# El número $\pi$: lo que se ha dicho de él a través de la historia

**María del Pilar Cubillos**
*Estudiante Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
pilicubi@hotmail.com

**Carlos Roberto Pérez Medina**
*Estudiante Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
capeme007@hotmail.com

**Johana Andrea Torres Díaz**
*Profesora Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
jotorres@uni.pedagogica.edu.co

**Resumen**

En este trabajo[1] se presenta una historia del número $\pi$, resaltando los aportes más significativos a su estudio, desde diversos puntos de vista, épocas y lugares. Se señalan desarrollos desde la geometría, la aritmética, el análisis e incluso, la probabilidad y algunas curiosidades alrededor de esta constante desde disciplinas diferentes a las matemáticas como la literatura.

"Leer la historia del número $\pi$ permite penetrar en el centro del mundo matemático, ese maravilloso mundo donde la imaginación tiene su más bella parte."
*Paul Dubreil*

El número $\pi$ ha atraído en gran medida la atención de muchos matemáticos, en diferentes épocas, quienes, de manera accidental en algunas ocasiones o con plena conciencia, contribuyeron al estudio de esta constante, mediante procedimientos empíricos cada vez más elaborados.

Desde la antigüedad, el interés por resolver el problema de la cuadratura del círculo, uno de los problemas clásicos de la geometría[2], llevó al reconocimiento de la existencia de esta constante y al estudio y descubrimiento de varias características y representaciones de ésta, incluso hasta la demostración de su irracionalidad y trascendencia en el siglo XVII,

[1]El siguiente trabajo corresponde a dos comunicaciones breves tituladas "*El número $\pi$ en la antigüedad*" y "*Expresiones analíticas para $\pi$*"

[2]Se conocen como probemas clásicos de la geometría: La duplicación del cubo, la trisección del ángulo,la cuadratura del círculo la construcción de un $n$-ágono regular, empleando en todos los casos únicamente regla y compás en el sentido platónico. De ellos ya se demostró su insolubilidad, aunque a través de la historia se desarrollaron diversas propuestas de solución alternativas, obviamente sin cumplir las condiciones estrictas del problema. se pueden ver varias de estas propuestas y la demostración de la insolubilidad en el texto *Tres problemas clásicos de la geometría: un problema de teoría de campos*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

y el uso de tecnología informática en el siglo XX, para obtener mejores aproximaciones decimales de ella.

En este trabajo pretendemos reconstruir algunos datos de la historia del número $\pi$, del que en la actualidad se conocen 51.539'600.000 cifras decimales, retomando los personajes y aportes más sobresalientes en el estudio de este número y algunas curiosidades, incluso de escritores que has sido atraídos por una de las constantes más importantes en matemáticas[3].

## Aparición de la constante

Los primeros indicios de la aparición del número pi se encuentran en papiros egipcios de gran antigüedad; entre ellos, el más conocido es el Papiro de Rhind[4], en el cual aparecen problemas relacionados con círculos, como el siguiente:

> "Un granero cilíndrico de 9 de diámetro y 6 de altura, ¿Cuál es la cantidad de grano que cabe en él?"
> *(Reif Acherman Simón, 1990, p.54)*

En la solución del problema se enuncia una regla para calcular el área de la base circular: "el área de un círculo es igual al área de un cuadrado, cuyo lado es el diámetro disminuido en una novena[5] parte, $\left(l = \frac{8}{9d}\right)$", con la cual se obtiene un valor de pi igual a $\frac{256}{81}$, es decir aproximadamente 3.1604.

Otros documentos antiguos en los que, implícitamente, se hace mención al número pi corresponden a libros sagrados como el Talmud con la frase[6]: "*lo que mide tres codos alrededor tiene un codo de ancho*"; y la Biblia en 1 Reyes 7,23 y 2 Crónicas 4,2: "*Hizo también una enorme pila de bronce. Era redonda y medía cuatro metros y medio de un borde al otro. Su altura era de dos metros y veinticinco centímetros, formando una sola pieza con la pila*"; en los dos casos, el valor de pi es 3.

[3] Otra de las constantes importantes en matemáticas es el número $e$ de Euler, base de los logaritmos de Neper que suele definirse como el límite de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n$ tiende a infinito. El número $e$, al igual que $\pi$, es un número trascendente, esto es, aquellos números que no pueden ser obtenidos como solución de una ecuación algebraica. Las pruebas de la trascendencia de estos números son difíciles en general; la trascendencia de $e$ fue demostada por Charles Hermite en 1873. Su demostración fue simplificada por David Hilbert y mejorada por Hurwitz; Ferdinand Lindeman en 1882, presentó un teorema que demuestra la trascendencia de $e$, $\pi$ y $e^\alpha$. Euler calculó 23 cifras decimales exactas de $e$ y en 1739 demostró que $e^2$ también es irracional. En el estudio de los números imaginarios, el número $e$ aparece en la extraordinaria ecuación $e^{i\pi} = -1$, considerada como una de las más hermosas de las matemáticas.

[4] El papiro del Rhind(1700 a.C.) es un rollo de matemáticas egipcias, que contiene 87 problemas con sus respectivas soluciones, en los cuales se muestra la resolución de ecuaciones simples, progresiones y la medición de áreas y volúmenes.

[5] (Ibíd. p.54)

[6] (Ibíd. pág.54)

## El número pi en la geometría griega

Los matemáticos griegos fueron los primeros en realizar estudios alrededor de esta constante, en busca de una solución para el problema de la *cuadratura* del círculo. Tal problema, consiste en construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, empleando únicamente una regla sin marca y un compás. El primer tratamiento geométrico de la cuadratura del círculo se debe a Antifon de Atenas y Bryson de Heraclea, quienes, de manera independiente (siglo V a.C.), obtuvieron aproximaciones a la cuadratura del círculo, con procedimientos relativamente similares. El método de Antifon, para obtener la cuadratura, se basó en inscribir polígonos en un círculo, cada vez con mayor cantidad de lados (Figura 1), de tal forma que se obtuviera un polígono, de tal número de lados y con una longitud tan pequeña de éstos, que coincidiera con el círculo; para ello, inició inscribiendo un cuadrado y siguió inscribiendo polígonos regulares sucesivamente ya que, según Antifon, un cuadrado podía hacerse igual en área a un polígono regular y un círculo podía ser reemplazado por un polígono con la misma área.

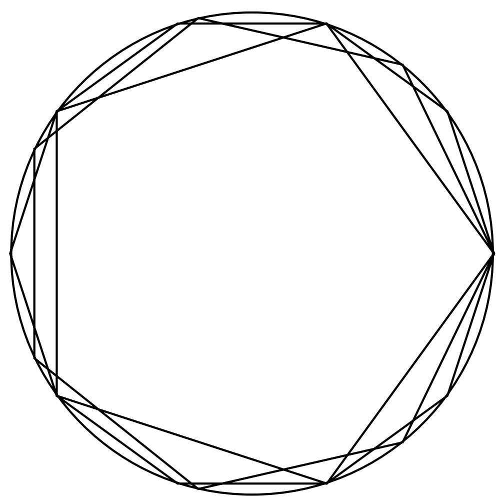

*Figura 1.* El método de Antifón

Bryson mejoró el método de Antifon, considerando polígonos inscritos y los polígonos circunscritos (Figura 2), asumiendo que el área del círculo podía hallarse al promediar el área de estos polígonos.

Posteriormente Arquímedes (siglo III a.C.), en su trabajo "*sobre la medición del círculo*", retomó el método de Bryson modificando un elemento: consideró el perímetro de los polígonos y el radio del círculo, en lugar del área; pero, al tratar de hallar solución a la cuadratura, descubrió que existe una constante relacionada con un triángulo rectángulo, de manera que uno de sus catetos debería tener igual media que el radio y el otro igual medida que el perímetro de la circunferencia para que el triángulo igualara en área a la circunferencia; esto le significó construir dicha constante y cambiar su objeto de trabajo,

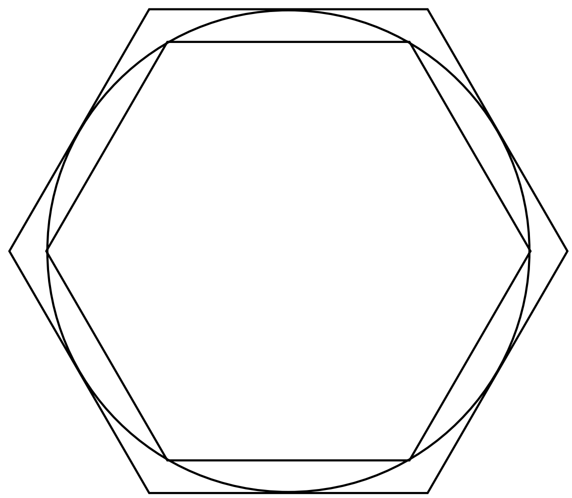

*Figura 2.* El método de Bryson

del problema inicial al estudio de la constante. Él inscribió polígonos en una circunferencia, cada vez con mayor número de lados consiguiendo que el espacio que queda entre el polígono y la circunferencia se hiciera cada vez menor. Realizó el proceso hasta un polígono de 96 lados, obteniendo la desigualdad:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

"*en esencia, lo que Arquímedes hizo fue atrapar la medida de la circunferencia entre una sucesión de números que se le acercaban desde abajo y otra de números que se le acercaban desde arriba*"(Isaac Asimov, 2001, p.90)

Por su parte, Euclides en los Elementos (siglo III a.C) hace mención explícitamente de la existencia de una constante que relaciona el diámetro y el área de un círculo. La Proposición 2, del libro XII establece que "*Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*"(Francisco Vera, 1970, p. 943), esto es, que para dos círculos de áreas $C_1$ y $C_2$ y con diámetros $d_1$ y $d_2$, respectivamente, se tiene la expresión:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2}$$

de lo cual se deduce que:

$$\frac{C_1}{(d_1)^2} = \frac{C_2}{(d_2)^2}$$

es decir, que la razón entre el área de un círculo y el cuadrado de su respectivo diámetro es constante, y dicha constante es $\frac{\pi}{4}$, lo que se deduce empleando la notación moderna:

$$\frac{A}{d^2} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$$

De manera análoga, la Proposición 18, del libro XII enuncia[7] que "*Las esferas son entre si como las razones triplicados de sus diámetros*", esto es, que para dos esferas de volúmenes $E_1$ y $E_2$ y con diámetros $d_1$ y $d_2$, respectivamente, se tiene la expresión:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2}$$

de lo cual se deduce que:

$$\frac{E_1}{(d_1)^3} = \frac{E_2}{(d_2)^3}$$

de donde, como en el desarrollo de la proposición anterior, la razón entre el volumen de una esfera a el cubo de su respectivo diámetro es constante, y dicha constante es $\frac{\pi}{4}$, en notación moderna se tiene:

$$\frac{E_1}{(d_1)^3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3}{(2r)^3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3}{8 \cdot r^3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{16 \cdot r^3} = \frac{\pi}{4}$$

Ptolomeo (siglo II), hizo uso de una *tabla de cuerdas* para determinar el valor de pi, expresado en fracciones. Esta tabla fue usada principalmente en la astronomía, es una tabla circular en la cual una cuerda, es medio seno de la mitad de un ángulo; Ptolomeo en lugar de usar una unidad radial para el círculo, eligió un radio de 1438. El valor dado por Ptolomeo para el número pi es:

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$$

## El número pi en las matemáticas orientales

Con la decadencia de la cultura griega, fueron los hindúes, los chinos y los árabes, en la edad media, quienes desarrollaron trabajos que relacionan esta constante. Entre los matemáticos hindúes se encuentra Aryabhatta (siglo V), quien estableció en sus "*Lecciones de cálculo*", unas reglas para estimar áreas y volúmenes, entre las cuales, se encuentran (op cit., 1990, p.58):

**Regla 7:** La mitad de la circunferencia, multiplicada por la mitad del diámetro es el área de un círculo. Esta área multiplicada por su propia raíz es el volumen exacto de la esfera.

[7](Ibíd p. 958)

**Regla 10:** Agrega 4 a 100; multiplique por 8 y agregue 62.000. El resultado es aproximadamente la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 20.000.

La aplicación de la primera parte de la regla 7, coincide con la tradicional fórmula

$$A = \pi \cdot r^2$$

y si se compara la segunda parte de la regla con la formula ya conocida

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

se obtendrá un valor de

$$\pi = \frac{16}{9} \;\; 0 \;\; 1.\hat{7}$$

mientras que haciendo uso de la regla 10, se obtiene un valor para pi de 3,1416.

Algunos matemáticos chinos también mostraron interés en el estudio de esta constante como Zhang Heng y Liu Hui.

Zhang Heng (siglo II) estableció que el cuadrado del perímetro de un círculo es la cuadrado del perímetro del cuadrado circunscrito a dicho círculo como cinco es a ocho, de donde obtiene que $\pi = \sqrt{10}$, es decir, aproximadamente 3.1633, como se observa a continuación, en términos modernos

$$\begin{aligned}
\frac{(2\pi R)^2}{(8R)^2} &= \frac{5}{8} \\
\frac{4\pi^2 R^2}{64R^2} &= \frac{5}{8} \\
\pi^2 &= \frac{5 \times 64}{8 \times 4} \\
\pi &= \sqrt{\frac{320}{32}} \\
\pi &= \sqrt{10} \\
\pi &= 3{,}1622
\end{aligned}$$

Liu Hui (siglo II), en sus trabajos plantea que el círculo es mayor en área que el polígono inscrito, pero menor que el mismo polígono aumentado con todos los rectángulos circunscritos construidos sobre cada uno de sus lados. Él encontró, con un polígono regular de 192 lados, una aproximación de pi con límites de:

$$3{,}141024 < \pi < 3{,}142704$$

Otro matemático importante que trabajó sobre la constante, fue el árabe Al-Kashi (1380-1429), quien en 1424 halló un valor para pi correcto en 16 cifras decimales, siguiendo el método de Arquímedes con polígonos de 805.306.368 lados.

## Aplicantes del método de exhaución

A finales de la edad media, el conocimiento de los matemáticos griegos de la antigüedad y orientales se introdujo a Europa a través de las traducciones hechas por los árabes de los trabajos de Ptolomeo, Euclides y Arquímedes. Entre los trabajos de Arquímedes sobre la cuadratura del círculo, se encuentra lo que es llamado hoy *el método de exhaución*[8], que muchos aseguran deberse a este matemático, pero que se atribuye a Eudoxo de Cnido.

En los elementos de Euclides, el método de exhaución aparece en la proposición 1 del libro X, "*Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano*"(op cit., 1987, p. 129), el método es el equivalente griego al cálculo integral[9] descubierto por Newton dos mil años después; el método también fue usado por Arquímedes para aproximarse a la medida del perímetro de la circunferencia, inscribiendo y circunscribiendo polígonos, duplicando el número de lados; y también esta proposición se utiliza por primera vez en la demostración de la proposición 2 del libro XII, la cual se mencionó anteriormente[10].

Así, la historia del número pi continua en el Renacimiento europeo, haciendo uso del método de exhaución de Arquímedes para la determinación del valor de pi entre los pocos a destacar, está el de Leonardo de Pisa (siglos XII y XIII), más conocido como Fibonacci, obtuvo un valor para pi de 3,1418 con la gran ventaja sobre Arquímedes de poder usar la numeración decimal.

En este periodo de la historia de pi, comienza "la carrera por los decimales", término acuñado para explicar el trabajo de muchos personajes, envueltos en la tarea de determinar las cifras decimales para pi, dada a la aparición de las fracciones decimales y la atracción hacia nuevos usos para éstas. Entre tales personajes, está por ejemplo, el astrónomo Abraham Sharp en 1699, quien calculó 72 cifras correctas trabajando con series, el matemático Fuat de Lagny en 1717, quien calculó 127, entre otros, siendo más notables los trabajos para dicha tarea. Por la misma vía se reconoce también el trabajo del matemático francés François Vietê (1540-1603), quien en 1579, trabajó con un polígono de $6 \times 2^{16}$ lados (393216) y obtuvo un valor para $\pi$ con 9 decimales correctos.

Vietê es la figura central y la más brillante en la Europa Occidental en el periodo del Renacimiento al mundo moderno. A pesar de que no fue un matemático consagrado porque sólo se dedicaba a las matemáticas en sus ratos de ocio, hizo grandes contribuciones a la aritmética, el álgebra, la trigonometría y la geometría. En aritmética se destaca su trabajo sobre el uso de fracciones decimales en vez de las sexagesimales. Pero el principal aporte que hizo Vietê acerca del número pi, dando inicio a un tratamiento más analítico de

[8] Nombre dado por Gregory de St. Vincent(1584 - 1667) en el siglo XVII, pero en la antiguedad no llevaba ese nombre.

[9] BOYER, C. Historia de las matemáticas. Alianza Editorial.

[10] Una explicación más detallada de esta demostración y de la manera como se usa el método de exhausión está en Luque, C. et. all., Euclides y el círculo. Publicado en: Memorias de XIV Encuentro de geometría y sus Aplicaciones y II Encuentro de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá

éste, fue trece años después de la aproximación decimal de 1579, poniendo en práctica el equivalente algebraico del método geométrico de exhaución, con lo cual obtuvo la primera expresión analítica conocida para determinar el valor de pi:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots$$

Esta expresión de Vietê, "*es un producto infinito de términos que se puede obtener inscribiendo un cuadrado en un círculo dado y aplicando la fórmula trigonométrica* $a_{2n} = a_n \sec\dfrac{\pi}{n}$*, donde* $a_n$ *es el área del polígono regular inscrito de* $n$ *lados, y haciendo finalmente crecer* $n$ *indefinidamente*"(op cit., 1987, p. 407).

Posteriormente, en 1593, el geómetra holandés Adrián Romanus, un contemporáneo de Vietê, obtuvo para pi 15 decimales correctos con un polígono de $15 \times 2^{24}$ lados (más de 251 millones). Casi en el mismo periodo, aparece el nombre del que como se conoce en la historia, sería el más celebre entre los que se dedicaron al cálculo de las cifras decimales de pi, el alemán Ludolph Van Ceulen (1540-1610), quien dedicó casi toda su vida a ésta tarea, como se evidencia en los resultados de sus trabajos con polígonos, en 1596 con 20 cifras decimales correctas y en 1609 con 35 cifras decimales correctas, calculados a partir de los perímetros de polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia de $60 \times 2^{33}$ lados (algo más de 515 mil millones) y $2^{62}$ lados (más de 4 trillones de lados) respectivamente; ésta última aproximación, fue considerada como gran proeza en la vida de Ceulen y fue grabada en su tumba. Los impresionantes e increíbles trabajos de Ludolph Van Ceulen, le permitieron perpetrar en los registros de la historia, siendo actualmente conocido el número $\pi$ en algunos lugares de Alemania, como "el número Ludophiano"(op cit, 1990, p. 62).

## Expresiones analíticas para pi

El establecimiento de los fundamentos del cálculo diferencial e integral, independiente, pero simultáneamente, por Newton y Leibniz durante la segunda mitad del siglo XVII[11], marcó el comienzo de un periodo en el que se emplean métodos distintos para la estimación de pi haciendo uso de series de infinitos términos; con las cuales, los métodos geométricos o numéricos de polígonos se volvieron obsoletos. Esta técnica había sido desarrollada por matemáticos hindúes varios siglos atrás, pero sus trabajos no tuvieron la divulgación necesaria para ser conocidos. El primer trabajo que se conoce de éste tipo en este periodo, es del Ingles John Wallis a finales de siglo, quien, en busca de un método para determinar el

[11]Los fundamentos del cálculo fueron establecios por Newton y Leibniz, en el desarrollo de series infinitas hecho por ambos, pero Newton lo hizo a partir del teorema binomial para potencias enteras y fraccionarias, mientras que Leibniz lo hizo con el problema de clacular la suma de los inversos de los números triangulares y luego con el triángulo armónico que tiene semejanza con el triángulo de Pascal.

área de una semicircunferencia $y = \sqrt{x - x^2}$, obtuvo una expresión de productos infinitos[12] que se aproxima al valor correcto de pi en la medida que la cantidad factores aumente tanto en el numerador como en el denominador:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}$$

Lord Brouncker, un contemporáneo de Wallis, hizo un desarrollo en fracciones continuas, así:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

usando el método para obtener expresiones de fracciones continuas y ciertas manipulaciones a la fórmula de Wallis.

El matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), descubrió de manera simultánea, pero independiente, con James Gregory, en 1674, un grupo de expresiones para encontrar a pi como el límite de series infinitas; un caso es:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

que se obtiene utilizando el desarrollo en series de la función $arctan\ x$ para $x = 1$.

En ésta época, se pretende encontrar una expresión, con fracciones más simples y de mayor regularidad; matemáticos como Euler y Machina de Lagny buscaron series para $\pi$ cuya convergencia fuera cada vez más rápida y mayor que las anteriores. Aquí son bastantes expresiones analíticas debidas a Euler, una de ellas es $e^{i\pi} = -1$, que se puede obtener a partir de los polinomios de Taylor, para aproximar las funciones: exponencial, seno y coseno.

[12]Esta fórmula se obtiene, en términos modernos, del teorema

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n+1} x dx}$$

y de las fórmulas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

para $m$ impar y

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

para $m$ par, donde el símbolo $m!!$ representa el producto $m(m-2)(m-4)\dots$ que termina en 1 ó 2, según $m$ sea impar o par respectivamente. (op. cit. 1987, p. 62)

Para la función exponencial $f(x) = e^x$, derivando $k$ veces se obtiene que $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo valor de $k$, por lo que se obtiene el polinomio de grado $n$ en 0

$$T_n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Para la función seno $f(x) = \operatorname{sen} x$, derivando $n$ veces se obtiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

de modo que en 0, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ y $f^{(2n)}(0) = 0$ para todo valor de $n$, por lo que se obtiene el polinomio en 0

$$T_{2n+1}(\operatorname{sen}(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para la función coseno $f(x) = \cos x$, derivando $n$ veces se obtiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

de modo que en 0, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ y $f^{(2n)}(0) = 1$ para todo valor de $n$, por lo que se obtiene el polinomio en 0

$$T_{2n}(\cos(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Acudiendo a los números complejos, sabemos que las primeras cinco potencias de la unidad imaginaria son: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$. Ahora, en $T_n(e^x)$ haciendo $x = i\theta$ se obtiene

$$\begin{aligned} T_n(e^x) =& 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots + \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ =& 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ =& \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right] + i\left[\frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right] \end{aligned}$$

De modo que el primer sumando es el polinomio $T_{2n}(\cos x)$ y el segundo es el polinomio $T_{2n+1}(\operatorname{sen} x)$, evaluados en $x = \theta$. Por lo cual se puede sustituir para obtener

$$T_n(e^{i\theta}) = T_{2n}(\cos\theta) + iT_{2n+1}(\operatorname{sen}\theta)$$

Ahora sea $\theta = \pi$, y se obtiene

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi$$

La famosa expresión

$$e^{i\pi} = -1$$

o lo que es lo mismo

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

## La notación para el número pi

Por otro lado, no sólo adelantos calculistas y numéricos se encuentran en éste lapso de tiempo, también la notación de pi tiene parte de la historia. Muchas figuras se habían adoptado para representar la constante que relaciona al perímetro de una circunferencia con su diámetro, indistintamente usadas de acuerdo a criterios personales de los autores, que no habían conseguido un consenso en éste sentido. Fue el matemático ingles William Oughtred en 1600, quien utilizó por primera vez el símbolo $\pi$ para tal fin, al discutir sobre el cociente entre el perímetro de un círculo y su diámetro y luego, W. Jones en 1706, lo usó por primera vez en un texto matemático. Parece ser que ésta elección fue motivada porque es la inicial de la palabra en griego que significa *perímetro*, proveniente del griego *perimetron*, que quiere decir la medida alrededor. La adopción definitiva de éste símbolo, se da en 1737, cuando Euler lo usa en sus posteriores trabajos.

## El lugar de $\pi$ entre los números

Después de los arduos trabajos geométricos, numéricos y analíticos para determinar el valor de $\pi$ con mayor cantidad de cifras decimales exactas, un nuevo interrogante aparece en escena ¿Cuál es el lugar de $\pi$ entre los números? El primer aporte en esta dirección corresponde al matemático alemán J.H. Lambert, quien en 1776 presenta su prueba de que $\pi$ y también $e$ son irracionales; lo que empezó a cerrar la posibilidad de dar solución al problema de la cuadratura del círculo. En 1840, Liouville cierra completamente cualquier posibilidad de que $\pi$ fuera solución de una ecuación de segundo grado, cuando demuestra la existencia de los números trascendentes, y algo mejor, cuando demuestra que $\pi$ es trascendente en 1882; con lo que queda completamente claro que "la cuadratura del círculo"es imposible ya que $\pi$ no es un número algebraico, es decir, no es solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales.

## ¿La barrera de los decimales de $\pi$?

Parecería que este hecho importante termina la historia del número $\pi$. Sin embargo, la aparición de grandes y potentes computadores lleva de nuevo al interés por determinar las cifras decimales de $\pi$. Ya se conoce los extraordinarios trabajos de calculistas, que aplicaron el método de exhaución de Arquímedes, y con laboriosos trabajos geométricos y tediosos cálculos manuales, alcanzaron a obtener hasta 35 cifras decimales correctas de $\pi$. No obstante, los resultados analíticos para $\pi$, sirvieron de base para trabajos con computadores como el de George W.Reitwiesner y sus colaboradores, quienes usaron el primer computador digital (1942 y 1945) con el que evaluaron 2037 cifras decimales de $\pi$ en un trabajo que tomó alrededor de 70 horas, en Septiembre de1949. Este extraordinario trabajo, se constituye en el primero de muchos con mejores resultados, cada uno con respecto al anterior. Todos estos trabajos, se apoyan en los adelantos que se dieron en los computadores, gracias al desafío en el que se convirtió ésta tarea. Los excelentes resultados de los últimos trabajos, superaron la barrera del millón de cifras, en 1973 gracias a dos matemáticos franceses, y luego la barrera de los dos millones de cifras, gracias a dos japoneses en 1981. Surge aquí una pregunta importante debido al exhausto trabajo del cálculo de cifras de $\pi$ y es ¿para qué tantos decimales?, y son dos respuestas las que se encuentran: la primera es que el cálculo de las cifras se convirtió en un parámetro para determinar la confianza y rapidez de los nuevos equipos de cómputo, y la segunda es que hay esperanza de encontrar solución a los misterios que encierra éste número, por ejemplo, si a partir de la cifra en la posición $n$ decimal, se encuentra algún tipo de regularidad en la secuencia de sus cifras.

## Algunas curiosidades

Además de los cálculos y aproximaciones, podemos encontrar otros datos curiosos acerca de $\pi$. En EE.UU. en el estado de Indiana, en 1897, Edwin J Goodwin, en el proyecto titulado "*un proyecto que introduce una nueva verdad matemática*", aseguró haber logrado la cuadratura del círculo, y al proponer legislar para $\pi$ un valor igual a 3, ofrecía su contribución como un obsequio gratuito para uso solamente del estado de Indiana.

Otra de estas curiosidades, se presenta en la construcción de la pirámide de Kheops; sus dimensiones originales son 232.805 metros de base y 148.208 metros de altura. Si se divide el doble de la primera de éstas cifras por la segunda, se obtiene un valor de $\pi$ con cinco decimales exactos, y un error inferior a seis millonésimas. Sin embargo este hecho ha sido considerado simplemente una coincidencia... asombrosa coincidencia.

Así como $\pi$ jugó un papel importante en las ramas de las matemáticas como la geometría, el cálculo y el álgebra, $\pi$ también está en la teoría de probabilidades, en la que el naturalista francés George Louis Leclerc, Conde de Buffón, en 1777, planteó una propuesta completamente diferente; ésta se conoce con el nombre de la agujas de Buffón, es un experimento sencillo que consiste en: "*sobre una hoja amplia de papel se dibuja una serie de líneas rectas paralelas, separadas entre si a una distancia* ***d****. Enseguida, se lanza repetidamente y de manera por supuesto aleatoria una aguja de longitud* $\boldsymbol{h}(h < d)$ *y se cuentan tanto el número total de lanzamientos* $\boldsymbol{N}$ *como el de ocasiones* $\boldsymbol{P}$ *en que la aguja al caer toca alguna de las líneas dibujadas*". Buffón demostró que la probabilidad de que la aguja corte alguna de las paralelas depende de $\pi$, y es $\frac{2h}{d\pi}$. Si el experimento se llevase a cabo un número muy elevado de veces, el cociente de $\frac{2hN}{Pd}$ es una buena aproximación de $\pi$, y es mejor en la medida en que $N$ se incrementa. Un matemático Italiano de apellido Lazzarini, desarrollo el experimento manualmente 3408 lanzamientos, obteniendo para $\pi$ el valor de 3,1415929. (No se conoce la fecha en la que Lazzarini desarrollo éste experimento)

Y por último, sin dejar a un lado que existen otras curiosidades, hemos querido citar las siguientes poesías; la primera de ellas, fue compuesta por el Colombiano Nieto Paris, y permite registrar los primeros 80 decimales de la constante, y la segunda poesía fue compuesta por Wislawa Szymborska (1923- ), escritora y premio Nóbel polaca, que es considerada una de las voces más originales de la poesía contemporánea de su país:

Soy $\pi$: lema y razón ingeniosa
De hombre sabio que, serie preciosa
Valorando, enunció magistral.

Con mi ley singular, bien medido,
El Grande Orbe, por fin reducido
Fue al sistema ordinario real.

Arquímedes en ciencias preciado
Crea $\pi$, monumento afamado,
Y aunque intérmina dio valuación,
Periferia del círculo supo,
Duplicando geométrico grupo
Resolver y apreciarle extensión.

Teorema legó memorable
Como raro favor admirable
De la espléndida ciencia inmortal
Y amplia ley, filosófica fuente
De profunda verdad y ascendente
Magnitud descubrió universal.

Nieto Paris

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510...

El Número Pi

El número Pi es digno de admiración
tres coma uno cuatro uno
todas sus cifras siguientes también son iniciales
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No permite abarcarlo con la mirada seis cinco tres cinco
con un cálculo ocho nueve

con la imaginación siete nueve
o en broma tres dos tres, es decir, por comparación
ocho cuatro seis con cualquier otra cosa
dos seis cuatro tres en el mundo.
La más larga serpiente después de varios metros se interrumpe
Igualmente, aunque un poco más tarde, hacen las serpientes fabulosas
El cortejo de cifras que forman el número Pi
no se detiene en el margen de un folio,
es capaz de prolongarse por la mesa, a través del aire,
a través del muro, de una hoja, del nido de un pájaro,
de las nubes, directamente al cielo
a través de la total hinchazón e inmensidad del cielo.
Oh, que corta es la cola del cometa, como la de un ratón!
Que frágil el rayo de la estrella que se encorva en cualquier espacio!
Pero aquí dos tres quince trescientos noventa
mi número de teléfono la talla de tu camisa
año mil novecientos setenta y tres sexto piso
número de habitantes sesenta y cinco céntimos
la medida de la cadera dos dedos la charada y el código
en el que mi ruiseñor vuela y canta
y pide un comportamiento tranquilo
también transcurren la tierra y el cielo
pero no el numero Pi, este no,
el es todavía un buen cinco
no es un ocho cualquiera
ni el último siete
metiendo prisa, oh, metiendo prisa a la perezosa eternidad
para la permanencia.
...58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679...

Wislawa Szymborska

# Bibliografía


[1] ASIMOV, I., *Momentos Estelares de la Ciencia*. Madrid Alianza.(2001)

[2] BOYER, C., *Historia de la Matemática*. Alianza editorial.(1987)

[3] CASTRO, I., *Leonard Euler*. Colombia. (1988).

[4] CONCHILLO, E. *Algoritmo de pi*. En: http: //webs.adam.es/rllorens/eloi

[5] ESPINOZA, A., *Pi y los números primos*. En: http: //webs.adam.es/rllorens/pi_hist04.htm (2001)

[6] ESPINOZA, A., *Las aventuras de pi*. En: http: //webs.adam.es/rllorens/pi_hist03.htm (2001)

[7] HERRERA, T., *Arquímedes alrededor del círculo*. Editorial Nivela Libros y Ediciones sl. España.(2003)

[8] LLORENS, R., *Historietas de pi*. En: http://webs.adam.es/rllorens/pidoc.htm

[9] MANKIEWICZ, R., *Historia de la Matemática del Cálculo al Caos*. México.

[10] NAVARRO, J., *El pérfido oráculo de delos*. En: Universitas gran Enciclopedia del saber. Editorial Salvat, S.A. Tomo 12 Matemáticas. Barcelona.(1979)

[11] NEWMAN, J., *Sigma el mundo de las matemáticas*. Editorial Grijalbo. Barcelona. Tomo 1.(1997)

[12] PIERA, C., *La Cuadratura del Círculo: Un Problema Insoluble pero Divertido*. En: http: //www.terra.es/personal/jftjft/Arimetica/Numeros/Pi.htm. (2002)

[13] REIF, S., *El número $\pi$ y su historia*. En: revista Universidad del Valle (Cali). Octubre.(1990)

[14] RUIZ, J., *El número pi curiosidades y cálculo*. En: http: //www.sociedadelainformacion.com/fisica/pi/pi.htm

[15] SZYMBORSKA, W., *El número pi*. En: http: //www.josechu.com/poema.pi.htm

[16] VERA, F., *Cientificos Griegos*. Editorial Aguilar. Madrid (España).(1970)

[17] *http: //webs.adam.es/rllorens/pihome.htm*