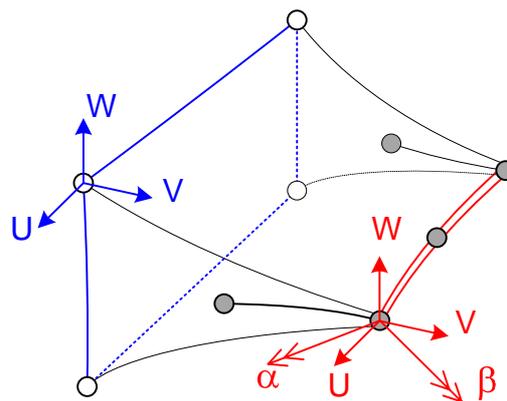
Si el número total de nudos de un elemento de este estilo es  $n$ , se considera que los  $m$  primeros corresponden a los nudos como sólido y los  $n-m$  restantes a nudos como cáscara. Para establecer la interpolación de coordenadas se supone que cada nudo aporta las funciones de interpolación según su naturaleza, bien como sólido  $N^S$  o como cáscara  $N^C$ . Por lo tanto la interpolación de coordenadas se representa mediante la expresión:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1,m} N_i^S(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{x}_i + \sum_{i=m+1,n} \mathbf{x}_i N_i^C(\xi, \eta) + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=m+1,n} N_i^C(\xi, \eta) t_i \mathbf{D}^i \quad (10.128)$$

Análogamente el campo de desplazamientos se define mediante la expresión:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1,m} \mathbf{U}_i N_i^S + \sum_{i=m+1,n} \mathbf{U}_i N_i^C + \zeta \sum_{i=m+1,n} N_i^C \alpha_i \mathbf{g}_1^i + \zeta \sum_{i=m+1,n} N_i^C \beta_i \mathbf{g}_2^i \quad (10.129)$$

En ella cada nudo colabora con sus grados de libertad (Figura 10.20).



**Figura 10.20** Grados de libertad de un elemento de transición

La obtención de la matriz  $\mathbf{B}$  sigue el método general, utilizando las expresiones anteriores del campo de desplazamientos y de la interpolación de coordenadas.

Para la representación del campo de tensiones, existe otro problema: los elementos

sólidos utilizan un tensor de tensiones de seis componentes, incluyendo las tres tensiones normales y las tres tensiones cortantes; mientras que las cáscaras utilizan un tensor de cinco componentes, al haberse prescindido de la tensión normal a la cáscara  $\sigma_{Lz}$ , por la hipótesis inherente a las cáscaras. El problema entonces es en qué parte del elemento se considerará la tensión  $\sigma_{Lz}$  (comportamiento como sólido), y en qué parte se supondrá nula (comportamiento como cáscara). El problema no tiene una solución única, y pueden plantearse varias alternativas:

- ◆ Considerar que  $\sigma_{Lz} = 0$  en todo el elemento. Esto puede ser válido si todo el elemento es muy delgado, y predomina su comportamiento como cáscara frente al de sólido.
- ◆ Considerar que  $\sigma_{Lz}$  es distinta de cero en todo el elemento, lo cual puede ser válido para elementos bastante gruesos, donde predomina su comportamiento como sólido.
- ◆ Considerar que  $\sigma_{Lz}$  no es nula en las proximidades de la cara como sólido, y se va haciendo nula a medida que nos vamos acercamos hacia las caras como cáscara. Marcar el límite donde  $\sigma_{Lz}$  se hace cero no es fácil y depende de cada elemento. La forma práctica de implementarlo es considerar una matriz constitutiva  $\mathbf{C}_L$  diferente en cada punto de la integración numérica, según que en dicho punto se considere la tensión  $\sigma_{Lz}$  nula o no.

Sea cual sea la hipótesis considerada el proceso general es el mismo que para las cáscaras: se define un sistema de lámina  $x_L, y_L, z_L$ , en el que se conoce la matriz  $\mathbf{C}_L$  (con el efecto de  $\sigma_{Lz} = 0$  o no), y esta  $\mathbf{C}_L$  se proyecta sobre el sistema general.

## 10.9. EJEMPLOS

A continuación se muestran algunos ejemplos clásicos de la bibliografía de análisis de cáscaras por el método de los elementos finitos. Todos ellos se han resuelto empleando los desarrollos teóricos descritos anteriormente, adecuadamente implementados en el entorno de programación Matlab®.

En todos los casos se emplean tanto la formulación basada en el continuo (apartado 10.5) como la basada en las resultantes de las tensiones (apartado 10.6), y esta última en sus tres formulaciones distintas: en desplazamiento, en desplazamiento con campo de cortante impuesto e híbrida. Tanto en la formulación basada en el continuo como en la de desplazamiento se emplea la integración reducida del cortante.

### 10.9.1 Bóveda cilíndrica

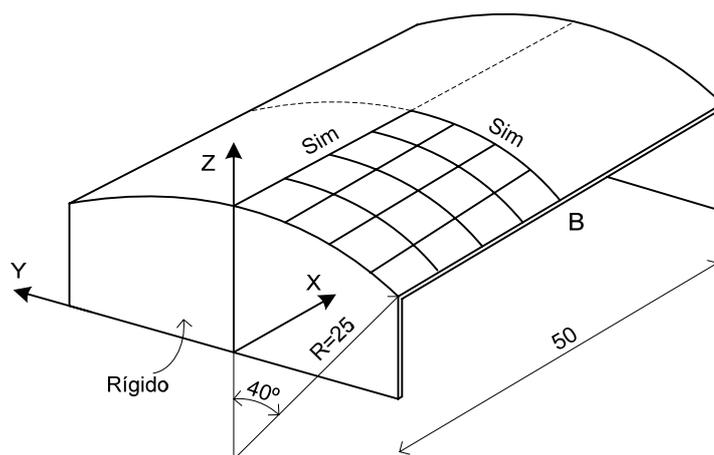
Se analiza una cáscara cilíndrica, muy habitual en la bibliografía, conocida como bóveda de Scordellis-Lo (Figura 10.21). Sus dimensiones son: longitud  $L=50$ , radio de

curvatura  $R=25$ , ángulo  $\theta=80^\circ$  y espesor=0.25.

Está sometida a una carga vertical uniforme en dirección Z, de valor  $q=90$ . Las propiedades del material son  $E=4.32 \cdot 10^8$  y  $\nu=0$ .

La cáscara está simplemente apoyada en sus dos extremos en dos paredes rígidas, que impiden las deformaciones en las direcciones Y y Z, pero dejan libre el movimiento X y los giros. Por simetría sólo es necesario mallar un cuarto de la cáscara, empleando elementos cáscara curvos de 4 nudos con mallados regulares de finura creciente. El modelo Matlab para este ejemplo está definido en el fichero scordellis.m.

La Figura 10.22 muestra la deformada de la cáscara, en la que se observa que el punto B sube en dirección Z. La tabla 10.1 muestra el valor obtenido para dicha deformación vertical en el punto B para diversos mallados, con relación al valor aceptado en la bibliografía como exacto para esta deformación. Se observa la buena convergencia de las distintas formulaciones, a pesar de ser éste un problema dominado por el efecto membrana frente al de flexión.



**Figura 10.21 Cáscara de Scordellis-Lo**

Malla de $\frac{1}{4}$ de cáscara	Formulación basada en el continuo	Formulación en desplazamiento	Campo de cortante impuesto	Formulación híbrida
2 x 2	131.0 %	126.7 %	116.5 %	136.8 %
4 x 4	96.8 %	95.99 %	93.9 %	104.4 %
8 x 8	98.0 %	97.8 %	97.1 %	100.4 %
16 x 16	99.3 %	99.2 %	98,9 %	99.7 %
Exacto	0.3024 (100 %)			

**Tabla 10.1. Cáscara de Scordellis-Lo. Deformación vertical en el centro del lado (punto B)**

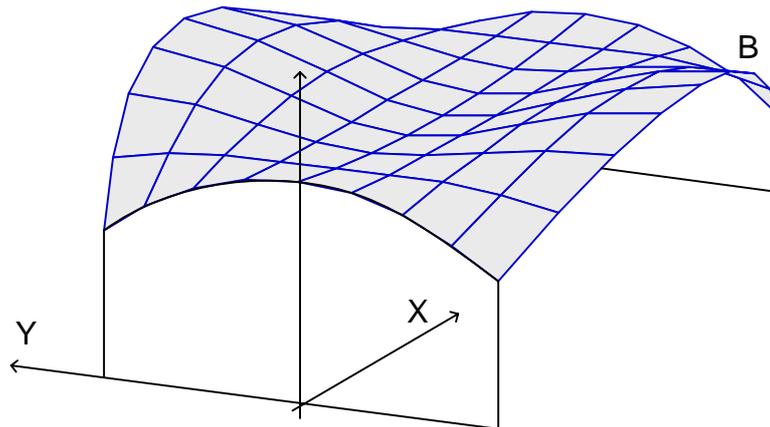


Figura 10.22 Deformada de la cáscara de Scordellis-Lo (x 30)

### 10.9.2 Semiesfera con orificio

Otro ejemplo muy habitual en la bibliografía es el de una cáscara semiesférica con un orificio de  $18^\circ$  en su polo (Figura 10.23 (a)). Su radio es  $R=10$  y el espesor es  $0.04$ . Las propiedades del material son  $E=6.825 \cdot 10^7$  y  $\nu=0.3$ .

Está sometida a un conjunto de 4 cargas simétricas de valor  $P=2$  cada una de ellas, situadas en su base, 2 de ellas (puntos A y simétrico) traccionan la cáscara y las otras dos (puntos B y simétrico) la comprimen. La cáscara está libre en su base.

Por la doble simetría del problema, sólo es necesario mallar un cuarto de la cáscara. Se emplean elementos cáscara curvos de 4 nudos, con mallados regulares de finura creciente. El modelo Matlab para este ejemplo está definido en el fichero semiesfera.m. La Figura 10.23 (b) muestra la deformada de la cáscara.

La tabla 10.2 muestra el valor obtenido para la deformación radial en el punto A para diversos mallados, con relación al valor aceptado en la bibliografía como exacto para dicha deformación. La deformación radial de B tiene el mismo valor que la de A. Se observa la buena convergencia de las distintas formulaciones.

Malla de $\frac{1}{4}$ de cáscara	Formulación basada en el continuo	Formulación en desplazamiento	Campo de cortante impuesto	Formulación híbrida
2 x 2	116.9 %	92.1 %	79.3 %	81.9 %
4 x 4	109.1 %	103.2 %	96.8 %	97.8 %
8 x 8	101.6 %	100.2 %	98.4 %	99.0 %
16 x 16	100.0 %	99.6 %	99.1 %	99.5 %
Exacto	0.0935			

Tabla 10.2. Semiesfera con orificio. Deformación radial en el punto A

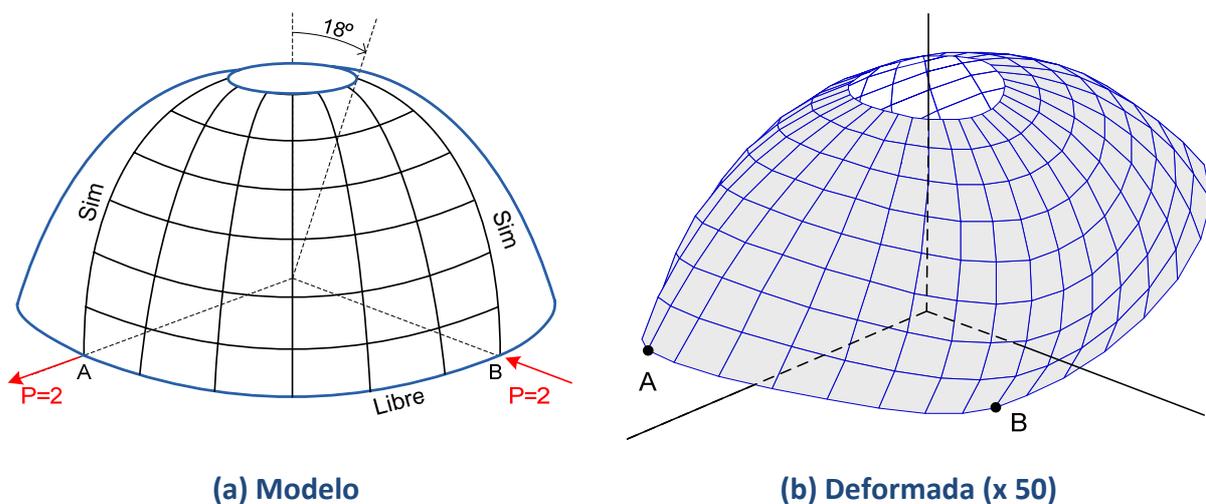


Figura 10.23 Semiesfera con orificio

### 10.9.3 Cilindro comprimido diametralmente

Otro ejemplo muy habitual en la bibliografía es el de un cilindro corto, de longitud  $L=600$ , radio  $R=300$  y espesor  $h=3$  (Figura 10.24 (a)). Está sometido en su sección central a dos fuerzas unitarias iguales y de sentido contrario en dirección diametral, en los puntos A y C en el eje X. Las propiedades del material son  $E=3 \cdot 10^6$  y  $\nu=0.3$ .

El cilindro está simplemente apoyado en sus dos extremos en dos paredes rígidas, que impiden las deformaciones en las direcciones X e Y, pero dejan libre la deformación Z y los giros.

Dada la doble simetría de la cáscara, sólo es necesario mallar un cuarto de ella, empleando elementos cáscara curvos de 4 nudos, con mallados regulares de finura creciente. El modelo Matlab para este ejemplo está definido en el fichero cilpinza.m.

La tabla 10.3 muestra el valor obtenido para la deformación radial en el punto de aplicación de la carga para diversos mallados, con relación al valor aceptado en la bibliografía como exacto para dicha deformación.

La Figura 10.24 (b) muestra la deformada del cilindro.

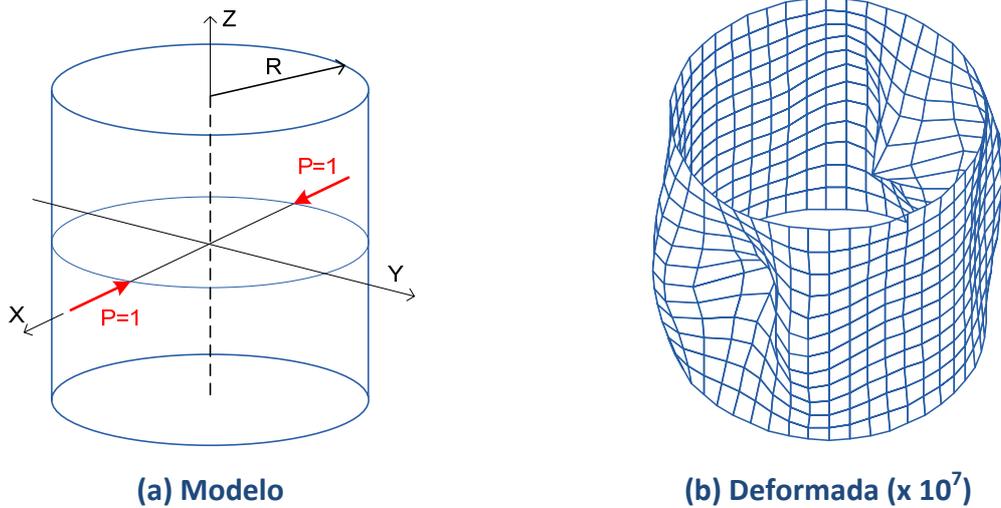


Figura 10.24 Cilindro comprimido por 2 fuerzas diametrales

Malla de ¼ de cáscara	Formulación basada en el continuo	Formulación en desplazamiento	Campo de cortante impuesto	Formulación híbrida
4 x 4	35,6 %	34.7 %	34.1 %	37.1 %
8 x 8	72,5 %	72.0 %	71.2 %	73.4 %
16 x 16	91,9 %	91.8 %	91.0 %	92.1 %
Exacto	-18.248 x 10 <sup>-6</sup> (100 %)			

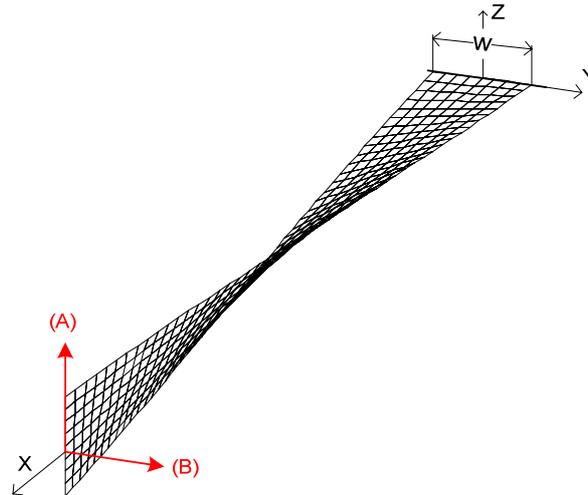
Tabla 10.3. Deformación radial del cilindro comprimido diametralmente

### 10.9.4 Viga alabeada

En este ejemplo se estudia a una viga de longitud  $L=12$ , con sección transversal rectangular de canto  $W=1.1$  y espesor pequeño  $h=0.05$ , cuyos extremos están inicialmente girados un ángulo de  $90^\circ$  uno respecto al otro (Figura 10.25). El material tiene  $E=29 \cdot 10^6$  y  $\nu=0.22$ .

Uno de los extremos se considera empotrado y sobre el otro se aplican las fuerzas exteriores. Se consideran dos situaciones de carga: en la situación A se aplica a una fuerza unitaria en la dirección Z, es decir en la dirección del canto en el extremo libre, mientras que en la situación B la fuerza se aplica en la dirección Y, perpendicular al canto en el extremo libre. Ambas situaciones producen en los distintos elementos estados de deformación muy variados, comprendidos desde la flexión hasta el trabajo como membrana.

La viga se malla mediante elementos de 4 nudos, con mallados regulares de finura creciente. Los elementos tienen una relación entre sus lados del orden de 2. El modelo Matlab para este ejemplo está definido en el fichero vigator.m.



**Figura 10.25 Viga alabeada 90°**

Las tablas 10.4 y 10.5 muestran los valores de la deformación en la dirección de la carga aplicada para los dos casos de carga y para distintos mallados. Se observa la buena convergencia, incluso para mallados muy groseros.

Mallado	Formulación basada en el continuo	Formulación en desplazamiento	Campo de cortante impuesto	Formulación híbrida
12 x 2	1.3867	1.3815	1.3734	1.3759
24 x 4	1.3871	1.3874	1.3853	1.3861
48 x 8	1.38753	1.38913	1.3885	1.3888
96 x 16	1.38774	1.38969	1.38947	1.38953
120 x 20	1.38777	1.38976	1.38961	1.38965
Solución convergida	1.38965			

**Tabla 10.4. Deformación Z del extremo de la viga. Carga aplicada en dirección Z (Caso A)**

Mallado	Formulación basada en el continuo	Formulación en desplazamiento	Campo de cortante impuesto	Formulación híbrida
12 x 2	0.33743	0.31630	0.3350	0.33611
24 x 4	0.34148	0.34158	0.34127	0.34158
48 x 8	0.34254	0.34296	0.34288	0.34297
96 x 16	0.34282	0.34332	0.34300	0.34332
120 x 20	0.34285	0.34336	0.34335	0.34336
Solución convergida	0.34336			

**Tabla 10.5. Deformación Y del extremo de la viga. Carga aplicada en dirección Y (Caso B)**

## 10.10. ANEJOS

### 10.10.1 Derivada del vector director

La expresión del vector director viene dada por la ecuación (10.79):  $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}} \tilde{D}^{-1}$ . Derivando respecto a una de las coordenadas locales  $\bar{x}_a$ , y volviendo a emplear la definición de  $\mathbf{D}$  se tiene:

$$\frac{d\mathbf{D}}{d\bar{x}_a} \equiv \mathbf{D}_{,a} = \tilde{\mathbf{D}}_{,a} \tilde{D}^{-1} - \tilde{\mathbf{D}} \tilde{D}^{-2} \tilde{D}_{,a}$$

$$\mathbf{D}_{,a} = \tilde{\mathbf{D}}_{,a} \tilde{D}^{-1} - \mathbf{D} \tilde{D}^{-1} \tilde{D}_{,a}$$

La derivada del módulo del vector  $\tilde{D}$  es:

$$\tilde{D}_{,a} = \left( \sqrt{\tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}} \right)_{,a} = \frac{(\tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{D}})_{,a}}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}}} = \frac{\tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{,a}}{\tilde{D}}$$

$$\tilde{D}_{,a} = \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{,a}$$

Por lo tanto la derivada buscada es:

$$\mathbf{D}_{,a} = \tilde{D}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{D}}_{,a} - \mathbf{D} (\mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{,a}) \right)$$

Un sencillo desarrollo muestra que el último término, que es un vector, se puede poner en forma de producto matriz por vector:

$$\mathbf{D} (\mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{,a}) = (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{D}}_{,a}$$

Con lo que la expresión final de la derivada se puede poner en la forma:

$$\mathbf{D}_{,a} = \tilde{D}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{D}}_{,a} - (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{D}}_{,a} \right)$$

$$\mathbf{D}_{,a} = \frac{1}{\tilde{D}} \left( \mathbf{I}_3 - \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \right) \tilde{\mathbf{D}}_{,a}$$

La derivada del vector interpolado es inmediata en función de las derivadas de las funciones de interpolación. Empleando la expresión matricial del producto tensorial, se obtiene la expresión final siguiente:

$$\mathbf{D}_{,a} = \frac{1}{\tilde{D}} \left( \mathbf{I} - \mathbf{D} \mathbf{D}^T \right) \sum_I N_{I,a} \mathbf{D}_I$$

### 10.10.2 Interpolación del cambio del vector director

Se trata de obtener una interpolación del cambio del vector director  $\hat{\mathbf{d}}$  que sea consistente con la interpolación del propio vector director  $\mathbf{D}$ , es decir que el vector  $\hat{\mathbf{d}}$  interpolado debe estar contenido en el plano tangente al  $\mathbf{D}$ .

Consideremos un cambio genérico del vector  $\mathbf{D}$  de valor  $(\varepsilon \hat{\mathbf{d}})$ , siendo  $\varepsilon$  un parámetro arbitrario. La posición deformada de  $\mathbf{D}$  es un nuevo vector  $\mathbf{D}_\varepsilon$  obtenido aplicando la magnitud  $(\varepsilon |\hat{\mathbf{d}}|)$  sobre el círculo máximo definido por  $\mathbf{D}$  y  $\hat{\mathbf{d}}$ . Al ser los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{D}_\varepsilon$  unitarios, el ángulo entre ellos coincide con el arco. El nuevo vector  $\mathbf{D}_\varepsilon$  se puede expresar mediante sus componentes en la dirección de  $\mathbf{D}$  y de un vector unitario en la dirección  $\Delta \mathbf{d}$ :

$$\mathbf{D}_\varepsilon = (\mathbf{D}_\varepsilon \cdot \mathbf{D}) \mathbf{D} + \left( \mathbf{D}_\varepsilon \cdot \frac{\hat{\mathbf{d}}}{|\hat{\mathbf{d}}|} \right) \frac{\hat{\mathbf{d}}}{|\hat{\mathbf{d}}|}$$

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \cos(\varepsilon |\hat{\mathbf{d}}|) \mathbf{D} + \sin(\varepsilon |\hat{\mathbf{d}}|) \frac{\hat{\mathbf{d}}}{|\hat{\mathbf{d}}|}$$

De esta construcción se deduce que, en el límite:

$$\left. \frac{d\mathbf{D}_\varepsilon}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \hat{\mathbf{d}}$$

La interpolación del vector  $\mathbf{D}_\varepsilon$  sigue la misma ley que el  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \frac{\sum_I N_I \mathbf{D}_{I\varepsilon}}{\left| \sum_I N_I \mathbf{D}_{I\varepsilon} \right|} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}_\varepsilon}{\tilde{D}_\varepsilon}$$

El valor de  $\hat{\mathbf{d}}$  se puede obtener aplicando el resultado anterior y efectuando la derivada de la expresión de  $\mathbf{D}_\varepsilon$ :

$$\hat{\mathbf{d}} = \left. \frac{d\mathbf{D}_\varepsilon}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\tilde{D}} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{D}\mathbf{D}^T) \tilde{\mathbf{d}}$$

Siendo el valor promediado del cambio de orientación en los nudos:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \sum_I N_I \hat{\mathbf{d}}_I$$

# Integración numérica aplicada al MEF

## 11.1. INTRODUCCIÓN

Las expresiones correspondientes a las características de los elementos finitos (rigidez, fuerzas, etc.) son del tipo integral, extendiéndose normalmente al volumen del elemento. Debido al cambio de coordenadas en la formulación isoparamétrica, estas integrales se extienden a dominios simples, normalmente entre -1 y +1. En todo caso la complejidad de las integrales a evaluar hace que su cálculo sólo se pueda realizar de forma numérica. Por ello se resumirán a continuación los métodos de integración numérica aplicables a este problema.

## 11.2. INTEGRACIÓN NUMÉRICA UNIDIMENSIONAL

### 11.2.1 Método de Newton-Cotes

Este método consiste en ajustar la función a integrar mediante un polinomio y a continuación efectuar la integral de dicho polinomio, que es exacta. El orden del polinomio  $n$  se define a priori, y los puntos por los que se hace pasar se suponen igualmente espaciados en el dominio de integración.

Las integrales a efectuar pueden escribirse en la forma:

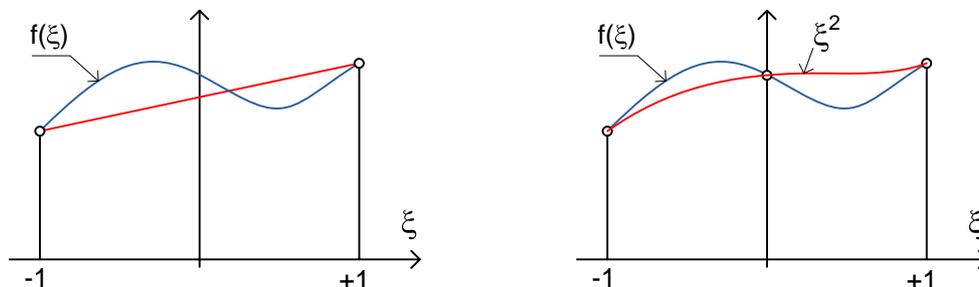
$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1,n} H_i f(\xi_i) \quad (11.1)$$

Empleando un polinomio de grado 1, es decir con  $n=2$ , resulta la conocida regla del trapecio (figura 11.1):

$$I = f(-1) + f(+1) \quad (11.2)$$

Empleando un polinomio de grado 2, es decir con  $n=3$ , se obtiene la regla del tercio de Simpson:

$$I = \frac{f(-1) + 4f(0) + f(+1)}{3} \quad (11.3)$$



**Figura 11.1** Integración de Newton-Cotes con reglas de dos y tres puntos

Empleando un polinomio cúbico, es decir con  $n=4$ , la regla es:

$$I = \frac{f(-1) + 3(-1/3) + 3f(1/3) + f(+1)}{4} \quad (11.4)$$

Como  $n$  valores de la función definen un polinomio de grado  $n-1$ , el error de este método es del orden  $O(h^n)$ , donde  $h$  es la separación entre los puntos.

### 11.2.2 Cuadratura de Gauss

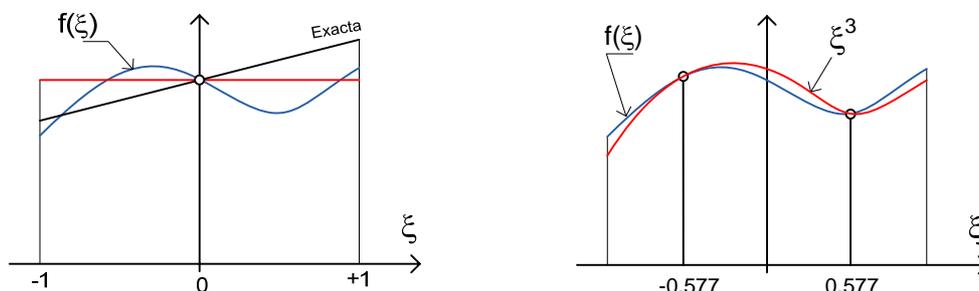
En este método se aproxima asimismo la función mediante un polinomio, pero no se especifica a priori la posición de los puntos empleados para definirlo. La posición de estos puntos se determina con la condición de alcanzar la mayor precisión posible de la integral. Considerando que la integral se aproxima mediante una expresión como la (11.1), resulta que se dispone de  $2n$  parámetros a definir  $(H_i, \xi_i)$ , por lo que puede definirse un polinomio de grado  $2n-1$  y efectuar su integral de forma exacta.

En consecuencia una regla de este tipo con  $n$  puntos integra de forma exacta un polinomio de grado  $2n-1$  (Figura 11.2) y el error es del orden  $O(h^{2n})$ .

Las ecuaciones simultáneas que se originan son difíciles de resolver, pero tras cierta manipulación matemática su solución se obtiene explícitamente mediante polinomios de Legendre. Por ello, este método particular suele ser conocido como cuadratura de Gauss-Legendre. La tabla 11.1 muestra los puntos donde se debe evaluar el integrando y los coeficientes peso a emplear.

En el análisis por el método de los elementos finitos, los cálculos más complicados son los relativos a la evaluación del integrando, ya que éste involucra el cálculo de la matriz  $\mathbf{B}$ , la jacobiana de la transformación de coordenadas, su determinante... Por lo tanto el procedimiento de Gauss es idealmente el más favorable, puesto que

requiere un menor número de evaluaciones de la función, y eso hace que sea el más utilizado.



**Figura 11.2 Integración de Gauss con reglas de uno y dos puntos**

Nº puntos ( $n$ )	$\xi_i$	$H_i$
$n=1$	0.00000	2.00000
$n=2$	-0.57735	1.00000
	+0.57735	1.00000
$n=3$	-0.77459	0.55555
	0.00000	0.88888
	+0.77459	0.55555
$n=4$	$\pm 0.86113$	0.34785
	$\pm 0.33998$	0.65214
$n=5$	$\pm 0.90617$	0.23692
	$\pm 0.53846$	0.47862
	0.00000	0.56888

**Tabla 11.1 Puntos y factores peso para la integración de Gauss-Legendre**

### 11.3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN REGIONES RECTANGULARES

La manera más evidente de calcular la integral doble:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{11.5}$$

es calcular primero la integral en  $\xi$ , manteniendo  $\eta$  constante:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=1, n} H_i f(\xi_i, \eta) = g(\eta) \tag{11.6}$$

y luego calcular la integral exterior de igual manera:

$$I = \int_{-1}^{+1} g(\eta) d\eta = \sum_{j=1,n} H_j g(\eta_j) = \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (11.7)$$

En las expresiones anteriores se ha empleado el mismo número de puntos en ambas variables  $\xi, \eta$ . Evidentemente esto no es obligatorio y en ocasiones puede ser conveniente utilizar un número diferente para cada una de ellas, según cómo sea la variación de la función a integrar en dicha variable.

Hay que hacer notar que en realidad el doble sumatorio de  $n$  puntos en cada dirección puede interpretarse como un sumatorio sencillo sobre  $n^2$  puntos en el caso de un rectángulo. Así, una regla de 3x3 puntos integra de forma exacta un polinomio de dos variables de orden 5 en cada una de ellas.

Se puede sin embargo abordar el problema directamente y exigir la integración exacta de un polinomio de grado 5 en dos direcciones, para emplearlos en una fórmula de integración del tipo:

$$I = \iint f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1,n} W_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (11.8)$$

De esta forma, en cada punto de integración han de determinarse tres parámetros (dos coordenadas y el factor peso  $W$ ). Como un polinomio de dos variables de grado 5 requiere 21 parámetros, resulta que en este caso sólo son necesarios 7 puntos para obtener el mismo grado de precisión. Siguiendo esta técnica se han desarrollado y empleado provechosamente alguna fórmulas para dominios en forma de paralelepípedo.

#### 11.4. INTEGRACIÓN EN REGIONES TRIANGULARES

Para un triángulo, las integrales en función de las coordenadas de área son de la forma:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 \quad (11.9)$$

De nuevo se podría hacer uso de  $n$  puntos de Gauss y llegar a una expresión sumatoria como las de la sección anterior. Sin embargo, en los límites de integración aparece ahora la variable misma y es conveniente emplear puntos de Gauss diferentes en la segunda integración, mediante fórmulas de Gauss especiales para integrales del tipo anterior. Dichas fórmulas han sido desarrolladas por Radau y utilizadas en el método de los elementos finitos. Es sin embargo mucho más deseable hacer uso de fórmulas que no den preponderancia a ninguna de las coordenadas locales  $L_j$ . Dichas fórmulas han sido desarrolladas por Hammer y otros, para ser empleadas en la forma:

$$I = \iint f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 = \sum_{i=1,n} W_i f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \quad (11.10)$$

En la tabla 11.2 se da una lista de los puntos a usar y de sus factores de peso.

Nº puntos ( $n$ )	Orden	Coordenadas	$W_i$
1	1	1/3 , 1/3 , 1/3	0.5
3	2	1/2 , 1/2 , 0	1/6
		0 , 1/2 , 1/2	1/6
		1/2 , 0 , 1/2	1/6
4	3	1/3 , 1/3 , 1/3	-27/96
		0.6 , 0.2 , 0.2	25/96
		0.2 , 0.6 , 0.2	25/96
		0.2 , 0.2 , 0.6	25/96

**Tabla 11.2 Integración en regiones triangulares**

### 11.5. INTEGRACIÓN EN TETRAEDROS

Para dominios en forma de tetraedro, las fórmulas de integración son similares al caso triangular, pero empleando las cuatro coordenadas de volumen:

$$I = \iiint f(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_1 dL_2 dL_3 = \sum_{i=1,n} W_i f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}, L_{4i}) \quad (11.11)$$

En la tabla 11.3 se muestran las reglas de integración más habituales.

Nº puntos ( $n$ )	Orden	Coordenadas	$W_i$
1	1	1/4 , 1/4 , 1/4 , 1/4	1/6
4	2	$a$ , $b$ , $b$ , $b$	1/24
		$b$ , $a$ , $b$ , $b$	1/24
		$b$ , $b$ , $a$ , $b$	1/24
		$b$ , $b$ , $b$ , $a$	1/24
		$a = 0.585410$ $b = 0.138196$	
5	3	1/4 , 1/4 , 1/4 , 1/4	-2/15
		1/3 , 1/6 , 1/6 , 1/6	3/40
		1/6 , 1/3 , 1/6 , 1/6	3/40
		1/6 , 1/6 , 1/3 , 1/6	3/40
		1/6 , 1/6 , 1/6 , 1/3	3/40

**Tabla 11.3 Integración en tetraedros**

## 11.6. ORDEN DE INTEGRACIÓN NECESARIO

El orden de integración se define como el número de puntos de integración que se toman en cada dirección del dominio, en coordenadas locales del elemento.

Al sustituir la integración analítica por una numérica, se introduce un error, y éste debe reducirse lo más posible. El coste de la integración numérica en un programa de cálculo con computador no es despreciable en general, e incluso en algunos programas puede representar un tiempo muy importante, por lo que es interesante determinar cuál es el orden de integración mínimo a usar, con la condición de que se garantice la convergencia del método.

En los problemas de análisis estructural se ha demostrado que existe convergencia con tal de que pueda reproducirse cualquier valor constante y arbitrario de las derivadas  $m$ -simas de los desplazamientos (donde  $m$  es el orden de derivación de la deformación en la expresión de la energía). En el caso de la elasticidad ( $m=1$ ) se requiere que pueda integrarse correctamente un valor constante, lo que equivale a decir que debe de ser posible el cálculo exacto del volumen del elemento, que en coordenadas curvilíneas es igual a la integral del valor del determinante de la matriz jacobiana  $\int J d\xi d\eta$ .

Esta condición es incluso demasiado restrictiva, ya que es suficiente con poder calcular exactamente el valor de  $d\xi d\eta$  para conseguir la convergencia. Según esto, basta con cualquier regla de integración cuyo error sea de orden  $O(h)$ . La realidad es que un orden de integración tan bajo suele ser impracticable, aunque en realidad se suele utilizar a veces (p.e. en problemas de revolución).

La evaluación de la energía en el método de los elementos finitos es exacta hasta grado  $2(p-m)$  donde  $p$  es el grado del polinomio completo y  $m$  el orden de las derivadas que aparecen en las expresiones correspondientes de la energía. Si la integración numérica integra de forma exacta un polinomio de orden  $2(p-m)$  se garantizará la convergencia. Por lo tanto, para problemas de elasticidad ( $m=1$ ) el orden mínimo de integración debe ser:

Elementos lineales (dos nudos por lado)	$p=1$	$O(h)$	1 x 1
Elementos de segundo orden (tres nudos por lado)	$p=2$	$O(h^3)$	2 x 2
Elementos de tercer orden (cuatro nudo por lado)	$p=3$	$O(h^5)$	3 x 3

El resultado final de toda aproximación mediante elementos finitos en problemas lineales es un sistema de ecuaciones de la forma:  $\mathbf{K}\Delta = \mathbf{F}$ , al que se incorporan las condiciones de contorno y que debe, tras calcular  $\Delta$ , proporcionar la solución aproximada al problema planteado. Si dicha solución es única, como es el caso de los problemas reales, la matriz  $\mathbf{K}$  no debe ser singular. Según cómo se efectúe la integración numérica puede presentarse singularidad en la matriz  $\mathbf{K}$  para órdenes de integración bajos, y esto puede hacer que estos órdenes sean impracticables. Es fácil

demostrar que bajo ciertas circunstancias debe aparecer singularidad de **K**, siendo mucho más difícil demostrar lo contrario, por lo que nos centraremos en el primer caso.

En la integración numérica se sustituyen las integrales por una suma ponderada de relaciones lineales independientes entre los parámetros nodales  $\Delta$ . Estas relaciones lineales proporcionan la única información para construir la matriz **K**. Si el número de incógnitas  $\Delta$  es mayor que el de relaciones independientes disponibles en todos los puntos de integración, la matriz **K** es singular.

Para ilustrar este punto consideremos los problemas de elasticidad bidimensional con elementos cuadrados de dos y tres nudos por lado, con reglas de integración de uno y 2x2 puntos. En estos casos, en cada punto de integración se emplean tres relaciones de deformación independientes, y el número total de ellas es igual a tres veces el número de puntos de integración. Por otra parte el número de incógnitas es igual al número total de grados de libertad menos el número de ligaduras aplicadas sobre la estructura. En la tabla 11.4 se muestran varios ejemplos. En cada punto de integración (marcado con X) se generan tres relaciones independientes, y cada nudo tiene dos grados de libertad. En todos los casos se han empleado tres ligaduras exteriores para sustentar la estructura.

Grados de libertad		Relaciones independientes en <b>K</b>	
$4 \times 2 - 3 = 5$	>	$1 \times 3 = 3$ Singularidad de <b>K</b>	
$6 \times 2 - 3 = 9$	>	$2 \times 3 = 6$ Singularidad de <b>K</b>	
$8 \times 2 - 3 = 13$	>	$4 \times 3 = 12$ Singularidad de <b>K</b>	
$13 \times 2 - 3 = 23$	<	$8 \times 3 = 24$	

Tabla 11.4 Ejemplos de singularidad de **K**

# Introducción al análisis dinámico

## 12.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia el comportamiento de una estructura sometida a fuerzas exteriores que son variables con el tiempo. En consecuencia, las deformaciones y tensiones también varían con el tiempo, dando lugar a un análisis de tipo dinámico, en el que además de la rigidez de la estructura hay que tener en cuenta también sus características de inercia.

En este capítulo se pretende únicamente efectuar una introducción al amplio campo del análisis dinámico de estructuras. Se presentan en primer lugar los teoremas fundamentales que controlan el problema; a continuación se obtienen, en base a ellos, las propiedades de inercia de los elementos estructurales y las ecuaciones del movimiento de la estructura. Se dejan para los textos especializados las técnicas de resolución de dichas ecuaciones.

Se mantienen las suposiciones de comportamiento lineal y pequeñas deformaciones, y se supone un sistema discretizado por el método de los elementos finitos.

## 12.2. PRINCIPIOS ENERGÉTICOS EN RÉGIMEN DINÁMICO

Consideremos un sólido deformable, sometido a un sistema de cargas variables con el tiempo, que en general serán: fuerzas de volumen  $\mathbf{q}_v(t)$ , fuerzas de superficie  $\mathbf{q}_s(t)$ , y fuerzas puntuales  $\mathbf{P}(t)$ .

El campo de desplazamientos en el interior del sólido es asimismo variable  $\mathbf{u}(t)$ , y genera unos campos de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  y de deformaciones unitarias  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ .

Utilizando el principio de D'Alembert, se aplican sobre el sólido las fuerzas de inercia producidas por las aceleraciones, las cuales tienen la consideración de fuerzas distribuidas sobre todo el volumen del sólido y cuyo valor es:

$$\mathbf{q}_{IN} = \begin{Bmatrix} q_{INx} \\ q_{INy} \\ q_{INz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho \ddot{u}_x \\ -\rho \ddot{u}_y \\ -\rho \ddot{u}_z \end{Bmatrix} = -\rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (12.1)$$

### 12.2.1 Ecuaciones de equilibrio

La ecuación de equilibrio del sólido se puede obtener de la misma forma que para el caso estático, sin más que incluir entre las fuerzas de volumen a las fuerzas de inercia. Siguiendo el mismo proceso se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} + q_{vi} = \rho \ddot{u}_i \quad i \equiv x, y, z \quad (12.2)$$

### 12.2.2 Principio del trabajo virtual

El aplicarse sobre el sólido una variación virtual al campo de deformaciones  $\delta \mathbf{u}$ , el trabajo virtual producido por las fuerzas de volumen y de superficie es:

$$\delta W = \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds \quad (12.3)$$

El trabajo virtual producido por las fuerzas de inercia es:

$$\delta W_{IN} = \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_{IN} dv = - \int_v \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dv \quad (12.4)$$

Sumando ambos trabajos virtuales, y efectuando un desarrollo similar al del caso estático (que se deja como ejercicio al lector), se llega a que su suma es igual a:

$$\delta W + \delta W_{IN} = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (12.5)$$

Sustituyendo ambos sumandos del trabajo virtual por sus expresiones detalladas, se obtiene la expresión final del principio de los trabajos virtuales en régimen dinámico para un sólido deformable:

$$\int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds - \int_v \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dv = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (12.6)$$

Si el sólido es elástico lineal, el término de la derecha es la variación de la energía elástica  $U$ , con lo que la expresión compacta del principio es:

$$\delta W + \delta W_{IN} = \delta U \quad (12.7)$$

que es similar a la expresión obtenida en el caso estático, añadiendo el término debido a las fuerzas de inercia.

### 12.2.3 Principio de Hamilton

Este principio es el equivalente en régimen dinámico al principio de la mínima energía potencial ya enunciado para el caso estático.

El potencial  $V$  de las fuerzas exteriores de volumen y de superficie se define como:

$$V \equiv - \int_v \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv - \int_s \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds \quad (12.8)$$

Obsérvese que las dos primeras integrales del principio de los Trabajos Virtuales (12.6) corresponden a la variación de este potencial (con signo cambiado) para una variación virtual del campo de desplazamientos. Por lo tanto el Principio del Trabajo Virtual se puede poner en la forma:

$$- \int_v \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dv = \delta U + \delta V \quad (12.9)$$

Integrando esta expresión entre dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$  se obtiene:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_v \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dv dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt \quad (12.10)$$

El orden de las integrales se puede invertir en el término de la izquierda. En el de la derecha se puede intercambiar el operador variación  $\delta$  con la integral en el tiempo, pues la variación es sólo en el campo  $\mathbf{u}$ . Se obtiene:

$$- \int_v \rho \left( \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt \right) dv = \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} U dt \right) + \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} V dt \right) \quad (12.11)$$

La integral en el tiempo del término de la izquierda se puede efectuar por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dt + \left. \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} \right|_{t_1}^{t_2} \quad (12.12)$$

Al ser el desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$  arbitrario, se puede adoptar de tal manera que sea nulo en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . En consecuencia el último término es nulo, con lo que esta integral queda en la forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{\dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}}{2} \right) dt \quad (12.13)$$

Tras este desarrollo, la primera integral se puede poner de la forma siguiente, invirtiendo nuevamente el orden de las integrales:

$$- \int_v \rho \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt dv = \int_v \rho \int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{\dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}}{2} \right) dt dv = \int_{t_1}^{t_2} \int_v \delta \left( \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \right) dv dt \quad (12.14)$$

Sacando el operador variación de la integral de volumen, se identifica la expresión de la energía cinética  $T$  acumulada en el sólido.

$$-\int_v \rho \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt dv = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \int_v \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dv \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \quad (12.15)$$

Finalmente la expresión inicial (12.10) queda:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt \quad (12.16)$$

Reordenando y sacando fuera el operador variación se obtiene:

$$\delta \left( \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt \right) = 0 \quad (12.17)$$

que es la expresión del principio de Hamilton. En él se define la función lagrangiana  $L=T-U-V$ , con lo que el principio puede enunciarse diciendo que: de todas las posibles configuraciones que una estructura puede adoptar a lo largo de un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ , aquella que satisface el equilibrio es la que hace estacionaria la integral de la lagrangiana  $L$  durante dicho intervalo de tiempo.

### 12.3. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO DE UN ELEMENTO FINITO

Si se considera un elemento cualquiera, sobre él actúan las siguientes fuerzas: las fuerzas exteriores de volumen  $\mathbf{q}_v$ , las fuerzas exteriores de superficie  $\mathbf{q}_s$  aplicadas en el contorno libre del elemento  $s$ , y las fuerzas interiores de superficie  $\mathbf{q}_c$  aplicadas en el contorno de unión  $c$  del elemento con los elementos vecinos, que son desconocidas. Se consideran asimismo fuerzas puntuales aplicadas sobre sus nudos  $\mathbf{P}_N$ .

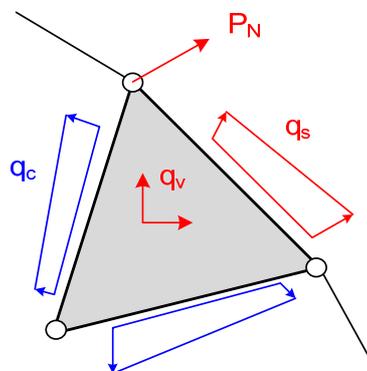


Figura 12.1 Fuerzas aplicadas sobre un elemento

El trabajo virtual efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre el elemento es:

$$\delta W^e = \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \delta^{eT} \mathbf{P}_N^e \quad (12.18)$$

Aplicando el principio del trabajo virtual (12.7), se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico del elemento:

$$\begin{aligned} \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \delta^{eT} \mathbf{P}_N^e - \int_v \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dv \\ = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \end{aligned} \quad (12.19)$$

Aplicando la hipótesis de interpolación de deformaciones, el campo de aceleraciones viene dado por la derivada segunda de la ley de interpolación, pues las funciones de interpolación no dependen del tiempo:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (12.20)$$

Sustituyendo este valor y el de la variación virtual del campo de desplazamientos en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \delta^{eT} \left[ \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \mathbf{N}^T \mathbf{q}_c ds + \mathbf{P}_N^e - \int_v \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dv \ddot{\boldsymbol{\delta}}^e \right] \\ = \delta \delta^{eT} \left[ \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \right] \end{aligned} \quad (12.21)$$

Como esta ecuación se debe cumplir para cualquier variación arbitraria de las deformaciones, se obtiene:

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \mathbf{N}^T \mathbf{q}_c ds + \mathbf{P}_N^e - \int_v \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dv \ddot{\boldsymbol{\delta}}^e = \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (12.22)$$

El término debido a las fuerzas distribuidas  $\mathbf{q}_c$  existentes en el contorno de unión con los elementos vecinos se sustituye, al igual que se hizo en el caso estático, por unas fuerzas aplicadas sobre los nudos del elemento, y que producen el mismo trabajo virtual que ellas:

$$\int_c \mathbf{N}^T \mathbf{q}_c ds = \mathbf{P}_c^e \quad (12.23)$$

Con lo que se llega a la siguiente ecuación de equilibrio dinámico del elemento:

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e - \int_v \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dv \ddot{\boldsymbol{\delta}}^e = \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (12.24)$$

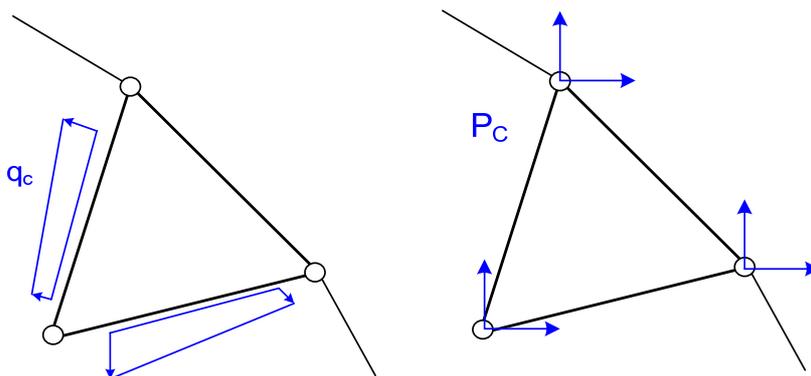


Figura 12.2 Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de conexión

Sustituyendo en esta ecuación el valor de la tensión mediante la ecuación constitutiva, y sustituyendo a continuación el valor de la deformación unitaria en función de la matriz  $\mathbf{B}$  se obtiene:

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e - \int_v \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\delta}^e dv = \int_v \mathbf{B}^T (\mathbf{D} \mathbf{B} \delta^e - \mathbf{D} \epsilon_0 + \sigma_0) dv \tag{12.25}$$

Reordenando los distintos términos se obtiene la forma final de la ecuación de equilibrio dinámico del elemento finito:

$$\int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \delta^e + \int_v \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dv \ddot{\delta}^e = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \epsilon_0 dv - \int_v \mathbf{B}^T \sigma_0 dv + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e \tag{12.26}$$

Comparando con la ecuación obtenida en el caso estático, se identifican en ella los mismos términos que en dicho caso estático, y un único término nuevo, que corresponde a las fuerzas de inercia:

$$\mathbf{K}^e \delta^e + \int_v \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dv \ddot{\delta}^e = \mathbf{P}_v^e + \mathbf{P}_s^e + \mathbf{P}_T^e + \mathbf{P}_b^e + \mathbf{P}_c^e + \mathbf{P}_N^e \tag{12.27}$$

En el nuevo término, se identifica la *matriz de inercia* del elemento:

$$\mathbf{M}^e = \int_v \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dv \tag{12.28}$$

Esta matriz representa la distribución de masas en el interior del elemento y en consecuencia define las fuerzas de inercia que aparecen en sus grados de libertad, al aplicarse unas aceleraciones unitarias a dichos grados de libertad. Se le suele denominar a veces matriz de inercia consistente, pues representa la distribución de la masa en el elemento de manera consistente con la hipótesis de variación del

campo de aceleraciones en su interior, como consecuencia de la hipótesis de discretización. Obsérvese que en general esta matriz no es diagonal sino llena, lo cual indica que unos grados de libertad están acoplados con otros a través de la inercia.

En contraposición a esta matriz de masas consistente, se ha empleado a veces la llamada matriz de masas diagonal, que consiste en asociar la masa total del elemento únicamente a la inercia directa existente en cada grado de libertad, despreciando los términos de acople. Esto equivale a considerar la masa total del elemento como formada por una serie de masas puntuales individuales situadas en sus nudos. Esta asociación de la masa a los nudos es sencilla de hacer en elementos cuyos grados de libertad son todos de traslación, pero resulta más compleja si existen grados de libertad de giro.

Con esta simplificación se obtiene una matriz de inercia menos precisa, pero que es diagonal, lo cual puede resultar ventajoso en algunos casos para la resolución de las ecuaciones del movimiento de la estructura.

## 12.4. MATRICES DE INERCIA DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES

### 12.4.1 Elemento de celosía plana de dos nudos

Consideremos un elemento de celosía plana de características uniformes: área  $A$ , longitud  $L$  y densidad  $\rho$ . Los grados de libertad de los dos nudos I, J en el sistema general son:

$$\Delta^e = \left[ \Delta_{IX} \quad \Delta_{IY} \quad \Delta_{JX} \quad \Delta_{JY} \right]^T \quad (12.29)$$

Un punto cualquiera del elemento se puede definir mediante una coordenada local  $\xi = x_L/L$ , que vale 0 en el nudo I, y 1 en el nudo J (figura 12.3).

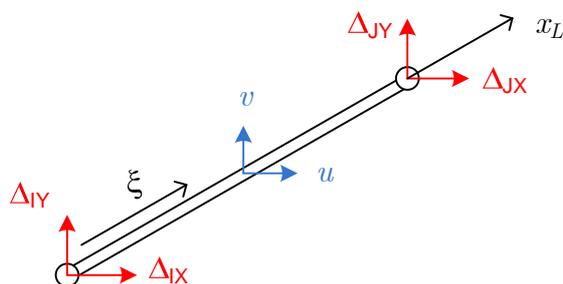


Figura 12.3 Elemento plano de celosía

En el interior de la barra las deformaciones varían linealmente, por lo que los dos desplazamientos  $u, v$  de un punto cualquiera, en el sistema general, se pueden poner en la forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \end{Bmatrix} \quad (12.30)$$

Esta expresión define la matriz  $\mathbf{N}$  del elemento. Sustituyendo en la expresión de la matriz de inercia (12.28), e integrando a todo el volumen de la barra, se obtiene la matriz de inercia del elemento, directamente en las coordenadas generales de la estructura:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.31)$$

Se observa que esta matriz tiene términos en las dos direcciones. La inercia en ambas direcciones es la misma, y los dos grados de libertad en cada dirección están acoplados entre sí (p.e.:  $\Delta_{IX}$  con  $\Delta_{JX}$  ...) pero sin embargo no hay acople entre las dos direcciones X e Y. En resumen, el elemento aporta la misma inercia según las dos direcciones generales de forma desacoplada. Puede comprobarse que el valor de la inercia aportada según cada dirección, que corresponde a la suma de los coeficientes de la matriz en dicha dirección, es igual a la masa del elemento  $\rho A L$ .

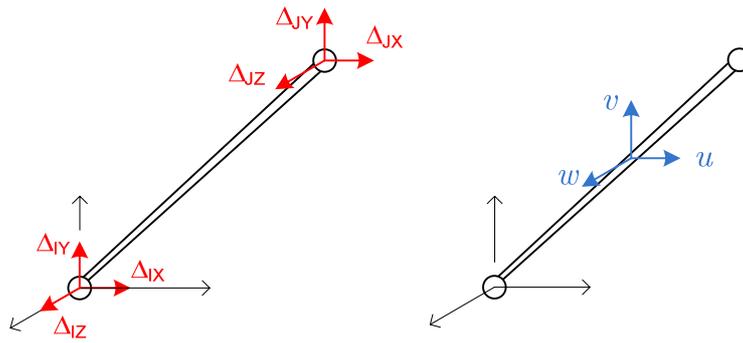
La matriz de masas diagonal para este elemento se obtiene asociando la mitad de la masa a cada nudo, para ambas direcciones:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

#### 12.4.2 Elemento de celosía espacial de dos nudos

Se considera un elemento de celosía espacial de características uniformes: área  $A$ , longitud  $L$  y densidad  $\rho$  (figura 12.4). Los grados de libertad del elemento, en el sistema general, son:

$$\Delta^e = \left[ \Delta_{IX} \quad \Delta_{IY} \quad \Delta_{IZ} \quad \Delta_{JX} \quad \Delta_{JY} \quad \Delta_{JZ} \right]^T \quad (12.33)$$



**Figura 12.4** Elemento de celosía espacial

En el interior de la barra las deformaciones varían linealmente, por lo que los desplazamientos de un punto cualquiera se pueden poner en el sistema general en la forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \dots \\ \Delta_{JZ} \end{Bmatrix} \quad (12.34)$$

Donde  $\xi = x_L/L$  es una coordenada local que vale 0 en el nudo I, y 1 en el nudo J. La expresión (12.34) define la matriz  $\mathbf{N}$  del elemento. Sustituyendo en la expresión de la matriz de inercia e integrando a todo el volumen de la barra, se obtiene la matriz de inercia del elemento, directamente en las coordenadas generales de la estructura:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.35)$$

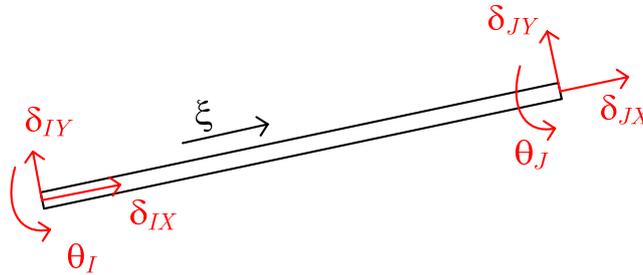
Esta matriz de masas es similar a la del elemento plano, y son aplicables a ella las mismas observaciones.

### 12.4.3 Elemento viga plana de dos nudos

Para este elemento se trabaja en su sistema de coordenadas locales. Posee seis grados de libertad (figura 12.5):

$$\delta^e = [\delta_{IX} \quad \delta_{IY} \quad \theta_I \quad \delta_{JX} \quad \delta_{JY} \quad \theta_J]^T \quad (12.36)$$

Dos de ellos  $(\delta_{IX}, \delta_{JX})$  definen la deformación axial  $u$  del eje de la viga y los otros cuatro  $(\delta_{IY}, \theta_I, \delta_{JY}, \theta_J)$  definen la deformación lateral  $v$  y el giro  $\theta$ .



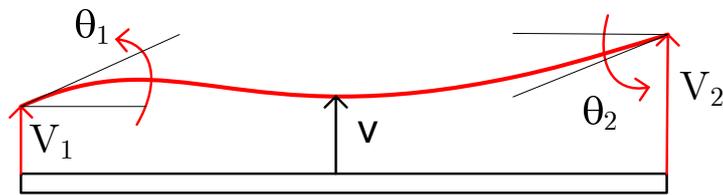
**Figura 12.5 Elemento viga plana**

- La deformación axial  $u$  varía linealmente entre los dos valores en los nudos, igual que en el elemento biarticulado:

$$u = \delta_{IX} + (\delta_{JX} - \delta_{IX})\xi \tag{12.37}$$

- La deformación lateral del eje de la viga  $v$  se define con cuatro grados de libertad, y por lo tanto se puede suponer una ley cúbica para su variación (figura 12.6):

$$v = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \tag{12.38}$$



**Figura 12.6 Deformación lateral de la viga plana**

Particularizando esta ley a los valores de los cuatro grados de libertad, y agrupando las cuatro ecuaciones obtenidas en forma matricial se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/L & 2/L & 3/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{12.39}$$

De esta ecuación se pueden obtener los cuatro coeficientes  $a_i$  en función de los cuatro grados de libertad. Sustituyéndolos en la ecuación (12.38) y reagrupando los términos de los diferentes grados de libertad, se obtiene la expresión de la deformación lateral del eje de la viga:

$$v = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\delta_{IY} + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_I + (3\xi^2 - 2\xi^3)\delta_{JY} + (\xi^3 - \xi^2)L\theta_J \tag{12.40}$$

La deformación en un punto P cualquiera de la viga, situado a una distancia  $y$  de la fibra neutra, utilizando la teoría clásica de flexión de vigas, es:

$$u_P = u - \frac{dv}{dx} y \quad v_P = v \quad (12.41)$$

Sustituyendo los valores de  $u$  y  $v$  se obtiene:

$$u_P = (1 - \xi)\delta_{IX} + 6(\xi - \xi^2)\eta\delta_{IY} + (4\xi - 1 - 3\xi^2)L\eta\theta_I \\ + \xi\delta_{JX} + 6(\xi^2 - \xi)\eta\delta_{JY} + (2\xi - 3\xi^2)L\eta\theta_J \quad (12.42)$$

$$v_P = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\delta_{IY} + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_I \\ + (3\xi^2 - 2\xi^3)\delta_{JY} + (\xi^3 - \xi^2)L\theta_J \quad (12.43)$$

Se ha empleado la coordenada  $\eta = y/L$  para definir la posición del punto P respecto de la fibra neutra.

Reordenando los distintos términos de las ecuaciones (12.42) y (12.43), se obtiene la matriz de funciones de interpolación:

$$\begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 6(\xi - \xi^2)\eta & (-1 + 4\xi - 3\xi^2)L\eta & \xi & 6(\xi - \xi^2)\eta & (2\xi - 3\xi^2)L\eta \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L & 0 & 3\xi^2 - \xi^3 & (-\xi^2 + \xi^3)L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \dots \\ \theta_J \end{Bmatrix} \quad (12.44)$$

Sustituyendo en la expresión de la matriz de inercia y efectuando la integración al volumen del elemento, se obtiene:

$$\mathbf{M}^e = \rho AL \begin{array}{c|ccc|ccc} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{13}{35} + \frac{6I}{5AL^2} & \frac{11L}{210} + \frac{I}{10AL} & & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I}{5AL^2} & -\frac{13L}{420} + \frac{I}{10AL} \\ & \frac{L^2}{105} + \frac{2I}{15A} & & 0 & \frac{13L}{420} - \frac{I}{10AL} & -\frac{L^2}{140} - \frac{I}{30A} \\ \hline & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ & & & \frac{13}{35} + \frac{6I}{5AL^2} & -\frac{11L}{210} - \frac{I}{10AL} & \\ & & & & \frac{L^2}{105} + \frac{2I}{15A} & \end{array} \quad (12.45)$$

*simétrica*

Obsérvese que, como era de esperar, no existe acoplamiento de inercia entre los grados de libertad de deformación axial y los de flexión. En los términos correspondientes a la flexión existen dos sumandos: el primero de ellos es proporcional al área del elemento, y corresponde a la inercia al movimiento lateral

del perfil. El segundo, proporcional al momento de inercia, corresponde a la inercia frente a la rotación de la sección recta del perfil.

### 12.4.4 Elementos bidimensionales

En estos elementos la interpolación de los dos desplazamientos  $u, v$  es:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \dots \\ V_n \end{Bmatrix} \quad (12.46)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e \quad (12.47)$$

Donde  $\delta^e$  es el vector de todas las deformaciones nodales del elemento:

$$\delta^e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n]^T \quad (12.48)$$

siendo  $n$  el número de nudos del elemento. Dada la particular estructura de  $\mathbf{N}$ , la matriz de inercia  $\mathbf{M}^e$  se puede poner en la forma:

$$\mathbf{M}^e = \int \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv = \int \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{N}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{N}_1 \quad \dots \quad \mathbf{N}_n] \rho t dx dy \quad (12.49)$$

La matriz  $\mathbf{M}^e$  se puede dividir en  $n \times n$  submatrices, que relacionan a los  $n$  nudos entre sí:

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \dots & \mathbf{M}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}^{n1} & \dots & \mathbf{M}^{nn} \end{bmatrix} \quad (12.50)$$

Empleando una formulación isoparamétrica, para elementos de cuatro lados, cada una de las matrices se puede poder:

$$\mathbf{M}^{ij} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} \rho t J d\xi d\eta \quad (12.51)$$

La expresión completa de la matriz es:

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & 0 & N_1 N_2 & 0 & \dots & N_1 N_n & 0 \\ 0 & N_1 N_1 & 0 & N_1 N_2 & \dots & 0 & N_1 N_n \\ \hline N_2 N_1 & 0 & N_2 N_2 & 0 & \dots & N_2 N_n & 0 \\ 0 & N_2 N_1 & 0 & N_2 N_2 & \dots & 0 & N_2 N_n \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_n N_1 & 0 & N_n N_2 & 0 & \dots & N_n N_n & 0 \\ 0 & N_n N_1 & 0 & N_n N_2 & \dots & 0 & N_n N_n \end{bmatrix} \rho t J d\xi d\eta \quad (12.52)$$

Su cálculo no presenta ningún problema, efectuándose en el sistema local de coordenadas  $\xi, \eta$ , en el que se conoce la matriz de interpolación  $\mathbf{N}$ . Todos los términos que la forman son polinomios, por lo que se puede evaluar de forma exacta por métodos numéricos. Obsérvese que el elemento aporta la misma inercia según los dos ejes generales  $X, Y$ , y que no hay acople entre las inercias en ambos ejes.

Como ejemplo, considérese el elemento triangular de tres nudos cuya matriz de funciones de interpolación, expresadas en coordenadas de área es:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \dots \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (12.53)$$

Con estas funciones lineales, la matriz de inercia de este elemento resulta ser:

$$\mathbf{M}^e = \int_A \begin{bmatrix} L_1 L_1 & 0 & L_1 L_2 & 0 & L_1 L_3 & 0 \\ 0 & L_1 L_1 & 0 & L_1 L_2 & 0 & L_1 L_3 \\ \hline L_2 L_1 & 0 & L_2 L_2 & 0 & L_2 L_3 & 0 \\ 0 & L_2 L_1 & 0 & L_2 L_2 & 0 & L_2 L_3 \\ \hline L_3 L_1 & 0 & L_3 L_2 & 0 & L_3 L_3 & 0 \\ 0 & L_3 L_1 & 0 & L_3 L_2 & 0 & L_3 L_3 \end{bmatrix} \rho t dA \quad (12.54)$$

Empleando el cambio de variables indicado para el cálculo de la matriz de rigidez, a fin de pasar a dos variables independientes, y efectuando la integral de forma numérica, con una regla de orden adecuado, se obtiene la siguiente expresión explícita:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.55)$$

Obsérvese que aplicando una aceleración unidad en una determinada dirección (p.e. en las columnas 1, 3 y 5 para la dirección X), se obtienen 3 fuerzas de inercia de valor  $m/3$  en cada uno de dichos grados de libertad, cuya suma es igual a la masa del elemento.

La matriz de masas diagonal para este elemento se obtiene asociando  $1/3$  de la masa a cada nudo, en cada dirección:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A t}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.56)$$

### 12.4.5 Elementos espaciales sólidos

En estos elementos la interpolación de los tres desplazamientos  $u, v, w$  es:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \dots \\ W_n \end{Bmatrix} \quad (12.57)$$

siendo  $n$  el número de nudos del elemento. La expresión de la matriz de masas es similar a la de los elementos bidimensionales, pero añadiendo un grado de libertad más en cada nudo:

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & 0 & 0 & \dots & N_1 N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 N_1 & 0 & \dots & 0 & N_1 N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 N_1 & \dots & 0 & 0 & N_1 N_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_n N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_n N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_n N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n N_n \end{bmatrix} \rho J d\xi d\eta d\zeta \quad (12.58)$$

### 12.4.6 Elementos placa con energía de cortante

La formulación de flexión de placas con energía de cortante (teoría de Mindlin-Reissner) requiere el empleo de tres parámetros para definir la deformación en el interior de la placa: la flecha  $w$  y los giros  $\theta_x, \theta_y$  según los dos ejes. Estas tres incógnitas se interpolan mediante funciones de interpolación del mismo tipo que para problemas bidimensionales:

$$w = \sum N_i W_i \quad \theta_x = \sum N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum N_i \theta_{yi} \quad (12.59)$$

Las tres leyes de interpolación se pueden agrupar como:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (12.60)$$

Las funciones de interpolación se refieren a un sistema de ejes local al elemento  $\xi, \eta$ , también similar al de los elementos bidimensionales.

La matriz de inercia del elemento resulta ser

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho dv = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho t J d\xi d\eta \quad (12.61)$$

Dada la estructura de  $\mathbf{N}$ , la expresión de la matriz de inercia queda en la forma:

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & 0 & 0 & \dots & N_1 N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 N_1 & 0 & \dots & 0 & N_1 N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 N_1 & \dots & 0 & 0 & N_1 N_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_n N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_n N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_n N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n N_n \end{bmatrix} \rho t J d\xi d\eta \quad (12.62)$$

Obsérvese que no hay acople entre las inercias a la traslación y al giro, y que se aporta la misma inercia según las tres deformaciones, sean éstas de deformación o de giro. Este último hecho no parece muy acorde con el sentido físico de dichas deformaciones, pero es consecuencia de la formulación empleada.

### 12.5. AMORTIGUAMIENTO

En todo fenómeno de dinámica estructural se produce una disipación de energía debida al rozamiento interno en el material de la estructura, que amortigua el movimiento de la misma. La caracterización exacta de este amortiguamiento estructural no es nada fácil, y pueden emplearse varios modelos diferentes, de los cuales se expondrán aquí los más sencillos, siempre en el rango lineal, por coherencia con el resto del comportamiento estructural.

Un primer modelo consiste en representar la disipación de energía mediante el trabajo que hacen unas fuerzas disipativas que se consideran distribuidas sobre todo el volumen del elemento y cuyo módulo es proporcional a la velocidad de cada punto del elemento. Con esta suposición el vector de fuerzas de volumen disipativas es:

$$\mathbf{q}_D = \begin{Bmatrix} q_{Dx} \\ q_{Dy} \\ q_{Dz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c \dot{u}_x \\ c \dot{u}_y \\ c \dot{u}_z \end{Bmatrix} = c \dot{\mathbf{u}} \quad (12.63)$$

donde  $c$  es un coeficiente a determinar para cada material. Considerando estas fuerzas disipativas como fuerzas actuantes sobre el elemento, el vector de fuerzas nodales equivalentes que producen es:

$$\mathbf{P}_D^e = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_D dv = \int_v \mathbf{N}^T c \dot{\mathbf{u}} dv = \int_v \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dv \dot{\delta}^e = \mathbf{C}^e \dot{\delta}^e \quad (12.64)$$

donde se identifica la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}^e$  del elemento. Obsérvese que esta matriz es proporcional a la matriz de masas del elemento:

$$\mathbf{C}^e = \frac{c}{\rho} \mathbf{M}^e = \alpha \mathbf{M}^e \quad (12.65)$$

En otro modelo de amortiguamiento, se considera que la energía disipada corresponde al trabajo interno producido por una distribución de tensiones proporcional a la velocidad de deformación unitaria en el material. Llamando  $\beta$  al factor de proporcionalidad, el valor de estas tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma}_D = \beta \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (12.66)$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes a estas tensiones tiene la expresión habitual:

$$\mathbf{P}_D^e = - \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_D dv = - \int_v \mathbf{B}^T \beta \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dv = - \beta \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\delta}}^e dv = \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (12.67)$$

Comparando con la expresión de la matriz de rigidez, se observa que la matriz de amortiguamiento para este modelo es proporcional a la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{C}^e = \beta \mathbf{K}^e \quad (12.68)$$

Considerando ambas aproximaciones, la matriz de amortiguamiento del elemento se puede poner en la forma:

$$\mathbf{C}^e = \alpha \mathbf{M}^e + \beta \mathbf{K}^e \quad (12.69)$$

que se denomina modelo de amortiguamiento proporcional. Este modelo presenta ventajas para la determinación de la respuesta de la estructura y su principal dificultad está en la determinación de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ .

## 12.6. ENERGÍA CINÉTICA

La expresión de la energía cinética de un elemento finito cualquiera es:

$$T^e = \int_v \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dv \quad (12.70)$$

Sustituyendo la ley de interpolación de velocidades  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\delta}}^e$  se obtiene:

$$T^e = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}^{eT} \int_v \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \dot{\boldsymbol{\delta}}^e = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}^{eT} \mathbf{M}^e \dot{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (12.71)$$

Dado que la energía cinética es siempre positiva (por su propio significado) para cualquier vector no nulo de velocidades del sistema, se deduce que  $\mathbf{M}^e$  es definida positiva siempre.

Para toda la estructura, la energía cinética es la suma de las energías de todos los elementos, con lo que se puede poner en la forma:

$$T = \sum T^e = \frac{1}{2} \dot{\Delta}^T \mathbf{M} \dot{\Delta} \quad (12.72)$$

### 12.7. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LA ESTRUCTURA

Las ecuaciones del movimiento del conjunto de la estructura se obtienen de la misma forma que en el caso estático: por ensamblado de las ecuaciones del movimiento de los distintos elementos que componen la estructura. En este proceso de ensamblado se cancelan las fuerzas de conexión, obteniéndose:

$$\mathbf{M} \ddot{\Delta} + \mathbf{C} \dot{\Delta} + \mathbf{K} \Delta = \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_T + \mathbf{P}_\sigma + \mathbf{P}_N \quad (12.73)$$

En esta ecuación aparecen los mismos términos que en el caso estático. Además,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  son las matrices de masas y de amortiguamiento de toda la estructura, obtenidas ambas ensamblando las matrices correspondientes a todos los elementos.

La ecuación anterior es diferencial de orden 2 y con coeficientes constantes, ya que  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  no dependen del tiempo. Su resolución se efectúa habitualmente empleando métodos numéricos adecuados. Para ello es necesario introducir previamente las condiciones de sustentación de la estructura, lo cual se efectúa de la misma forma que en el caso estático.

# Bibliografía

Argyris J. H., Kelsey S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Aircraft Engineering, Oct. 1954.

Bathe K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1996.

Bathe K. J., Dvorkin E., *A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1985; 21:367-383.

Chapelle D., Bathe K. J., *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*, Springer, 2003.

Cook R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1989.

Crisfield M. A., *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis Vol. 1 Linear Analysis*, Pineridge Press, 1986.

Gruttmann F., Wagner W., *A stabilized one-point integrated quadrilateral Reissner-Mindlin plate element*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2004; 61:2273-2295.

Gruttmann F., Wagner W., *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005; 194:4279-4300.

Huebner K. H., Thornton E. A., Byrom T. G., *The Finite Element Method for Engineers*, 3<sup>rd</sup> Edition, John Wiley & Sons, 1995.

Hughes T. J. R., *The Finite Element Method*, Prentice Hall, 1987.

Irons B., Ahmad S., *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood Ltd., 1981.

MacNeal R. G., Harder R. L., *A proposed standard set of problems to test finite elements accuracy*, Finite Elements in Analysis and Design, 1985; 1:3-20.

Mindlin R. D., *Influence of rotary inertia on shear flexural motions of isotropic elastic plates*, J. Applied Mechanics, 1951; 18:31-38.

Oñate E., *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*, C.I.M.N.E., Barcelona, 1992.

Oñate E., Zienkiewicz O. C., Suárez B., Taylor R. L., *A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1992; 33:345-367.

Pian T. H. H., Chen D., *Alternative ways for formulation of hybrid stress elements*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1982; 18:1679-1684.

Pian T. H. H., Sumihara K., *Rational approach for assumed stress finite elements*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1984; 20:1685-1695.

Pian T. H. H., Wu C. C., *A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1988; 26:2331-2343.

Przemieniecki J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.

Reddy J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1984.

Reissner E., *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Applied Mechanics, 1945; 12:69-76.

Simó J. C., Fox D. D., *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1989; 72:267-304.

Simó J. C., Fox D. D., Rifai M. S., *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; Computational aspects*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1989; 73:53-92.

Simó J. C., Rifai M. S., *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1990; 29:1595-1638.

Stanley G. M., Park K. C., Hughes T. J. R., *Continuum-based resultant shell elements*, en: Hughes, T. J. R., Hinton E. (Eds.), *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures Vol. 1*, Pineridge Press, 1986.

Szilar R., *Theory and Analysis of Plates*, Prentice Hall, 1974.

Taylor R. L., Beresford P. J., Wilson E. L., *A non-conforming element for stress analysis*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1976; 10:1211-1279.

Timoshenko S., Woinowski-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.

Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aeronautical Sciences, 1956; 23(9): 805-823.

Wang C. M., Reddy J. N., Lee K. H., *Shear Deformable Beams and Plates*, Elsevier, 2000.

Weissman S., Taylor R. L., *Mixed formulations for plate bending elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992; 94:391-427.

Weissman S., Taylor R. L., *Resultant fields for mixed plate bending elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990; 79:321-355.

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method Vol. 1 The Basis*, Fifth Ed., Butterworth-Heinemann, 2000.

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method. Vol. 2 Solid Mechanics*, Fifth Ed., Butterworth-Heinemann, 2000.

# Índice de materias

## A

Amortiguamiento, 261  
Antisimetría, 109, 112, 118  
Armónico, 119

## B

**B**, matriz: *ver* Matriz **B**  
Barra:  
    biarticulada plana, 254  
    de celosía espacial, 255  
Bloqueo por cortante, 161, 178, 192, 195

## C

Campo de cortante, 164, 178, 224  
Cáscara:  
    definición, 197  
    elementos finitos, 199, 221  
    modelización, 197  
Compatibilidad:  
    de desplazamientos, 11  
    de giros en placas, 142  
Conforme, elemento, 145  
Continuidad, 3, 142  
Continuos, sistemas, 1  
Convergencia:  
    concepto, 8  
    criterios, 8, 12  
    en placas, 178  
Coordenadas:  
    curvilíneas, 52, 61, 200, 214  
    de área, 57, 68, 94  
    de volumen, 92  
Corrección:  
    de nudos esquina, 53, 54, 59, 60  
    de Wilson, 72

Cuadrilátero, elemento, 72

Curvatura:  
    en cáscaras, 196, 220, 224  
    en placas, 124, 149

## D

Deformación:  
    de cortadura, 220, 224  
    de flexión, 121, 148  
    plana, 39  
Deformación unitaria:  
    en cáscaras, 205, 219, 223  
    en dos dimensiones, 40  
    en placas, 123, 148  
    en sólidos de revolución, 101, 110  
    en tres dimensiones, 86  
    en vigas, 182  
Deformación unitaria inicial, 43, 125  
Densidad de energía elástica, 24  
Desplazamiento virtual, 20, 249  
Discretización, concepto, 2  
Discretos, sistemas, 1

## E

Ecuación constitutiva del material, 18, 42, 79, 88, 103, 125, 211, 226  
Ecuación de equilibrio:  
    de toda la estructura, 23  
    de un elemento finito, 22  
Ecuación diferencial,  
    elasticidad unidimensional, 26  
    flexión de placas, 130, 152  
Elástica, matriz, *ver* Ecuación constitutiva del material  
Elasticidad:  
    bidimensional o plana, 39

- módulo de, *ver* Módulo de Elasticidad
- tridimensional, 85
- unidimensional, 26
- Elemento:
  - compatible, 12
  - completo, 10
  - conforme, 145
- Elemento finito:
  - axisimétrico, 99
  - biarticulado plano, 252
  - cáscara de cuatro lados, 200, 221
  - cáscara triangular, 213
  - de celosía espacial, 253
  - de lados curvos, 61, 95, 104
  - de número de nudos variable, 55
  - de transición sólido-cáscara, 233
  - definición, 2
  - hexaedro, 90
  - isoparamétrico, 33, 36, 60, 95, 104, 154, 202, 221
  - lagrangiano, 56
  - placa delgada, 138
  - placa conforme, 145
  - placa Mindlin, 153
  - placa rectangular, 138
  - prismático triangular, 91
  - rectangular plano, 48
  - sólido, 89
  - subparamétrico, 62
  - superparamétrico, 63
  - triangular plano, 44
  - tetraedro, 92
  - viga plana, *ver* Viga plana
  - unidimensional de dos nudos, 27
  - unidimensional de tres nudos, 36
- Energía:
  - acumulada en los contornos, 11
  - cinética, 245, 258
  - de esfuerzo cortante, 121, 152, 181, 190, 199
  - elástica, 10, 20, 24, 152, 227
  - potencial, 24, 152, 156
- Ensamblaje de la matriz de rigidez, 23
- Equilibrio de los nudos, 23
- Estructura:
  - continua, 1
  - discreta, 1
- Euler, teoría de, 181
- F**
- Factor de corrección a cortante, 152, 190
- Flexión:
  - de placas delgadas, 120
  - de placas gruesas, 147
  - de vigas planas, 181
- Fourier, desarrollo en serie, 109, 116
- Fuerza nodal equivalente:
  - a las deformaciones iniciales, 22, 160
  - a las fuerzas de línea, 108, 159, 176, 186, 230
  - a las fuerzas de superficie, 22, 97, 107, 141, 158, 176, 230
  - a las temperaturas, 48, 129, 160
  - a las tensiones iniciales, 22
  - a las fuerzas de volumen, 22, 96
- Fuerzas exteriores:
  - de línea, 159, 176, 186, 233
  - de superficie, 19, 66, 158, 176, 230
  - de volumen, 19, 65
  - nodales, 19, 24
- Fuerzas de inercia, 251
- Función de interpolación,
  - definición, 6, 15, 30, 40, 51, 89, 100, 139, 153, 184, 201, 221
  - Lagrangiana, 56
  - no nodal, 72
  - Serendipity, 51
- G**
- Gauss:
  - integración numérica, 244
  - puntos de, 244
- Grados de libertad, 7, 15, 27, 40, 75, 86, 100, 138, 153, 183, 204, 223
- H**
- Hellinger-Reissner, principio de, 79, 229
- Híbrido, elemento, 74, 169, 228

## Hipótesis:

- de discretización, 2
- de Navier, 181, 121

Huecos entre elementos, 69

**I**

Incompatibilidad, 10, 74, 142

Incompatible, elemento, 72, 144

Integración,

- de Gauss, 240
- de Newton, 239
- en dos dimensiones, 245
- en tetraedros, 243
- en triángulos, 242
- en una dimensión, 243
- reducida, 162

Interferencia entre elementos, 69

Interpolación:

- de coordenadas, 33, 61, 94, 104, 154, 201
- de desplazamientos, 7, 15, 27, 34, 40, 44, 49, 74, 86, 100, 112, 139, 153, 204, 221
- de esfuerzos, 172, 175, 228
- de espesores 65
- de fuerzas exteriores, 33, 66, 67, 96, 97, 106, 107, 158, 159
- de temperaturas, 161
- de tensiones, 76

Isoparamétrico:

- elemento, 33, 36, 62, 95, 104, 221
- formulación, 33, 60, 94, 104, 153

Isótropo, material, 42

**J**

Jacobiana, 34, 64, 95, 105, 157, 190, 207, 218, 223

**K**

Kirchhoff, teoría de, 120

**L**

Lagrangiana, función, 253

Lagrangiano, elemento, 56

Lámina, *ver* Cáscara.

**M**

Mallado, 55

Matriz:

- B**, 17, 34, 41, 46, 50, 76, 102, 140, 155, 172, 205, 226
- de amortiguamiento, 265
- de interpolación, *ver* Función de interpolación
- de inercia, 255, 256
- de rigidez de cortante, 156, 190
- de rigidez de la estructura, 23
- de rigidez del elemento, 22, 29, 35, 47, 50, 63, 79, 96, 105, 140, 156, 197, 213, 228, 231
- de rotación, 210, 216, 218, 222
- de masas, *ver* Matriz de inercia elástica, *ver* Ecuación constitutiva Jacobiana, *ver* Jacobiana.

Mindlin, teoría de, 147

Módulo:

- de cortadura, 150, 125
- de elasticidad, 27, 42, 88, 103, 125, 150, 182, 211
- de Poisson, 42, 88

Momento:

- debido a la temperatura, 128
- flexor en placas, 126, 151
- torsor en placas, 126, 151

**N**

No conforme, elemento, 72

Nodal:

- deformación, *ver* Grado de libertad
- fuerza, *ver* Fuerza nodal equivalente

Nudos:

- definición, 2
- esquina, 53, 90
- intermedios, 53, 90

Numeración de nudos, 69

Número de puntos de integración, 245

**O**

Orden de integración, 248

**P**

- Parámetro de distorsión, 70
- Pascal, triángulo de, 56, 57
- Placa:
  - definición, 120
  - deformaciones, 122
  - delgada o de Kirchhoff, 121
  - esfuerzos interiores, 126
  - gruesa o de Mindlin-Reissner, 147
- Poisson, coeficiente, *ver* Módulo de Poisson
- Polinomio,
  - de Hermite, 145
  - de interpolación, 44, 49, 139, 259
  - de Lagrange, 56
- Potencial, *ver* Energía potencial
- Principio:
  - de Hamilton, 246
  - del potencial total estacionario, 25, 156
  - del Trabajo Virtual, 20, 251
- Puntos:
  - de Gauss, 244
  - de integración, 244, 249

**R**

- Rectangular:
  - elemento placa, 138
  - elemento plano, 48, 74
- Reissner, teoría de, 147
- Rigidez: *ver* Matriz de rigidez
- Rigidez equivalente de placa, 128
- Rigidez ficticia al giro, 198

**S**

- Serendipity, funciones de interpolación, 51
- Simetría de revolución, 99
- Sistema de ejes:
  - de la lámina, 210
  - director en una cáscara, 202, 216
  - local al elemento, 48, 52, 89, 196
- Sólido:
  - de revolución, 99
  - rígido, 9
  - tridimensional, 85

**T**

- Temperaturas, 43, 103, 128, 160, 183
- Tensión plana, 42
- Tensiones:
  - en cáscaras, 211
  - en placas, 124
  - en sólidos bidimensionales, 42
  - en sólidos de revolución, 103
  - en sólidos tridimensionales, 88
  - iniciales, 19, 89
- Timoshenko, teoría de, 187
- Trabajo virtual: *ver* Principio del Trabajo Virtual
- Transición:
  - entre elementos, 55
  - sólido cáscara, 231
- Triángulo:
  - elemento cáscara, 213
  - elemento plano, 44
  - funciones de forma, 46

**V**

- Vector:
  - de deformaciones nodales, *ver* Grados de libertad
  - de fuerzas nodales equivalentes, *ver* Fuerza nodal equivalente
  - director, 200, 214
  - normal a la cáscara, 210, 218
- Viga plana:
  - teoría clásica, 181
  - con energía de cortante, 187
  - de tres nudos, 194

**W**

- Wilson, corrección de, 72
- Wilson, elemento de, 81, 82, 84