

RELACIÓN ENTRE ESTADO DE CONOCIMIENTO EN FRACCIONES Y PROBLEMAS DESCRIPTIVOS DE FRACCIONES ^{xi}

Relation between fraction knowledge and descriptive fraction problems

Sanz, M. T.^a y Gómez, B.^a

^aDepartamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

Resumen

Este trabajo forma parte de un estudio que pretende examinar la relación entre las habilidades en fracciones de los escolares y su desempeño en la resolución de los problemas descriptivos de fracciones. Para ello se realiza un análisis descriptivo e inferencial de los datos obtenidos en una muestra de 85 estudiantes de 2º de Grado en Magisterio de la U. de Valencia a los que se les ha aplicado un test inicial de conocimiento genérico de las habilidades con fracciones y se les ha planteado un tipo específico de problemas descriptivos de fracciones, el de fracciones encadenadas por el complemento aritmético.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, problemas descriptivos, análisis racional, fracciones.

Abstract

This work is part of a study that aims to examine the relation between the student skills in fractions and their performance in solving descriptive fraction problems. To measure this, an initial test of generic knowledge in fractions and a test about specific type of descriptive fraction problems have been designed. Finally, a sample of 85 students of 2nd Grade in Education of the University of Valencia have been used to do descriptive and inferential analysis.

Keywords: didactics, mathematics, descriptive problems, rational analysis, fractions

INTRODUCCIÓN

En el presente estudio, se analiza la relación entre las habilidades de los estudiantes en fracciones y la resolución de los problemas descriptivos de fracciones. Para ello se crea un test inicial basado en el presentado por Nicolaou y Pitta-Pantazi (2011, 2015) quienes consideran siete habilidades: (a) el reconocimiento de las fracciones: habilidad para observar e identificar la fracción o su concepto (b) las definiciones y explicaciones matemáticas sobre las fracciones: habilidad para decir qué son con las propias palabras y de modos diversos, con dibujos o ejemplos, usar sus subconstructos y llevar a cabo sus operaciones, y otros aspectos, (c) argumentaciones y justificaciones acerca de las fracciones: una especie de “prueba informal”, incluyendo la habilidad para juzgar afirmaciones acerca de fracciones y al mismo tiempo justificar su elección, (d) la magnitud relativa de las fracciones: ser capaces de comparar y ordenar fracciones, (e) representaciones de fracciones: habilidad para trasladar a lo visual, la representación verbal o simbólica y hacer dibujos para las fracciones, (f) las conexiones de fracciones con decimales, porcentajes y división: habilidad para convertir e identificar un número racional como decimal, división o porcentaje y viceversa, y (g) reflexión durante la solución de problemas de fracciones: habilidad para razonar las respuesta y verificar la solución dada. Cinco de estas habilidades (b, c, e, f y g) son sugeridas en los estándares NCTM (2000) como importantes para la comprensión matemática de conceptos.

En Sanz y Gómez (2015) se realiza un estudio histórico-epistemológico sobre los problemas descriptivos de fracciones. Estos problemas que aparecen en los libros actuales remontan su historia en antiguas culturas matemáticas de Mesopotamia, Egipto, China e India. Los enunciados de estos problemas han evolucionado con el tiempo para adaptarse a los cambios sociales, los desarrollos matemáticos, y las teorías educativas dominantes en cada momento, al tiempo que conserva un contenido común matemático. Estos eran una parte esencial de la enseñanza de las matemáticas y se consideraban la culminación del aprendizaje aritmético. Sin embargo, el cambio en el modelo educativo, hizo disminuir la confianza en el poder educativo de estos problemas, hasta el punto de que muchos de ellos desaparecieron de los libros de texto, o se redujeron a un mero entretenimiento. En la actualidad, las propuestas del plan de estudios han cambiado creyendo en la resolución de problemas como una competencia básica en el desarrollo de la aritmética y pensamiento algebraico.

El objetivo de este trabajo es doble: (a) Examinar el rendimiento de los estudiantes en las habilidades sobre fracciones y en los problemas descriptivos aquí estudiados. (b) Analizar la relación entre ambos.

METODOLOGÍA

Estado del conocimiento previo

Previo a analizar el desempeño de los estudiantes en los problemas que conciernen a este trabajo, los alumnos realizan un Test Inicial. Este test está diseñado para evaluar las habilidades de los estudiantes en fracciones. Según las respuestas dadas a los alumnos se les clasificará en tres estratos: nivel bajo, nivel medio y nivel alto.

Las posibles habilidades:

H1. Definición y explicación matemática sobre las fracciones. En esta habilidad se considerará:

- Los llamados constructos: Operador, Parte-Todo, Cociente, Medida o Razón. En la práctica, los maestros anteponen la fracción como *parte de un todo*.
- Operatoria, considerada en este trabajo como esencial ya que forma parte de la base del manejo con las fracciones.

H2. Representación de fracciones. Se incluye el contexto (discreto/continuo). Cuando se habla de un contexto continuo, para la enseñanza de las fracciones, se relacionan las unidades con el concepto de área o de longitud que corresponden a magnitudes cuya medida está asociada con los números reales; sin embargo, cuando se mencionan contextos discretos, se hace referencia a conjuntos con elementos que puedan separarse, es decir a los que se puedan asociar con elementos del conjunto de los números naturales (Ruiz, 2013).

H3. Reflexión durante la solución de problemas de fracciones. En esta habilidad se incluyen:

- Identificación de la unidad/todo. El concepto de totalidad como algo que se descompone, recompone y convierte.
- Método de resolución (aritmético o algebraico).
- Traducción del lenguaje verbal al simbólico y la relación entre cantidades.

Estas habilidades no solo proporcionan un modelo descriptivo de la comprensión de las fracciones por los escolares, sino que impactan en la resolución de problemas, de modo que su mayor o menor dominio podrían explicar en parte el desempeño o rendimiento de los estudiantes cuando intentan resolverlos. Para estudiar este impacto el estudio se centra en el estudio de los problemas descriptivos de fracciones que ha transmitido la tradición reflejada en los libros de texto.

Problemas Descriptivos “de lo que queda”

Los problemas descriptivos de fracciones, son problemas verbales cuyo enunciado describe una historieta o narración pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica.

En trabajos anteriores (Gómez, Sanz y Huerta, 2016) se presentaron y clasificaron estos problemas en cuatro tipos (Problemas descriptivos de fracciones no relacionadas entre sí con todo conocido, Problemas descriptivos de fracciones no relacionadas entre sí con todo desconocido, Problemas descriptivos de fracciones relacionadas entre sí con todo conocido, Problemas descriptivos de fracciones relacionadas entre sí con todo desconocido) en el marco de un estudio histórico epistemológico sobre problemas descriptivos de fracciones.

Para este trabajo se han elegido los problemas de partes relacionadas entre sí con todo desconocido, que tienen común un sintagma: “de lo que queda”, que permite reconocerlos fácilmente. Este sintagma se refiere a la parte complementaria de una fracción “del todo” (cantidad total desconocida) sobre la que se aplica una nueva fracción, de acuerdo con la secuencia establecida en el enunciado del problema. Dentro de este tipo de problemas hay cuatro subtipos más. El problema estudiado en este trabajo ha sido elegido ya que éste se trata del problema representativo de estos cuatro. Un ejemplo es el que sigue,

Un viajero de peregrinación da $\frac{1}{2}$ de su dinero en Allahabad, $\frac{2}{9}$ del resto en Benarés, $\frac{1}{4}$ de lo que resta en peajes y $\frac{6}{10}$ de lo que le queda en Patna. Después de hacerlo, le quedan 63 monedas de oro y regresa a casa. Dime la cantidad inicial de dinero. (Lilavati, 1150, p. 59)

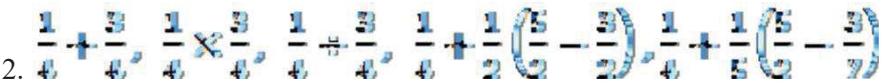
Participantes, instrumentos y proceso de estudio

Los participantes en el presente estudio son 85 estudiantes de 2º Grado de Magisterio (rango de edad 19-35 años).

El cuestionario inicial comprende 6 tareas para medir las tres habilidades presentadas anteriormente.

En la Tabla 1 se presentan las tareas (columna derecha) así como la habilidad medida para cada una de las tareas (columna izquierda).

Tabla 14. Test Inicial

<p>Definición y explicación matemática de las fracciones</p> <p>Operatoria</p>	<p>1. Define fracción de todas las formas que conozcas</p> <p>2. </p>
<p>Representación de las fracciones y contexto.</p>	<p>3. Sandra tiene una cesta con manzanas y vende $\frac{1}{2}$ de las manzanas, Luis $\frac{3}{8}$ de las manzanas de la misma cesta. Representa gráficamente qué cantidad han vendido Sandra y Luis por separado, y qué cantidad han vendido en total.</p> <p>4. Sandra tiene una tarta y se come la mitad y Luis se come los $\frac{3}{8}$. Representa gráficamente qué cantidad han comido Sandra y Luis por separado, y qué cantidad han comido en total.</p>
<p>Reflexión durante la resolución de problemas, que incluye:</p> <p>Identificación de la unidad-todo y de la operación.</p>	<p>5. Para intentar preparar un pastel de manzanas necesitamos $\frac{1}{10}$ kg de manzanas. Si yo tengo $\frac{4}{15}$ kg de manzanas, ¿cuántos pasteles podré preparar?</p> <p>6. Sandra tiene una cesta con manzanas y vende $\frac{1}{2}$ de las manzanas, Luis $\frac{3}{8}$ de las manzanas de la misma cesta. ¿Quién vende más manzanas?</p>

Método de resolución (aritmético o algebraico)	¿Qué cantidad han vendido en total? ¿Qué cantidad de manzanas queda en la cesta? Si en la cesta quedan 6 manzanas, ¿cuántas había al inicio?
---	--

Tras delimitar el cuestionario se presenta con detalle cómo se analiza cada habilidad y como se determinan los tres niveles, bajo, medio y alto.

Constructos. Queda delimitado como Nivel Bajo/Medio la representación gráfica y mediante ejemplos. Y el Nivel Alto queda referido a la Verbalización / Detalle: Uso de palabras como Numerador, Denominador, Racional, Parte, Todo. (Figura 1)

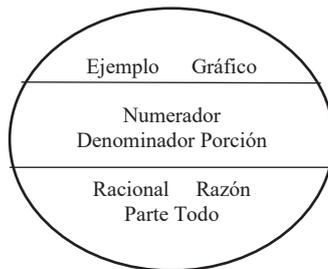


Figura 13. Niveles en Constructos

Operatoria. En este caso se hace uso de una media ponderada en la que entrarán los conceptos: Suma, resta, Multiplicación, División, Mínimo Común Múltiplo, Orden de las operaciones. Cada concepto utilizado se le dará el valor de 1 y los pesos para cada ítem se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Pesos ítems operatoria

ITEM	Peso
Suma	1
Resta	1
Multiplicación	2
División	2
Mínimo Común Múltiplo	2
Orden de las operaciones	3

El resultado obtenido permite clasificar al alumno en los tres niveles considerados, siguiendo la siguiente regla: se clasificará en Bajo a aquellos que obtengan un resultado menor a 0.60, en Alto a aquellos que obtengan un 1, el resto se considerarán alumnos de nivel Medio.

Representación Gráfica y Contexto. Nivel Bajo es el que viene con la representación única del problema de la tarta (continuo). Nivel Alto incluye la representación del problema de las manzanas (discreto) (Figura 2)

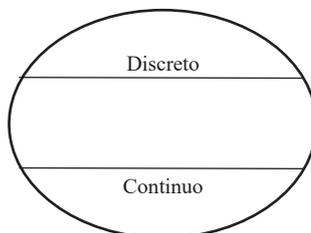


Figura 2. Niveles en Representación Gráfica y Contexto

Reflexión en la resolución de problemas. Se procede de forma análoga a lo realizado en operatoria, y los ítems considerados son Relacionar fracciones, Suma, Resta, Regla de Tres, Reconocer Operación. Los pesos en este caso se muestran en la Tabla 3

Tabla 3. Pesos ítems Resolución de Problemas

<i>ITEM</i>	<i>Peso</i>
Relacionar fracciones	1
Suma	1
Resta	1
Regla de Tres	2
Reconocer Operación	3

La clasificación de los alumnos en niveles sigue el mismo criterio que en el apartado de Operatoria.

El segundo cuestionario está compuesto por dos problemas objeto de estudio, en dos contextos distintos (ver Tabla 4).

Tabla 4. Cuestionario Problemas Descriptivos

1. Sea una cesta llena de manzanas. Van a ser repartidas. Se da un tercio del contenido. Tras esto se reparte un cuarto de lo que queda. Si en el cesto quedan 10 manzanas, ¿cuántas manzanas había al inicio? ¿Cuántas se ha quedado cada uno?
2. Sea una tarta de cumpleaños de la que me como un sexto, llega otro amigo y se come un cuarto de lo que queda. Un tercer amigo llega y se come un quinto de lo que quedaba. Tras esto se pesa lo queda y resulta que tenemos 200g, ¿cuánto pesaba la tarta al inicio? ¿Cuánto se ha comido cada uno?

Para este cuestionario se utiliza la habilidad Reflexión en la resolución de problemas, así como la Representación gráfica, ambas habilidades necesarias para ejecutar el análisis de este problema específico:

El primer paso será delimitar el Método de Resolución, aritmético, algebraico o ambos, ya que se les pidió a los alumnos que debían realizar los problemas por ambos métodos de resolución.

En segundo lugar, analizar la traducción del sintagma “de lo que queda”, tanto de forma aritmética como al lenguaje simbólico (algebraica)

En tercer lugar, la identificación de la relación entre cantidades. Aquellos que optan por el método aritmético la regla de tres y los que resuelven por método algebraico plantear la *ecuación*.

Por último, si el resultado obtenido es el correcto o no.

RESULTADOS

Se realiza un análisis descriptivo de las habilidades estudiadas en cada uno de los dos cuestionarios. (Ver detalle en Tabla 5 y 6)

Tabla 5. Porcentajes de los ítems del Test Inicial (%)

<i>Nivel</i>	<i>Constructos/ Operatoria</i>		<i>Rep. Graf</i>	<i>Reflexión en la Resolución de Problemas</i>
Alto	39.5	48.8	-	60.5
Medio	44.2	44.2	-	18.5
Bajo	14.0	7.0	100	21.0

Tabla 6. Porcentajes de los ítems de los Problemas 1 y 2 (%)

	<i>Problema 1</i>	<i>Problema 2</i>
Método de Resolución		
Algebraico	20.9	27.9
Aritmético	65.1	62.8
Ambos	11.6	7
Apoyo Gráfico		
Si	53.5	46.5
No	44.2	51.2
Sintagma “de lo que queda”		
Si	27.9	20.9
No	69.8	76.7
Relación entre cantidades		
Si	51.2	41.9
No	46.5	55.8
Resuelve		
Si	30.2	9.3
No	67.4	88.4

En rasgos generales, los resultados del primer cuestionario sobre habilidades en fracciones muestran que el 44.2% de los estudiantes tienen un Nivel Medio en Operatoria y Constructos y un 60.5% de ellos un Nivel Alto en Resolución de Problemas.

En el segundo cuestionario se observa que el método de resolución más utilizado por los estudiantes es el aritmético (65.1% y 62.8% para el Problema 1 y Problema 2, respectivamente). Además de que se apoyan en gráfica un 53.5% en el primer problema y un 46.5% en el segundo. Resulta interesante el resultado obtenido en cuanto al saber resolver este tipo de problemas, ya que contrasta con lo obtenido en el primer cuestionario, ya que en este segundo el 67.4% y el 88.4% de los estudiantes que no han sabido resolver el Problema 1 y 2 respectivamente. Esto lleva a pensar en que estos problemas tienen alguna complejidad didáctica que dificulta su resolución. Por último, notar también que el Problema 1 es resuelto por el 30.2% y el Problema 2 por el 9.3%, sabiendo que la única diferencia entre uno y otro era la variable utilizada, discreta (P1) o continua (P2), lo que hace pensar que no siempre el contexto continuo es más sencillo que el discreto para la relación parte todo, lo que no sigue lo que algunos autores hablan respecto a los contextos discretos y continuos (Ruiz, 2013).

Tras el estudio descriptivo se ha estudiado que ítems evaluados en los Problemas 1 y 2 del segundo cuestionario poseen relación con la Resolución final de los mismos, para ello se realiza un test Chi-Square de Pearson que mida la dependencia o independencia entre ambos con un nivel de significación del 5% (ver Tabla 7).

Tabla 7. Análisis de dependencia. Prueba Chi-Square (p-valor)

	<i>Resuelve 1</i>	<i>Resuelve 2</i>
Método de Resolución	0.001	0.000
Apoyo Gráfico	0.403	0.002
Sintagma “de lo que queda”	0.000	0.000
Relación entre cantidades	0.000	0.001

Se observa que existe una relación de dependencia en todos ellos ya que el p-valor obtenido es <0.05 , a excepción del Apoyo gráfico con el Problema 1. Por tanto, la elección del método de

resolución y que la traducción del sintagma “de lo que queda” son dos variables estrechamente relacionadas con la resolución correcta de este tipo de problemas.

Por último, se ha buscado si existe relación estadísticamente significativa con la resolución o no de los problemas objeto de estudio y los ítems del test inicial también con una prueba Chi-Square en las mismas condiciones que anteriormente (Tabla 8)

Tabla 8. Análisis de dependencia Test Inicial y Problema 1. Prueba Chi-Square (p-valor)

	<i>Constructos – Operatoria</i>		<i>Rep. Graf</i>	<i>Resolución de Problemas</i>
Método de Resolución				
Problema 1	0.007	0.166	-	0.067
Problema 2	0.001	0.076	-	0.178
Apoyo Gráfico				
Problema 1	0.073	0.036	-	0.611
Problema 2	0.589	0.028	-	0.060
Sintagma “de lo que queda”				
Problema 1	0.045	0.087	-	0.004
Problema 2	0.013	0.466	-	0.018
Relación entre cantidades				
Problema 1	0.035	0.015	-	0.095
Problema 2	0.000	0.087	-	0.233
Resolución				
Problema 1	0.557	0.190	-	0.006
Problema 2	0.605	0.709	-	0.076

Con estos datos se observa que existe relación significativa con los Constructos y los ítems del Método de Resolución, Sintagma de lo que queda y la Relación entre cantidades. En cuanto a la operatoria, únicamente existe relación con el Apoyo Gráfico y la Relación entre cantidades del Problema 1. Por último, se observa que la Resolución de Problemas tiene una relación significativa con el Sintagma de lo que queda y también con la Resolución del Problema 1.

Estos resultados permiten concluir (utilizando la Tabla 7 y la Tabla 8) que el Sintagma “de lo que queda” es la variable clave en este tipo de problemas y es la que dificulta la resolución de los mismos, tal cual las hipótesis previas que se habían determinado.

Con todo esto se considera que la investigación futura debería centrar su esfuerzo en determinar en qué momento se produce un corte, ya que estos problemas son explicados en Educación Secundaria y por tanto deberían ser resueltos por todos los alumnos incluidos en el estudio.

CONCLUSIÓN

En este trabajo se presenta un estudio sobre la relación entre las habilidades en fracciones de un alumno y la resolución de un tipo de problema descriptivo de fracciones donde se van quitando partes de lo que queda a un todo desconocido y al final se conoce la cantidad tras el proceso.

Para medir las habilidades de los alumnos en fracciones se ha construido un test inicial siguiendo el test propuesto en el trabajo de Nicolau y Pitta-Pantazi (2011, 2015). Por otro lado, se ha diseñado un segundo cuestionario siguiendo la habilidad de Reflexión durante la resolución de problemas Nicolau y Pitta- Pantazi (2015) para evaluar a los alumnos en el problema descriptivo de fracciones objeto de estudio de este trabajo.

La muestra que participa en el estudio es de 85 alumnos procedentes de 2º Grado de Magisterio de la Universidad de Valencia. Tras realizar el análisis descriptivo e inferencial se confirma que existe

una relación significativa entre las habilidades sobre fracciones del alumnado y el problema descriptivo aquí analizado. En particular se obtiene que la variable principal para obtener la resolución correcta de este tipo de problemas es la traducción del Sintagma “de lo que queda”.

Este trabajo es la primera parte de un trabajo que pretende estudiar las habilidades del alumnado en cada uno de los problemas descriptivos de fracciones clasificados por Gómez, Sanz y Huerta (2016). Además, se prevé un estudio estadístico, tanto descriptivo como inferencial, que permita dar resultados sólidos acerca de la relación entre las habilidades en fracciones y las habilidades en la resolución de los problemas descriptivos de fracciones.

Toda esta información puede ser útil para la enseñanza ya que los problemas adquieren protagonismo como objeto de estudio organizado y no como subproducto de otros aprendizajes, como ocurre en una enseñanza tradicional que presenta la resolución de problemas al modo de “ejercicio y práctica” para consolidar o aplicar los conocimientos adquiridos previamente.

Además, también puede ser útil para el investigador en pensamiento numérico y algebraico porque aporta un modelo de análisis histórico-epistemológico para el estudio de los problemas clásicos, no como piezas sueltas de un contenido matemático sino en relación con sus raíces y evolución.

Ahora el reto de los profesores e investigadores es mantener viva esa riqueza de conocimientos, evitar que caiga en el olvido, y adaptarlo a la enseñanza y a las características de los estudiantes, atendiendo al objetivo curricular que considera la resolución de problemas como una competencia básica.

Por último, marcar que estos resultados notan importantes dificultades en los futuros maestros, referido a estos problemas. En futuros trabajos se va a proceder a realizar el mismo estudio en futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria, debido a que es allí donde el currículum marca la enseñanza de los mismos. Con esto intentar observar dónde está el problema en la enseñanza, dado que ambos (futuros maestros y profesores) han recibido enseñanza reglada en sus trayectorias escolares (primaria y educación secundaria).

Referencias

- Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Boulet, G. (1998). Didactical implications of children's difficulties in learning the fraction concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(4), 19-34.
- Charalambos, Y.C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293-316.
- Cramer, K.A., Post, T.R., & delMas, R.C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using Commercial Curricula with the effects of using the Rational Number Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 111-144.
- Gómez, B., Sanz, M.T., Huerta, I. (2016). Problemas Descriptivos de fracciones. *Bolema Rio Claro (SP)*, 30(55), 586-604 .
- Lilavati (1150/2006). Lilavati Of Bhaskaracarya Treatise of Mathematics of Vedic Tradition. *En Patwardhan, K. S., Naimpally, S. A. y Singh, Dehli: Motilal Banarsldass Publisher Private Limited. 2ª ed. (1ª ed. 2001).*
- Luo, F., Lo, J.-J., & Leu, Y.- C. (2011). Fundamental fraction knowledge of prospective elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, 111(4), 164-177.
- Nicolaou, A., & Pitta-Pantazi, D. (2011). Factors that constitute understanding a mathematical concept at the elementary school: Fractions as the concept of reference. Article presented at *the 4th Conference of the Union of Greek Researchers in Mathematics Education* (pp. 351-361).
- Nicolaou, A., & Pitta-Pantazi, D. (2015). The Impact of a teaching intervention on sixth grade student's fraction understanding and their performance in seven abilities that constitute fraction understanding.

Article presented at *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 309–315).

Ruiz, C.A. (2013). La fracción como parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED. *Tesina presentada en Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.*

Schifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teacher' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 55-87.

Tobias, J.M. (2012). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 85-103.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-416.

^{xi} Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: EDU2012-35638 y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER)