APRENDIZAJE DEL CONCEPTO RECTA TANGENTE EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

High school students' Construction of the tangent line concept

Orts, A.[a], Llinares, S.[b] y Boigues, F.[c]

[a]IES Guadassuar (Valencia), [b]Universidad de Alicante, [c]Universidad Politécnica de Valencia

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar el aprendizaje del concepto de recta tangente por estudiantes de Bachillerato (16-17 años). Diseñamos un experimento de enseñanza desde una trayectoria hipotética de aprendizaje integrando las perspectivas analítica local y geométrica y considerando las fases del aprendizaje conceptual derivadas de la abstracción reflexiva (Simon, et al, 2004). El análisis de los datos nos permitió identificar tres perfiles en la manera en la que los estudiantes aprenden el concepto de recta tangente. Estos tres perfiles reflejan tres momentos en el proceso de aprendizaje conceptual de los estudiantes: momento de proyección, momento de reflexión y momento de anticipación local.

Palabras clave: *progresión en el aprendizaje, comprensión matemática, recta tangente, descomposición genética, trayectoria de aprendizaje.*

Abstract

The aim of this research is to characterize the high school students ' learning of line tangent concept (16-17 years-old). We design a teaching experiment from a learning hypothetical trajectory integrating the local analytical and geometrical perspectives and considering the conceptual stages of learning derived from reflective abstraction (Simon et al., 2004). Findings point out three profiles of high students' conceptual learning of tangent line concept. These three profiles reflect different moments in the students' learning: projection, reflection and local anticipation.

Keywords: *learning progressions, mathematical understanding, tangent line, genetic decomposition, learning trajectory.*

INTRODUCCIÓN

La recta tangente es un concepto que permite interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y se trata también de la recta que mejor aproxima localmente una función. En la constitución de su significado intervienen el concepto de límite, derivada, monotonía o curvatura de una función así como los procesos de aproximación a una curva desde varios sistemas de representación (Robles, Del Castillo y Font, 2010). Esto hace que durante su aprendizaje se generen diferentes significados, como el de una línea que pasa por un punto pero no corta la curva en un entorno de él, como una línea que tiene una doble intersección con la curva en dicho punto, y como una línea que pasa por dos puntos infinitamente cercanos a un punto de la curva entre otros (Artigue, 1991). Estos diferentes significados generan errores, obstáculos y conflictos en el aprendizaje.

Varias investigaciones han identificado algunas de las dificultades que tienen los alumnos de enseñanzas preuniversitarias en el aprendizaje de la recta tangente (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Biza, Nardi y Zacharides, 2009a, 2009b, Biza y Zacharides, 2010, Páez y Vivier, 2013). En particular, se ha subrayado que el conocimiento previo de los estudiantes de la recta tangente a un

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. (2016). Aprendizaje del concepto recta tangente en alumnos de Bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 407-416). Málaga: SEIEM.

círculo influye negativamente en el desarrollo de una comprensión más general de recta tangente a una curva. Estas investigaciones han identificado tres características en el aprendizaje de la recta tangente. En primer lugar, estudiantes cuya concepción de recta tangente es la de una recta que toca en un punto pero no corta a la función (concepción euclídea) que genera dificultades al considerar lo que pasa en los puntos angulosos, en los puntos de inflexión y cuando la curva se confunde con la recta tangente. En segundo lugar, estudiantes que aplican propiedades geométricas solo de forma local y, finalmente, estudiantes que comprenden el concepto de recta tangente como límite de las rectas secantes (concepción cartesiana) (Biza, Christou, y Zachariades, 2008; Castela, 1995).

Esta situación plantea la necesidad de generar información sobre la que fundamentar decisiones en el diseño de oportunidades de aprendizaje para los estudiantes. Esta información debe proporcionarnos elementos y características que nos ayuden a comprender mejor la manera en la que los estudiantes aprenden el significado de recta tangente. La información sobre las progresiones en el aprendizaje (Battista, 2011) entendidas como predicciones de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evoluciona durante la realización de las actividades instruccionales, puede ayudarnos a tomar decisiones sobre el desarrollo del currículo y la enseñanza (Simon, 2014). En el caso del aprendizaje de la recta tangente, Vivier (2010) indica que inicialmente los alumnos construyen el significado vinculado a una concepción geométrica, como la recta que toca en un punto a la circunferencia (concepción euclídea) que conlleva la idea de recta perpendicular al radio de la circunferencia que es un significado introducido en el currículo junto con la concepción euclídea en primer curso de la educación secundaria (12-13 años). Posteriormente, al llegar a Bachillerato, se introduce la recta tangente a desde una perspectiva analítica considerada como el límite de las rectas secantes (concepción cartesiana) que conlleva el significado de recta tangente como aquella que pasa por el punto de tangencia con pendiente igual a la derivada de la función en dicho punto. Sin embargo, los estudiantes mantienen cierta desconexión entre las concepción euclídea (de tipo geométrico) y la cartesiana (de tipo analítico) (Vivier, 2010).

La transición entre estas concepciones se plantea a partir de la idea de linealidad local (concepción leibniziana). Así, por ejemplo, Maschietto (2008) realiza su estudio con estudiantes universitarios utilizando las calculadoras gráficas como elemento mediador generando un nuevo significado de la recta tangente definida a partir de su *micro-straightness* (explotando así la idea de Tall (1985) de la realización de sucesivos zoom sobre la gráfica de la función). De un modo similar Milani y Baldino (2002) utilizan la función zoom de CorelDraw para mostrar que la curva y la recta tangente aparecen como líneas paralelas. Este proceso permite a los estudiantes ampliar sus imágenes del concepto e incorporar elementos del mundo de los infinitesimales. En cambio, para otros autores el tránsito entre la concepción global (euclídea) de recta tangente a la concepción local (leibniziana) se podría realizar a través de la convención matemática y no necesariamente a través de la visualización (Canul, Dolores y Martínez-Sierra, 2011).

Los resultados de estas investigaciones ponen de manifiesto las diferentes concepciones de la recta tangente construidas por los estudiantes vinculadas al contexto curricular en el que aparecen y a las características de la progresión en el aprendizaje. Sin embargo, las diferentes aproximaciones adoptadas dejan abierto el problema de cómo apoyar la coordinación entre las diferentes concepciones de la recta tangente durante el aprendizaje. En particular, esta situación plantea desafíos a los investigadores que están generando trayectorias de aprendizaje para apoyar el desarrollo del currículo ya que deben determinar cómo las variaciones instruccionales afectan a estas trayectorias lo que ha definido el objetivo de nuestra investigación.

Para aportar información a este problema didáctico, nos planteamos un experimento de enseñanza apoyado en una descomposición genética del concepto (entendida como una trayectoria hipotética de aprendizaje) para generar características de cómo los estudiantes de Bachillerato construyen un concepto de recta tangente desde una concepción leibniziana mediante la interiorización de la concepción cartesiana que les permita superar el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea. La hipótesis que subyace a esta forma de proceder es que este proceso de construcción puede apoyar la constitución del significado de recta tangente como la mejor aproximación local a una función.

MARCO TEÓRICO

Dubinsky (1991) aplica la idea de abstracción reflexiva de Piaget al pensamiento matemático avanzado considerando formas de conocer los conceptos matemáticos como acciones, procesos, objetos y esquemas, y mecanismos constructivos como interiorización, encapsulación, y tematización. Para describir la construcción de los significados se introduce la idea de descomposición genética (DG) de un concepto como un conjunto de construcciones mentales que un estudiante debería desarrollar para comprender el concepto matemático en un determinado nivel. En este proceso de construcción, algunas veces hay que tener en cuenta obstáculos que lo dificultan y que aparecen en el mismo acto de conocer, como una necesidad funcional (Brousseau, 1983). Ppor ejemplo, la idea de recta tangente concebida como la recta que tiene un solo punto en común con la curva introducida al estudiar la recta tangente a la circunferencia suele ser un obstáculo para identificar una recta tangente que tenga varios puntos de corte con la función.

Un modelo para describir cómo los estudiantes progresan a niveles de pensamiento más sofisticados ha sido desarrollado por Simon y sus colegas (Simon, Tzur, Heinz, y Kinzel, 2004). Tzur y Simon (2004) proponen dos fases en la construcción de un concepto. La fase de participación se da cuando los estudiantes identifican regularidades en la relación entre las actividades realizadas durante la resolución de tareas instruccionales y los efectos producidos que constituyen elementos del concepto que se está aprendiendo. En segundo lugar, la fase de anticipación en la que los estudiantes son capaces de usar estos elementos en diferentes situaciones que permite la consolidación de la nueva estructura conceptual construida mediante la tematización del concepto. La tematización en este contexto es el mecanismo implicado en construir como un objeto cognitivo el concepto de recta tangente. Este mecanismo permite a los estudiantes aplicar transformaciones al esquema de recta tangente, por ejemplo, ampliando el tipo de funciones y puntos singulares en los que evaluar la existencia de rectas tangentes, comprobando propiedades de la recta tangente o razonando cuando dos rectas que pasan por el mismo punto en una curva y cumplen ciertas condiciones del concepto de recta tangente pero no otras, son o no rectas tangentes a la curva en ese punto. En este sentido, la tematización implica la transición de la aplicación o uso implícito a un uso consciente de las propiedades de la recta tangente (Piaget y García, 1989). La transición al uso consciente de las propiedades de la recta tangente en diferentes contextos se da en el paso de la fase de participación a la fase de anticipación (Tzur y Simon, 2004). En esta transición en el proceso de aprendizaje conceptual, Roig y sus colegas (Roig, Llinares, & Penalva, 2012) identificaron tres momentos característicos. En el primero los estudiantes construyen y organizan un conjunto de registros relativos a los efectos de las actividades realizadas (momento de proyección). En el segundo los alumnos abstraen alguna regularidad en los conjuntos de relaciones anteriores, esto es, el concepto de recta tangente vinculado a la situación en la que se ha generado, coordinando y comparando los diferentes registros (momento de reflexión). Y finalmente, en el tercer momento los estudiantes son capaces de aplicar en diferentes situaciones la regularidad identificada, es decir, el concepto de recta tangente (momento de anticipación local), lo que podemos considerar como evidencia de la tematización del concepto de recta tangente.

Teniendo en cuenta estas referencias generamos una descomposición genética del concepto de recta tangente como un conjunto de construcciones mentales cada vez más sofisticadas que un estudiante debería desarrollar para alcanzar su comprensión en el nivel de Bachillerato (Orts, Llinares, y Boigues, 2015). Sin embargo, esta caracterización de una progresión en el aprendizaje depende de la enseñanza, por lo que esta descomposición genética debe ser referencia para fundamentar el diseño de la instrucción matemática. Desde estas referencias generamos la siguiente pregunta de investigación,

* ¿Cómo estudiantes de Bachillerato aprenden el concepto de recta tangente en un entorno de aprendizaje diseñado considerando una trayectoria de aprendizaje y teniendo en cuenta las fases del aprendizaje conceptual?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

El experimento de enseñanza se realizó con 11 alumnos de primer curso de Bachillerato (16-17 años) de la modalidad de Ciencias y Tecnología distribuidos en cinco grupos (cuatro parejas y un trío). Las parejas se codificaron como GA (formada por los alumnos Ad y An), ES (formada por los estudiantes E y S), SK (formada por S y K) y OM (formada por O y M). El trío fue codificado como grupo TRES y estaba integrado por A, J y M. A los alumnos se les introdujo el concepto de derivada como muestran los libros de texto a partir de su definición como límite del cociente incremental. Así, se interpretó analíticamente la derivada como la tasa de variación instantánea y geométricamente como la pendiente de la recta tangente (usando la concepción cartesiana sin definir la recta tangente). Luego, participaron en un experimento de enseñanza de tres sesiones diseñado ad hoc con el objetivo de desarrollar el significado de recta tangente y la coordinación entre las diferentes concepciones (cartesiana, euclídea y leibniziana) que pudiera llevar a la tematización del concepto de recta tangente.

Experimento de Enseñanza

En primer lugar generamos una descomposición genética (DG) del concepto recta tangente a una curva como descripción de una progresión en el aprendizaje (Orts et al, 2015). Para ello, integramos información desde un análisis epistemológico del concepto que nos ha permitido identificar tres concepciones a lo largo de la historia (concepción euclídea -recta tangente como aquella recta que toca en un punto sin cortar la gráfica de la función-; concepción cartesiana -recta tangente como límite de las rectas secantes-; y concepción leibniziana -consideramos la curva formada por infinitos segmentos y al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente-), desde un análisis curricular (considerando cómo se presenta la recta tangente en los libros de texto) y desde un análisis cognitivo (síntesis de las investigaciones previas junto con un cuestionario piloto contestado por un grupo de alumnos de Bachillerato).

En segundo lugar, diseñamos un conjunto de tareas instruccionales usando el programa Geogebra a partir de la descomposición genética con el objetivo de favorecer la tematización del esquema de recta tangente apoyando la transición entre la concepción leibniziana y la cartesiana mediante la visualización permitiendo crear oportunidades para superar los obstáculos derivados de la concepción euclídea. El experimento de enseñanza constaba de 3 sesiones.

La primera sesión consistió en cuatro actividades que pretendían mostrar las limitaciones de la concepción euclídea. En concreto, se pedía identificar gráficamente (i) la recta tangente a una función que la cortaba en más de un punto, (ii) la recta tangente a una función en un máximo relativo, (iii) la recta tangente a otra recta y (iv) la recta tangente en un punto anguloso. Al final de esta sesión hubo una puesta en común sobre las dificultades y la necesidad de definir qué es la recta tangente. En la segunda sesión se introdujo la concepción leibniziana. Para ello, se propusieron actividades consistentes en la utilización del comando zoom de Geogebra mediante el cual se estudiaba la linealidad local de varias funciones en diferentes puntos, incluyendo puntos angulosos. Al final de esta sesión se definió la recta tangente desde la concepción leibniziana, como aquella recta que mejor aproxima localmente una función. A continuación se realizó una sesión grupal en la que se relacionaba la concepción leibniziana y la cartesiana. Geogebra permite visualizar de forma dinámica, mediante el uso de un deslizador por ejemplo, cómo las rectas secantes tienden a la recta tangente, aquella que se ha definido previamente. Así, podemos obtener la ecuación de la recta tangente a partir de la ecuación punto-pendiente, pues dicha recta pasa por el punto de tangencia

$(a, f(a))$ y tiene como pendiente el límite de las pendientes de las rectas secantes, esto es, el límite de los cocientes incrementales (la derivada de la función en el punto considerado). Por último se realizaron varias actividades de cálculo analítico de la recta tangente. La tercera sesión consistió en cinco actividades cuyo objetivo era tematizar el esquema de recta tangente. Las actividades pedían (i) obtener analíticamente la ecuación de la recta tangente en varios puntos, (ii) identificar razonadamente (gráficamente o analíticamente) la recta tangente a una función en un punto de inflexión, (iii) obtener la recta tangente paralela a otra recta dada, (iv) obtener el valor de un parámetro para que las rectas tangentes a una función en dos puntos diferentes fueran paralelas y (v) obtener el valor aproximado de una función en un punto cercano a otro del que se conoce su imagen y su derivada.

Las tres sesiones del experimento fueron grabadas con el programa CamStudio (www. http://camstudio.org/) que permite registrar tanto las acciones realizadas en el ordenador como los comentarios realizados por los estudiantes.

Análisis

Los datos de esta investigación son las transcripciones de las interacciones entre los alumnos durante la resolución de las actividades y los productos generados al manipular los applets en el ordenador al resolver las tareas. Consideramos como unidad de análisis las expresiones verbales junto con lo registrado en el ordenador indicando el uso de los elementos matemáticos por parte de los estudiantes (Clement, 2000; Goldin, 2000). El proceso inductivo de análisis realizado a los datos procedentes de los diferentes grupos y el análisis intercasos posterior nos ha permitido identificar características del proceso de aprendizaje de la recta tangente. Estas características reflejan tres momentos en el proceso de aprendizaje conceptual de los estudiantes: momento de proyección, momento de reflexión y momento de anticipación local.

RESULTADOS

A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes, hemos identificado las progresiones en el aprendizaje generado (Clements y Sarama, 2004) permitiéndonos establecer características del aprendizaje del concepto de recta tangente, estableciendo tres perfiles del aprendizaje del concepto de recta tangente.

El primer perfil viene caracterizado porque los estudiantes experimentan con casos particulares lo que les permite identificar de manera gráfica la recta tangente (Grupo GA). Sin embargo, estos estudiantes no evidencian comprender la recta tangente como el límite de las rectas secantes a una función en el punto considerado (concepción cartesiana). Los estudiantes con estas características usan el registro gráfico pero tienen dificultades en el registro analítico. Este grupo de estudiantes parecen usar la idea de recta tangente como aquella recta de mínimo contacto con una cónica (toca pero no corta) y, como consecuencia, tiene un solo punto en común con la curva (concepción euclídea de forma local) ya que resuelven las actividades por tanteo numérico sin utilizar métodos analíticos-algebraicos. Por último, relacionan la idea de rectas paralelas con tener pendientes iguales.

Así por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 3, que pide proporcionar una recta tangente paralela a una dada ($y=-2x+1$), los dos estudiantes que conforman la pareja en este perfil no saben obtener analíticamente la ordenada en el origen de la recta ni el punto de tangencia. Estos estudiantes solo saben que la recta buscada será de la forma y=-2x+n. Para obtener la ecuación recurren a un método gráfico de tanteo. Prueban primero con la recta tangente de ecuación $y=-2x+3$ y ven que no es tangente (Figura 1a). A continuación prueban con la recta $y=-2x+4$ (Figura 1b) que tampoco es tangente. Como ven que debe estar entre las dos anteriores prueban, en un tercer intento, con la recta $y=-2x+3.5$ (Figura 1c). Por último, obtienen por tanteo la ecuación correcta de la recta tangente *y=-2x+3.75* (Figura 1d). Finalmente concluyen con un razonamiento que refleja la concepción euclídea:

> *An: Y esta es la recta tangente porque la toca pero no la corta.*
> *Ad: La toca pero no la corta.*

Para comprobar la solución realizan un zoom para acercar (concepción euclídea local) (Figura 1e).

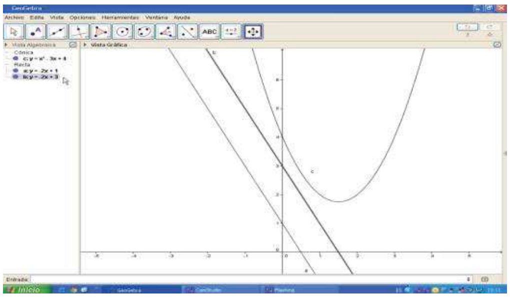


Fig. 1a

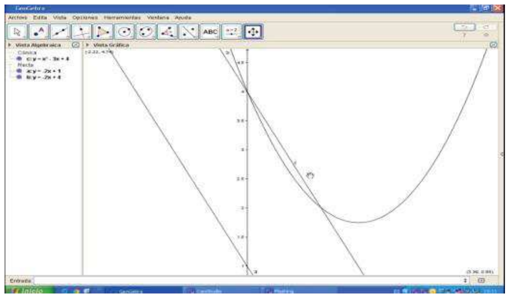


Fig. 1b

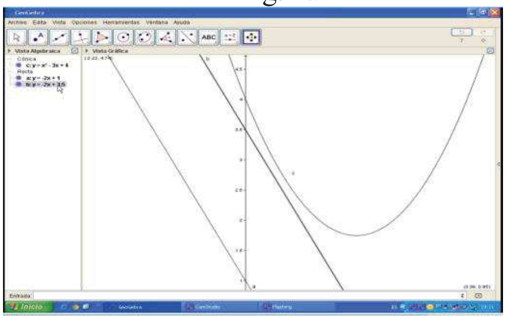


Fig. 1c

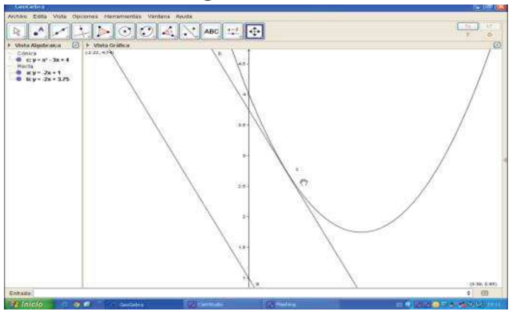


Fig. 1d

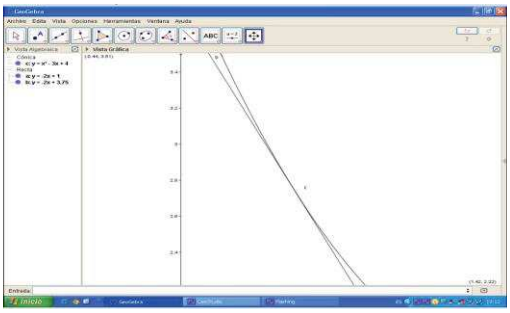


Fig. 1e: Comprobación de la recta tangente obtenida

El segundo perfil (grupos ES y OM) viene caracterizado porque los estudiantes experimentan con casos particulares identificando la recta tangente por métodos gráficos y analíticos, y también por relacionar la idea de rectas paralelas con pendientes iguales. En este perfil los estudiantes empiezan a usar la idea de curva formada por infinitos segmentos, de forma que al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente (perspectiva leibniziana). Estos estudiantes calculan analíticamente la ecuación de la recta tangente y coordinan los registros gráfico y analítico para comprobar la solución obtenida en cada registro. Además, ahora los estudiantes conocen que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente y utilizan el punto de tangencia como elemento de apoyo para obtener la ecuación de la recta tangente. Estos estudiantes reconocen que la recta tangente a una función en un punto es el límite de las rectas secantes (concepción cartesiana).

Por ejemplo, el grupo OM resuelve la actividad 1 de la sesión 3, en la que se pide obtener la ecuación de la recta tangente a la curva y= x^2 en el punto de abscisa x=1, sin ninguna dificultad:

> *M: La derivada de la función será 2x.*
> *O: Y sustituimos en el punto 1 y será 2 por 1 igual a 2.*
> *M: Y la función en el 1.*
> *O: La función en el 1 será 1.*
> *M: Será 1.*
> *M: Ahora sustituimos en la ecuación el punto x por 1 y y también por 1.*
> *O: Pasa por (1,1).*
> *M: Vale, y ahora sacamos la ecuación de la recta que es y=mx+n.*
> *O: Vale, la x será 1, la y será 1 y la m 2.*
>
> *[están sustituyendo el punto (1,1) en la ecuación y=2x+n]*
> *[hablan mientras parece que están realizando los cálculos, cada uno por separado]*
>
> *M: n es igual a -1.*
> *O: Sí, m es igual a -1. Entonces la recta tangente sería y es igual a ...*
> *M: 2x - 1.*
> *O: No, ah, sí, sí.*
> *M: Que es la segunda opción. Grado de seguridad, pues un 2 porque hemos hecho todas las operaciones y pensamos que está bien.*

Lo que caracteriza la progresión del primer al segundo perfil es que los estudiantes coordinan los registros gráfico y analítico permitiéndoles usar la ecuación punto-pendiente de una recta para obtener la recta tangente en un punto. Por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 3 (*Obtén la recta tangente a y = x^2 - 3x + 4 paralela a la recta y=-2x+1*) los estudiantes obtienen la solución de forma analítica y, posteriormente, utilizan un procedimiento gráfico para comprobar la solución obtenida. Así, tras obtener la recta tangente $y = -2x + 3.75$, activan la vista gráfica y comprueban que la recta es a la vez tangente a la función y paralela a la otra recta dada.

> *S: La n es 3'75 y la recta es igual a -2x + 3'75.*
> *E: Ponla ahí a ver si ...*
>
> [*introducen en Geogebra la función $h(x) = -2x + 3.75$ y la representan gráficamente*]

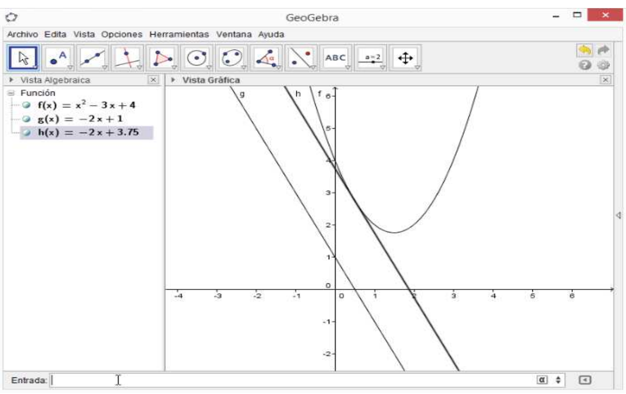
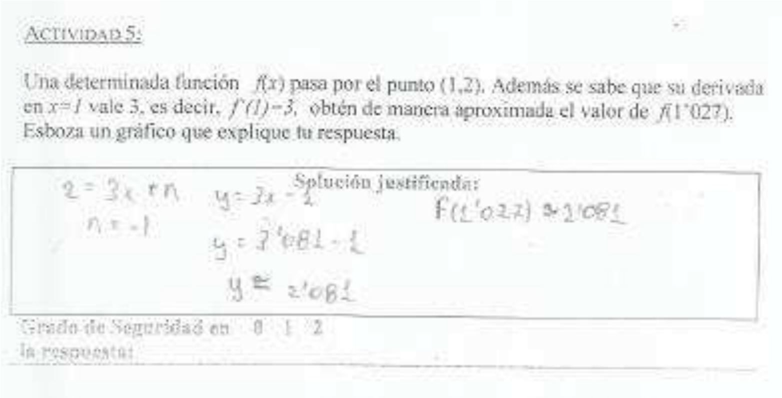


Figura 2. Coordinación de las soluciones analítica y gráfica

Los estudiantes en el tercer perfil (grupos SK y TRES) añaden a las características anteriores el utilizar propiedades de la recta tangente para resolver problemas como que la recta tangente en un extremo relativo es una recta horizontal, y por utilizar la recta tangente para aproximar el valor de una función en el entorno del punto de tangencia. Es decir, por usar la concepción leibniziana ya no solo como la definición de la recta tangente sino como una extensión del concepto. Por ejemplo, en la actividad 5 (sesión 3) centrada en una situación de interpolación (Calcular el valor aproximado de una función en un punto), el grupo TRES calcula la recta tangente y la utiliza para aproximar el valor de la función en un entorno del punto.

A la hora de esbozar un gráfico que explique la situación, estos estudiantes identifican la función original con $f(x)=x^3+1$, (realizan una integral sin haber estudiado previamente este concepto), buscando una función que pase por el punto (1,2) y cuya derivada en x=1 sea 3.


ACTIVIDAD 5:

Una determinada función $f(x)$ pasa por el punto (1,2). Además se sabe que su derivada en $x=1$ vale 3, es decir, $f'(1)=3$, obtén de manera aproximada el valor de $f(1'027)$. Esboza un gráfico que explique tu respuesta.

Solución justificada:

$2 = 3x + n$ $\quad y = 3x - 1$ $\quad f(1'027) \simeq 2'081$

$n = -1$ $\quad y = 3'081 - 1$

$y \simeq 2'081$

Grado de Seguridad en la respuesta: 0 1 2

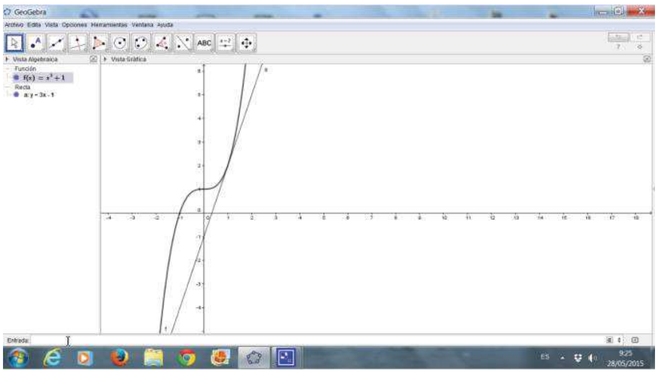


Figura 3. Solución analítica-algebraica y gráfica de interpolación (grupo TRES)

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado cómo estudiantes de Bachillerato participando en un experimento de enseñanza aprenden el concepto de recta tangente. Dicho experimento se ha diseñado según una trayectoria hipotética de aprendizaje con el objetivo de ayudar a la tematización del concepto de recta tangente, entendido como el uso consciente de las propiedades de la recta tangente en diferentes contextos. Las actividades propuestas utilizaban Geogebra para facilitar la coordinación de los registros analítico y gráfico y entre las diferentes concepciones de la recta tangente. Desde los resultados, podemos identificar tres perfiles de estudiantes según la manera en que construyen el concepto de recta tangente que muestran distintos momentos en el aprendizaje conceptual (Simon et al, 2004).

El primer perfil refleja los estudiantes en el momento de proyección que construyen el concepto de recta tangente solo a nivel gráfico presentando dificultades en el registro analítico-numérico y en el analítico-algebraico. En el segundo perfil se sitúan los alumnos que se encuentran en el momento de reflexión ya que coordinan los registros gráfico y analítico y las concepciones cartesiana y leibniziana (considerando la recta tangente como límite de las rectas secantes como mejor aproximación lineal). En este perfil los estudiantes han superado el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea (recta tangente como aquella que toca sin cortar la gráfica de la función). Por último, en el tercer perfil se sitúan los estudiantes que están en el momento de anticipación local ya que usan en modo analítico la idea de recta tangente como mejor aproximación lineal de una función en un punto.

Los resultados obtenidos proporcionan dos tipos de contribuciones. Por una parte, nuevo conocimiento sobre la progresión en el aprendizaje de la recta tangente que aporta información para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje que apoyen a los estudiantes a progresar hacia niveles de pensamiento más sofisticado. Esta información puede ser usada para el desarrollo de currículo, la elaboración de libros de texto y el diseño de materiales docentes. Se subraya que las secuencias de enseñanza-aprendizaje deberían proponer actividades encaminadas a que los estudiantes superen el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea si queremos que construyan un concepto adecuado de recta tangente. Para ello, se pueden presentar gráficas de funciones cuya recta tangente corte en varios puntos y ejemplos de rectas tangentes en puntos de inflexión. Además, actividades como la número 5 de la sesión 3 (ver figura 3) han mostrado ser un buen indicador de cómo los estudiantes han tematizado el esquema de recta tangente previsto en la trayectoria de aprendizaje al usar la concepción leibniziana no solo como definición del concepto sino como extensión de él en un entorno diferente. En segundo lugar, permite aportar información sobre el debate en educación matemática sobre los constructos “trayectoria de aprendizaje” y “progresión en el aprendizaje” en el sentido de integrar, la perspectiva cognitiva que considera las fases en el aprendizaje conceptual en el desarrollo de las trayectorias de aprendizaje (Battista, 2011; Simon, 2014). De esta manera, los resultados empíricos vinculados a una secuencia didáctica determinada (y por tanto a un contexto curricular) permiten considerar en qué medida las características de los perfiles identificados *(la progresión en el aprendizaje*) podrían o no modificarse al introducir cambios en la secuencia instruccional y por tanto empezar a ser considerados como elementos de una *trayectoria de aprendizaje* (Battista, 2011).

Reconocimientos.

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Aranda. M . C . (2015). *Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de Bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Aranda, M.C. y Callejo, M. L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión del área de la superficie bajo una curva. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 123-131). Alicante: SEIEM

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and Issues Related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 507-570.

Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10(1), 53-70.*

Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009a). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the learning of Mathematics, 29(3),* 31-36.

Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009b). Teachers' views on the role of visualization and didactical intentions regarding proof. *Proceedings of CERME 6, working group* 2, Lyon.

Biza, I. y Zacharides, T. (2010). First year Mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior 29,* 218-229.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4 (2)*, pp. 165-198.

Canul, E., Dolores. C. y Martínez-Sierra (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(2)*, 173-202.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 7-47.

Clement, J. (2000). Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En A.E. Kelly y R. A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* (pp. 547-590). London: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Clements, D.G. y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathemathical thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interview in Mathematics Education Research. En A.E. Kelly y R. A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* (pp. 517-546). London: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 207-230.

Milani, R. y Baldino, R. (2002). The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis. In A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conferenc*e, 3, 345-352.

Orts, A.; Llinares, S. y Boigues, F.J. (2015). Una descomposición genética para el concepto de recta tangente. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 459-467). Alicante: SEIEM.

Páez, R. y Vivier, L. (2013). Teachers' conception of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior 32*, 209-229.

Piaget, J. y García R. (1984). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia (2da ed.)*. México: Siglo veintiuno editores.

Robles, M.G., Del Castillo, A.G. y Font,V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida: SEIEM.

Roig, A.I., Llinares, S. y Penalva, M. (2012). Different Moments in the Participatory Stage of the Secondary Students' Abstraction of Mathematical Conceptions. *BOLEMA, Rio Claro, Brasil, v. 26,* n. 44, 1345-1366.

Simon, M. (2014). Hypothetical Learning trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (272-275). Dordrecht/London/New York: Springer.

Simon, M.A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 305-329.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 287-304.

Tall (1985). Chors, Tangents and the Leibniz Notation. *Mathematics Teaching*, 112, 48-52.

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignament secondaire. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 15, 173-199.