LA TENDENCIA A RESTAR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE M.C.D EN ALUMNOS DE PRIMARIA

The tendency for elementary school students to subtract in the resolution of GCD problems

González-Calero, J. A.[a], Martínez, S.[a] y Sotos, M. A.[a]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

En esta comunicación se presentan resultados de una investigación con alumnos de primaria sobre la resolución de problemas verbales ligados al concepto de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.). Los principales objetivos de la investigación eran evaluar la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas y analizar los distintos patrones o procesos de resolución empleados. En particular, esta comunicación se centra en una dificultad que presentan los estudiantes en problemas cuya solución se correspondería con el m.c.d. de dos cantidades dadas en el enunciado. En este sentido, resultados, tanto cuantitativos como cualitativos, apuntan a que el origen de la dificultad podría deberse a que los estudiantes intentan relacionar las cantidades intervinientes en el enunciado mediante la sustracción atendiendo al tamaño de las cantidades conocidas y de la solución, sin involucrar en la resolución del problema las ideas de múltiplo y divisor.

Palabras clave: *mínimo común divisor, máximo común divisor, problemas verbales, educación primaria*

Abstract

This paper presents results from a study with primary students on solving word problems related to the concepts of greatest common divisor (GCD) and least common multiple (LCM). The main objectives of the research were to evaluate the students' competence in the resolution of such problems and analyze the different patterns or processes of resolution. In particular, this paper is focused on a difficulty related to problems solved using the GCD of two given quantities in the statement. In this sense, both quantitative and qualitative results are running that the origin of the difficulty could be due to students trying to relate the quantities involved in the statement through subtraction because of the size of the known quantities and the solution, without involving in the resolution the ideas of multiple and divider.

Keywords: *least common multiple, great common divisor, word problems, primary school education*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Investigaciones en didáctica de las matemáticas señalan la existencia de dificultades en la comprensión y aprendizaje de la divisibilidad en general y, de manera más concreta, en los conceptos de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.). Así, en la línea de investigación de la divisibilidad, Zazkis y Campbell (1996), en un estudio con estudiantes para maestros (en adelante, EPM) centrado en el concepto de divisibilidad y su relación con otros conceptos, observaron la falta de competencia de los estudiantes en este campo, así como una fuerte tendencia a la utilización de razonamientos puramente procedimentales.

González-Calero, J. A., Martínez, S., y Sotos, M. A. (2016). La tendencia a restar en la resolución de problemas de m.c.d. en alumnos de primaria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 295-304). Málaga: SEIEM.

Además, dentro del estudio de la divisibilidad, existen dos conceptos, habituales en los currículos de educación primaria y secundaria, que resultan particularmente difíciles de comprender y utilizar por parte de los alumnos: el m.c.d. y el m.c.m. Así, Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (2016) acreditaron un conocimiento matemático insuficiente de las propiedades del m.c.d. y m.c.m. por parte de EPM a partir de los resultados del estudio internacional TEDS-M.

Brown, Thomas y Tolias (2002) y más tarde Bodí (2006) observaron que los estudiantes no eran capaces de reconocer la implicación del m.c.m. en problemas verbales si no se mencionaba explícitamente la expresión “mínimo común múltiplo” en el enunciado, aunque eran capaces de usar adecuadamente el algoritmo para el cálculo del m.c.m. Del mismo modo que sucede con el m.c.m., Noblet (2013) demostró que el conocimiento sobre el m.c.d. es limitado para los estudiantes en general y para los EPM en particular, lo que provoca graves dificultades en la creación y resolución de problemas de m.c.d.

Así pues, las investigaciones existentes en esta línea apuntan a que los conocimientos sobre estos conceptos suelen estar basados en reglas que carecen de explicaciones intuitivas para los alumnos (por ejemplo, Dias, 2005). En este sentido, Zazkis y Gadowsky (2001) consideran que esto es debido a que las prácticas docentes actuales se centran en el aprendizaje de los cálculos en lugar de la estructura y propiedades de los números.

Dentro de esta línea de investigación, acerca de los elementos m.c.d. y m.c.m., Martínez, González-Calero y Sotos (2015) observaron, a partir de una investigación con EPM sobre la resolución de problemas verbales ligados a estos conceptos, que estos estudiantes presentan una gran dificultad a la hora de decidir entre el m.c.d. y el m.c.m. A este respecto, resultados, tanto cuantitativos como cualitativos, apuntaban a que el origen de la dificultad podría deberse a que los estudiantes no involucran las ideas de múltiplo y divisor en la resolución, sino que se guían por las palabras clave del enunciado para desencadenar el cálculo algorítmico del m.c.d. o del m.c.m.

Aunque el origen de las dificultades de este tipo de problemas en particular y de los problemas aritméticos en general puede hacer referencia a multitud de consideraciones, en esta comunicación se estudia un tipo de dificultad relacionada con la influencia que pueden ejercer las cantidades presentes en el enunciado. En este sentido, dentro de la resolución de problemas, muchas investigaciones (véase, por ejemplo, Campistrous y Rizo (1999) o Capote (2005)) apuntan a la tendencia de los alumnos a la ejecución inmediata sin realizar una reflexión previa del problema. De este modo, los alumnos, influenciados por las cantidades presentes en el enunciado, tratan de operarlas directamente sin realizar un análisis del problema e incluso sin comprender el enunciado. Este fenómeno se da incluso en problemas cuyos enunciados relatan situaciones absurdas, véanse por ejemplo los resultados obtenidos por estudiantes de primaria en el famoso problema *La edad del capitán* (Grenoble, 1980, citado en Puig y Cerdán, 1988).

En línea con los trabajos anteriores, Abreu y Velázquez (2013) realizaron una investigación sobre la resolución de problemas con alumnos de secundaria que evidenció una marcada tendencia a la ejecución inmediata al no lograr hacer una representación mental del enunciado y propusieron un sistema de procedimientos para evitar esta tendencia y contribuir al desarrollo del pensamiento relacional. Socas, Hernández y Palarea (2014), resumiendo resultados de los trabajos realizados en el campo de resolución de problemas y formación de profesorado en la Universidad de La Laguna, señalan que esta estrategia es habitual igualmente entre los EPM. Así, estos estudiantes son proclives a operar con los datos del problema, sin mostrar una clara comprensión del mismo y sin identificar las relaciones presentes en los problemas.

Bell, Fischbein y Greer (1984) realizaron un estudio con estudiantes de 12-13 años orientado a explorar cómo distintas variables (tamaño de los números, categoría semántica del problema o contexto) influían en la selección de la operación aritmética a emplear a la hora de resolver problemas multiplicativos de una etapa. En el seno de este trabajo observaron cómo determinadas concepciones numéricas erróneas están fuertemente influenciadas por aspectos tales como el contexto, de tal modo que los estudiantes pueden seleccionar la cantidad sobre la que operar y la operación a realizar en función del tamaño del número que se considera adecuado como solución en la situación dada. Por ejemplo, en uno de los problemas que plantearon (y que podría traducirse como: “Una libra de carne cuesta 2,56 libras. Un ama de casa paga dos libras por un trozo de dicha carne. ¿Cuánto pesará éste?”) se observaron un número relativamente alto de respuestas en que la solución era calculada mediante una resta en vez de mediante una división. Mediante entrevistas determinaron que los estudiantes que daban esta respuesta habían entendido correctamente el enunciado del problema, es más, anticipaban que el trozo de carne debía pesar menos de una libra. Precisamente, esto los inducía a utilizar la resta, pues entendían que la división 2,56/2 debía descartarse porque la solución no tenía sentido mientras que la substracción 2,56−2 ofrecía una respuesta con orden de magnitud correcto. Nótese que, en esta estrategia, coexiste otra tendencia habitual entre los estudiantes: la de operar sobre la cantidad mayor.

MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS

La presente comunicación se engloba en el seno de un proyecto de investigación orientado en último término a la formación del profesorado de matemáticas en educación primaria. Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), el cual constituye una evolución del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). En concreto, la comunicación que aquí se presenta, se encuadraría en una fase del mencionado proyecto con los siguientes objetivos: 1) analizar la competencia de alumnos de 6º de primaria en la resolución algorítmica de problemas verbales en situaciones de divisibilidad que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m. y 2) evaluar la influencia de palabras clave del enunciado de un problema verbal que involucra los conceptos m.c.d. y m.c.m. en la resolución de estos alumnos.

Así, en esta comunicación se presentarán algunos resultados preliminares de esta investigación, prestando especial atención a un conjunto de actuaciones en las que los estudiantes acreditaron dificultades para resolver un tipo específico de problemas verbales. En particular, este trabajo se centra en ilustrar un fenómeno observado mediante el cual estudiantes denotaron una incapacidad para resolver adecuadamente los problemas relacionados con el m.c.d. En concreto, los estudiantes, trataban de relacionar las cantidades conocidas, restándolas con el objeto de obtener un divisor (fuese o no máximo) que cumpliese con las especificaciones del enunciado.

METODOLOGÍA

Con el fin de abordar los objetivos propuestos, se diseñó una investigación con dos etapas, una cuantitativa y otra cualitativa.

En el estudio cuantitativo participaron 155 estudiantes de 6º curso de Educación Primaria de 4 colegios de la ciudad de Albacete. La recogida de datos tuvo lugar en el tercer trimestre, cuando todos los grupos habían trabajado ya los temas dedicados a divisibilidad. En esta fase de la investigación los participantes debían resolver una prueba escrita compuesta por cuatro problemas verbales. Se trata de problemas verbales en los que hay dos cantidades conocidas y la solución es el m.c.d. o el m.c.m. de los dos únicos datos dados en el enunciado. En concreto, el instrumento empleado en el estudio cuantitativo combina dos factores: 1) problemas cuya solución es el m.c.d. o el m.c.m. y 2) problemas en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo* o la palabra clave *mínimo*. De la combinación de estos dos factores se obtienen los cuatro problemas empleados en la prueba escrita: 1) Problema *divmax* (problema con solución el m.c.d. de los datos del problema y en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo*); 2) Problema *divmin* (solución el m.c.d. y palabra *mínimo*); 3) Problema *mulmax* (solución el m.c.m. y palabra *máximo*); y 4) Problema *mulmin* (solución el m.c.m. y palabra *mínimo*). Los enunciados de los problemas usados se presentan en la Tabla 1.

El análisis de las producciones de los estudiantes en el estudio cuantitativo debía permitir, además de dar respuesta parcialmente a los objetivos investigadores, la selección de participantes para la siguiente etapa de la investigación: un estudio cualitativo. Esta fase de la investigación consistió en un estudio de casos, en el que se grabó a parejas de estudiantes resolviendo problemas verbales como los empleados en la prueba escrita. A partir de las producciones en lápiz y papel, se pretendía identificar patrones o tendencias de actuación a la hora de resolver los problemas y conformar parejas de interés para el estudio de casos. Así, el estudio de casos podría ofrecer información sobre los orígenes de las dificultades o tendencias mostradas por los estudiantes durante la resolución individual en lápiz y papel.

Tabla 8. Enunciados de los problemas de la prueba escrita

Nombre	***Código***	***Enunciado***
Las Cuerdas	*Divmax*	Dos cuerdas, de 18 cm y 24 cm respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales. Calcula el tamaño máximo de estos trozos.
Los Cables	*Divmin*	Se tienen dos cables, uno de 42 metros y otro de 35. Si se quieren cortar en el mínimo número de trozos iguales, ¿cuál será la longitud de los trozos?
Felipe y Alberto	*Mulmax*	Felipe y Alberto estudian en la misma universidad y coinciden de vez en cuando en algunas clases, prácticas, etc. Además, pase lo que pase, Felipe va a la cafetería cada 18 días y Alberto cada 15. Si hoy han coincidido en la cafetería, ¿cuánto tardarán como máximo en volver a verse?
El Faro	*Mulmin*	Un faro se enciende cada 12 segundos y otro cada 18 segundos. Si se acaban de encender a la vez en este momento, ¿cuál es el mínimo tiempo posible que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir?

RESULTADOS

Resultados desde el estudio cuantitativo

La Tabla 2 presenta los resultados tras la codificación de las respuestas de los estudiantes en la prueba escrita. Se muestran los resultados desglosados para cada uno de los cuatro problemas. A la hora de codificar las respuestas se han considerado cuatro categorías diferentes: *Correcto*, *div↔mult, Resta* y *Otros*. La categoría *Correcto* da cuenta de todas aquellas resoluciones en las que es evidente que el resolutor ha intentado el cálculo adecuado del m.c.d. o m.c.m., ya sea algorítmicamente o por otro procedimiento (por ejemplo, mediante el uso de representaciones auxiliares). La categoria *div↔mult* hace referencia a aquellas resoluciones en que el resolutor confunde los divisores con los múltiplos o viceversa y no resuelve correctamente el problema. La categoría *Resta* corresponde a estudiantes que relacionan las cantidades presentes en el enunciado mediante una resta. Dentro de esta categoría, entre paréntesis, se muestra el número de alumnos que utilizan el resultado de la resta como divisor dando una solución correcta al problema pero sin utilizar un método razonado para la obtención del m.c.d. Por último, la categoría *Otros* comprendería aquellas actuaciones erróneas en las que el resolutor no ha abordado el problema o si lo ha hecho, lo ha hecho de manera errónea o incompleta sin que sus estrategias puedan clasificarse dentro de ninguna de las dos categorías definidas previamente.

Tabla 2. Resultados de la prueba escrita por problema y por tipo de dificultad

			Dificultades		
	N	*Correcto*	*div↔mult*	*Resta(*)*	*Otros*
Problema divmax	155	29	9	16 (8)	101
Problema divmin	155	24	13	21 (11)	97
Problema mulmax	155	60	8	33 (0)	54
Problema mulmin	155	54	13	23 (0)	65

(*) Estudiantes que realizan una resta y utilizan la diferencia como m.c.d.

A tenor de los datos, se observa que los resolutores encuentran muchas dificultades en la resolución de este tipo de problemas. De hecho, sólo 11 de los 155 estudiantes (7,1%) resolvieron con solvencia todos los problemas.

Además, como puede observarse en la Tabla 2, los resolutores hallaron más dificultades en la resolución de problemas de m.c.d. En concreto, 20 alumnos resolvieron bien ambos problemas de m.c.d. (12,9%) frente a los 39 alumnos que resolvieron bien los 2 problemas de m.c.m. (25,2%).

Por otro lado, una de las hipótesis investigadoras que motivó el diseño del instrumento se sustentaba sobre la idea de que la palabra *máximo* y la palabra *mínimo* podrían llevar al estudiante al cálculo del m.c.d. y del m.c.m., respectivamente, sin una reflexión de la situación descrita en el enunciado. Sin embargo, a la vista de los resultados obtenidos, no parece apreciarse una diferencia significativa en el hecho de que en enunciado apareciese la palabra máximo (*divmax, mulmax*) o mínimo (*divmin, mulmin*). En cambio, sí que resulta destacable la tendencia de los alumnos a utilizar la resta de las cantidades involucradas en el enunciado como posible solución del problema, incluso algunos de ellos (el 5,2% en el problema *divmax* y el 7,1% en el problema *divmin)* creen que su procedimiento es adecuado al coincidir el resultado de la resta con el m.c.d. en estos problemas concretos. Este aspecto se verá con más detalle en el análisis cualitativo.

Resultados desde el estudio de casos

Un mes después de realizar la recogida de datos de la fase cuantitativa, se procedió a la grabación de la resolución de problemas de la prueba escrita por parte de parejas de estudiantes. Se seleccionaron participantes que hubieran mostrado comportamientos de interés desde el punto de vista investigador al resolver los problemas individualmente en lápiz y papel. En esta comunicación se presentan extractos de resoluciones de una de las parejas filmadas (Daniel-Sergio) con el fin de ilustrar la tendencia a realizar la resta de las cantidades explicitadas en el enunciado para la obtención del m.c.d., así como para ofrecer indicios explicativos del origen de estas actuaciones. En las Figuras 1 y 2 se muestran las resoluciones en la prueba escrita de Sergio a los problemas *divmin* y *divmax*, respectivamente.

En el estudio de casos a la pareja Daniel-Sergio se les propuso que resolvieran en pareja en la pizarra de un aula varios problemas, uno de ellos era el problema *divmin*, cuyo enunciado es el siguiente:

"Se tienen dos cables, uno de 42 metros y otro de 35. Si se quieren cortar en el mínimo número de trozos iguales, ¿cuál será la longitud de los trozos?"

A continuación, se presentan extractos de esta resolución donde se evidencia la tendencia a restar las cantidades involucradas en el enunciado para usar este valor como m.c.d. El protocolo se inicia con la lectura del enunciado por parte de Sergio y la escritura en la pizarra por parte de Daniel de "42 m; 35 m y ¿Trozos?".

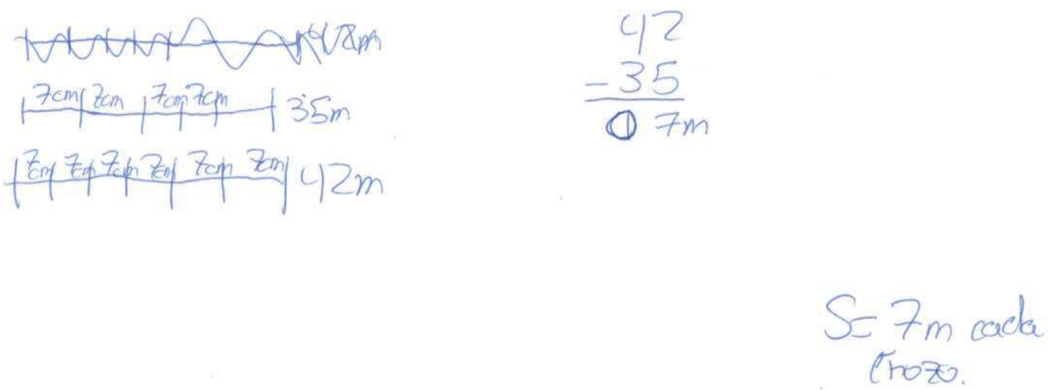

Figura 9. Resolución de Sergio del problema *divmin*

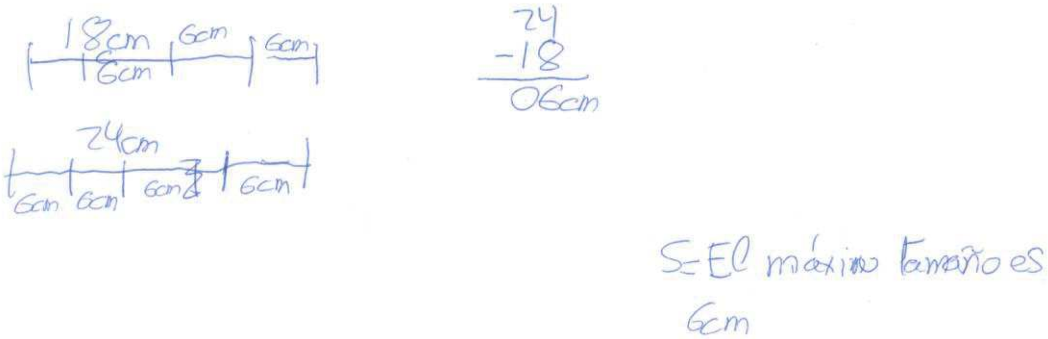

Figura 10. Resolución de Sergio del problema *divmax*

Una vez leído el problema tratan de analizarlo, buscando el método de resolución:

7. S: ¿Hay que hacer lo mismo? (*haciendo referencia al problema que habían resuelto anteriormente que implicaba el cálculo del m.c.m.*)
8. D: Sí, lo de… lo de sacar los múltiplos.
9. S: Sí.
10. D: No, al revés, el mínimo.
11. S: Claro, mínimo…
12. D: No, tendríamos que dividir… Noo es así.
13. S: Pero a ver, si tenemos de 42 y 35 metros, tenemos que seguir hasta ver cuántos trozos se pueden hacer de cada… ¿no?
14. D: No sé, es que hay que sacar los metros de cada trozo.
15. (*Silencio de 5 segundos*)
16. D: O sea, la longitud de los trozos…
17. S: Claro, (…) éste va a medir 42… entre… entre 2, o entre 3… Sería entre 2, entre 3, entre 4…

Los primeros instantes del proceso de resolución evidencian que los estudiantes comprenden adecuadamente el objetivo y la necesidad de buscar un divisor común a ambos que sería la longitud de los trozos (ítems 12 y 17). A partir de ese momento, inician la búsqueda de un divisor común. No hay alusiones a la necesidad de que éste sea mínimo.

18. D: **Es que yo no sé qué operación habría que hacer**, porque está claro que si…

19. S: Y el 35, ¿qué? (*Insta a su compañero a que escriba también el número 35, al igual que ya había indicado el número 42*). Y sería, da igual a 42 entre 2, a 12… digo a… a 11, a 21 que diga… Ponlo, a 21…

20. D: No, pero podríamos hacerlo ya…

21. S: A 21 entre 2, luego si no da entre 3, entre 4…

22. D: **Lo podríamos sacar de 42, 35… es que así nos daría exactos, hasta llegar a cero… Mira así 42… 35, el siguiente pues sería 35… 28, 21, 14, 7… y ya 0.** (*Escribe: "42= 35, 28, 21, 14, 7, 0"*). Y aquí hacemos lo mismo… así de… sería una serie 35 menos 7, 28 menos 7, 21 menos 7, 14 menos 7, 7 menos 7, cero.

23. S: Pero es como…

24. D: ¡Yo que sé! ¡Ja! (*Ríe*). Pero así sabríamos que los trozos serían de 7…

25. S: Claro.

26. D: O…entonces, ¿cuál hacemos?

27. S: Sí porque…

28. D: O… dividimos y ya está.

29. S: No, así, si cabe a 7… (*Señalando lo que ha escrito en la pizarra el compañero*).

...

36. E: ¿Por qué es la solución 7?

37. D: Porque no, ehh al… Hemos ido restando de 7 en 7 y nos da, nos da exacto los trozos.

Los estudiantes muestran dificultades en identificar cómo obtener el divisor (ítem 18). Daniel opta por calcular el número relacionando los números intervinientes en el enunciado, restándolos y utilizando esta distancia para construir una serie que indicaría los trozos (ítem 22), con lo que Sergio se muestra de acuerdo (ítems 27 y 29). La sustracción repetida puede ser una actuación adecuada y con sentido, sin embargo, el problema se debe al modo erróneo de obtención del número 7 (ítem 24).

Una vez encontrado el valor, gracias a la resta de las dos cantidades, realizan la comprobación gráfica del resultado:

45. D: … una raya… Uff, qué mal, bueno… 42 metros. Y otra aquí de 35. (*Dibuja dos líneas y encima de cada una escribe los metros que miden*).

46. S: Y caben a… ésta a… a 6 trozos… (*Señala la raya de 42 m*).

47. D: Mira así es… 7 metros, 7 metros, 7, 7… sería así (*Divide la raya de 35 metros en trocitos y debajo de cada uno escribe el número 7*).

48. S: 4, 5, 4… trozos.

49. D: Aquí hay 5… (*Refiriéndose a la raya que representa el cable de 35 metros*). 7 por 5, 35, justos. Y aquí sería más pequeños, 7… (*Comenzando a dividir la raya que representa el cable de 42 metros*).

50. S: Claro.

51. D: … 7, 7, 7, 7… 1, 2, 3, 4, 5… justos, sí 7. (*Divide la línea en 6 trozos*).

Las verbalizaciones de ambos estudiantes indican que se sienten satisfechos con el resultado, pero dudan acerca del procedimiento de obtención del número 7 (ítems 23, 26 y 28). Así pues, y dado que el procedimiento se basa en la resta de las dos cantidades intervinientes en el enunciado, el entrevistador aboga por cambiar estos datos para comprobar si usarían el mismo procedimiento de resolución:

52. E: Vale, y si en vez de ser una de las cuerdas de 35 fuesen de 30…

53. D: De 30 y la otra, ¿de cuánto sería?

54. E: De 42.

55. D: De 30 y de 42…

56. S: Pues… 42. **Restamos 42 menos 30**, salen 12. Y haríamos lo mismo de… (*Señalando la representación hecha por el compañero*) trozos de 12. Bueno… sí.

Los estudiantes abogan por utilizar el mismo tipo de resolución, restando las cantidades (ítem 56), lo que confirma el significado que le otorgan a la diferencia calculada a partir de los datos del enunciado. Cuando se les solicita la confirmación del resultado mediante una comprobación gráfica, advierten el error:

57. E: Dibújalo.

58. D: Espera, a ver… (*Le da la tiza al compañero*).

59. S: Aquí hemos… ehh… 41 más 7, no, 35 más 7 son 42… Pues 30 más… 12, serían 42.

60. D: Sí, bueno pero… tendríamos, tendrían que ser trozos iguales todos. Y que no te sobrase, ¿no?

61. S: Claro. Ahora tendríamos que hacer lo mismo, a ver… no, 42 está hecho. 30 (*Escribe: "30="*) ehh, ya pero no son iguales… Si fuese 30… (*Silencio de 10 segundos*) pues… ehhhh… (*Borra el 30 que acaba de escribir con la mano*). Y teníamos… a ver …Si fuese de 30 pues…

La representación gráfica permite a los estudiantes advertir que el método de resolución no es adecuado, ya que no cumple la condición de igualdad de los trozos exigida en el enunciado como ellos mismos verbalizan (ítem 61). A partir de ahí, se lanzan a la búsqueda de una solución alternativa, dividiendo por un número diferente a la resta pero aleatorio:

66. D: Podríamos buscar para dividir 42 y que te dé exacto. Y dividir 30 y que te dé exacto…

67. S: No, a ver… Se puede hacer ehh… 5 trozos de 6, como son **6 por 5**, 30, y ya está hecha la…

68. D: Hmm pero… tienen… y los dos cables se tienen que partir en trozos de la misma longitud.

…

77. S: (*Continúa mirando a la pizarra. Silencio de 18 segundos*). Tenemos que dividir ehh… que…

78. D: Es que para calcular los de 42 y 35 también podríamos haber dividido varias veces y ya…

79. S: Claro, **42 entre 2, entre 3**… ¿no?

80. D: Y lo del 30 también se podría dividir **30 entre 6, 5**… ó 30 entre 5, 6… Bueno no, sería el mínimo, sería 30 entre 5. Y, ¿42 entre 6?

81. S: **42 entre 6**…

…

88. D: Mira, a ver, te darían 7 trozos de, de, de 6 metros. Y abajo son… (*refiriéndose al número 30*) son 5 trozos de 6. A ver espera mira…

89. S: Sí, sí, sí, sí.

90. D: 42… dividimos los dos entre 6… Y aquí serían 7. (*Escribe la división 42 entre 6, cociente 7 y resto 0*).

…

95. S: De 42 serían 7 trozos de 6, y de 30 ehh… 5 trozos de 6.

96. D: 5 trozos de 6, sí.

Las intervenciones señalan que los estudiantes utilizan un procedimiento de ensayo y error, buscando simplemente algún divisor a ambos números (ítems 67, 79 y 90) sin atender al tamaño de los trozos. Para comprobar este hecho el investigador pregunta:

97. E: ¿Y estás seguro de que no se pueden hacer los trozos mayores?

98. D: Podríamos dividir entre números más altos, a ver…

99. S: No pero… a ver…

100. D y S: (*Mirando a la pizarra* en silencio durante 10 segundos).

101. D: Yo creo que sería así… el resultado.

102. S: Sí.

CONCLUSIONES

En relación con la competencia en la resolución algorítmica de problemas verbales que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m, los resultados presentados señalan serias dificultades por parte de los estudiantes de primaria. Así, el estudio ha puesto de manifiesto la dificultad para resolver adecuadamente problemas verbales que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m. En particular, en la resolución de problemas de m.c.d, los estudiantes han manifestado la tendencia a relacionar las cantidades dadas en el enunciado de manera sustractiva, sin tomar en consideración la posibilidad de comparar sus divisores.

Las intervenciones de los estudiantes parecen señalar que los estudiantes están basando sus planteamientos en la búsqueda de un número que encaje en los datos del enunciado y en la previsión que hacen del tamaño de la eventual solución, y que para ello utilizan la operación resta. Este hecho puede estar altamente influenciado por los hábitos en la resolución de problemas aritméticos, que tienen con frecuencia los estudiantes de primaria, en los que la elección de una de las operaciones básicas entre las cantidades involucradas en el enunciado es clave y la aplicación de la operación identificada desemboca inmediatamente en la solución del problema (por ejemplo, Puig y Cerdán, 1988). Así parece que los alumnos reducen el análisis del problema a la búsqueda de la operación a aplicar influenciados por el tamaño de las cantidades conocidas y la semántica del problema. Estos resultados se alinean con los publicados por Bell, Fischbein y Greer (1984) para otra categoría de problemas verbales.

Desde un punto de vista didáctico, este tipo de resultados señalan la necesidad de incrementar la riqueza y variedad de los problemas verbales, considerando múltiples variables (por ejemplo, categorías semánticas o el tamaño de los números). Además, esta comunicación pone de manifiesto la utilidad de las representaciones auxiliares en la resolución de problemas, en este caso en la comprobación de los resultados, ya que facilita que los estudiantes pueden advertir por sí mismos sus errores y modificar sus líneas de actuación.

Referencias

Abreu, M. A., & Velázquez, D.C. (2012). Desarrollo del pensamiento relacional a través de la resolución de problemas matemáticos en la secundaria básica. *Opuntia Brava, 45*(11). Recuperado de: http://www.opuntiabrava.rimed.cu/pdf/articulo_mauricio%20_OK_.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129-147.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. Tesis doctoral. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante.

Brown, A., Thomas, K., & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: success and understanding. En S. Campbell, & R. Zazkis, *Learning and teaching number theory* (págs. 41-82). Westport: Ablex Publishing.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(2), 31-45.

Capote, M. (2005). *La etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos para la escuela primaria*. C. Habana: Pueblo y Educación.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Dias, A. (2005). Using lattice models to determine Greatest Common Factor and Least Common Multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 730-738.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P., & Rico, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XX1, 19*(1), 135-158.

Martínez, S., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A. (2015). La influencia del enunciado en la resolución de problemas de m.c.d. y m.c.m. de estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 343-350). Alicante: SEIEM.

Noblet, K. (2013). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate MAthematics Education* (págs. 219-225). Denver: Sigmaa.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Socas, M. M., Hernández, J., y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro- Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R. & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41–52). Reston, VA: NCTM.