Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales. Problemas de contorno

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO
LAZARO GIMENA RAMOS, ALUMNO INGENIERIA INDUSTRIAL

RESUMEN. ***Este artículo presenta un método de resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, cualesquiera que sean las condiciones de contorno.***

SUMMARY. *This article presents a method of numerically resolving lineal differential equations no matter the type of surrounding conditions.*

INDICE GENERAL

1. RESOLUCION NUMERICA DE UN SISTEMA DE EDO'S LINEALES. PROBLEMA DE CONTORNO

Sea el siguiente sistema genérico de EDO'S lineal:

$$\frac{df_1(x)}{dx} + a_{11}(x)\,f_1(x) + a_{12}(x)\,f_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)\,f_n(x) = b_1(x)$$

$$a_{21}(x)\,f_1(x) + \frac{df_2(x)}{dx} + a_{22}(x)\,f_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)\,f_n(x) = b_2(x)$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}(x)\,f_1(x) + a_{n2}(x)\,f_2(x) + \ldots + \frac{df_n(x)}{dx} + a_{nn}(x)\,f_n(x) = b_n(x)$$

donde $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ son funciones dato del problema y $f_j(x)$ son las funciones incógnita.

Expresado en forma matricial y utilizacndo el operador $D = \frac{d}{dx}$:

$$\begin{pmatrix} D + a_{11}(x) & a_{12}(x) & .. & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & D + a_{22}(x) & .. & a_{21}(x) \\ . & . & .. & . \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & .. & D + a_{nn}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

Discretizando el sistema mediante el paso de diferenciales a diferencias según el método de punto pendiente:

$$D f_j(x) = \frac{df_j(x)}{dx} \simeq \frac{\Delta_i f_j(x)}{\Delta_i x} = \frac{f_j(x_{i+1}) - f_j(x)}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{para } j = 1, \ldots, n$$

se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta_i}{\Delta_i x} + a_{11}(x_i) & a_{12}(x_i) & \ldots & a_{1n}(x_i) \\ a_{21}(x_i) & \frac{\Delta_i}{\Delta_i x} + a_{22}(x_i) & \ldots & a_{21}(x_i) \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1}(x_i) & a_{n2}(x_i) & \ldots & a_{nn}(x_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x_i) \\ b_2(x_i) \\ \\ b_n(x_i) \end{pmatrix}$$

Operando el primer miembro de la igualdad y multiplicando el sistema por $\Delta_i x$:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_{i+1}) - f_1(x_i) + a_{11}(x_i) f_1(x_i)\Delta_i x + a_{12}(x_i) f_2(x_i)\Delta_i x + \ldots + a_{1n}(x_i) f_n(x_i)\Delta_i x \\ a_{21}(x_i) f_1(x_i)\Delta_i x) + f_2(x_{i+1}) - f_2(x_i) + a_{22}(x_i) f_2(x_i)\Delta_i x + \ldots + a_{2n}(x_i) f_n(x_i)\Delta_i x \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}(x) f_1(x_i)\Delta_i x) + a_{n2}(x) f_2(x_i)\Delta_i x + \ldots + f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i) + a_{nn}(x_i) f_n(x_i)\Delta_i x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x_i)\Delta_i x \\ b_2(x_i)\Delta_i x \\ . \\ . \\ . \\ b_n(x_i)\Delta_i x \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} f_1(x_{i+1}) \\ f_2(x_{i+1} \\ . \\ f_n(x_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}(x_i)\Delta_i x & -a_{12}(x_i)\Delta_i x & \ldots & -a_{1n}(x_i)\Delta_i x \\ -a_{21}(x_i)\Delta_i x & 1 - a_{22}(x_i)\Delta_i x & \ldots & -a_{2n}(x_i)\Delta_i x \\ . & . & \ldots & . \\ -a_{n1}(x_i)\Delta_i x & -a_{n2}(x_i)\Delta_i x & \ldots & 1 - a_{nn}(x_i)\Delta_i x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x_i)\Delta_i x \\ b_2(x_i)\Delta_i x \\ . \\ b_n(x_i)\Delta_i x \end{pmatrix}$$

Expresado en forma compacta:

$$\left\{F_{i+1}\right\} = (A_i)\left\{F_i\right\} + \left\{B_i\right\}$$

Aplicando la ley de recurrencia se relacionan dos puntos cualesquiera:

$$\left\{F_{p+1}\right\} = (A)_p\left\{F_0\right\} + \left\{B\right\}_p$$

siendo

$$(A)_p = \prod_{i=0}^{p} (A_{p-1})$$

$$\left\{B\right\}_p = \sum_{i=0}^{p-1}\left[\prod_{j=i}^{p-1}\left(A_{p+i-j}\right)\right]\left\{B_i\right\} + \left\{B_p\right\}$$

de esta manera:

$$\left\{F_{e^{(K-1}}\right\} = \left(A\right)_{e^{(K-1}-e^{(K-2}} \times \left\{F_{e^{(K-2}}\right\} + \left\{B\right\}_{e^{(K-1}-e^{(K-2}} = \ldots =$$

$$= \left(A\right)_{e^{(K-1}-e^{1}} \times \left\{F_{e^{1}}\right\} + \left\{B\right\}_{e^{(K-1}-e^{1}} = \left(A\right)_{e^{(K-1}-e^{0}} \times \left\{F_{e^{0}}\right\} + \left\{B\right\}_{e^{(K-1}-e^{0}}$$

Se relacionan los k puntos en los cuales están definidas las n condiciones de contorno:

$$f_j\,(x_{e^{(m}}) = C_{j,\,e^{(m}} \qquad \begin{array}{l} 0 \le m \le H \\ j \in \{1, \ldots, n\} \\ C_{j,e^{(m}} \in R \text{ constantes} \end{array}$$

Por tanto, se obtiene k–1 sistemas de n ecuacuines con kn incógnitas, que al introducir las n condiciones de contorno, resulta un sistema compatible determinado solución única.

2. RESOLOCION NUMERICA DE EDO'S LINEALES DE ORDEN n

Sea la ecuación diferencial de orden n:

$$y^{\,In}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{\,In-1}(x) + \ldots + a_1(x)\, y^{\,I}(x) + a_0\, y(x) = b(x)$$

utilizando el operador $D^i = \dfrac{d^i}{dx^i}$:

$$D^n\, y(x) + a_{n-1}(x) D^{n-1}\, y(x) + \ldots + a_1(x) D\, y(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x)$$

mediante el campo de función $Z_i = D^i y$, y sustituyendo $Z_{i+1} = D\, Z_i$ para $i = 0, \ldots, n-1$, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} D & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & D & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & D & -1 \\ a_0(x) & a_1(x) & a_2(x) & . & . & a_{n-1}(x) & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(x) \\ z_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

que con las condiciones de contorno:

$$Z_j\left(x_{e^{(m}}\right) = C_{j,\,e^{(m}} \qquad \begin{array}{l} 0 \le m \le K \\ j \in \{0, \ldots, n\} \\ C_{j,e^{(m}} \in R \end{array}$$

Se reduce a un caso particular del sistema de EDO'S leneales expuesto en el anterior apartado

3. CASO DE APLICACION DEL METODO. EFECTO EN LA SECCION DEL ELEMENTO ESTRUCTURAL LINEAL

El sistema de ecuaciones diferenciales que relacionan la solicitación y deformación en dos secciones que distan un diferencial de arco ds, viene dado por

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
DN & -\chi V_n & & & & & & & & & & + q_t & = 0 \\
\chi N & +DV_n & -\varphi V_b & & & & & & & & & + q_n & = 0 \\
 & \varphi V_n & -DV_b & & & & & & & & & + q_b & = 0 \\
 & & & DT & -\chi M_n & & & & & & & + k_t & = 0 \\
 & & -V_b & +\chi T & +DM_n & -\varphi M_b & & & & & & + k_n & = 0 \\
 & V_n & & & +\varphi M_n & DM_b & & & & & & + k_b & = 0 \\
 & & & -\dfrac{T}{GI_t} & & & +D\phi & -\chi\theta_n & & & & -\Theta_t & = 0 \\
 & & & & -\dfrac{M_n I_b}{E(I_n I_b - I_{nb}^2)} & -\dfrac{M_b I_{nb}}{E(I_n I_b - I_{nb}^2)} & +\chi\phi & +D\theta_n & -\varphi\theta_b & & & -\Theta_n & = 0 \\
 & & & & +\dfrac{M_n I_{nb}}{E(I_n I_b - I_{nb}^2)} & -\dfrac{M_b I_n}{E(I_n I_b - I_{nb}^2)} & & +\varphi\theta_n & +D\theta_b & & & -\Theta_b & = 0 \\
-\dfrac{N}{EA} & & & & & & & & & +Du & -\chi v & -\Delta_t & = 0 \\
 & -\dfrac{\alpha_{nn} V_n}{GA} & -\dfrac{\alpha_{nb} V_b}{GA} & & & & & & -\theta_b & +\chi u & +Dv \quad -\varphi w & -\Delta_n & = 0 \\
 & -\dfrac{\alpha_{bn} V_n}{GA} & -\dfrac{\alpha_{bb} V_n}{GA} & & & & & +\theta_n & & & +\varphi v \quad +Dw & -\Delta_b & = 0
\end{array}$$

Apurando el método, conocidas doce condiciones de contorno en los extremos del elemento estructural lineal (sustentaciones), se determina la solicitación y deformación en cualquier punto del elemento estructural lineal.

4. CONCLUSIONES

- El método presentadi resuelve de una manera sencilla y general, un sistema de ecuaciones diferenciales de cualquier orden (se reducen madiante cambios de función de primer orden) una vez conocidas las condiciones de contorno en cualesquiera puntos.
- Se pueden utilizar otros métodos para la discretización del sistema (Euler modificado, punto-medio ...) aumentando la aproximación y convergencia a ñla solución.
- La programación es más sencilla
- El coste de computación es inferior al empleado en la aplicación de otros métodos como diferencias finitas, método del tiro ...