Colecciones cerradas para uniones

Carmen Pulido
Profesora Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
esarmiento@udistrital.edu.co

Edilberto Sarmiento
Profesor Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
esarmiento@udistrital.edu.co

Resumen

Se estudia para un conjunto X el conjunto ordenado formado por las colecciones cerradas para uniones con el orden de la contenencia, se hallan cotas para $|CU(X)|$, y se obtienen propiedades para las fibras de la función generado.

Algunas notaciones

A continuación se presentan algunas notaciones, definiciones y resultados basicos que se usan en las siguientes secciones.

Cuartetas de colecciones.

Sea X un conjunto, una colección $\mathcal{A}$ sobre X, es un elemento de $\wp^2(X)$, es decir $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$.

Si $\mathcal{A} \in \wp^2(X)$, la cuarteta de colecciones asociada con $\mathcal{A}$ es

$\mathcal{A}$	$c\mathcal{A}$
$\mathcal{A}c$	$c\mathcal{A}c$

$c\mathcal{A} = \wp(X) - \mathcal{A}$ $\qquad$ $\mathcal{A}c = \{B : cB = X - B \in \mathcal{A}\}$

$c\mathcal{A}c = \{B : cB \notin \mathcal{A}\} = \wp(X) - \mathcal{A}c.$

Sea $A \subseteq X$.

La colección de todos los subconjuntos de A se denota $\wp(A)$.

$$\wp(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

La colección de todos los hiperconjuntos de A es $\mathcal{H}(A)$.

$$\mathcal{H}(A) = \{B : A \subseteq B\}.$$

Resultado

1. $|\wp(A)| = 2^{|A|}$ $\qquad$ $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}c|$
2. $\mathcal{H}(A) = \wp(cA)c$ $\qquad$ $|\mathcal{H}(A)| = 2^{|X|-|A|}$.

La colección de subconjuntos de A de cardinal k se nota $\wp_k(A)$

$$\wp_k(A) = \{B \in \wp(A) : |B| = k\} \qquad 0 \leq k \leq |A|,$$

Si $\{A_k\}_{k\in I}$ es una coleccion de conjuntos disyuntos dos a dos, entonces

$$\left|\bigcup_{k\in I} A_k\right| = \sum_{k\in I} |A_k|.$$

La colección de subconjuntos de A de cardinal menor que k se nota $\wp_{\downarrow k}(A)$

$$\wp_{\downarrow k}(A) = \{B \in \wp(A) : |B| < k\}$$

La colección de subconjuntos de A de cardinal mayor que k se denota $\wp_{\uparrow k}(A)$

$$\wp_{\uparrow k}(A) = \{B \in \wp(A) : |B| > k\}$$

Resultado

1. $|\wp_k(A)| = \binom{|A|}{k}$.

2. $\wp(A) = \biguplus_{k=0}^{|A|} \wp_k(A)$.

Sean A y B conjuntos. $A \backsim B$ denota A es comparable con B, es decir $A \subseteq B$ *o* $B \subseteq A$

$\wp_*(X)$ denota la colección de subconjuntos no vacios de X.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son colecciones de conjuntos, $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ denota:

$\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} = \{A \cup B : A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{B}\}$.

Resultado

Si para cada $A \in \mathcal{A}$ y para cada $B \in \mathcal{B}$ $A \cap B = \emptyset$, entonces $|\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}|$.

1. Definición y ejemplos

1.1. Definición

Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{A}$ es cerrada para uniones de pares si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.

El conjunto formado por todas las colecciones cerradas para uniones de pares sobre X se denota por $CU(X)$.

1.2. Ejemplos sobre conjuntos finitos

Si $X = \emptyset$ entonces $CU(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Si $X = \{1\}$, entonces $CU(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, X\}, \{X\}\}$

Sea $X = \{1, 2\}$, $\wp(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,

$\wp^2(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\},$
$\{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{2\}\{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\},$
$\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \wp(X)\}$

Hay un total de 14 colecciones cerradas para uniones.

Las siguientes colecciones no son cerradas para uniones:

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}$.

1.3. Ejemplos sobre un conjunto arbitrario X

0. $\emptyset$, $\wp(X) \in CU(X)$.

1. $A \in \wp(X)$,$\wp(A) \in CU(X)$

2. $A \in \wp(X)$, $\mathcal{H}(A) \in CU(X)$

3. Sean A, B subconjuntos de X y $A \subseteq B$. La colección de todos los subconjuntos de X que están entre A y B notada $[A, B]$ es cerrada para uniones.

1.4. Proposición

1. Si una colección es cerrada para hiperconjuntos es cerrada para uniones.

2. Si $\mathcal{A} \in CU(X)$ y X es finito, entonces $\mathcal{A}$ tiene máximo.

3. Si $\mathcal{C} \in CH(X)$, $\mathcal{A} \in CU(X)$y $\text{mín}(\mathcal{C}) \subseteq \text{máx}(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \in CU(X)$.

$CH(X)$ denota el conjunto de todas las colecciones linealmente ordenadas o cadenas sobre X.

4.$CH(X) \subseteq CU(X)$.

5.$\wp_{\uparrow k}(X) \in CU(X)$, $0 \leq k < |X|$.

Demostración.

2. Toda colección finita tiene maximales. Supongamos que $A, B \in \text{máx}(\mathcal{A})$, entonces como $\mathcal{A} \in CU(X)$, $A \cup B \in \mathcal{A}$ y por A, B $\text{máx}(A)$, entonces $A \cup B = A, A \cup B = B$ y $A = B$.

1.5. Observación

Si $\wp_{\downarrow 2}(X) \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \in CU(X)$ entonces $\mathcal{A} = \wp(X)$.

1.6. Proposición

1. Si $\mathcal{A} \in CU(X)$, entonces $\mathcal{A}_* = \mathcal{A} - \{\emptyset\} \in CU(X)$.

2. Si $\mathcal{A} \in CU(X)$, $\emptyset \notin \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\} \in CU(X)$

3. Si X es finito $|CU(X)|$ es un número par.

Demostración.

3. Sean $CU_0(X) = \{\mathcal{A} \in CU(X) : \emptyset \notin \mathcal{A}\}$ y

$CU_1(X) = CU_0(X) \sqcup \{\emptyset\} = \{\mathcal{A} \cup \{\emptyset\} : \mathcal{A} \in CU_0(X)\}$.

$|CU_0(X)| = |CU_1(X)|$

$CU(X) = CU_0(X) \biguplus CU_1(X)$

$|CU(X)| = 2\,|CU_0(X)|$.

2. El conjunto ordenado $(CU(X), \subseteq)$

Debido a que el conjunto de colecciones cerradas para uniones esta contenido en el conjunto de partes de partes de X, $\wp^2(X)$, y este último esta ordenado por la inclusión, entonces $CU(X)$ hereda el mismo orden. En el siguiente apartado se enumeran algunas de las propiedades de este conjunto ordenado.

2.1. Proposición

1. El mínimo de $CU(X)$ es la colección $\emptyset$.

2. El máximo de $CU(X)$ es $\wp(X)$.

2.2. Proposición

Sea $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq CU(X)$, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i \in CU(X)$.

Demostración.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de colecciones de $CU(X)$.

$A, B \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow (\forall i \in I)(A, B \in A_i)$.

$\Longleftrightarrow (\forall i \in I)(A \cup B \in A_i)$ pues $\forall i, A_i \in CU(X)$

$\Longrightarrow A \cup B \in \underset{i\in I}{\cap} A_i$

Luego $\bigcap\limits_{i\in I} A_i CU(X)$.

2.3. Observación

La familia $CU(X)$ no siempre es cerrada para uniones de pares como se verifica con el siguiente ejemplo:

Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Las colecciones $A = \{\{1\}\}, B = \{\{2\}\}$ son cerradas para uniones pero

$A \cup B = \{\{1\}, \{2\}\}$ no es cerrada para uniones.

2.4. Proposición

1. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una cadena en $(CU(X), \subseteq)$, entonces $\underset{i\in I}{\cup} A_i \in CU(X)$.

2. El conjunto ordenado $(CU(X), \subseteq)$ posee elementos maximales.

$CU(X)\|_{2^{\|x\|}}$	$\wp(X)$
$CU(X)\|_{2^{\|x\|}-1}$	$\wp_*(X)$ $\{\wp(X) - \{\{a\}\} : a \in X\}$
$CU(X)\|_{2^{\|x\|}-2}$	$\{\wp_*(X) - \{\{a\}\} : a \in X\}$ $\{\wp(X) - \{\{a\}, \{b\}\} : a, b \in X\}$ $\{\wp(X) - \{\{a\}, \{a, b\}\} : a, b \in X\}$
$\vdots$ $\vdots$	
$CU(X)\|_3$	$\{\{A, B, C\} : \{A, B, C\}$ es una cadena$\}$ $\{\{A, B, A \cup B\} : A \nsim B\}$
$CU(X)\|_2$	$\{\{A, B\} : A, B \in \wp(X), A \backsim B\}$
$CU(X)\|_1$	$\{\{A\} : A \in \wp(X)\}$
$CU(X)\|_0$	$\emptyset$

2.5. Proposición

Sea $CINX = \{\mathcal{A} \in \wp^2(X) : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}\}$ la familia de colecciones cerradas para intersecciones.

1. $\mathcal{A} \in CU(X) \Longleftrightarrow \mathcal{A}c \in CIN(X)$

2.$|CU(X)| = |CIN(X)|$.

Demostración

1.)$\Longrightarrow$) $A, B \in \mathcal{A}c \Longleftrightarrow cA, cB \in \mathcal{A} \Longrightarrow cA \cup cB \in \mathcal{A} \Longrightarrow c(A \cap B) \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}c$

$\Longleftarrow)\ A, B \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow cA, cB \in \mathcal{A}c \Longrightarrow cA \cap cB \in \mathcal{A}c \Longrightarrow c(A \cup B) \in \mathcal{A}c \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

3. Algunas propiedades de las colecciones no cerradas para uniones

Una colección $\mathcal{A}$ es no cerrada para uniones si existen $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cup B \notin \mathcal{A}$.
Denotamos por $NCU(X)$ a la familia de todas las colecciones no cerradas para uniones sobre un conjunto X.

3.1. Ejemplos de colecciones no cerradas para uniones

1. Si $A, B \in \wp(X)$, A y B no son comparables, entonces $\{A, B\} \in NCU(X)$
2. Si $A \in \wp(X), |A| > 1, \quad \wp(A) - \{A\} \in NCU(X)$.
3. Si $A \in \wp(X), |A| < |X| - 1, \quad \mathcal{H}(A) - \{X\} \in NCU(X)$.
4.Si $\mathcal{A} \subseteq \wp_k(X),\ k < |X|, \quad |\mathcal{A}| \geq 2, \mathcal{A} \in NCU(X)$.
5. Si $\mathcal{A} \in \wp^2(X), \mathcal{A} \neq \wp(X)$ y $\wp_1(X) \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \in NCU(X)$.
6. Si $A, B \in \wp(X)$, A y B no comparables, entonces$\{A, B\} \cup \mathcal{D} \in NCU(X)$, donde $\mathcal{D} \in \wp(\wp(X) - \{A \cup B\})$.
7. Si $\mathcal{P}$ es una partición de $A \subseteq X, \mathcal{P} \in NCU(X)$.

3.2. Proposición

1. Si $A \in \wp_{\uparrow 1}(X)$, entonces $\mathcal{F}_A = \mathcal{H}(\wp_{\downarrow 2}(A)) - \mathcal{H}(\wp(A)) \in NCU(X)$.
2. Si A no es comparable con B, $\ A, B \wp_{\uparrow 1}(X)$, entonces $\mathcal{F}_A \neq \mathcal{F}_B$.
3. Si A no es comparable con B, $\ A, B \wp_{\uparrow 1}(X)$, entonces $\mathcal{F}_A \cap \mathcal{F}_B = \emptyset$..

Demostración.

1. Sea $\mathcal{B} \in \mathcal{H}(\wp_{\downarrow 2}(A)) - \mathcal{H}(\wp(A))$, entonces como $\mathcal{B} \neq \wp(A)$ existe $P \subseteq A$, y $P \notin \mathcal{B}$, como $\wp_{\downarrow 2}(A) \subseteq B, \{\{p\} : p \in P\} \subseteq \mathcal{B}$ y $\cup\{\{p\} : p \in P\} = P \notin \mathcal{B}$. luego $\mathcal{B}$ no es cerrada para uniones.
2. Si A no es comparable con B, entonces $\wp_{\downarrow 2}(A) \in \mathcal{F}_A$ pero $\wp_{\downarrow 2}(A) \notin \mathcal{F}_B$ pues $\wp_{\downarrow 2}(B) \nsubseteq \wp_{\downarrow 2}(A)$.
3. Sean A y B no comparables y $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_A$, entonces $\wp_{\downarrow 2}(A) \subseteq Q$, para cada $Q \in \mathcal{Q}$, existe $Q' = \wp_{\downarrow 2}(A) \in Q$, tal que$\wp_{\downarrow 2}(B) \nsubseteq \wp_{\downarrow 2}(A) = Q\prime$, así que $\mathcal{Q} \notin \mathcal{F}_B$ y $\mathcal{F}_A \cap \mathcal{F}_B = \emptyset$.

3.3. Proposición

Sea X un conjunto finito $|X| > 1$. Para cada $1 \leq k \leq n$, sea
$\mathcal{C}_k = \wp_{\uparrow 1}(\wp_k(X)) \sqcup \wp_*(\wp_{\downarrow k}(X)) = \{\mathcal{A} \cup \mathcal{B} : \mathcal{A} \in \wp_{\uparrow 1}(\wp_k(X))\ y\ \mathcal{B} \in \wp_*(\wp_{\downarrow k}(X))\}$
1.$\mathcal{C}_k \subseteq NCU(X)$.
2.Si $k \neq j, \ \mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$.
3. $\sum_{k=1}^{|X|} |\mathcal{C}_k| \leq |NCU(X)|$.
4. $\sum_{k=1}^{|X|} \left(2^{\binom{|X|}{k}} - \binom{|X|}{k} - 1\right) \left(2^{\sum_{j=0}^{k-1} \binom{|X|}{j}} - 1\right) \leq |NCU(X)|$.

Demostración.

1. Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_k$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, donde la colección de maximales de $\mathcal{F}$ con k elementos son $\mathcal{A}$ y $|\mathcal{A}| > 2$, esto implica que $\mathcal{F}$ no es cerrada para uniones.

2. Si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_j$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1$, y $F = \mathcal{A}_2 \cup B_2$, así que los maximales de $\mathcal{F}$ de cardinal k son $\mathcal{A}_1$ y los cardinales de $\mathcal{F}$ de orden j son $\mathcal{A}_2$ con $k \neq j\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ no vacíos lo cual es una contradicción.

3. Es claro pues la unión $\bigcup_{k=1}^{|X|} \mathcal{C}_k$ es disyunta..

4. $|\mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_j| = |\wp_{\uparrow 1}(\wp_k(X))|\, |\wp_*(\wp_{\downarrow k}(X))| = \left(2^{\binom{|X|}{k}} - \binom{|X|}{k} - 1\right)\left(2^{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{|X|}{j}} - 1\right)$

Sean $A, B \in \wp(X)$, denotamos por $\mathcal{P}_{AB}$ a la colección $\wp(\wp(X) - \{A, B, A \cup B\})$ y escribimos $A \nsim B$ para denotar que A no es comparable con B es decir $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$.

3.4. Proposición

$NCU(X) = \{\{A, B\} \cup \mathcal{D} : \mathcal{D} \in \mathcal{P}_{AB} \;\; y \;\; A, B \in \wp(X) \;\; y \;\; A \nsim B\}$

Demostración.

$\Longrightarrow)$ $\mathcal{A} \in NCU(X) \Longleftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{A} \wedge A \cup B \notin A$

$\Longrightarrow \{\{A, B\}D : DPABA, B(X)\}$

$\Longleftarrow)$ $A \in \cup\{\{A, B\} \cup \mathcal{D} : D \in \mathcal{P}_{AB} \wedge A, B \in \wp(X)\}$

$\Longrightarrow \exists A, B \in \wp(X), \mathcal{A} = \{A, B\} \cup \mathcal{D}, \;\; A, B, A \cup B \in \mathcal{D} \;\; y \;\; A \nsim B.$

$\Longrightarrow \exists A, B \in \mathcal{A} \wedge A \cup B \notin \mathcal{A}.$

3.5. Nota:

Sea X un conjunto finito.

El conjunto $\wp_k(X)$ se puede ordenar linealmente:

$\wp_k(X) = \{A_{kj}\}_{j=1}^{m_k}$, donde $m_k = \binom{|X|}{k}$.

Con este orden$\wp_*^*(X) = \wp(X) - \{\emptyset, X\}$, se puede ordenar linealmente:

$$\wp_*^*(X) = \bigcup_{k=1}^{|X|-1} \bigcup_{j=1}^{m_k} A_{kj}.$$

donde $A_{km_k} \nsubseteq A_{k+1,1} \qquad 1 \leq k \leq |X| - 1$.

Redefiniendo los elementos de $\wp_*^*(X)$ en el anterior orden se puede escribir $\wp_*^*(X) = \{B_i\}_{i=1}^{2^{|X|}-2}$.

3.6. Proposición

Sean X un conjunto finito con mas de 1 elemento, $|X| = n$ y

$G_1 = \{B_1, B_2\} \sqcup \wp(\wp(X) - \{B_1 \cup B_2\}))$

$G_i = \{B_{2i-1}, B_{2i}\} \sqcup \wp(\wp(X) - \{B_k\}_{k=1}^{2i} - \{B_{2i-1} \cup B_{2i}\})) \qquad 2 \leq i \leq 2^{n-1} - 1.$

1. $\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}-1} G_i \subseteq NCU(X)$ y la unión es disyunta.

2. $\sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} 2^{2^n-2i-1} \leq |NCU(X)|$.

3. $|CU(X)| \leq \frac{5}{6}2^{2^n} + \frac{2}{3}$.

Demostración.

1. Claramente $G_i \subseteq NCU(X), \qquad 1 \leq i \leq 2^{|X|-1} - 1$.

Si $i < j$, para cada $\mathcal{A} \in G_j, B_{2j-1}, B_{2j} \in \mathcal{A}$ y $B_{2i-1}, B_{2i} \notin \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \notin G_i$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$.

2. $|G_i| = |\wp(\wp(X) - \{B_k\}_{k=1}^{2i} - \{B_{2i-1} \cup B_{2i}\}))| = 2^{2^n - 2i - 1}$

$\left|\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}-1} G_i\right| = \sum_{i=1}^{2^{|X|-1}-1} 2^{2^n-2i-1}$.

3. $\sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} 2^{2^n-2i-1} = 2^{2^{|X|}-1} \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{4^i} = 2^{2^n-1} \left(\frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^{2^{n-1}-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}} \right)$

$= 2^{2^n-1} \left(\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{2^{n-1}-1}} \right) \right) = \frac{1}{3} 2^{2^n-1} \left(\frac{4^{2^{n-1}-1}-1}{4^{2^{n-1}-1}} \right) = \frac{1}{6} 2^{2^n} - \frac{2}{3}$

Luego $|CU(X)| \leq 2^{2^n} - \left(\frac{1}{6}2^{2^n} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}2^{2^n} + \frac{2}{3}$.

$f(n) = \frac{5}{6}2^{2^n} + \frac{2}{3} \qquad f(1) = 4 \qquad f(2) = 14 \qquad f(3) = 214$

4. Menor colección cerrada para uniones que contiene a una colección dada

Debido a que no todas las colecciones sobre un conjunto X son cerradas para uniones se estudiará el siguiente problema:

Dada una colección de conjuntos encontrar la menor colección cerrada para uniones que contenga a dicha colección.

4.1. Proposición

Sea $\mathcal{A} \in \wp^2(X)$

La colección $\cap\{\mathcal{B} \in CU(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ es cerrada para uniones,

Es decir:

$\cap\{\mathcal{B} \in CU(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ es la menor colección de $CU(X)$ que contiene a $\mathcal{A}$.

4.2. Definición

Sea $\mathcal{A} \in \wp^2(X)$. Se define , la colección generada por $\mathcal{A}$ como:

$\langle\mathcal{A}\rangle = \cap\{\mathcal{B} \in CU(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$

4.3. Ejemplos

1. El generado de una colección cerrada para uniones es ella misma.
2. El Generado de una colección unitaria es ella misma
3. Si A y B son subconjuntos no comparables de X,

$\langle\{A, B\}\rangle = \{A, B, A \cup B\}$.

4.4. Proposición

La función : $\langle\rangle : \wp^2(X) \longrightarrow CU(X)$

$$\mathcal{A} \longrightarrow \cap\{\mathcal{B} \in CU(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$$

satisface las siguientes propiedades:

1.$\langle\emptyset\rangle = \emptyset$.

2. $\langle\wp(X)\rangle = \wp(X)$.

3.$A \subseteq \langle A\rangle$.

4. La función $\langle\rangle$ es un morfismo de conjuntos ordenados. $A \subseteq B \Longrightarrow \langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$.

5. $\langle\mathcal{A}\rangle \cup \langle\mathcal{B}\rangle \subseteq \langle\mathcal{A} \cup \mathcal{B}\rangle$.

6. $\langle\langle\mathcal{A}\rangle\rangle = \langle\mathcal{A}\rangle$

7. $\langle\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\rangle \subseteq \langle\mathcal{A}\rangle \cap \langle\mathcal{B}\rangle$.

8. Los puntos fijos de la función $\langle\rangle$ son las colecciones cerradas para uniones.

$$\langle\mathcal{A}\rangle = \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in CU(X)$$

9. $\bigcup_{i\in I} \langle\mathcal{A}_i\rangle \subseteq \left\langle\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i\right\rangle$.

5. Fibras de la función generado

En este apartado se estudian para un conjunto finito, todas las preimágenes de una colección cerrada para uniones, bajo la función generado.

A continuación se establecen algunas propiedades de las fibras de la función generado.

5.1. Proposición

$F_{\langle\rangle}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \in CH(X)$

Demostración.

i) Si $\mathcal{A} \in CH(X)$ y X es finito, entonces $< \mathcal{A} >= \mathcal{A}$.

si $A, B \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ es una cadena se puede suponer $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B \in \mathcal{A}$.

$\Longleftarrow$) Sea $\mathcal{A} \in CH(X)$, si $< \mathcal{B} >= \mathcal{A}$, con $B \neq A$, entonces $B \subseteq A$ luego $\mathcal{B} \in CH(X)$ y por

$i)$ $< \mathcal{B} >= \mathcal{B} \neq \mathcal{A}$. Así que $F_{\langle\rangle}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\}$.

$\Longrightarrow$)Sea $F_{\langle\rangle}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\}$. Si existen $A, B \in \mathcal{A}$, A no comparable con B, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$, pues por hipótesis $\mathcal{A} \in CU(X)$. Sea $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \{A \cup B\}, \mathcal{B} \neq \mathcal{A}$ y $\langle\mathcal{A}\rangle = \langle\mathcal{B}\rangle$, así que $F_{\langle\rangle}(\mathcal{A}) \neq \{\mathcal{A}\}$ lo que es una contradicción. Luego todos los elementos de $\mathcal{A}$ son comparables y $\mathcal{A} \in CH(X)$.

5.2. Proposición

Sean A y B subconjuntos de X.

1. $\langle\wp_1(A)\rangle = \wp(A) - \{\emptyset\}$.

2.$F_{\langle\rangle}(\wp(A)) = \{\mathcal{C} \in \wp^2(X) : \wp_1(A) \subseteq \mathcal{C} \subseteq \wp(A)$ y $\emptyset \in \mathcal{C}\}$

Demostración.

1. Sea $B \in \wp(A) - \{\emptyset\}$, Entonces $B = \cup\{\{b\} : b \in B\}, B \subseteq A$, $\{\{b\} : b \in B\} \subseteq \wp_1(A)$, luego $B \in \langle\wp_1(A)\rangle$.

2. Se deduce usando que $\langle\rangle$ es morfismo de conjuntos ordenados y 1.

5.3. Proposición

1. $\langle\{A\cup\{x\} : x\notin A\}\rangle = \mathcal{H}(A)$.
2.$F_{\langle\rangle}(\mathcal{H}(A)) = \{\mathcal{C}\in\wp^2(X) : \{A\cup\{x\} : x\notin A\}\subseteq\mathcal{C}\subseteq\mathcal{H}(A)\ \text{ y }\ A\in\mathcal{C}\}$
Demostración.
1. Sea $B\in\mathcal{H}(A)$, entonces $B=\cup\{A\cup\{b\} : b\in B-A\}$,
$\{A\cup\{b\} : b\in B-A\}\subseteq\{A\cup\{x\} : x\notin A\}$, luego $B\in\langle\{A\cup\{x\} : x\notin A\}\rangle$.
2. Se deduce usando que $\langle\rangle$ es morfismo de conjuntos ordenados y 1.

5.4. Proposición

1. $<\{A\cup\{x\} : x\in B-A\}>=[A,B]$.
2.$F_{\langle\rangle}([A,B]) = \{\mathcal{C}\in\wp^2(X) : \{A\cup\{x\} : x\in B-A\}\subseteq\mathcal{C}\ \text{ y }\ A\in\mathcal{C}\}$
Demostración.
Análoga a la de las dos proposiciones anteriores.

5.5. Proposición

1. Sea $\mathcal{A}_p$ una colección de p subconjuntos unitarios de $X : \mathcal{A}_p = \{\{x_k\}\}_{k=1}^p$, entonces $\langle\mathcal{A}_p\rangle = \wp(P)-\{\emptyset\}$, donde $P=\{x_k\}_{k=1}^p$.
2. Si $\mathcal{A}'_p = \{\{A_k\}\}_{k=1}^p\subseteq\wp_m(X)$, $1\leq m\leq 2^{|X|}-1$, entonces
$F_{\langle\rangle}(\mathcal{A}'_p) = \left\{\bigcup_{k\in K}\{A_k\} : K\subseteq\{1,2,\ldots,p\}\right\}$

5.5.1. Proposición

7. Si $\mathcal{A}\in CU(X)$, entonces la colección $\mathcal{A}$ es el máximo de $F_{\langle\rangle}(\mathcal{A})$.
8. Si $\mathcal{D}\in F_{\langle\rangle}(\mathcal{A})$, entonces $\min\mathcal{A}\subseteq\mathcal{D}$.

Bibliografía

[1] DAVEY; PRIESTLEY., *Introduction to Latices and order*. Cambridge University Press, 1994

[2] EISENBERG, M., *Axiomatic Theory of sets and classes*. Holt, Rinehar and Wihston. INC.1971

[3] FERNÁNDEZ, P.; SARMIENTO, E., *Colecciones cerradas para subconjuntos*. Cursillo Coloquio Distrital de Matemáticas. Diciembre de 2000 U.P.N.

[4] GRAVER, J.; WATKINS, M., *Combinatories with emphasis on the Theory of Graphs*. Springer Verlag, 1977.

[5] KOPELBERG. S. et alt. *Handbook of Boolean Algebras*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1989.

[6] MUÑOZ. J., *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. U. N, 1993

[7] SARMIENTO, E., *Convergencia de cf-filtros*. Tesis de Magister Dirigida por Manuel Suárez. Programa de Magister U. Nal. Santafé de Bogotá. 2000.

[8] SARMIENTO E., *Colecciones cerradas para complemento*. Memorias encuentro de Geometría Junio de 2000 U.P.N

[9] STENIER, A., *The Lattices of Topologies: Structure and Complementation.*

[10] SUÁREZ, M., *El grupo de Klein y la Teoría de la Adjunción en la Topología Conjuntista*. Tesis de Magister Dirigida por Carlos Ruiz S, Programa de Magister U. Nal. Santafé de Bogotá. 1994.