

# COMPORTAMIENTO DE ESTUDIANTES DE MAESTRO AL MEDIR EL VOLUMEN

## Pre-service primary teachers' behavior measuring volume

Montoro-Medina, A.<sup>b</sup>, Gil-Cuadra, F.<sup>a</sup> y Moreno-Carretero, M. F.<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidad de Almería, <sup>b</sup> Universidad Camilo José de Cela

### Resumen

*Las magnitudes y su medida, por su uso cotidiano, son un contenido de las matemáticas escolares que los estudiantes para maestro de primaria deben dominar. Estos estudiantes presentan lagunas cuando se les proponen tareas para el desarrollo de la competencia de comparación y medida de la capacidad y del volumen. En el presente trabajo se aportan tareas de este tipo y se identifican las estrategias, los errores y dificultades que cometen los estudiantes, al resolverlas. Además, se describe una actuación realizada en el aula para que los estudiantes detecten y superen las estrategias erróneas.*

**Palabras clave:** *comparación de magnitudes, capacidad, volumen, errores, estrategias, maestros en formación.*

### Abstract

*Because of their everyday use, measurement is a scholar mathematical content that preservice primary school teacher must master. These students have some gaps when task for the development of comparison and measurement of volume and capacity are proposed. In this paper we describe this kind of tasks and the strategies, the difficulties and the mistakes made by student solving the tasks. Moreover, these strategies were recorded and broadcast in the classroom for students to analyze and overcome wrong strategies.*

**Keywords:** *Magnitude comparison, capacity, volume, mistakes, strategies, preservice teachers.*

### INTRODUCCIÓN

A pesar de la importancia que juega la medida en la vida diaria y su inclusión en los currículos de las diferentes etapas educativas, muchos adultos muestran un dominio insuficiente de las competencias de medida (Pizarro, Gorgorió, y Albarracín, 2014). Esto tiene su origen, probablemente, en una limitada experiencia del aprendizaje de estos contenidos durante la educación obligatoria.

Consideramos imprescindible subsanar estas deficiencias educativas que se han mantenido de manera persistente, incluso a pesar de las indicaciones incluidas en las distintas normativas curriculares. Por ello, cobra especial relevancia la formación de los futuros profesores de Primaria puesto que serán los encargados de diseñar, desarrollar y evaluar tareas que promuevan en los escolares un dominio significativo de la medida. Nuestra experiencia como formadores de maestros nos muestra que estos estudiantes inician su formación con lagunas en este ámbito, por ejemplo, tienen dificultades para resolver problemas sencillos que requieran diferenciar las distintas magnitudes (área-perímetro, área-volumen, volumen-capacidad, volumen-masa...), o que impliquen realizar operaciones con unidades de medida del tiempo, conversiones de unidades y estimación de la medida de la cantidad de magnitud de un objeto (Shen y Jackson, 2013). Recientemente, Passelaigue y Munier (2015) después de analizar el nivel de dominio de los estudiantes para profesor en Francia, concluyen que los futuros profesores no diferencian los conceptos de

atributo/cualidad y medida, siendo la noción de atributo/cualidad la menos comprendida. En este sentido, consideramos que proponer a los futuros profesores tareas relacionadas con la comparación de cualidades favorecerá el dominio de estos conceptos. En definitiva, resulta evidente que para poder enseñar estos contenidos es imprescindible dominarlos previamente, y además, tener las habilidades necesarias para proponer e implementar tareas de aula que permitan que sus escolares las adquieran.

Por esta razón, nuestro propósito es formar maestros competentes para enseñar a los escolares las magnitudes y su medida, esto es, que los estudiantes para maestro desarrollen las competencias necesarias para enfrentarse, con ciertas garantías, a la enseñanza de las magnitudes y su medida.

Para propiciar el logro de dicho objetivo planificamos una investigación de diseño cuyo fin era ver si un determinado modelo de formación conducía a formar maestros competentes en el campo de la medida. Concretamente planificamos un experimento de enseñanza porque “más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar por qué el diseño instruccional propuesto funciona y sugerir formas con las que puede ser adaptado a nuevas circunstancias” (Molina y otros, 2011, 76). Este diseño está desarrollado en Gil, Montoro y Moreno (2016). En el presente trabajo aportamos parte de esta investigación: el diseño de tareas para el desarrollo de la competencia de comparación y medida de la capacidad y del volumen y la identificación de las estrategias, los errores y las dificultades encontradas al resolver dichas tareas.

### **Marco de referencia**

Es amplio el esfuerzo realizado sobre el tratamiento de las magnitudes y la medida dentro de la formación en matemática y su didáctica en el ámbito de maestros de Primaria. Parte de esos trabajos proponen un modelo de enseñanza que se compone de cuatro apartados: percepción, comparación, medida y estimación (Olmo, Moreno y Gil, 1989; Gil y Moreno, 2001; Moreno, Gil y Frías, 2001). Se plantea la medición de una magnitud como un proceso que se inicia con la percepción y construcción de la magnitud y se completa con su medida y su estimación. Este no es un proceso lineal, ni se desarrolla de modo secuencial según sea la magnitud: longitud, masa, capacidad, volumen, etc.

A grandes rasgos, podemos destacar tres grandes competencias implícitas en el sentido de la medida: reconocimiento y comparación de cualidades, comprensión y aplicación del proceso de medir y desarrollo de estrategias para estimar (Moreno, Gil y Montoro, 2015).

A nivel general pretendemos probar la utilidad de este modelo de enseñanza de las magnitudes y su medida en la formación de maestros. Tras varios ciclos de experimentación en los que se ha ido adaptando una secuencia de actividades para articular el modelo, para el experimento de enseñanza, pretendemos por una parte comprobar, adaptar o en su caso modificar la secuencia de actividades que proponemos a los estudiantes, y por otra contrastar los aspectos globales a trabajar dentro de cada apartado.

En este trabajo nos vamos a centrar en el desarrollo de la comparación y medida del volumen exterior (espacio ocupado) e interior (capacidad) de objetos cotidianos. Cabe destacar que la comparación puede realizarse entre cantidades o entre sus medidas, así existen cuatro formas de realizar la comparación: directa (superponiendo, utilizando balanzas,...), indirecta (mediante un intermediario que permita trasladar el tamaño de uno junto al del otro para realizar la comparación), a través de su medida o a través de la estimación de sus medidas.

Concretamente, en esta fase nos proponemos constatar el grado de desarrollo de la competencia de comparación y medida del volumen que alcanzan los estudiantes para maestro, en un semestre dedicado a la medida. Para esto pretendemos, ante tareas de comparación y medida de la capacidad y el volumen:

O1: Describir las estrategias utilizadas por los estudiantes para su resolución.

O2: Identificar los errores y dificultades que surgen a los estudiantes a la hora de resolverlas.

## **METODOLOGÍA**

Dentro del marco global del experimento de enseñanza, para tratar de alcanzar estos objetivos concretos se ha planteado un estudio exploratorio e interpretativo con los estudiantes de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida de segundo curso de Maestro de Primaria de la Universidad de Almería.

En dicha asignatura se proponía una prueba inicial para ver el nivel de dominio de las magnitudes y su medida; en las clases teóricas se planteaban situaciones de comparación y medida de las distintas magnitudes, cómo resolverlas y se identificaban los principales errores y dificultades de los niños de primaria (Vergnaud y otros, 1983), (Reece y Kamii, 2001); en las clases prácticas los estudiantes trabajaban en grupo de 4 o 5 para resolver tareas de comparación y medida de las distintas magnitudes; además se realizaba un examen final sobre contenidos de medida y su didáctica.

Como se describe en Gil, Montoro y Moreno (2016), y dentro del proceso del experimento de enseñanza, las tareas de las clases prácticas se seleccionaron en función de la experiencia acumulada durante varios cursos. La elección de las tareas fue guiada por el criterio de que a los estudiantes les parezcan sencillas y no les bloqueen por no saber por dónde empezar, pero a la vez no sean triviales, esto es, que durante su desarrollo les surjan dificultades que trabajando colaborativamente puedan superar. De este modo los estudiantes se ven obligados a afrontar el reto y reelaborar las estrategias de comparación previas para incluir estas nuevas situaciones implícitas en las tareas. Nuestro propósito es que como consecuencia, se produzca un aprendizaje tanto del contenido matemático, como de contenido didáctico de la comparación de magnitudes: conocimiento de los errores, uso de esos errores para plantear actividades que faciliten a los escolares la reelaboración de sus estrategias y cambiarlas por otras de mayor nivel, uso de materiales y recursos, gestión de aula en sesiones de trabajo en grupo, etc.

Se grabó a 8 grupos durante la realización de la tarea de comparación del volumen y la capacidad (primera sesión práctica de la asignatura) y a 5 grupos realizando la tarea de medida de la capacidad y el volumen (segunda sesión práctica de la asignatura). Dicha grabación tuvo lugar en otro espacio distinto al aula-taller que utilizaban sus compañeros para clase para evitar los ruidos procedentes del trabajo de otros grupos. La participación en la investigación fue voluntaria, por lo que de los grupos de estudiantes que dieron su consentimiento para la grabación, la selección se realizó procurando que haya una diversidad respecto a sus destrezas matemáticas, nivel de interés, género.

Además, a raíz de esta investigación, modificamos la planificación previa y dedicamos una sesión de grupo docente a analizar la validez de las estrategias puestas en práctica por los estudiantes a la hora de realizar estas tareas. Para ello, realizamos un montaje con las grabaciones en las que se resumían las estrategias utilizadas, las dificultades y/o cuestiones que se habían planteado y cómo le habían dado respuesta...

En una prueba inicial, aplicada durante varios cursos para conocer el nivel inicial de los estudiantes, se incluyen cuestiones para ver si se diferencia unas magnitudes de otras, por ejemplo, capacidad y volumen o volumen y masa, si conocen las relaciones entre las distintas unidades y si son capaces de resolver sencillos problemas de medida. Esta prueba nos ha permitido comprobar a lo largo de los años que los estudiantes acceden con lagunas en su formación, por ejemplo, la distinción de magnitudes o la estimación.

Respecto a los contenidos que abordamos en este trabajo cabe señalar que no distinguen el volumen de la superficie y que cometen errores al relacionar las unidades de medida de la capacidad y del volumen, por ejemplo, para responder a cuantos litros equivale un centímetro cúbico.

### **Las tareas**

Como hemos dicho más arriba, se asignaron dos sesiones de prácticas al estudio de la magnitud volumen. La primera enfocada a la comparación, donde se trabajó la tarea de comparación del volumen y la capacidad y una segunda sesión orientada a la medida, donde se propuso la tarea de medida de la capacidad y el volumen. Además, las tareas estaban diseñadas para que surgieran las dificultades que experimentan los escolares de primaria (Vergnaud y otros, 1983; y, Reece y Kamii, 2001) y que previamente se habían trabajado en las sesiones de teoría. En lo que sigue vamos a describir el objetivo de las tareas, el material y recursos que se pusieron a disposición de los estudiantes y, posteriormente, recopilamos tanto las estrategias que usaron para resolverlas como los errores y dificultades identificados durante su desarrollo.

### Tarea de comparación

Como se puede ver en la Figura 1, donde aparece el enunciado del apartado dedicado a la comparación de la capacidad que se entregó a los estudiantes, el objetivo de esta tarea era ordenar, a ojo, distintos objetos atendiendo a su capacidad y comprobar dicha ordenación.

a. Ordena los envases según su capacidad, a simple vista. Puedes coger las botellas si lo consideras necesario.

	Ordenación
Participante 1	
Participante 2	
Participante 3	
Participante 4	
Participante 5	

Figura 1. Enunciado de la tarea de comparación. Parte I: Capacidad

Se pretendía que los estudiantes, al resolver las tareas, quedasen sorprendidos por los resultados y fueran conscientes de que a veces la vista engaña. Esto contribuiría a percibir que la capacidad de estimar y/o comparar magnitudes hay que educarla, aprendiendo a aislarla de otras cualidades de los objetos. Para lograr tal fin, se proporcionaron botellas con formas muy diferentes y algunas de ellas muy similares en capacidad. En concreto, se facilitaron recipientes con medidas poco usuales (botellas de agua de 1.25l y 0.75l), de materiales distintos (botella de vino de cristal con 0.75l, botella de suavizante de plástico de 1.25l y otra de 3l) y distinta forma (2 botellas de agua de 2l de marcas poco usuales en la comunidad y una de 1.5l). Es decir, se mezclan recipientes con formas y medidas con las que están familiarizados y otras más extrañas (Figura 2, izquierda).



Figura 2. Estudiantes realizando la tarea de comparación

El apartado de la comparación del volumen de objetos tenía el mismo objetivo: ordenar a ojo y comprobar dicha ordenación. Sin embargo, el enunciado proporcionado contenía, además, el enunciado del Principio de Arquímedes (Figura 3).

En este caso, se presentaban tres objetos del entorno: dos piedras y un bote de espuma de afeitar vacío (este último, flota) con un volumen muy similar (Figura 2, derecha). La forma irregular de los objetos y la ausencia de recipientes graduados dificultan su medida directa, por lo que se fuerza la utilización de estrategias de comparación directa o indirecta.

a. Ordena las piedras y el bote de espuma según el volumen, utilizando únicamente la vista y el tacto.

	Ordenación
Participante 1	
Participante 2	
Participante 3	
Participante 4	
Participante 5	

b. Comprueba el orden correcto, utilizando un líquido (Arquímedes). Explica paso a paso, la estrategia que sigues y las dificultades que te encuentras.

Figura 3. Enunciado de la tarea de comparación. Parte II: Volumen

### Tarea de medida

La segunda tarea se centró en la aplicación de procedimientos de medida de capacidad, y volumen a distintas partes del cuerpo humano. Esta contextualización en partes de cuerpo humano pretende que los estudiantes vayan interiorizando esas medidas y las usen posteriormente como referentes de estimación. Las partes del cuerpo seleccionadas fueron las manos, la boca y los pulmones, pues son más fácilmente relacionables con sólidos, líquidos y gases. Aquí nos centramos en lo relativo a capacidad y volumen. Se les propuso a los estudiantes medir la capacidad de un puñado o de una almorzada o ambuesta, la capacidad de una bocanada y la capacidad pulmonar (Figura 4).

Rellena la tabla con la medida correspondiente a cada uno de los participantes e identifica un recipiente que tenga capacidad similar. Explica en cada caso el procedimiento seguido.

Capacidad	Participante 1	Participante 2	Participante 3	Participante 4	Recipiente de tamaño similar
Puñado					
Almorzada					
Trago					

Figura 4. Enunciado de la tarea de medida

El objetivo de la tarea de medida de la capacidad era que los estudiantes aplicaran un procedimiento conocido para calcular la capacidad de un recipiente (llenarlo de un líquido) a una situación familiar (trago) y lo adapten para el caso de recipientes que no pueden contener líquidos. La meta última es que los estudiantes profundicen en el concepto de capacidad comprendiendo que depende tanto del recipiente como del contenido, por ejemplo, un cesto de caña no puede contener agua pero si naranjas. Para la medida de la capacidad pulmonar debían detectar que, en el caso particular de un globo de aire, capacidad y volumen coinciden. Por lo que, en esta circunstancia, el problema a resolver sería similar al de la tarea de comparación del volumen, pero debían de adaptar la estrategia para medirlo (en la tarea anterior no era necesario).

Se les proporcionaron recipientes de diferentes tamaños (unos graduados y otros no), balanzas, reglas, agua, un recipiente lleno de lentejas, globos, ... todos ellos situados en la mesa de trabajo para ofrecerles la posibilidad de poder usarlos (Figura 5). Cabe señalar que para no inducir la forma

de resolución de la tarea siempre había más materiales de los necesarios, incluyendo algunos que si no tenían las ideas claras podían inducirles a errores.

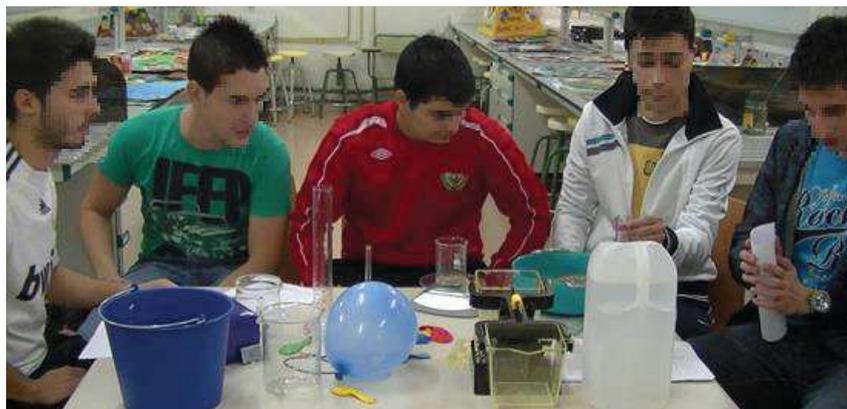


Figura 5. Estudiantes realizando la tarea de medida

## DESARROLLO DE LAS TAREAS

En este apartado se describen las estrategias llevadas a cabo por los estudiantes a la hora de resolver las tareas, las dificultades que encontraron y los errores cometidos. Además, se incluyen algunas de las secuencias que se utilizaron en la sesión de retroalimentación y que ilustran las afirmaciones que se realizan. En estas secuencias aparece el profesor identificado con una P y los estudiantes con las iniciales E1 a E5 para distinguir unos de otros. Esta distinción E1 a E5 simplemente se utiliza para describir cómo fue el diálogo, por lo que el estudiante al que se asigna E1 en el segundo diálogo no tiene por qué coincidir con E1 en el primer diálogo.

### Tarea de comparación

En este caso, en la parte relativa a comparación de capacidad los estudiantes utilizaron esencialmente dos estrategias de comparación: medir con la botella más pequeña el resto de recipientes y comparar las medidas; y el trasvase de líquidos del recipiente más grande al siguiente viendo que sobraba líquido (o al contrario).

La primera de las estrategias era desechada rápidamente ante la dificultad de medir con unidades no estándar (las medidas no eran exactas) y se adoptaba la segunda. Sin embargo, se observa que cuando la estimación del orden de la capacidad de las botellas no es correcto, los estudiantes cometen errores por no realizar algunas comprobaciones y/o hacen otras que son innecesarias, no haciendo uso de la propiedad transitiva de la capacidad. Un ejemplo de esto se puede ver en la secuencia que se muestra a continuación. Se puede apreciar que los estudiantes han elegido ordenar los recipientes a ojo, de mayor a menor, y verter el agua de un recipiente al siguiente, empezando por el mayor. Además, como se ve en la línea 12, ponen el recipiente G entre el E y el F, sin comprobar previamente su hipótesis de que G es más pequeño que F (cuando, de hecho no lo es).

1. E1: Esta es más grande (G). Por poco pero es más grande (que D).
2. E3: Échalo que cabe (mientras vierten D en H).
3. E1: Entra más o menos, sí.
4. E1 a E2: B es más grande que D y H, y ésta más grande que F (tras verter H en F).
5. Tras verter F en E y E en G
6. E3: Pues ya está, G es más grande que E.
7. E2: Después de la F va la G. Después la E.
8. E1: Pues ya está, esta (E) es más pequeña que esta (G).
9. E1: Esa (C) es más pequeña porque se ha llenado y la otra no estaba llena.
10. P: ¿Cuál es la más pequeña y porqué?
11. E1: Esa (C) es más pequeña porque se ha llenado y la otra no estaba llena.
12. P: ¿cuál es el orden entonces?

13. E1 y E2: Esto va así. [Ponen G entre E y F]
14. E1: Hemos echado este (E) aquí (G) y no se había llenado.

En el caso de la comparación del volumen, una vez más, aparece una tendencia a la comparación a través de la medida. Los estudiantes prefieren utilizar recipientes graduados para sumergir los objetos en agua. Solo cuando los objetos no caben en uno graduado se recurre a otro no graduado.

Sin embargo, como se puede ver en las líneas 14 a 20, el hecho de que el bote de espuma flotara, hizo que tuvieran que analizar qué es lo verdaderamente importante a la hora de calcular el volumen de un objeto: ¿qué sucede cuando flota? ¿Qué sucede si metemos la mano o si le ponemos peso encima para sumergirlo? ¿Influye la "presión" o fuerza que realizamos sobre el objeto? ¿Se puede quitar el tapón e introducir por separado el tapón y el bote? Algunos grupos se plantearon explícitamente estas cuestiones pero ninguno llegó a darles respuesta, todos las obviaron.

15. E1: Anda que como flote...
16. E4: Tenemos que atarle algo.
17. E1: Le metemos el dedillo.
18. E4: Tenemos que atarle algo.
19. E1: ¿Qué le vas a atar? Entonces ya pesa lo del bote más lo otro.
20. E4: Por eso, le quitamos el volumen del otro.
21. E2: Tú déjalo, si mientras se quede dentro...

Nos encontramos con errores como sumergir parcialmente los objetos (líneas 28 a 31) o meter la mano y no tener en cuenta que ésta también tiene volumen.

22. E3: Lo echamos todo en el mismo sitio (E3 señala un recipiente no graduado con agua).
23. E1: Lo echamos todo en el mismo sitio y vemos lo que suba el agua, ¿no?
24. E2: ¿Queréis que lo haga yo?
25. E1: En el cubo mejor, es más... (E1 mira el cubo que tiene más cerca que está graduado)
26. E4: Vamos metiendo todo a ver hasta dónde llegan.
27. E2: Pero tienes que llenar más el cubo para ver hasta dónde llega.
28. E1: ¿Por qué? Ya ves hasta donde sube.
29. E1 y E4: Llega hasta aquí.
30. E2: Pero no está entero metido.
31. E4 a P: ¿Podemos apuntar?
32. E1: Ah, es verdad, no está entero.
33. E1: Pues yo creo que no tiene nada que ver.
34. E4: Da igual que lo pongas con el lleno (el recipiente) o lo pongas a un nivel.

Entre las dificultades, vemos que algunos grupos muestran la necesidad por medir la cantidad de agua inicial para marcar el nivel, luego meter el objeto y volver a marcar el nivel alcanzado, otros sumergen cada objeto en un recipiente distinto con la misma cantidad inicial de agua y marcan el nivel alcanzado, y otros se plantean si pueden presionar el bote de espuma, pues según ellos tendrían que medir de alguna manera la fuerza con lo que lo hacen, incluso, alguno lo resuelve poniéndole una piedra encima.

Finalmente, lo resuelven utilizando estrategias como sumergir los objetos introduciéndolos todos con la mano hasta un mismo nivel y ven el nivel que alcanza el líquido; llenar completamente el recipiente, introducir el objeto y medir el agua que se derrama con un recipiente graduado; marcar el nivel de agua inicial y final para completarlo con agua. Como puede apreciarse en las líneas 33 y 34 es la conclusión a la que llega uno de los grupos.

## Tarea de medida

Tanto para el caso de medir la capacidad del puñado o de la almorzada, los estudiantes, rápidamente, cogen lentejas y las pesan, unos colocándolas directamente sobre el peso y otros colocándolas en un recipiente y luego desquitándoles el peso de este (eliminando la tara). Varios grupos realizan un intento de estandarizar la medida del puñado como media de los pesos de los puñados de los integrantes del grupo.

Sólo un grupo de los cinco grabados, después de haber pesado dos puñados se plantea que la capacidad se mide en litros y miden lo que ocupa un puñado de lentejas usando un recipiente graduado.

Aunque para el puñado no se puede utilizar el agua, para la almorzada sí pero todos siguen trabajando con lentejas y nadie se plantea hacerlo con agua.

En el caso de la medida del trago, todos los grupos usan agua, solo uno se plantea usar lentejas pero rápidamente descartan la idea por los riesgos implícitos al llenarse la boca de esta legumbre. El procedimiento seguido varía de unos grupos a otros: Utilizando una probeta graduada, la llenan de agua hasta una determinada graduación, por ejemplo 100 ml, se llenan la boca con el agua de la probeta y para determinar la capacidad pedida le restan el agua que ha quedado en la probeta. Otros se llenan la boca con agua del grifo, la echan en un recipiente graduado y miden la cantidad de agua. Sólo un grupo, llevado por la inercia de pesar el puñado y la almorzada de grano, llega a pesar una bocanada de agua para medir la capacidad. El resto no tiene dificultades sobre con qué unidades medir, de hecho, para aumentar la precisión de la medida un grupo se plantea utilizar una probeta de menor diámetro (líneas 34 a 38).

35. E4: 50, bueno un poco más, aproximadamente.

36. E3: Pues échalo aquí (uno más estrecho).

37. E5: Pero eso son mililitros.

38. E4: Esto también.

39. E3: Pero como es más ancho...

En el caso de la capacidad pulmonar, ninguno de los grupos tiene dificultad para enfrentarse a la tarea: todos eligen un globo y lo inflan de un tirón con el aire que tienen en los pulmones. Los problemas surgen cuando tiene que medir el aire contenido en el globo. Deben medir la cantidad de aire que tienen en los pulmones a través del cálculo del volumen del globo que lo contiene.

Al igual que en el caso de la capacidad del puñado y la almorzada, eligen como estrategia pesar el globo vacío e inflado. En este caso, como podemos ver en las líneas 39 a 51, la sorpresa de que la balanza marca 2g en las dos situaciones, a pesar de que tiene precisión hasta los miligramos, hace que invaliden el procedimiento, aunque ninguno cuestiona el porqué de esa medida. La conclusión a la que llegan es que el aire no pesa.

40. E2: Cero (Utilizan una balanza corriente)

41. E1: Esa no pesa.

42. E3: Mm... Espera a ver... (Utiliza la balanza de precisión)

43. E5: Ahí no cabe.

44. E3: Tenemos que ponerlo hasta que quede equilibrado.

45. E4: Pesa más el globo.

46. E2: Coge la chiquitilla.

47. P: 2 gramos.

48. E4: Pesan lo mismo, pero debería de pesar más porque hay más aire. (Prueban con el globo de otro compañero).

49. E5: Un poquitín menos, pon 1.7 o 1.8.

50. P: A mi se me ocurriría pesar uno vacío.

51. ¿Qué conclusión sacamos?

52. E4: Que el aire no pesa.

De estos grupos, uno se plantea medir la circunferencia del globo inflado con una regla rígida y como se les resbala rechazan el procedimiento.

Solo un grupo actúa diferente a los demás, aunque han inflado un globo se plantean soplar el aire directamente dentro de una probeta invertida llena de agua y sumergida en un barreño con agua, y ver el agua que desplaza. Lo descartan por no tener una probeta de ese tipo o una pajita a mano. Después intentan hacer lo mismo con el aire del globo pero no son muy habilidosos y se les sale fuera de la probeta. Este grupo a continuación se plantea enterrar el globo en arena fina dentro de un recipiente graduado y ver la cantidad de arena que desplaza el globo.

Finalmente, todos los grupos terminan sumergiendo el globo y midiendo el agua que desplaza. Al igual que en la comparación del volumen, miden el agua que se derrama al llenar el recipiente de agua completamente, o bien miden el agua que se requiere para que el nivel alcance el logrado cuando estaba el globo dentro.

### **Discusión y conclusiones**

Sobre la información recogida, y una vez identificadas las estrategias y detectados los errores, se han realizado dos tipos de análisis, uno durante la recogida de información y otro a posteriori (Kemmis y Wilkinson 1998). En el primer tipo se encuadra la revisión de los vídeos para extraer las distintas formas de resolver las tareas propuestas en los talleres y se analiza su validez, así como las ventajas e inconvenientes de cada una de las respuestas correctas. A partir de este material se montó un vídeo integrando las distintas actuaciones realizadas por los estudiantes y que han quedado descritas en el apartado anterior. En clase se visionó este vídeo y se fueron discutiendo con los estudiantes la validez de las estrategias puestas en juego, los interrogantes planteados y cómo se solucionaban esos conflictos.

Con esto se consigue proporcionar retroalimentación a la vez que se hace consciente a los futuros maestros de la gran variedad de respuestas que pueden aportar sus escolares, de la importancia de evaluarlas, y de que ellos deberán ser capaces, no sólo de resolver las tareas, sino de juzgar la validez de los razonamientos que aparecerán.

También se reflexiona con los estudiantes sobre la posibilidad de realizar en la escuela tareas semejantes a las que ellos han experimentado en los talleres y cómo adecuarlas a los distintos niveles.

Además, durante esta sesión de reflexión y valoración del contenido del video se apreció un cambio en la actitud de los estudiantes. Mientras que inicialmente los errores los concebían como evidentes y superados después del visionado del video y de la discusión de aula de las estrategias correctas y las dificultades, los estudiantes ya no veían lo errores como algo superado sino como propios (aunque ellos no fuesen los que aparecían en el video) y tomaban conciencia de la necesidad de reelaborar la estrategia o incorporar otras nuevas.

En la valoración final de la asignatura los estudiantes destacaron que las tareas de comparación y de medida les motivaron mucho pues reconocían que no solo habían aprendido al realizarlas sino que también eran fácilmente adaptables al trabajo en un aula de primaria.

Este análisis nos hace pensar que no basta con presentarles a los estudiantes para maestros los errores de los escolares sino que les motiva más y los asimilan mejor si los errores los consideran como propios o experimentan que ellos mismos los pueden cometer.

Otra idea que se ha mostrado muy potente ha sido la de ver a un/a compañero/a cometiendo el error, eso le ha hecho ponerse en su lugar. Este planteamiento debemos incorporarlo siempre que sea posible a nuestras aulas pues estimula a la vez que afianza los aprendizajes.

En las pruebas de evaluación de final de curso los estudiantes no volvieron a mostrar los errores anteriores lo que nos permitió afirmar que habían aprendido esos contenidos. En futuras investigaciones profundizaremos en analizar si el aprendizaje que se había producido era a corto plazo o era permanente.

## Referencias

- Frías, A.; Gil, F. y Moreno, M. F. (2001) Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Coord.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
- Gil, F. Montoro, A.B. y Moreno, M. F. (2016). Magnitud y su medida en la formación inicial de maestros de primaria. Diseño de una investigación. En Castro, E. Castro, E. Lupiáñez, J.L., Ruiz, J.F. y Torralbo, M. (Edts). *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*. Granada: Comares
- González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.
- Kemmis, S. y Wilkinson, M. (1998). Participatory action research and the study of practice. En B. Atweh, S. Kemmis & P. Weeks (Eds.), *Action research in practice: Partnerships for social justice in Education*. London: Routledge.
- Molina, M; Castro, E.; Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), pp. 75-88.
- Moreno; M. F.; Gil, F. y Frías, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Coord.) *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
- Moreno; M. F.; Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.
- Olmo, M. A.; Moreno; M. F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- Passelaigue, D. y Munier, V. (2015). School teacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 89, pp.307–336.
- Pizarro, N., Gorgorió, N., Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM.
- Reece, C. S. y Kamii, C. (2001). The Measurement of Volume: Why Do Young Children Measure Inaccurately? *School Science and Mathematics*, 101(7) E356-61.
- Shen, J. y Jackson, D. F. (2013). Measure the Volume of a Tree: A Transformative Modeling Lesson on Measurement for Prospective Middle-school Science Teachers. *Journal of Science Teacher Education* 24: 225–247
- Vergnaud, G.; Rouchier, A.; Desmoulières, S.; Landre, C.; Marthe, P.; Ricco, G.; Samurcay, R.; Rogalski, J. y Viala, A. (1983). Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième - 12-13 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4(1), pp. 71-120.