Grafos en la educación básica

Carlos Vergel Pacheco
Profesor Secretaria de Educación del Distrito
Bogotá D.C, Colombia
caparoja17@hotmail.com

Armando Echeverry Gaitán
Profesor Universidad Pedagogica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
aecheverri@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

El presente trabajo es una propuesta para introducir la teoría de grafos en la educación básica. Consta de tres actividades, las cuales fueron aplicadas de manera experimental en un grupo de estudiantes de grado octavo. Contiene una revisión de los aspectos matemáticos de la teoría de grafos incorporados la secuencia de actividades, una revisión de los aspectos didacticos en la que se examina la pertinencia del tema para la educación básica, la reflexión acerca de la aplicación de la propuesta, y un anexo con las actividades aplicadas.

1. Introducción

El presente articulo es un resumen del trabajo final presentado en la asignatura "Didáctica de la geometría"en el marco de la especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional en el segundo semestre de 2004. Es una secuencia de tres actividades para introducir la Teoría de Grafos, a estudiantes de grado octavo.

¿Por qué enseñar Teoría de Grafos en la educación básica? En primer lugar, el surgimiento histórico de la misma proporciona un excelente ejemplo de lo que significa la elaboración de un modelo matemático para el análisis de un problema real (el problema de los puentes de Könisberg resuelto por Euler) y sugiere un camino muy claro para organizar una secuencia didáctica encaminada a la práctica de la modelación. En segundo lugar, los contenidos y aplicaciones de la Teoría de Grafos están relacionados con muchos campos de la matemática (topología, combinatoria, matemática recreativa) y con otras disciplinas científicas (física, química, arquitectura, sociología). En tercer lugar, permite una presentación de los problemas en el marco de la matemática recreativa, lo que le da a los mismos una fuerte componente de motivación para los estudiantes.

A continuación presentaremos los aspectos matemáticos que enmarcan la secuencia de actividades trabajada, los aspectos didácticos que tomamos de referente, unos comentarios acerca de los resultados las actividades aplicadas y un anexo con las actividades.

2. Aspectos matemáticos

Ore(1963) describe de la siguiente manera un grafo

> Está constituido por ciertos puntos A, B, C, D, E y F, llamados *vértices* y ciertos segmentos que unen pares de vértices, tales como AC, ED, etc., y que son los *lados* -o aristas- del grafo (Fig 1)

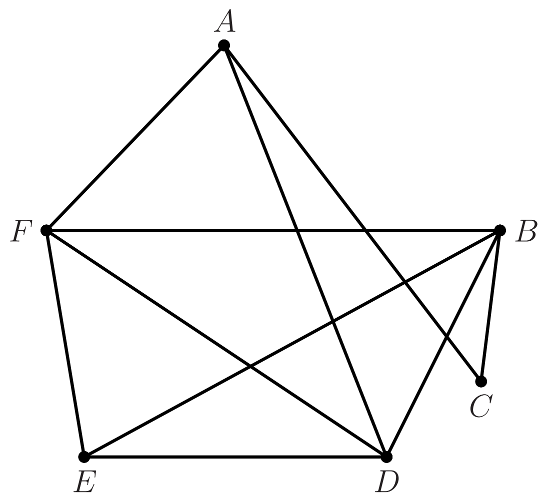


Figura 1

Esta es una idea muy general para hacer una primera aproximación intuitiva. Sin embargo existen grafos que constan únicamente de vértices aislados (grafo vacío), y grafos en los cuales las aristas pueden tener una dirección definida a la manera de un vector (grafo orientado).

Los aspectos característicos que definen un grafo en particular son aquellos que permanecen invariantes a los estiramientos y todo tipo de deformaciones elásticas (transformaciones topológicas). A manera de ilustración podríamos decir: Si dibujamos un triángulo sobre una trozo de hule rectangular y jalamos de alguna de las esquinas de la lamina, el dibujo podría seguir representando una figura de tres lados, pero no es el mismo triángulo que presentamos originalmente, pues algunos de sus aspectos característicos en la geometría euclidea como la amplitud de sus ángulos o la longitud y rectitud de sus lados han variado considerablemente. No ocurre así con los grafos pues en estos no importan los ángulos, ni la longitud o forma de los lados del grafo, en cambio son relevantes aspectos como: la conectividad entre vértices, la cantidad de lados que convergen en un vértice, la cantidad de aristas y de vértices, y en un grafo orientado, la dirección de las aristas, y estos no varían si se aplican estiramientos o contracciones de la representación del grafo. Por ejemplo los grafos de la figura 2 se llaman isomorfos pues sus rasgos característicos como grafos permanecen invariantes (6 vértices, 9 aristas, y el orden de la conectividad)

En este trabajo nos limitamos un tipo especifico de grafo, grafo conexo no orientado, en el cual todos sus vértices están conectados por medio de aristas (no hay vértices aislados). De esta clase de grafo interesa, para efectos del cumplimiento de los objetivos de la secuencia de actividades, el criterio para determinar si un grafo es recorrible o no recorrible, es decir, si partiendo de un punto puede recorrerse cada una de las aristas pasando por todas ellas una sola vez. En Teoría de Grafos, conviene establecer si un grafo constituye un circuito euleriano, semieuleriano, o no euleriano, Menendez (1998) presenta la definición de estos circuitos de la siguiente manera:

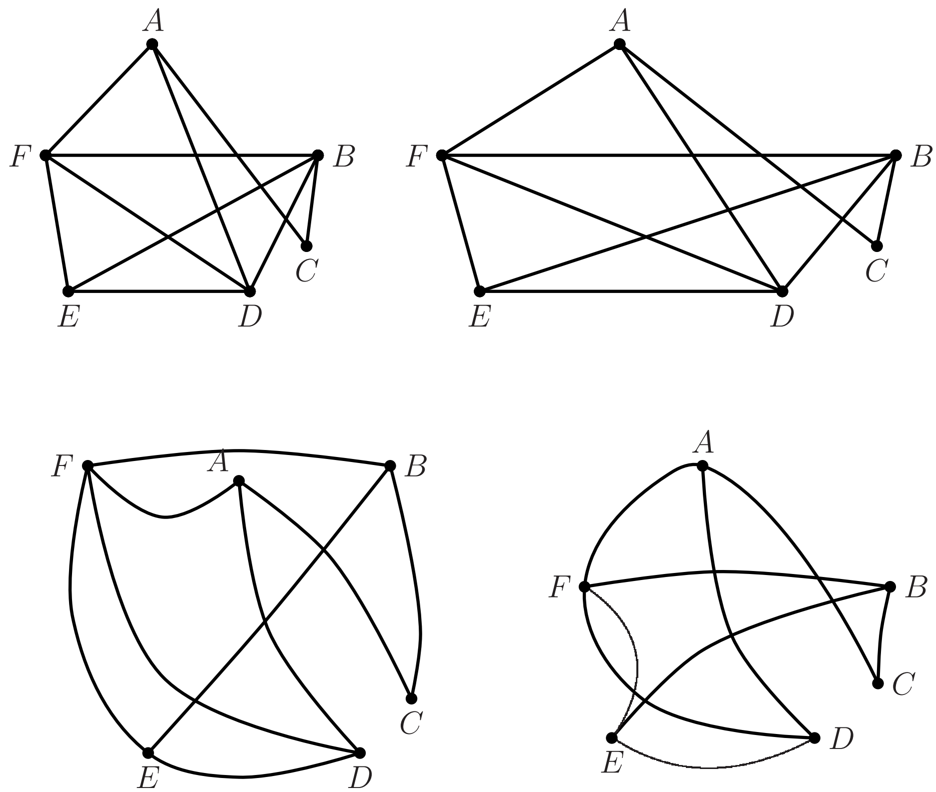


Figura 2

- *"Si todos los vértices del grafo tienen valencia par (...) se puede recorrer el grafo de una sola pasada y volver al punto de partida. En este caso, la ruta o circuito se denomina euleriano y el grafo en cuestión se denomina euleriano*

- *Si el grafo tiene dos vértices con un número impar de aristas concurrentes, se le puede recorrer partiendo de uno de esos vértices y llegando al otro. A la ruta seguida en este caso se le denomina ruta semieuleriana y al grafo correspondiente grafo semieuleriano*

- *Si el grafo tiene más de dos vértices con un número impar de aristas concurrentes. El problema no tiene solución. El grafo en cuestión es un grafo no euleriano"*

3. Aspectos didácticos

Dos supuestos dan un marco desde el punto de vista de la psicología cognitiva para introducir la Teoría de Grafos, la cual puede verse como topología en una dimensión, en el nivel de educación básica. El primero formulado por Piaget sobre la manera como los niños construyen sus nociones espaciales, afirma que las primeras intuiciones espaciales son de tipo topológico, es decir, intuiciones sobre las propiedades globales del espacio independientes de la forma, el color y el tamaño. Después, los niños distinguen las propiedades proyectivas y euclideas alcanzando un equilibrio por lo general de los nueve a diez años.

El segundo, previsto en las corrientes constructivistas considera que, el niño adquiere los conocimientos por un proceso de construcción, producto de sus acciones y no por la recepción pasiva de información. La nociones intuitivas de carácter topológico se han formado gracias a la acción de experiencias vividas en forma espontánea en la vida cotidiana, en las cuales no hay una intención educativa como aquellas que se han programado en el currículo escolar.

Desde el punto de vista de la educación matemática, fundamentamos la propuesta en la perspectiva de la geometría escolar propuesta por Usiskin, que se cita en los Estándares curriculares(2003):

> *“**La geometría como estudio del mundo real y físico, o como la ciencia del espacio.** Dimensión, cuyos inicios como herramienta para describir y medir figuras, ha evolucionado como una teoría de ideas y métodos que construye y estudia modelos idealizados del mundo físico y otros fenómenos idealizados del mundo real. De acuerdo con diferentes puntos de vista, se pueden mencionar las geometrías euclidiana, afín, descriptiva y proyectiva; también la topología y las geometrías no euclidianas.”*

Nos identificamos con esta perspectiva pues, como señalamos en la introducción, nos interesa enfatizar la relación que existe en la Teoría de Grafos entre las situaciones reales y su representación matemática.

4. Propuesta

Actividad I (Ver anexo 1)

En esta actividad sabemos que los estudiantes no tienen un conocimiento formal de la Teoría de Grafos, pero suponemos que están en capacidad de tratar de representar mediante un grafo una situación que se les plantea. El objetivo de esta actividad era hacer una introducción informal a los tópicos de la Teoría de Grafos que queríamos desarrollar con la secuencia de actividades(grafos conexos recorribles y no recorribles) mediante una adaptación del problema del cartero chino, un clásico problema en el cual se presenta una parte de un plano de una ciudad y el cartero debe recorrer calles y carreras entregando la correspondencia en determinados puntos, haciendo el recorrido más corto posible.

Al proponer la actividad a un grupo de estudiantes de grado octavo el objetivo solo se alcanzo parcialmente en la fase de trabajo individual, queríamos que los estudiantes representaran la ruta optima del cartero mediante un grafo para introducir este tema, varios de los estudiantes encontraron las rutas optimas, pero al enunciar el punto cuatro falto claridad respecto a lo que se pedía (que el recorrido del cartero se representará mediante puntos y líneas-un grafo-) y la mayoría de ellos repitieron el dibujo de los planos. Esto se puede mejorar formulando mejor la pregunta

Al preguntarles ¿Cuales de los planos parecían más sencillos para encontrar una ruta optima? la primera asociación que hicieron de ruta optima y plano del conjunto es con base en la percepción de la cantidad de bloques, pero después de experimentar sobre los planos la búsqueda de la ruta y de discutir en grupo sus resultados concluyen que el mejor criterio para la ruta optima es no repetir bloque ni camino.

Actividad II (Ver anexo 2)

Esta actividad estaba pensada para que los estudiantes reconocieran los elementos constitutivos de los grafos conexos no orientados, trabajarán concretamente sobre su representación particularmente haciendo conteo de recorridos, y encontrando recorridos específicos en misma. Se les presentaban dos grafos con tres vértices y uno con seis aristas y el otro con cinco, y se formulaban unas preguntas acerca de la cantidad de caminos para ir de un punto a otro, y de caminos para ir y volver entre dos puntos, posteriormente debían encontrar una palabra oculta donde los vértices eran las letras y las aristas las conexiones entre estas (esta actividad fue tomada con autorización de los autores del "Calendario Matematico")

Aparece nuevamente un razonamiento basado en la percepción inmediata de los elementos del grafo, la mayoría de los estudiantes (cerca de 20) señalan que el número de caminos para ir desde a A hasta B es guiados por el criterio que el grafo presenta 5 aristas. Pero nuevamente el trabajo concreto sobre la representación, en este caso la búsqueda de los caminos en el grafo les permite encontrar otras posibilidades y llegar a la conclusión correcta que el grafo tiene 6 rutas para este recorrido

Contestar al punto de cuantos caminos de ida y vuelta presenta el grafo requiere de un razonamiento combinatorio cuidadoso, aquí otra vez guiados por una generalización basada en lo aparente contestaron que eran 12 caminos de ida y vuelta, simplemente duplicando los caminos de ida de los cuales ya tenían certeza eran 6, pero aun después de invitarlos a hacer un mejor conteo, algunos encontraron los 36 caminos.

El hecho que los errores al responder por lo que aparenta ser el grafo haya sido extendido, y que la contrastación con forma ordenadas de estudiarlo haga evidente el error permite el cumplimiento cabal del primer objetivo propuesto realizar enumeraciones y recuentos de las trayectorias en un grafo"pues surge como una necesidad para prevenir errores a los que puede inducir un razonamiento superficial.

El segundo punto captó vivamente el interés en su desarrollo pues se presentaba como un desafío el encontrar la palabra y su grafo, aquí después de establecer cual era la palabra identificaban una letra que fuera característica de la misma y la buscaban para encontrar a cual grafo correspondía, el hacer el recorrido del grafo ya resultaba elemental.

Actividad III (Ver anexo 3)

En esta actividad el objetivo era que los estudiantes establecieran mediante la exploración y organización de la información el criterio para cuando un grafo es recorrible o no recorrible, se les presentaban 7 grafos los cuales tienen circuitos eulerianos, semieulerianos, o no eulerianos, después de recorrerlos debían de completar una tabla en la cual estaba discriminada la información de la paridad de los vértices y la clasificación si el grafo era recorrible o no recorrible, a partir de esta información se les pedía formular un criterio para determinar si un grafo es recorrible o no y hacer una predicción con este criterio de esta característica (recorribilidad) en otros 7 grafos, luego someterlo a prueba.

La mayoría llegó a la conclusión que los grafos que presentaban todos sus vértices pares eran recorribles, pero no plantearon claramente que cuando tiene mas de dos vértices impares no es recorrible, simplemente asumieron que la presencia de la mayoría de vértices impares era condición suficiente para que el grafo no fuese recorrible.

Cuando se les pidió el criterio para que un grafo fuese recorrible, la mayoría lo confundió con la descripción de lo que significa ser recorrible (trazar una línea sin levantar el lápiz), aquí la confusión puede atribuirse a la manera en que fue planteado el punto en la actividad.

5. Conclusiones

El diseño de esta secuencia de actividades presenta unas deficiencias en la manera en que formula algunas de las cosas que se pide a los estudiantes que hagan, específicamente en la actividad uno la elaboración del grafo de la ruta del cartero y en la actividad tres el establecer un criterio para saber si el grafo es recorrible o no

Las actividades resultaron retadoras e interesantes para su desarrollo por parte de los estudiantes, lo cual constituye un principio básico para el desarrollo de cualquier actividad de enseñanza-aprendizaje

Los estudiantes aprendieron la terminología básica de los grafos y lograron establecer un criterio básico (el de ruta euleriana) para determinar si un grafo es recorrible

Es posible trabajar contenidos de topología y grafos a nivel comprensible para estudiantes de educación básica, garantizando la comprensión de los contenidos por parte de los mismos.

Bibliografía

[1] BETH, E.; PIAGET, J., *Epistemología matemática y psicología.* Editorial critica, Barcelona, (1968).

[2] DIENES, Z., *Topología, geometría proyectiva y afín.* Editorial Teide, BARCELONA, 1967.

[3] MENÉNDEZ, A. *Una breve introducción a la teoría de grafos.* SUMA, N° 28,11-26. (1998).

[4] ORE, O., *Teoría y aplicaciones de los gráficos.* Editorial norma, 1963.

[5] PIAGET, J., *Psicología y Epistemología.* Emecé Editores, 1972a.

[6] PIAGET, J., *Estudios de psicología genética.* Emecé Editores, 1972b.

[7] SAMPER, C.; CAMARGO, L.; LEGUIZAMON, C., *Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2003.

[8] ZULUAGA, C., *Calendario Matemático*. Colombia Aprendiendo.

Anexo 1

Actividad I

Objetivos

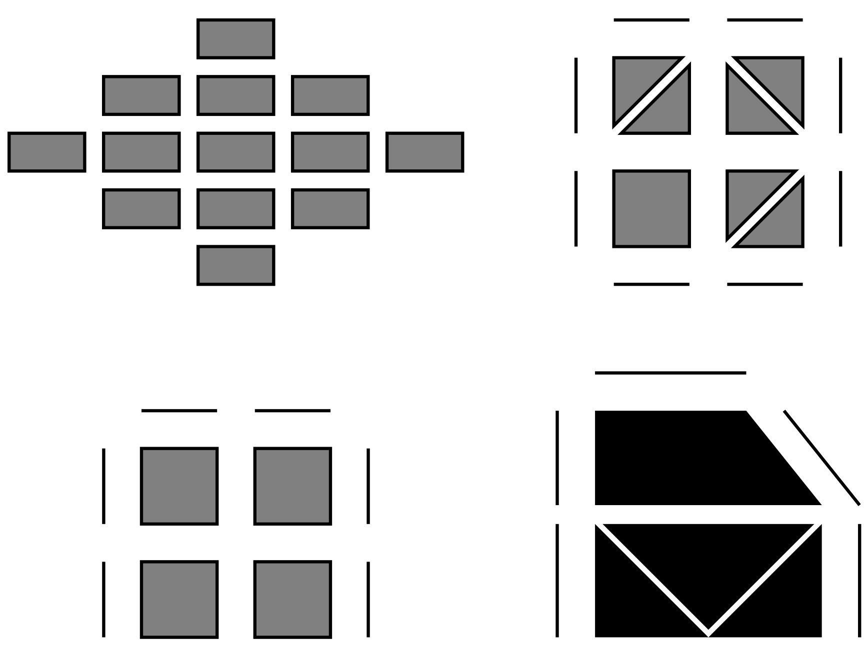
- Elaborar representaciones diagramáticas de situaciones reales.
- Representar el grafo de una correspondencia entre conjuntos.

Resumen

Como suponemos que los estudiantes no saben que es un grafo proponemos a los estudiantes situaciones las cuales pueden ser representadas mediante grafos para su mejor comprensión y se sugiere este tipo de representación

Actividad

A) Los siguientes son los planos de conjuntos residenciales que debe recorrer un mensajero para entregar una correspondencia. Ayúdale a encontrar una para recorrer todos los bloques con el menor esfuerzo posible



1. Si encontró una ruta que usted considera optima. ¿Por qué cree que es la mejor?

2. ¿En cuales de los casos es fue más fácil encontrar una ruta optima para el cartero?
3. Antes de buscar la ruta ¿Cuales de los planos parecían más sencillos para encontrar una ruta optima?
4. Intenta hacer una gráfica de los planos de los conjuntos residenciales utilizando puntos para representar las entradas y líneas para las calles

B) El problema de los noviazgos.

- María conoce a Andrés, Benito y Carlos
- Beatriz conoce a Benito y a Carlos
- Carmen conoce a Carlos, Esteban y Germán
- Daniela conoce a Andrés y Benito
- Elisa conoce a Andrés, Benito y Carlos.

5. Representa mediante puntos y líneas esta situación
6. ¿Es posible buscar un novio para cada mujer entre los hombres que conoce?

Preparen una exposición de las dos situaciones estudiadas

Anexo 2

Actividad II

Objetivos

- Realizar enumeraciones y recuentos de trayectorias en un grafo.
- Reconocer grafos recorribles y no recorrible

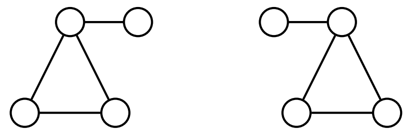
Resumen

En la actividad anterior los estudiantes desarrollaron algunas actividades para aproximarse de manera intuitiva a los grafos, en esta actividad se le presenta a los estudiantes una definición de grafo, una caracterización de los grafos en recorribles y no recorribles, y algunas situaciones en las cuales los estudiantes deben encontrar una línea euleriana o semieuleriana en grafos que representan palabras

Actividad

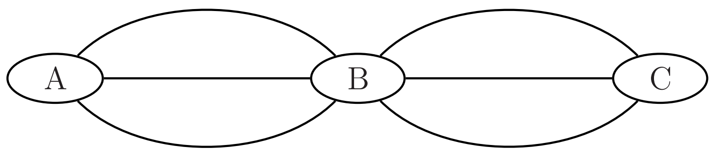
Definición geométrica

Geométricamente, un grafo es un conjunto de puntos llamados vértices, y un conjunto de líneas, llamadas aristas. Cada arista une dos vértices del grafo. Es importante advertir que un grafo contiene únicamente información sobre las conexiones entre los puntos, es decir, en un grafo, no interesa la medida de los

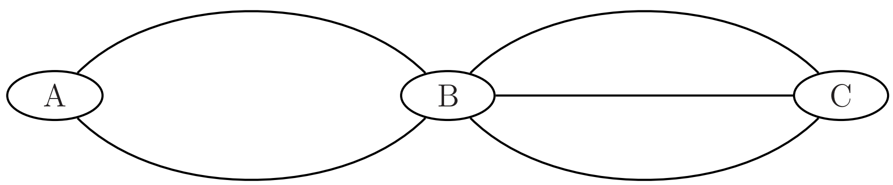


ángulos o la medida de las aristas, así, las figuras siguientes representan el mismo grafo:

1. El grafo siguiente se llama unicursal o recorrible, pues se puede recorrer de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin repetir arista. Un recorrido puede ser ABCBABC



Observa el grafo y responde:



- ¿Cuantos caminos posibles hay para ir de A hasta C?
- ¿Y para ir y volver?
- ¿Puedes recorrer el grafo de un solo trazo, sin levantar la mano ni repetir arista?

Anexo 3

Actividad III

Objetivos

- Identificar grafos recorribles y no-recorribles.
- Formular un criterio general para identificar grafos recorribles y no recorribles.

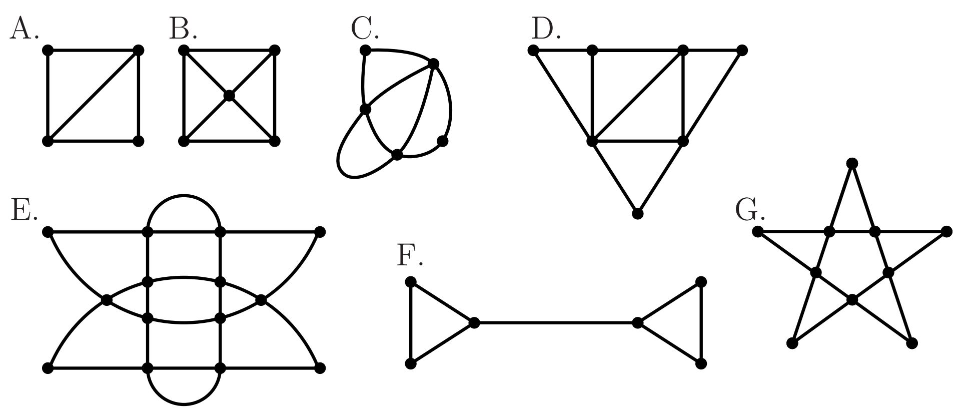
Resumen

En esta actividad los estudiantes deben estudiar las líneas de recorrido en algunos grafos, y con ayuda de una tabla que establece la clasificación de acuerdo a la cantidad de aristas que llegan a un vértice deben formular una conjetura acerca del criterio para definir si un grafo es recorrible o no recorrible

Actividad

Para realizar esta actividad deben trabajar en grupo de tres estudiantes. Deben entregar un reporte y preparar una exposición que recoja sus respuestas y todos los comentarios y explicaciones que consideren necesarias para justificar sus respuestas.

1. Comprueba si cada uno de los siguientes grafos es recorrible o no- recorrible. Completa la tabla.



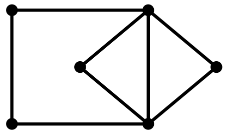
Antes de completar la tabla es necesario tener presente, que se considera un vértice par si a el llega un número par de aristas, y se considera impar si a él confluye un número impar de aristas.

N° grafos	N° de vértices pares	N° de vértices impares	Grafo recorrible	Grafo no recorrible
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				

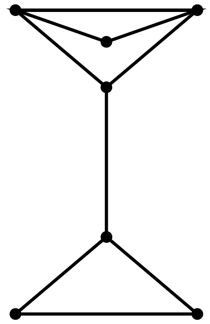
2. Analicen los datos de la tabla y establezcan un criterio para determinar cuando un grafo es recorrible.

3. Utilizando el criterio que establecieron en el punto anterior, digan cuales de los siguientes figuras son recorribles. Justifiquen para cada caso su respuesta.

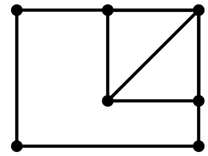
1.



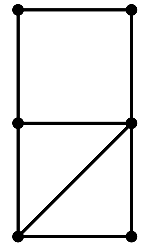
2.



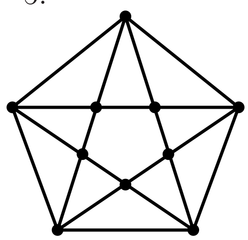
3.



4.



5.



6.