Diferencial de funciones de varias variables

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO
CARLOS J. MACUA CORDON, MATEMATICO

RESUMEN. *Se presenta una metodología para obtener los diferenciales de orden superior y su cambio de variables.*

SUMMARY. *A methodology to obtain the higher order differentials and their changes of variables is presented.*

INDICE GENERAL

1. DIFERENCIAL TOTAL

El valor del diferencial total de la función $F = (x_1, \ldots, X_n)$ es:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n \; F =$$

$$= d_{x_1} F + d_{x_2} F + \ldots + d_{x_n} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

Este valor se puede expresar de forma matricial:

$$dF = \overrightarrow{\nabla_x F} \cdot \overrightarrow{d_x S}^{T}$$

siendo:

$$\overrightarrow{\nabla_x F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

$$\overrightarrow{d_x S} = \left(dx_1, \ldots, dx_n \right)$$

2. CAMBIO DE VARIABLES EN DIFERENCIAL TOTAL

Dada una función F, es a veces útil efectuar un cambio de variables, esto es, calcular dF en funciópn de otras variables. Efectuamos el cambio de variable en las diferenciales de las variables:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j$$

por tanto:

$$\overrightarrow{d_x S}^{T} = J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{d_u S}^{T}$$

siendo:

$$J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

Efectuamos el cambio de variable en las derivadas parciales

$$d\,F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right] du_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j$$

de donde:

$$\frac{d\,F}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

esto implica que:

$$\overrightarrow{\nabla_u F} = \overrightarrow{\nabla_x F} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

El cambio de variable del diferencial total se expresa:

$$dF = \overrightarrow{\nabla_x F} \cdot \overrightarrow{d_x S}^{T} = \overrightarrow{\nabla_u F} \cdot J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \overrightarrow{d_x S}^{T} =$$

$$= \overrightarrow{\nabla_x F} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \overrightarrow{d_u S}^{T} = \overrightarrow{\nabla_u F} \cdot J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{d_u S}^{T}$$

$$= \overrightarrow{\nabla_u F} \cdot \overrightarrow{d_x S}^{T}$$

por tanto

$$J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = I$$

y en su consecuencia:

$$\det J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \cdot \det J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = 1$$

3. DIFERENCIALES SUCESIVOS

Si diferenciamos el diferencial de la función obtenemos el diferencial segundo cuyo valor es:

$$d^2F = d\left[dF\right] = \left[\overrightarrow{\nabla_x F} \cdot \overrightarrow{d_x S}^{T} \right] =$$

$$= \overrightarrow{\nabla_x\, \overrightarrow{\nabla_x F} \cdot \overrightarrow{d_x S}^{T}} \cdot \overrightarrow{d_x S}^{T} = \left[\overrightarrow{\nabla_x F} \cdot \overrightarrow{d_x S}^{T} \right]^2$$

para obtener el diferencial de orden p efectuamos la diferenciación p veces, por tanto el diferencial de orden p tiene la expresión:

$$d^pF = \left[\overrightarrow{\nabla_x F} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \overrightarrow{d_u}\, S^{T} \right]^p =$$

$$= \left[\overrightarrow{\nabla_u F} \cdot J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \overrightarrow{d_x}\, S^{T} \right]^p =$$

$$= \left[\overrightarrow{\nabla_u F} \cdot J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \overrightarrow{d_u}\, S^{T} \right]^p$$

4. CAMBIO DE VARIABLES EN DIFERENCIALES SUCESIVOS

El cambio de variables en diferenciales de orden es:

$$d^pF = \left[\overrightarrow{\nabla_x F} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \overrightarrow{d_u}\, S^{T} \right]^p =$$

$$= \left[\overrightarrow{\nabla_u F} \cdot J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \overrightarrow{d_x}\, S^{T} \right]^p =$$

$$= \left[\overrightarrow{\nabla_u F} \cdot J \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} \cdot J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \overrightarrow{d_u}\, S^{T} \right]^p$$

5. CONCLUSIONES

- Se expone una metodología para la obtención de diferenciales de orden superior y el cambio de variables en estos.
- Se obtiene la fórmula de cambio de variables en diferenciales sucesivos.