TEOREMA DE HALL Y SUS EQUIVALENCIAS

Edwin Alfredo Carranza Vargas
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Resumen

En este artículo se muestra un resultado, fruto de una investigación para optar al título de magister. Los resultados o teoremas importantes quedarán evidenciados en el desarrollo del escrito.
El escrito inicia desde definiciones necesarias para una mayor comprensión. Posteriormente se muestran teoremas importante no necesariamente de la misma teoría como por ejemplo la teoría de grafos, conjuntos parcialmente ordenados entre otros. Despúes se muestra las equivalencias de tales teoremas, todos ellos relacionados con el Teorema de Hall.Finalmente se muestra la demostración elaborada por el autor del Teorema de Hall que termina convirtiéndose en un algoritmo que detecta todos los sdr de una determinada familia de conjuntos.

1. Definiciones

Definición 1.1. *Un grafo G consiste de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas, y una asignación de cada arista $e \in E$ y una pareja no ordenada x, y de vertices llamados extremos de e.*

Definición 1.2. *Un digrafo D o grafo dirigido consiste de un conjunto V de vértices, un conjunto A de arcos, y una asignación de cada arco $e \in A$ y una pareja ordenada de V.*

Definición 1.3. *Un grafo $G = (V, A)$ se dice bipartito si existe una partición del conjunto de vértices V en dos conjuntos A y B tal que cada arco tiene un extremo en A y el otro en B. La partición $\{A, B\}$ es llamado una bipartición de G*

Definición 1.4. *En un grafo G, un emparejamiento es un conjunto de arcos disyuntos; y una cobertura es un conjunto C de vértices con la propiedad que cada arco posee un vértice de C.*

Definición 1.5. *Una red es un digrafo con una función entera c, conocida como función de capacidad, definida sobre el conjunto de arcos, además posee un par de vértices llamados fuente s y meta t*

Si $e = (i, j)$ es un arco , el entero no negativo $c(e) = c(i, j)$ es la capacidad del arco.

Definición 1.6. *Un flujo f en una red es una función entera definida sobre el conjunto de arcos, tal que $0 \leq f(e) \leq c(e)$ para cada arco e. El entero $f(e)$ es el flujo a lo largo de e. La suma de los flujos a lo largo de todos los arcos dirigidos al vértice i es el flujo de entrada en i, y la suma de los flujos a lo largo de todos los arcos dirigidos desde el vértice i es el flujo de salida desde i.*

Un flujo se dice factible si se satisface la condición de conservación: El flujo de entrada en cualquier vértice intermedio i debe ser igual al flujo de salida desde i. Si f es un flujo factible en una red G, el valor $f(G)$ es el flujo de salida desde la fuente. Un flujo factible en una red tal que el valor del flujo sea lo mayor posible se llama flujo máximo. Al problema de hallar el mayor flujo posible en una red se le llama problema de máximo flujo.

Consideremos una partición de el conjunto de vértices de una red $G = (V, E)$ en dos conjuntos S y T tal que la fuente esté en S y la meta en T. El conjunto $(S, T) = \{(i, j) : (i, j) \in E, i \in S, j \in T\}$ es llamado un corte. La suma de las capacidades de todos los arcos del corte (S, T) es la capacidad $c(S, T)$ del corte. Un corte es llamada mínimo corte si sus capacidad no excede la capacidad de cualquier otro corte. Si f es un flujo factible en la red, la suma de los flujos a lo largo de todos los arcos en el corte (S, T) es el flujo $f(S, T)$ a lo largo del corte. Obviamente $0 \leq f(S, T) \leq c(S, T)$.

Si f es un flujo factible en una red, el arco (i, j) es $f-$saturado si $f(i, j) = c(i, j)$, es $f-$cero si $f(i, j) = 0$, y es $f-$positivo si $0 < f(i, j) < c(i, j)$

Definición 1.7. *Dos rutas desde s hasta t en una red son llamadas rutas disyuntas desde s a t si ellas no tienen vértices en común aparte de s y t. Cualquier par de rutas son llamadas arco-disyuntas si no exiten arcos en común.*

Definición 1.8. *Un orden parcial sobre un conjunto X es una relación R sobre X que satisface las siguientes propiedades.*

a) Reflexiva: $(x, x) \in R$ *para todo* $x \in X$.

b) Antisimétrica: $(x, y), (y, x) \in R$ *implica que* $x = y$

c) Transitiva: $(x, y), (y, z) \in R$ *implica que* $(x, z) \in R$.

La pareja (X, R) es llamado conjunto parcialmente ordenado. Un conjunto parcialmente ordenado será llamado un Orden.

Definición 1.9. *Una línea en una matriz es una fila o columna. Suponga que P es una propiedad tal que un elemento en A puede no tener. Una colección de elementos en la matriz que satisfagan la propiedad P es $P-$independiente si no hay dos elementos con la propiedad P que estén en la misma línea. El P-rango de A es el conjunto P-independiente de mayor cardinal.*

2. Teorema de Hall

Definición 2.1. *Sea $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. Un sistema de representantes distintos (SDR) para estos conjuntos es una $n-$tupla $(x_1, x_2, ..., x_n$ de elementos con las siguientes propiedades.*

a) $x_i \in A_i$ *para todo i (representante).*

b) $x_i \neq x_j$ *para todo* $i \neq j$ *(distintos)*

Definición 2.2. *Condición de Hall (CH).*

$$|\cup_{j\in J} A_j| \geq |J|$$

donde $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$

Teorema 2.1 (Teorema de Hall). *Dada una familia de subconjuntos de un conjunto determinado. La familia posee un SDR si y solo si satisface la condición de Hall.*

Bosquejo de la demostración. La parte necesaria es obvia, la suficiente se hará por inducción sobre n. Para $n = 1$ obviamente se tiene. Si $|\cup_{j\in J} A_j| = |J|$ diremos que J es crítico, en este caso todo elemento de $\cup_{j\in J} A_j$ debe ser usado como un representante de uno de esos conjuntos. Si J no crítico excepto para $J = \emptyset$ y posiblemente $J = \{1, 2, ..., n\}$. Sea x_n un punto cualquiera de A_n (note que $A_n \neq \emptyset$ por CH) y, para $i = 1, 2, ..., n-1$, se define $A'_j = A_j - \{x_n\}$. Verifiquemos que la familia $(A'_1, ..., A'_{n-1})$ satisface CH. Tomemos $J \subseteq \{1, ..., n-1\}$, y suponga que $J \neq \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} |\cup_{j\in J} A'_j| &\geq |\cup_{j\in J} A_j| - 1 \\ &> |J| - 1 \end{aligned}$$

La primera desigualdad es porque se eliminó un elemento y la segunda es porque J no es crtíico. Así que $|\cup_{j\in J} A'_j| \geq |J|$.
Por inducción, $(A'_1, ..., A'_{n-1})$ tiene un SDR $(x_1, ..., x_{n-1})$. Entonces $(x_1, ..., x_n)$ es un SDR para la familia original ya que claramente $x_n \neq x_j$ para $n \neq j$. □

Mencionaremos otros teoremas importantes, éstos no descansan bajo la misma teoría, sin embargo son equivalentes con el teorema de Hall y entre ellos.

Teorema 2.2 (Teorema de könig). *El máximo tamaño de un emparejamiento en un grafo bipartito G es igual al mínimo tamaño de una cobertura en G.*

Ejemplo 2.1. *Consideremos el grafo bipartito (figura 1.5) donde el conjunto* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y* $Y = \{6, 7, 8, 9\}$. *Un emparejamiento podría ser* $\{1, 6\}, \{2, 8\}, \{5, 9\}$ *que esta cubierto por* $\{1\}, \{8\}, \{9\}$.

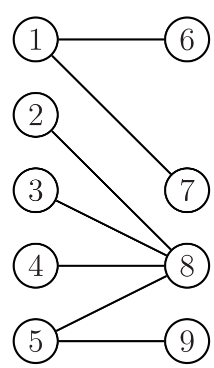


Figura 1.

Teorema 2.3 (Teorema de König-Egervary). *El $P-$rango de una matriz es igual al mínimo número de líneas que contienen todos lo elementos de la matriz con la propiedad P.*

Teorema 2.4 (Teorema de König-Egervary). *El número de líneas de una matriz A de ceros y unos, que contiene a todos los 1's es igual al máximo número de 1's no dos en línea.*

Ejemplo 2.2. *Dada la siguiente matriz de 0 y 1.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuatro lineas continen a todos los 1's, son cuatro 1's no dos en linea.

Teorema 2.5 (Teorema de Menger (1)). *. El máximo número de rutas disyuntas entre cualquier par de vértices no adyacentes es igual al mínimo número de vértices que pueden ser borrados para que no existan rutas entre ese par de vértices.*

Teorema 2.6 (Teorema de Menger (2)). *El máximo número de rutas arco-disyuntas desde s a t en un grafo es igual al mínimo número de arcos que pueden ser borrados para que no hayan tales rutas.*

Ejemplo 2.3. *Dado el digrafo de él podemos detectar un par de rutas disjuntas, como son $\{1,2,5,7\}$ y $\{1,4,6,7\}$ o $\{1,3,5,7\}$ y $\{1,4,6,7\}$ en los dos pares de rutas se pueden borrar los vértices 4 y 5.*

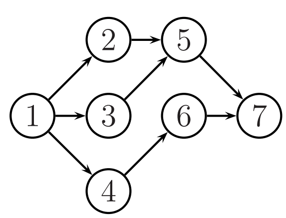


Figura 2.

Teorema 2.7 (Teorema de Ford-Fulkerson). *En una red, el valor del máximo flujo es igual a la capacidad del mínimo corte. Este Teorema también es conocido como Teorema de máximo flujo y mínimo corte.*

Ejemplo 2.4. *En la siguiente red, el primer digito representa la cantidad de flujo y segundo digito la capacidad de cada arco.*

Consideremos los subconjuntos $S = \{1,4,5\}$ y $T = \{2,3,6\}$ de alli tenemos que $c(S,T) = 8+9+4+5 = 26$ y además
$f(G) = f(S,T) - f(T,S) = 5+6+1-4 = 8.$

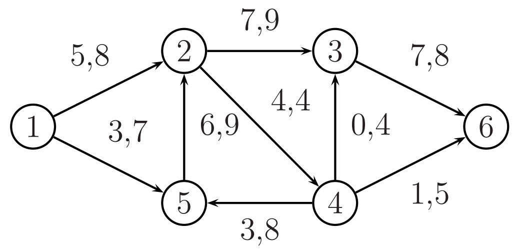


Figura 3. Red 1

Aumentamos una unidad de cantidad de flujo en la ruta $\{1,2,3,6\}$ *y tres unidades en la ruta* $\{1,5,4,6\}$ *y consideremos a* $S = \{1,2,3,5\}$ *ya que los arcos del corte son* $f-$*saturados o* $f-$*ceros.* $c(S,T) = 8+4 = 12$, $f(G) = f(S,T) - f(T,S) = 8+4-0 = 12$. *Lo cual*

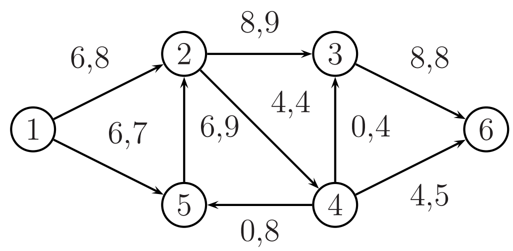
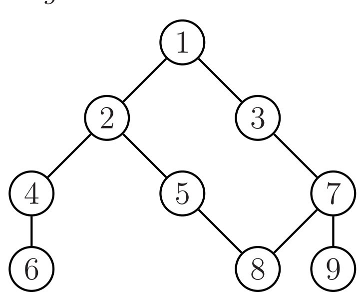


Figura 4. Red 2

verifica el teorema 2.7.

Teorema 2.8 (Teorema de Dilwoth). *En un Orden finito, el máximo tamaño de una anticadena es igual al mínimo número de cadenas que pueden particionar completamente al Orden.*

Ejemplo 2.5. *Consideremos el siguiente orden Las anticadenas maximales son*



$$\{4,5,7\}, \{4,5,9\}, \{6,8,9\}$$

La descomposición en cadenas es

$$\{1,2,4,6\}, \{1,2,5,8\}, \{1,3,7,9\}$$

El siguiente gráfico muestra la relación de implicaciones entre los teoremas citados anteriormente.

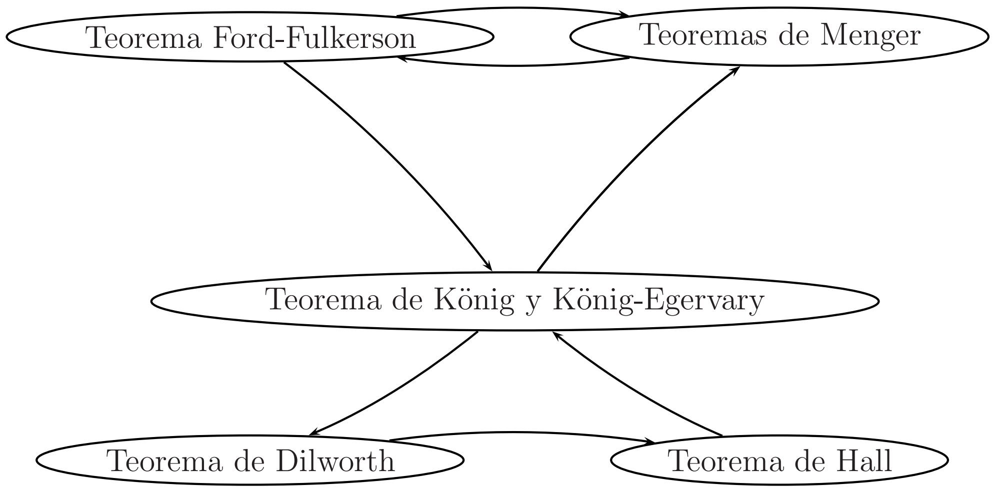


Figura 5.

3. Una nueva prueba del Teorema de Hall, algoritmo para detectar SDR's

Teorema 3.1. *De una familia de subconjuntos de un conjunto que satisface la condición de Hall. Si se elimina un elemento de uno de los subconjuntos entonces la familia restante también cumple la condición de Hall.*

Demostración. Sea $F = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ la familia de subconjuntos de un conjunto X, tal familia satisface Hall. Supongamos que S_1 contiene elementos x, y, y el remover uno de ellos invalida la condición de Hall. Entonces existen sunconjuntos A, B de $\{2, 3, ..., m\}$ con la propiedad que $|P| < |A|$ y $|Q| < |B|$, donde

$$P = \bigcup_{j\in A} S_j \cup (S_1 - \{x\})$$
$$Q = \bigcup_{j\in B} S_j \cup (S_1 - \{y\})$$

Entonces

$$|P \cup Q| = |\bigcup_{j\in A\cup B} S_j \cup S_1|$$
$$|P \cap Q| \geq |\bigcup_{j\in A\cap B} S_j|$$

Por tanto se tiene

$$\begin{aligned}
|A|+|B| &\geq |P|+|Q| \\
&= |P\cup Q|+|P\cap Q| \\
&\geq |\bigcup_{j\in A\cup B} S_j \cup S_1| + |\bigcup_{j\in A\cap B} S_j| \\
&\geq (|A\cup B|+1)+|A\cap B| \\
&= |A|+|B|+1.
\end{aligned}$$

De esta manera llegamos a una contradicción. □

Corolario 3.1. *De una familia de subconjuntos de un conjunto que satisface la condición de Hall. Si se elimina un elemento de mas de un subconjunto que lo contenga entonces la familia restante también cumple la condición de Hall.*

Demostración. La prueba de este corolario se basa en el teorema anterior.

Sea $F=\{S_1,S_2,...,S_m\}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X que satisface Hall. Si seleccionamos un elemento x y supongamos que éste pertenece a más de un subconjunto, lo eliminamos de uno de ellos, la familia de subconjuntos restantes sigue cumpliendo Hall por el teorema, si eliminamos x de otro subconjuntos la familia restante sigue cumpliendo Hall por el teorema y asi sucesivamente. □

Teorema 3.2 (Teorema de Hall). *Dada una familia de subconjuntos de un conjunto determinado. La familia posee un SDR si y solo si satisface la condición de Hall.*

Nueva Demostración. Dada una familia de m conjuntos no vacios $A_i's$ cuyos elementos pertenecen a un conjunto X de n elementos $m\leq n$. Tal familia de conjuntos cumple la condición de Hall. Usando una forma matricial para representar los conjuntos, utilizamos las filas como los conjuntos y las columnas como los elementos, es decir $a_{ij}=1$ si y solo si $x_j\in A_i$ y es cero en caso contrario, como la familia cumple Hall, debe existir un sdr del conjunto X. Una forma de determinar tal sdr es usar el siguiente algoritmo.

Cada conjunto posee su cardinal y a cada elemento se le asocia su multiplicidad que es el número de conjuntos a los cuales él pertenece. Escogemos el conjunto con menor cardinal y de este escogemos el elemento con menor multiplicidad, tal elemento representará al conjunto, después el elemento será quitado de los conjuntos a los cuales pertenece y se quitará el conjunto representado o fila; como se escogió el conjunto de menor cardinal y elemento de menor multiplicidad, se garantiza que los conjuntos restantes sean no vacios. Veamos que los nuevos conjuntos satisfacen Hall.

Sin perdida de generalidad supongamos que $|A_1|\leq|A_2|\leq...\leq|A_m|$ y además que $x_1\in A_1$ y $m(x_1)\leq m(x_{i_1})\leq...\leq m(x_{i_{|A_1|-1}})$, por tal motivo x_1 representaría a A_1. Ahora al eliminar x_1 de los $m(x_1)-1$ conjuntos a los cuales pertenece y eliminar a A_1, genera unos nuevos conjuntos llamémoslos $A_i'=A_i-\{x_1\}$ para todo $i=2...m$, por la elección de x_1 y A_1 $A_i'\neq\phi$ para todo $i=2...m$. Por el corolario anterior los nuevos conjuntos satisfacen Hall.

Ahora bien, al quitar un elemento y un conjunto, se sigue preservando Hall, lo cual indica que por cada paso del algoritmo se encuentra un elemento representante y por ende un sdr de la familia de subconjuntos. □

Veamos si el algoritmo genera todos los sdrś posibles de una familia de conjuntos que satisfagan Hall. Supongamos que no es asi que existe un sdr que no es generado por el algoritmo, lo cual indica que existe un elemento que no es descartado por algoritmo en todos los pasos, si el elemento nunca es elegido es porque su multiplicidad en cada paso es la mayor, lo cual indica que deberia tener la máxima multiplicidad que es m, ahora en el último paso todos los elementos incluyendo a éste, tienen multiplicidad 1. Por lo tanto será en algún momento escogido. Ahora en caso que no sea elegido por otra razón, por ejemplo, pertenece a un conjunto cuyo cardinal en cada paso es mayor que los demás y no pertenece a ningún otro conjunto, entonces cuando se llegue al último paso tendrá que ser escogido. Por tal razón el algoritmo detecta todos los sdrś.

Ejemplo 3.1. *Para el empleo del algoritmo, Sea*

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

y

$$F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$$

Donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a, b, c\} \\ A_2 &= \{a, c\} \\ A_3 &= \{a, d\} \\ A_4 &= \{b, c\} \\ A_5 &= \{e\} \\ A_6 &= \{e, f, g\} \\ A_7 &= \{d, g\} \end{aligned}$$

Escogemos el conjunto de menor cardinal, en este caso es A_5 y de él escogemos el elemento con menor multiplicidad, es decir el único elemento que tiene que es e, entonces e representa a A_5, y e es eliminado de A_6.

Ahora existen 5 conjuntos con cardinal 2, escogemos al azar y supongamos que elegimos a A_6, de él tomamos a f por ser de menor multiplicidad. Asi que f representa a A_6 y eliminamos a f de los conjuntos que lo tienen. Posteriormente escogemos a A_4 y de este conjunto elegimos a b para que lo represente. Luego sigue A_1 y de él escogemos a a. Posteriormente se elige a A_3 y como su representante a d. Los dos últimos pasos se escoge a A_2 de éste a c para finalizar con A_7 cuyo representante es g.

El sdr queda (a, c, d, b, e, f, g). Los sdr's de la familia F son (c, a, d, b, e, f, g), (a, c, d, b, e, f, g) y (b, a, d, c, e, f, g). Todos detectados por el algoritmo. Esto se logra cuando el algoritmo debe escoger que conjunto y que elemento en caso que los conjuntos tengan igual cardinal y los elementos igual multiplicidad.

Interpretando los teoremas de König, König-Egervary, Dilworth en términos de este algoritmo

Para König-Egervary la familia de los conjuntos son las líneas que contienen todos los unos, Por ello el algoritmo detecta un SDR que se interpretaria como los 1's no dos en línea.

Para König, la familia de conjuntos sera las aristas incidentes en un cubrimiento, de lo cual ela lgoritmo detectará las parejas que forman el máximo emparejamiento.

Para Dilworth, el orden tendrá que ser representado matricialmente y la familia de conjuntos serán las cadenas que descomponen el poset, y el SDR será una anticadena.

Bibliografía

[1] CAMERON,P., *Combinatorics: Topics, Techniques, Algoritms.* Cambridge University.