

¿RECONOCEN LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA LAS SECUENCIAS DE RESULTADOS ALEATORIOS?

Do secondary school students recognise sequences of random results?

Esteban, R.^a, Batanero, C.^b, Serrano, L.^b y Contreras, J. M.^b

^aUniversidad de Zaragoza, ^bUniversidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo fue identificar las características que los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria asignan a las secuencias de resultados aleatorios. Se comparan las respuestas y argumentos de 159 estudiantes de tres niveles educativos a cuatro tareas que en la investigación previa se conocen como tareas de reconocimiento de la aleatoriedad. Manteniendo el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda y la longitud total de la secuencias, se varían la frecuencia de resultados y la longitud de las rachas. Los resultados sugieren que los alumnos reconocen las características de las secuencias y tienen buena percepción de la estabilidad de la frecuencia relativa, pero esperan rachas más cortas de las habituales en un proceso aleatorio. Se observan mejores resultados que en investigaciones previas y mejor razonamiento en los alumnos mayores.

Palabras clave: aleatoriedad, reconocimiento, estudiantes de educación secundaria obligatoria

Abstract

The aim of this work was to identify the characteristics that secondary school students assign to sequences of random results. The responses and arguments from 159 students in three different educational levels to four items, which in previous research are termed as recognition tasks are compared. With the same random experiment (flipping a coin) and the same total length, the frequency of results and the length of runs were varied. Results suggest that students recognise the characteristics of the sequences and perceive the stability of frequencies; however, they expect shorter runs than those predicted in a random sequence. We observe better results than in previous research and more correct reasoning in the older students.

Keywords: randomness, perception, secondary school students

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas diferentes currículos (ej., CCSSI, 2010; NCTM, 2000) inciden en la importancia de la probabilidad, y recomiendan que los estudiantes realicen experimentos aleatorios con material manipulativo o mediante simulación, obtengan datos empíricos de los mismos y comparen los resultados obtenidos con sus predicciones. Estas recomendaciones se siguen en España, donde se adelantó la enseñanza de la probabilidad al último ciclo de Educación Primaria en el anterior currículo (MEC, 2006); la tendencia continúa en el actual currículo (MECD, 2014).

El aprendizaje de la probabilidad, desde este enfoque frecuencial, requiere que los estudiantes adquieran las ideas de aleatoriedad, variabilidad e independencia (Sánchez y Valdés, 2015). También requiere que comprendan las características de las secuencias aleatorias, y perciban posibles sesgos en la producción de las mismas. El concepto de aleatoriedad es el punto de partida de la teoría de probabilidades, pero Batanero y Serrano (1995) sugieren que la diversidad de

interpretaciones del mismo, favorece la existencia de sesgos subjetivos en el reconocimiento de las secuencias aleatorias y sus características. Por otro lado, Sánchez, García y Medina (2014) indican que es importante que el estudiante adquiera una correcta percepción de la aleatoriedad para poder progresar en el aprendizaje de la probabilidad. El objetivo principal de nuestro trabajo es evaluar las características que los alumnos que han estudiado probabilidad en la educación primaria asignan a las secuencias aleatorias y compararla en alumnos de 2º, 3º y 4º cursos de la Educación Secundaria Obligatoria. Un segundo objetivo es comparar con los resultados de investigaciones previas, realizadas en un periodo en que la probabilidad no se incluía en este nivel educativo.

FUNDAMENTOS

Las principales investigaciones sobre comprensión de las secuencias de resultados aleatorios, parten de los trabajos sobre el desarrollo cognitivo de la idea de azar de Piaget e Inhelder (1975) y Fischbein (1975). Los primeros autores supusieron que la comprensión del azar es complementaria a la idea de causa y efecto y que requiere de razonamiento combinatorio y proporcional, todo lo cual supone una lenta maduración. Por el contrario, Fischbein postuló la existencia de intuiciones parcialmente formadas sobre la aleatoriedad en los niños y, como consecuencia, indicó la conveniencia de adelantar la enseñanza del tema, para educar esta intuición.

Un autor que ha tenido gran influencia en la investigación sobre comprensión de la probabilidad es Green (1983), quien reprodujo los experimentos de Piaget e Inhelder en versión de papel y lápiz, construyendo un cuestionario que pasó a 2930 estudiantes ingleses de entre 11 y 16 años. Uno de sus ítems pedía a los niños decidir cuál entre dos secuencias de 150 lanzamientos de una moneda equilibrada era aleatoria, justificando la respuesta. El autor indicó que la mayoría de los niños consideraba aleatoria precisamente la secuencia que era inventada, porque esperaban un balance de caras y cruces muy cercano al 50% y no aceptaron como aleatorias las rachas de más de dos o tres resultados.

La investigación posterior sobre percepción de la aleatoriedad se ha concentrado especialmente en sujetos adultos (Bar-Hillel y Wagenaar, 1991; Batanero, 2015; Falk, 1981; Schreiber, 2014; Wagenaar, 1972). En dichas investigaciones se han utilizado dos tipos generales de tareas: a) En las *tareas de generación* (Engel y Sedlmeier, 2005; Serrano, 1996) se pide a los sujetos inventar una secuencia de resultados que parezca ser generada por un dispositivo aleatorio (por ejemplo, una secuencia de lanzamientos de una moneda); b) en las *tareas de reconocimiento* (e.g., Batanero y Serrano, 1999; Chernoff, 2011) se pide a los sujetos decidir cuál entre varias secuencias de resultados aleatorios es más probable o bien cuál, entre varias secuencias es aleatoria.

Nuestro trabajo se centra en tareas de reconocimiento, adaptadas de otras utilizadas en el trabajo de Batanero y Serrano (1999), que fue realizado por 277 estudiantes españoles de 13 y 17 años. Dichos autores proponen secuencias de 40 lanzamientos de una moneda equilibrada y varían dos variables en las secuencias: a) La proporción de caras, próxima, pero no exacta a 0,5 en tres de las secuencias e igual a 0,3 en la otra; b) la longitud de la racha más larga, que llega a cinco resultados idénticos en una de estas secuencias. Sin embargo, los autores no combinan sistemáticamente las dos variables en su prueba. Los resultados indican los siguientes puntos difíciles en la comprensión de las secuencias aleatorias: a) variabilidad local (ausencia de patrones), b) regularidad global (convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica), y c) diferencia entre valores teóricos y observados. Entre los errores mostrados por estos estudiantes, los autores resaltan la creencia en que los datos deben ser erróneos, si no corresponden a sus expectativas y la confusión entre alta probabilidad y certeza.

En nuestro caso tratamos de completar las investigaciones previas, utilizando tareas similares a las propuestas por Batanero y Serrano (1999), pero combinando sistemáticamente la longitud de las rachas (sólo rachas cortas o incluye rachas largas) con la frecuencia relativa de caras (exactamente

igual a 0.5 o menor). Además, se reduce la longitud de las secuencias a 20 resultados para facilitar la tarea y se evalúa la comprensión de alumnos que han tenido contacto previo con la probabilidad.

MÉTODO

La muestra consta de 159 alumnos, de un instituto de la provincia de Teruel, de los siguientes cursos de Educación Secundaria Obligatoria: 2º (n = 51; 2 grupos), 3º (n = 64; 3 grupos) y 4º (n = 44, 2 grupos). En total han participado 7 grupos de alumnos, prácticamente todos los alumnos de estos cursos en el citado centro. Sus edades están comprendidas entre 13 y 17 años y han recibido enseñanza de contenidos de probabilidad, de acuerdo con las programaciones curriculares emanadas de la LOE. Nuestra muestra es intencional y el estudio es exploratorio.

Para elegir los ítems que forman parte del cuestionario se revisaron los utilizados en las investigaciones sobre reconocimiento de la aleatoriedad. Es decir, se decidió utilizar únicamente tareas en que se den a los estudiantes algunas secuencias de resultados para pedirles que indiquen si son o no aleatorias; además, se decidió preguntarles por las razones de su respuesta. Ya que encontramos una gran variedad en estas tareas, para que los ítems resultaran sencillos a los estudiantes, se decidió utilizar secuencias de longitud corta (20 resultados). Otra variable que se fijó fue utilizar experimentos aleatorios con dos resultados equiprobables, donde los estudiantes puedan aplicar sus conocimientos de probabilidad clásica (regla de Laplace) en la respuesta.

En la Figura 1 mostramos el cuestionario, que presenta 4 secuencias diferentes de resultados de lanzamientos de una moneda (se supone equilibrada, es decir con probabilidad de cara igual a $\frac{1}{2}$). En estas secuencias se han variado algunas características, para ver si los alumnos las perciben: Las secuencias de María y Daniel tienen exactamente 10 caras y 10 cruces, mientras que las otras dos tienen menos caras (8 en la secuencia de Martín y 7 en la de Diana). Las secuencias de Daniel y Martín sólo tienen rachas cortas; la longitud más larga de las rachas es sólo de dos símbolos iguales. Las otras dos secuencias contienen algunas rachas más largas (de hasta 5 elementos la de María y hasta 4 la de Diana). Las diferencias con las tareas de Batanero y Serrano (1999) son las siguientes: a) la longitud de las secuencias (20 resultados en lugar de 40), b) las frecuencias, pues los autores no propusieron ninguna secuencia con una frecuencia exacta del 50% de caras.

Ítems 1 a 4

Se pidió a algunos niños que lanzaran una moneda equilibrada 20 veces y anotaran los resultados obtenidos. Algunos lo hicieron correctamente, lanzando la moneda y anotando los resultados; otros hicieron trampas, inventando los resultados sin lanzar la moneda. Indicaron C para la cara y + para la cruz. Estos son sus resultados:

- María: + + + C + C C + + + C + C C C C + C +
- Daniel: C + C + + C C + C + C C + + C + + C C +
- Martín: C + C + C + + C + C + + C + + C + + C +
- Diana: C + + + C + + C + C + + + C + + + + C C

Item 1: ¿Hizo María trampas? ¿Por qué?

Item 2: ¿Hizo Daniel trampas? ¿Por qué?

Item 3: ¿Hizo Martín trampas? ¿Por qué?

Item 4: ¿Hizo Diana trampas? ¿Por qué?

Figura 1. Cuestionario

Para responder a los ítems, esperamos que los alumnos usen su conocimiento del experimento aleatorio planteado (lanzar una moneda) y sus características de impredecibilidad local (no se sabe qué resultado ocurre cada vez), y regularidad global (se puede prever la distribución del conjunto, cuando se repite el experimento) (Batanero, Henry y Parzys, 2005). Para cada experimento planteado en los enunciados han de reconocer el espacio muestral. Deben comprender las características de las secuencias de resultados aleatorios; por ejemplo, la independencia de cada

repetición del experimento y la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica. Deben aceptar la variabilidad de los resultados en experimentos aleatorios y reconocer cuando esta variabilidad es demasiado pequeña para que la secuencia sea aleatoria.

Para evaluar la aleatoriedad de las diferentes secuencias, los estudiantes cuentan las frecuencias de los diferentes resultados; esto supone el conocimiento de la idea de frecuencia y capacidad de cálculo. Finalmente, también aplican la idea de valor esperado, al compararlo con estas frecuencias.

Método de análisis: Recogidos los cuestionarios, se procedió a un análisis cualitativo de los datos, mediante un procedimiento inductivo y cíclico. Para cada ítem se analizaron dos variables:

- La respuesta del estudiante en cada ítem (si la secuencia es o no aleatoria la secuencia). Se calcula la frecuencia de estudiantes que consideran aleatoria o no aleatoria cada secuencia. No se califica la respuesta como correcta o incorrecta, porque la corrección dependerá de la justificación dada.
- El argumento (justificación) dado para considerar cada secuencia como aleatoria; que puede ser correcto o incorrecto, dependiendo del ítem. Se han clasificado estos argumentos dependiendo de si los alumnos responden fijándose en la frecuencia de caras (o de cruces), en el orden de la secuencia, o en la longitud de las rachas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Análisis de respuestas

En la Tabla 1 presentamos la frecuencia y porcentaje de respuestas en cada ítem, observando que son pocos los estudiantes que no responden, pues se interesaron por la tarea y la completaron con seriedad. La mayoría de los estudiantes considera aleatoria todas las secuencias, especialmente la secuencia presentada en el segundo ítem, donde las rachas son cortas y el número de caras coincide exactamente con el teórico.

Tabla 1. Frecuencia y Porcentaje de alumnos que considera aleatorio o no los ítems 1 a 4.

	Ítem 1. María 10C, Rachas largas		Ítem 2. Daniel 10 C Rachas cortas		Ítem 3. Martín 8C Rachas largas		Ítem 4. Diana 7C Rachas cortas	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Aleatoria	88	55,3	103	64,8	97	61,0	96	60,4
No aleatoria	67	42,1	52	32,7	59	37,1	60	37,7
No contesta	4	2,5	4	2,5	3	1,9	3	1,9

Batanero y Serrano (1999) en su trabajo con estudiantes de 14 y 18 años encontraron los siguientes porcentajes de sujetos que aceptaron la aleatoriedad de secuencias de longitud 40: 60% (frecuencia similar a la esperada, rachas cortas), 57% (frecuencia similar a la esperada, rachas largas); 36% (rachas largas, frecuencia diferente a la esperada), siendo difícil en dicha investigación deducir si el rechazo de la aleatoriedad se produce por la longitud de las rachas o por la diferencia entre frecuencia observada y teórica. En nuestro caso, estas dos variables se separan, pues hemos incluido rachas largas en secuencias con frecuencia observada igual y diferente a la teórica. Hay un porcentaje algo mayor de aceptación de la aleatoriedad en todos los casos (7,8% más de estudiantes si las frecuencias se aproximan a las esperadas y las rachas con cortas; 2,1% más si las rachas son largas y las frecuencias se aproximan y 25% más cuando las frecuencias se apartan un poco de las esperadas).

En la Figura 2 presentamos el porcentaje de alumnos que en cada uno de los cursos ha respondido que la secuencia es aleatoria en los diferentes ítems. Observamos ahora una diferencia por curso. En segundo curso no parecen influir las variables de la tarea para aceptar la aleatoriedad, pues siempre alrededor del 60% de estudiantes consideran aleatoria las secuencias. En tercero los alumnos

parecen diferenciar las rachas largas (ítems 1 y 4) pues hay menos alumnos que consideran (erróneamente) aleatorias estas secuencias, en comparación con los otros dos ítems. En cuarto curso los alumnos parecen fijarse más en la frecuencia, pues menos alumnos consideran aleatorias las secuencias 3 y 4. En la investigación de Batanero y Serrano (1999) no hubo diferencias por curso en la aceptación de la aleatoriedad de las secuencias que propusieron.

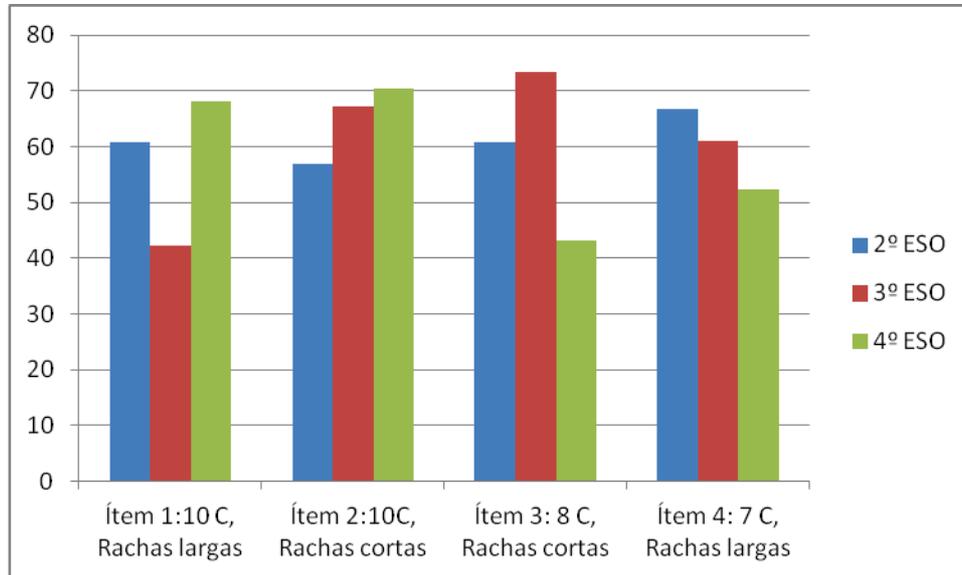


Figura 2. Porcentaje de estudiantes que consideran aleatoria cada secuencia

Análisis de argumentos

Los argumentos dados por los estudiantes para justificar su respuesta se analizaron con detalle y se clasificaron, de acuerdo con la propuesta hecha en la investigación de Batanero y Serrano (1999). Estos argumentos permiten evaluar las propiedades que los estudiantes asignan a las secuencias aleatorias y fueron los siguientes:

Frecuencias iguales: Se clasifican en esta categoría los estudiantes que han contado el número de caras y cruces en las secuencias y las han comparado con el valor teórico (10 caras y 10 cruces); dichos estudiantes muestran buena percepción del valor esperado en una serie de ensayos independientes (formalmente, el número de caras en cada secuencia seguiría una distribución binomial). Como parte de su argumento, señalan que las frecuencias observadas de caras y cruces en la secuencia son iguales o se aproximan al valor de probabilidad teórica esperado de cada suceso, diferenciando ambos conceptos y poniendo en relación los puntos de vista clásico y frecuencial de la probabilidad. Cuando argumentan que una secuencia es aleatoria porque el número de caras es 10, lo consideramos correcto; también si indican que el número de caras es cercano a 10, pero que la diferencia es admisible en una secuencia aleatoria, pues supone la correcta percepción del valor esperado en la distribución binomial. Algunos ejemplos que implícitamente incluyen esta idea son los siguientes:

- “No (hizo trampas), porque la proporción es más o menos igual” (Alumno 17, 2º curso).
- “No (hizo trampas), porque ha tenido una probabilidad del 50%” (Alumno 38, 4º curso).

Consideramos incorrecto el argumento de algunos alumnos que indican que la secuencia no puede ser aleatoria por haber una pequeña diferencia en la frecuencia observada del número de caras respecto a la probabilidad teórica. Este razonamiento supone la creencia en la ley de los pequeños números (esperar una convergencia demasiado exacta; Kahneman y Tversky, 1972). También consideramos incorrecto el razonamiento de los alumnos que indican que no se puede predecir el

número de caras esperado; Batanero y Serrano (1995, 1999) indican que esta respuesta implica no comprender la utilidad de la estadística para analizar los fenómenos aleatorios.

- “Sí (hizo trampas), es muy complicado que salgan 10C y 10X (Alumno 4, 3º curso).
- 1. “Sí (hizo trampas), porque el resultado está hecho aposta (adrede) 10X y 10C”. (Alumno 50, 2º curso).

Frecuencias diferentes: Al igual que en el razonamiento anterior, los alumnos argumentan en base a la comparación de las frecuencias observadas y esperadas, de acuerdo a una distribución de probabilidad teórica, por lo que muestran una buena comprensión de estos conceptos. Ejemplos de los razonamientos correctos, en que indican que es aceptable obtener una pequeña variación de las frecuencias relativas son los que siguen:

- 2. No, no tienen por que ser diez y diez, puede ser aproximada, le puede salir 8 y 12 perfectamente (Alumno 2, 4º curso).
- 3. “No, porque es más coherente, ya que no sale el mismo número de cruces que de caras” (Alumno 44, 2º curso).

El razonamiento sería incorrecto en caso de argumentar que se la secuencia no es aleatoria, por no obtener una frecuencia relativa idéntica a la probabilidad teórica, razonando, por tanto, de acuerdo a la ley de los pequeños números:

- 4. “Sí, porque no le sale el mismo número de veces cara que cruz” (Alumno 28, 4º curso).

Patrón regular: Unas de las concepciones modernas de la aleatoriedad, debida a Von Mises es que en las secuencias aleatorias no es posible encontrar un patrón que sirva para predecir sus resultados (Batanero, 2015). Esta concepción se muestra en algunos estudiantes, que hacen referencia al orden de los sucesos en la secuencia, analizando si hay alguna regularidad o patrón aparente en la presentación de caras y cruces. En general, se supone que en dicho caso, el estudiante ficticio que se cita en el ítem ha hecho trampa, pues la existencia de un patrón se percibe como falta de aleatoriedad, lo que sería un razonamiento correcto. Algunos argumentos que dan los alumnos son:

- 5. “Sí, porque están ordenadas muy iguales”. (Alumno 1, 2º curso).
- 6. “Sí, porque tiene todo un orden”. (Alumno 12, grupo 2ºA).
- 7. “Sí, porque es muy poco probable que le salga todo el rato C++ C++ C++”. (Alumno 14, 2º curso).
- 8. “Sí, porque sus resultados tienen un patrón”. (Alumno 64, 3º curso).
- 9. “Sí, porque hizo como una progresión (1-1-2-1-2-2-2-2)” (Alumno 14, 3º curso).

Patrón irregular: Por el contrario, otros alumnos en su razonamiento indican que no se aprecia ningún cierto orden o patrón en la secuencia de caras y cruces; en general, este tipo de respuesta correctamente se asocia a la aleatoriedad:

- 10. “No, porque es un resultado irregular”. (Alumno 24, 3º curso).
- 11. “No, porque no sigue un patrón”. (Alumno 53, 3º curso).
- 12. “No, el patrón no es constante”. (Alumno 25, 2º curso).

Rachas: En algunos casos los alumnos observan en las secuencias la longitud de las rachas del mismo resultado, para argumentar sobre la aleatoriedad de cada secuencia. Consideramos incorrecto cuando argumenten que las rachas son muy largas para que la secuencia sea aleatoria, porque, de acuerdo a Batanero (2015), esto implica no reconocer la independencia de los ensayos aleatorios.

También será incorrecto el argumento consistente en indicar que todas las rachas han de ser cortas para ser aleatorio:

13. “Sí (hace trampas), porque le han salido muchas veces seguidas caras”. (Alumno 36, 2º curso).
14. “Creo que sí (hace trampas) porque hay demasiadas cruces y las que hay están juntas”. (Alumno 13, 3º curso).

Será correcto cuando indiquen que hay que esperar alguna racha larga en una secuencia para que sea aleatoria:

15. “No (hace trampas) porque cambia más”. (Alumno 51, 2º curso).
16. “No porque le están saliendo los resultados alternamente”. (Alumno 42, 3º curso).

Impredecible: Los alumnos consideran el experimento aleatorio en base a la impredecibilidad de los resultados. Este argumento incluye una visión primitiva de la aleatoriedad, pues, aunque cada resultado aislado es impredecible, si se puede predecir la distribución de todos los resultados en la secuencia dada:

17. “No, porque es azar”. (Alumno 4, 2º curso).
18. “No los resultados son impredecibles”. (Alumno 9, 3º curso).
19. “No todos los resultados son válidos”. (Alumno 9, 4º curso).

En la Tabla 2 presentamos la frecuencia con que se consideraron los diferentes argumentos en cada ítem y curso. Se observa, en primer lugar, un alto porcentaje de no argumento en todos los ítems; es decir, aunque la mayoría de los alumnos responde a la pregunta de si considera o no aleatoria la secuencia, no todos saben explicar la razón. Esto puede implicar que algunos alumnos no tienen suficiente capacidad argumentativa, pues, como hemos visto, si parecen reconocer las características del ítem.

Tabla 2. Porcentajes de argumentos en los ítems 1 a 4.

Argumentos	Ítem 1. María 10C, Rachas largas			Ítem 2. Daniel 10 C Rachas cortas			Ítem 3. Martín 8C Rachas largas			Ítem 4. Diana 7C Rachas cortas		
	2º	3º	4º	2º	3º	4º	2º	3º	4º	2º	3º	4º
	Patrón regular		2		18	19	14	22	13	14	2	6
Patrón irregular	4							3		2	5	
Frecuencias iguales	16	17	33	20	21	33	4		5			
Frecuencias diferentes	2			2			8	6	26	16	11	26
Rachas	21	31	17	12	16	7	8	11	7	12	26	22
Impredecibles/suerte	21	30	31	18	28	32	18	37	24	26	27	38
Sin argumentos	36	20	19	30	16	14	40	30	24	42	25	14

Fue también muy frecuente en todos los ítems el argumento de impredecibilidad, es decir, considerar que cualquier resultado es posible en un experimento aleatorio. Estos alumnos entenderían que al ser un experimento aleatorio impredecible, no pueden dar una razón para considerar una secuencia aleatoria o no. Esta fue también una respuesta muy frecuente en Green (1991) y en la investigación de Batanero y Serrano (1999) osciló entre el 28% y el 35% en todos los ítems; en nuestra investigación ha sido menor en algunos cursos e ítems.

No hubo mucha diferencia por curso en los argumentos, aunque en tercero predomina más el argumento de imprevisibilidad (que implica una concepción más primitiva de la aleatoriedad) y en

cuarto desaparece la asociación con el patrón regular o irregular (concepción más avanzada). Hay también en cuarto mayor proporción de chicos que asocian el hecho de que las frecuencias observadas sean próximas a las esperadas con la aleatoriedad; esto implicaría una mejor comprensión del significado frecuencial de la probabilidad. Al comparar con el estudio de Batanero y Serrano (1999) hubo algo mayor variación con la edad en los nuestros, ya que dichos autores encontraron respuestas muy similares en los chicos de 14 y 17 años.

En la Figura 3 se presentan los argumentos en cada ítem en el total de la muestra, dependiendo de si se considera o no aleatoria la secuencia. Como se ha dicho hubo un alto porcentaje de no argumento en todos los ítems; se produce además tanto si se considera aleatoria la secuencia, como si no se considera. Podemos observar que muchos alumnos detectan las características de las secuencias y lo indican explícitamente. Así, el patrón irregular apenas aparece y ligado solo a los ítems 3 y 4 donde todas las rachas son cortas. Este argumento fue mucho menos frecuente que en el trabajo de Batanero y Serrano (1999) cuyos alumnos lo usaron en todos los ítems. El patrón regular se usa para rechazar la aleatoriedad en los primeros ítems, mientras en Batanero y Serrano se usa tanto para aceptarla como para rechazarla; en consecuencia, en nuestro estudio se obtiene mejor resultado en este argumento.

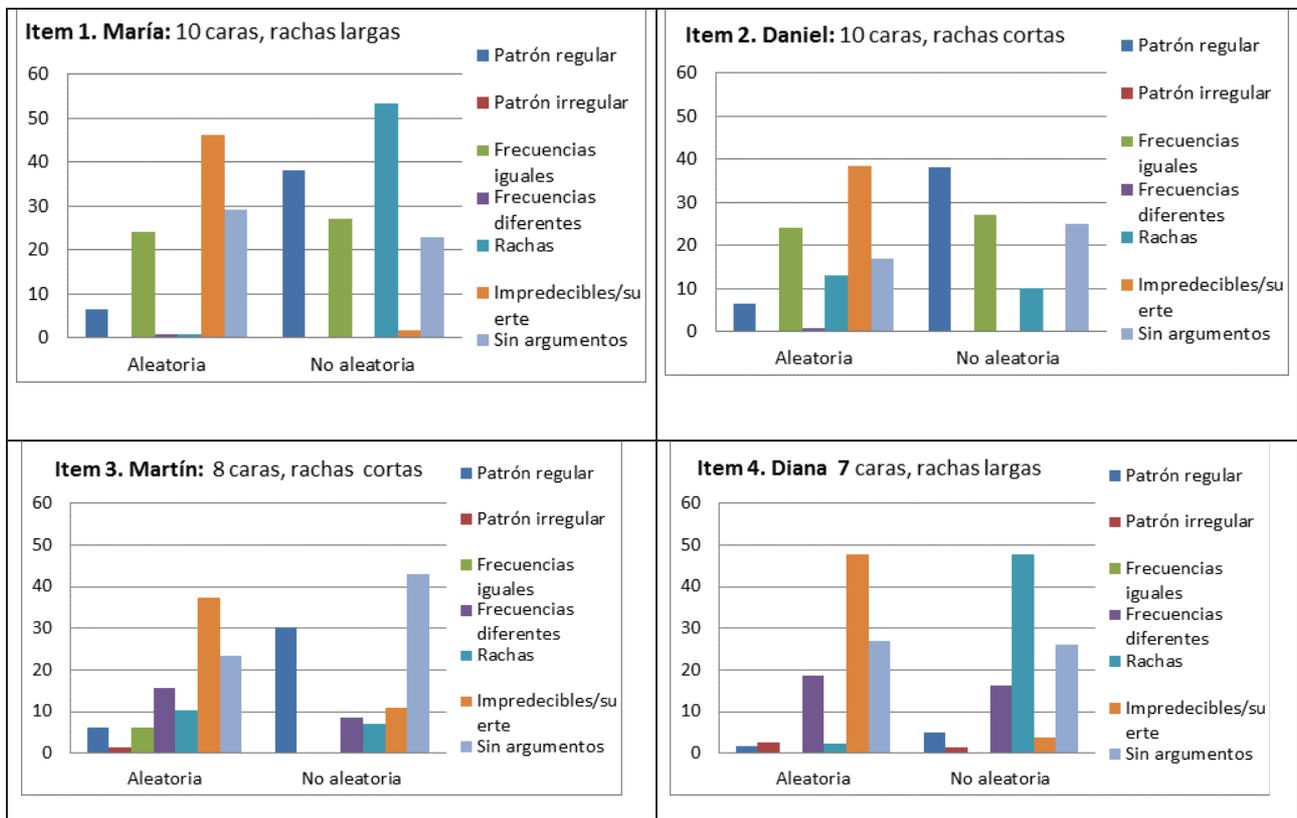


Figura 3. Porcentaje de diferentes argumentos en cada ítem en función de si se considera o no aleatoria la secuencia

Las frecuencias iguales se argumentan solo en los dos ítems con exactamente 10 caras y 10 cruces, y las frecuencias diferentes en lo que tienen menos caras, aunque tanto para aceptar, como para rechazar la secuencia como aleatoria, como ocurrió en Batanero y Serrano (1999). Las rachas se argumentan sobre todo cuando son largas y se asocia a la no aleatoriedad, un error presente en Batanero y Serrano con mayor frecuencia que en nuestro caso. Fue también muy frecuente en todos los ítems el argumento de impredecibilidad; casi siempre ligado a la aleatoriedad; en Batanero y Serrano osciló entre el 28% y el 35% en todos los ítems; esta vez ha sido mayor.

REFLEXIONES FINALES

Los resultados permiten evaluar la percepción de las secuencias aleatorias en alumnos de 2º a 4º curso de la ESO y compararla con la información proporcionada por las investigaciones previas. Por un lado se observa que los estudiantes que han participado en nuestra investigación proporcionan los mismos argumentos que los participantes en el estudio de Batanero y Serrano (1999), aunque se les pide juzgar la aleatoriedad de secuencias de menor longitud (20 resultados en lugar de 40).

Además, tanto el reconocimiento de la aleatoriedad, como los argumentos proporcionados por nuestros estudiantes mejoran con el curso, mientras que Batanero y Serrano no encontraron diferencia en las respuestas de estudiantes de diferente edad. Puesto que los autores realizaron su trabajo en un momento en que no era habitual el enfoque frecuencial, y la enseñanza de la probabilidad se atrasaba hacia los 15 años, interpretamos que las diferencias encontradas en nuestro trabajo podrían deberse a la enseñanza recibida. No obstante, se necesita profundizar en la investigación para poder mostrar claramente esta influencia.

Nuestros resultados apoyan la hipótesis de que los estudiantes han reconocido las características de las secuencias presentadas; muchos de ellos las hacen explícitas en sus argumentos. La principal dificultad observada es una expectativa demasiado alta en la variabilidad local de la secuencia y en consecuencia, un rechazo de las rachas largas. Como punto más positivo resaltamos la comprensión de la convergencia de la frecuencia relativa de caras a la probabilidad teórica y la aceptación de pequeñas diferencias entre las mismas en las secuencias aleatorias. Igualmente, los estudiantes esperan que no haya patrones en el orden de resultados en las secuencias aleatorias. Sin embargo, algunos de ellos hacen demasiado énfasis en la impredecibilidad de los resultados aleatorios, que se extiende indebidamente, suponiendo que también la distribución es impredecible. Estos estudiantes no comprenden la utilidad del análisis estadístico para estudiar fenómenos aleatorios.

El contacto previo con la probabilidad de estos alumnos podría haber influido en las mejores respuestas de los mismos, respecto al estudio de Batanero y Serrano (1999) y en los mejores resultados de los alumnos según avanzan de curso. No obstante, creemos que es necesario proporcionar a los estudiantes un conocimiento más preciso de las propiedades de las secuencias aleatorias. Ello podría lograrse a partir de la experimentación y simulación y utilizando una metodología activa, tal como se establece en los nuevos diseños curriculares.

En nuestro estudio, la evaluación se utilizó también como punto de partida para plantear actividades didácticas. El cuestionario resultó interesante para los estudiantes, sirviendo la discusión posterior de las respuestas como una actividad de aula. Dada la importancia de la comprensión de la aleatoriedad para el aprendizaje de la probabilidad, es importante partir de los resultados de investigaciones como la actual, donde se proporciona información sobre las concepciones previas y sesgos subjetivos del alumnado. La discusión en clase de ítems parecidos a los nuestros sería un buen medio de hacer florecer sus argumentaciones y llevarlos a reconocer las que son incorrectas.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Bar-Hillel, M. y Wagenaar, W. A. (1991). The perception of randomness. *Advances in Applied Mathematics*, 12, 428-454.
- Batanero, C. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.). *Proceeding of the Ninth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). Praga: ERME.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In A. G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno*, 5, 15-28.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (5), 558-567.
- Chernoff, E. J. (2011). Investigating relative likelihood comparisons of multinomial, contextual sequences. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of European Research in Mathematics Education*, (591-600). Reszlow: ERME.
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Recuperado de: <http://www.corestandards.org/Math/>.
- Engel, J. y Sedlmeier, P. (2005). On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), 168-177.
- Falk, R. (1981). The perception of randomness. In C. Laborde (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 222-229). Grenoble: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). University of Sheffield.
- Green, D. R. (1991). *A longitudinal study of pupil's probability concepts*. Tesis Doctoral, Universidad de Loughborough.
- Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.
- Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. España: Ministerio de Educación y Cultura.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton.
- Schreiber, J. M. (2014). Cognitive processes associated with the perception of randomness. *Journal of Educational and Developmental Psychology*, 4(1), 84.
- Sanchez, E., García, J. y Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 6, 5-23
- Sánchez, E. y Valdés, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 89,103.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.
- Wagenaar, W. A. (1972). Generation of random sequences by human subjects: A critical survey of literature. *Psychological Bulletin*, 77, 65-72.