El grupo spin de SO(n)[1]

Alexander Caviedes Castro
Miembro del grupo de Teoría de Representaciones
de la Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
alexcaviedes@hotmail.com

Stella Huérfano
Profesora
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
s_huerfano@yahoo.com

Resumen

Se introducen las nociones elementales de Cuaterniones, algebra de Clifford y grupos spin. Se construye además empleando el concepto de álgebra de Clifford el doble cubrimiento de $SO(n)$, $Spin(n)$

1. Introducción

Para $n > 2$ el grupo ortogonal $SO(n)$ tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y de aquí tiene un cubrimiento universal llamado $Spin(n)$. En este capítulo se introducirán formalmente los conceptos de álgebras de Clifford, cuyo objetivo primordial es dar una construcción algebraica del correspondiente grupo $Spin(n)$ para $SO(n)$, dichas construcciones aunque geométricas guardan un profundo significado geométrico. Primero se presentará dicha construcción en el caso $n = 3$, presentando a $Spin(3) = SU(2)$ como un subgrupo multiplicativo del álgebra de los Cuaterniones, que es de hecho un álgebra de Clifford, luego se generalizan las ideas de esta construcción en dimensiones superiores. En adición, aprovechando las herramientas construidas, se construyen representaciones del álgebra de Clifford y se presenta la *representación spin compleja*, que serán de utilidad en el tratamiento posterior sobre variedades spin. El capítulo finaliza, con un tratamiento detallado de las construcciones realizadas en el caso $n = 4$.

2. Cuaterniones

Consideremos el conjunto de matrices complejas de tamaño 2×2:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Este conjunto es un espacio vectorial real ó complejo, cuya suma de espacio vectorial es la suma usual de matrices; además es cerrado bajo la multiplicación de matrices.
Sí $\alpha = x_0 + ix_1$ y $\beta = y_0 + iy_1$, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

[1]Este escrito hace parte del proyecto:1101-05-11-445 de Colciencias

luego las matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

forman una base para $\mathbb{H}$. Luego $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial real de dimensión 4 y todo elemento de $\mathbb{H}$ es de la forma $x_0 + x_1\mathbf{i} + y_o\mathbf{j} + y_1\mathbf{k}$, donde $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ ó de la forma $\alpha + \beta\mathbf{j} = x_0 + x_1\mathbf{i} + (y_0 + y_1\mathbf{i})\mathbf{j}$.
Bajo multiplicación de matrices

$$\mathbf{i^2} = \mathbf{j^2} = \mathbf{k^2} = -\mathbf{I},$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Definición 1. *El conjunto $\mathbb{H}$ con la suma y la multiplicación usual de matrices es una álgebra (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) llamada el álgebra de los* ***Cuaterniones*** *.*

Sea

$$\mathbb{H}_1 = \{A \in \mathbb{H} : \det(A) = 1\}$$

este conjunto es homeomorfo a la esfera

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$$

y en adición le proporciona una estructura algebra a S^3.

Proposición 1. *El conjunto de matrices especiales unitarias, $SU(2)$, es igual a $\mathbb{H}_1$.*

Demostración: Por definición $SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^*A = I, \det(A) = 1\}$. Sí $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2)$, luego de la definición de $SU(2)$ se tiene:

$$\begin{cases} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1, & (1) \\ \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0, & (2) \\ \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} = 1, & (3) \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1, & (4). \end{cases}$$

Para ver que $A \in \mathbb{H}_1$ tenemos que probar que $\gamma = -\bar{\beta}$ y $\delta = \bar{\alpha}$.
Por (2) $\alpha\bar{\gamma} = -\beta\bar{\delta}$, luego, $\alpha(\bar{\gamma}\gamma) = (-\beta\gamma)\bar{\delta}$, por las ecuaciones (3) y (4) se obtiene $\alpha(1 - \delta\bar{\delta}) = (1 - \alpha\delta)\bar{\delta}$, por ende, $\alpha - \alpha\delta\bar{\delta} = \bar{\delta} - \alpha\delta\bar{\delta}$, de lo cual, $\alpha = \bar{\delta}$. De la anterior igualdad y de (2) se tiene que $\gamma = -\bar{\beta}$; por lo tanto $A \in \mathbb{H}_1$.
Recíprocamente sí $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_1$, entonces se verifica fácilmente que $A^*A = I$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & 0 \\ 0 & \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, $A \in SU(2)$. $\square$

Corolario 1. *El grupo matricial $SU(2)$ es homeomorfo a S^3.*

Para $x = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} \in \mathbb{H}$, definimos $Re(x) = x_1$, $Im(x) = x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}$ y la conjugación como $\bar{x} = x_1 - x_2\mathbf{i} - x_3\mathbf{j} - x_4\mathbf{k}$; esta conjugación es tal que $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, para $x, y \in \mathbb{H}$.

Proposición 2. *El espacio vectorial*

$$\mathbb{H}_0 = Im(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} : Re(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{H} : \bar{x} = -x\}$$

es invariante con respecto a transformaciones de conjugación de elementos de $\mathbb{H}_1$, i.e, sí $q \in \mathbb{H}_1$ y $x \in \mathbb{H}_0$, entonces, $qxq^{-1} \in \mathbb{H}_0$.

Demostración: Sea $q \in \mathbb{H}_1$, sí $x \in \mathbb{H}_0$ entonces $\overline{qxq^{-1}} = \overline{qx\bar{q}} = q\bar{x}\bar{q} = -qxq^{-1}$, luego $ad_q(x) \in \mathbb{H}_0$, ya que $\overline{ad_q(x)} = -ad_q(x)$. □

Es conocido que el conjunto de matrices ortogonales de orden n, denotado por $O(n)$, induce una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ que es una isometría y a su vez cualquier isometría lineal de $\mathbb{R}^n$ es representada por una matriz ortogonal. Un elemento $O \in O(n)$, por definición de $O(n)$, es tal que $OO^T = I$ luego

$$det(OO^T) = det(O)^2 = 1$$

y por consiguiente $det(O) = \pm 1$, por lo tanto

$$O(n) = O(n)^+ \cup O(n)^-$$

donde

$$O(n)^{\pm} = \{O \in O(n) : det(O) = \pm 1\}$$

estos conjuntos son conexos. Los elementos de $O(n)^+$ son llamados **isometrías directas o rotaciones** y los elementos de $O(n)^-$ **isometrías indirectas**. El espacio $O(n)^+$ es llamado **el grupo de matrices ortogonales especiales** y es denotado usualmente como $SO(n)$.

La transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}_0$, dada por $T(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, identifica a $\mathbb{H}_0$ con $\mathbb{R}^3$ y además es una isometría lineal. Como $\mathbb{H}_0$ posee una estructura de álgebra heredada de la del álgebra de los cuaterniones, entonces, vía la transformación T, proveemos a $\mathbb{R}^3$ de una estructura de álgebra; es más, $\mathbb{R}^3$ puede ser visto como una subálgebra de $\mathbb{H}$.

Proposición 3. *Sí $q \in \mathbb{H}_1$ entonces la función lineal $ad_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada para $x \in \mathbb{R}^3$ por $ad_q(x) = T(qT(x)q^{-1})$; es una rotación de $\mathbb{R}^3$, i.e, un elemento de $SO(3)$.*

Demostración: Por brevedad $T(x)$ será escrito como x, para $x \in \mathbb{R}^3$. Dado que

$$\|ad_q(x)\| = \|qxq^{-1}\| = \|x\|$$

la función ad_q es una isometría lineal de $\mathbb{R}^3$. Definimos

$$\rho : \mathbb{H}_1 = SU(2) \to O(3)$$

por $\rho(q) = ad_q$. La función ρ es continua y $\rho(1) = I_3$; como $SU(2)$ es conexo entonces $\rho(SU(2))$ está contenido en la componente conexa de $O(3)$ que contiene al elemento identidad I_3, la cual es $SO(3)$, luego las funciones ad_q son rotaciones de $\mathbb{R}^3$. □

En la proposición anterior se construyo una función

$$\rho : SU(2) \to SO(3), \qquad \text{dada por} \quad \rho(q) = ad_q. \tag{1}$$

Proposición 4. *La función $\rho : SU(2) \to SO(3)$ es un homomorfismo de grupos sobreyectivo y $Ker(\rho) = \{q \in SU(2) : ad_q = I_3\} = \{I_2, -I_2\}$.*

Demostración: Una prueba de este resultado será presentada más adelante; vea Proposición 2. □

Definición 2. *Sean X, Y dos variedades diferenciables, $f : X \to Y$ es una* ***función recubridora*** *sí:*
1. La función f es no singular, i.e, para todo $x \in M$, la aplicación inducida $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ es sobreyectiva.
2. Para cada $y \in Y$ existe $U_j \subset Y$ tal que $f^{-1}(U_j) = \bigcup_{i=1} V_{ij}$, es la unión disyuntas de abiertos de X, para los cuales $f|_{V_{ij}} : V_{ij} \to U_j$ es un difeomorfismo.
Cuando tal f existe, a la variedad Y se le suele llamar base y a la variedad X el espacio recubridor de Y.

Definición 3. *Sean X y Y dos variedades diferenciables con una función cubridora $f : X \to Y$. Sí el cardinal del conjunto $f^{-1}(y)$ es m para todo $y \in Y$, el espacio X es un m-recubrimiento de Y. En el caso en que $m = 2$, el espacio X se dice que es un doble recubrimiento de Y y la función f se dice que es un recubrimiento doble.*

Definición 4. *Sea A un grupo de Lie y $\rho : A \to SO(n)$ un homomorfismo sobreyectivo suave, que satisface $Ker\rho = \mathbb{Z}_2$, entonces, ρ se denomina una* ***función spin*** *de $SO(n)$ y A es llamado el* ***grupo spin*** *de orden n y es denotado por $Spin(n)$; el cual es único, vía homotopía, por ser A un doble cubrimiento de $SO(n)$.*

Proposición 5. *La función $\rho : SU(2) \to SO(3)$, definida en la Ecuación 1, es la función spin de $SO(3)$ y por lo tanto $Spin(3) = SU(2)$.*

La función spin y el grupo spin de $SO(n)$, para $n \geq 3$, serán construidos empleando el concepto de álgebra de Clifford. Este es el objetivo primordial de la siguiente sección.

3. Algebras de Clifford

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n con un producto interno $\langle \ , \ \rangle$, cuya norma es denotada por $\| \ \|$. Consideremos el álgebra tensorial

$$T(V) = \oplus_{n \geq 0} \underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{n \text{ veces}},$$

donde $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. El álgebra tensorial es una álgebra asociativa con unidad $1 \in \mathbb{R}$ y cuyo producto es el producto tensorial $\otimes$.

Definición 5. *El álgebra de Clifford $Cl(V)$ generada por V, la cual depende del producto interno, es el cociente de $T(V)$ por el ideal generado por todos los elementos de la forma*

$$v \otimes v + \|v\|^2 \mathbf{1}_{T(V)} \tag{2}$$

Sí $V = \mathbb{R}^n$ con su producto interno usual, el álgebra de Clifford generada por $\mathbb{R}^n$ es denotada como $Cl(n)$. La multiplicación interna de $Cl(V)$ es llamada **multiplicación de Clifford** .

Definición 6. *Sea E un módulo sobre $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, E es llamado* ***módulo de Clifford*** *sí hay un homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $c : Cl(V) \to End(E)$. Para simplificar escribiremos*

$$c(x)(y) \equiv x \cdot y, \tag{3}$$

para $x \in E$ y $y \in Cl(V)$. El producto $x \cdot y$ en (3) se suele llamar ***multiplicación de Clifford*** *sobre E.*

Proposición 6. *El álgebra de Clifford $Cl(V)$ generada por V es el cociente de $T(V)$ por el ideal generado por todos los elementos de la forma*

$$v \otimes w + w \otimes v + 2\langle v, w\rangle \mathbf{1}_{T(V)} \quad v, w \in V \tag{4}$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la ley del paralelogramo

$$\langle v, w\rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{2} \quad \square$$

Ejemplos

1. Las primeras ocho álgebras de Clifford $Cl(n)$ están resumidas en la siguiente tabla:

$Cl(0)$	$\mathbb{R}$
$Cl(1)$	$\mathbb{C}$
$Cl(2)$	$\mathbb{H}$
$Cl(3)$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
$Cl(4)$	$M_2(\mathbb{H})$
$Cl(5)$	$M_4(\mathbb{C})$
$Cl(6)$	$M_8(\mathbb{R})$
$Cl(7)$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$
$Cl(8)$	$M_{16}(\mathbb{R})$

2. El resto de álgebras de Clifford son obtenidas a partir de las ocho primeras, ya que para $n \geq 0$, $Cl(n + 8) = M_{16}(Cl(n))$.

Escogiendo una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ para V, podemos describir a $Cl(V)$ en términos de generadores y relaciones del siguiente modo: los elementos de la base $\{e_1, ..., e_n\}$, deben satisfacer la siguiente relación $e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = 2\delta_{i,j}$, explícitamente,

$$\begin{cases} e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i, & i \neq j, \\ e_i^2 = -1 & \end{cases},$$

donde la operación es la multiplicación de Clifford de $Cl(V)$. De esto tenemos que cada elemento de $Cl(V)$ se puede escribir de manera única como suma de productos de la forma:

$$e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_l}, \quad \text{con } \ 1 \leq i_1 < ... < i_l \leq n;$$

por lo tanto la dimensión de $Cl(V)$, como un espacio vectorial real, es 2^n.

Para establecer una *Propiedad Universal* para las álgebras de Clifford, haremos las siguientes convenciones: Sí $j : V \to Cl(V)$ es la inclusión natural de V en $Cl(V)$ y sí $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in V$, entonces,

$$[j(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i)]^2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -\| \sum_{i=1}^{n} x_ie_i\|^2,$$

luego $[j(x)]^2 = -\|x\|^2 \cdot \mathbf{1}$, para todo $x \in V$.

Teorema 1 (Propiedad universal de las álgebras de Clifford). *Sea A una álgebra real con unidad. Sí $f : V \to A$ es una transformación lineal para la cual*

$$[f(x)]^2 = -\|x\|^2 \cdot 1, \quad \textit{para todo } x \in V \ \textit{y } \mathbf{1} \in A, \tag{5}$$

entonces, existe un único homomorfismo de álgebras reales $F : Cl(V) \to A$, para el cual $F \circ j = f$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Cl(V) \arrow[rr, "\exists! F"'] & & A \end{tikzcd}$$

Demostración: Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal de V. El homomorfismo

$$F : Cl(V) \to A$$

es definido como $F(e_i) = f(e_i)$ y es extendido linealmente por

$$F(e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_l}) = f(e_{i_1}) \cdot ... \cdot f(e_{i_l}),$$

claramente F es único y $F \circ j = f$. La Ecuación 5 garantiza que la función F está bien definida. $\square$

Corolario 2. *Sea $o_n \in O(n)$, una isometría lineal de $\mathbb{R}^n$. Sea $\check{o}_n$, $\check{o}_n : \mathbb{R}^n \to Cl(n)$, definida como $\check{o}_n = j \circ o_n$, entonces, existe una única extensión $O_n : Cl(n) \to Cl(n)$ de $\check{o}_n$, la cual es un homomorfismo de álgebras.*

Demostración: La transformación o_n induce una base ortonormal dada por $e^i = o_n(e_i)$, $1 \leq i \leq n$, donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base usual de $\mathbb{R}^n$. Sí $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$o_n(x) = x_1 e^1 + \cdots + x_n e^n;$$

y claramente $j(o_n(x)) \cdot j(o_n(x)) = -\|o_n(x)\|^2 = -\|x\|^2$, por la propiedad universal de las álgebras de Clifford, existe una única extensión $O_n : Cl(n) \to Cl(n)$ de $\check{o}_n$. $\square$

3.1. El grupo Spin(V)

Sí $\alpha_0 : V \to Cl(V)$, $\alpha_0 = -j(x)$, por la propiedad universal de las álgebras de Clifford existe un único automorfismo de álgebra $\alpha : Cl(V) \to Cl(V)$ tal que $\alpha(e_r) = -e_r$ y $\alpha \circ \alpha = I_{Cl(V)}$. Además, para $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, tenemos que

$$\alpha(e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k}) = (-1)^k e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k} = \begin{cases} e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k}, & \text{sí k es par} \\ -e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k}, & \text{sí k es impar} \end{cases}$$

Proposición 7. *El álgebra de Clifford $Cl(V)$ se descompone como $Cl(V) = Cl_0(V) \oplus Cl_1(V)$, donde $Cl_0(V) = \{u \in Cl(V) : \alpha(u) = u\}$ y $Cl_1(V) = \{u \in Cl(V) : \alpha(u) = -u\}$. Esta descomposición es multipicativa, en el sentido de que*

$$\begin{cases} uv \in Cl_0(V) & \textit{sí } u, v \in Cl_0(V) \textit{ ó } u, v \in Cl_1(V), \\ uv, vu \in Cl_1(V) & \textit{sí } u \in Cl_0(V) \textit{ y } v \in Cl_1(V) \end{cases},$$

y por consiguinete $Cl_0(V)$ es una subálgebra de $Cl(V)$ y $Cl_1(V)$ es un modulo sobre esta subálgebra. Además $Cl(V) \approx Cl_0(V \oplus \mathbb{R})$.

Demostración: Sea $v \in Cl(V)$, definimos $v_0 = \dfrac{1}{2}(v + \alpha(v))$ y $v_1 = \dfrac{1}{2}(v - \alpha(v))$, los cuales satisfacen $\alpha(v_0) = v_0$, $\alpha(v_1) = -v_1$ y $v = v_0 + v_1$, además $Cl_0(V) \cap Cl_1(V) = \{0\}$, luego, $Cl(V) = Cl_0(V) \oplus Cl_1(V)$. Esta descomposición es multiplicativa ya que α es un homomorfismo de anillos.

Por último, sí $v = v_0 + v_1 \in Cl(V)$ y $e = 0 \oplus 1 \in V \oplus \mathbb{R}$, definimos una aplicación $\beta : Cl(V) \to Cl_0(V \oplus \mathbb{R})$, por $\beta(v) = \beta(v_0 + v_1) = v_0 + v_1 \cdot e$, donde $v_0 \in Cl_0(V)$ y $v_1 \in Cl_1(V)$; $\beta(v) \in Cl_0(V \oplus \mathbb{R})$, ya que $\alpha(\beta(v)) = \alpha(v_0) + \alpha(v_1) \cdot \alpha(e) = v_0 + (-v_1) \cdot (-e) = \beta(v)$ y claramente β es un isomorfismo. $\square$

Definición 7. *Denotaremos como S_V al conjunto de vectores unitarios del espacio vectorial V, i.e, $S_V = \{x \in V : \|x\| = 1\}$.*

Sí $u \in S_V \subset V$, entonces, $u^2 = -\|u\|^2 = -1$, de modo que $u^{-1} = -u = \alpha(u)$.

Definición 8. *El conjunto $\langle S_V \rangle = \{u_1 \cdot ... \cdot u_k : u_1, ..., u_k \in S_V\}$, es el grupo pin de V y es denotado como* **Pin(V)** .

Para cada elemento invertible, u, de $Cl(V)$, sea

$$ad_u : V \to Cl(V) \quad ; \rho_u(v) = \alpha(u)vu^{-1} \text{ para todo } v \in V. \tag{6}$$

Con esta función deseamos generalizar la construcción de la función spin de $SO(3)$. Pero antes de obtener resultados generales, necesitamos algunos resultados geométricos de $\mathbb{R}^n$:

Lema 1. *Cada $A \in O(n)$ es un producto de reflexiones de hiperplano. Sí el número de esos productos es par entonces $A \in SO(n)$ e impar sí $A \in O^-(n)$.*

Demostración: Un hiperplano de un espacio vectorial V de dimensión n con producto interno, es un subespacio vectorial de V de dimensión $n-1$. Cada hiperplano H de V tiene asociada una transforfación lineal $\theta_H : V \to H$ llamada **reflexión en el hiperplano** H . Para definir θ_H, cada elemento $x \in V$ puede ser escrito de manera única como $x = x_H + x'_H$, con $x_H \in H$ y $\langle y, x'_H \rangle$ para todo $y \in H$, entonces, $\theta_H(x) = x_H - x'_H$. Cualquier reflexión de un hiperplano H de $\mathbb{R}^n$ es una isometría indirecta de $\mathbb{R}^n$. □

El anterior Lema motiva la siguiente definición:

Definición 9. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno. El conjunto de todas las isometrías lineales de V lo denotaremos como $O(V)$ y denotaremos por $SO(V)$ al conjunto de isometrías lineales de V que se pueden expresar como producto de un número par de reflexiones de hiperplano*

Proposición 8. *Para todo $u \in Pin(V)$, $ad_u : V \to V$ es una isometría lineal, además para $u \in S_V$, ad_u es la reflexión asociada al hiperplano perpendicular a u.*

Demostración: Sea $u \in S_V$ y $x \in V$; sí $\langle u, x \rangle = 0$ entonces $u \cdot x = -x \cdot u$,por la Proposición 6, y $ad_u(x) = \alpha(u)xu^{-1} = -ux(-u) = uxu = -u^2x = -(-1)x = x$. Por otro lado, sí $x = tu$, para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces, $ad_u(x) = uxu = tu^3 = -tu = -x$. Luego para $u \in S_V$,

$$ad_u(x) = \begin{cases} x, & \text{sí } \langle u, x \rangle = 0, \\ -x, & \text{sí } x = tu \text{ para algún } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Esto prueba que $ad_u(x) \in V$ y que ad_u es la reflexión del hiperplano ortogonal a u.
Para $u \in \langle S_V \rangle = Pin(V)$, existen $u_1, ..., u_r \in S_V$ tales que $u = u_1 \cdot ... \cdot u_r$, luego

$$ad_u(x) = u_1 \cdot ... \cdot u_r x u_r \cdot ... \cdot u_1 = ad_{u_1} \circ ... \circ ad_{u_r}(x),$$

es decir, ad_ues un producto de reflexiones de hiperplanos, entonces, ad_u es una isometría lineal de V. □

Definición 10. *El **grupo Spin** de V está dado por, $Spin(V) \equiv Pin(V) \cap Cl_0(V)$. Cuando $V = \mathbb{R}^n$, $Spin(\mathbb{R}^n)$ es denotado como $Spin(n)$.*

Teorema 2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con un producto interno y $\rho : Spin(V) \to O(V)$, definida como, $\rho(u) = ad_u$, para todo $u \in Spin(n)$. Entonces, $\rho^{-1}(SO(V)) = Spin(V)$ y $Ker(\rho) = \{1, -1\}$, por lo tanto ρ y $Spin(V)$ son la función y grupo spin de $SO(V)$ respectivamente.*

Demostración: Sea $v \in Pin(V)$, luego existen $v_1, ..., v_k \in S_V \subset Cl_1(V)$, tal que $v = v_1 \cdot .. \cdot v_k$. Sí $v \in Pin(V) \cap Cl_0(V) = Spin(V)$, por la Proposición 7, k es par, luego $ad_v \in SO(V)$ y por lo tanto $v \in \phi^{-1}(SO(V)$. Sí $v \in \phi^{-1}(SO(V))$, entonces, $ad_v = ad_{v_1} \circ ... \circ ad_{v_k}$, como $ad_v \in SO(V)$, k es par, entonces, $v \in Spin(V)$. Sí $\phi(u) = I_V$, entonces, $u \in \mathbb{R}$ y $|u| = 1$, es decir, $Ker(\phi) = \{1, -1\}$. $\square$

Como $Spin(n)$ es el doble cubrimiento de $SO(n)$, entonces, para $x \in Spin(n)$ existe una vecindad abierta U de x tal que $\rho : U \subset Spin(n) \to \rho(U) \subset SO(n)$ es un difeomorfismo y la derivada en x, $d\rho_x : T_x Spin(n) \to T_{\rho(x)} SO(n)$, es un isomorfismo lineal. En particular, la derivada $d\rho : \mathfrak{spin}(n) \to \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$ es un isomorfismo de álgebras de Lie y

$$\mathfrak{spin}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$$

y recordemos que $\dim\{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\} = \binom{n}{2}$. A continuación veremos que el álgebra de Lie de $Spin(n)$ puede ser descrita como una subálgebra de $Cl(n)$:

Proposición 9. *Para $n \geq 2$, el álgebra de Lie de $Spin(n)$ es*

$$\mathfrak{spin}(n) = \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} e_i \cdot e_j : t_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \subset Cl_n.$$

Demostración: Para $1 \leq i < j \leq n$ y $t \in \mathbb{R}$, consideremos la serie

$$\exp(te_i \cdot e_j) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} (e_i \cdot e_j)^r$$

Se puede verificar que

$$\exp(te_i \cdot e_j) = \cos t + \sin t e_i \cdot e_j = e_i \cdot (-\cos t e_i + \sin t e_j)$$

es decir,

$$\exp(te_i \cdot e_j) \in Spin(n)$$

Tomando la derivada en cero de la curva

$$\alpha_{ij} : \mathbb{R} \to Spin(n)$$

dada por

$$\alpha_{ij}(t) = \exp(te_i \cdot e_j)$$

se obtiene que $e_i \cdot e_j \in \mathfrak{spin}(n)$. Como

$$\dim(\mathfrak{spin}(n)) = \binom{n}{2}$$

los elementos $e_i \cdot e_j$ conforman una base para $\mathfrak{spin}(n)$. $\square$

La acción de la derivada $d\rho : \mathfrak{spin}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ sobre la base $e_i \cdot e_j$ está dada por

$$d\rho(e_i \cdot e_j) = 2E^{ji} - 2E^{ij}$$

donde E^{ij} es la matriz $n \times n$ con uno en la entrada ij y cero en las demás, ya que los elementos $\{E^{ij} - E^{ji}\}_{\{1 \leq i,j \leq n\}}$ conforman una base de $\mathfrak{so}(n)$. Similarmente, el efecto del homomorfismo $\rho : Spin(n) \to SO(n)$ sobre $\exp(te_i \cdot e_j)$ es

$$\rho(\exp(te_i \cdot e_j)) = \cos(2t)(I_n) + sin(2t)(E^{ji} - E^{ij})$$

3.2. Identificacíon del álgebra de Clifford con el álgebra exterior

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, dotado con un producto interno $\langle , \rangle$ y una base ortonormal orientada $\{e_1, ..., e_n\}$. Sea $\wedge V$ el conjunto de tensores alternantes de V y V^* el conjunto de funcionales lineales reales del espacio lineal V. El producto interno $\langle , \rangle$ de V permite identificar de manera natural a V con V^*, para $v \in V$ corresponde $w = \langle v, \quad \rangle \in V^*$. Por conveniencia de ahora en adelante $V = V^*$.

Proposición 10. *Sea $\wedge^k V$ el conjunto de tensores alternantes de orden k sobre V. El conjunto de todos los $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}$, $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, es una base para $\wedge^k V$ y por lo tanto tiene dimensión $\binom{n}{k}$. Además el conjunto de todos los $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}$, $1 \leq k \leq n$ y $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, es una base para $\wedge V$ y por lo tanto $\wedge V$ tiene dimensión 2^n.*

El álgebra de Clifford $Cl(V)$ y $\wedge V$ son isomorfos como espacios vectoriales ya que la aplicación $q : \wedge V \to Cl(V)$, $q(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}) = e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k}$, $1 \leq i_1 < ... < i_k < ... \leq n$, es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales. Sin embargo el producto exterior "$\wedge$" de $\wedge V$ no es una multiplicación de Clifford ya que sí lo fuera $e_i \wedge e_i = 1$. Una multiplicación de Clifford para $\wedge V$ es generada por:

$$v * (v_1 \wedge ... \wedge v_k) \equiv v \wedge (v_1 \wedge ... \wedge v_k) - \iota(v)(v_1 \wedge ... \wedge v_k), \quad v, v_1, ..., v_k \in V; \tag{7}$$

donde $\iota(v)(v_1 \wedge ... \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^k \langle v, v_i \rangle v_1 \wedge ... \wedge \widehat{v_i} \wedge ... \wedge v_k$.

Proposición 11. *Para $v \in V$ y $w \in \wedge V$ definimos una acción $c : V \to End(\wedge V)$ por $c(v)(\omega) = v * \omega = v \wedge \omega - \iota(v)\omega$. La acción $c : V \to End(\wedge V)$, se extiende al álgebra de Clifford $Cl(V)$.*

Demostración: Note que para $v_1, v_2 \in V$ y $\omega \in \wedge V$, tenemos que

$$v_1 \wedge \iota(v_2)\omega + \iota(v_2) v_1 \wedge \omega = \langle v_1, v_2 \rangle \omega, \tag{8}$$

luego $c(v) \circ c(v) = -\|v\|^2 I_V$. Por la *propiedad universal de las álgebras de Clifford* esta acción, extiende de modo único al álgebra de Clifford $Cl(V)$, en particular

$$c(e_i \cdot e_j) = c(e_i) \circ c(e_j)$$

□

Proposición 12. *La función $\delta : Cl(V) \to \bigwedge V$, definida por $\delta(a) = c(a)(1_{\wedge V})$ posee como inversa a $q : \bigwedge V \to C(V)$, la cual está dada por $q(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_l}) = e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_l}$, para $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$.*

Demostracion: Sea $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}$, $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, luego

$$\begin{aligned}
\delta(q(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k})) &= c(e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k})(1_{\wedge V}) = c(e_{i_1}) \circ ... \circ c(e_{i_k})(1_{\wedge V}) \\
&= c(e_{i_1}) \circ ... \circ c(e_{i_{k-1}})(e_{i_k} \wedge 1_{\wedge V} - \iota(e_{i_k}) 1_{\wedge V}) = c(e_{i_1}) \circ ... \circ c(e_{i_{k-1}}) e_{i_k} \\
&= c(e_{i_1}) \circ ... \circ c(e_{i_{k-2}})(e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_k} - \iota(e_{i_{k-1}}) e_{i_k}) \\
&= c(e_{i_1}) \circ ... \circ c(e_{i_{k-2}}) e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_k} = ... = e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}.
\end{aligned}$$

Por otro lado $q(\delta(e_i)) = q[c(e_i)(1_{\wedge V})] = q(e_i) = e_i$. Luego q es la inversa de δ. □

En $\wedge V$ definimos la multiplicación de Clifford para $\eta, \omega \in \wedge V$ como

$$\eta * \omega = c(q(\eta))(\omega) \in \wedge V$$

Corolario 3. *El álgebra de Clifford* $(Cl(V), \cdot)$ *es isomorfa al álgebra tensorial* $(\wedge V, *)$.

Demostración: Observe que

$$\delta(a \cdot b) = c(a \cdot b)(1_{\wedge V}) = c(a)(c(b)(1_{\wedge V})) = c(q(\delta(a))(\delta(b)) = \delta(a) * \delta(b)$$

Por otro lado q es por definición un homomorfismo entre las álgebras $(Cl(V), \cdot)$ y $(\wedge V, *)$, ya que

$$q(e_{i_1} * ... * e_{i_k}) = q(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}) = e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k} = q(e_{i_1}) \cdot ... \cdot q(e_{i_k})$$

para $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$. Luego $(Cl(V), \cdot)$ es isomorfa al álgebra tensorial $(\wedge V, *)$. $\square$

Observación: El producto de Clifford definido como "$*$" permite ver al álgebra $\wedge V$ como una álgebra de Clifford. Note que para $i \neq j$

$$e_i * e_j = e_i \wedge e_j - \iota(e_i)e_j = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i + \iota(e_j)(e_i) = -e_j * e_i.$$

Por otro lado $e_i * e_i = e_i \wedge e_i - \iota(e_i)e_i = -1$.

4. La complejificación del álgebra de Clifford

Consideremos la complejificación $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ del álgebra de Clifford $Cl(V)$. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal orientada de V, $n \geq 2$.

Definición 11. *El operador de quilaridad está dado por* $\xi : Cl(V) \otimes \mathbb{C} \to Cl(V) \otimes \mathbb{C}$, *donde* $\xi(w) = \Gamma \cdot w$, *con* $\Gamma = i^{[(n+1)/2]} e_1 \cdot ... \cdot e_n \in Cl(V) \otimes \mathbb{C}$, *donde* $[(n+1)/2]$ *es la parte entera de* $(n+1)/2$.

Proposición 13. *El operador de quilaridad* Γ *satisface*

$$\Gamma^2 = 1_{Cl(V)}, \quad \Gamma v + (-1)^n v \Gamma = 0 \text{ para todo } v \in V. \tag{9}$$

Además está bien definido para bases ortonormales que definan parte de la misma orientación que $\{e_1, ..., e_n\}$.

Corolario 4. *El operador de quilaridad* ξ, *induce una descomposición de* $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$, *como:*

$$Cl(V) \otimes \mathbb{C} = (Cl(V) \otimes \mathbb{C})^+ \oplus (Cl(V) \otimes \mathbb{C})^-, \tag{10}$$

donde $(Cl(V) \otimes \mathbb{C})^\pm = \{w \in Cl(V) \otimes \mathbb{C} : \xi(w) = \Gamma \cdot w = \pm w\}$.

Demostración. La prueba es similar a la de la Proposición 7, solo que en este caso α es reemplazado por ξ. $\square$

Corolario 5. *El elemento* $\Gamma \in Cl(V)\otimes\mathbb{C}$ *pertenece al centro de* $Cl(V)\otimes\mathbb{C}$ *cuando la dimensión de* V *es impar. Sí la dimensión de* V *es par,* Γ *conmuta con* $Cl_0(V)\otimes\mathbb{C}$ *y anticonmuta con* $Cl_1(V)\otimes\mathbb{C}$.

Lema 2. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión par junto con un producto interno. Sea* $c: Cl(V)\otimes\mathbb{C}\to End(S)$ *un homomorfismo de álgebras, donde* S *es un espacio vectorial complejo, entonces, existe una descomposición, inducida por el operador de quilaridad* ξ,

$$S = S^{+}\oplus S^{-}$$

y para cualquier $v\in V$, $v\neq 0$, *la acción de Clifford determina los isomorfismos*

$$c(v): S^{+}\to S^{-} \quad y \quad c(v): S^{-}\to S^{+}.$$

Además la acción de Clifford c *induce acciones*

$$(Cl_0(V)\otimes\mathbb{C})^{+}\to End(S^{+}),\quad (Cl_1(V)\otimes\mathbb{C})^{-}\to Hom(S^{+},S^{-}), \tag{11}$$
$$(Cl_0(V)\otimes\mathbb{C})^{-}\to End(S^{-}),\quad (Cl_1(V)\otimes\mathbb{C})^{+}\to Hom(S^{-},S^{+}). \tag{12}$$

Las acciones de (1.10) y (1.11) se comportan de modo trivial en S^{-} *y* S^{+}*, respectivamente.*

Demostración: Sea Γ el operador de quilaridad de $Cl(V)\otimes\mathbb{C}$, como la dimensión de V es par, entonces, $\Gamma\cdot v = -v\cdot\Gamma$ para todo $v\in V$. Sí $\gamma^{+} = \dfrac{(I_S + c(\Gamma))}{2} : S\to S$ y $\gamma^{-} = \dfrac{(I_S - c(\Gamma))}{2} : S\to S$; γ^{+} y γ^{-} satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \gamma^{+}+\gamma^{-} &= I_S,\\ \gamma^{+}\gamma^{-}=\gamma^{-}\gamma^{+} &= 0,\\ (\gamma^{+})^2=\gamma^{+} \qquad &y \qquad (\gamma^{-})^2=\gamma^{-}. \end{aligned}$$

Sí $S^{+}=\gamma^{+}(S)$ y $S^{-}=\gamma^{-}(S)$; por las relaciones anteriores se tiene que $S=S^{+}\oplus S^{-}$. Sí $v\in V$ y $v\neq 0$, tenemos que:

$$c(v)\gamma^{+} = c(v)\frac{(I_S+c(\Gamma))}{2} = \frac{c(v)+c(v\cdot\Gamma)}{2} = \frac{c(v)-c(\Gamma)c(v)}{2} = \gamma^{-}c(v).$$

Análogamente $c(v)\gamma^{-}=\gamma^{+}c(v)$. Lo anterior demuestra que $c(v): S^{+}\to S^{-}$, $c(v): S^{-}\to S^{+}$ y como $c(v)\circ c(v) = -\|v\|^2 I_S$, entonces, la función $c(v)$ es inyectiva y por ende las restricciones de $c(v)$ a $S^{\pm}$ son isomorfismos.

Sea $w\in (Cl_0(V)\otimes\mathbb{C})^{+}$, luego $\Gamma\cdot w = w\cdot\Gamma = w$ y

$$\begin{aligned} c(w)\gamma^{+} &= c(w)\frac{(I_S+c(\Gamma))}{2} = \frac{c(w)+c(w\cdot\Gamma)}{2} = \frac{c(w)+c(\Gamma\cdot w)}{2}\\ &= \frac{I_S+c(\Gamma)}{2}c(w) = \frac{(I+c(\Gamma))}{2}c(w) = \gamma^{+}c(w) \end{aligned}$$

Esto prueba que $c(w): S^{+}\to S^{+}$; del mismo modo se prueba que $c(w)\gamma^{-}=0$. Las demás afirmaciones se obtienen de manera análoga. $\square$

Definición 12. *Una polarización del espacio vectorial complejo $V \otimes \mathbb{C}$ es un subespacio $P \subset V \otimes \mathbb{C}$ que es **isotrópico** , es decir, satisface $V \otimes \mathbb{C} = P \oplus \bar{P}$ y para $v \in P$, se tiene que $Q(v,v)$, donde Q es la extensión lineal compleja, de V a $V \otimes \mathbb{C}$, del producto interno de V, i.e., $Q(a+b_i, c+d_i) = \langle a,c\rangle - \langle b,d\rangle + (\langle, bc\rangle + \langle a,d\rangle)i$. La polarización se dice* **orientada***, sí existe una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de V, tal que P es generado por los vectores*

$$\{w_j = \frac{e_{2j-1} - ie_{2j}}{\sqrt{2}} : 1 \leq j \leq n/2\}$$

y por lo tanto la componente $\bar{P}$ es generada por los vectores

$$\{\bar{w}_j = \frac{e_{2j-1} + ie_{2j}}{\sqrt{2}} : 1 \leq j \leq n/2\}$$

Se puede verificar directamente que los elementos $\{w_j\}_{j=1,...,n/2}$, satisfacen las siguientes propiedades:

$$w_i \cdot w_i = \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i = 0, \qquad w_i \cdot \bar{w}_i + \bar{w}_i \cdot w_i = -2, \tag{13}$$

para $i \neq j$, tenemos

$$w_i \cdot w_j = -w_j \cdot w_i, \quad w_i \cdot \bar{w}_j = -\bar{w}_j \cdot w_i, \quad \bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = -\bar{w}_j \cdot \bar{w}_i. \tag{14}$$

Teorema 3. *Sea V un espacio vectorial euclideano-orientado de dimensión par, luego existe un único módulo de Clifford S, llamado el **módulo spinor** , tal que la multiplicación de Clifford induce un isomorfismo de álgebras*

$$c : Cl(V) \otimes \mathbb{C} \to End(S).$$

*Consecuentemente S posee una descomposición $S = S^+ \oplus S^-$, inducida por el operador de quilaridad de $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$; los subespacios S^+ y S^- son llamados submódulo **spinor positivo** y el submódulo **spinor negativo**, respectivamente, y $dim_{\mathbb{C}}(S) = 2^{dim(V)/2}$, $dim_{\mathbb{C}}(S^+) = dim_{\mathbb{C}}(S^-) = 2^{(\frac{dim(V)}{2}-1)}$. Además la acción de Clifford induce los isomorfismos*

$$(Cl_0(V) \otimes \mathbb{C})^+ \approx End(S^+), \quad (Cl_0(V) \otimes \mathbb{C})^- \approx End(S^-),$$
$$(Cl_1(V) \otimes \mathbb{C})^- \approx Hom(S^+, S^-), \quad (Cl_1(V) \otimes \mathbb{C})^+ \approx Hom(S^-, S^+).$$

En adición, S posee un producto interno tal que

$$\langle e \cdot s_1, e \cdot s_2\rangle = \langle s_1, s_2\rangle,$$

para $s_1, s_2 \in S$ y $e \in V$ con $\|e\| = 1$, por consiguiente sí $e \in Spin(n)$, entonces,

$$c(e) \in Aut(S)$$

Demostración: Sea P una polarización orientada de $V \otimes \mathbb{C}$, se probará que $S = \wedge P$. Cualquier elemento $v \in V \otimes \mathbb{C} \to Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ se descompone como $v = v_1 + v_2 \in P \oplus \bar{P}$. La componente $v_1 \in P$ actúa sobre $\wedge P$ por producto exterior:

$$c_1(v_1)\omega = \sqrt{2}\omega \wedge v_1, \quad \omega \in \wedge P.$$

La componente v_2 actúa sobre $\wedge P$ del siguiente modo:

$$c_2(v_2)\omega = -\sqrt{2}\kappa(v_2)(\omega), \quad \omega \in \wedge P,$$

donde

$$\kappa(v)(p_1 \wedge ... \wedge p_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j+1} Q(v, p_j) p_1 \wedge ... \wedge \hat{p}_j \wedge ... \wedge p_k$$

para $v \in V$ y $p_1, ..., p_k \in P$, donde Q es la extensión lineal del producto interno de V.
La acción de cualquier $v = v_1 + v_2 \in V \otimes \mathbb{C}$ sobre $\wedge P$ es

$$c(v_1 \oplus v_2)w = c_1(v_1)w + c_2(v_2)\omega \quad \omega \in \wedge P.$$

Note que $c_1(v_1)[c_2(v_2)(\omega)] + c_2(v_2)[c_1(v_1)(\omega)] = -2Q(v_1, v_2)$. Para $v \in V$, $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = Q(\bar{v}, v) = Q(v, v) = Q(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = Q(v_1, v_1) + Q(v_2, v_2) + 2Q(v_1, v_2) = 2Q(v_1, v_2)$, por consiguiente $c(v) \circ c(v)\omega = -\|v\|^2\omega$. Por *la propiedad universal del álgebra de Clifford*, la acción c se puede extender a $Cl(V) \to End(S)$, además es posible extender esta acción de $Cl(V)$ a $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$. Esta acción es inyectiva y

$$\dim_{\mathbb{C}}(Cl(V) \otimes \mathbb{C}) = 2^n = (2^{n/2})^2 = \dim_{\mathbb{C}}(S)^2 = \dim_{\mathbb{C}}(End(S)),$$

por lo tanto, $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ y $End(S)$ son isomorfos como álgebras. La unicidad es consecuencia del Teorema de Wederburn; el resto del teorema es consecuencia del Lema 2. $\square$

Definición 13. *Supongamos que n es par.* ***La representación spin*** *, se define como la restricción de c a $Spin(n)$ de la acción de Clifford de $Cl(n)$ sobre el módulo spinor S del Teorema anterior. En el caso en que n sea impar* ***la representación spin*** *se define, a partir del isomorfismo de álgebras β, $\beta : Cl_0(n) \to Cl(n-1)$ de la Proposición 7 y la acción de Clifford $c : Cl(n-1) \to End(S)$, como la restricción a $Spin(n)$ de la función $c \circ f$. La representación spin es denotada como $\triangle_S : Spin(n) \to Aut(S)$.*

Proposición 14. *Sí la dimensión de V es par, la representación spin se descompone en dos representaciones, denotadas por $\triangle_S^{\pm}$ tal que:*

$$\triangle_S^{\pm} : Spin(n) \to Aut(S^{\pm})$$

4.1. El grupo $\mathbf{Spin^c(V)}$

Definición 14. *El grupo multiplicativo generado por $Spin(V)$ y $U(1) = S^1$ en $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ es llamado el grupo* ***Spin complejo*** *y es denotado por $Spin^c(V)$.*

Lema 3. *El grupo $Spin^c(V)$ es isomorfo a $(Spin(V) \times S^1)/\mathbb{Z}_2$.*

Demostración: Todo elemento de $Spin^c(V)$ es de la forma $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \in Spin(V), \beta \in S^1$; ya que S^1 pertenece al centro de $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$. La función dada por

$$f : Spin(V) \times S^1 \to Spin^c(V),$$

$$f(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$$

es sobreyectiva y $Ker(f) = \{(\alpha, \alpha^{-1}) : \alpha \in Spin(V) \cap S^1\}$. Como $\alpha \in Spin(V) \cap S^1$ entonces $\alpha \in \{\pm 1\}$, entonces, $Ker(f) = \{(1,1), (-1,-1)\}$. $\square$

El anterior lema nos permite definir la siguiente aplicación:

$$\rho^c : Spin^c(V) \approx (Spin(V) \times S^1)/\mathbb{Z}_2 \to SO(V) \times S^1, \tag{15}$$

como sigue: para $[(\alpha, \beta)] \in (Spin(V) \times S^1)/\mathbb{Z}_2$, $\rho^c([(\alpha, \beta)]) = (\rho(\alpha), \beta^2)$, donde $\rho : Spin(V) \to SO(V)$ es la función *spin* del Teorema 2. Esta aplicación está bien definida ya que $[(\alpha, \beta)] = \{(\alpha, \beta), (-\alpha, -\beta)\}$ y $\rho(\alpha) = \rho(-\alpha)$, $(\beta)^2 = (-\beta)^2$; la aplicación ρ^c es claramente sobreyectiva y

$$Ker(\rho^c) = \{[(1,1)], [(1,-1)]\} \approx \mathbb{Z}_2$$

por lo tanto

$$Spin^c(V)/\mathbb{Z}_2 \approx SO(V) \times S^1$$

De lo anterior concluimos la siguiente proposición:

Proposición 15. *La aplicación $\rho^c : Spin^c(V) \to SO(V) \times S^1$ es un doble cubrimiento de $SO(V) \times S^1$.*

Proposición 16. *La aplicación*

$$\pi_1 \circ \rho^c = \check{\rho} : Spin^c(V) \to SO(V),$$

donde π_1 es la proyección sobre el primer factor de $SO(V) \times S^1$, es la extensión de la acción de conjugación ρ de $Spin(V)$ sobre V a la acción de conjugación de $Spin^c(V)$ sobre $V \subset Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ y $Ker(\pi_1 \circ \rho^c) \approx S^1$. Además la acción de conjugación de $Spin^c(V)$ deja invariante al álgebra de Clifford real $Cl(V)$. Además hay un natural homomorfismo de grupos natural denotado como det, $det : Spin^c(V) \to S^1$, dado por $\pi_2 \circ \check{\rho}$, donde π_2 es la proyección sobre el segundo factor de $SO(V) \times S^1$.

Demostración: Sea $s \in Spin^c(V)$, luego existen $\alpha \in Spin(V)$ y $\beta \in S^1$, tal que $s = \alpha \cdot \beta$, luego sea

$$ad_s : V \to Cl(V) \otimes \mathbb{C}$$

$$ad_s(v) = s \cdot v \cdot s^{-1} = \alpha \cdot \beta \cdot v \cdot (\beta)^{-1} \cdot (\alpha)^{-1} = \alpha \cdot v \cdot \alpha^{-1} = ad_\alpha(v)$$

de donde $ad_s = ad_\alpha$. Recordemos que $\rho : Spin(V) \to SO(V)$, está definida por $\rho(\alpha) = ad_\alpha : V \to V$. Definimos $\check{\rho} : Spin^c(V) \to SO(V)$ por $\check{\rho}(s) = ad_s = ad_\alpha$. De otra parte

$\rho^c(s) = \rho^c(\alpha \cdot \beta) = (\rho(\alpha), \beta^2)$, luego, $\pi_1 \circ \rho^c(s) = \rho(\alpha) = ad_\alpha = ad_s = \check{\rho}(s)$, lo cual prueba que $\pi_1 \circ \rho^c$ es la extensión deseada. Por último,

$$Ker(\pi_1 \circ \rho^c) = \{s = \alpha \cdot \beta \in Spin^c(V) : \rho(\alpha) = 1\} = S^1$$

□

Por último, la representación spin compleja tiene una importante generalización:

Proposición 17. *La representación spin compleja $\triangle_S : Spin(V) \to Aut_{\mathbb{C}}(S)$ se extiende a una representación $\check{\triangle}_S : Spin^c(V) \to Aut_{\mathbb{C}}(S)$.*

5. El caso cuatrodimensional

Sea V un espacio vectorial real de dimensión 4, con producto interno y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de V. Una polarización orientada P de V es generada por

$$\{w_1 = \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, w_2 = \frac{e_3 - ie_4}{\sqrt{2}}\}.$$

La base estándar de $S = \wedge P$ es $\{1, w_1, w_2, w_1 \wedge w_2\}$ y se puede probar que $\{1_{\wedge P}, w_1 \wedge w_2\}, \{w_1, w_2\}$ son los generadores de S^+ y S^-, respectivamente. En este caso $S \approx \mathbb{C}^4$, $S^+ \approx \mathbb{C}^2 \times (0,0), S^- \approx (0,0) \times \mathbb{C}^2$ y se tiene una representación

$$c : Cl_4 \otimes \mathbb{C} \to End(S) \approx End(\mathbb{C}^4).$$

Las correspondientes acciones de $w_1, w_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2$ sobre S se pueden resumir en la siguiente tabla:

0	$c(w_1)$	$c(w_2)$	$c(\overline{w}_1)$	$c(\overline{w}_2)$
1	$\sqrt{2}w_1$	$\sqrt{2}w_2$	0	0
$w_1 \wedge w_2$	0	0	$\sqrt{2}w_2$	$-\sqrt{2}w_1$
w_1	0	$\sqrt{2}w_1 \wedge w_2$	$-\sqrt{2} \cdot 1_{\wedge V}$	0
w_2	$-\sqrt{2}w_1 \wedge w_2$	0	0	$-\sqrt{2} \cdot 1_{\wedge V}$

Por lo tanto se obtienen las siguientes representaciones matriciales; para las acciones de $w_1, w_2, \bar{w}_1$ y $\bar{w}_2$ sobre S, usando como base el conjunto ordenado $\{1, w_1 \wedge w_2, w_1, w_2\}$:

$$w_1 = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\overline{w}_1 = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{w}_2 = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Dado que $e_{2i-1} = \dfrac{w_i + \bar{w}_i}{\sqrt{2}}$ $\quad e_{2i} = \dfrac{-w_i + \bar{w}_i}{\sqrt{2}i}$, se deduce que las representaciones matriciales para las acciones de e_1, e_2, e_3 y e_4 sobre S son:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Las anteriores matrices son las matrices de Pauli y las denotaremos simplemente como e_1, e_2, e_3 y e_4, las cuales son la representación matricial de la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $V \subset Cl(V)$ en $End(S)$, usando como base el conjunto ordenado $\{1, w_1 \wedge w_2, w_1, w_2\}$.

Hay otra forma de obtener estas matrices de Pauli, obteniendo explícitamente el álgebra de Clifford $Cl(V)$.

Proposición 18. *El álgebra de Clifford Cl_4 es isomorfa, como álgebra, a $M_2(\mathbb{H})$.*

Demostración: Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ y $\delta : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{H})$, definida como

$$\delta(x) = \delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 I + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} \\ x_1 I + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\delta(x) \circ \delta(x) = -\|x\|^2 Id_4$, por *la propiedad universal de las álgebras de Clifford* existe una extensión $\bar{\delta}$, $\bar{\delta} : Cl_4 \to M_2(\mathbb{H})$, de δ la cual es inyectiva. De otra parte $\dim_{\mathbb{R}}(Cl_4) = 16 = \dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{H}))$, entonces, $\bar{\delta}$ es un isomorfismo de álgebras, es decir, $Cl_4 \approx M_2(\mathbb{H})$. $\square$

Cada elemento $(x_1, x, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ es identificado en $M_4(\mathbb{C})$ mediante la transformación δ con la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_1 + x_2 i & -x_3 + x_4 i \\ 0 & 0 & x_3 + x_4 i & -x_1 - x_2 i \\ x_1 + x_2 i & -x_3 + x_4 i & 0 & 0 \\ x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Note que sí $x \in \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$, entonces, $\delta(x)$ es una de las matrices de Pauli. Sí $Q_x = x_1 I + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}$, entonces, la representación de x en $M_4(\mathbb{C})$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\bar{Q}_x{}^t \\ Q_x & 0 \end{pmatrix}$$

Para cada elemento $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \in V$

$$s^+ = s_1^+ 1_\wedge P + s_2^+ w_1 \wedge w_2 \approx (s_1^+, s_2^+) \in S^+$$

$$s^- = s_1^- w_1 P + s_2^- w_2 \approx (s_1^-, s_2^-) \in S^-$$

Sí $Q_x = x_1 I + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} \in \mathbb{H}$; la acción de Clifford de V sobre $S^{\pm}$, está dada por:

$$V \otimes S^+ \to S^-, \qquad x \otimes s^+ \to Q_x s^+ \tag{20}$$

$$V \otimes S^- \to S^+, \qquad x \otimes s^- \to -\bar{Q}_x^t s^-. \tag{21}$$

5.1. Dualidad

Sea V un espacio vectorial cuatro dimensional con un producto interno $\langle , \rangle$. Podemos emplear el producto interno para identificar a V con su dual V^*. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal orientada de V.

Definición 15 (Operador de Hodge). *El operador estrella de Hodge $\star$:*

$$\star : \wedge^2 V \to \wedge^2 V$$

es definido por extensión lineal como

$$\star(e_i \wedge e_j) = (e_r \wedge e_s)$$

donde (i, j, r, s) es una permutación par de $(1, 2, 3, 4)$. De hecho podemos definir el operador $\star$ de Hodge,

$$\star : \wedge^p V \to \wedge^{4-p} V, \quad p = 0, 1, 2, 3, 4,$$

por

$$\star(1) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \star(e_i) = e_r \wedge e_s \wedge e_t,$$

donde (i, r, s, t) es una permutación par de $(1, 2, 3, 4)$

El operador $\star$ de *Hodge* está bien definido, i.e, no depende de la base ortonormal orientada con la cual se define y sobre p-formas satisface la identidad $\star^2 = (-1)^{p(4-p)} = (-1)^p$, en particular para $p = 2$ tenemos que $\star^2 = 1$.

Proposición 19. *El espacio vectorial $\wedge^2 V$, puede ser descompuesto como la suma directa*

$$\wedge^2 V = \wedge^2_+ V \oplus \wedge^2_- V,$$

donde $\wedge_+ V^2 = \{w \in \wedge^2 V : \star w = w\}$ y $\wedge_- V^2 = \{w \in \wedge^2 V : \star w = -w\}$.

Demostración: La prueba es similar a la del Teorema 7. □

El espacio vectorial $\wedge^2_+ V$ es generado por

$$f_1 = \frac{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4}{2}, \quad f_2 = \frac{e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2}{2}, \quad f_3 = \frac{e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3}{2}, \tag{22}$$

y $\wedge^2_- V$ es generado por

$$\hat{f}_1 = \frac{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4}{2}, \quad \hat{f}_2 = \frac{e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2}{2}, \quad \hat{f}_3 = \frac{e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3}{2}. \tag{23}$$

Los elementos de $\wedge^2_+ V$ y $\wedge^2_- V$ son llamados los tensores alternantes *auto-duales (SD)* y los tensores alternantes *anti-auto-duales (ASD)* respectivamente. Los correspondientes elementos, en el álgebra de Clifford $Cl(V) = \wedge V$, de los elementos (22) son:

$$f_1 = \frac{e_1 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_4}{2} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$f_2 = \frac{e_1 \cdot e_3 + e_4 \cdot e_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$f_3 = \frac{e_1 \cdot e_4 + e_2 \cdot e_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

Como las matrices $-\mathbf{i} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, -\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, son una base del álgebra de Lie de $SU(2)$ que es $Im(\mathbb{H})$, se tiene que $\wedge^2_+ V$ es justamente el álgebra de Lie de $SU(2)$, representada en $End(S^+)$ y además $\wedge_+ 2(V)$ actúa trivialmente sobre S^-. En particular se construye un isomorfismo de $\wedge^2_+ V$ a $\mathfrak{su}(S^+) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A* = -A, traza(A) = 0\}$; este isomorfismo es tal que preserva el producto interno de $\wedge^2_+(V)$ y el producto interno en $\mathfrak{su}(S^+)$, definido para $A, B \in su(S^+)$ como:

$$\langle A, B \rangle = \frac{traza(AB)}{2}.$$

Este isomorfismo se extiende a un isomorfismo de álgebras complejificadas:

$$\varrho : \wedge^2_+ V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to su(S^+) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(S^+) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : Traza(A) = 0\} \tag{27}$$

$$\begin{tikzcd} \wedge^2_+(V) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & su(S^+) \arrow[d] \\ \wedge^2_+(V)_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\varrho"] & sl(S^+) \end{tikzcd}$$

La aplicación

$$\eta : S^+ \otimes \bar{S}^+ \to \mathfrak{sl}(S^+) \oplus \mathbb{C} \tag{28}$$

,dada por $\eta(\phi,\bar{\eta}) = (\phi\otimes\bar{\eta} - \frac{traza(\phi\otimes\bar{\eta})}{2}) \oplus (\frac{traza(\phi\otimes\bar{\eta})}{2}) = (\phi\otimes\bar{\eta} - \frac{\langle\eta,\phi\rangle}{2}) \oplus (\frac{\langle\eta,\phi\rangle}{2})$, donde, $\phi\otimes\bar{\eta}$ es la matriz $\begin{pmatrix}\phi_1\bar{\eta}_1 & \phi_1\bar{\eta}_2\\ \phi_2\bar{\eta}_1 & \phi_2\bar{\eta}_2\end{pmatrix}$, es un isomorfismo entre espacios vectoriales, luego,

$$End(S^+) \approx S^+\otimes(S^+)^* \approx S^+\otimes\bar{S}^+ \approx sl(S^+)\oplus\mathbb{C} \approx \wedge^+V_{\mathbb{C}}\oplus\mathbb{C}. \tag{29}$$

5.2. La función cuadrática

Sí representamos un elemento $\varphi = \varphi_1 1 + \varphi_2 w_1\wedge w_2 \in S^+$, $\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{C}$, simplemente como $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\langle\varphi, e_1\cdot e_2\varphi\rangle &= \langle\varphi, e_3\cdot e_4\varphi\rangle = (\bar{\varphi}_1 \;\; \bar{\varphi}_2)\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = -i(\|\varphi_1\|^2 - \|\varphi_2\|^2),\\
\langle\varphi, e_1\cdot e_3\varphi\rangle &= \langle\varphi, e_4\cdot e_2\varphi\rangle = (\bar{\varphi}_1 \;\; \bar{\varphi}_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \bar{\varphi}_1\varphi_2 - \bar{\varphi}_2\varphi_1 = -2iIm(\varphi_1\bar{\varphi}_2)\\
\langle\varphi, e_1\cdot e_4\varphi\rangle &= \langle\varphi, e_2\cdot e_3\varphi\rangle = (\bar{\varphi}_1 \;\; \bar{\varphi}_2)\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = -i(\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \bar{\varphi}_2\varphi_1) = -2iRe(\varphi_1\bar{\varphi}_2),
\end{aligned}$$

donde $e_i\cdot e_j$ representa la acción de Clifford de $\wedge^2_+(V)\subset Cl(V)$ sobre S^+.

Lema 4. *La expresión $\sigma(\varphi) = -\frac{i}{4}\sum_{i<j}\langle\varphi, e_i\cdot e_j\varphi\rangle e_i\cdot e_j$, para $\varphi\in S^+$, es una 2-forma real y autodual sobre V.*

Demostración. Note que $4i\sigma(\varphi) = \langle\varphi, f_1\varphi\rangle f_1 + \langle\varphi, f_2\varphi\rangle f_2 + \langle\varphi, f_3\varphi\rangle f_3$, donde f_1, f_2, f_3 son la base de $\wedge^2_+(V)$, escrita en la Ecuación 22, luego, $\sigma(\varphi)$ es autodual y es real por que $\langle\varphi, f_j\varphi\rangle$, $j = 1,2,3$, es una expresión puramente imaginaria. □

Sea $\sigma : S^+\to\wedge^+(V)$, para $\varphi\in S^+$, en términos matriciales tenemos que:

$$\sigma(\varphi_1,\varphi_2) = i\begin{pmatrix}\dfrac{\|\varphi_1\|^2 - \|\varphi_2\|^2}{2} & \varphi_1\bar{\varphi}_2\\ \bar{\varphi}_1\varphi_2 & \dfrac{\|\varphi_2\|^2 - \|\varphi_1\|^2}{2}\end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta 29, tenemos que

$$\begin{array}{ccl}
S^+ & \to & S^+\otimes\bar{S}^+ \to \mathfrak{sl}(S^+)\\
\varphi & \to & \varphi\otimes\bar{\varphi} \quad \to \eta(\varphi,\bar{\varphi}) = -i\sigma(\varphi)
\end{array}$$

$$\sigma(\varphi) = i(\varphi\otimes\bar{\varphi} - \frac{\|\varphi\|^2}{2}Id) = i(\begin{pmatrix}\|\varphi_1\|^2 & \varphi_1\bar{\varphi}_2\\ \varphi_2\bar{\varphi}_1 & \|\varphi_2\|^2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\|\varphi\|^2 & 0\\ 0 & \|\varphi\|^2\end{pmatrix})$$

Corolario 6. *Para $\varphi \in S^+$, la expresión $[\varphi \otimes \varphi^* - \frac{\|\varphi\|^2}{2} Id]$ es auto-dual, puramente imaginaria y de traza cero.*

Definición 16. *La función $\sigma : S^+ \to \wedge^2_+ V$ se le denomina la **función o forma cuadrática** del espacio vectorial cuatrodimensional V.*

Proposición 20. *Sea $\sigma : S^+ \to \wedge^2_+(V)$, para $\varphi \in S^+$, se cumple:*

$$\|\sigma(\varphi)\|^2 = \frac{\|\varphi\|^4}{4} \tag{30}$$

$$\langle \sigma(\varphi)\varphi, \varphi\rangle = -\frac{i\|\varphi\|^4}{2} \tag{31}$$

$$\langle \varrho(w)\varphi, \varphi\rangle = -2i\langle \varrho(w), \sigma(\varphi)\rangle, \tag{32}$$

donde $w \in \wedge^2_+(V)$ y $\varrho : \wedge^2_+(V) \otimes \mathbb{C} \to \mathfrak{sl}(S^+)$ es la Función 27.

Demostración: En $\mathfrak{su}(2)$ la norma es inducida por el producto interno, luego,
$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2} traza(AB)$.

$$\|\sigma(\varphi)\|^2 = \frac{-2\sum_{i<j} \langle \varphi, e_i \cdot e_j\varphi\rangle^2}{16} =$$

$$\frac{(\|\varphi_1\|^2 - \|\varphi_2\|^2)^2 + 4Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2)^2 + 4Re(\varphi_1\bar{\varphi}_2)^2}{4} = \frac{(\|\varphi_1\|^2 - \|\varphi_2\|^2)^2 + 4\|\varphi_1\|^2\|\varphi_2\|^2}{4}$$

$$\frac{(\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2)^2}{4} = \frac{\|\varphi\|^4}{4}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(\varphi)\varphi, \varphi\rangle &= \langle -\frac{i}{4}\sum_{i<j} \langle \varphi, e_i \cdot e_j\varphi\rangle e_i \cdot e_j\varphi, \varphi\rangle \\
&= -\frac{i}{4}\sum_{i<j} \langle \varphi, e_i \cdot e_j\varphi\rangle\langle e_i \cdot e_j\varphi, \varphi\rangle \\
&= \frac{i}{4}\sum_{i<j} \langle \varphi, e_i \cdot e_j\varphi\rangle\langle \varphi, e_i \cdot e_j\varphi\rangle \\
&= \frac{i}{4}\sum_{i<j} \langle \varphi, e_i \cdot e_j\varphi\rangle^2 = -\frac{i}{2}\|\varphi\|^4
\end{aligned}$$

Un elemento $\varrho(w) \in \wedge^2_+ V_{\mathbb{C}} \approx \mathfrak{sl}(S^+)$ es de la forma $\rho(w) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$, y $f_1, f_2, f_3 \in \mathfrak{su}(S^+)$ como en la Ecuación 22 . Como

$$4i\sigma(\varphi) = \langle \varphi, f_1\varphi\rangle f_1 + \langle \varphi, f_2\varphi\rangle f_2 + \langle \varphi, f_3\varphi\rangle f_3$$

entonces,

$$\begin{aligned}\langle \rho(w)\varphi, \varphi\rangle = \bar{\varphi}\overline{\rho(w)}^t\varphi &= \bar{\varphi}(-\bar{\alpha}_1 f_1 - \bar{\alpha}_2 f_2 - \bar{\alpha}_3 f_3)\varphi \\ &= -(\bar{\alpha}_1\bar{\varphi}f_1\varphi + \bar{\alpha}_2\bar{\varphi}f_2\varphi + \bar{\alpha}_3\bar{\varphi}f_3\varphi) \\ &= -(\bar{\alpha}_1\langle\varphi, f_1\varphi\rangle + \bar{\alpha}_2\langle\varphi, f_2\varphi\rangle + \bar{\alpha}_3\langle\varphi, f_3\varphi\rangle);\end{aligned}$$

por otra parte, como los elementos f_1, f_2, f_3 son ortonorgales y de norma $\sqrt{2}$, entonces,

$$\begin{aligned}\langle \rho(w), 4i\sigma(\varphi)\rangle &= \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3, \sigma(\varphi)\rangle \\ &= \bar{\alpha}_1\langle\varphi, f_1\varphi\rangle\|f_1\|^2 + \bar{\alpha}_2\langle\varphi, f_2\varphi\rangle\|f_2\|^2 + \bar{\alpha}_3\langle\varphi, f_3\varphi\rangle\|f_3\|^2 \\ &= 2(\bar{\alpha}_1\langle\varphi, f_1\varphi\rangle + \bar{\alpha}_2\langle\varphi, f_2\varphi\rangle + \bar{\alpha}_3\langle\varphi, f_3\varphi\rangle);\end{aligned}$$

luego, $\langle\rho(w)\varphi, \varphi\rangle = -2i\langle\rho(w), \sigma(\varphi)\rangle$. □

5.3. Representación spin compleja

Proposición 21. *La representación spin* $\triangle_S : Spin(4) \to Aut(\mathbb{C}^4)$*, de la Definición 13, envía a* $Spin(4)$ *en* $SU(2) \times SU(2)$*.*

Demostración: El grupo matricial $SU(2)$ es generado, como grupo multiplicativo, por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta - i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta\end{pmatrix},$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$.

Como $Spin(4) = \langle\{\cos t + \sin t e_i e_j : t \in [0, 2\pi], 1 \leq i < j \leq 4\}\rangle \subset Cl_4$, los elementos $\triangle_S(e_i), i \in \{1, 2, 3, 4\}$, son las matrices de Pauli, entonces, por cálculo directo tenemos que:

$$\triangle_S(\cos t + \sin t e_1 e_2) = \begin{pmatrix}\cos t - i\sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t + i\sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t + i\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t - i\sin t\end{pmatrix}$$

$$\triangle_S(\cos t + \sin t e_3 e_4) = \begin{pmatrix}\cos t + i\sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t - i\sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t + i\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t - i\sin t\end{pmatrix}$$

$$\triangle_S(\cos t + \sin t e_1 e_3) = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t\end{pmatrix},$$

$$\triangle_S(\cos t + \sin t e_2 e_4) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\triangle_S(\cos t + \sin t e_1 e_4) = \begin{pmatrix} \cos t & -i\sin t & 0 & 0 \\ -i\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & i\sin t \\ 0 & 0 & i\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$\triangle_S(\cos t + \sin t e_2 e_3) = \begin{pmatrix} \cos t & -i\sin t & 0 & 0 \\ -i\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -i\sin t \\ 0 & 0 & -i\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Este cálculo junto con la observación inicial, implica la proposición deseada. □

Como $Cl_4 \otimes \mathbb{C}$ es isomorfo al espacio vectorial $M_4(\mathbb{C})$ (de matrices 4×4 con entradas complejas), entonces, **la representación spin compleja** $\triangle_S$, en términos matriciales de un elemento $u \in Spin(4)$ está dada por

$$u = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}),$$

donde $A_\pm \in SU(2)$.

Como $S^+ = \mathbb{C}^2 \times (0,0)$ y $S^- = (0,0) \times \mathbb{C}^2$, u actúa sobre $s_+ \in S^+$, y $s_- \in S^-$ como

$$\triangle_S \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}(s_+) = A_+ s_+, \quad \triangle_S \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}(s_-) = A_- s_-.$$

Las matrices $A_\pm \in M_2(\mathbb{C})$, son las representaciones matriciales de las transformaciones $\triangle_S^\pm$ definidas sobre $End(S^+)$.

Recordemos que en términos matriciales todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \subset Cl_4 \otimes \mathbb{C} \approx M_4\mathbb{C}$ es de la forma

$$x = \begin{pmatrix} 0 & \bar{Q_x}^t \\ Q_x & 0 \end{pmatrix},$$

donde $Q_x = x_1 I + x_2 \mathbf{i} + x_3 \mathbf{j} + x_4 \mathbf{k} \in \mathbb{H}$.

La función *spin* $\rho : Spin(4) \to SO(4)$, está dada por $\rho_u(x) = uxu^{-1}$, para $u = (A_+, A_)) \in Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ y $x \in \mathbb{R}^4$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_u(x) = ux\bar{u} &= \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{Q}_x^t \\ Q_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_+^t & 0 \\ 0 & \bar{A}_-^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A_+ \bar{Q}^t \bar{A}_-^t \\ A_- Q \bar{A}_+^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{A_- Q \bar{A}_+^t}^t \\ A_- Q \bar{A}_+^t & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego, el representante matricial de $\rho_u(x)$ en el álgebra de los Cuaterniones $\mathbb{H}$ es $A_- Q \bar{A}_+^t$.

5.4. El grupo $\mathbf{Spin^c}(4)$

Recordemos que $Spin^c(4) = (Spin(4) \times S^1)/\mathbb{Z}_2 = (SU(2) \times SU(2) \times S^1)/\mathbb{Z}_2$.
Sea $f : SU(2) \times SU(2) \times S^1 \to U(2) \times U(2)$, dada por $f(A_+, A_-, \lambda) = (\lambda A_+, \lambda A_-)$, para, $(A_+, A_-, \lambda) \in SU(2) \times SU(2) \times S^1$; $Ker(f) = \{(A_+, A_-, 1), (-A_+, -A_-, -1)\} \approx \mathbb{Z}_2$.
Luego $Spin^c(4) = (SU(2) \times SU(2) \times S^1)/\mathbb{Z}_2 = f(SU(2) \times SU(2) \times S^1) = \big\{(\check{A}_+, \check{A}_-) \in U(2) \times U(2) : det(A_+) = det(A_-)\big\} = \{(\lambda A_+, \lambda A_-) : A_+, A_- \in SU(2), \lambda \in U(1) = S^1\} =$

$$Spin^c(4) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} : A_+, A_- \in SU(2), \lambda \in U(1) = S^1 \right\} \tag{33}$$

La función $\rho : Spin(4) \to SO(4)$ puede ser extendida a una función $\check{\rho} : Spin^c(4) \to SO(4)$ definida como:

$$\check{\rho} \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} (Q) = A_- Q (A_+)^{-1};$$

la cual coincide con la presentada en el caso general.
También existe un homomorfismo de grupos $det : Spin^c(4) \to U(1)$, dado por $det(\lambda A_+, \lambda A_-) = \lambda^2$. Por último, el grupo $Spin^c(4)$ actúa sobre S_+ y S_- como:

$$\check{\triangle}_S \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} (s_+) = A_+ s_+, \quad \check{\triangle}_S \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} (s_-) = A_- s_-.$$