CULTURA DE RACIONALIDAD Y PROCESOS DE ENCULTURACIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Culture of Rationality and Processes of Enculturation in Secondary School

Rodríguez-Rubio, S. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N.

Resumen

En el escrito se aportan evidencias empíricas de que las prácticas matemáticas que se desarrollan en el salón de clases están orientadas por una cultura de racionalidad (específica de cada aula), determinada por los patrones de justificación de los enunciados matemáticos que ahí surgen y las trayectorias de participación de los actores de clase. Adicionalmente, se muestra empíricamente que si bien esa cultura preferentemente la promueve el profesor, los alumnos aprenden de ella, la interiorizan y, a su vez, la ponen en juego, es decir, participan en un proceso de 'enculturación'. En el estudio, de corte etnográfico y etnológico, se analiza un caso, el de un salón de clases de nivel secundaria y para el análisis de los argumentos se recurre al modelo de Toulmin.

Palabras clave: *cultura de racionalidad, procesos de enculturación, argumentos, etnografía*

Abstract

The paper provides empirical evidence to support the notion that mathematics practices developed in the classroom are guided by a culture of rationality (specific to each classroom), determined by the justification patterns of the mathematics statements in that setting and the participation trajectories of class agents. Moreover, the paper empirically shows that even if the teacher preferentially promotes said culture, the students learn from it, they interiorize it and, in turn, put it into play. That is to say, the students take part in a process of 'enculturation'. The study, of an ethnographic and ethnological type, analyzes one case –that of a secondary school classroom and the Toulmin's model is used for the analysis of the arguments.

Keywords: *culture of rationality, processes of enculturation, arguments, ethnography*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Hersh sugiere (1993, p. 395) que "la noción de prueba rigurosa no está cavada en mármol", mientras que Thom apunta que "no existe una definición rigurosa del rigor" (1980, p. 122). Atiyah y colaboradores (1994, p. 178) adelantan una posible explicación de este fenómeno: "quizás ahora se tienen criterios severos de demostración a los cuales aspirar... pero en las primeras fases de nuevos desarrollos se debe estar preparado para actuar con un estilo más (abierto y menos riguroso)". Cierto es que no existe un prontuario que marque los pasos a seguir para conseguir una prueba rigurosa en matemáticas; que no hay un procedimiento explícito y formal que norme las actividades de demostración y certificación de pruebas que practican los matemáticos. Con todo, la diversa actividad matemática que se ha desarrollado a lo largo de la historia y que a la fecha se sigue practicando, aporta evidencias de que sí existen unas prácticas matemáticas de justificación paradigmáticas, apegadas a normas y hábitos a los cuales se ciñen las comunidades concretas de matemáticos. Esas evidencias proporcionan indicios de que existe una Cultura de Racionalidad que orienta las decisiones y actividades que los expertos llevan a cabo relacionadas con la demostración matemática y la prueba. En el presente escrito se aportan evidencias empíricas de que así como la práctica del profesional de las matemáticas está orientada por una cultura de racionalidad específica (relativa a cada comunidad), las prácticas matemáticas que se desarrollan en el salón de clases

Rodríguez-Rubio, S. y Rigo-Lemini, M. (2015). Cultura de racionalidad y procesos de enculturación en la Escuela Secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 477-484). Alicante: SEIEM.

también están guiadas por una cultura de racionalidad (acotada por condiciones generales pedagógicas y didácticas pero que también son específicas de cada aula); adicionalmente, se muestra empíricamente que si bien esa cultura preferentemente la promueve el profesor, los alumnos aprenden de ella, la interiorizan y a su vez, la ponen en juego, es decir, participan en un proceso de 'enculturación' de esa cultura de racionalidad que sucede conforme a una dinámica que retroalimenta y consolida las prácticas impulsadas por el propio docente.

ANTECEDENTES

La noción de racionalidad, con un sentido distinto al que se introduce en este trabajo, ha sido empleada en diversas investigaciones en educación matemática.

Por un lado, están los trabajos que parten del modelo de Habermas, basado en la racionalidad epistémica, teleológica y comunicativa. Dentro de ellos están los que Boero ha realizado (e.g., en el 2006) centrado en los procesos de conjeturación y demostración en la educación matemática, o los que ha desarrollado en colaboración (como el de Morselli y Boero, 2009), en donde se sugiere la aplicación del modelo de Habermas para contribuir al debate sobre marcos teóricos adecuados que permitan considerar la compleja naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y para examinar los procesos de "enculturación" científica, desde una perspectiva de las razones matemáticas. En otras contribuciones de Boero y colaboradores (Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010), ellos proponen integrar los modelos de Toulmin y de Habermas como herramientas de análisis para analizar el comportamiento de los estudiantes y para inspirar prácticas en el aula que permitan desarrollar conciencia en los estudiantes sobre la naturaleza de la prueba.

Otros trabajos han tomado como punto de partida la idea de racionalidad práctica definida por Herbst y Chazan. Los autores consideran que la racionalidad es a menudo implícita y caracteriza los mecanismos regulatorios de la práctica de comunidades adaptadas al trabajo que se espera que ellos hagan (Herbst y Chazan, 2003); afirman que la racionalidad práctica es una forma de dar cuenta de las prácticas existentes y estables en la enseñanza de las matemáticas. Herbst y Chazan (2011) también señalan que si la enseñanza de las matemáticas puede ser concebida como una práctica, debiera descansar sobre la base de una racionalidad práctica común, sobre la cual los profesionales individuales pueden construir su propia enseñanza de las matemáticas contra el telón de fondo de sus compromisos personales y las demandas de los contextos institucionales donde trabajan.

MARCO INTERPRETATIVO

Los Esquemas Epistémicos. Su definición

Los mecanismos a los que una persona o una comunidad recurre habitualmente para sustentar los hechos de las matemáticas Rigo (2013a, 2013b) los denomina 'esquemas epistémicos'. Ella identifica esquemas epistémicos de tipo matemático (e.g., las instanciaciones de reglas) así como esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas, como el esquema operatorio, mediante el cual se otorga validez a una regla acudiendo a la autoridad de las matemáticas.

Interpretación funcional de los argumentos. El modelo de Toulmin

De acuerdo con el modelo de Toulmin (1974), un argumento está conformado por tres elementos: Claim (C, conclusión cuyos méritos se están tratando de establecer), Data (D, hechos a los que se apela para darle fundamento a la conclusión) y Warrant (W, mediante los cuales se da cuenta de las reglas, principios o licencias de inferencia que autorizan pasar de D a C). Otros tres elementos pueden ser considerados en el modelo de Toulmin: Backing (B, o respaldo), Cualificador modal y Reserva, sin embargo, en la investigación que aquí se reporta, sólo se retomó al primero. El Backing apoya al Warrant (W) al ofrecer su cimiento teórico, práctico o experimental.

En investigaciones sobre educación matemática el modelo de Toulmin ha sido adaptado y utilizado para varios fines, por ejemplo, Krummheuer (1995) lo emplea para analizar la argumentación en una clase de matemáticas de nivel elemental y para documentar cómo el aprendizaje progresa en un aula; Yackel (2002) lo usa para examinar el papel del profesor en la argumentación colectiva; Martinez y Pedemonte (2014) para identificar y analizar el proceso de argumentación que apoya la producción de conjeturas y pruebas.

La Cultura de Racionalidad. Una caracterización

Los componentes de la Cultura de Racionalidad son, entre otros, los siguientes:

CR.i. *Normas de sustentación*. El bagaje de argumentos que una comunidad habitualmente activa para sustentar afirmaciones o hechos de las matemáticas. Se trata de las prácticas recurrentes y más aceptadas de argumentación o sustentación que se dan en una comunidad. Los argumentos están integrados por los esquemas epistémicos (tanto matemáticos como extra-matemáticos) que aparecen explícitamente en las evidencias (D).

CR.ii. *Trayectorias de participación y reparto de responsabilidades*. Se refiere a quién da los C o los D y a quién le corresponde sancionar esas participaciones. Las trayectorias de participación están integradas por una sucesión de intervenciones de los actores de clase en los procesos de argumentación.

TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN EMPÍRICA

La investigación que aquí se reporta es de tipo interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994) y está basada en un estudio exploratorio de caso (Stake, 1999). Para el análisis se asume un enfoque etnográfico (Berteley, 2000) mediante el cual se trata de determinar la posible racionalidad de la clase estudiada a través de la observación empírica directa y de la recuperación de las voces, acciones y significados de los actores; asimismo, se adopta un enfoque etnológico (Berteley, 2000) —acudiendo a un estudio de corte más longitudinal— conforme al cual se buscan identificar hábitos y patrones relacionados con los mecanismos de justificación de los enunciados matemáticos que surgen en clase y con las trayectorias de participación de dichos agentes, componentes que en el marco de esta investigación integran la 'cultura de racionalidad'. Para determinar el caso, se hicieron observaciones sin intervención, a tres profesores de una escuela que cuenta con prestigio académico en una misma zona geográfica. Se eligió a la Maestra Noemí, con dos años de servicio, porque era la que presentaba mayor tendencia hacia la justificación matemática; cuando fue observada, ella impartía la clase de matemáticas a un grupo de primer grado de educación secundaria integrado por 42 alumnos. En un primer momento se le observó durante 5 sesiones; en uno segundo, se observaron 6 sesiones (que se analizan en este documento) y en un tercer momento se le volvió a observar durante otras 5 sesiones. Las clases fueron videograbadas y transcritas. Se utiliza el modelo de Toulmin (1974) para analizar y comparar las estructuras argumentativas de los fragmentos de la clase.

LA CULTURA DE RACIONALIDAD DE UNA CLASE ORDINARIA DE MATEMÁTICAS. ESTUDIO EMPÍRICO

Para el análisis que aquí se expone se examinó una secuencia didáctica que versa sobre reparto proporcional. La secuencia didáctica, impartida en seis módulos de 50 minutos cada uno, se fragmentó en episodios, en cada uno de los cuales se propusieron uno o varios argumentos para dar sustento a una afirmación. Para este reporte se analizaron 33 episodios y 68 argumentos. Los datos se analizan de acuerdo a tres niveles de análisis.

Primer nivel de reconstrucción. Los mecanismos de sustentación promovidos en la clase por la maestra Noemí

En el aula de matemáticas, lo que significa argumentar o sustentar las afirmaciones matemáticas, esto es, lo que significa participar en las prácticas de racionalidad (y educarse en esa racionalidad y aprender a partir de ella), se crea y recrea en las actividades escolares diarias (Cf. Berteley, 2000;

Stake, 1999). Es por esto que, en lo que sigue, se ilustra lo que frecuentemente sucede en el aula de la maestra que participó en el estudio, mediante el análisis de un fragmento de su clase. Se trata de un referente empírico integrado por dos argumentos que forman parte de un mismo episodio, el cual esclarece bien las formas de sustentación habituales en la clase observada. La transcripción de los argumentos aparece en la primera columna de la Tabla 1, y su interpretación funcional, con base en el modelo de Toulmin (1974), se incluye en la segunda.

Tabla 1. Registro del primer fragmento y análisis de los argumentos con el modelo de Toulmin

43 P: Si se requieren preparar 12 litros de agua de limón, ¿cuántos limones y cuántas cucharadas de azúcar necesitamos? 58 E: 48 limones y 24 de azúcar. 60 E: Porque se van a duplicar.	Argumento 1 D1: Instanciación de una regla intuitiva (PIM) → C1: Para 12 litros de agua de limón se necesitan 48 limones y 24 cucharadas de azúcar W1: Propiedades y uso de una regla B1: Matemático. Propiedades de la proporcionalidad (conocimiento básico)
76 P: Duplicas, ¿por qué? Antes tenías 6, ahora te están pidiendo 12. Multiplicamos por 2: 6 por 2, 12; … Litros de agua de limón / Número de limones / Cucharadas de azúcar 3 / 12 / 6 6 / 24 / 12 12 / 48 / 24 (*Tabla que la maestra elabora en el pizarrón*) 83 P: Si vemos que se está duplicando [la cantidad de litros de agua] nos damos cuenta que tenemos que duplicar también la cantidad de limones y la cantidad de cucharadas de azúcar. Si se triplicara, por ejemplo, si tenemos el dato de tres y nos piden 9 … 85 P: Vean la tabla, al principio nos dieron 3 litros de agua para 12 limones y 6 cucharadas de azúcar. Si aumenta la cantidad de litros de agua, qué pasa con los limones ¿aumentan o disminuyen? 86 E: Aumentaron. 87 P: Cierto. Si aumenta la cantidad de litros de agua, ¿qué pasa con las cucharadas de azúcar? 89 P: Aumentaron. Si la cantidad de litros disminuyera, ¿qué pasaría con los limones? 90 E: Disminuyen. 91 P: Disminuyen, ¿y con las cucharadas de azúcar? 92 E: Disminuyen.	Argumento 2 D2: i) D1; ii) Confianza en la conversión de registro; iii) Reflexión y explicación del porqué de procesos y relaciones; iv) Esquema semi-inductivo → C2 = C1 W2: Viabilidad o justificación de la validez de la PIM (en el contexto de una noción de la proporcionalidad); propiedad de los isomorfismos B2: Matemático. Propiedades de la proporcionalidad y de los isomorfismos (conocimiento medio)

<table>
<tr><td>93</td><td>P:</td><td>[93] P: A esa relación se le llama relación de proporcionalidad, si aumenta una y aumenta la otra ya la hicimos, aumentan parejo. Si a una la multiplico por 2, la otra también la multiplico por 2. Si disminuyen, disminuyen parejo…</td><td></td></tr>
</table>

En el primero de los argumentos que aparecen en la Tabla 1, un alumno suministró como evidencia (D1) la instanciación de una regla intuitiva (la Propiedad Isomórfica de la multiplicación, PIM, por sus siglas. Vergnaud, 1989), cuya aplicación la soportó en las propiedades de dicha regla (v. W1), lo que a su vez sustentó en un respaldo matemático y en una noción básica de la proporcionalidad (en B1). En el segundo argumento, trasmitido por la profesora, se tiene una evidencia (D2) de un nivel distinto a la evidencia D1. La maestra aprovechó la intervención del estudiante para llevar a cabo un análisis de casos que le permitió introducir y justificar el concepto de proporcionalidad. Para ello, se basó en tres consideraciones relacionadas con dicha noción: que si se duplican o triplican las cantidades de un espacio de medida, se debe hacer lo propio en los otros espacios de medida (PIM para casos básicos, en 83); que las cantidades de los espacios de medida o bien aumentan, o bien, disminuyen (propiedad de los isomorfismos que aunque no define a la proporcionalidad, en la educación básica se suele tomar como su distintivo esencial, en 85-92); y que dicha variación se da entre los espacios en forma “pareja”, haciendo quizás referencia a la aplicación de la PIM a cualquier escalar (93). La conexión entre la evidencia y la afirmación se sostuvo en W2, constituido por un esquema epistémico, el de la viabilidad de la PIM, que se soportó a su vez en un respaldo matemático (B2), específicamente, en propiedades de la proporcionalidad que implican un conocimiento medio.

Segundo nivel de reconstrucción. Los alumnos: los mecanismos de sustentación aprendidos en clase

En el siguiente fragmento (Tabla 2) se muestra cómo los estudiantes de la clase analizada ponen en juego las prácticas de racionalidad que su mentora promueve.

Tabla 2. Registro del segundo fragmento y análisis de los argumentos con el modelo de Toulmin

<table>
<tr><td>43</td><td>P:</td><td>Si se requieren preparar 12 litros de agua de limón, ¿cuántos limones y cuántas cucharadas de azúcar necesitamos?</td><td rowspan="7">Argumento 3

D3: Instanciación de una regla intuitiva PIM → C3 = C1

W3: Propiedades y uso de una regla

B3: Matemático. Reglas de proporcionalidad (conocimiento medio)</td></tr>
<tr><td>78</td><td>P:</td><td><table><tr><td>Litros de agua de limón</td><td>Número de limones</td><td>Cucharadas de azúcar</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr><tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>94</td><td>L:</td><td>$\begin{array}{r}12\\ \times 4\\ \hline 48\end{array}$ $\begin{array}{r}6\\ \times 4\\ \hline 24\end{array}$</td></tr>
<tr><td>95</td><td>P:</td><td>Ahora explícanos qué es ese 4 por 12 y 4 por 6.</td></tr>
<tr><td>96</td><td>L:</td><td>Pues si se divide 12 entre 3 da 4.
Y se multiplica 3 por 4 da 12.
$3\overline{)12}$ = 4</td></tr>
<tr><td>97</td><td>P:</td><td>¿Por qué dividiste entre tres?</td></tr>
</table>

104 F: … no sería más fácil?... 105 P: ¿Puedes explicar lo que quiso decir? 106 F: Sí, si dice que por tres litros de agua son igual a 12 limones, entonces si queremos ver para 12 litros, tenemos que ver cuántas veces cabe 12 entre tres. Se divide 12 entre 3, serían 4, entonces el 12 se tiene que multiplicar por 4, entonces son 48 limones. Y ya como sabemos que es por 4, para saber cuántas cucharadas multiplicas 6 por 4 es a 28 [24] cucharadas.	Argumento 4 D4: Instanciación de una regla intuitiva; Reflexión y explicitación de procesos y relaciones involucrados → C4 = C1 W4: Viabilidad o justificación de la validez de la PIM (en el contexto de una idea de proporcionalidad) B4: Matemático. Reglas de la proporcionalidad (conocimiento medio)

En el tercer argumento, una alumna (L) proporcionó como evidencia (D3) la instanciación de una regla intuitiva (Propiedad Isomórfica de la multiplicación, PIM), y a semejanza del primer argumento, esa instanciación la soportó en las propiedades de la regla (W3) que sustentó en un respaldo matemático y una noción media de la proporcionalidad porque utilizó un factor escalar cuatro (B3). En el cuarto argumento otra alumna (F) proporcionó una evidencia más elaborada (D4) pues no sólo utilizó la PIM, sino que explicitó el proceso, al mencionar con detalle las relaciones implicadas, lo que le permitió validar la regla a través de la explicación del por qué (esto se deja ver en W4, la cual está respaldada matemáticamente en una noción media de proporcionalidad, B4).

Haciendo una comparación entre los dos fragmentos de clase analizados, es posible percibir algunas semejanzas. En primera instancia, en relación a la trayectoria de participaciones: primero interviene un alumno, quien sugiere una afirmación y ofrece una primera evidencia; a continuación participa la maestra, en el caso del primer fragmento, o F, en el caso del segundo fragmento, quienes con sus argumentos profundizan y enriquecen los argumentos correspondientes (el del alumno y el de L, respectivamente) (v. D's); otra semejanza se refiere a la calidad de las participaciones: las primeras evidencias son instanciaciones de reglas y las segundas son explicaciones conceptuales de las reglas o de su uso, o explicación de su viabilidad (v. W's); y finalmente, se puede mencionar el tipo de argumentos, respaldados en ambos casos en consideraciones matemáticas (v. B's). Las semejanzas que se dan en este ejemplo ilustran adecuadamente cómo las prácticas de racionalidad que emprende la maestra en clase son reproducidas por sus estudiantes, es decir, los fragmentos bajo examen permiten esclarecer cómo la maestra va enculturando en esa racionalidad a sus estudiantes y cómo ellos ponen en práctica esa cultura promovida principalmente por su mentora. Es importante comentar que no es excepcional el caso de L y F; hubo otras participaciones de alumnos en las que también reprodujeron las prácticas de racionalidad impulsadas por la Maestra.

Los rasgos de las prácticas de racionalidad que en este apartado se han destacado, en lo que sigue se sustancian acudiendo a otro nivel de análisis, de tipo numérico. Con ese examen se intenta mostrar que las prácticas de racionalidad aquí descritas son una expresión concreta de la Cultura de Racionalidad que prevalece en la clase observada y en la que los alumnos, como se deja ver en el segundo fragmento, pero también en el tercer nivel de reconstrucción, participan activamente.

Tercer nivel de reconstrucción. Identificación de Patrones

Los argumentos recurrentemente formulados en las clases de Noemí se describen en la Tabla 3. Ahí también aparece el tipo de Backing en el que se soporta el argumento (matemático o extra-matemático), la frecuencia con la que se dio en clase, y el actor que lo formuló. La incidencia, relativamente alta, de estos argumentos en la clase observada permite sugerir que se trata de algunas de las normas de sustentación (CR.i) que dan forma y actualizan la Cultura de Racionalidad de dicha clase.

Tabla 3. Argumentos recurrentes en la clase observada (M: Matemático, E-M: Extra-matemático)

Argumento	Descripción del Argumento	Backing	Profesora	Alumnos
IRI	Instanciación de una regla intuitiva (PIM o valor unitario)	M	3	20
IRE	Instanciación de una regla escolar (regla de tres)	M E-M	1 3	0 3
EGCP	Explicitación genérica conceptual del proceso. Se explican procesos generalizables a otros casos, y se explicitan contenidos matemáticos y significados	M	3	0
EGUR	Explicitación genérica del uso de una regla. Se explicita el funcionamiento de una regla	M E-M	9 5	5 0
V	Viabilidad o justificación de una regla o un proceso	M	4	1
RAI	Repetición para dar aval institucional	M E-M	3 1	0 0
R	Consideraciones empíricamente razonables	M E-M	2 2	0 0
CRI	Comprobación de regla intuitiva	M	3	0

Otra posible norma que conforma la Cultura de Racionalidad de la clase observada (CR.i, y que se desprende también del análisis de las cantidades que destacan en la Tabla 3) hace referencia a la división equilibrada del número de argumentos que dieron los alumnos y los que dio la maestra: mientras casi el 45% fueron proporcionados por ellos, los restantes (55%) los ofreció su mentora.

Pero, sin duda alguna, uno de los rasgos más sobresalientes de las normas de sustentación (CR.i) de la Cultura de Racionalidad que impera en el salón de clase de Noemí es la tendencia que ahí se observa hacia la sustentación con base en consideraciones matemáticas, resaltando otra vez la participación de los alumnos: de los 39 argumentos que estuvieron a cargo de la maestra, en 28 de ellos el Backing fue matemático (cerca del 72%); de los 29 argumentos donde participaron los alumnos, 26 se sustentaron matemáticamente (cerca del 90%), y de los 68 argumentos totales, 54 de ellos (cerca del 80%) fueron soportados en aspectos de la disciplina. Sobresale también el que casi el 12% de los argumentos son de tipo conceptual (V y EGCP).

CONSIDERACIONES FINALES

En el análisis expuesto, tanto en el de las prácticas de racionalidad que se dejan ver en los fragmentos puntuales de clase, como en el de tipo cuantitativo, que ofrece una panorámica de la cultura de racionalidad que parece prevalecer en la clase de Noemí, si bien despunta el papel de la maestra (como la principal promotora de esa racionalidad), también destaca la participación de los alumnos. Desde la perspectiva de la teoría social del aprendizaje ─formulada por Wenger (1998)─, fue esta participación activa y creativa de los estudiantes la que dio lugar a un aprendizaje y una asimilación de las prácticas de racionalidad que la maestra impulsó entre ellos; pero esta participación, a su vez y en buena medida, llegó como resultado del oficio de la maestra Noemí, quien consiguió que los estudiantes intervinieran en prácticas que les resultaron significativas y quien logró también ampliarles el horizonte al proporcionarles acceso a recursos que les permitieron desarrollar prácticas matemáticas de calidad. Sería deseable que los profesores fueran conscientes de la cultura de racionalidad que ellos promueven en el aula y de cómo ellos enculturan a sus alumnos en las prácticas matemáticas que se desprenden de dicha cultura.

Referencias

Atiyah, M. et al. (1994). Responses to "Theoretical Mathematics": Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30(2),* 178-207.

Berteley, M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas*. México D. F.: Paidós.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192). Praga, República Checa: PME.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-209). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Herbst, P. y Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of Mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: the case of engaging students in proving. *For the Learning of Mathematics, 23*(1), 2-14.

Herbst, P. y Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: Studying the justification of actions in Mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics. 24*, 389-399.

Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinez, M. V. y Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics, 86*, 125–149.

Morselli, F. y Boero, P. (2009). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. En V. Durand, S. Soury y F. Arzaello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. 211-220). Lyon, Francia: Institut National de Recherche Pédagogique.

Rigo, M. (2013a). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics 84*(1), 71-91.

Rigo, M. (2013b). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 459-466). Bilbao: SEIEM.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Thom, R. (1980). "¿Son las matemáticas "modernas" un error pedagógico y filosófico?". En J. Piaget, G. Choquet, J. Diedonné, R. Thorn y otros (Eds.), *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Selección y Prólogo de Hernández, J. (pp. 115-130). Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Toulmin, S. E. (1974). *The Uses of Argument*. New York: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1989). *Multiplicative structures*. En J. Hiebert y Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 141-161). Reston: NCTM.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge: The Press Syndicate of the University of Cambridge.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation? *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423-440.