Construcción de cuadrados mágicos a partir de geometrías finitas[1]

Milton Rodríguez Santos
Profesor Universidad del Tolima
Ibagué, Colombia
milrod33@mixmail.com

Resumen

El objetivo fundamental de este Trabajo es elaborar un algoritmo generador de cuadrados mágicos de orden cinco, mediante aplicación de resultados obtenidos en geometría finita.

1. Metodología

El punto de partida será el espacio afín $\mathbb{A}(Z_5^2)$. Construiremos una geometría sobre el conjunto Z_5^2, a partir de la estructura de espacio afín; introduciremos nociones básicas tales como punto, recta, plano y paralela. Además, proporcionaremos un modelo gráfico para ilustrar esta "nueva geometría". Posteriormente definimos cuadrado mágico como una función, con el fin de investigar —en el lenguaje matemático de las funciones— las causas de aquella «magia». Estas *funciones mágicas* tendrán dominio Z_5^2 y, por algunas características encontradas, en su estudio se infiltrarán resultados obtenidos en la geometría finita construida. Así se logra, finalmente, demostrar unos teoremas que fundamentan un algoritmo que permite construir más de 10.000 cuadrados mágicos de orden cinco.

2. Introducción

Los *cuadrados mágicos* son ordenaciones de los números enteros $1, 2, \ldots n^2$ en un cuadrado de n casillas de lado, de tal forma que la suma de los elementos de cada una de sus filas, columnas y diagonales dé el mismo resultado. La siguiente figura muestra un cuadrado mágico de orden tres.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 1. Cuadrado mágico de orden tres.

Construir este cuadrado sólo requiere un poco de habilidad calculista y algo de desocupación. Pero tratar de elaborar, por ensayo y error, un cuadro de orden cinco es una labor

[1]Ponencia presentada en el XV encuentro de geometría y III de aritmética.

más complicada. Como dato de interés sabemos que existen 880 cuadrados mágicos de orden cuatro.

Por otro lado, la *geometría finita* es, a grandes rasgos, la disciplina que estudia nociones geométricas sobre un conjunto finito de puntos.

Este Trabajo mostrará cómo aplicar elementos de una geometría construida sobre un espacio afín finito para elaborar un algoritmo que permita construir cuadrados mágicos de orden cinco. Contendrá los siguientes capítulos: Una Geometría Plana Finita, Estudio de los Cuadrados Mágicos y Algoritmo Generador de Cuadrados Mágicos.

En este estudio se introdujo, por comodidad, algunos términos nuevos[2]; adicionalmente, se demostraron varios resultados novedosos[3], los cuales soportan matemáticamente el algoritmo presentado en el Trabajo.

En este capítulo se proporcionan elementos algebraico-geométricos para abordar el estudio de los cuadrados mágicos. El componente fundamental es el campo Z_5. En 1.1 se estudia el espacio afín $\mathbb{A}(Z_5^2)$. En 1.2 se construye el plano afín sobre Z_5 y además se presenta un modelo gráfico que ilustra la geometría resultante.

3. Espacio afín $\mathbb{A}(Z_5^2)$

En este sección estudiamos brevemente el espacio vectorial Z_5^2 sobre Z_5, el espacio afín $\mathbb{A}(Z_5^2)$ y las transformaciones lineales y afines.

3.1. Espacio vectorial

El conjunto de las clases residuales $Z_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ con la suma y producto módulo 5 tiene estructura de campo ([3], pág. 109). Por consiguiente, el conjunto $Z_5^2 = Z_5 \times Z_5$ dotado con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \alpha(x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2),\ \alpha \in Z_5\end{aligned}$$

tiene estructura de espacio vectorial ([3], pág. 124). Evidentemente, los elementos de Z_5^2 se denominan *vectores* y los de Z_5, *escalares*. En lo sucesivo se omitirá el "sobrerrayado" para los elementos de Z_5.

3.2. Espacio afín

Esta sección se desarrolló con base en [5], cap. 5.

Definición 1. Sea $\mathbb{A}$ un subconjunto no vacío de un espacio vectorial $\mathfrak{V}$. Se dice que $\mathbb{A}$ es un *espacio afín* con espacio diferencia $\mathfrak{V}$, y se escribe $\mathbb{A}(\mathfrak{V})$, si para cualquier par de puntos P y Q de $\mathbb{A}$ esta asociado un vector $\overrightarrow{PQ}$:

- Para todo $P \in \mathbb{A}$ y todo $V \in \mathfrak{V}$ existe un único $Q \in \mathbb{A}$ tal que $V = \overrightarrow{PQ}$;

[2]Entre ellos, rectas mágicas, función mágica y transformación mágica.
[3]Teoremas 8, 10, 11, 11.1, 12, 13, 14 y 15.

- Dados tres puntos $P, Q, R \in \mathbb{A}$ se cumple $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

La *dimensión* del espacio $\mathbb{A}(\mathfrak{V})$ se define como la dimensión de su espacio diferencia.

Un espacio vectorial es, en si mismo, un espacio afín donde $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ([5], pág. 96). Para los fines de nuestro estudio consideraremos el espacio vectorial Z_5^2 como el espacio afín $\mathbb{A}(Z_5^2)$.

Definición 2. Se dice que $\mathbb{A}_0(\mathfrak{V}_0)$ es un *subespacio afín* de $\mathbb{A}(\mathfrak{V})$ si $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}$ y $\mathbb{A}_0(\mathfrak{V}_0)$ es espacio afín.

Teorema 1. *Si* $\mathbb{A}_0(\mathfrak{V}_0)$ *es un subespacio afín, entonces* $\mathfrak{V}_0 = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in \mathbb{A}_0\}$.

Demostración. Ver [3], pág. 97. $\boxdot$

Un subespacio afín $\mathbb{A}_0$ es la traslación de un subespacio vectorial $\mathfrak{V}_0$ ([3], pág. 98). En otras palabras, $\mathbb{A}_0 = P + \mathfrak{V}_0 = \{P + V_0 \mid V_0 \in \mathfrak{V}_0\}$.

Definición 3. Sea $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ un subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}(\mathfrak{V})$ se llama *combinación afín* de $\mathcal{X}$ a toda expresión de la forma $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k$ donde $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. El conjunto de todas las combinaciones afines de $\mathcal{X}$ se llama *generado afín* de $\mathcal{X}$ y se representa por $\mathrm{aff}(\mathcal{X})$.

3.3. Transformaciones

Sean $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ espacios vectoriales sobre un mismo campo y $T : \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{W}$ una transformación lineal. La función T restringida al dominio $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{V}$ se llama *restricción de* T en $\mathcal{A}$ y se escribe $T|_{\mathcal{A}}$. En el siguiente teorema, $N_{\mathcal{A}}(T) = \{X \in \mathcal{A}_{(\mathfrak{V})} \mid T(X) = O$ donde $\mathcal{A}_{(\mathfrak{V})} = \{\overrightarrow{XY} \mid X, Y \in \mathcal{A}\}$; el vector $\overrightarrow{XY} = Y - X$ es la resta en $\mathfrak{V}$.

Teorema 2. $T|_{\mathcal{A}}$ *es inyectiva si y sólo si* $N_{\mathcal{A}}(T) = O$

Demostración. Se debe probar que

I. $T|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva $\Longrightarrow N_{\mathcal{A}}(T) = O$

II. $N_{\mathcal{A}}(T) = O \Longrightarrow T|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva.

I. Por hipótesis, existe un único $X \in \mathcal{A}$ tal que $T(X) = O$; mientras que por linealidad, $T(O) = O$. Luego, $N_{\mathcal{A}}(T) = \{O\}$.
II. Sea $X, Y \in \mathcal{A}$. Recuérdese que $X - Y \in \mathcal{A}_{(\mathfrak{V})}$. Si $T(X) = T(Y)$, por linealidad, $T(X - Y) = O$ de donde $X = Y$. Luego, $T|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva. $\boxdot$

Teorema 3. *Sea* $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$ *una base para* Z_5^2. *Dados los elementos arbitrarios* U_1 *y* U_2 *de* Z_5^2, *existe una única transformación lineal* $T : Z_5^2 \longrightarrow Z_5^2$ *tal que* $T(\boldsymbol{e_i}) = U_i$; $i = 1, 2$.

Demostración. Ver [1], pág. 55. $\boxdot$

Sean $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ y $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}')$ dos bases ordenadas para Z_5^2. Toda transformación lineal $T : Z_5^2 \longrightarrow Z_5^2$ da origen a una matriz 2×2 cuyas filas son los vectores $T(\boldsymbol{e_1})$ y $T(\boldsymbol{e_2})$ en base $\mathcal{B}'$. Ésta se llama *representación matricial* de T respecto a las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y se denota por $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Este Trabajo únicamente utilizará la base canónica: $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = ((1,0),(0,1))$ y se omitirá los subindices en $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Se puede demostrar ([1], pág 57) que si $[T] = (\alpha_{ij})_{2\times 2}$, entonces la imagen mediante T de cualquier punto $X = (x_1, x_2)$ es

$$T(x_1, x_2) = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2, \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2)$$

Usualmente esta relación se escribe como el producto matricial $T(X) = XA$, donde $A = [T]$. Cabe anotar que si T es biyectiva entonces $\det[T] = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$.

Definición 4. Una *transformación afín* es una función $M : Z_5^2 \longrightarrow Z_5^2$ que preserva las combinaciones afines

Teorema 4. *M es una transformación afín si y sólo si $M(X) = T(X) + H$, donde H es un vector y T es una transformación lineal.*

Demostración. Ver [5], pág. 72. $\boxdot$

4. Plano afín sobre Z_5

En esta sección se construye una geometría a partir del espacio afín finito $\mathbb{A}(Z_5^2)$.

4.1. Rectas y puntos

Para hacer geometría necesitamos conocer sus elementos fundamentales.

Definición 5. Los subespacios afines de $\mathbb{A}(Z_5^2)$ de dimensión 0, 1 y 2 se llamarán *puntos*, *rectas* y *plano*, respectivamente.

Naturalmente, el plano es el conjunto Z_5^2 y los puntos, sus elementos. La recta l que pasa por los puntos $P \neq Q$ es ([3], pág. 99) el generado afín de P y Q, esto es, $l = \text{aff}(P, Q)$.

Teorema 5. *Si l es una recta, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $l = \text{aff}(P, Q)$ *(recta afín)*
2. $l = \{X = P + tV \mid t \text{ en } Z_5\}$ *(recta vectorial)*
3. $l = \{(x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0$[4]$\}$. *(recta cartesiana)*

[4]Esta ecuación se puede obtener con $\det(X, \overrightarrow{PQ}) = \det(P, \overrightarrow{PQ})$.

Demostración. Es consecuencia de la definición de recta. $\boxdot$

Dada la recta $l = \text{aff}(P, Q)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ se llama *dirección* de la recta. Nótese que el conjunto $\mathfrak{V}_0 = \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$ es el *generado lineal* de $\overrightarrow{PQ}$.

Definición 6. Dos rectas son *paralelas* si no tienen puntos en común.

Definición 7. Se llamarán *horizontales* y *verticales* a las rectas paralelas a aquellas de dirección $(1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Las *oblicuas* seran aquellas que no sean horizontales ni verticales.

Obsérvese que, por ejemplo, si M está dada por $M(x, y) = (3x + 4y, x + 2y)$ entonces $M[\{(1, 3), (1, 1), (3, 0)\}] = \{(0, 2), (2, 3), (4, 3)\}$. En lo sucesivo, para indicar que una función f transforma el conjunto $\mathcal{A}$ en el conjunto $\mathcal{B}$, escribiremos $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Teorema 6. *Las transformaciones afines biyectivas transforman rectas en rectas y paralelas en paralelas.*

Demostración. Sea M una transformación afín biyectiva. Por definición 3, $M[\text{aff}(P, Q)] = \text{aff}[M(P),\ M(Q)]$. Luego, M transforma rectas en rectas. Sean $l \parallel m$ dos rectas; por biyectividad de M, $M(l \cap m) = M(l) \cap M(m)$ y como $l \cap m = \varnothing$, entonces $M(l) \cap M(m) = \varnothing$. Por lo tanto, $M(l) \parallel M(m)$. $\boxdot$

A manera de motivación mencionaremos algunos resultados (véase [3], pág. 107), análogos a los de geometría clásica, que son válidos en esta geometría afín:

- Dada una recta existe por lo menos un punto que no esta sobre ella.
- Dos puntos distintos determinan una única recta.
- Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.
- Dos rectas no paralelas se intersectan en un único punto.

4.2. Modelo gráfico

El plano Z_5^2 será representado por dos segmentos perpendiculares (en sentido usual) e interceptados en sus extremos iniciales. Cada segmento tendrá cinco unidades de longitud, donde cada unidad identificará un elemento de Z_5. Llamaremos *eje* X al segmento horizontal y *eje* Y, al vertical (ver figura 1).

-Gráfica de puntos. Para graficar un punto (x, y) ubicamos sus componentes x e y en los ejes X e Y, respectivamente; luego, se procede a hallar la intersección de sus proyecciones como muestra la figura 2.

-Gráfica de rectas. Motivados por la gráfica de las rectas (que evidentemente es la gráfica de sus puntos, ver figura 3) introducimos la siguiente definición.

Definición 8. Se llamarán *rectas visibles* a las horizontales, verticales y a las rectas $\text{aff}((0, 0), (4, 4))$ y $\text{aff}((4, 0), (0, 4))$. Obsérvese que en la gráfica de estas rectas todos sus puntos están "conectados" entre sí. Las ecuaciones cartesianas de las dos últimas rectas de la definición son $y = x$ y $y = 4 - x$.

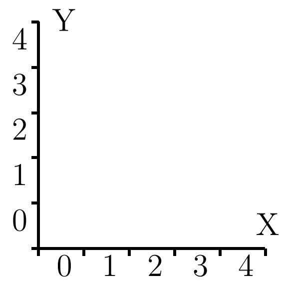


Figura 2. Gráfica del plano Z_5^2.

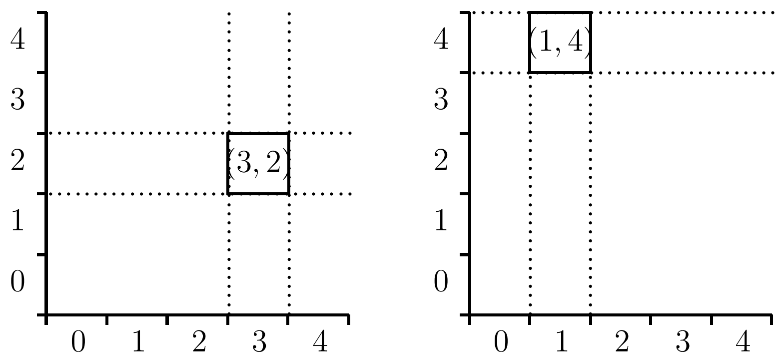


Figura 3. Gráfica de puntos.

5. Estudio de los cuadrados mágicos

En esta secciøn se estudian los cuadrados mágicos de orden cinco en términos de funciones, con el fin de descubrir misterios presentes en su construcción. En 2.1 presentamos un "nuevo" concepto matemático de estos cuadrados. En 2.2 se demuestran teoremas que facilitan la construcción de cuadrados mágicos de orden cinco

6. Cuadrados mágicos

Definición 9. Un *cuadrado mágico* de orden n es una distribución de los números enteros $1, 2, \ldots, n^2$ en un cuadrado de n celdas de lado, de tal manera que los elementos de cada una de sus filas, columnas y diagonales sumen un valor constante.

Teorema 7. *El valor constante de la suma de las filas, columnas y diagonales de todo cuadrado mágico de orden cinco es 65.*

Demostración. La suma de todos los elementos 1, 2, ..., 25 de un cuadrado mágico de orden cinco es 325. Estos números están distribuidos en cinco filas (o cinco columnas)

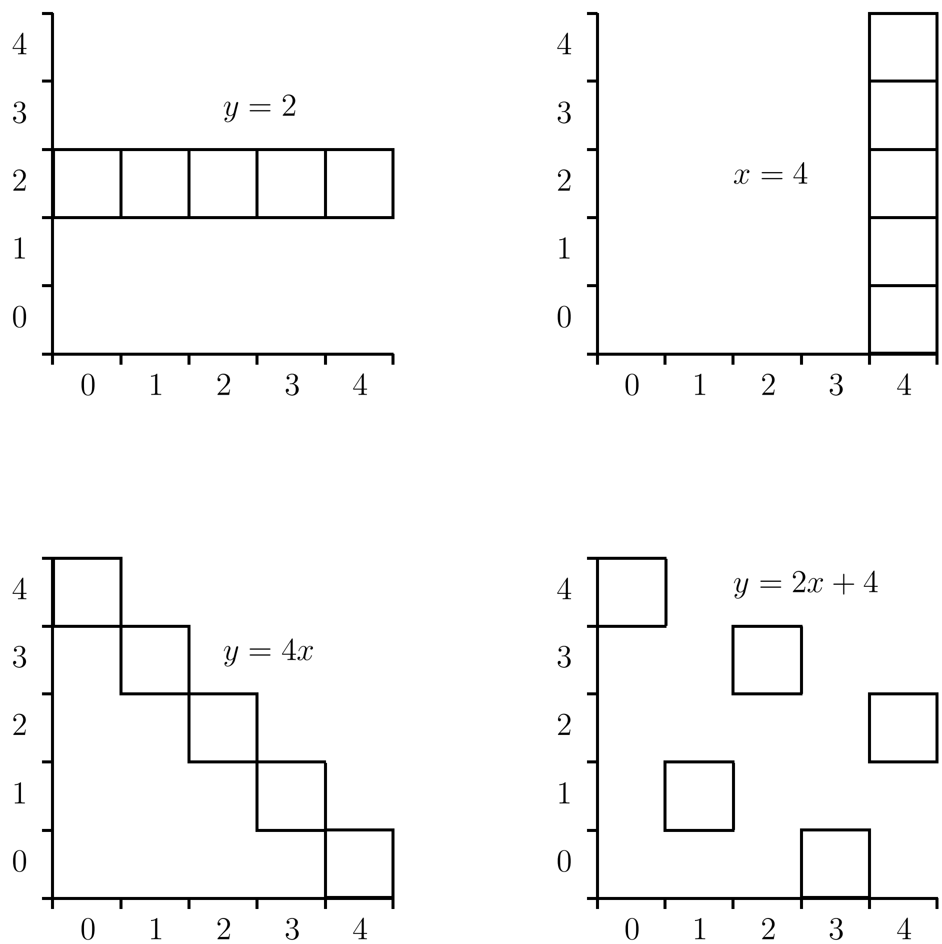


Figura 4. Gráficas de rectas.

y como todas tienen igual suma, entonces para cada fila (o columna) sus componentes suman 65. Esto indica que la constante del cuadrado mágico de orden cinco es 65. $\boxdot$

Definición 10. Sea $J : Z_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ la inyección canónica $J(\overline{x}, \overline{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$ y sea $h : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ una función cualquiera. Llamaremos *función entera* a la composición $f = h \circ J$. La función h se llamará *generatriz* de f. Nótese que $h \circ J : Z_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

La representación gráfica de una función entera consistirá en asignar a cada punto (x_0, y_0) el valor $f(x_0, y_0)$. Esta gráfica es, como podemos ver (figura 2.2), una distribución de 25 números enteros en un casillero de cinco celdas de lado. Esta característica sugiere la siguiente definición.

Definición 11. Se llamará *función mágica* a toda función entera cuya representación gráfica sea un cuadrado mágico de orden cinco.

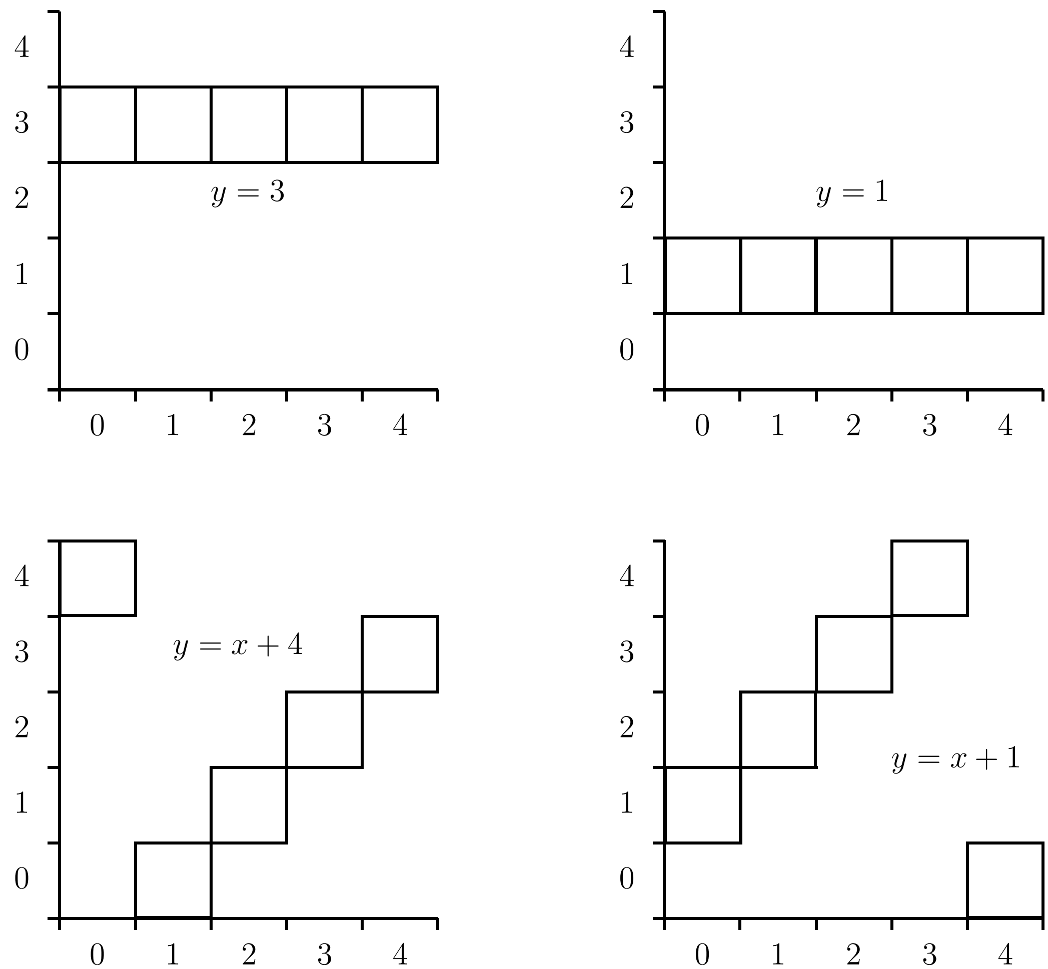


Figura 5. Gráfica de rectas paralelas.

Teorema 8. *La función entera f es mágica si y sólo si*

- $\operatorname{cod}(f) = \{t \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq t \leq 25\}$
- *f es biyectiva*
- *Si l es una recta visible, entonces* $\sum_{P \in l} f(P) = 65$.

Demostración. Por la definición 11, una función entera f es función mágica cuando su gráfica es un cuadrado mágico de orden cinco El codominio de f es $\{1, 2, \dots, 25\} = \{t \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq t \leq 25\}$ porque éstos números se distribuyen en los cuadrados mágicos; como no existen casillas con elementos iguales, la función debe ser biyectiva.

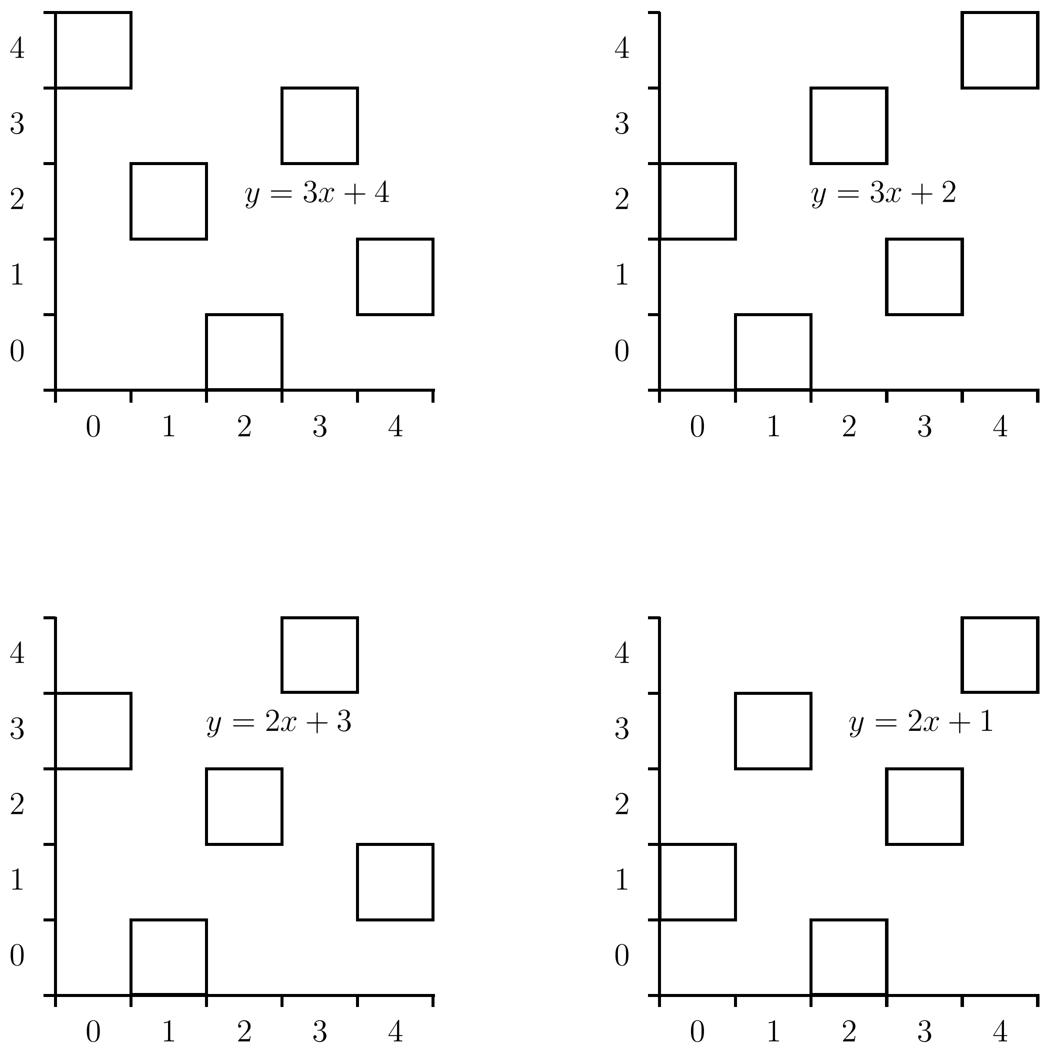


Figura 6. Otras rectas paralelas.

Puesto que las filas, columnas y diagonales del cuadrado son rectas visibles entonces, por el teorema 7, afirmamos que: Las imágenes, mediante f, de los puntos sobre una recta visible suman 65. Simbólicamente,

$$\sum_{P \in l} f(P) = 65, \text{si } l \text{ es recta visible.}$$

Por otro lado, si la función f no cumple alguna de las condiciones de este teorema, entonces su gráfica no es un cuadrado mágico. $\boxdot$

El teorema anterior «reduce» el problema de construir cuadrados mágicos de orden cinco a la búsqueda de funciones enteras que cumplan las condiciones allí enunciadas.

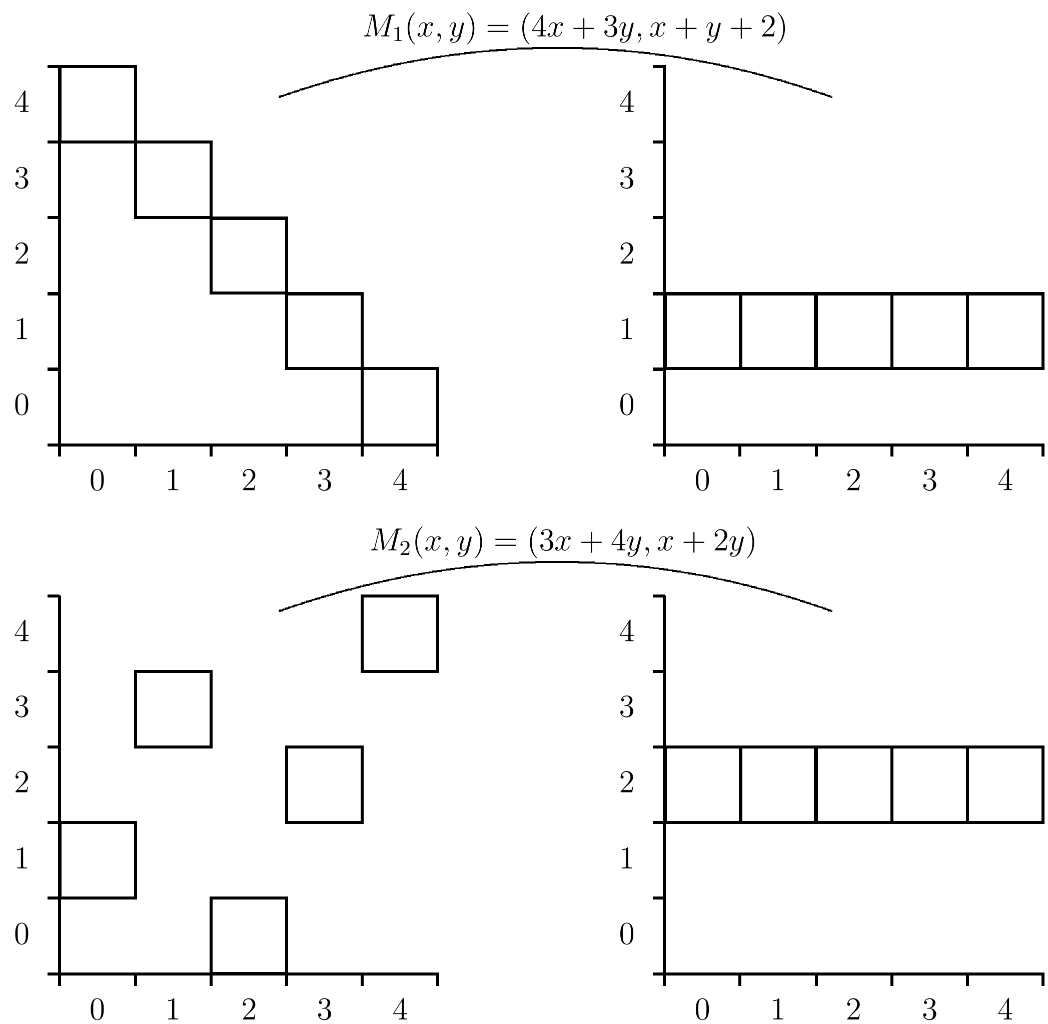


Figura 7. Efectos de algunas transformaciones afines biyectivas sobre rectas

7. Buscando los misterios de la magia

En esta sección se investigará las propiedades de algunas funciones involucradas en la construcción de cuadrados mágicos de orden cinco. Para empezar se identificará con un nombre especial a las funciones enteras que cumplen las dos primeras condiciones del Teorema 8.

Definición 12. Se llamará *función semimágica* a toda función entera g biyectiva con codominio $\{t \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq t \leq 25\}$. Si g esta dada por un polinomio de grado uno, entonces

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Figura 8. Un cuadrado mágico de orden cinco.

4	13	19	25	31	37
3	10	16	22	28	34
2	7	13	19	25	31
1	4	10	16	22	28
0	1	7	13	19	25
	0	1	2	3	4

Figura 9. Gráfica de la función entera $f(x, y) = 6x + 3y + 1$.

se denominará *semimágica simple*.

Naturalmente, las funciones mágicas son un subconjunto de las funciones semimágicas, y este último tiene 25**!** elementos (aproximadamente 15 cuatrillones!!!). En el presente Trabajo sólo se estudiarán las semimágicas simples.

Teorema 9. *Sea M una transformación afín biyectiva. La composición $g \circ M$ es función semimágia si y sólo si g es función semimágica.*

Demostración. Es consecuencia de las definiciones de composición e inyectividad (*Aclaración:* Debemos probar que $g \circ M : Z_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ es inyectiva si y sólo si $g : Z_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ es inyectiva, sabiendo que $M : Z_5^2 \longrightarrow Z_5^2$ es biyectiva.) $\boxdot$

Ejemplo. Si las funciones $Z_5^2 \xrightarrow{M} Z_5^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$ estan dadas por $g(x, y) = 7x + 3y + 6$ y $M(x, y) = (x + y, 2x + 1)$ entonces la composición $f = g \circ M$ viene dada por $f(x, y) =$

$7(\underline{x+y}) + 3(\underline{2x+1}) + 6$, donde los subrayados identifican el cálculo aritmético módulo cinco: así, el valor de $f(1,4)$ es 9.

Definición 13. Sea g una semimágica simple y M una transformación afín biyectiva. Si $g \circ M$ es una función mágica, la función M se denominará *transformación mágica*.

Según esta definición, para construir algunas funciones mágicas —y, en consecuencia, cuadrados mágicos— es necesario hacer la composición de semimágicas simples y transformaciones mágicas. Las dos siguientes subsecciones están dedicadas a hallar características de estas funciones.

7.1. Hacia las *semimágicas simples*

Teorema 10. *La función entera $f(x,y) = ax + by + c$ es inyectiva si y solo si $(|a/d|, |b/d|) \notin J(Z_5^2)$, donde $d = \text{mcd}(a,b) \neq 0$.*

Demostración. Ver [4], pág. 26. ⊡

Teorema 11. *La función entera $f(x,y) = ax + by + c$ tiene como codominio a $\{t \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq t \leq 25\}$ si y solo si $|2a + 2b + c - 13| \leq 12 - |2a| - |2b|$.*

Demostración. Ver [4], pág. 26. ⊡

Corolario 11.1. *Si $f(x,y) = ax + by + c$ es una función entera con codominio $\{t \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq t \leq 25\}$, entonces $|a| + |b| \leq 6$.*

Demostración. Por el teorema anterior tenemos $0 \leq 12 - |2a| - |2b|$, que es equivalente a $|a| + |b| \leq 6$. ⊡

Teorema 12. *La función entera $f(x,y) = ax + by + c$ es semimágica simple si y solo si*

- $\big||a| - 3\big| = 2$
- $|a| + |b| = 6$
- $2a + 2b + c = 13$.

Demostración. Ver [4], pág. 27. ⊡

7.2. Hacia las *transformaciones mágicas*

Las siguientes rectas deben el nombre a su relación con la constante mágica del cuadrado de orden cinco (ver teorema 13).

Definición 14. Se llamarán *rectas mágicas* a las rectas oblicuas y a las rectas dadas poraff$((2,0),(2,2))$ y aff$((0,2),(2,2))$. Las ecuaciones cartesianas de éstas dos últimas son $x = 2$ y $y = 2$, respectivamente.

Teorema 13. *Sea g una semimágica simple. La recta m es mágica si y solo si* $\sum\limits_{Q\in m} g(Q) = 65.$[5]

Demostración. Sea m una recta. Por el teorema 5, $m = \{(x(t), y(t)) \mid t \text{ en } Z_5\}$ donde x, y son funciones de $Z_5[t]$ determinadas por $x(t) = \rho_1 + t\nu_1$ y $y(t) = \rho_2 + t\nu_2$; así surge la identidad

$$\sum_{Q\in m} g(Q) = a\sum_{t=0}^{4} x(t) + b\sum_{t=0}^{4} y(t) + 5c \tag{1}$$

Sea $g(x, y) = ax+by+c$ una semimágica simple. Por el teorema 12, tenemos $10a+10b+5c = 65$. Esta igualdad junto con la identidad (1) aseguran que $\sum_{Q\in m} g(Q) = 65$ siempre y cuando

$$\sum_{t=0}^{4} x(t) = \sum_{t=0}^{4} y(t) = 10. \tag{2}$$

Luego, la demostración se reduce a probar que:

I. m es mágica $\Longrightarrow$ relación (2)

II. relación (2) $\Longrightarrow$ m es mágica.

I. Sea m una recta mágica. Si m es oblicua, $x(t)$ y $y(t)$ son biyectivas (porque $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$) forzando la validez de (2). Si m es horizontal ($(2, 2) \in m$), entonces $x(t)$ es biyectiva y $y(t)$ es constante igual a 2, implicando la igualdad (2). Similarmente, si m es vertical, (2) conserva su validez.

II. Supógase m no es recta mágica. Por la definición 14, m es una horizontal o vertical que no contiene a $(2, 2)$. Si m es horizontal entonces $y(t)$ es constante diferente de 2, porque $(2, 2) \notin m$; luego $\sum_{t=0}^{4} y(t) \neq 10$. Similarmente, si m es vertical $\sum_{t=0}^{4} x(t) \neq 10$. Esta contradicción indica que la suposición inicial es falsa, por lo tanto concluimos que m es recta mágica.

Así queda demostrado el teorema. $\boxdot$

Teorema 14. *Una transformación afín es transformación mágica si y sólo si lleva las rectas visibles en rectas mágicas.*

Demostración. Ver [4], pág. 29. $\boxdot$

Teorema 15. *La transformación mágica M esta dada por $M(X) = T(X) + H$, donde y $[T] = \left(\begin{smallmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{smallmatrix}\right)$ y $H = (\beta_1, \beta_2)$, si y solo si*

- *$[T]$ es no singular con entradas no nulas.*
- *Si la j-ésima columna de A tiene elementos opuestos o iguales, entonces $\beta_j = 2$ ó $\beta_j = \alpha_{1j} + 2$, $j = 1, 2$, respectivamente.*

[5]El símbolo Σ hace referencia a la suma usual en los reales.

Demostración. Ver [4], pág. 30. ⊡

El objetivo general del Trabajo se convirtió, según la definición 11, en la búsqueda de funciones mágicas. La definición 13 dice que algunas funciones mágicas son composiciones de semimágicas simples y transformaciones mágicas. Estas últimas están completamente determinadas por los teoremas 12 y 15, respectivamente. En el siguiente capítulo se elaborará un algoritmo generador de cuadrados mágicos de orden cinco en términos de las operaciones usuales entre números reales.

8. Algoritmo generador de cuadrados mágicos

Este capítulo está orientado al diseño de un algoritmo generador de cuadrados mágicos de orden cinco. Su soporte matemático esta dado en el capítulo anterior.

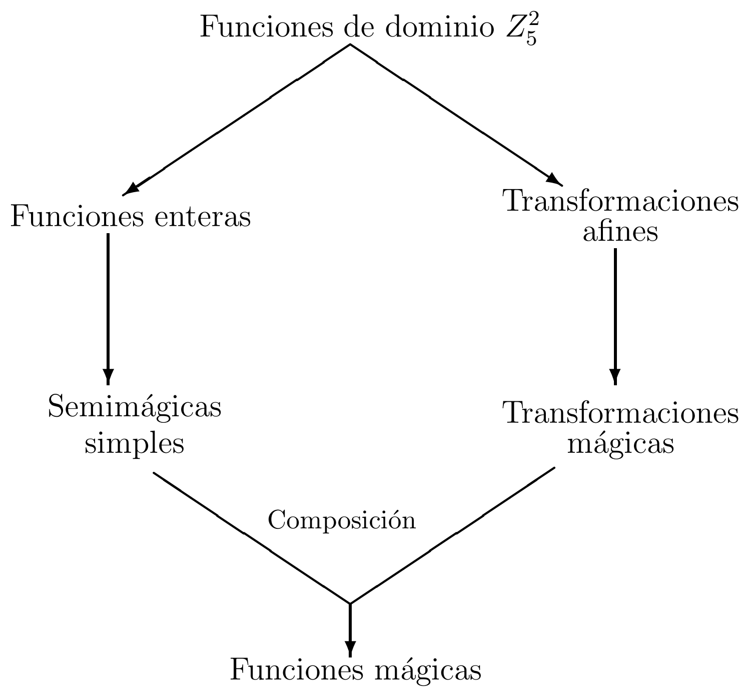
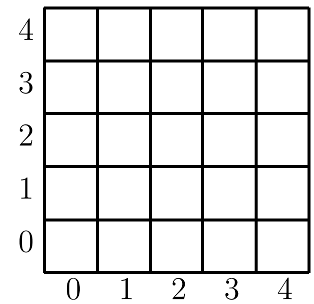


Figura 10. Diagrama de funciones relacionadas con la construcción de cuadrados mágicos.

9. Algoritmo de Milton

El siguiente es un procedimiento genera cuadrados mágicos de orden cinco. Las operaciones aritméticas formuladas en el algoritmo son las usuales entre números enteros.

Primer paso. Dibujar un casillero cuadrado de cinco casillas de lado y rotular sus columnas y filas como muestra la siguente figura. Identificamos con (x, y) la casilla ubicada en la columna x con fila y



Segundo paso. Construimos las matrices $M = \left(\begin{smallmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{smallmatrix}\right)$ y $N = (n_1\ n_2)$ con elementos de $\{0,1,2,3,4\}$ que cumplan las siguientes condiciones:

- M no tiene entradas nulas y $\det M$ no es múltiplo de 5.
- Si en la j-ésima columna de M sus elementos suman cinco o son iguales, entonces $n_j = 2$ ó $n_j = m_{1j} + 2$, $j = 1, 2$, respectivamente.

Tercer paso. Seleccionar los números a, b, c que satisfagan:

- $|a| = 5$ ó 1.
- $|b| = 6 - |a|$.
- $c = 13 - 2(a + b)$.

Cuarto paso. Con los valores escogidos en el segundo y tercer paso, construir la función $\boxed{f(x, y) = a(\underline{m_{11}x + m_{21}y + n_1}) + b(\underline{m_{12}x + m_{22}y + n_2}) + c}$.

Las operaciones subrayadas se calculan en módulo cinco.

Quinto paso. En el casillero del primer paso, ingresamos cada valor $f(x, y)$ en la casilla (x, y). De esta forma obtenemos un cuadrado mágico de orden cinco.

10. El algoritmo en acción

19	15	6	2	23
7	3	24	20	11
25	16	12	8	4
13	9	5	21	17
1	22	18	14	10

Figura 11. Cuadrado mágico generado por $f(x, y) = (\underline{x + 2y}) + 5(\underline{4x + 2y}) + 1$

9	20	1	12	23
15	21	7	18	4
16	2	13	24	10
22	8	19	5	11
3	14	25	6	17

Figura 12. Cuadrado mágico generado por $f(x,y) = -5(\underline{3x+y+4}) + (\underline{x+4y+2}) + 21$

13	7	1	25	19
4	23	17	11	10
20	14	8	2	21
6	5	24	18	12
22	16	15	9	19

Figura 13. Cuadrado mágico generado por $f(x,y) = -(\underline{x+y+3}) - 5(\underline{x+3y}) + 25$

12	16	25	4	8
9	13	17	21	5
1	10	14	18	22
23	2	6	15	19
20	24	3	7	11

Figura 14. Cuadrado mágico generado por $f(x,y) = 5(\underline{x+y+3}) + (\underline{4x+3y+4}) \ + \ 1$

Conclusiones

La geometría construida sobre un espacio afín finito (conjunto finito) definiendo los puntos, rectas y planos como subespacios afines tiene propiedades análogas a la geometría vectorial y cartesiana de $\mathbb{R}^2$.

Algunos cuadrados mágicos de orden cinco pueden ser estudiados mediante la aplicación de resultados obtenidos en éstas geometrías finitas.

La construcción de cuadrados mágicos puede ser traducida a la terminología de las funciones biyectivas entre conjuntos finitos.

Bibliografía

[1] APOSTOL, T., *Calculus.* Vol 2. Reverté: España, 1988, 814 p.

[2] FARRAR, M., *History of Magic Squares.* [En línea] [24 de noviembre de 2003]. Disponible en: http://www.markfarrar.co.uk/msqhst01.htm — 4 Kb.

[3] LENTIN y RIVAUD., *Álgebra Moderna.* 3 ed. Madrid: aguilar, 1971. 512 p.

[4] RODRÍGUEZ, M., *Aplicación de una Geometría Finita en Z_5^2 a la Construcción de Cuadrados Mágicos de Orden Cinco.* Tesis de Grado. Unversidad del Tolima. Ibagué, 2004.

[5] SPINDLER, K., *Abstract Algebra with Applications.* Vol I. Marcel Dekker: New York, 1994, 756 p.

[6] WARD, D., *Magic Squares.* [En línea] [Abril de 2003]. Disponible en: http://www.halexandria.org/dward090.htm — 119 Kb.

Anexos

Breve historia de los cuadrados mágicos[6]

El cuadrado mágico más antiguo se conoció en China alrededor del 2200 A.C. La leyenda dice que el emperador Yu vio a orillas del río Amarillo un cuadrado mágico 3×3 grabado en el caparazón de una tortuga, lo mandó a copiar en una tablilla de barro y se le llamó el *"lo-shu"*. Para los chinos, los números pares e impares son, respectivamente, el principio femenino y masculino del universo. En el cuadrado encontrado se distribuyen armoniosamente ambos principios, por esta razón atribuyeron propiedades místicas a tales objetos. Aunque éste puede ser el primer expediente, parece probable que en otras culturas, como la hindú, jugaron con números para tratar de hacer cuadrados mágicos.

En occidente, los cuadrados mágicos aparecen por primera vez en el año 130 D.C. en los trabajos de un astronomo griego llamado Teón.

Durante la edad media, en Europa los cuadrados mágicos eran patrimonio exclusivo de los representantes de las pseudo-ciencias, los alquimista y los astrólogos. Los usaban para predecir el futuro, curar enfermedades y como amuletos para prevenir maleficios. Incluso en algunas cortes europeas se grababan cuadrados mágicos en los platos para evitar posibles maleficios a los comensales. En las obras atribuídas a Paracelso, aparecen recomendaciones respecto a algunos cuadrados que podrían ser usados como talismanes. A comienzos del siglo XVI, Cornelius Agrippa construyó cuadrados mágicos de órdenes 3 al 9, los cuales asoció a los planetas Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Venus, Mercurio y Luna, respectivamente.

[6] Recopilación de [2] y [6].

En 1514, Durero pintó en su obra "Melancolia" un cuadrado mágico 4×4. También, Benjamin Franklin jugó con la construcción de cuadrados mágicos en 1736- 1737. Entre los matemáticos famosos que en los siglos XVI al XVIII se ocuparon de los cuadrados mágicos debemos mencionar a Stieffel, Fermat, Pascal y Euler. En el siglo XIX, importantes avances fueron obtenidos por Lucas, Tarry y Rouse Ball. Finalmente, en el siglo XX, la atención de los matemáticos que se ocuparon del tema, se centró en la estructura y la contabilización de los cuadrados, obteniéndose grandes resultados. El número de cuadrados mágicos de un orden dado es, todavía un problema sin solución. Es importante resaltar que no se han encontrado métodos generales para construir cuadrados mágicos de cualquier orden. ■