Revista de Edificación. **RE** • **Nº 13** • **Marzo 1993**

Diferencial y derivada

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO

RESUMEN. ***El cálculo diferencial se basa en los conceptos de diferencial y derivada. La definición de diferencial no es clara, ya que aunque tenemos en la mente que un diferencial es un elemento infinitesimal, por su definición es finito.***
Definiendo el diferencial como límite de un incremento, no hay confusión. El diferencial es un infinitesimal.
Con esta definición se puede deducir todo el cálculo diferencial y para su deducción nos apoyamos en el álgebra. De esta forma dos materias separadas de las matemáticas como el álgebra y el cálculo diferencial se unen.

SUMMARY. *Differential calculus is based on the concepts of differential and derivitive. The definition of differential is not clear because although we keep in mind that a differential is an infinite element, by being defined it is finite.*
Defining the differential as a limit to an increase eliminates any confusion. The differential is infinitesimal.
With this definition all differential calculus can be deduced and its deduction can be backed by algebra.
Thus, two separate mathematical subjects such as algebra and differential calculus are fused.

INDICE GENERAL

1. INTRODUCCION

Se define derivada de una función $y = g(x)$ con respecto a variable como límite cuando incremento de la variable tiende a cero, del incremento de la función entre el incremento de la variable.

Se define diferencial de una función $y = g(x)$ como el producto de la derivada de la función respecto a la variable por el incremento de la variable.

Estas definiciones, aunque son definiciones llevan a una equivocación, confundir lo que es infinitesimal con lo que es finito.

Según la definición de diferencial, el diferencial de la variable es igual a su incremento, de esta forma estamos identificando cosas infinitesimales con cosas finitas.

Este artículo pretende definir el diferencial como diferencia infinitamente pequeña de una variable y a partir de esta definición deducir los demás conceptos del cálculo diferencial.

2. DEFINICIONES

Dada la función $F = F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ se define diferencial parcial de F respecto a las variables $x_i,\dots,x_j$ en el punto $P(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ como el límite cuando un punto P_1 tiende a P, de la función F incrementada en la variables, $x_i,\dots,x_j$ menos la función F sin incrementar.

$$d_{0,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,0}\, F = \lim_{P_1 \to P} \Delta_{0,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,0}\, F$$

Cuando incrementamos todas las variables de la función se llama diferencial total.

$$d_{x_1,\dots x_i,\dots x_u}\, F = dF$$

3. DEDUCCIONES

Así definido el diferencial podemos determinar cual es el diferencial total de cada variable. Este diferencial es el límite cuando un punto P_1 tiende a P del incremento de la variable.

$$dx_i = \lim_{P_1 \to P} \Delta x_i$$

Los diferenciales de F con la operación interna suma sobre un cuerpo K tiene estructura de espacio vectorial (su demostración es inmediata).

Esto permite definir una aplicación f tal que cada diferencial parcial de F respecto a una variable x_i le corresponde un vector de componentes $(0,\ldots,dx_i,\ldots0)$.

$$f\left[d_{0,\ldots,x_i,\ldots,0}\right] = \left(0,\ldots,dx_i,\ldots,0\right)$$

Esta aplicación es una aplicación lineal (su demostración es inmediata).
Por tanto:

$$f\left[\frac{d_{0,\ldots,x_i,\ldots,0}\,F}{dx_i}\right] = \left(0,\ldots,1,\ldots,0\right)$$

Al solo incrementar la variable x_i el punto P_1 está en la línea $P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ y $P_{1xi}\,(x_1,\ldots,x_i + \Delta x_i,\ldots,x_n)$ luego:

$$\frac{d_{0,\ldots x_i,\ldots,0}\,F}{dx_i} = \frac{\lim\limits_{P_1 \to P} \Delta_{0,\ldots x_i,\ldots,0}\,F}{\lim\limits_{P_1 \to P} \Delta x_i} =$$

$$= \lim_{P_1 \to P} \frac{\Delta_{0,\ldots x_i,\ldots,0}\,F}{\Delta x_i} = \lim_{P_{1x_i} \to P} \frac{\Delta_{0,\ldots x_i,\ldots,0}\,F}{\Delta x_i}$$

A este último límite se le llama derivada parcial de la función respecto a la variable x_i:

$$\lim_{P_{1x_i} \to P} \frac{\Delta_{0,\ldots,x_i,\ldots,0}\,F}{\Delta x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

La imagen de la derivada parcial de F respecto a x_i es el vector unitario $(0,\ldots,1,\ldots,0)$.

Podemos de esta forma determinar el valor del diferencial total de F, apoyándonos en la aplicación lineal.

$$f\left[dF\right] = (dx_1,\ldots,dx_n) = (1,0,\ldots,0)dx_1 + \cdots + (0,\ldots,0,1)dx_n =$$

$$= f\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n\right]$$

Por tanto:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\,dx_n$$

4. CONCLUSIONES

- Definido así el diferencial de una función no hay confusión si es infinitesimal o finito.
- Unicamente se necesita una definición para deducir el cálculo diferencial.
- Los determinantes de las matrices de cambio de base de la aplicación lineal son los jacobianos.
- De forma análoga se puede hallar el valor de los diferenciales de orden superior de una función.
- El diferencial de orden superior de una variable no es nulo.
- Hay una clara diferencia en lo que es el cociente entre diferenciales a la derivada parcial.
- Se une por esta definición lo que es el cálculo con el álgebra.
- El método de enseñanza del cálculo diferencial es más sencillo.