Compacidad difusa

Joaquín Luna Torres
Profesor Universidad de Cartagena
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
jlunator@aolpremium.com

Elías Salazar Buelvas
Profesor Universidad de Cartagena
Cartagena, Colombia
elisalazar31@hotmail.com

Resumen

Presentamos una caracterización de los espacios topológicos L-difusos compactos, donde L es un retículo completo cuasi-monoide con estructuras adicionales de GL-monoide y GL-comonoide.

Introducción

Es notable la aparición, en los últimos años, de un número considerable de descripciones de la compacidad de los espacios topológicos difusos. Esto se debe al intento de extender propiedades de la topología conjuntista a espacios construidos sobre los subconjuntos difusos de un conjunto dado, lo que se puede hacer de diversas maneras, dependiendo de la estructura del retículo L que subyace en cada caso. Un propósito natural en cualquier teoría de la compacidad es investigar la posibilidad de extender el Teorema de Tychonoff a las categorías que se obtienen con tales construcciones. Este trabajo presentan las ideas básicas que conllevan a lograrlo, pero su estudio sólo aparecerá en la continuación de éste. El artículo está organizado así: Se inicia con la presentación de algunos requisitos inherentes a la teoría de retículos, en seguida se describen tanto los GL-monoides como los GL-comonoides, posteriormente recordamos brevemente el concepto de espacio topológico L-difuso y, finalmente, introducimos el concepto de espacio topológico L-difuso compacto y discutimos algunas de sus propiedades.

1. De los fundamentos de la teoría de retículos

Sea $(L, \leq)$ un retículo completo infinitamente distributivo, i.e.$(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada $A \subseteq L$ la mínima cota superior $\bigvee A$ y la máxima cota inferior $\bigwedge A$ están definidas y se tiene que $(\bigvee A) \wedge \alpha = \bigvee\{a \wedge \alpha) \mid a \in A\}$ y $(\bigwedge A) \vee \alpha = \bigwedge\{a \vee \alpha) \mid a \in A\}$, para cada $\alpha \in L$. En particular, $\bigvee L =: \top$ y $\bigwedge L =: \bot$ son, respectivamente, las cotas universales superior e inferior en L. Asumimos que $\bot \neq \top$, i.e. L tiene por lo menos dos elementos.

1.1. $GL-$monoides

UN $GL-$monoid (ver [6], [7], [8]) es un retículo completo enriquecido con otra operación binaria $\otimes$, i.e. una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ que satisface:

(1) $\otimes$ es monótona, i.e. $\alpha \leq \beta$ implica $\alpha \otimes \gamma \leq \beta \otimes \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;

(2) $\otimes$ es conmutativa, i.e. $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in L$;

(3) $\otimes$ es asociativa, i.e. $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;

(4) $(L, \leq, \otimes)$ es entero, i.e. $\top$ actúa como elemento neutro: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

(5) $\perp$ actúa como elemento cero en $(L, \leq, \otimes)$, i.e. $\alpha \otimes \perp = \perp$, $\forall \alpha \in L$;

(6) $\otimes$ es distributiva con respecto a extremos superiores arbitrarios, i.e. $\alpha \otimes (\bigvee_\lambda \beta_\lambda) = \bigvee_\lambda (\alpha \otimes \beta_\lambda)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_\lambda : \lambda \in I\} \subset L$;

(7) $(L, \leq, \otimes)$ es divisible, i.e. $\alpha \leq \beta$ implica la existencia de $\gamma \in L$ tal que $\alpha = \beta \otimes \gamma$.

Es conocido que todo $GL-$monoide es residuado, i.e. existe una nueva operación binaria "$\longmapsto$" (implicación) en L que cumple las siguientes condiciones:

$$\alpha \otimes \beta \leq \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leq (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

Explicitamente, la implicación está definida por

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee \{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda \leq \beta\}.$$

Ejemplos importantes de GL-monoides son las álgebras de Heyting y las MV-álgebras. Específicamente, una *álgebra de Heyting* es un GL-monoide del tipo $(L, \leq, \wedge, \vee, \wedge)$ (i.e. en el caso de álgebras de Heyting $\wedge = \otimes$), cf. e.g. [10]. Un GL-monoide se llama una *MV-álgebra* si $(\alpha \longmapsto \perp) \longmapsto \perp = \alpha \quad \forall \alpha \in L$, [4], [5], see also [8, Lema 2.14]. De manera que en una MV-álgebra se puede definir, de manera natural, una involución que invierta el orden; esto es, ${}^c : L \to L$ definida por $\alpha^c := \alpha \longmapsto \perp \quad \forall \alpha \in L$.
Si X es un conjunto y L es un GL-monoide entonces el conjunto potencia difuso L^X queda obviamente dotado de una estructura de GL-monoide, si extendemos las operaciones puntualmente: Si $f, g \in L^X$,

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \in X.$$

En particular los L-conjuntos 1_X y 0_X definidos por $1_X(x) := \top$ y $0_X(x) := \perp$ $\forall x \in X$ son, respectivamente, las cotas univerales superior e inferior en L^X.

1.2. GL-comonoides

Un $GL-$comonoide es un retículo completo con una operación binaria adicional $\oplus$, i.e. una tripleta $(L, \leqslant, \oplus)$ que cumple:

(1) $\oplus$ es monótona, i.e. $\alpha \leqslant \beta$ implica $\alpha \oplus \gamma \leqslant \beta \oplus \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;

(2) $\oplus$ es conmutativa, i.e. $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in L$;

(3) $\oplus$ es asociativa, i.e. $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;

(4) $(L, \leq, \oplus)$ es co-entero, i.e. $\perp$ actúa como elemento unitario: $\alpha \oplus \perp = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

(5) $\top$ actúa como elemento co-cero en $(L, \leqslant, \oplus)$, i.e. $\alpha \oplus \top = \top$, $\forall \alpha \in L$;

(6) $\oplus$ es distributiva respecto a extremos inferiores arbitrarios, i.e. $\alpha \oplus (\bigwedge_\lambda \beta_\lambda) = \bigwedge_\lambda (\alpha \oplus \beta_\lambda)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_\lambda : \lambda \in I\} \subset L$;

(7) $(L, \leqslant, \oplus)$ es co-divisible, i.e. $\alpha \leqslant \beta$ implica la existencia de $\gamma \in L$ tal que $\alpha \oplus \gamma = \beta$.

Todo $GL-$comonoide es co-residuado, i.e. existe otra operación binaria "$\leftarrowtail$" (co-implicación) en L que satisface las siguientes propiedades:

$$\alpha \leftarrowtail \beta \leqslant \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leqslant (\beta \oplus \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

De manera explícita, la co-implicación se define por

$$\alpha \leftarrowtail \beta = \bigwedge \{\lambda \in L \mid \alpha \leqslant \beta \oplus \lambda\}.$$

Si X es un conjunto y L es un GL-comonoide, entonces el conjunto potencia difuso L^X queda obviamente dotado de una estructura de GL-comonoide que se obtiene extendiendo las operaciones puntualmente.

Observación 1.1. *En este artículo utilizamos el caso particular en el cual $\oplus = \vee$ y la co-implicación es*

$$\alpha \rhd \beta = \bigwedge \{\lambda \in L \mid \alpha \leqslant \beta \vee \lambda\}.$$

En lo que sigue, $(L, \leqslant, \otimes)$ denota un GL-monoide arbitrario y $(L, \leqslant, \vee)$ denota un GL-comonoide.

2. Espacios topológicos L-difusos

En esta sección recordamos algunos conceptos (como en [9]) de la teoría de espacios topológicos L-difusos.

Definición 2.1. *Dados un cqm-retículo $(L, \leqslant, \otimes)$ y un conjunto X una topología L-difusa en X es una función $\tau : L^X \to L$ que satisface los siguientes axiomas:*

o1. $\tau(1_X) = \top$,

o2. Para todo $f, g \in L^X$, $\tau(f) \otimes \tau(g) \leqslant \tau(f \otimes g)$,

o3. Para todo subconjunto $\{f_\lambda\}_{\lambda \in I}$ *de* L^X *se cumple la desigualdad*

$$\bigwedge_{\lambda \in I} \tau(f_\lambda) \leqslant \tau(\bigvee_{\lambda \in I} f_\lambda).$$

Si τ es una topologí L-difusa en X, el par (X, τ) es un espacio topológico L-difuso.

Si el conjunto X es no vacío, entonces L^X tiene al menos dos elementos. En particular, la cota inferior universal en $(L^X, \leqslant)$ es 0_X. Cuando tomamos el subconjunto vacío de L^X y aplicamos el axioma $o3$, obtenemos

o1'. $\tau(0_X) = \top$.

Definición 2.2. *Dados dos espacios topológicos L-difusos (X, τ) y (Y, η); una función $\phi : X \to Y$ es LF-continua si y solo si para todo $g \in L^Y$, ϕ satisface*

$$\eta(g) \leqslant \tau(g \circ \phi).$$

De esta manera, obtenemos la categoría $\mathbf{L-FTOP}$ cuyos objetos son los espacios topológicos L-difusos y cuyos morfismos son las funciones LF-continuas.
En el conjunto $\mathfrak{T}_L(X)$ de todas las topologías L-difusas para X tenemos un orden parcial definido puntualmente:

$$\tau_1 \leqslant \tau_2 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_1(f) \leqslant \tau_2(f), \quad \forall f \in L^X.$$

3. Filtros y compacidad L-difusos

Observación 3.1. *Introducimos un orden parcial en $L^X \times L$ mediante*

$$(f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad (f \leqslant g \;\; y \;\; \beta \leqslant \alpha)$$

Lema 3.2. *Sea L un retículo completo tal que $(L, \leqslant, \otimes)$ es un $GL-$monoide y $(L, \leqslant, \vee)$ es un $GL-$comonoide, entonces $(L^X \times L, \preccurlyeq, \boxtimes)$, donde*

$$(f, \alpha) \boxtimes (g, \beta) := (f \otimes g, \alpha \vee \beta), \qquad \forall (f, \alpha), (g, \beta) \in L^X \times L,$$

es un $GL-$monoide.

Demostración. Es fácil comprobar que $\{(f_\lambda, \alpha_\lambda)\}_{\lambda \in I} \subseteq L^X \times L$:

(i) $\bigwedge_{\lambda \in I} (f_\lambda, \alpha_\lambda) = \big(\bigwedge_{\lambda \in I} f_\lambda, \bigvee_{\lambda \in I} \alpha_\lambda\big)$.

(ii) $\bigvee_{\lambda \in I} (f_\lambda, \alpha_\lambda) = \big(\bigvee_{\lambda \in I} f_\lambda, \bigwedge_{\lambda \in I} \alpha_\lambda\big)$.

(iii) $\top = (1_X, \bot)$ es la cota superior universal de $(L, \leqslant, \otimes)$.

(iv) $\bot = (0_X, \top)$ es la cota inferior universal de $(L, \leqslant, \otimes)$.

En consecuencia, $\boxtimes$ es monótona, conmutativa y asociativa; $(L, \leqslant, \otimes)$ es entero con redspecto a $\top$ y $\bot$ actúa como elemento cero en $(L, \leqslant, \otimes)$.

(v) $\boxtimes$ es distributiva con respecto a extremos superiores arbitrarios, i.e. para todo $(f,\alpha) \in L^X \times L$ y para todo $\{(g_j,\beta_j) \mid j \in I\} \subseteq L^X \times L$,

$$\begin{aligned}
(f,\alpha) \boxtimes \left[\bigvee_{j\in I}(g_j,\beta_j)\right] &= (f,\alpha) \boxtimes \left(\bigvee_{j\in I} g_j, \bigwedge_{j\in I}\beta_j\right)\\
&= \left(f \otimes \left(\bigvee_{j\in I} g_j\right), \alpha \vee \left(\bigwedge_{j\in I}\beta_j\right)\right)\\
&= \left(\bigvee_{j\in I}(f\otimes g_j), \bigwedge_{j\in I}(\alpha\vee\beta_j)\right)\\
&= \bigvee_{j\in I}\left(f\otimes g_j, \alpha\vee\beta_j\right)\\
&= \bigvee_{j\in I}\left[(f,\alpha)\boxtimes(g_j,\beta_j)\right].
\end{aligned}$$

(vi) $(L^X \times L, \preccurlyeq, \boxtimes)$ es divisible, i.e. $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \Leftrightarrow f \leqslant g$ y $\beta \leqslant \alpha$, implica la existencia de $h \in L^X$ y $\gamma \in L$ tales que $f = g \otimes h$ y $\beta \vee \gamma = \alpha$, en otras palabras $(f,\alpha) = (g\otimes h, \beta\vee\gamma) = (g,\beta)\boxtimes(h,\gamma)$. $\square$

Observación 3.3. *La residuación en $(L^X \times L, \preccurlyeq, \boxtimes)$ es la operación binaria $\longmapsto$ definida por*

$$\begin{aligned}
(f,\alpha) \longmapsto (g,\beta) &= \bigvee_{h\in L^X}\bigwedge_{\eta\in L}\{(h,\eta) \mid h\otimes f \leqslant g, \ \ \beta \leqslant \eta\vee\alpha\}\\
&= (f \longmapsto g, \beta \rhd \alpha)
\end{aligned}$$

y caracterizada por la condición de adjunción

$$(f,\alpha)\boxtimes(g,\beta) \preccurlyeq (h,\gamma) \Leftrightarrow (f,\alpha) \preccurlyeq [(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)],$$

$\forall (f,\alpha),(g,\beta),(h,\gamma) \in L^X \times L$.
También es facil constatar que

- $(f,\alpha)\boxtimes[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)] \preccurlyeq [(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma)]$.
- $[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)]\boxtimes[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)] \preccurlyeq [(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma)]$, *siempre que $\otimes$ sea idempotente.*

Definición 3.4 (Filtros L-difusos). *Sea X un conjunto. Una función $\mathcal{F} : L^X \times L \to L$ se llama un filtro L-difuso en X si y solo si $\mathcal{F}$ satisface los axiomas siguientes:*

(FF0) $\mathcal{F}(1_X,\alpha) = \top$.

(FF1) $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \Rightarrow \mathcal{F}(f,\alpha) \leqslant \mathcal{F}(g,\beta)$.

(FF2) $\mathcal{F}(f,\alpha)\otimes\mathcal{F}(g,\beta)\leqslant\mathcal{F}(f\otimes g,\alpha\vee\beta)$.

(FF3) $\mathcal{F}(0_X,\alpha)=\perp$.

Consideremos el conjunto $\mathfrak{F}_{LF}(X)$ de los filtros L-difusos en X. En $\mathfrak{F}_{LF}(X)$ introducimos un orden parcial $\preccurlyeq$ definido por

$$\mathcal{F}_1\preccurlyeq\mathcal{F}_2\Leftrightarrow\mathcal{F}_1(f,\alpha)\leqslant\mathcal{F}_2(f,\alpha),\quad\forall(f,\alpha)\in L^X\times L$$

Proposición 3.5. *El conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{F}_{LF}(X),\preccurlyeq)$ tiene elementos maximales.*

Demostración. Para usar el lema de Zorn, es suficiente mostrar que cada cadena $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{F}_{LF}(X)$ tiene una cota superior en $\mathfrak{F}_{LF}(X)$. Con este propósito, consideremos una cadena no vacía $\mathcal{C}=\{\mathcal{F}_\lambda\mid\lambda\in I\}$. Definimos una función $\mathcal{F}_\infty:L^X\times L\to L$ por medio de

$$\mathcal{F}_\infty(f,\alpha)=\bigvee_{\lambda\in I}\mathcal{F}_\lambda(f,\alpha),$$

y mostramos que $\mathcal{F}_\infty$ es un filtro L-difuso en X. En efecto,

(FF0) $\mathcal{F}_\infty(1_X,\alpha)=\bigvee_{\lambda\in I}\mathcal{F}_\lambda(1_X,\alpha)=\bigvee_{\lambda\in I}\top=\top$.

(FF1) $(f,\alpha)\preccurlyeq(g,\beta)\Rightarrow\mathcal{F}_\infty(f,\alpha)=\bigvee_{\lambda\in I}\mathcal{F}_\lambda(f,\alpha)\leqslant\bigvee_{\lambda\in I}\mathcal{F}_\lambda(g,\beta)=\mathcal{F}_\infty(g,\beta)$.

(FF2)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\infty(f,\alpha)\otimes\mathcal{F}_\infty(g,\beta)&=\left(\bigvee_{\lambda\in I}\mathcal{F}_\lambda(f,\alpha)\right)\otimes\left(\bigvee_{\lambda\in I}\mathcal{F}_\lambda(g,\beta)\right)\\&=\bigvee_{\lambda\in I}[\mathcal{F}_\lambda(f,\alpha)\otimes\mathcal{F}_\lambda(g,\beta)]\\&\leqslant\bigvee_{\lambda\in I}[\mathcal{F}_\lambda(f\otimes g,\alpha\vee\beta)]\\&=\mathcal{F}_\infty(f\otimes g,\alpha\vee\beta).\end{aligned}$$

(FF3) $\mathcal{F}_\infty(0_X,\alpha)=\bigvee_{\lambda\in I}\mathcal{F}_\lambda(0_X,\alpha)=\bigvee_{\lambda\in I}\perp=\perp$. □

Definición 3.6. *Un elemento maximal en $(\mathfrak{F}_{LF}(X),\preccurlyeq)$ se llama un ultrafiltro L-difuso.*

Proposición 3.7. *Para cada filtro L-difuso $\mathcal{U}:L^X\times L\to L$ en X, las afirmaciones siguientes son equivalentes*

(i) $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro L-difuso.*

(ii) $\mathcal{U}(f,\alpha)=(\mathcal{U}[(f,\alpha)\longmapsto(0_X,\rho)])\longmapsto\perp$, *para todo* $(f,\alpha)\in L^X\times L$, *para todo* $\rho\leqslant\alpha$ *en* L.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Debido a $(FF2)$ y $(FF3)$ cada filtro L-difuso satisface la condición

(FF3') $\mathcal{U}(f,\alpha) \leqslant (\mathcal{U}\,[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)]) \longmapsto \perp$, para todo $(f,\alpha) \in L^X \times L$, para todo $\rho \leqslant \alpha$ en L.

Para verificar que $(i) \Rightarrow (ii)$ es suficiente mostrar que la maximalidad de $\mathcal{U}$ implica

$$(\mathcal{U}\,[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)]) \longmapsto \perp \leqslant \mathcal{U}(f,\alpha), \ \ \forall (f,\alpha) \in L^X \times L, \ \forall \rho \leqslant \alpha \text{ en } L.$$

Con tal propósito, fijamos un elemento $(g,\beta) \in L^X \times L$, con dicho elemento construimos $\mathcal{G}_\beta := (\mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\rho)]) \longmapsto \perp$ y definimos una función $\hat{\mathcal{U}} : L^X \times L \to L$ por medio de

$$\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) = \mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \Big\{ \mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta \Big\}.$$

Debemos probar que $\hat{\mathcal{U}}$ es un ultrafiltro L-difuso. En primer lugar, $\hat{\mathcal{U}}$ es un filtro L-difuso: obviamente $\hat{\mathcal{U}}$ satisface $(FF0)$. Para el axioma $(FF1)$, de la definición

$$\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) = \mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \Big\{ \mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta \Big\}$$

y

$$\hat{\mathcal{U}}(h,\gamma) = \mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee \Big\{ \mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta \Big\}.$$

Ahora, para $(f,\alpha) \preccurlyeq (h,\gamma)$ tenemos que $\mathcal{U}(f,\alpha) \leqslant \mathcal{U}(h,\gamma)$, además,

$$\begin{aligned}
(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha) &= \bigvee \big\{ (k,\delta) \in L^X \times L \mid (g,\beta) \boxtimes (k,\delta) \preccurlyeq (f,\alpha) \big\} \\
&\leqslant \bigvee \big\{ (k,\delta) \in L^X \times L \mid (g,\beta) \boxtimes (k,\delta) \preccurlyeq (h,\gamma) \big\} \\
&= (g,\beta) \longmapsto (h,\gamma),
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) &= \mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \Big\{ \mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta \Big\} \\
&\leqslant \mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee \Big\{ \mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta \Big\} \\
&= \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma).
\end{aligned}$$

Para el axioma $(FF2)$, debemos verificar que

$$\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) \otimes \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma) \leqslant \hat{\mathcal{U}}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma).$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha)\otimes\hat{\mathcal{U}}(h,\gamma)\\
&=\big(\mathcal{U}(f,\alpha)\bigvee\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\}\big)\\
&\otimes\big(\mathcal{U}(h,\gamma)\bigvee\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\}\big)\\
&=\mathcal{U}(f,\alpha)\otimes\Big[\mathcal{U}(h,\gamma)\bigvee\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\}\Big]\\
&\bigvee\Big[\big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\big\}\otimes\big\{\mathcal{U}(h,\gamma)\bigvee\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\}\big\}\Big]\\
&=\mathcal{U}(f,\alpha)\otimes\mathcal{U}(h,\gamma)\bigvee\left[\mathcal{U}(f,\alpha)\otimes\big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\big\}\right]\\
&\bigvee\big(\big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\big\}\otimes\mathcal{U}(h,\gamma)\big)\\
&\bigvee\big(\big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\big\}\otimes\big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\big\}\big)\\
&=\mathcal{U}(f,\alpha)\otimes\mathcal{U}(h,\gamma)\bigvee\left[\big\{\mathcal{U}(f,\alpha)\otimes\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\big\}\otimes\mathcal{G}_\beta\right]\\
&\bigvee\big(\big\{\mathcal{U}(h,\gamma)\otimes\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\big\}\otimes\mathcal{G}_\beta\big)\\
&\bigvee\big(\big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\otimes\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\big\}\otimes\mathcal{G}_\beta\big)\\
&\leqslant\mathcal{U}(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\bigvee\left[\mathcal{U}\left((f,\alpha)\boxtimes\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\right)\otimes\mathcal{G}_\beta\right]\\
&\bigvee\left(\mathcal{U}\left((h,\gamma)\boxtimes\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\right)\otimes\mathcal{G}_\beta\right)\\
&\bigvee\left(\mathcal{U}\left(\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\boxtimes\left[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)\right]\right)\otimes\mathcal{G}_\beta\right)\\
&\leqslant\mathcal{U}(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\bigvee\left[\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\right]\\
&\bigvee\left[\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\right]\\
&\bigvee\left[\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\right]\\
&=\mathcal{U}(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\bigvee\left[\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\right]\\
&=\hat{\mathcal{U}}(f\otimes h,\alpha\vee\gamma).
\end{aligned}
$$

Con el fin de verificar $(FF3)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}(0_X,\alpha)&=\mathcal{U}(0_X,\alpha)\bigvee\Big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(0_X,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\Big\}\\
&=\perp\vee\Big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(0_X,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\Big\}\\
&=\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(0_X,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, utilizando la desigualdad $\rho \leqslant \alpha$, concluimos que $\rho\rhd\beta\leqslant\alpha\rhd\beta$ lo cual implica $(g,\beta)\longmapsto(0_X,\alpha)\preccurlyeq(g,\beta)\longmapsto(0_X,\rho)$.

En consecuencia,

$$\mathcal{U}\left((g,\beta)\longmapsto(0_X,\alpha)\right)\leqslant\mathcal{U}\left((g,\beta)\longmapsto(0_X,\rho)\right),$$

i.e.

$$\mathcal{G}_\beta\leqslant\left[\mathcal{U}\left((g,\beta)\longmapsto(0_X,\rho)\right)\longmapsto\perp\right].$$

Recurrimos a la propiedad de residuación de $(L,\leqslant,\otimes)$ para obtener

$$\hat{\mathcal{U}}(0_X,\alpha)=\Big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(0_X,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\Big\}=\perp.$$

Ahora debemos mostrar que $\hat{\mathcal{U}}$ es un ultrafiltro L-difuso en X. En efecto, puesto que

$$\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha)=\mathcal{U}(f,\alpha)\bigvee\Big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(f,\alpha)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\Big\},$$

claramente $\mathcal{U}(f,\alpha)\leqslant\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha),\quad\forall(f,\alpha)\in L^X\times L$, pero $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso en X, por lo tanto $\hat{\mathcal{U}}=\mathcal{U}$. De esta manera

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(g,\beta)&=\mathcal{U}(g,\beta)\bigvee\Big\{\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(g,\beta)\right]\otimes\mathcal{G}_\beta\Big\}\\&=\mathcal{U}(g,\beta)\bigvee\Big\{\mathcal{U}(1_X,\perp)\otimes\mathcal{G}_\beta\Big\}\\&=\mathcal{U}(g,\beta)\bigvee\Big\{\top\otimes\mathcal{G}_\beta\Big\}\\&=\mathcal{U}(g,\beta)\vee\mathcal{G}_\beta.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{G}_\beta=\left(\mathcal{U}\left[(g,\beta)\longmapsto(0_X,\rho)\right]\right)\longmapsto\perp\leqslant\mathcal{U}(g,\beta),\quad\forall(g,\beta)\in L^X\times L.$$

De la última desigualdad y de $(FF3')$ obtenemos (ii).
$(ii)\Rightarrow(i)$
Debemos verificar que si

$$\mathcal{U}(f,\alpha)=\left(\mathcal{U}\left[(f,\alpha)\longmapsto(0_X,\rho)\right]\right)\longmapsto\perp,\ \text{ para todo }\ (f,\alpha)\in L^X\times L,$$

para todo $\rho\leqslant\alpha$ en L,
entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso en X.
Supongamos que $\mathcal{U}\leqslant\hat{\mathcal{U}}$, entonces

$$\left(\left(\hat{\mathcal{U}}\left[(f,\alpha)\longmapsto(0_X,\rho)\right]\right)\longmapsto\perp\right)\leqslant\left(\left(\mathcal{U}\left[(f,\alpha)\longmapsto(0_X,\rho)\right]\right)\longmapsto\perp\right),$$

por lo tanto $\hat{\mathcal{U}}\leqslant\mathcal{U}$ y en consecuencia $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso en X. □

Proposición 3.8. *Sea $\phi:X\to Y$ una función y sea $\mathcal{F}:L^X\times L\to L$ un filtro L-difuso en X. Entonces*

1. *La función* $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}} : L^Y \times L \to L$ *definida por*

$$\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(g, \beta) = \mathcal{F}(g \circ \phi, \beta), \quad \forall (g, \beta) \in L^Y \times L$$

es un filtro L*-difuso en* Y*.*

2. *La función* $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}} : L^Y \times L \to L$ *es un ultrafiltro* L*-difuso en* Y*, siempre que* $\mathcal{U}$ *sea un ultrafiltro* L*-difuso en* X*.*

Demostración. (1). $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}$ satisface los axiomas de un filtro L-difuso: En efecto,

(FF0) $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(1_Y, \beta) = \mathcal{F}(1_Y \circ \phi, \beta) = \mathcal{F}(1_X, \beta) = \top, \quad \forall \beta \in L.$

(FF1) $(f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta) \Rightarrow \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(f, \alpha) = \mathcal{F}(f \circ \phi, \alpha) \leqslant \mathcal{F}(g \circ \phi, \beta) = \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(g, \beta),$
since $(f \circ \phi, \alpha) \preccurlyeq (g \circ \phi, \beta)$.

(FF2) $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(f, \alpha) \otimes \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(g, \beta) = \mathcal{F}(f \circ \phi, \alpha) \otimes \mathcal{F}(g \circ \phi, \beta) \leqslant \mathcal{F}((f \otimes g) \circ \phi, \alpha \vee \beta) = \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(f \otimes g, \alpha \vee \beta),$
puesto que $(f \circ \phi) \otimes (g \circ \phi) = [(f \otimes g) \circ \phi]$.

(FF3) $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(0_Y, \alpha) = \mathcal{F}(0_Y \circ \phi, \alpha) = \mathcal{F}(0_X, \alpha) = \perp, \quad \forall \alpha \in L.$

(2). Sean $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ un ultrafiltro L-difuso en X, $(g, \beta) \in L^Y \times L$ y $\alpha \in L$, entonces

$$\begin{aligned}
\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}(g, \beta) &= \mathcal{U}(g \circ \phi, \beta) \\
&= \mathcal{U}\left[(g \circ \phi, \beta) \longmapsto (0_X, \alpha)\right] \longmapsto \perp \\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi) \longmapsto 0_X, \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi) \longmapsto (0_Y \circ \phi), \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \mathcal{U}[(g \longmapsto 0_Y) \circ \phi, \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}[g \longmapsto 0_Y, \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}[(g, \beta) \longmapsto (0_Y, \alpha)] \longmapsto \perp.
\end{aligned}$$

Concluimos de 3.7 que $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}} : L^Y \times L \to L$ es un ultrafiltro L-difuso en Y. □

Proposición 3.9. *Sea* $\phi : X \to Y$ *una función sobreyectiva y sea* $\mathcal{F} : L^Y \times L \to L$ *un filtro* L*-difuso en* Y*. Entonces la función* $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}} : L^X \times L \to L$ *definida por*

$$\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f, \alpha) = \bigvee \left\{\mathcal{F}(g, \beta) \mid (g \circ \phi, \beta) \preccurlyeq (f, \alpha)\right\}, \quad \forall (f, \alpha) \in L^X \times L,$$

es un filtro L*-difuso en* X*.*

Demostración. Debemos probar que $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}$ satisface los axiomas de un filtro L-difuso:

(FF0)

$$\begin{aligned}
\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(1_X,\alpha) &= \bigvee \{\mathcal{F}(g,\beta) \mid (g\circ\phi,\beta) \preccurlyeq (1_X,\alpha)\}\\
&= \bigvee_{g\in L^Y} \bigwedge_{\beta\in L} \{\mathcal{F}(g,\beta) \mid g\circ\phi \leqslant 1_X,\ \ \alpha \leqslant \beta\}\\
&= \mathcal{F}(1_Y,\alpha)\\
&= \top,\quad \forall \alpha\in L.
\end{aligned}$$

(FF1) $(f,\alpha)\preccurlyeq(g,\beta)$ implica

$$\begin{aligned}
\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha) &= \bigvee \{\mathcal{F}(h,\delta) \mid (h\circ\phi,\delta) \preccurlyeq (f,\alpha)\}\\
&= \bigvee_{h\in L^Y} \bigwedge_{\delta\in L} \{\mathcal{F}(h,\delta) \mid h\circ\phi \leqslant f,\ \ \alpha \leqslant \delta\}\\
&\leqslant \bigvee_{h\in L^Y} \bigwedge_{\delta\in L} \{\mathcal{F}(h,\delta) \mid h\circ\phi \leqslant g,\ \ \beta \leqslant \delta\}\\
&= \bigvee \{\mathcal{F}(h,\delta) \mid (h\circ\phi,\delta) \preccurlyeq (g,\beta)\}\\
&= \phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(g\,\beta).
\end{aligned}$$

(FF2)

$$\begin{aligned}
&\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha)\otimes\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(g,\beta) =\\
&= \bigvee \{\mathcal{F}(h,\delta) \mid (h\circ\phi,\delta)\preccurlyeq(f,\alpha)\}\otimes\bigvee\{\mathcal{F}(j,\eta)\mid(j\circ\phi,\eta)\preccurlyeq(g,\beta)\}\\
&\leqslant \bigvee\ \{\mathcal{F}(h,\delta)\otimes F(j,\eta) \mid ((h\otimes j)\circ\phi,\delta\vee\eta)\preccurlyeq(f\otimes g,\alpha\vee\beta)\}\\
&\leqslant \bigvee \{\mathcal{F}(h\otimes j,\delta\vee\eta) \mid ((h\otimes j)\circ\phi,\delta\vee\eta)\preccurlyeq(f\otimes g,\alpha\vee\beta)\}\\
&= \phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f\otimes g,\alpha\vee\beta).
\end{aligned}$$

(FF3)

$$\begin{aligned}
\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(0_X,\alpha) &= \bigvee \{\mathcal{F}(h,\delta) \mid (h\circ\phi,\delta) \preccurlyeq (0_X,\alpha)\}\\
&= \bigvee_{h\in L^Y} \bigwedge_{\delta\in L} \{\mathcal{F}(h,\delta) \mid h\circ\phi \leqslant 0_X,\ \ \alpha \leqslant \delta\}\\
&= \mathcal{F}(0_Y,\alpha),\quad \text{ya que } \phi \text{ es sobreyectiva}\\
&= \bot.\quad \square
\end{aligned}$$

Definición 3.10 (Sistema L-difuso de vecindades). *Sea X un conjunto. Una función $\mathcal{N} : X \to L^{(L^X\times L)}$ se llama un sistema L-difuso de vecindades en X si y solamente si, para cada $p\in X$, la aplicación $\mathcal{N}_p : L^X\times L \to L$ satisface los siguientes axiomas:*

(N_0) $\mathcal{N}_p(1_X,\alpha)=\top$.

(N_1) $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \Rightarrow \mathcal{N}_p(f,\alpha) \leqslant \mathcal{N}_p(g,\beta)$.

(N_2) $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \otimes \mathcal{N}_p(g,\beta) \leqslant \mathcal{N}_p(f \otimes g, \alpha \vee \beta)$.

(N_3) $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \leqslant f(p)$.

(N_4) $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \leqslant \bigvee \{\mathcal{N}_p(g,\beta) \mid (f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \;\; y \;\; g(q) \leqslant \mathcal{N}_q(f,\alpha), \;\; \forall q \in X\}$.

Definición 3.11 (Operador L-difuso de interior). *Sea X un conjunto. Una función $\mathcal{I} : L^X \times L \to L^X$ se llama un operador L-difuso de interior en X si y solo si $\mathcal{I}$ satisface las siguientes condiciones:*

(I_0) $\mathcal{I}(1_X, \alpha) = 1_X, \quad \forall \alpha \in L$.

(I_1) $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \Rightarrow \mathcal{I}(f,\alpha) \leqslant \mathcal{I}(g,\beta)$.

(I_2) $\mathcal{I}(f,\alpha) \otimes \mathcal{I}(g,\beta) \leqslant \mathcal{I}(f \otimes g, \alpha \vee \beta)$.

(I_3) $\mathcal{I}(f,\alpha) \leqslant f$.

(I_4) $\mathcal{I}(f,\alpha) \leqslant \mathcal{I}\big(\mathcal{I}(f,\alpha)\big)$.

(I_5) $\mathcal{I}(f,\perp) = f$.

(I_6) *Si* $\emptyset \neq K \subseteq L, \mathcal{I}(f,\alpha) = f^0 \;\; \forall \alpha \in K,$ *entonces* $I(f, \bigvee K) = f^0$.

Lema 3.12. *(c.f. [9]) Dada una topología L-difusa $\mathcal{T} : L^X \to L$ en un conjunto X, la aplicación $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} : L^X \times L \to L^X$ definida por*

$$\mathcal{I}(f,\alpha) := \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(f,\alpha) = \bigvee \{u \in L^X \mid (u, \mathcal{T}(u)) \preccurlyeq (f,\alpha)\}, \quad \forall (f,\alpha) \in L^X \times L$$

es un operador L-difuso de interior en X.

Lema 3.13. *(c.f. [9]) Cada operador L-difuso de interior $\mathcal{I} : L^X \times L \to L^X$ induce, para cada $p \in X$, un sistema L-difuso de vecindades $\mathcal{N}_p^{\mathcal{I}} : L^X \times L \to L$ definido por*

$$\mathcal{N}_p(f,\alpha) := \mathcal{N}_p^{\mathcal{I}}(f,\alpha) = [\mathcal{I}(f,\alpha)](p).$$

Proposición 3.14. *Sean $(X,\mathcal{T})$ y (Y,σ) un par de espacios topológicos L-difusos, $\phi : X \to Y$ una función LF-continua y sobreyectiva, $\mathcal{N}_p : L^X \times L \to L$ el sistema L-difuso de vecindades un punto $p \in X$ inducido por $\mathcal{T}$, y $\mathcal{N}_{\phi(p)} : L^Y \times L \to L$ el sistema L-difuso de vecindades correspondiente de $\phi(p)$ en Y inducido por σ. Entonces*

$$\mathcal{N}_{\phi(p)} \leqslant \phi^{\to}(\mathcal{N}_p)$$

donde $\phi^{\to}(\mathcal{N}_p) : L^Y \times L \to L$ está definido por

$$\phi^{\to}(\mathcal{N}_p)(g,\beta) = \mathcal{N}_p(g \circ \phi, \beta), \quad \forall (g,\beta) \in L^Y \times L.$$

Demostración. Del lema 3.12 tenemos que

$$\mathcal{I}_\sigma(g,\beta) = \bigvee\{u \in L^Y \mid (u,\sigma(u)) \preccurlyeq (g,\beta)\}, \quad \forall (g,\beta) \in L^Y \times L$$

es un operador L-difuso de interior en X. La continuidad L-difusa de ϕ implica que

$$\sigma(u) \leqslant \mathcal{T}(u \circ \phi), \qquad \forall u \in L^Y.$$

Por consiguiente tenemos que

$$\{u \in L^Y \mid u \leqslant g,\ \ \beta \leqslant \sigma(u)\} \subseteq \{v \in L^Y \mid v \leqslant g,\ \ \beta \leqslant \mathcal{T}(v \circ \phi)\},$$

lo cual implica que

$$\bigvee\{u \in L^Y \mid u \leqslant g,\ \ \beta \leqslant \sigma(u)\} \leqslant \bigvee\{v \in L^Y \mid v \leqslant g,\ \ \beta \leqslant \mathcal{T}(v \circ \phi)\}.$$

En otras palabras,

$$\mathcal{I}_\sigma(g,\beta) \leqslant \bigvee\{v \in L^Y \mid v \leqslant g,\ \ \beta \leqslant \mathcal{T}(v \circ \phi)\}.$$

Si $\omega = \bigvee\{v \in L^Y \mid v \leqslant g,\ \ \beta \leqslant \mathcal{T}(v \circ \phi)\}$ entonces

$$\mathcal{N}_{\phi(p)}(g,\beta) = [\mathcal{I}_\sigma(g,\beta)]\,(\phi(p)) \leqslant \omega\,(\phi(p)) = (\omega \circ \phi)\,(p),$$

y así

$$\mathcal{N}_{\phi(p)}(g,\beta) \leqslant (\omega \circ \phi)\,(p). \tag{3.14.1}$$

Por otra parte, se sigue de $\omega \circ \phi \leqslant g \circ \phi$, de

$$\mathcal{N}_p(g \circ \phi, \beta) = [\mathcal{I}_\mathcal{T}(g \circ \phi, \beta)]\,(p) = \bigvee\{u \in L^X \mid u \leqslant g \circ \phi,\ \ \beta \leqslant \mathcal{T}(u)\}(p),$$

y de $\omega \circ \phi \in \{u \in L^X \mid u \leqslant g \circ \phi,\ \ \beta \leqslant \mathcal{T}(u)\}$, que

$$\begin{aligned}(\omega \circ \phi)(p) &\leqslant \bigvee\{u \in L^X \mid u \leqslant g \circ \phi,\ \ \beta \leqslant \mathcal{T}(u)\}(p)\\ &= [\mathcal{I}_\mathcal{T}(g \circ \phi, \beta)]\,(p) = \mathcal{N}_p(g \circ \phi, \beta) = \phi^{\rightarrow}_{(\mathcal{N}_p)}(g,\beta),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\omega \circ \phi)(p) \leqslant \phi^{\rightarrow}_{(\mathcal{N}_p)}(g,\beta). \tag{3.14.2}$$

Finalmente, de 3.14.1 y 3.14.2, concluimos que

$$\mathcal{N}_{\phi(p)} \leqslant \phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p). \quad \square$$

Definición 3.15 (Puntos adherentes). *Sean (X,τ) un espacio topológico L-difuso y $\mathcal{N} : X \to L^{(L^X \times L)}$ el sistema L-difuso de vecindades correspondiente. Además, sea $\mathcal{F} : L^X \times L \to L$ un filtro L-difuso en X. Un punto $p \in X$ se llama un punto adherente de $\mathcal{F}$ si y solo si existe otro fitro L-difuso $\mathcal{G}$ en X provisto de las siguientes propiedades* *(i)* $\mathcal{G}(\perp\otimes\top),1_X,\alpha)\leqslant\perp\otimes\top,\quad\forall\alpha\in L.$

(ii) $\mathcal{N}_p\leqslant\mathcal{G}$ *y* $\mathcal{F}\leqslant\mathcal{G}$.

Definición 3.16. *Un espacio topológico L-difuso* (X,τ) *es compacto si y solo si cada filtro L-difuso en* X *tiene al menos un punto adherente.*

Proposición 3.17. *Sean* (X,τ) *un espacio topológico* L*-difuso compacto,* (Y,σ) *un espacio topológico* L*-difuso y* $\phi:X\to Y$ *una función sobreyectiva y* LF*-continua. Entonces* (Y,σ) *es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}:L^Y\times L\to L$ un filtro L-difuso en Y, entonces por 3.9, $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}$ es un filtro L-difuso en X. Como (X,τ) es compacto, $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}$ tiene al menos un punto adherente $p\in X$, i.e. existe un filtro L-difuso $\mathcal{G}$ en X con $\mathcal{N}_p\leqslant\mathcal{G}$ y $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}\leqslant\mathcal{G}$. Ahora, utilizando 3.8, construmos el filtro imágen L-difuso correspondiente y obtenemos, por la sobreyectividad de ϕ, las relaciones siguientes

$$\mathcal{F}=\phi^{\rightarrow}\left(\phi^{\leftarrow}(\mathcal{F})\right)\leqslant\phi^{\rightarrow}(\mathcal{G})\quad\text{y}\quad\phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p)\leqslant\phi^{\rightarrow}(\mathcal{G}).$$

Por otra parte, de 3.14 se deduce

$$\mathcal{N}_{\phi(p)}\leqslant\phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p),$$

lo cual implica que

$$\mathcal{F}\leqslant\phi^{\rightarrow}(\mathcal{G})\quad\text{y}\quad\mathcal{N}_{\phi(p)}\leqslant\phi^{\rightarrow}(\mathcal{G}),$$

luego $\phi(p)$ es un punto adherente de $\mathcal{F}$.
Esto completa la prueba de la proposición. □

Bibliografía

[1] ADAMEK, J.; HERRLICH, H.; STRECKER, G., *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[2] BIRKHOFF, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1940.

[3] BOURBAKI, N., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, 1966

[4] CHANG, C. C., *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 467–490.

[5] ———, *A new proof of the completeness of the łukasiewicz axioms*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 74–80.

[6] HÖHLE, U., *Monoidal closed categories, weak topoi and generalized logics*, Fuzzy Sets and Systems **42** (1991), no. 1, 15–35.

[7] __________, *M-valued sets and sheaves over integral commutative* cl-*monoids*, Applications of category theory to fuzzy subsets (Linz, 1989), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, pp. 33–72.

[8] __________, *Commutative, residuated l-monoids*, Non-classical logics and their applications to fuzzy subsets (Linz, 1992), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, pp. 53–106.

[9] HÖHLE, U., ŠOSTAK, A., *Fixed-Basis Fuzzy Topologies* In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[10] JOHNSTONE, P., *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[11] JOHNSTONE, P., *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[12] RODABAUGH, S., *Powerset Operator Foundations For Poslat Fuzzy Set Theories and Topologies*, In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[13] ŠOSTAK, A., *Fuzzy functions and an extension of the category L-Top of Chang-Goguen L-topological spaces*, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium, Prague, Czech Republic, 2001.

[14] WILLARD, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1970.