

EL ESTUDIO DE DOCUMENTOS CURRICULARES COMO ORGANIZADOR DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL

Study of curricular documents as an organizer of research in early mathematics education

De Castro, C.

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

En este trabajo se describen algunas tendencias detectadas en la evolución de documentos curriculares sobre educación matemática infantil en los últimos 40 años. Entre ellas destacan la ampliación del rango de edad incluyendo a los niños de 0 a 3 años, la consideración de expectativas de aprendizaje por edades, la distancia entre el modelo de investigación dominante en 0-3 años y las prácticas de aula, la invisibilidad curricular y la complejidad epistémica de algunos contenidos y procesos matemáticos, y la mención explícita de teorías didácticas dentro de documentos curriculares. Se presentan implicaciones e interrogantes relacionados con estas tendencias para promover la investigación en educación matemática infantil dentro de las líneas desarrolladas por los diferentes grupos de trabajo de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Palabras clave: *cero a tres años, currículo, educación infantil, educación matemática, estándares, investigación, matemáticas.*

Abstract

In this paper I describe some trends identified in the evolution of mathematics education curricular documents for the early childhood over the past 40 years. These include extending the age range from 0 to 3 years, the consideration of learning expectations by age, the distance between dominant model of research in 0-3 years and “mathematical” practices in the classroom, curricular invisibility and epistemic complexity of some mathematical contents and processes, and explicit reference to didactical theories on mathematics education in curricular documents. I present implications and questions related to these trends to promote research in early mathematics education within the lines developed by different working groups of the Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM).

Keywords: *curriculum, early childhood education, standards, research, mathematics, mathematics education, toddler, zero to three years.*

DOCUMENTOS CURRICULARES SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL: UNA PRIORIDAD EN EL GRUPO IEMI DE LA SEIEM

Dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) existe, desde su inicio en 1995, un grupo dedicado a la investigación en el ámbito de la educación matemática infantil, coordinado inicialmente por Carmen Corral (Universidad de Oviedo). En 2011, siendo presidente de la SEIEM Lorenzo Blanco, se decide dar un nuevo impulso a este grupo, que había decaído en años anteriores, bajo la coordinación de Mequè Edo (UAB) y Carlos de Castro (UAM) y después de María Jesús Salinas (USC).

De Castro, C. (2016). El estudio de documentos curriculares como organizador de la investigación en educación matemática infantil. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 39-52). Málaga: SEIEM.

La característica distintiva del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (en adelante, IEMI) es el interés por una investigación muy cercana a la práctica en el aula, orientada al diseño, desarrollo y evaluación del currículo matemático de educación infantil.

Este tipo de investigación tiene un punto de partida natural en la reflexión curricular, que se fundamenta en el estudio de “documentos curriculares”, tomados en un sentido amplio, en la línea del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) dentro del modelo MTSK (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015). Así, consideramos “documentos curriculares” los currículos nacionales de matemáticas (MEC, 1991; MECD, 2004; MEC, 2008), currículos más “locales” -autonómicos, en España; estatales, en EEUU, etc.- (Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, 2008; *The New York State Education Department*, 2011), los estándares para el aprendizaje de las matemáticas elaborados por instituciones de prestigio mundial (NCTM, 2000, 2003), los capítulos de *handbooks* internacionales de investigación (Clements y Sarama, 2007; Mulligan y Vergnaud, 2006), publicaciones internacionales de editoriales de gran prestigio en el área (English y Mulligan, 2013), e incluso libros de texto para la formación de maestros en educación matemática infantil (Castro y Castro, 2016; Chamorro, 2005; Clements y Sarama, 2009; Clements y Sarama, 2016; Geist, 2009). Dentro del grupo IEMI de la SEIEM, este interés por los documentos curriculares ha dado lugar ya a varias publicaciones (Alsina, 2015b, 2016), mientras que en el ámbito más amplio de la SEIEM se han elaborado trabajos que analizan documentos curriculares (Rico y Lupiáñez, 2008).

Los documentos citados en este trabajo abarcan un periodo extenso de cerca de 40 años. La lista de documentos no pretende ser exhaustiva. Este trabajo aborda dos objetivos principales: (1) Describir fenómenos que pueden observarse en la evolución de los documentos curriculares; (2) Establecer líneas de investigación coherentes con los fenómenos observados.

FENÓMENOS OBSERVADOS EN LA EVOLUCIÓN DE LOS DOCUMENTOS CURRICULARES

En los próximos apartados voy a describir algunos fenómenos que pueden observarse en la evolución de los documentos curriculares seleccionados. Después, explicaré cómo a partir de estos fenómenos puede organizarse parte de la investigación en educación matemática infantil.

Ampliación progresiva del rango de edad al nivel (Pre-K) (0 a 3 años)

En los primeros documentos del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1980, 1989, 1991) la primera franja de edad considerada es la de 5 a 9 años (etapa K-4). El punto de inicio es el kindergarten, curso de adaptación a la escuela elemental (primaria) que niños y niñas comienzan a la edad de 5 años. En los años 80, las edades de 0 a 3 (incluso a 4) años están ausentes en estos influyentes documentos.

A partir del año 2000, en los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000, 2003), esta situación comienza a cambiar, al incluirse la etapa de *Prekindergarten*:

Desde el nacimiento hasta los cuatro años tienen lugar muchos desarrollos matemáticos importantes para los niños. Tanto si están al cuidado de la familia antes de entrar en la escuela, como si lo están al de personas ajenas, todos necesitan que se atienda y apoye su innato deseo de aprender (NCTM, 2003, p. 77).

No obstante, aunque se produce un “guiño” al periodo que abarca desde el nacimiento a los cuatro años, los listados de expectativas de aprendizaje -contar con comprensión, usar modelos para desarrollar nociones de valor posicional, etc.- (NCTM, 2003, p. 82) corresponden más al rango de edad de 5 a 7 años (K-2).

En el año 2000, se celebra en Arlington (Virginia) la *Conferencia sobre Estándares para la Educación Matemática en Kindergarten y Prekindergarten*. Esta conferencia da lugar a una publicación (Clements, Sarama y DiBiase, 2004) en la que se proponen contenidos matemáticos adecuados para los niños de 2 años (Clements, 2004) que pueden consultarse en De Castro, Flecha y Ramírez (2015, pp. 91-93). Este documento es fundamental, por establecer expectativas de aprendizaje para pequeños de edades no consideradas en documentos curriculares americanos con anterioridad. Además, se trata de un documento que trata el tema con extensión y profundidad y está basado en resultados de investigación.

Dentro del proyecto de los *Focos Curriculares* (NCTM, 2006), que en principio abarcaba desde *Kindergarten* hasta el 8º grado (5 a 14 años), se desarrollan con posterioridad los *Focos en Prekindergarten* (Fuson, Clements y Beckman, 2009). En este documento, siguiendo la línea de los *Focos Curriculares*, que tratan de desarrollar y concretar el *principio curricular*, centrándose en “matemáticas importantes y bien articulado a través de diferentes niveles” (NCTM, 2003, p. 15), se especifica cuáles son las matemáticas importantes para alumnos de 2 a 4 años, diferenciando dentro de este rango de edad tres etapas: 2-3 años inicial (early 2s/3s), 2-3 años avanzado (later 2s/3s), y 4 años (4s/Pre-Ks).

Los *Estándares Estatales Comunes de Estados Unidos*, adoptados por 45 de los 50 estados (NGA Center & CCSSO, 2010) comienzan en *kindergarten* (5 años). Algunos estados han desarrollado documentos curriculares para *prekindergarten*, alineados con los *Estándares Comunes*, de los que también puede obtenerse información de interés (The New York State Education Department, 2011).

La observación conjunta de los documentos de Clements (2004) y Fuson y otros (2009) permite una aproximación a la enseñanza de las matemáticas para niños de 2 y 3 años basada en resultados de investigación. A partir de aquí, para seguir avanzando hacia las “profundidades” del ciclo de 0 a 3 años hay que “descender” un nivel, a documentos del tipo de currículos locales (The New York State Education Department, 2011) o libros de texto de autores de prestigio (Clements y Sarama, 2009; Geist, 2009) que recogen resultados de investigación (Sarama y Clements, 2009).

Geist (2009) propone un “currículo matemático” para niños de 0 a 3 años. Su planteamiento de qué se entiende por matemáticas con bebés (0-1 años) contiene opciones cuestionables, como la inclusión como contenido matemático de la permanencia del objeto (Geist, 2009, p. 151). Coincidiendo en este punto particular, Vergnaud (1991, p. 24) propone la permanencia del objeto como ejemplo de “cálculo relacional”, término con el que este autor intenta clarificar y hacer explícita la noción de razonamiento (p. 28).

Estos últimos ejemplos permiten entender que profundizar en el “currículo matemático” en edades de 0 a 2 años va más allá del análisis de documentos curriculares, pues requiere un posicionamiento acerca de qué es hacer matemáticas, o qué tipo de actividad contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, y cómo lo hace, en estas edades.

El interés que tiene profundizar en el currículo matemático de 0 a 3 años se justifica por la obligación legal de que en los centros que imparten primer ciclo de educación infantil, “Por cada 6 unidades o fracción deberá haber, al menos, un Maestro Especialista en Educación Infantil o grado equivalente” (Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, 2008b, p. 17). Esto hace que el rango de edad de 0 a 3 años tenga interés para maestras y maestros en formación, como posible salida profesional propia de su titulación, para sus profesores, y educadores matemáticos e investigadores en este ámbito.

Del currículo “minimalista” a las expectativas de aprendizaje por edades

Balfanz (2004), en su trabajo titulado “¿Por qué enseñamos a los niños pequeños tan pocas matemáticas? Algunas consideraciones históricas” sostiene que:

El currículo minimalista centrado en los diez primeros números y el reconocimiento de formas sencillas [...] ha sido predominante en los últimos 60 años. Restos de los programas matemáticos creados por pioneros de la educación infantil como Goodrich, Froebel o Montessori pueden todavía encontrarse en los centros de educación infantil, pero en su mayoría son artefactos desprovistos de su contenido matemático profundo (p. 9).

Este autor explica que durante los dos pasados siglos se han ido alternando visiones contrapuestas sobre qué experiencias matemáticas son adecuadas en los primeros años, oscilando desde el desarrollo de profundos currículos matemáticos como el de Froebel, hasta la eliminación completa de contenidos matemáticos de la educación infantil basada en concepciones, de origen psicológico o pedagógico, que apuntaban a que es innecesario o incluso perjudicial enseñar matemáticas en la educación infantil (Balfanz, 2004).

Aunque en la actualidad se pueden encontrar rasgos de este minimalismo curricular en las prácticas de aula en las escuelas infantiles, se están produciendo cambios en documentos curriculares que señalan una clara tendencia hacia la determinación de expectativas de aprendizaje matemático por edades. Estos cambios obedecen a que cada vez hay resultados más sólidos de revisiones de investigación que apuntan a que el conocimiento numérico de los niños al final de la educación infantil es el mejor predictor, no solo del rendimiento matemático futuro, sino también de las habilidades tempranas de lectura (Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2009; NRC, 2014b).

En este sentido, Clements (2004) realiza una síntesis de propuestas de expectativas de aprendizaje para los primeros años, de la que aquí presentamos como ejemplo un pequeño extracto sobre el conteo:

De los 2 a los 4 años, niñas y niños pueden: 1) Desarrollar la capacidad de formar colecciones de hasta 4 objetos sin dar la cantidad verbalmente. Por ejemplo, mostrándoles 3 objetos y tapándolos; 2) Formar una colección equivalente a otra (de hasta 4 objetos) mediante una correspondencia uno a uno; 3) Recitar la secuencia de las palabras número hasta 10; 4) Contar hasta 4 objetos indicando el cardinal y formar contando una colección de hasta 4 objetos; 5) Decir cuál es el número que va después de... 2, 3, hasta 9, empezando a contar desde 1. Por ejemplo: ¿Qué número va después de 4? “1, 2, 3, 4 y 5. El 5.”; 6) Subitizar pequeñas colecciones de hasta 3 objetos; y 7) Representar cantidades de 1 o 2 objetos con los dedos (Clements, 2004, p. 26-28).

Clements y Sarama (2009, 2016) proponen trayectorias de aprendizaje para cada contenido matemático, basadas en resultados de investigación, con referencias muy detalladas sobre edades. Por ejemplo, para el aprendizaje de la subitización, proponen la siguiente trayectoria: 1) Indicar el número en pequeñas colecciones de hasta tres objetos con 1 o 2 años; 2) Construir colecciones de hasta 3 objetos con 3 años; 3) Subitizar perceptivamente hasta cuatro objetos con 4 años; etc. (Clements y Sarama, 2016, pp. 28-29). Otros autores siguen esta línea de mostrar trayectorias de aprendizaje con referencias a edades a modo de ejemplo, manteniendo a la vez una visión crítica con respecto a las mismas, en manuales de formación de maestros (Castro y Castro, 2016, ver pp. 57, 58 y 134). También hay ejemplos de manuales que ofrecen listados o tablas de contenidos matemáticos adecuados para cada edad. Por ejemplo, Geist (2009) propone como contenidos matemáticos pertenecientes al ámbito del número, para niños de 6 a 36 meses, los siguientes: la correspondencia uno a uno (24-36 meses), la permanencia del objeto (6 a 12 meses), el concepto de “más” (12 a 18 meses), el concepto de “uno” (24 a 36 meses) y la iniciación a la recitación de la secuencia numérica (24 a 36 meses) (Geist, 2009, pp. 150-152).

Varios documentos curriculares han seguido esta línea de proponer expectativas de aprendizaje matemáticas por edades. Aunque debe aclararse que estas propuestas abarcan también toda la educación primaria, las propuestas para la educación infantil resultan más novedosas. Entre estos documentos están los Focos Curriculares del NCTM (2006), en que los contenidos de cada curso vienen resumidos en una página, y sus desarrollos posteriores (Fuson, Clements y Beckman, 2009)

en los que se entra con un mayor detalle en cada curso. También destacamos los Estándares Estatales Comunes de EEUU (Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010), en los que el currículo de cada curso puede descargarse en un documento independiente.

Aunque siempre se pueden poner objeciones relativas a las variaciones en el desarrollo del pensamiento matemático (NRC, 2014b), y todas estas referencias a expectativas de aprendizaje por edades deben ser tomadas con mucha cautela, y que nunca hay que confundir unas orientaciones con unos contenidos mínimos exigibles a todos los alumnos, pienso que es una línea de trabajo necesaria debido a que la actuación de maestras y maestros en la práctica docente necesita de algún tipo de orientación, basada en la investigación, sobre qué tipo de actividad matemática es adecuada aproximadamente a cada edad.

La distancia entre el paradigma dominante de investigación en psicología y el modelo de aprendizaje de cero a tres años

El área de conocimiento de la Didáctica de la Matemática ha recibido aportaciones de diversas disciplinas: “Matemática, la Epistemología e Historia de la Ciencia, la Pedagogía, la Psicología y la Sociología de la Educación” (Rico, Sierra, Castro, 2002, p. 40). Ahora bien, algunas revisiones de investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil presentan un sesgo hacia las aportaciones provenientes del ámbito de la Psicología y de la propia Didáctica de la Matemática (Clements y Sarama, 2007; NRC, 2014a). Como veremos, esto produce un distanciamiento entre la información que ofrecen las síntesis de resultados de investigación y las prácticas más recomendadas para los primeros años (0 a 3).

Las investigaciones que se han desarrollado en el campo de la psicología con bebés (0-1 años) suelen utilizar el paradigma de la habituación. Este modelo de investigación se basa en que los bebés, a medida que los estímulos se repiten, van reduciendo cada vez más su grado de respuesta hasta dejar de reaccionar al estímulo por completo. Se dice entonces que los bebés se han habituado al estímulo. Cuando el bebé recupera la atención al estímulo, se interpreta que el estímulo es distinto y que el bebé se ha deshabituado. La habituación y la deshabituación se miden en función del tiempo que el bebé mira al objeto (Lago, Jiménez y Rodríguez, 2003).

Utilizando este modelo de investigación se ha llegado a numerosos resultados sobre el conocimiento matemático de los bebés y de menores de 3 años (Lago, Jiménez y Rodríguez, 2003; Lago, Rodríguez, Escudero y Dopico, 2012; National Research Council, 2014a; Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez, 2013). Parece claro que bebés de pocos meses de vida son sensibles a variaciones en aspectos de los estímulos que se les presentan, que parecen incluir la numerosidad de colecciones de objetos (o representaciones de objetos).

No obstante, algunas de las conclusiones a las que se llega en estas investigaciones se cuestionan, puesto que las interpretaciones sobre a qué aspecto del estímulo responden los bebés y qué significado tiene esta respuesta son muy diversas y han dado lugar a muy diferentes explicaciones, críticas y estudios de réplica (Lago, Jiménez y Rodríguez, 2003; Rodríguez y Scheuer, 2015).

Más allá del interés que tienen los resultados obtenidos en estas investigaciones, vemos que en ellas el bebé es receptor pasivo de ciertos estímulos que el experimentador le suministra y ante los cuales reacciona fijando la atención sobre los mismos una cantidad mayor o menor de tiempo.

Entre las prácticas recomendadas para el primer ciclo de educación infantil que potencian el desarrollo del pensamiento matemático se encuentran el cesto de los tesoros, el juego heurístico (Figura 1, aula de 1-2 años de Gonzalo Flecha en la Escuela Cigüeña María), las bandejas de experimentación o el juego de construcción. Estas prácticas son experiencias muy abiertas de juego libre en las que el educador organiza el entorno del niño eligiendo materiales ideales para la exploración. No son “actividades” entendidas en el sentido usual que se da a este término con niños mayores (situaciones breves de aprendizaje orientadas a la consecución de un objetivo didáctico, en

las que el maestro explica lo que hay que hacer), sino propuestas en que el maestro interviene indirectamente a través de la organización de un entorno, pero en las que es el niño el que explora con total libertad los materiales (Alsina, 2006, 2015a; De Castro, 2011; Edo, 2012; Goldschmied y Jackson, 2007; Lee, 2012; Zero to Three, 2008).

Como vemos, hay una gran distancia entre los resultados obtenidos por la investigación psicológica sobre el pensamiento matemático siguiendo el modelo de habituación-deshabituación y las prácticas consideradas apropiadas para el ciclo de 0 a 3 años. Parece muy difícil establecer conexiones entre la teoría y la práctica; en particular, parece que los resultados de investigación tienen poco que aportar a las prácticas de aula, pero: ¿Tiene esto que ser forzosamente así? ¿Hay alternativas para conectar mejor resultados de investigación y práctica de aula?



Figura 1. Juego heurístico en un aula de 1-2 años

Una propuesta para reducir esta distancia consiste en incorporar revisiones de investigaciones de fuentes que han recibido una menor atención en el pasado. Un trabajo en esta línea es el de Edo (2016) en este seminario.

Complejidad epistémica de contenidos y procesos matemáticos

Suele pensarse que las matemáticas que se aprenden en la educación infantil son muy sencillas y que cualquiera puede enseñarlas (Castro y Castro, 2016, p. 15). Sin embargo, las matemáticas infantiles contienen ideas muy profundas y sutiles:

Aunque los adultos lo dan por sentado, por ser algo familiar, la conexión entre la lista de los números de contar y el número de elementos de un conjunto es profunda y sutil. Es una conexión clave que los niños deben establecer. También hay sutilezas e ideas profundas implicadas al recitar y al escribir la lista, que los adultos también dan por sabidas, por lo habitual de su uso (NRC, 2015, p. 36).

Muchos de los términos que se emplean al hablar de las matemáticas en los primeros años tienen una gran complejidad en sí mismos (*numerosidad, subitización, unitización*) o constituyen términos inventados para enfatizar una distinción crucial, como *palabra número* o *secuencia de palabras número* (o *cantinelas*), para diferenciar entre el número, como concepto, y el numeral hablado o palabra número. También entre las representaciones es necesario diferenciar entre *recta numérica* y *banda numérica* o *camino numérico* (*number path*; NRC, 2009, p. 53), al ser la primera una representación continua y la segunda una representación discreta más adecuada para las primeras edades (NRC, 2009).

En la Figura 2 aparecen varios de estos contenidos y procesos matemáticos fundamentales para comprender los conocimientos numéricos en las primeras edades. Como hemos visto, distintos documentos curriculares llaman la atención sobre la profundidad de estos contenidos.

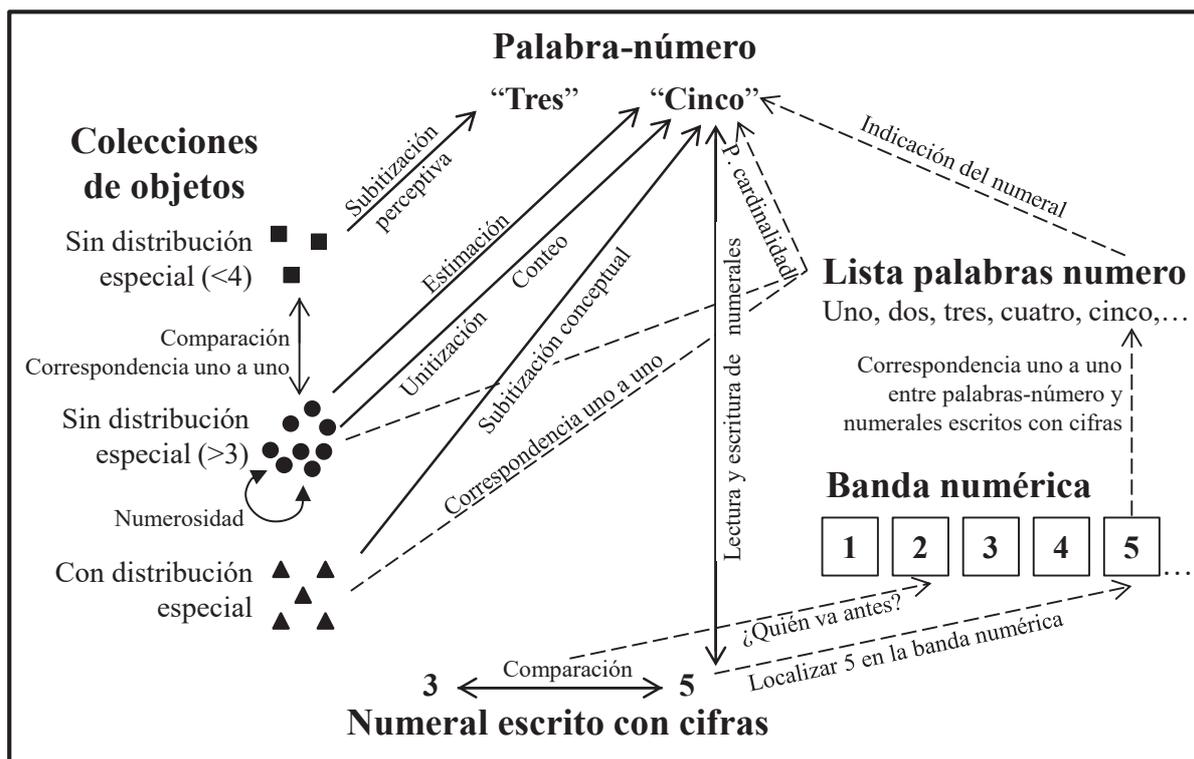


Figura 2. Algunos contenidos matemáticos propios de 0 a 6 años y sus relaciones

La “invisibilidad curricular” de algunos contenidos matemáticos

Algunos contenidos matemáticos no suelen aparecer en los documentos curriculares. Para Ruiz (2001), se trata de “conocimientos necesarios para llevar a cabo ciertas prácticas... que no pueden ser objetos de enseñanza porque no se presentan bajo una forma cultural conocida, incluso no figuran en los documentos curriculares... para la institución escolar [...], son invisibles” (p. 230). Esta invisibilidad curricular afecta a la enumeración de colecciones, la diferenciación entre conocimientos espaciales y geométricos, y al razonamiento de los alumnos (Ruiz, 2001). En el caso de la enumeración, Margolinas (2014) ha descrito también este fenómeno de “invisibilidad” relacionándolo con los procesos de institucionalización que intervienen en la transformación de los conocimientos en saberes dentro de una institución.

Enumerar una colección de objetos consiste en realizar una única acción con cada uno de los objetos de la colección. La enumeración fue descrita por primera vez en los trabajos de Guy Brousseau y Joel Briand (Margolinas, 2014). Está presente en la correspondencia uno a uno propia del conteo, pero también es necesaria en muchas situaciones de la vida diaria como echar una carta en cada uno de los buzones de un portal, o despedirse individualmente de cada uno de los presentes en una reunión familiar al finalizar la misma. Se trata de un conocimiento matemático que requiere el uso de la selección o dicotomía (forma elemental de clasificación) y del establecimiento de un orden lineal en la colección de objetos y que resulta básico para no incurrir en errores en el conteo.

Otro conocimiento “invisible” en varios documentos curriculares es la subitización. Esta se define como el reconocimiento inmediato (súbito) del número de objetos que hay en una colección sin necesidad de contar. Por ejemplo, se produce cuando reconocemos que ha salido el 6 en un dado, de un “golpe de vista”, sin contar los puntos. En España, la subitización no aparece ni en el currículo de educación infantil LOGSE (MEC, 1991), ni en el de la LOCE (MECD, 2004). En el de la LOE (MEC, 2008) aparece la expresión “Estimación cuantitativa exacta de colecciones” (p. 1024) que

podría referirse a la subitización, aunque de forma indirecta y algo confusa, pues el uso conjunto de las palabras “estimación” y “exacta” no permite hacerse una idea de a qué se refiere el texto.

No ocurre lo mismo en Estados Unidos. Ya en los Estándares del año 2000 (NCTM, 2003) aparece “la habilidad de reconocer de un vistazo pequeños grupos de objetos” (p. 84) o la actividad de “recordar la configuración de los puntos de las fichas de dominó y determinar el número de puntos sin contarlos” (p. 105), aunque en los documentos curriculares tienden a aparecer expresiones alternativas, sin que aparezca explícitamente el término subitización. Así, en los Focos Curriculares para *prekindergarten* (Fuson, Clements y Beckman, 2009), se indica que los niños “reconocen el número de objetos en pequeños grupos sin contar y contando” (p. 7). Igualmente, en los Estándares Comunes (CCSS, 2010), para el curso de *kindergarten* (5 años), se dice que “los alumnos eligen [...] estrategias efectivas para responder cuestiones cuantitativas, incluyendo el reconocimiento rápido del cardinal de pequeños conjuntos de objetos” (p. 9).

En los libros de texto para la formación de maestros, la subitización ya comienza a aparecer explícitamente. Clements y Sarama (2009, p. 10-18) desarrollan una trayectoria para el aprendizaje del reconocimiento del número y la subitización que abarca desde los 0 a los 8 años y Castro-Rodríguez y Cañadas (2016) incluyen la subitización como método de cuantificación propio de la educación infantil.

El término *unitización* aparece en los documentos de desarrollo de los Focos Curriculares, en *Prekindergarten* y en *Kindergarten*, como el “proceso de detectar o crear una unidad” (Fuson, Clements y Beckman, 2009, p. 65) figurando como uno de los procesos específicos de razonamiento matemático, más allá de la consideración de las unidades de medición en el currículo, siguiendo una línea en la que se propone la unidad (y la unitización) como ideas centrales en el desarrollo inicial del pensamiento matemático capaces de articular la aritmética con la medición, la geometría y el álgebra (Sophian, 2007).

La “invisibilidad curricular” genera un problema evidente en la práctica en el aula. Aquello que no aparece en el currículo, no puede ser objeto de enseñanza (Ruiz, 2001). Este problema está relacionado con la aparente trivialidad de los contenidos matemáticos propios de la educación infantil a la que me he referido en el apartado anterior. Supone un reto para los investigadores y para la formación de maestros. La existencia de este problema es una buena justificación para la distinción que hacía en la introducción entre el conocimiento de un currículo particular y el conocimiento de los estándares en el modelo MTSK (Muñoz-Catalán y otros, 2015).

La inclusión explícita de “teorías didácticas” en documentos curriculares: El caso de las trayectorias de enseñanza y aprendizaje

La enseñanza de las matemáticas en los primeros años ha recibido diferentes orientaciones a lo largo de la historia, recibiendo influencias de los grandes autores y de las corrientes pedagógicas más importantes en cada momento. Newton y Alexander (2013) realizan un esbozo del desarrollo histórico, desde 1900 hasta la actualidad, del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años, dividiendo este periodo de tiempo en tramos de 20 años y señalando, en cada uno de ellos, los desarrollos principales en teorías del aprendizaje y la enseñanza y en la educación matemática, centrándose especialmente en las primeras edades. Los periodos que proponen estas autoras son: La era del *aprendizaje experiencial* (1900-1920), en la que predominan enfoques como los de Montessori o Froebel, con un aprendizaje a través del juego con materiales y actividades estructurados; la era de la *disponibilidad (readiness)* (1920-1940), en que las matemáticas reciben una atención menor y se llega a considerar que los niños no están preparados para su estudio hasta la educación primaria y que una exposición anterior puede resultar perjudicial; la era del *desarrollo cognitivo* (1940-1960), bajo la influencia de Piaget, en la que se asume que la naturaleza del pensamiento y el razonamiento del niño preoperacional tiene ciertas limitaciones (conservación, reversibilidad, etc.); la era del *desarrollo con andamiaje social* (1960-1980), en la que destaca la

presencia de las aportaciones de Vygotsky y Bruner, con un giro hacia el socioconstructivismo; la era del *aprendizaje culturalmente situado* (1980-2000), con aportaciones provenientes de la antropología, como las de Lave o Rogoff; y la *era emergente del aprendizaje corpóreo* (2000-2020), con las aportaciones más recientes de la neurociencia y de la cognición corpórea (o encarnada). En cada uno de estos periodos Newton y Alexander (2013) eligen la influencia más determinante a su juicio, que da nombre a la “era”, pero también señalan visiones alternativas en cada periodo entre las que seguro estarán las que los lectores echan en falta.

En este contexto histórico, cada documento curricular refleja las características de su época y las influencias de los autores y las corrientes teóricas. Este reflejo se mueve dentro de un rango amplio que va desde lo implícito (MEC, 2008), pasando por lo explícito con reconocimientos en bibliografía (CCSS, 2010, pp. 91-92, ver “muestra de trabajos consultados”), hasta lo explícito con lista de referencias (NCTM, 2000, 2003). Así, en el currículo español LOE/LOMCE de educación infantil (MEC, 2008), aparecen fragmentos que denotan influencia piagetiana, como el siguiente: “niños y niñas van desarrollando determinadas habilidades lógico matemáticas, como consecuencia del establecimiento de relaciones cualitativas y cuantitativas entre elementos y colecciones” (p. 1025). Aunque se puede considerar a Piaget el acuñador del término “lógico-matemático” (Piaget e Inhelder (1966/2007, p. 154), la presencia de este autor está implícita en el texto.

En el extremo contrario, de la referencia explícita de influencias en los documentos curriculares, dos casos interesantes son la síntesis de enfoques propuesta en los *Estándares Comunes* (CCSS, 2010) en su introducción, al basar los *Estándares para la Práctica Matemática* en los *estándares de procesos* (NCTM, 2000/2003) y en las *hebras de la competencia matemática* del informe “Adding it up” (NRC, 2001), y la inclusión de “teorías” surgidas dentro de la Educación Matemática en documentos curriculares importantes. En este caso, tenemos la presencia de las *Trayectorias de Enseñanza y Aprendizaje*¹ en distintos documentos curriculares (CCSS, 2010; Naeyc y NCTM, 2002/2013, 2013; NRC, 2009).

Las trayectorias de aprendizaje se han convertido en una de las ideas más presentes en la Educación Matemática actual. En 2009 se celebró una conferencia sobre trayectorias de aprendizaje en Carolina del Norte a la que asistió gran parte del equipo responsable de la redacción de los *Estándares Comunes* (CCSS, 2010). Dicha conferencia dio lugar a un informe inicial (Daro, Mosher, y Corcoran, 2011) y posteriormente a un libro (Maloney, Confrey y Nguyen, 2014). Según indican los editores de este volumen en la introducción, la idea de las trayectorias de aprendizaje debe gran parte de su popularidad a haberse convertido en uno de los organizadores de los *Estándares Comunes* (Confrey, Maloney y Nguyen, 2014). Dentro de la educación infantil, aparece un ejemplo de trayectoria de aprendizaje en la *Declaración Conjunta de Posición sobre las Matemáticas en Educación Infantil* (Naeyc y NCTM, 2002/2013, pp. 21-23). También en el informe del National Research Council sobre el aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia (NRC, 2009), se dedica una parte extensa del mismo a describir caminos de enseñanza y aprendizaje para: 1) Los números, relaciones y operaciones (cap. 5, pp. 127-173); y 2) La geometría, el pensamiento espacial, y la medición (cap. 6, pp. 175-221).

Finalmente, las trayectorias de aprendizaje y enseñanza, en diversas versiones, han llegado con mayor o menor intensidad a los libros de texto para la formación de maestros de Educación Infantil (Buys, 2010; Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2009, 2016).

¹ En este texto, utilizo siempre entrecomillado el término “teoría” o “teoría didáctica” como abreviatura de “herramienta didáctico-matemática desarrollada dentro de una teoría sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas”. Así, en el enfoque de Sarama y Clements (2009) de las trayectorias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, considero a éstas (las trayectorias) herramientas que surgen dentro del marco teórico del *Interaccionismo Jerárquico* (*Hierarchic Interaccionism*), teoría esbozada en Sarama y Clements (2009, pp. 20-24).

IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN

En este apartado final quiero invitar a los socios de la SEIEM a reflexionar con el grupo IEMI sobre grandes tareas, o posibles investigaciones, a la luz de lo expuesto en los apartados anteriores, que quedan pendientes para los próximos años. Trataré en cada caso de sugerir como ejemplo trabajos, muchos de ellos realizados en el ámbito de la SEIEM, que guardan relación con cada tarea.

La invisibilidad curricular, junto a la complejidad epistémica de algunos contenidos matemáticos propios de la educación infantil, abren diferentes caminos para la investigación dentro de líneas ya consolidadas en la SEIEM: Para el análisis didáctico desde diferentes perspectivas teóricas (Fernández, 2010; Font, Planas y Godino, 2010; Rico y Lupiáñez, 2013); para la reflexión teórica sobre las matemáticas en 0 a 3 años, ya sea desde una síntesis de aportaciones teóricas previas (Tall, 2013), o desde un enfoque más pragmático basado en síntesis de resultados de investigaciones (Sarama y Clements, 2009); para diseñar propuestas para el aula que desarrollen el currículo (Alsina, 2016; Margolinas, 2014; Salgado, 2015); para estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Muñoz-Catalán y otros, 2015) o para investigar el desarrollo de la competencia profesional de “mirar con sentido” en la Educación Infantil (Fernández, Valls y Llinares, 2011; Gamoran, Jacobs y Philip, 2011; Llinares, 2012). En cualquiera de estos casos resulta evidente que es necesario un conocimiento profundo del contenido y los procesos matemáticos para que se puedan desarrollar estas líneas de investigación.

Se hacen necesarias también las revisiones de investigaciones sobre educación matemática en los primeros años en revistas generales de investigación en educación y en particular de educación infantil, cuyos resultados han recibido una atención menor hasta la fecha (Ver Edo, en estas actas). Se espera de estas revisiones que contribuyan a acercar los resultados de investigación a la mejora de las prácticas docentes en el aula.

Un ámbito en el que se hace necesaria una reflexión teórica profunda es el desarrollo de una conceptualización de la actividad matemática que pueda aplicarse al inicio de este tipo de actividad con niños de 0 a 3 años. En estas edades, Rodríguez y Scheuer (2015) han descrito la situación aparentemente paradójica que nos encontramos al comparar los resultados de investigaciones que muestran la competencia numérica de los bebés con la lentitud en el aprendizaje matemático de niñas y niños en torno a los cuatro años de edad. Las preguntas sobre cuándo y cómo se inicia la actividad matemática, o cómo podemos favorecer este tipo de actividad con niños de 0 a 3 años, permanecen abiertas y posiblemente demanden en el futuro nuevos desarrollos teóricos y nuevas aproximaciones a la práctica en el aula.

Referencias

- Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Octaedro & Eumo.
- Alsina, Á. (2015a). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2015b). Panorama internacional contemporáneo sobre la educación matemática infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 42, 210-232.
- Alsina, Á. (2016). El currículo del número en educación infantil. Un análisis desde una perspectiva internacional. *PNA*, 10(3), 135-160.
- Balfanz, R. (1999): Why do we teach young children so little mathematics? Some historical considerations. En J.V. Copley (ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 3-10): NCTM & NAEYC, Reston, VA.
- Buys, K. (2010). Años de preescolar. Numerización emergente. En M. Van de Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Los niños aprenden matemáticas: Una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el Matemáticas con dos años cálculo con números naturales en la escuela primaria* (pp. 47-56). México: Correo del Maestro & La Vasija.

- Castro, E. y Castro, E. (Coords.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil*. Madrid: Pirámide.
- Castro, E., Cañadas, M.C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(2), 1-11.
- Castro-Rodríguez, E. y Cañadas, M.C. (2016). Números y operaciones. En E. Castro, y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 153-170). Madrid: Pirámide.
- Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: NGA Center & CCSSO. Recuperado el 24 de julio de 2014 en: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf
- Chamorro, M.C. (Coord.) (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Madrid. Pearson Educación.
- Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. En D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D.H. y Sarama, J. (2007). Early childhood. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (461-556). Charlotte, NC: Information Age Pub.
- Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.
- Clements, D.H. y Sarama, J. (2016). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a edad temprana: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Lexington, KY: Learning Tools LLC.
- Clements, D.H., Sarama, J. y DiBiase, A.M. (eds.) (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Confrey, J., Maloney, A.P., y Nguyen, K.H. (2014). Introduction: Learning trajectories in mathematics. In A.P. Maloney, J. Confrey y K.H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. xi-xxii). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid (2008a). DECRETO 17/2008, de 6 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se desarrollan para la Comunidad de Madrid las enseñanzas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, 61, 6-15. Recuperado el 20/05/2016 de: http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/Desarrollo_Infantil_Madrid_08.pdf
- Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid (2008b). DECRETO 18/2008, de 6 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se establecen los requisitos mínimos de los centros que imparten primer ciclo de Educación Infantil en el ámbito de la Comunidad de Madrid. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, 61, 15-18. Recuperado el 20/05/2016 de: http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/Requisitos_minimos_infantil_08.pdf
- Daro, P., Mosher, F. y Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. DOI: 10.12698/cpre.2011.rr68
- De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta*, 14, 47-65.
- De Castro, C., Flecha, G. y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: Buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 26, 89-108.
- Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números*, 80, 71-84.
- English, L.D. y Mulligan, J.T. (Eds.) (2013). *Reconceptualizing early mathematics learning*. Netherlands: Dordrecht. DOI: 10.1007/978-94-007-6440-8

- Fernández, C. (2010). Análisis epistemológico de la secuencia numérica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 59-87.
- Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M.M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Font, V., Planas, N., Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.
- Fuson, K.C., Clements, D.H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA/Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics & Naeyc.
- Gamoran, M., Jacobs, V.R. y Philip, R.A. (Eds.) (2011). *Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teachers' Eyes*. New York & London: Routledge.
- Geist, E. (2009). *Children are born mathematicians: Supporting mathematical development, birth to age 8*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.
- Goldschmied, E. y Jackson, S. (2007). *La educación infantil de 0 a 3 años*. Madrid: Morata.
- Lago, M. O., Jiménez, L. y Rodríguez, P. (2003). El bebé y los números. En I. Enesco (Coord.), *El desarrollo del bebé: cognición, emoción y afectividad* (pp. 147-170). Madrid: Alianza.
- Lago, M.O., Rodríguez, P., Escudero, A. y Dopico, C. (2012). ¿Hay algo más que contar sobre las habilidades numéricas de los bebés y los niños? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 38-53.
- Lee, S. (2012). La historia de Emma: Estudio de caso sobre el desarrollo de la resolución de problemas desde los 8 meses a los 2 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(2), 64-71.
- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10, 53-62.
- Maloney, A.P., Confrey, J. y Nguyen, K.H. (Eds.) (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Margolinas, C. (2014). ¿Saberes en la escuela infantil? Sí, pero ¿cuáles? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(1), 1-20.
- Mulligan, J. y Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated perspectives. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 117-146). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M.A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 589-605.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1991, 6 de septiembre). REAL DECRETO 1331/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *BOE*, 216, 29716-29726.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2004). Real Decreto 114/2004, de 23 de enero, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *BOE*, 32. Recuperado el 30/04/2016 de: <http://www.boe.es/buscar/pdf/2004/BOE-A-2004-2221-consolidado.pdf>
- Ministerio de Educación y Ciencia (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE*, 5, 1016-1036. Recuperado el 30/04/2016 de: <http://www.boe.es/boe/dias/2008/01/05/pdfs/A01016-01036.pdf>

- NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 1-23. Recuperado el 17 de agosto de 2014 de: <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/30/34>
- Newton, K.J. y Alexander, P.A. (2013). Early mathematics learning in perspective: Eras and forces of change. En L.D. English y J.T. Mulligan (eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning, Advances in Mathematics Education* (pp. 5-28). Dordrecht: Springer.
- NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.
- National Council for Curriculum and Assessment (2014). *Mathematics in Early Childhood and Primary Education (3–8 years). Definitions, Theories, Development and Progression*. Dublin: NCCA. Recuperado de: http://ncca.ie/en/Curriculum_and_Assessment/Early_Childhood_and_Primary_Education/Primary-Education/Primary_Developments/Maths/Review-and-Research/ el 30 de abril de 2016.
- National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford y B. Findell (eds.), Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.
- National Research Council (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity*. C.T. Cross, T.A. Woods y H. Schweingruber (eds.), Committee on Early Childhood Mathematics, National Research Council.
- National Research Council (2014a). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(1), 21-48.
- National Research Council (2014b). Variaciones en el desarrollo, influencias socioculturales, y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 1-22.
- National Research Council (2015). Contenido matemático fundacional para el aprendizaje en los primeros años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 4(2), 32-60.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1966/2007). *Psicología del niño* (17ª ed.). Madrid: Morata.
- Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (Coords.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Editorial Comares.
- Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de “Didáctica de la Matemática”. *Revista de Educación*, 328, 35-58.
- Rodríguez, C. y Scheuer, N. (2015). The paradox between the numerically competent baby and the slow learning of two- to four-year-old children / La paradoja entre el bebé numéricamente competente y el lento aprendizaje de los niños de dos a cuatro años de edad, *Estudios de Psicología*, 36:1, 18-47, DOI:10.1080/02109395.2014.1000009
- Ruiz, L. (2001). La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos. En M.C. Chamorro (Dir.), *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 229-262). Madrid: MECD.
- Salgado, M. (2015). *La práctica docente en educación infantil desde el enfoque de la educación matemática realista y los procesos matemáticos*. Tesis doctoral. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago.

- Sarama, J. y Clements, D.H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning trajectories for young children*. Nueva York: Routledge.
- Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145.
- Sophian, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York & London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press.
- The New York State Education Department (2011). *New York State Prekindergarten Foundation for the Common Core*. Albany, NY: NYSED. Recuperado el 01/05/2016 de:
http://www.p12.nysed.gov/ciai/common_core_standards/pdfdocs/nyslsprek.pdf
- Zero to three (2008). *Caring for infants and toddlers in groups: Developmental appropriate practice* (2nd ed.). Washington, DC: Author.