

ENTRECruzAMIENTO DE LOS SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS Y LOS SISTEMAS QUÍMICOS DE SIGNOS

Intertwinement of Mathematical Sign Systems and Chemical Sign Systems

Salinas, G., Gallardo, A. y Mendoza, E.

CINVESTAV, México

Resumen

En esta investigación, docentes de educación media básica y de educación media superior resuelven un cuestionario de matemáticas y de química. Durante los procesos de elaboración se advierte el entrecruzamiento entre los sistemas matemáticos de signos y los sistemas químicos de signos. La competencia formal es alcanzada por uno de los docentes de educación media superior. Se observan dificultades en el uso de la recta numérica al representar procesos de óxido-reducción en una reacción química con números negativos.

Palabras clave: *competencia formal, números enteros, sistemas matemáticos de signos, sistemas químicos de signos, recta numérica.*

Abstract

In this research report, a questionnaire of mathematics and chemistry is solved by professors of junior high school and high school. Throughout the resolution process it is noticed the intertwinement between mathematical and chemical sign systems. The formal competence is reached by a high school teacher. Difficulties are noted when oxide-reduction processes are presented in a chemical reaction within negative numbers on the number line.

Keywords: *formal competence, integers, mathematical sign systems, chemical sign systems, number line.*

Existen dificultades enfrentadas por los docentes en el aprendizaje y la enseñanza de la química referidas a los sistemas matemáticos de signos (SMS) específicamente en el álgebra con los números enteros. Este estudio pretende mostrar el entrecruzamiento de los SMS con el de los Sistemas Químicos de Signos (SQS) y cómo mediante sus representaciones los docentes pueden explicar las concepciones de la materia y los procesos de óxido-reducción.

MARCO TEÓRICO

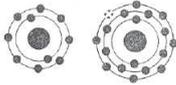
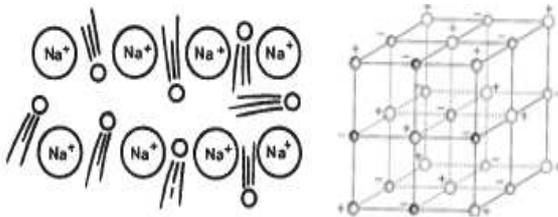
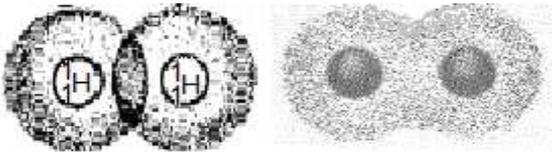
Este estudio es visto desde la matemática educativa, por ello utilizamos como marco teórico metodológico el de los modelos teóricos locales (MTL) propuesto por Filloy (1999) para la observación experimental. El término SMS es introducido por Filloy (1999) para analizar los textos creados por los estudiantes que constituyen los procesos de producción de sentidos. En esta perspectiva semiótica, Filloy (1999) propone cuatro componentes interrelacionados entre sí. Estos componentes son el de los modelos de enseñanza, el de los procesos cognitivos, el de competencia formal y el de comunicación.

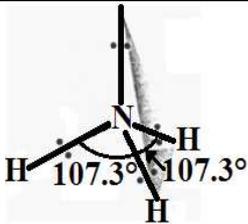
Los modelos de enseñanza considerados para este estudio son el Modelo de la *Recta Numérica* y el *Modelo Chino*. Peled (1991) identificó niveles de conocimiento en la dimensión de cantidad y en la dimensión de la Recta Numérica. Este modelo es utilizado para representar especies que se oxidan y se reducen en una reacción química. Por lo que respecta al *Modelo Chino* (Gallardo, 1994) referido a los números enteros, se utiliza durante el proceso de adquisición del lenguaje algebraico en la

resolución de problemas (Gallardo y Rojano, 1994). Con este modelo se pueden asociar los números enteros a las cargas eléctricas de partículas subatómicas y a los números de oxidación de los elementos que forman un compuesto. Así, las cargas de los protones son representadas por enteros positivos, las de los electrones por enteros negativos y las de los neutrones por el cero. Los números de oxidación, parafraseando a Pimentel y Spratley (citados en Cruz, Chamizo y Garritz, 1986), son cargas ficticias asignadas a los átomos en las moléculas (o iones), útiles para comprender los procesos de óxido-reducción. Cuando un átomo se encuentra en estado basal, su carga es neutra porque tiene el mismo número de protones y electrones. Si el átomo pierde electrones, éste queda cargado positivamente tantas cargas positivas como electrones pierda; de la misma forma cuando un átomo gana electrones, quedará cargado negativamente el mismo número de cargas ganadas.

Concerniente a los modelos utilizados en la enseñanza de la Química y sus SQS, Benarroch, Matus y Nappa (2011) analizan libros de texto para identificar el modelo atómico que un estudiante requiere. Perales y Jiménez (2004) proponen una clasificación de las ilustraciones presentadas en los libros de texto. Galagovsky (2004) emplea la clasificación de Perales y Jiménez (2004), profundizando sobre el tipo de lenguaje, diferenciando entre el *lenguaje gráfico* como aquellas representaciones concretas, por ejemplo la distribución espacial entre átomos en un compuesto químico y el *lenguaje formal* que implica el uso de símbolos con reglas semánticas preestablecidas. Para este estudio, proponemos utilizar la clasificación de Galagovsky (2004) en términos semióticos, mostrada en la Tabla 1.

Tabla 1. Taxonomía de representaciones de los enlaces químicos según Galagovsky (2004).

Grado de iconicidad	Representaciones concretas	SQS
Dibujo figurativo	<p>Bolas y varillas fusionado bolas</p> 	Gráfico
Dibujo figurativo más signos	<p>Niveles electrónicos</p> 	Formal
	<p>Otros</p> 	Gráfico
Dibujo esquemático más signos	<p>Orbitales moleculares</p> 	Gráfico y formal

Grado de iconicidad	Representaciones concretas	SQS
		Gráfico y formal
Descripción en signos normalizados	Lewis $\text{Na}^+ \left[\text{:}\ddot{\text{Cl}}\text{:} \right]^-$	Formal
	Diagramas de rayas H-H	Formal
	Molecular H_2O	Formal

Por otra parte, Filloy (1999) identifica hechos que se presentan en una situación de enseñanza cuando se pasa de un estrato de lenguaje SMS más concreto a otro más abstracto. Se han encontrado niveles intermedios de conceptualización de los números negativos, como *sustractivo*, *signado*, *relativo*, *aislado* y el *número entero* (Gallardo, Santos y Hernández, 2010). En el nivel de *sustractivo* el minuendo siempre será mayor que el sustraendo y el signo menos solo tiene un carácter binario; el *signado* es aquel natural al que se ha asociado un signo más o un signo menos apareciendo la dualidad del signo unario y binario; el *relativo* se concibe con la idea de opuestos en situaciones discretas y simétricos en situaciones continuas; el *aislado* se acepta como la solución de una operación o de una ecuación y el *número entero* negativo cuando se ha llegado a la formalización alcanzando el mismo nivel que el de los números positivos. Se observa la triple naturaleza del signo menos, concebida como: 1) *signo binario* para la sustracción, 2) como *unario* para expresar un número negativo y 3) para representar a los números *simétricos* (Bofferding, 2014). Se manifiesta la triple naturaleza de la sustracción como *diferencia*, *completar* y *quitar*.

Por lo que respecta al componente de competencia formal (Puig, 2006), simula la actuación de un usuario ideal de un SMS. En este estudio consideramos como sujeto competente, al profesor que posee un grado mayor de competencia formal. En cuanto al componente de comunicación, éste describe las reglas de formación y decodificación de textos, para eliminar la ambigüedad contextual circunstancial. Como el conocimiento químico es producido a través de modelos (Chamizo, 2006), éstos nos permiten la comunicación entre el investigador y los sujetos de estudio.

ESTUDIO EMPÍRICO

Diseñamos un cuestionario piloto para docentes de educación media básica y media superior. El instrumento metodológico consta de situaciones de análisis, ejercicios y problemas sobre la operatividad de números enteros y el lenguaje algebraico. Además se indaga sobre los SQS referidos al átomo, molécula, compuesto y reacción química.

El cuestionario fue aplicado a cuatro docentes: un docente que imparte las asignaturas de Matemáticas y Química en educación secundaria en Veracruz, México; otro docente de secundaria que imparte Química en la Ciudad de México; y dos docentes de preparatoria que imparten Química en la Universidad Nacional Autónoma de México (DP1 y DP2). Todos los docentes cuentan con cinco años como mínimo de experiencia en la enseñanza de la Química. El cuestionario fue aplicado al finalizar el ciclo escolar 2014-2015.

Se detectó el entrecruzamiento de los SMS y de los SQS, observando niveles de competencia en el uso de SMS en contextos matemáticos y químicos. Encontramos dificultades en el uso de SMS que dan origen a imprecisiones en los conceptos químicos, como por ejemplo procesos de oxidación y reducción asociados al modelo de la recta numérica.

Además se advierte que los SMS y los SQS tienen semejanzas y diferencias en cuanto a los significados. Los coeficientes en una expresión algebraica y los coeficientes estequiométricos en una reacción química tienen el mismo significado. Sin embargo, “ xy ” en un SMS es el producto de dos números cualesquiera, mientras que en química representa el resultado de la unión de dos átomos o especies químicas “ $x+y$ ”.

Con base en las apreciaciones anteriores, planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo influye la conceptualización de los números negativos en la conceptualización de los procesos de óxido-reducción?
- ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre los SMS y los SQS?

Para responder a estas preguntas, se analizaron los cuestionarios resueltos de los cuatro docentes. Estos hechos permitieron observar la competencia matemática y la competencia química de los docentes.

A continuación mostramos en las Tablas 2-6 dos de las producciones analizadas. La docente de educación media superior (DP1) muestra en algunas de sus respuestas las mismas dificultades que los docentes de educación secundaria, siendo la de menor nivel de competencia. El docente de educación media superior (DP2) lo consideramos como el docente con competencia formal.

Tabla 2. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

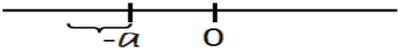
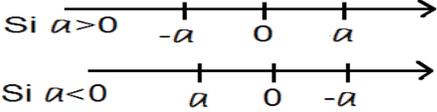
DP1	DP2
Ejercicio a resolver: operaciones de suma y resta de enteros	
$(-3)-(-8)=-3+8=5$	$(-3)-(-8)=5$
<p>Resuelto correctamente: Uso de una estructura equivalente evitando la sustracción.</p>	<p>Resuelto correctamente: No muestra el proceso, únicamente resultados.</p>
Situación a resolver: representa en la recta numérica el simétrico de $-a$.	
	
<p>Resuelto incorrectamente: El uso de la recta numérica no le apoya para representar números simétricos. El simétrico siempre va a estar a la izquierda del cero.</p>	<p>Resuelto correctamente: Presenta los dos casos en los cuales “a” puede ser mayor o menor que cero. Muestra el número “a” como <u>número entero formalizado</u> positivo o negativo.</p>
Ejercicio a resolver: si “ $x=11$ ”, y “ $z=-9$ ”, ¿cuánto es “ $x(-z)$ ”?	
$11(-(-9))=11+9=20$	$(11)(-(-9))=+99$
<p>Resuelto incorrectamente: Presenta dificultades con el uso de paréntesis. Predominio aditivo cuando hay multiplicación.</p>	<p>Resuelto correctamente: No muestra el proceso, únicamente resultados.</p>

Tabla 3. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

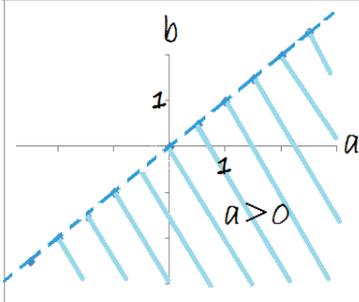
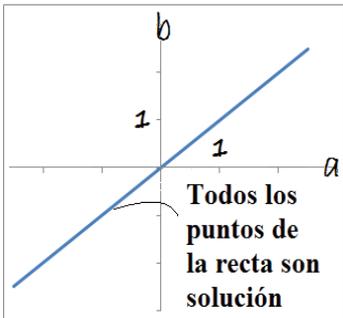
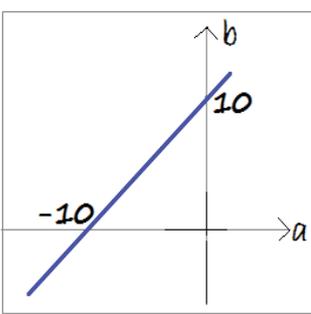
DP1	DP2
Ejercicio a resolver: en " $a-b=c$ ", ¿cómo debe ser el minuendo " a " con respecto al sustraendo " b ", para que la diferencia " c ", sea mayor que cero?	
<p>Positivo y mayor valor que b.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto incorrectamente: Ausencia de SMS. Uso del lenguaje natural. Aparece el número como sustractivo, no realizando la extensión a los enteros negativos.</p> </div>	<p style="text-align: center;">$a-b > 0 \Leftrightarrow a > b$</p> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Utiliza SMS para representar su respuesta. Tiene sentido para el sujeto el uso del plano cartesiano en la sustracción.</p> </div>
Ejercicio a resolver: en " $a-b=c$ ", ¿cómo debe ser el minuendo " a " y el sustraendo " b ", para que la diferencia " c " sea igual a cero?	
<p>Los dos con el mismo valor "a" positivo y "b" negativo.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto incorrectamente: No diferenciación entre las operaciones de suma y resta.</p> </div>	<p style="text-align: center;">$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$</p> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Es sintáctico, utilizando SMS para representar su respuesta. Tiene sentido para el sujeto el uso del plano cartesiano en la sustracción.</p> </div>
Ejercicio a resolver: resuelve la ecuación " $-a+b=10$ "	
<p style="text-align: center;"> $-a+b=10$ $a=20$ $b=-10$ $20+(-10)=10$ $20-10=10$ </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto incorrectamente: Muestra dificultades al realizar la sustitución numérica de un número positivo en "$-a$". Asigna solo una pareja de valores para dar solución. Sus valores no satisfacen la igualdad. Presenta dificultades para</p> </div>	<p style="text-align: center;"> $-a+b=10$ $b=10+a$ </p> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Encuentra el conjunto solución con una representación gráfica, utilizando a la recta como un medio de organización. Aparece el número como aislado.</p> </div>

Tabla 4. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

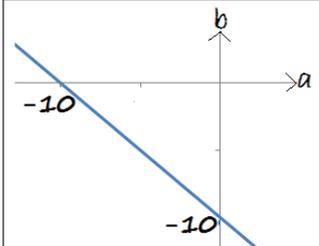
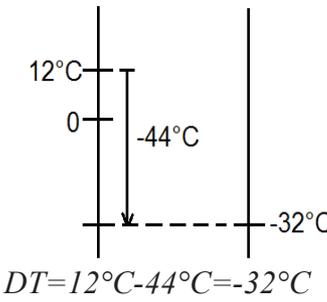
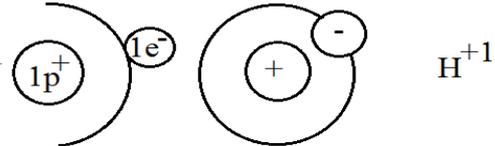
DP1	DP2
Ejercicio a resolver: resuelve la ecuación “ $-a-b=10$ ”	
<p style="text-align: center;"> $-a-b=10$ $a=-5$ $b=-15$ $-5-(-15)$ $-5+15=10$ </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto incorrectamente: Muestra dificultades al realizar la sustitución numérica de un número negativo para “$-a$”. Asigna solo una pareja de valores para dar solución. Sus valores no satisfacen la igualdad. Presenta dificultades para conceptualizar al número relativo.</p> </div>	<p style="text-align: center;"> $-a-b=10$ $b=-a-10$ </p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resueltos correctamente: Encuentra el conjunto solución con una representación gráfica, utilizando a la recta como un medio de organización. Aparece el número como aislado.</p> </div>
Problema a resolver: la diferencia de temperaturas entre la ciudad de Toronto Canadá y la ciudad de México es de $-44\text{ }^{\circ}\text{C}$. ¿Cuál es la temperatura de Toronto en ese momento, si la temperatura en la ciudad de México es de $12\text{ }^{\circ}\text{C}$?	
<p> $a-b=-44$ $a-12=-44$ $a=-44+(-12)$ $a=-44-12$ $a=-56$ $T=-56\text{ }^{\circ}\text{C}$ </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto incorrectamente: Plantea correctamente la ecuación. Resuelve el problema incorrectamente. Muestra confusión con los signos binario y unario al realizar la trasposición de términos. Traza la recta numérica y ésta no le ayuda a resolver el problema.</p> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">  </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> Cd. de México Toronto </div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">  <p>$DT=12\text{ }^{\circ}\text{C}-44\text{ }^{\circ}\text{C}=-32\text{ }^{\circ}\text{C}$</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Utiliza la recta numérica de forma vertical en contextos de temperatura. Visualiza la sustracción como una diferencia.</p> </div>
Representa un átomo de hidrógeno y una “molécula” de cloruro de sodio.	
	
<p>Resuelto incorrectamente: En el tercer SQS presenta a un átomo de hidrógeno como un catión H^{+1}.</p>	<p>Resuelto correctamente: Los SQS son el formal molecular, el de bolas y el de niveles electrónicos.</p>

Tabla 5. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

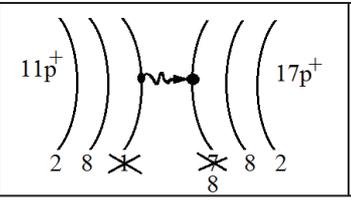
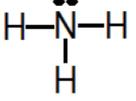
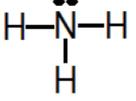
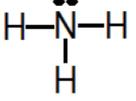
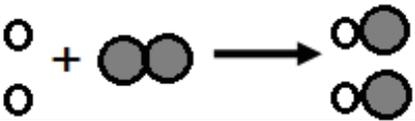
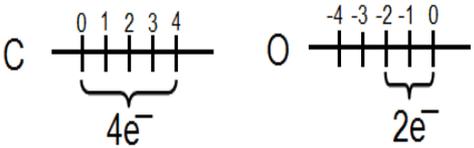
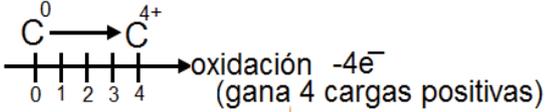
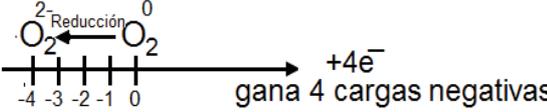
DP1	DP2						
Representa una “molécula” de cloruro de sodio.							
<p>NaCl</p>  <p>Na⁺Cl⁻</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Sus SQS son formales con diferentes grados de iconicidad. Muestra dibujos figurativos con signos (niveles electrónicos) y descripción con signos normalizados (molecular).</p> </div>	<p>NaCl</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Los SQS formales mostrados son el molecular y dos representaciones de Lewis.</p> </div>						
En ambos casos observamos en los SQS puntos negros o bolitas que representan electrones como en el modelo Chino.							
¿Cómo representas un compuesto químico?							
<p>Mediante su fórmula química o con su nombre químico.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Respuesta correcta: Menciona un SQS formal molecular pero no lo presenta y otro lingüístico.</p> </div>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th data-bbox="790 1019 997 1108">Por su fórmula química</th> <th data-bbox="997 1019 1236 1108">Con modelo de esferas</th> <th data-bbox="1236 1019 1436 1108">Fórmula desarrollada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="790 1120 997 1232">H_2SO_4</td> <td data-bbox="997 1120 1236 1232">  </td> <td data-bbox="1236 1120 1436 1232">  </td> </tr> </tbody> </table> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Respuesta correcta: Menciona tres SQS diferentes: formal molecular, gráfico de bolas y formal diagrama de rayas-Lewis.</p> </div>	Por su fórmula química	Con modelo de esferas	Fórmula desarrollada	H_2SO_4		
Por su fórmula química	Con modelo de esferas	Fórmula desarrollada					
H_2SO_4							
¿Qué indican los subíndices 2, 2 y 7 en la fórmula $K_2Cr_2O_7$?							
<p>Que en la molécula de dicromato de potasio hay 2 átomos de potasio, 2 átomos de cromo y 7 átomos de oxígeno.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Respuesta correcta: Nombra el compuesto correctamente y sólo presenta el significado microscópico de los subíndices en un SQS formal-molecular.</p> </div>	<table border="1" style="width: 100%;"> <tbody> <tr> <td data-bbox="790 1489 981 1792">Desde el punto de vista microscópico 2 átomos de K, 2 de Cr, 7 de O.</td> <td data-bbox="981 1489 1252 1792">Desde el punto de vista macroscópico 2 moles de átomos de K, 2 moles de átomos de Cr y 7 moles de átomos de O.</td> <td data-bbox="1252 1489 1436 1792">También indican la relación de átomos que participan en la fórmula.</td> </tr> </tbody> </table> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Respuesta correcta: Presenta tres significados de los subíndices en una fórmula química, el “microscópico”, el macroscópico y el relacionado con la ley de las proporciones definidas y múltiples.</p> </div>	Desde el punto de vista microscópico 2 átomos de K, 2 de Cr, 7 de O.	Desde el punto de vista macroscópico 2 moles de átomos de K, 2 moles de átomos de Cr y 7 moles de átomos de O.	También indican la relación de átomos que participan en la fórmula.			
Desde el punto de vista microscópico 2 átomos de K, 2 de Cr, 7 de O.	Desde el punto de vista macroscópico 2 moles de átomos de K, 2 moles de átomos de Cr y 7 moles de átomos de O.	También indican la relación de átomos que participan en la fórmula.					

Tabla 6. Producciones de los docentes DP1 y DP2 con comentarios de los investigadores.

DP1	DP2															
¿Cómo representas una reacción química?																
<p style="text-align: center;">$A+B \longrightarrow AB$</p> <p style="text-align: center;">REACTIVOS \longrightarrow PRODUCTO</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Utiliza literales A, B y AB para representar reactivos y productos. A+B es igual a AB Expresa una generalización de una reacción de síntesis.</p> </div>	<p>Con símbolos de elementos, signos, subíndices y coeficientes</p> $2\text{Na(s)} + \text{Cl}_2(\text{g}) \longrightarrow 2\text{NaCl(s)}$ <p>con modelo de esferas, de esferas y de barras:</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Resuelto correctamente: Exhibe dos SQS para una misma reacción con balance de materia: el formal-molecular y el de bolas. En el segundo se visualizan a los cambios químicos como reorganización de átomos y se distingue entre elementos y compuestos.</p> </div>															
En la reacción química de óxido reducción $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$ identifica la especie que se reduce y la especie que se oxida, representa las semi-reacciones con los números de oxidación.																
$\overset{0}{\text{C}} + \overset{0}{\text{O}_2} \longrightarrow \overset{+4}{\text{C}}\overset{-2}{\text{O}_2} \quad \overset{+4}{\text{C}} + \overset{-2}{\text{O}} \longrightarrow \text{CO}_2$ <p style="text-align: center;">$+4 - 4 = 0$</p>  <p style="text-align: center;">REDUCCIÓN \longleftarrow \longrightarrow OXIDACIÓN</p> <p style="text-align: center;">EL CARBONO SE OXIDA EL OXÍGENO SE REDUCE</p>	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">E.O.T</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">4+</td> <td style="text-align: center;">4-</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">E.O.I</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">4+</td> <td style="text-align: center;">2-</td> </tr> <tr> <td></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">$\text{C} + \text{O}_2 \longrightarrow$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">CO_2</td> </tr> </table> <p>$\overset{0}{\text{C}} - 4\text{e}^- \longrightarrow \overset{+4}{\text{C}}$ El Carbono se oxida</p> <p>$\overset{-2}{\text{O}_2} + 4\text{e}^- \longrightarrow \overset{-2}{\text{O}_2}$ El Oxígeno se reduce</p>   <p>E.O.T (Estado de oxidación total) E.O.I (Estado de oxidación individual)</p>	E.O.T	0	0	4+	4-	E.O.I	0	0	4+	2-		$\text{C} + \text{O}_2 \longrightarrow$		CO_2	
E.O.T	0	0	4+	4-												
E.O.I	0	0	4+	2-												
	$\text{C} + \text{O}_2 \longrightarrow$		CO_2													
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Resuelto incorrectamente: Pasa de un SQS a un SMS cuando representa los números de oxidación de los reactivos y productos incorrectamente. Utiliza la recta numérica para representar el número de oxidación pero no el proceso de cambio y como referencia. No describe si el carbono gana o pierde electrones. No indica si el oxígeno gana o pierde electrones. No anota las semi-reacciones.</p> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Resuelto correctamente: Pasa de un SQS a un SMS anotando los EOI y los EOT de las especies que participan en la reacción. Los números de oxidación los representa como 4+, 2- y 2-. El entrecruzamiento de ambos sistemas se observa en las semi-reacciones. Recurre a la recta numérica para identificar si una especie se reduce o se oxida. Error: perder cuatro electrones no significa ganar cuatro cargas positivas.</p> </div>															

REFLEXIONES FINALES

La docente DP1 operó correctamente la adición y sustracción de números enteros. Sin embargo, en las preguntas de sustracción, las respuestas presentan la ausencia de SMS al contestar con lenguaje natural, apareciendo el número como sustractivo. Muestra soluciones incorrectas, en la sustitución numérica con números positivos y negativos en expresiones como “ $-a$ ”, en la trasposición de términos y confusión entre signo unario y binario. El uso de la recta numérica no le apoya para representar números simétricos, para ella el simétrico de un número siempre estará a su izquierda. Hay un predominio aditivo en la multiplicación y tiene la tendencia a cerrar expresiones abiertas igualándolas a cero.

El profesor DP2 mostró un grado mayor de competencia formal al exhibir sus respuestas y utilizar a la recta como medio de organización (Freudenthal, 1983) que lo conduce a la extensión de los naturales a los enteros.

En relación a los resultados en química, los cuatro docentes representan a un átomo y a una molécula correctamente, excepto la docente DP1 confundiendo a un átomo con un catión. Muestra dificultades para indicar los números de oxidación de los átomos y compuestos anotados en el superíndice. La recta numérica no le proporciona ayuda para identificar el proceso de pérdida o ganancia de electrones, únicamente para determinar correctamente las especies que se oxidan o se reducen. Las dificultades que presenta la docente DP1 en la reacción de óxido-reducción parecen estar relacionadas con el nivel de conceptualización de los números negativos.

El docente DP2 muestra el mayor grado de competencia formal, sus SQS son formales y gráficos de acuerdo a la clasificación de Galagovsky (2004), exhibe las visiones macroscópicas y microscópicas de los subíndices en las fórmulas químicas, así como la relacionada con las proporciones definidas y múltiples. Identifica las especies que se reducen y se oxidan mostrando la ganancia y pérdida de electrones en las semi-reacciones apoyándose en la recta numérica. Presenta el entrecruzamiento de SQS con los SMS y viceversa. Sin embargo, al pasar de un sistema a otro comete un error, ya que “sumar es igual a restar” en matemáticas, pero en química, quitar cuatro electrones no es igual a “ganar cuatro cargas positivas”, es quedar cargado positivamente. Este puede ser un error conceptual o de lenguaje, que puede tener implicaciones en la enseñanza y generar confusión en los alumnos. En matemáticas se pueden proponer estructuras sintácticas equivalentes como: $0 - (-4) = 0 + 4 = +4$. En química “ $0 - (-4e^-)$ ” es una reacción química, mientras que “ $0 + (+4p^+)$ ” representaría una reacción nuclear. Parece ser que el dominio de los SMS ayuda a clarificar conceptos utilizados en los modelos de enseñanza de la química, en el que se deben advertir las semejanzas y diferencias.

El docente DP2 parece tener mayor grado de competencia formal en matemáticas al haber mostrado la extensión de los naturales a los enteros. En química, parece tener el mayor grado de competencia formal al expresar en las resoluciones significados diversos con diferentes representaciones y al operar con los enteros correctamente en las semi-reacciones. La docente DP1 parece tener el menor grado de competencia en matemáticas al resolver incorrectamente 7 de 8 planteamientos en los que se observa no haber realizado la extensión de los naturales a los enteros. En química, parece tener el menor grado de competencia al resolver incorrectamente 2 de 6 planteamientos, porque aunque utiliza diferentes representaciones, no reconoce los diversos significados de los componentes de una fórmula química y no opera correctamente con los números enteros en las semi-reacciones.

De los modelos de enseñanza, la recta numérica a pesar de ser criticada por muchos autores, nos permitió visualizar las dificultades de los docentes en la conceptualización de los números enteros tanto en matemáticas como en química. El modelo chino surge en química como puntos o bolitas con carga eléctrica en las representaciones formales de los átomos y moléculas dibujadas por todos los docentes.

En el aprendizaje de la matemática se advierte el uso de estructuras sintácticas equivalentes a restar números negativos sumando positivos (Bruno y Martinón, 1996). Sin embargo, esto puede ocasionar errores conceptuales en la enseñanza de la química, por ello señalamos la importancia de la enseñanza de la sustracción de números negativos sin el uso de una estructura equivalente.

Se encontraron algunas semejanzas y diferencias en ambos sistemas, como el presentado por la docente DP1 al utilizar una generalización en una reacción de síntesis. En ella representa a un átomo o un compuesto con una letra mayúscula como en lenguaje algebraico y no con símbolos químicos. Se advierte que “AB” es el producto de una reacción, sin que ello signifique que la especie “A” multiplica a la especie “B” como en álgebra, sino por medio de una unión química.

Uno de los entrecruzamientos de los SMS y de los SQS se observa en las semi-reacciones mostradas por el docente DP2, en donde el carbono con número de oxidación cero pierde electrones quedando cargado positivamente. Esos electrones son transferidos al oxígeno quedando cargado negativamente. Las semi-reacciones son representadas en la recta numérica. Se observaron diferentes entrecruzamientos entre los SMS y los SQS. Un posterior estudio podría dar cuenta de otros entrecruzamientos entre los SMS y los SQS.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Benarroch, A., Matus, L. y Nappa, N. (2011). La modelización del enlace químico en libros de texto de distintos niveles educativos. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 10(1), 178-201.
- Bofferding, L. (2014). Negative Integer Understanding: Characterizing First Grader's Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 194-245.
- Bruno, A. y Martinón, A. (1996). Números negativos: sumar=restar. *Uno*, 10, 123-132.
- Chamizo, J. A. (2006). Los modelos de la Química. *Educación Química*, 17(4), 476-482.
- Cruz, D., Chamizo, D. y Garritz, A. (1986). *Estructura atómica. Un enfoque Químico*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Los Países: Reidel.
- Galagovsky, L. (2004). Del aprendizaje significativo al aprendizaje sustentable. Parte 2: Derivaciones comunicacionales y didácticas. *Enseñanza de las ciencias*, 22(3), 349-365.
- Gallardo, A. (1994). Negative numbers in Algebra. The use of a teaching model. *Psychology of Mathematics Education*, 376-383.
- Gallardo, A. y Rojano, T. (1994). School Algebra: Syntactic difficulties in the operativity with Negative Numbers. En D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of North American Chapter of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 159-165). Baton Rouge, LA: North American Chapter.
- Gallardo, A., Santos, N. y Hernández, J. A. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. Un estudio de caso. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 303-314). Lleida, España: SEIEM.
- Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Assisi, Italia: PME.
- Perales, F. J. y Jimenez, J. (2004). Las ilustraciones en los libros de Física y Química de la ESO. *Revista de Educación Abierta. Aspectos didácticos de Física y Química*, 12, 11-65.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en investigación de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (107-126). Huesca: SEIEM.