CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO, MOVILIZADO Y EMERGENTE, EN UNA CLASE DE PRIMARIA SOBRE LAS POSICIONES RELATIVAS DE LAS RECTAS

Specialised knowledge which is mobilised and emerges in a Primary school class when dealing with the relative positions of straight lines

Barrera, V. J.[a,b], Liñán, M. M.[a,b], Muñoz-Catalán, C.[a] y Contreras, L. C.[c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU, [c]Universidad de Huelva

Resumen

Presentamos el análisis de un episodio en la observación de una maestra de quinto curso de educación primaria cuando enseña geometría. Basándonos en el modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), analizamos el conocimiento de los contenidos relacionados con las posiciones relativas de las rectas (particularizando en las paralelas) movilizados en el aula, permitiéndonos reflexionar sobre el conocimiento especializado que permitiría una mejor gestión de la enseñanza de la situación descrita. Mostraremos que el análisis desde MTSK no solo permite identificar el conocimiento especializado del profesor, sino que también nos ayuda a reflexionar sobre el conocimiento que permitiría aprovechar las oportunidades que brinda el análisis del aula.

Palabras clave: *MTSK, Conocimiento Profesional, Geometría, recta, posiciones relativas de las rectas.*

Abstract

We present the analysis of an episode in the observation of a fifth grade Primary school teacher when teaching geometry. Based on the analytical model Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK), we analyse the knowledge of contents related to the relative positions of straight lines (focusing on parallels) that are mobilised in the class. This allows us to reflect on what has to be the specialised knowledge needed for a better management in teaching which emerges in the described situation. We will show that the analysis from MTSK not only identifies the specialised knowledge of the teacher, but also helps us to reflect on the knowledge that would make it possible to take advantage of the opportunities offered by the analysis of the class.

Keywords: *MTSK, Professional Knowledge, Geometry, straight line, straight lines relative positions.*

INTRODUCCIÓN

Los principios para la educación matemática (NCTM, 2000, p. 18) indican que la *eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los estudiantes son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas*, lo que implica un conocimiento especializado tanto desde el contenido matemático como desde el didáctico, con una óptima gestión de las oportunidades que emergen en el aula. Sin embargo, en trabajos recientes (Liñán y Contreras, 2013, Liñán, Montes y Contreras,

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, C. y Contreras, L. C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 167-176). Málaga: SEIEM.

2015), se han puesto de manifiesto las dificultades en el conocimiento especializado en Geometría de los estudiantes para maestro (EPM) y las carencias en los contenidos relacionados con la recta, semirrecta y segmento de una maestra en ejercicio, respectivamente. La unión de ambas ideas nos ha hecho reflexionar sobre el conocimiento especializado que permitiría una mejor gestión de la enseñanza de estos conceptos geométricos en primaria, lo que nos podría llevar a pensar sobre cómo mejoraría una sesión de clase el hecho de tener en cuenta los conocimientos emergentes en el aula y la gestión que de ellos se podría hacer.

Para responder a nuestro interés, hemos observado a una maestra mientras enseñaba geometría en 5º de primaria, centrándonos en el episodio sobre las posiciones relativas de las rectas. Desde una perspectiva interpretativa, hemos realizado el análisis con la lente teórica que nos proporciona el modelo sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) y la teoría *embodied cognition* en lo referente a las metáforas cognitivas, viendo que se reflejan conocimientos tanto explícitos como subyacentes, formando parte ambos del conocimiento emergente en el aula.

Entendemos como subyacentes aquellos conceptos, procesos y procedimientos que a priori no son susceptibles de ser tratados (total o parcialmente[i]) en el nivel en el que nos encontramos (no aparecen en el currículum oficial ni en los textos usados por los alumnos y la maestra), pero que están íntimamente relacionados con el contenido tratado. Pretendemos con este trabajo, además, establecer los posibles beneficios que para la formación de maestros podría tener la gestión de las oportunidades ofrecidas al tomar conciencia de la existencia de dichos contenidos emergentes.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El modelo analítico del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2014) está basado en la especialización como eje del conocimiento del profesor de matemáticas, dividiendo el mismo en seis subdominios, tres de ellos relacionados con el contenido matemático y otros tres con el didáctico.

En el conocimiento matemático (MK) encontramos tres subdominios: el conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la estructura matemática (KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM), mientras que en el conocimiento didáctico del contenido (PCK) tendríamos el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Especificando dentro de cada subdominio del MK, podemos distinguir en el KoT los contenidos matemáticos en sí mismos, dividiendo estos en seis categorías. La *fenomenología* considera los conocimientos del profesor sobre los fenómenos relacionados con un tema que pueden generar conocimiento matemático y los usos y aplicaciones del mismo. La segunda categoría serían las *propiedades y sus fundamentos* de un tema en particular; la tercera, *registros de representación*, reúne el conocimiento del profesor sobre las diferentes maneras en las que puede representar un tema. La categoría *definiciones* está muy ligada a la categoría de propiedades y sus fundamentos, pues considera el conjunto de propiedades que hacen definible a un tema, además de las formas alternativas de hacerlo. En la categoría *procedimientos* se recogen tanto los algoritmos estándares como los alternativos y todos los argumentos, fundamentos y características que a ellos llevan, entendiendo algoritmo en su sentido amplio. Finalmente, debemos remarcar que el modelo considera dentro de este subdominio las conexiones intraconceptuales.

Dentro del KSM, donde se tienen en cuenta las conexiones interconceptuales, observamos cuatro categorías. Las conexiones de *complejización* y de *simplificación*, en las que se relacionan contenidos enseñados con otros posteriores o anteriores, respectivamente; las conexiones de *contenidos transversales*, que relacionan entre sí contenidos que comparten ciertas cualidades y características, como las relaciones de equivalencia y las figuras geométricas congruentes;

finalmente, las conexiones *auxiliares* se producen entre contenidos que sirven de apoyo vehicular tanto para conceptualizar como para resolver.

En el KPM consideramos dos categorías: las *prácticas ligadas a la matemática en general*, y las *prácticas ligadas a un tema en particular*. En ambos casos se considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional, modos de proceder y sintaxis propia de las matemáticas, particularizando o no en un tema concreto.

En cuanto al PCK, el KFLM distingue cuatro categorías. Las *formas de aprendizaje* engloban el conocimiento del profesor sobre cómo aprenden matemáticas sus alumnos. Las *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* encierran el conocimiento del profesor acerca tanto de los errores, obstáculos y dificultades como de la facilidad de aprendizaje relacionados con un tema concreto. Las *formas de interacción de los alumnos con el contenido* y las *concepciones* de los estudiantes sobre las matemáticas, relativas a sus expectativas e intereses, completan este subdominio.

En el KMT se definen tres categorías. El conocimiento de *teorías personales o institucionales de enseñanza*, el conocimiento de *recursos materiales y virtuales* y el conocimiento sobre *actividades, tareas, ejemplos y ayudas*, distinguiéndose esta última categoría de la anterior en la intencionalidad por parte del docente en su uso.

El KMLS implica el conocimiento tanto del currículum oficial vigente en cada país, como de los estándares y principios determinados por organizaciones destacadas en la didáctica de las matemáticas.

Por otro lado, hemos querido tener en cuenta el papel de las metáforas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Font, Bolite, Acevedo, 2010), fundamentadas en la *teoría sobre cognición corporizada* (embodied cognition theory), propuesta inicialmente por Lakoff y Núñez (2000). Estos autores ubican en los procesos cognoscitivos cotidianos, como el pensamiento metafórico, las matemáticas generadas individualmente, institucionalmente o por asociaciones de expertos (Font y Acevedo, 2003). Para este trabajo nos centraremos en el concepto de metáfora cognitiva interpretándola como la comprensión de un ente matemático en términos de otro, ya sea este segundo matemático o no. Las metáforas generan una relación conceptual entre un dominio de partida, *source domain*, y un dominio de llegada, *target domain*, siendo el primero el que nos permite conceptualizar al segundo. Por ejemplo, en el contexto de la educación infantil, "la pizarra es un rectángulo", que relacionaría un dominio externo a la matemática con uno interno (*grounding metaphor*), o bien "los números naturales son los cardinales de los conjuntos discretos", en el que el dominio de partida y el de llegada serían matemáticos (*linking metaphor*).

DISEÑO METODOLÓGICO

El modelo MTSK fundamenta la respuesta a nuestra pregunta de investigación: ¿qué conocimiento especializado puede identificarse en el análisis de un episodio de aula que permitiera una mejor gestión de la enseñanza de las posiciones relativas de las rectas en primaria? De esta pregunta podemos derivar como objetivo identificar el conocimiento especializado de una maestra de primaria en relación con las posiciones relativas de las rectas, tanto el presente en el aula como el que podría emerger en la situación gestionada por la maestra.

Hasta ahora nos ha interesado comprender el conocimiento especializado de los profesores de nuestros estudios, observando sus potencialidades y limitaciones. En este trabajo queremos ampliar nuestro foco de atención y aprovechar la oportunidad que nos brinda el análisis de un episodio de aula para comprender no solo el conocimiento movilizado por la maestra en esa situación, sino para identificar el conocimiento que podría emerger de la práctica observada para una gestión alternativa del contenido matemático en cuestión. Esto supone, entre otros aspectos, estar atentos también a intervenciones de alumnos y a las situaciones que se generan en el aula.

Nos situamos en el paradigma interpretativo (Bassey, 1995) y en el contexto general de un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2005), del que, en este trabajo, ofreceremos el análisis de un episodio. Accedemos a la información desde la observación del grupo profesor-alumnos en un aula de 5º de primaria en el que una maestra, con más de 30 años de experiencia en educación primaria, enseña geometría. La clase está ubicada en un colegio público de Sevilla. La maestra toma como apoyo principal el libro de texto para diseñar sus clases, haciendo uso de lecturas de divulgación matemática para provocar reflexión en el aula. Hemos registrado en vídeo (con el consentimiento de las partes) todo lo ocurrido en el aula (observación directa sin intervención) cuando se trabajan las posiciones relativas de las rectas, centrándonos en las rectas paralelas para este trabajo. La transcripción literal del mismo y las notas de campo obtenidas en el momento de la toma de datos, han permitido, una vez realizada una primera identificación de los dominios, subdominios y categorías desde la perspectiva MTSK, el diseño de la entrevista semiestructurada con la maestra y su posterior análisis.

Para el análisis de los datos hemos procedido identificando evidencias, indicios y oportunidades (Escudero-Ávila, Carrillo *et al.,* 2015), no solo sobre las manifestaciones de la maestra en la transcripción, sino también sobre las situaciones que se generan en el aula, muchas veces vinculadas a preguntas y reacciones de los alumnos, así como a la forma en que la maestra las gestiona, lo que nos ha proporcionado ocasiones de reflexión sobre el MTSK emergente para una mejor gestión de las oportunidades de aprendizaje en el aula de 5º de primaria para trabajar la geometría. En cuanto a la identificación de las metáforas cognitivas, solo consideraremos las que constituyen evidencias del conocimiento especializado.

Somos conscientes de que las respuestas de un maestro a dichas situaciones están sujetas a condicionantes varios, como los vinculados a su propia programación u organización temporal de los contenidos que imparte, y que, por tanto, para obtener información acerca de su conocimiento sería necesario acceder a ella interrogándole sobre las razones de tales respuestas. Este no ha sido el caso. No ha sido nuestra intención evaluar el conocimiento puesto en juego, sino comprender las características del conocimiento que la gestión de una determinada situación pone de relieve, tanto el que realmente se moviliza como el subyacente emergente. No enjuiciamos, por ello, las decisiones tomadas por la maestra de nuestro estudio y asumimos, además, que otras opciones diferentes a las que nosotros analizaremos habrían sido igualmente válidas. Nuestra intención es poner de relieve que el análisis de la práctica con MTSK, además de mostrar el conocimiento especializado puesto en juego nos permite identificar también vías alternativas de gestión de la situación analizada y el conocimiento especializado implicado en ellas.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En la segunda parte de la primera clase sobre geometría en 5º de primaria, tras haber definido y ejemplificado la recta, semirrecta y segmento, se tratan las posiciones relativas de las rectas. Nos vamos a centrar en el episodio en el que trabajan las rectas paralelas.

Los alumnos tienen el libro abierto en la página correspondiente a las definiciones de recta, semirrecta y segmento, donde también aparece la clasificación de las rectas según su posición. Esto les permite adelantarse al contenido y recordar significados, por lo que comienza el episodio con uno de los alumnos diciendo: "*pues lo siguiente es todavía más fácil"*. La maestra confirma esta sensación dibujando en la pizarra dos segmentos horizontales y paralelos (utiliza la cuadrícula de la pizarra para ello). Tras preguntar cómo son esas rectas y de qué otra manera podrían ser, prolonga los segmentos hasta el final de la pizarra para hacer una comprobación *empírica* de lo que plantean los alumnos: no se *tocan* por mucho que *se prolonguen*. Sin que aparentemente sean conscientes de ello, emergen varias situaciones problemáticas: qué significa *prolongar* una recta, en qué contexto están situando dichas rectas (*plano o espacio*) y cuál es el concepto de *distancia entre rectas* aplicable. El puente conceptual establecido al identificar la representación de la recta con el segmento podríamos identificarlo como una *linking metaphor* sinécdoque (Font, Godino, Planas, Acevedo, 2010), es decir, parte-todo, puesto que se está identificando el segmento (la parte) con el todo (la recta).

Veamos el siguiente fragmento, en el que se introducen los conceptos y propiedades relacionados con las rectas paralelas (M: Maestra; A: alumnos). Después lo analizaremos refiriéndonos al número asignado a cada intervención de este diálogo.

1. A. Pues lo siguiente es todavía más fácil.
2. M. Claro. Mirad, según eso tenemos… según su posición… vamos a ver tipos de rectas, vamos a ver cómo pueden ser las rectas. A ver, N., ¿cómo pueden ser esas rectas infinitas? No las semi, las rectas. ¿Cómo pueden ser?
3. A. Paralelas, secantes y perpendiculares (una alumna ejemplifica con sus dedos dos segmentos perpendiculares, separa estos y muestra dos segmentos que se cruzan perpendicularmente, pero no se cortan).
4. M. A ver (dibuja en la pizarra dos segmentos de igual longitud aparente, paralelos entre sí, a su vez horizontales, aprovechando la cuadrícula de una parte de la pizarra) ¿Por qué se caracterizan estas dos rectas?
5. A. ¿Qué nunca se cortan?
6. M. Nunca se van a cortar, nunca se van a tocar.
7. A. Por mucho que se prolonguen…
8. M. Por mucho que yo la prolongue esta hasta el infinito y esta otra (amplía los segmentos hasta el límite de la pizarra), nunca se van a chocar, nunca se van a tocar. Esta, que la voy a llamar a de Aurelia, y esta b de Benito, no se van a tocar.
9. A. También, que la distancia entre las dos siempre es la misma.
10. M. Claro, eso quiere decir que si cojo la regla y la mido hasta aquí (dibuja en la pizarra un segmento perpendicular a los otros dos, pero sin decir que lo es o que lo ha de ser para medir la distancia) o si lo mido aquí es la misma distancia, aquí es la misma distancia (esto lo hace mientras dibuja segmentos discontinuos perpendiculares a los dos paralelos en distintas posiciones) Siempre es la misma distancia. Siempre, siempre. No se van a ir achicando porque si no llegaría un momento que… tocaban ¿no? Siempre se van a mantener a la misma distancia.
11. M. Aquí, esta fila y esta fila ¿serían paralelas? (pone como ejemplo diversas filas de pupitres).[…] (ella va preguntando y los alumnos contestan).
12. M. Muy bien. Esa no sabemos. Paralelas, nunca se van a tocar. Mira lo que dice (mira el libro con la alumna): son dos rectas que nunca se cortan, ya está. La distancia entre ellas es la misma […]
13. M. No, son dos rectas que nunca se cortan. La distancia entre ellas es la misma. No es tanto, ¿no? Son dos cositas, las características son esas: rectas que nunca se cortan. La distancia entre ellas es la misma. Por mucho que se prolonguen, no sabemos. Hasta el infinito.

La maestra comienza mostrando su conocimiento de una fortaleza en los estudiantes (KFLM, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje), en este caso, las posiciones relativas de las rectas: los alumnos lo califican de *fácil* y la maestra refuerza (*Pues lo siguiente es todavía más fácil… Claro…)* aprovechando la potencialidad del contenido.

Cuando pregunta a los alumnos por las *rectas infinitas* (2) utiliza una forma de hacerles partícipes del enunciado de la clasificación de las rectas (haciendo uso de la potencialidad de hacer preguntas para evocar conocimientos, KMT, teorías sobre la enseñanza), haciendo referencia, además, a instantes anteriores en los que han trabajado los conceptos de recta, semirrecta y segmento, momento en el que ha emergido el concepto de infinito relacionado con la recta (Liñán, Montes y Contreras, 2015). Muestra su conocimiento sobre la recta (KoT, definiciones), y su conexión con el concepto *infinito* (KSM, conexión transversal, Liñán *et al*., *opus cit.*), si bien, al igual que en la definición de estas, no da un elemento más allá del visual sobre lo que significa *recto*. Aquí podríamos detectar una metáfora (*grounding*) objeto cognitiva puesto que permite interpretar la propiedad de ser recto con la imagen gráfica basada en la experiencia con objetos reales.

La maestra muestra saber cuáles son las posiciones relativas de las rectas (KoT, propiedades y sus fundamentos). Deja patente que ha de referirse a estas y no a las semirrectas (2), lo que podría ser un indicio sobre su conocimiento relativo a que se han de tener en cuenta otras propiedades y clases de equivalencia[ii] al tratar las posiciones relativas de las semirrectas y segmentos. Sabe que dichas posiciones son un criterio para clasificar las rectas (KoT, propiedades y sus fundamentos), si bien ni en el aula ni en el libro se remarca si se está haciendo referencia al espacio o al plano. De haber problematizado sobre qué ocurre en cada contexto con las posiciones relativas de las rectas en el plano y en el espacio, habríamos podido observar otro aspecto de su conocimiento de los temas (KoT, fenomenología).

Al utilizar la representación gráfica en la pizarra (4), tenemos evidencias de conocimiento del contenido (KoT, registros de representación), así como de los ejemplos utilizados (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas) que son usados por la maestra inicialmente como detonante para preparar la discusión sobre la clasificación de las rectas según su posición relativa. Sin embargo, también vemos que la maestra conoce y utiliza el ejemplo para mostrar el concepto de rectas paralelas, definiendo correctamente, aunque de forma no completa. En este momento la intención de la maestra es que, a través de un caso concreto representado en la pizarra, los niños expresen algunas de las características fundamentales del concepto teniendo como objetivo promover el desarrollo conceptual y la flexibilidad de los estudiantes, al considerar diferentes formas de caracterizar un concepto, favoreciendo la comparación crítica del trabajo en los alumnos.

Advertimos la presencia de conocimiento de la enseñanza (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas) en el momento en el que la maestra utiliza los verbos *chocar, tocar* (6, 8) e, incluso, en la frase *prolongar hasta el infinito*, pues en la entrevista indica que su uso facilita la comprensión del alumno por ser palabras cercanas al niño, identificando una *grounding metaphor* al unir el significado de términos del lenguaje cotidiano (dominio de partida) con el concepto matemático de intersección (dominio de llegada). Sin embargo, si bien en la expresión *nunca se van a chocar, nunca se van a tocar* muestra su conocimiento de que las rectas paralelas *no tienen puntos en común* (KoT, propiedades y sus fundamentos), también pone de relieve que el conocimiento de la práctica matemática (KPM, prácticas ligadas a la matemática en general) habría permitido saber que no se pueden usar términos cualesquiera para referir que *no se cortan en un punto*, en el sentido de que el enunciado de una propiedad ha de tener ciertas características, como el uso de palabras apropiadas que no dejen lugar a dudas. La expresión *por mucho que yo la prolongue hasta el infinito* referida a una recta no es correcta/precisa pues si no tiene límites, no se puede prolongar. Parece influir en este caso la propuesta del libro de texto, que incluye en su definición de rectas paralelas la frase "*nunca se cortan por mucho que se prolonguen"*. La maestra repite las ideas expresadas por los estudiantes, refinando la expresión, exponiéndolas de modo más claro o representando gráficamente las aportaciones de los estudiantes, con un único ejemplo que coincide con el que aparece en el libro de texto (segmentos horizontales para ejemplificar rectas).

La maestra es consciente de la limitación que tiene la pizarra como *recurso material* asociado, en este caso, para la representación de rectas (KMT, recursos materiales y virtuales), por eso dibuja finalmente los segmentos hasta el extremo de la pizarra, igual que hace en las explicaciones previas sobre la definición de recta (Liñán *et al*., 2015).

El concepto *distancia* emerge al ser planteado por un alumno (9), si bien seguramente siguiendo la definición de rectas paralelas del libro, mientras la maestra utiliza la propiedad *no se cortan*. La idea de la distancia en este momento podemos suponer que es intuitiva, puesto que la maestra reconoce en la entrevista que nunca se ha tratado de forma explícita en el aula, ni en este curso ni en anteriores. Se muestra este concepto asociado a la definición de rectas paralelas: *la distancia entre las dos siempre es la misma* (KoT, propiedades y sus fundamentos). La maestra sabe que es así y trata de aclararlo dibujando en la pizarra un segmento perpendicular a los dos paralelos (10) mientras dice *si cojo la regla y lo mido hasta aquí*, evidenciando su conocimiento sobre el procedimiento (KoT, procedimientos) para medir distancias entre rectas paralelas en el plano. A su vez, se evidencia una conexión auxiliar (KSM, conexiones auxiliares) entre la definición de rectas paralelas y distancia (*no se va a ir achicando porque, si no, llegaría un momento en que tocaban)* y el procedimiento de medir. Al estar aplicando el procedimiento de medida de distancia entre dos rectas paralelas en el plano, a pesar de no hablar de manera explícita sobre cómo se hace ni por qué se hace así, la maestra está suscitando la adquisición de dicho procedimiento.

Observamos cómo la profesora muestra su conocimiento sobre la enseñanza (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas) al proponer un ejemplo (11) sobre cuya adecuación podría no haber reflexionado: señalando los pupitres del aula colocados en filas, va preguntando si son paralelas dos a dos, e identificamos una *grounding metaphor* en el establecimiento de la relación entre la alineación de los pupitres y el concepto de rectas paralelas.

Por último, la maestra incide en las características que han dado los estudiantes, que coinciden con las que aparecen en el libro de texto (12, 13), enfatizando así el desarrollo conceptual y estructural al establecer conexiones con el infinito.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EMERGENTE PARA UNA MEJOR GESTIÓN DE LA SITUACIÓN

En el análisis del episodio, tanto desde la intervención de la maestra como desde las interacciones con los alumnos, en la entrevista semiestructurada y en las notas de campo, es posible descubrir conocimientos especializados, tanto explícitos como subyacentes, que podrían haber permitido gestionar la situación aprovechando las oportunidades ofrecidas. Podemos comenzar con la recta conceptualizada a través de sus propiedades, que en el caso de este concepto no configuran una definición[iii]. Tal conceptualización, mostrada por el libro (*una recta es una línea de puntos, sin curvas ni ángulos, que no tiene principio ni fin*), da por supuestas nociones que, de hecho, se van a tratar más adelante en el mismo capítulo y que, a su vez, utilizan el concepto *recta* en su denominación (*dos rectas secantes forman cuatro regiones en el plano llamadas ángulos)*, así que la maestra ha de lidiar con ello y conseguir la comprensión de un concepto axiomático que no resulta sencillo. En la línea de Font, Bolite y Acevedo (2010), podemos identificar esta situación con una metáfora ontológica, objeto, parte-todo, porque “nos lleva a la interpretación de ideas y conceptos, etc., como entidades que son parte de otras entidades y que están constituidas por ellas” (p. 138).

Se hace hincapié, por otro lado, en el concepto de *recta infinita* (2), si bien no se especifica en qué sentido lo es. Apoyándonos en el estudio realizado por Liñán *et al.* (2015), observamos un posible obstáculo didáctico futuro en la relación entre recta e infinito. Se produce una contradicción, además, entre esa *infinitud* de la recta y la *prolongación hasta el infinito* que aparece en el episodio cuando se quiere explicitar el hecho de que dos rectas paralelas no se cortan *por mucho que yo las prolongue hasta el infinito* (7, 8). Del mismo modo, la posible inexactitud en los términos usados (*chocar, tocar*) podría generar a su vez obstáculos futuros relacionados con el desarrollo del propio lenguaje matemático, habiendo perdido la oportunidad de aclarar la necesidad del uso de palabras precisas en matemáticas, términos específicos que contribuirían a desarrollar flexibilidad y elegancia. En la línea de Font y Acevedo (2003), recalcamos la importancia de ser consciente del uso de algunas metáforas en el discurso para poder controlarlas y no correr "el peligro de trasladar aspectos del dominio de partida que no son aplicables en el dominio de llegada" (p. 414).

Para clasificar las rectas según sus posiciones relativas es necesario discutir las distintas casuísticas que se generan en el plano y en el espacio; sin embargo el libro omite este extremo, sin especificar que, en realidad, está haciendo referencia al plano. La situación generada por el gesto de la alumna (3) podría ser usada para tratar los diferentes comportamientos de una misma clasificación dependiendo del entorno en el que se observen las rectas. Emerge, por un lado, la necesidad de establecer las condiciones (KPM, prácticas ligadas a la matemática en general) en las que se han de proponer las definiciones, propiedades y procedimientos a tratar en el aula, por otro lado, el conocimiento de la dependencia del contexto (KoT, fenomenología) para considerar, en este caso, las posiciones relativas de las rectas, y por último la problematización de la situación planteando qué ocurre en el plano y en el espacio (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas).

A la pregunta de la maestra *¿Qué caracteriza a estas dos rectas?* (4), una vez dibujadas en la pizarra, obtiene dos respuestas diferentes por parte de los estudiantes: *no se cortan* y *la distancia entre las dos es siempre la misma*. Esas respuestas vienen de manera explícita en el libro, así que probablemente se darán tras su lectura por parte de los alumnos, no parece que las hayan deducido ellos tras observar el dibujo, si bien la problematización de la equivalencia entre ambas definiciones no se hace evidente.

Al aparecer explícitamente la distancia entre rectas como definición de las rectas paralelas, cabe destacar la necesidad de definir previamente, quizá de manera informal, la función distancia (KoT, definiciones, procedimientos) ¿Cómo se mide la distancia entre dos rectas o entre punto y recta? Es más, ¿cuándo está definida dicha distancia? Se genera una problematización interesante cuando lo relacionamos con el contexto en el que nos encontramos: espacio o plano (KoT, conexión intraconceptual), puesto que en el plano solo puedo medir distancia entre punto y recta o entre rectas paralelas, pero en el espacio, sin embargo, podría obtener la medida que dista entre rectas que se cruzan e, incluso, que se cortan[iv]. Promovería el desarrollo conceptual de los estudiantes por fomentar el tratamiento del método de medida en distintos contextos relacionando definición de paralelas con magnitud, resolución de problemas y razonamiento, al plantear tareas abiertas, enfatizando procesos que desarrollan flexibilidad y comparación crítica de definiciones y procedimientos.

Por otro lado, los segmentos con los que ejemplifica esta posición relativa están situados horizontalmente en la pizarra (4, 10), por lo que podría ser *natural* la forma elegida para medir: de entre todas las posibles posiciones de la regla, eligen colocarla sobre un segmento perpendicular a ambos segmentos. ¿Qué habría ocurrido si los dos segmentos no se hubieran ubicado en esa posición (horizontal), sino formando un ángulo entre 0º y 180º sobre la horizontal? (KMT, actividades, tareas, ejemplos; KFLM, fortalezas y dificultades). Quizá en este caso se habría elegido la horizontal o la vertical para medir la distancia, dependiendo de lo *inclinadas* respecto de la horizontal que estuvieran las rectas. Podríamos establecer una relación con la dificultad de reconocer la altura de un triángulo sobre un lado no horizontal (KSM, transversal), lo que incluiría alturas sobre lados no horizontales en triángulos en posición prototípica como cualquiera de las alturas en triángulos situados en posición no prototípica (Contreras y Blanco, 2012).

En caso de haber utilizado diferentes ejemplos de pares de rectas paralelas para comprobar que dicha característica es general, y no del caso concreto que se dibuja en la pizarra, se estaría suscitando la adquisición de un proceso que favorecería en el estudiante la flexibilidad y la comparación crítica de resultados. Si se hubiera planteado como tarea abierta, con pares de rectas paralelas en distintas posiciones, podría haber generado la reflexión sobre el proceso de medida de distancia entre dos rectas, con una clara orientación hacia la resolución de problemas y el razonamiento. También podría haberse optado por haberlo usado para promover el desarrollo del procedimiento general de medida de distancia entre dos rectas a partir del concepto de rectas paralelas.

Del mismo modo, aprovechando la ejemplificación con paralelas situadas en posiciones no horizontales, se podría haber generado conocimiento sobre los invariantes ante movimientos rígidos, en este caso la distancia entre rectas paralelas a las que se les puede aplicar giros, traslaciones o simetrías en el espacio o en el plano (KSM, complejización).

Para ejemplificar haciendo uso de situaciones cotidianas, podría haber utilizado otros elementos de clase, como los bordes de la pizarra, marcos de las puertas o ventanas, intersecciones entre la pared y el suelo o la pared y el techo… (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas). Podría, de esta forma, haber establecido conexiones con propiedades o características críticas del rectángulo, generando conocimiento de la estructura matemática al utilizar la condición de *segmentos paralelos* para definir un rectángulo (KSM, auxiliar). Al utilizar, sin embargo, los pupitres como ejemplo de rectas paralelas, quizá no ha considerado el equívoco que puede generar en sus alumnos (KFLM, fortalezas y dificultades) el hecho de ejemplificar con elementos de su entorno que *ostensivamente tienen volumen* y que no son *continuos.*

CODA

Nuestra discusión muestra que utilizar MTSK como modelo de análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas no solo nos permite acceder al conocimiento que se muestra, nos ha puesto de relieve el conocimiento emergente (procesos y procedimientos relacionados con la distancia entre segmentos, movimientos rígidos, …). Por otro lado, la observación de las metáforas cognitivas identificadas, tanto en el discurso de la maestra como en el libro de texto, nos ha permitido identificar ciertos conflictos que se pueden estar originando en el pensamiento de los alumnos al no distinguir entre significados informales y los correspondientes geométricos de los mismos (conexión entre el dominio de origen y de llegada).

Dado nuestro compromiso con la formación de maestros, consideramos que el enfoque de este trabajo posee la novedad respecto a trabajos anteriores de establecer el vínculo teórico-práctico de una manera más directa. El análisis pormenorizado de los episodios de clase, centrado en el conocimiento matemático especializado que emerge de situaciones reales de práctica (explícitos y subyacente), constituye un buen sustento para la elaboración de viñetas, herramientas potentes tanto para la formación inicial como continua. Las viñetas pueden promover desarrollo profesional toda vez que fomentan que el profesor pueda problematizar su *saber desde la acción* (Schön, 1983, 1987), mejorando su consciencia y profundidad epistemológica, así como la reflexión *sobre, en* y *para* la práctica.

Agradecimientos

Este trabajo se realiza al amparo del proyecto de investigación “Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (EDU2013-44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad. Agradecemos su colaboración al Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU.

Referencias

Bassey, M. (1995). *Creating Education Through Research*. Edimburgo: British Educational Research Association.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2014). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *CERME 8 Proceedings* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía.

Contreras, L.C., y Blanco, L. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 30*, 101-123.

Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10* (1), 25-51.

Font, V., y Acevedo, J.I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias, 21* (3), 405-418.

Font, V., Bolite, J., y Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2),131–152.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., y Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics, 30*, 15-19.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

Liñán, M.M., y Contreras, L.C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Tópicos Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.

Liñán, M.M., Montes, M.A., y Contreras, L.C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Traducción SAEM Thales (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica I: Fundamentos*. Madrid: Euler.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practicioner*. San Francisco: Jossey-Bass.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. Third edition* (pp. 443-166). Thousand Oaks: Sage Publications.

---

i En el libro de texto una de las definiciones de rectas paralelas indica que la distancia entre ellas es siempre la misma, pero no define ni el concepto ni el procedimiento asociado a distancia.

[ii] Entendemos que la posición relativa entre dos segmentos cualesquiera es la que existe entre el primero y cualquier segmento congruente al segundo. En este sentido, los segmentos AB y CD son secantes si se puede encontrar un segmento C'D', congruente a CD, de manera que la intersección entre AB y C'D' sea un punto, siendo AB y C'D' no colineales. AB y CD serán paralelos si podemos encontrar un segmento congruente a CD, C'D', tal que la intersección entre AB y C'D' contenga infinitos puntos, o que contenga un único punto y AB y C'D' sean colineales.

[iii] Puig Adam (1986) determina en el primero de sus cinco grupos de axiomas lo que él mismo llama la *denominación*, que no *definición*, del espacio, plano y recta, estableciéndolos como conjuntos de infinitos puntos que cumplen otros axiomas recurrentes entre sí.

[iv] La distancia entre rectas en el plano no está definida si estas se cortan, puesto que no se puede trazar una perpendicular a ambas. Sin embargo, en el espacio, siempre se puede encontrar una recta perpendicular a dos rectas que se cortan, pues estas lo hacen en un plano y la recta perpendicular pertenecería a un plano perpendicular al primero. La distancia sería cero, pero estaría definida.