EL DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR: EJEMPLOS, EXPLICACIONES Y COHERENCIA LOCAL[x]

The teacher's mathematical discourse: Examples, explanations and local coherence

Planas, N.[a], Fortuny, J. M.[a], Arnal-Bailera, A.[b] y García-Honrado, I.[c]

[a]Universitat Autònoma de Barcelona, [b]Universidad de Zaragoza, [c]Universidad de Oviedo

Resumen

Se examina el discurso matemático de un profesor a lo largo de una discusión de clase, con inspiración en el marco MDI –Mathematical Discourse in Instruction. Se interpretan momentos de selección y secuenciación de ejemplos y explicaciones durante la resolución del problema del reparto de una apuesta en un juego interrumpido. Para ello, aplicamos una noción de coherencia local que alude al cumplimiento de condiciones sobre la selección, secuenciación y conexión de ejemplos y explicaciones. Se concluye que la coherencia local del discurso es mayor en los momentos en los cuales se aportan ejemplos con una función refutadora y desestabilizadora del razonamiento proporcional inicialmente utilizado por los alumnos, y a la vez explicaciones con una función modeladora hacia el concepto de probabilidad que se pretende introducir.

Palabras clave: *profesor de matemáticas, discurso matemático en la instrucción, procesos de ejemplificación, procesos de explicación, coherencia local.*

Abstract

Drawing on the MDI –Mathematical Discourse in Instruction– frame, we examine a teacher's mathematical discourse in whole-class discussion. We interpret some moments of selecting and sequencing examples and explanations during the resolution of the problem of the distribution of a bet in an interrupted game. For this end, we apply a notion of local coherence that alludes to the achievement of conditions about selecting, sequencing and connecting explanations and examples. We conclude that the local coherence of the discourse is higher when there are examples with a rebuttal and destabilizing function of the proportional reasoning initially used by students, as well as explanations with a modeling function toward the concept of probability that is to be taught.

Keywords: *mathematics teacher, mathematical discourse in instruction, processes of exemplification, processes of explanation, local coherence.*

INTRODUCCIÓN

En este estudio se realiza un análisis de la práctica educativa en la clase de matemáticas desde la perspectiva del discurso matemático del profesor. Esta temática se enmarca en el interés por la relación entre comunicación y matemática escolar. Nuestro objetivo es identificar características del discurso matemático del profesor de matemáticas en su gestión de la enseñanza en clase. Para ello, nos centramos en el análisis de la gestión de procesos de ejemplificación y de explicación.

En lo que sigue, resumimos el marco teórico y su uso para la interpretación de datos del discurso matemático de un profesor en parte de una sesión de un aula de secundaria. La sesión fue registrada en mayo de 2015, cuando el objetivo del análisis era la actividad matemática de los alumnos durante el trabajo en grupo y la posterior presentación de este trabajo en la puesta en común guiada por el profesor. Se dispone de la grabación en video de la discusión en la puesta en común, de la

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor: Explicaciones, ejemplos y coherencia local. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.

transcripción y de las notas de observación en clase. El análisis de estas fuentes ahora se realiza para informar sobre la configuración del discurso matemático del profesor en la enseñanza.

PROCESOS DE EJEMPLIFICACIÓN Y DE EXPLICACIÓN

El discurso matemático del profesor durante la enseñanza es un componente decisivo de la práctica educativa del aula de matemáticas. Aquí se considera lo que el profesor dice y escribe en su interacción con los alumnos acerca de contenidos matemáticos. El discurso es, por tanto, la unidad observacional que interpretamos al escuchar o leer una emisión verbal en datos de clase. En nuestra investigación, el contexto es el de la clase de matemáticas y su cultura pedagógica y matemática específica (Steinbring, 2005). El constructo de *Mathematical Discourse in Instruction* (MDI en adelante), en el sentido atribuido por Adler y sus colegas (e.g., Adler y Ronda, 2015; Adler y Venkat, 2014), permite una aproximación al estudio del discurso matemático del profesor con independencia del estudio de la cultura específica del aula. El acceso parcial al MDI se piensa posible mediante el análisis de invariantes en la enseñanza, esto es, procesos matemáticos que acostumbran a repetirse con frecuencia tales como los de ejemplificación y los de explicación.

La literatura sobre el uso y análisis de ejemplos en la enseñanza de las matemáticas (e.g., Adler y Ronda, 2015; Blanco, Contreras y Figuereido, 2007; Rowland, 2008) apunta a los procesos de ejemplificación como un aspecto común y rastreable del discurso matemático del profesor. Desde la perspectiva del MDI, el análisis de procesos de ejemplificación no pretende indagar el conocimiento matemático del profesor que puede estar relacionado con seleccionar y secuenciar unos ejemplos concretos para la enseñanza de un contenido matemático. En su lugar, se prioriza el foco semántico, consistente en averiguar la función comunicativa de unos ejemplos en la enseñanza de una cierta generalidad matemática. Esta función es variable y se manifiesta mediante el papel de cada uno de los ejemplos en la actividad orientada a la enseñanza y al aprendizaje de la generalidad correspondiente. Así pues, tenemos un aula donde se propone una tarea que actúa a modo de particularización de una generalidad matemática (Radford, 2013) y un discurso del profesor para el desarrollo de la tarea donde son observables procesos de ejemplificación.

Otro invariante rastreable del discurso matemático del profesor son los procesos de explicación. Adler y Venkat (2014), Chico y Planas (2011) y Rowland (2012) son algunas de las investigaciones recientes sobre el uso y análisis de un tipo de explicaciones en la enseñanza de las matemáticas, las relativas a ejemplos. En clase a menudo las explicaciones toman ejemplos como datos o bien como respaldo de una garantía ofrecida mediante la apelación a conocimiento matemático ya adquirido. Desde la perspectiva del MDI, nos interesa indagar cómo unas determinadas explicaciones –su selección y secuenciación– se utilizan en la enseñanza de una cierta generalidad matemática que ha sido particularizada mediante una tarea y tratada con ayuda explícita de ejemplos. Ahora se prioriza el foco pragmático, consistente en averiguar cómo mediante razones matemáticas e inferencias, que involucran o aluden a ejemplos, el discurso del profesor contribuye a transitar entre la particularización que supone la tarea y la generalidad que se pretende enseñar.

En la próxima sección resumimos qué entendemos por coherencia local y cómo hacemos operativa esta noción en nuestra investigación, en relación con la presencia y el uso de procesos de ejemplificación y de explicación en momentos del discurso matemático del profesor en clase.

NOCIÓN DE COHERENCIA LOCAL

En Cobo y Fortuny (2000) se presenta una noción de coherencia discursiva para referirse a la organización del discurso pedagógico y matemático en clase de matemáticas, destacándose la explicitación de procesos matemáticos y conexiones entre ellos en la interacción verbal entre profesor y alumnos. En el actual estudio centrado en procesos de ejemplificación y de explicación en el discurso matemático del profesor, planteamos una noción de coherencia local que coordina: 1) la dimensión pragmática, reconocible en los enunciados declarativos habituales en la verbalización de ejemplos; y 2) la dimensión semántica, reconocible en los enunciados expositivos habituales en la verbalización de explicaciones. Bajo coordinación de ambas dimensiones y para momentos concretos de la enseñanza, decimos que hay coherencia local en el discurso matemático de un profesor si se cumplen las siguientes condiciones:

- selección y secuenciación adecuadas de ejemplos;
- selección y secuenciación adecuadas de explicaciones relativas a ejemplos; y
- conexión adecuada entre ejemplos y explicaciones.

El cumplimiento de estas tres condiciones no garantiza la coherencia del discurso en un sentido global puesto que hace referencia al análisis local de partes seleccionadas del discurso. Lo que ofrecemos es una noción de coherencia local que informa sobre ciertos aspectos del discurso con un cierto grado de aproximación; esta noción puede verse como un indicador de la calidad del discurso matemático del profesor, entendida aquí la calidad como la capacidad de desarrollar la enseñanza de las matemáticas de modos que posibiliten y promuevan la actividad matemática en clase y, con ello, la creación de oportunidades de aprendizaje matemático para los alumnos (Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri, 2014; Morera, 2013; Venkat y Adler, 2012).

Respecto a las condiciones enumeradas de coherencia local, decimos que las secuencias de ejemplos y explicaciones y las conexiones son adecuadas si introducen, en el discurso del aula, contenidos que posibilitan y contribuyen al desarrollo de la actividad matemática. Se trata, por tanto, de condiciones que interpretamos en concordancia con nuestra comprensión de la noción de calidad aplicada al discurso matemático del profesor. La introducción de ciertos contenidos matemáticos en clase, mediante ejemplos, explicaciones y conexiones, no implica necesariamente su aprendizaje pero sí conlleva la creación de oportunidades de aprendizaje para los alumnos que podrán ser o no aprovechadas (Ferrer y otros, 2014; Morera, 2013). Así, en nuestra noción *ad hoc* de coherencia local, “ser adecuado” alude tanto al desarrollo de la actividad matemática como a las oportunidades de aprendizaje que se facilitan a los alumnos al poner contenidos matemáticos a su disposición de forma verbal explícita en el discurso. Por otra parte y siguiendo a Duval (2006), interpretamos que el desarrollo de la actividad matemática es observable en las relaciones de transformación de representaciones de los contenidos matemáticos involucrados en una cierta tarea.

El profesor, en su enseñanza, tenderá a producir discursos localmente coherentes; no obstante, pueden darse momentos de coherencia local débil por distintos motivos. Esto puede ocurrir si se introducen ejemplos y explicaciones sin que se aborden las conexiones existentes, quedando implícita su inferencia y tratándose a nivel tácito una parte sustancial de los contenidos que se pretenden enseñar (ver Chico y Planas, 2011, para datos sobre la alusión en el discurso del profesor a conexiones entre contenidos que no se han establecido en clase). Los ejemplos, explicaciones y conexiones que se sugieran sin ser verbalizadas en el discurso no aportarán a la práctica evidencias del cumplimiento de las condiciones de coherencia local. Sin su presencia en el discurso tampoco se estará fomentando la creación de unas determinadas oportunidades de aprendizaje matemático para los alumnos. También pueden darse momentos de coherencia local débil cuando haya ejemplos y explicaciones que se verbalicen pero no con la suficiente claridad desde la perspectiva de las representaciones iniciales de los alumnos. En términos generales no se estará facilitando el desarrollo de la actividad matemática dado que se estará realizando una transformación de representaciones que no habrá tomado en cuenta las situaciones iniciales de los interlocutores.

Estas últimas consideraciones ponen de manifiesto la problemática existente a raíz de la diversidad de situaciones iniciales en los alumnos de un aula y la dificultad de fijar de manera homogénea y general lo que significa “ser adecuado” para el desarrollo de la actividad matemática y la creación de oportunidades de aprendizaje. En nuestra investigación, no olvidamos que las evidencias de participación en la actividad matemática de un alumno no son extensibles a la experiencia de otros alumnos en ese momento de la actividad. Entendemos que un momento del discurso matemático del profesor tendrá cierto grado de coherencia local si se aportan ejemplos, explicaciones y conexiones de modos que posibiliten y/o contribuyan a la participación observable en el desarrollo de la actividad matemática de al menos algunos de los alumnos. De ahí que debamos insistir en el hecho de que nuestra noción de coherencia local se examina con un cierto grado de aproximación puesto que, entre otras cuestiones, no incorpora la experiencia en clase de todos los alumnos. Por otra parte, si en el discurso del aula no hubiera evidencias observables de representaciones de alumnos, no se dispondría de "pruebas" que permitieran identificar el desarrollo de la actividad matemática a excepción de cambios en el propio discurso matemático del profesor.

LECCIÓN, TAREA, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

La experimentación tuvo lugar en un aula con 27 alumnos de tercer curso de secundaria –14 y 15 años– y un profesor con varios años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas. La primera autora, como observadora participante, colaboró en la planificación de tres tareas de resolución de problemas y en la grabación de las tres sesiones de clase de una hora de duración en las que se llevaron a cabo estas tareas, de las cuales aquí solo comentamos la primera. La dinámica común fue de trabajo en pequeño grupo y discusión en gran grupo, periodo en el cual el profesor fue solicitando a los grupos que compartieran sus ideas y que explicaran sus propuestas de resolución del problema en cuestión. La tarea de la primera sesión se enunció como sigue:

> Dos chicos juegan a lanzar una moneda de modo que uno gana 1 punto si sale cara y el otro 1 punto si sale cruz. Cada uno pone 3€ y deciden que el que gane 8 puntos se quedará con los 6€. Sin embargo, la partida se interrumpe cuando uno ha ganado 7 puntos y el otro 5. ¿Cómo se repartirán el dinero?

Se eligió por su riqueza argumentativa en las discusiones de clase documentadas en Goizueta (2015). Esta tarea se puede pensar como una de las múltiples particularizaciones que se pueden elaborar para trabajar en clase la siguiente generalidad (ver texto subrayado):

> Dos chicos juegan a lanzar una moneda de modo que uno gana 1 punto si sale cara y el otro 1 punto si sale cruz. Cada uno pone 3€ y deciden que el que gane 8 puntos se quedará con los 6€. Sin embargo, <u>la partida se interrumpe cuando uno ha ganado *a* puntos y el otro *b*</u>. ¿Cómo se repartirán el dinero?

En el aula no se habían visto contenidos de la teoría de la probabilidad y, en concreto, los alumnos no estaban familiarizados con la definición laplaciana para asignar una probabilidad a un suceso. En García-Cruz (2000) se examina el problema histórico del reparto de la apuesta en un juego interrumpido y sus posibilidades didácticas en la introducción de contenidos de probabilidad. Este autor considera el problema apropiado para la etapa escolar de secundaria porque puede ayudar a intuir la necesidad de la noción de probabilidad a la vez que cuestionar la validez del razonamiento proporcional en determinadas tareas. Goizueta (2015), por su parte, señala la dificultad de hacer emerger el razonamiento probabilístico en una etapa donde prevalece el razonamiento aritmético proporcional. Las aproximaciones de alumnos de estas edades a la resolución del problema tienden a basarse precisamente en el razonamiento proporcional, con atención a los puntos acumulados por cada jugador o a la ventaja de un jugador respecto al otro cuando se interrumpe la partida.

Para el análisis del discurso matemático del profesor a lo largo de la puesta en común, los turnos de habla del profesor se transcriben y filtran en búsqueda de evidencias de ejemplos, de explicaciones relativas a ejemplos y de conexiones. En el contexto de la generalidad particularizada mediante la tarea de la partida interrumpida, serán ejemplos aquellos enunciados donde se expongan otras particularizaciones alternativas de la misma generalidad. Habiendo siendo identificados los ejemplos, serán explicaciones relativas a ejemplos aquellos enunciados donde se declaren razones matemáticas que contribuyan a transitar entre lo particular incluido en uno o varios ejemplos y la generalidad que se pretende tratar. Finalmente, habiendo sido identificados los ejemplos y explicaciones, serán conexiones aquellos enunciados donde se establezcan relaciones entre ejemplos, entre explicaciones o bien entre ejemplos y explicaciones; esto es, donde se evidencie una cierta articulación entre distintos momentos y procesos del discurso matemático del profesor. El significado dado a las conexiones lleva a que el estudio de la tercera condición de coherencia local se realice en estrecha relación y durante el estudio de las dos primeras condiciones.

En las próximas secciones, mostramos el análisis con ayuda de turnos del discurso. Añadimos turnos de alumnos cuando conviene para entender mejor el discurso matemático del profesor dado que este discurso no se produce ajeno a la interacción en clase. El discurso del profesor es en parte una reacción a las intervenciones de alumnos; los procesos de ejemplificación y de explicación están sujetos a esta influencia y, en consecuencia, es previsible que se vayan adaptando según la comprensión que los alumnos muestran y que el profesor percibe en el discurso del aula. Por tanto, en el análisis de la coherencia local, al considerar si el discurso del profesor contribuye al desarrollo de la actividad matemática, se tiene en cuenta la comprensión expresada por los alumnos.

ANÁLISIS DE PROCESOS DE EJEMPLIFICACIÓN Y CONEXIONES

La siguiente transcripción se inicia tras la intervención de una alumna cuyo grupo ha propuesto una resolución según el reparto proporcional: 7/12·6=3,5€ para el primer jugador y 5/12·6=2,5€ para el segundo. En este momento, se observan hasta cuatro enunciados donde se introducen ejemplos (ver textos subrayados en la transcripción), siendo uno de ellos el ejemplo mismo de la tarea:

Profesor: Vale, habéis llegado a dos coma cinco y tres coma cinco euros. Ahora imaginad que la partida se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro todavía ningún punto. ¿Cómo se reparten el dinero si ocurre esto? Según vuestro grupo, hay que repartir los seis euros entre… ahora no son doce tiradas con siete y cinco puntos, ahora son siete tiradas. Pues… [en la pizarra 7/7·6 y 0/7·6], aplico lo que me habéis dicho y va a pasar que uno se queda con los seis euros y el otro con nada.

Alumna: Pues claro, porque no ha sacado ni un solo punto y el otro casi ha ganado.

Profesor: Vaya, o sea que vuestra manera os sigue pareciendo que funciona. ¿Y si la partida se interrumpe cuando uno ha ganado un punto y el otro está aún con cero puntos? ¿Entonces? Ahora no son ni doce ni siete tiradas… [en la pizarra 1/1·6 y 0/1·6]. Otra vez hay un jugador que se lleva todo el dinero, pero ahora ni siquiera estaba en la recta final para ganar.

Alumna: Ya, mala suerte. Solo han tirado una vez.

Profesor: Pero esto puede ocurrir, se puede interrumpir así de pronto. Incluso si solo da tiempo a dos tiradas, y uno saca dos puntos, entonces hacemos lo mismo y… [en la pizarra 2/2·6 y 0/2·6], un chico se lo va a volver a llevar todo, con solo dos puntos. ¡Solo ha conseguido dos puntos y los seis euros para él! ¿Seguís convencidos de que funciona?

De los ejemplos en el discurso del profesor, el segundo se corresponde con la tarea original donde la distribución de los puntos de la partida es a=7, b=5. Los otros ejemplos se corresponden con las particularizaciones alternativas: a=7, b=0; a=1, b=0; a=2, b=0. Los cuatro ejemplos se acompañan de la actividad de hallar el reparto del total del dinero según un modelo de repartición proporcional, que ha sido introducido por los alumnos. El discurso matemático del profesor adquiere una función refutadora y a la vez desestabilizadora de las parejas ejemplo-solución mediante un proceso de ejemplificación que crea oportunidades de experimentar un cierto conflicto en torno al uso del razonamiento proporcional en el contexto de la tarea dada. Al no tener este efecto la discusión del primer ejemplo-solución [“Vuestra manera os sigue pareciendo que funciona”], se proporcionan otras tres parejas ejemplo-solución. El ejemplo tercero parece querer refutar el argumento anterior de la alumna de que el que se lleva los seis euros “casi ha ganado”, mientras que el ejemplo cuarto parece querer rebatir la idea de esta alumna ante el tercer ejemplo cuando dice "solo han tirado una vez". No se contemplan más ejemplos (e.g., a=7, b=7) que indiquen cómo continuar, con capacidad para generar la necesidad en los alumnos de modificar y ampliar su conocimiento y, en concreto, con una función modeladora orientada a explorar variables sustantivas de la generalidad que se pretende tratar y del razonamiento probabilístico subyacente.

Pasamos a discutir cómo estos ejemplos se han secuenciado y conectado entre ellos. La secuencia de variaciones numéricas que actúan de ejemplos problematizadores del reparto proporcional incluye la particularización extrema a=7, b=0 pero no concluye con ella. Así, para los dos últimos ejemplos, a=1, b=0 y a=2, b=0, se fija un resultado de 0 puntos siendo variable la cantidad de tiradas de la partida antes de la interrupción. Quizás los dos últimos ejemplos iban dirigidos a actuar como explicaciones de a=7 y b=0, lo cual estaría apuntando a una secuenciación subordinada de ejemplos dentro de la secuencia que incluiría la tarea original. Desde la perspectiva semántica, no obstante, en el discurso del profesor no se verbalizan relaciones entre secuencias de ejemplos. Este momento del discurso parece estarse adaptando a la comprensión que muestra una de las alumnas ["Pues claro, porque no ha sacado ni un solo punto…"; "Ya, mala suerte…"] cuando en dos ocasiones no parece percibir el conflicto que parece buscarse con el primer ejemplo donde b=0. En síntesis, todos los ejemplos nuevos que se aportan tienen en común la fijación de 0 puntos para uno de los jugadores, sin que se establezcan conexiones observables acerca de este aspecto en el discurso del profesor ni se establezcan conexiones entre los ejemplos nuevos y el original.

ANÁLISIS DE PROCESOS DE EXPLICACIÓN Y CONEXIONES

Tras la verbalización de los ejemplos presentados en la sección anterior, el discurso del profesor sigue con explicaciones en torno a las parejas ejemplo-solución halladas mediante la aplicación del razonamiento proporcional (ver textos subrayados). Se empieza del siguiente modo:

> Profesor: Hay algo que debería hacernos pensar. Hay algo que no me convence… La manera de repartir el dinero cuando quedan siete a cinco es bastante razonable, ¿verdad? <u>Pero cuando solo se juega una partida, el mismo modo de repartir nos debería llevar a algo que fuera también bastante razonable</u>. Pero seis euros para uno y nada para el otro, cuando apenas había empezado la partida, no sé, no veo que el mismo modo de proceder convenza por igual. <u>Se saquen los puntos que se saquen y se interrumpa la partida cuando se interrumpa, deberíamos llegar a repartir el dinero siempre convencidos</u>. ¿Qué se nos puede estar escapando? A lo mejor ni siquiera los dos coma cinco euros y los tres coma cinco deberían convencernos porque el modo de proceder luego nos lleva a seis y cero. <u>Siempre debería funcionar.</u>

En este momento, lo que dice el profesor es que el procedimiento de repartición mediante un modelo de reparto proporcional debe funcionar en todas las particularizaciones consideradas instantes antes. Con el fin de reflexionar sobre esta cuestión, se comparan dos ejemplos y las soluciones dadas por los alumnos: "La manera de repartir el dinero cuando quedan siete a cinco… los dos coma cinco euros y los tres coma cinco" y "Cuando solo se juega una partida… lleva a seis y cero". En general, se sugiere que hay soluciones que no "funcionan" pero no se precisa qué significa "funcionar"; esto es, no se precisa ningún modelo matemático que represente todas las particularizaciones y lleve a soluciones que convenzan "por igual" ni tampoco se explicita el conflicto que parece buscarse al retomar los ejemplos a=7, b=5 y a=1, b=0. Al cabo de unos segundos, al mencionar una variable aún no considerada (i.e. "puntos que faltan por ganar"), el discurso del profesor avanza hacia la generación del modelo probabilístico (ver textos subrayados):

> Profesor: <u>¿Alguien ha tenido en cuenta cuántos puntos les faltan para ganar la partida cuando uno lleva siete puntos y el otro cinco?</u> ¿Y cuando uno de los chicos lleva un punto y el otro lleva cero puntos? Entonces, <u>¿cuántos puntos le faltan a cada uno para ganar?</u> El chico que tiene solo uno y al que le queríais dar los seis euros solo le lleva un punto de ventaja al chico que no tiene ningún punto, ese que queríais dejar sin nada de dinero. <u>Tenemos que conseguir verlo de otro</u>

modo para que funcione. ¿Por qué decidimos los euros con los puntos que tienen? ¿Por qué no estamos viendo los puntos que les faltan?

Los puntos que faltan por ganar se introducen como dato y se plantean en relación con dos de los ejemplos. Es importante la referencia a la ventaja entre jugadores porque se comparan, desde otro punto de vista, el ejemplo original y la particularización "extrema". En a=1, b=0, la ventaja entre jugadores es inferior que en a=7, b=5. No se establece, sin embargo, conexión entre los puntos de ventaja y las posibilidades de alcanzar los puntos necesarios para ganar. Tampoco se verbaliza la contradicción entre el dinero que recibe cada jugador en estos ejemplos: en a=1, b=0 con una ventaja de 1 punto se lleva todo el dinero un jugador, mientras que en a=7, b=5 con una ventaja mayor el reparto es más equilibrado. A pesar de que el concepto de probabilidad y el modelo laplaciano están en el trasfondo de la propuesta de "verlo de otro modo" las particularizaciones y el valor de las soluciones halladas, se sigue sin precisar qué significa que las soluciones "funcionen". Algo más tarde, en conexión con la variable "puntos que faltan por ganar" y con ayuda de uno de los ejemplos, se señala la idea de "posibilidades de ganar", que es una variable sustantiva del modelo laplaciano. El discurso con énfasis en esta variable (ver textos subrayados) cambia de dirección sin concluirse la presentación de las demás variables del nuevo modelo:

Profesor: Vamos a volver a pensar que [la partida] se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro ninguno. Al chico que le falta un punto por ganar, ¿cuántas posibilidades tiene de ganar? ¿Qué puede pasar? Bueno… De todo lo que puede pasar, ¿qué le va bien a este chico? ¿Veis por dónde voy? Bueno… Antes vamos a hacer un poco de resumen de todo lo que hemos estado diciendo. Hemos visto que la partida puede ser de muchas maneras, ¿sí?

En la secuencia de explicaciones y en las conexiones que se establecen se observa una evolución hacia partes de los ejemplos no exploradas que llevan a la discusión de una variable sustantiva del modelo laplaciano. Se sugiere una distinción tácita entre variables que intervienen ("posibilidades de ganar") y que no intervienen directamente ("puntos que se tienen") en la comprensión del modelo probabilístico de reparto. La mención a "todo lo que puede pasar" supone un avance hacia el descubrimiento de otra aproximación a la tarea. El giro que toma el discurso del profesor al proponer resumir "todo lo que hemos estado diciendo" puede entenderse como una vuelta al modelo proporcional de reparto para que pueda ser explícitamente contrastado con el nuevo modelo. Hasta este punto se mantiene la utilización del razonamiento proporcional como base para la interpretación de los ejemplos y para la discusión de la necesidad de un razonamiento alternativo.

DISCUSIÓN DE LA COHERENCIA LOCAL DEL DISCURSO

Una vez analizados los ejemplos, las explicaciones relativas a ejemplos y las conexiones entre unos y otros en el discurso matemático del profesor durante momentos de la discusión en la puesta en común, pasamos a examinar el indicador de calidad de este discurso que hemos denominado coherencia local. De acuerdo con nuestra noción de coherencia local, en esta sección examinamos cómo la selección, secuenciación y conexión de ejemplos y explicaciones ha posibilitado y/o contribuido al desarrollo de la actividad matemática en el contexto de la tarea dada, favoreciendo en particular la creación de oportunidades de aprendizaje de la generalidad matemática involucrada.

En cuanto a la primera condición de coherencia local, hemos mostrado que los ejemplos son adecuados al aparecer con una clara función de refutar y desestabilizar el razonamiento proporcional introducido por los alumnos y visiblemente mantenido por una alumna. Esta función contribuye a desarrollar la actividad matemática en una dirección que lleva a la necesidad de buscar razonamientos alternativos para la interpretación de la tarea. En cuanto a la tercera condición de coherencia local, sin embargo, hemos visto que el discurso matemático del profesor no proporciona explícitamente las conexiones entre los ejemplos nuevos y el original, quedando estas conexiones sugeridas a nivel tácito mediante enunciados que aluden a particularizaciones posibles. Esto sin duda debilita el acceso de los alumnos a dichas conexiones y la creación de oportunidades de aprendizaje matemático acerca de las variables que deberían considerarse para comprender y resolver el conflicto que se manifiesta al comparar el reparto del dinero en distintos ejemplos.

En cuanto a la segunda condición de coherencia local, hemos visto que las explicaciones relativas a ejemplos son adecuadas, especialmente en el orden en el que se verbalizan dado que discriminan variables en relación con su intervención en el modelo laplaciano de reparto; en concreto, se relata que el reparto debe ser independiente de los puntos obtenidos hasta la interrupción de la partida y de la cantidad de tiradas. No obstante, a la vez se observa una circularidad recurrente en la secuencia de explicaciones en torno a la consideración y al cuestionamiento del razonamiento proporcional. El hecho de reflexionar sobre la necesidad de que el razonamiento aplicado sea válido para las distintas particularizaciones es relevante pero no está directamente dirigido a descubrir las variables que intervienen en el modelo de reparto que se busca. Hay en definitiva explicaciones que en sentido estricto son secundarias desde la perspectiva de la construcción del concepto de probabilidad y la comprensión del modelo laplaciano, y que no contribuyen a proporcionar el marco interpretativo de la tarea que se necesita. En cuanto a la tercera condición de coherencia local, las conexiones entre ejemplos y explicaciones se verbalizan con énfasis en el modelo proporcional de reparto y apenas con referencia a las variables del modelo laplaciano. De nuevo, como ocurre para las conexiones entre ejemplos, no parece que se favorezca la creación de oportunidades de aprendizaje respecto a estas variables, excepto para la variable "posibilidades de ganar". El resto de variables y la resolución del problema dentro del modelo probabilístico de reparto se ofrecerán poco después en la puesta en común como producto escrito en la pizarra y como reacción directa a la intervención de un alumno que dice: "Vale, ya sabemos cómo no se hace. Entonces ¿qué?".

A raíz de las consideraciones anteriores y para los momentos analizados, puede concluirse que la coherencia local del discurso matemático del profesor es mayor cuando se aportan ejemplos con una función refutadora y desestabilizadora del razonamiento proporcional utilizado por alumnos, y a la vez explicaciones con una función modeladora hacia el concepto de probabilidad que se pretende tratar mediante la discusión de particularizaciones del problema del reparto de la apuesta.

CONSIDERACIONES FINALES Y PROSPECTIVA

El constructo de coherencia local del discurso matemático del profesor, que por ahora hemos aplicado en relación a los procesos de ejemplificación y de explicación, es una herramienta analítica y teórica con potencial en el ámbito de la investigación del discurso en educación matemática. Los resultados presentados para el discurso de un profesor a lo largo de momentos de una discusión en una puesta en común dan cuenta de la complejidad de los procesos involucrados en la enseñanza y apuntan a la influencia de la interacción con los alumnos. Estos resultados ponen de manifiesto cómo el discurso del profesor posibilita y contribuye al desarrollo de la actividad matemática en clase y, con ello, refuerzan la interpretación de la coherencia local como indicador de calidad. En definitiva, se comprueba que el estudio de la coherencia local sirve para caracterizar aspectos del discurso matemático del profesor y también para indicar cómo desde este discurso se promueve el impacto de la enseñanza en el desarrollo de la actividad matemática.

Futuras conceptualizaciones más refinadas de la coherencia local del discurso matemático del profesor deberán incorporar maneras específicas de tener en cuenta cómo este discurso se adapta y modifica en la interacción. Las condiciones que hemos tomado para estudiar la coherencia local incluyen, por un lado, la perspectiva del alumno en interacción con el discurso matemático del profesor y, por otro, la perspectiva de las oportunidades de aprendizaje aportadas al alumno en contacto con este discurso. Falta una elaboración que permita fundamentar con rigor el análisis de la relación entre discurso del profesor y discurso del aula. Esta es una labor ardua que habrá de ser abordada. Se requiere una investigación que indague una conceptualización de coherencia local que pueda ser aplicable y que, en cierta medida, incorpore la comprensión que los alumnos desarrollan de la actividad matemática y su aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje (ver García-Honrado, Fortuny, Ferrer y Morera, 2016) que se facilitan durante el desarrollo de esta actividad.

Referencias

Adler, J. y Ronda, E. (2015). A framework for describing Mathematics Discourse in Instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(3), 237-254.

Adler, J. y Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. En H. Venkat, M. Rollnick, J. Loughran y M. Askew (Eds.), *Exploring mathematics and science teachers' knowledge. Windows into teacher thinking* (pp. 132-146). Londres: Routledge.

Blanco, L. J., Contreras, L. C. y Figuereido, C. A. (2007). Los ejemplos utilizados por los profesores en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González (Eds.), *Comunicaciones de los grupos de investigación del X Simposio de la SEIEM* (pp. 83-96). Huesca: SEIEM.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Actas del XV Simposio de la SEIEM* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics 42*(2), 115-140.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61*(2), 103-131

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Planas, N. y Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Actas del XVIII Simposio de la SEIEM* (pp. 297-305). Salamanca: SEIEM.

García-Cruz, J. A. (2000). Historia de un problema: El reparto de la apuesta. *SUMA, 33*, 25-36.

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer, M. y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. En J. L. González, A. Berciano y M. T. Fernández (Eds.), *Actas del XX Simposio de la SEIEM* (ver este volumen). Málaga: SEIEM.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria*. Manuscrito de tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Manuscrito de tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 149-163.

Rowland, T. (2012). Explaining explaining. En S. Nieuwoudt, D. Loubscher y H. Dreyer (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Congress of AMESA* (Vol. 1, pp. 54-66). Potchefstroom, Suráfrica: AMESA.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective.* Nueva York: Springer.

Venkat, H. y Adler, J. (2012). Coherence and connections in teachers' mathematical discourses in instruction. *Pythagoras, 33*(3), 1-8.

[x] Esta investigación se ha realizado al amparo del Proyecto EDU2015-65378-P, 'Construcción de conocimiento matemático escolar: Discurso del profesor y actividad de enseñanza', MINECO. Se ha contado también con el apoyo de GIPEAM –Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica, SGR2012-972, AGAUR.