ESTUDIO DEL CONCEPTO MATRIZ DE CAMBIO DE BASE EN TÉRMINOS DE LA TEORÍA APOE

Studying the concept of change of basis matrix within the APOS Theory

Mendoza, E.[a], Rodríguez, F. M.[a] y Roa, S.[b]

[a]Universidad Autónoma de Guerrero, [b]Universidad Industrial de Santander

Resumen

El presente trabajo constituye parte de un proyecto de investigación que se inserta en el campo de la Matemática Educativa. El proyecto tiene como objetivo realizar una descomposición genética del concepto matriz de cambio de base, un concepto de Álgebra Lineal. En él se busca proponer una vía alternativa para la enseñanza de dicho concepto sobre la base de la teoría APOE; esta es una teoría cognitiva que describe a partir de estructuras y mecanismos cómo un individuo construye conocimiento matemático. En este documento se muestran evidencias de una prueba diagnóstico que fue aplicada a estudiantes de nivel superior, en donde se analizan y verifican los conceptos previos que se proponen como necesarios para la compresión del concepto matriz de cambio de base, además se muestran evidencia de algunas dificultades encontradas.

Palabras clave: *Descomposición genética, matriz cambio de base, estructuras mentales*

Abstract

This paper is part of a research project in field of mathematics education. The goal is to construct a genetic decomposition of the change of basis matrix concept in linear algebra. It is proposed an alternative way for teaching this concept according to the APOS Theory; this is a cognitive theory that describes structures and mechanisms for analyzing how students construct mathematical knowledge. We show evidence from a diagnostic instrument which was applied to undergraduate students of Universidad Industrial de Santander. We analyzed and validated previous concepts that are considered necessary for understanding the change-of-basis matrix concept. We also show some difficulties that were found in students around the understanding of the concept.

Keywords: *Genetic decomposition, change of basis matrix, mental structures*

INTRODUCCIÓN

En este escrito se muestran estructuras mentales que evidencian estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en la construcción del concepto Matriz de Cambio de Base (MCB), así como dificultades detectadas en el análisis de resultados de una prueba diagnóstico donde indagamos las estructuras que los estudiantes han logrado sobre conceptos que planteamos como fundamentales para construir dicha matriz. El concepto MCB se incluye en la formación de estudiantes de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas e Ingenierías generalmente en el primer año. Estos programas incluyen uno o dos cursos de álgebra lineal. Algunos investigadores, por ejemplo Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) atienden cuestiones referentes a la naturaleza epistemológica del álgebra lineal y el uso de diversos tipos de lenguaje como fuente de obstáculos en su aprendizaje. Estos autores analizan dificultades que presentan los estudiantes al abordar conceptos básicos de álgebra lineal; además revelan un obstáculo llamado el *obstáculo del formalismo*, que surge en algunos casos por la falta de requisitos elementales de Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática.

Mendoza, E., Rodríguez, F. M. y Roa, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 371-379). Alicante: SEIEM.

Surge entonces la pregunta: ¿cómo aprenden los estudiantes álgebra lineal? Oktaç y Trigueros (2010) muestran una recopilación de diferentes proyectos que han profundizado sobre cómo los estudiantes aprenden esta área de las matemáticas. Para ello se han construido análisis teóricos de diferentes conceptos como: espacio vectorial (Trigueros y Oktaç, 2005; Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006; Parraguez y Oktaç, 2010), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010) base (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008) y sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007) , entre otros, utilizando laTteoría APOE; análisis que han sido validados a través del trabajo de los estudiantes y la aplicación del ciclo que propone este acercamiento teórico (Arnon et al., 2014). Los resultados de estas investigaciones revelan la necesidad no sólo de identificar las dificultades de los estudiantes, sino que sugieren que una *descomposición genética* constituye una herramienta eficaz para que emerjan las estructuras mentales involucradas en la construcción de los distintos conceptos de álgebra lineal, ello conlleva al diseño de actividades didácticas que pueden permitirle a una individuo una mayor compresión de los conceptos. Codes y Sierra (2006) parten de una descomposición genética del concepto serie numérica, para caracterizar los niveles intra, inter y trans a partir del trabajo de los estudiantes en una prueba piloto.

El objetivo del escrito es analizar y verificar estructuras mentales previas asociadas con el concepto MCB, además de detectar dificultades asociadas a la construcción de dicho concepto. Cabe aclarar que la MCB está definida para espacios de dimensión finita en donde se tienen dos bases ordenadas.

LA TEORÍA APOE Y SU PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación se sustenta en la teoría APOE, teoría iniciada y desarrollada por Dubinsky y miembros de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), esta teoría se basa en una reinterpretación del constructivismo a partir del concepto de *Abstracción Reflexiva* de Piaget (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1996).

Las construcciones o estructuras mentales que propone la teoría APOE son entendidas como todas las transformaciones mentales que realizan los individuos para resolver determinadas tareas, pueden darse como reconstrucciones exactas o adaptaciones de algo previamente construido. En Asiala et al. (1996), se definen estas estructuras como *Acción, Proceso*, *Objeto* y Esquema, (para conocer más sobre estas estructuras mentales referimos al lector consultar Arnon et al, 2014).

La descomposición genética es la descripción específica de las estructuras y los mecanismos mentales necesarios para que un individuo logre construir un concepto matemático. Resulta de aplicar el ciclo de investigación y surge de manera hipotética del Análisis Teórico, para validarse a partir del análisis de datos. Estos elementos son propuestos por la Teoría APOE en su paradigma de investigación que se fundamenta en el desarrollo de tres componentes: Análisis teórico; Diseño e implementación de enseñanza; Recolección y análisis de datos (Arnon et al, 2014).

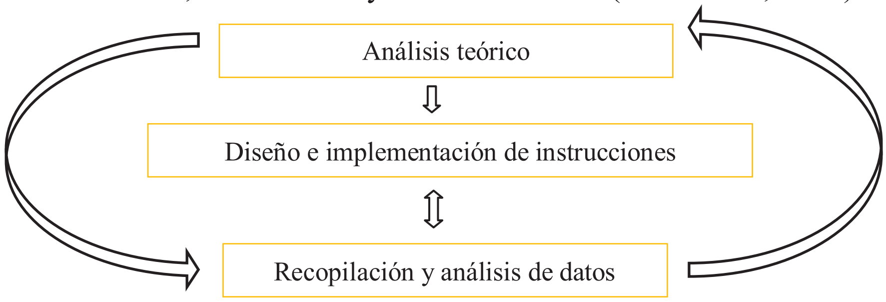

Figura 1. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al., 1996, p. 5)

Como se ve en la Figura 1, el ciclo inicia con un análisis teórico del concepto a estudiar, lo que da lugar a una descomposición genética hipotética. Esta descomposición es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que puede lograr un individuo para comprender un concepto. Este análisis impulsa diseños y aplicación de modelos de enseñanza, a través de los cuales se busca promover las construcciones mentales descritas en la descomposición genética. La recopilación y análisis de datos es una componente que retroalimenta a la descomposición genética hipotética inicial y la valida.

MÉTODO EN ESTA INVESTIGACIÓN

En esta investigación desarrollamos la primera y la tercera componente del ciclo de investigación descrito en la sección anterior. La interacción mutua entre estas componentes nos permitió detallar la descomposición genética hipotética del concepto. Para la primera se realizó un análisis de los conceptos necesarios para la construcción de la MCB, los cuales posteriormente precisamos dentro de la teoría para formar un conjunto de estructuras mentales previas. Estos conceptos fueron limitados, describiendo las estructuras necesarias para la construcción del concepto MCB. Entre estos, identificamos los conceptos *base ordenada* y *coordenadas de un vector*.

Análisis teórico de las estructuras mentales previas

Para el diseño teórico, tomamos como referencia nuestra experiencia sobre el tema, así como el análisis de libros de álgebra lineal, que son usados por maestros que han impartido varias veces dicho curso. En lo sucesivo usaremos la notación $M_{\beta\to\beta'}$ para referirnos a la MCB que va de la base ordenada β a la base ordenada β'. En dichos libros analizamos cómo se presenta el concepto MCB así como sus propiedades fundamentales. Además analizamos una descomposición genética del concepto de base propuesta en Kú (2007).

Como elementos previos en este análisis teórico consideramos que un individuo debe tener una concepción proceso del concepto de base ordenada. Supongamos que V es un espacio vectorial sobre un campo K y $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base ordenada para V. Entonces una concepción proceso de base ordenada estará determinada por la capacidad del individuo para reflexionar sobre el posible orden de los elementos de la base, decidir cuál será dicho orden, y establecer si un vector dado α puede escribirse como una combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$ que son elementos de la base con un orden establecido. Ahora una concepción objeto del vector de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada dada (cuando el espacio vectorial este definido sobre el campo real) se logra si, el individuo deja de pensar en los coeficientes como las coordenadas del vector y lo ve como un elemento de $\mathbb{R}^n$ sobre el cual puede aplicar nuevas operaciones.

Tercera componente

Para la tercera componente, realizamos una prueba diagnóstico con base en el Análisis Teóricoi que tuvo por objetivos: 1) analizar y verificar el tipo de estructuras previas que un individuo debe tener para abordar la construcción del concepto MCB; 2) identificar algunas dificultades asociadas a la comprensión de la MCB.

Aplicación de la prueba diagnóstico

La investigación se desarrolló en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander UIS (Colombia). La prueba diagnóstica fue aplicada a 28 estudiantes que cursan el programa de Matemáticas o de Licenciatura en Matemáticas. Estos programas incluyen los cursos de Álgebra Lineal I y II durante el primer año. Los estudiantes participantes habían aprobado por lo menos el primer curso. La aplicación duró unos 120 minutos, en donde los estudiantes respondieron de manera escrita e individual los problemas de la prueba diagnóstico (Anexo 1).

Recopilación y análisis de los datos

Los datos obtenidos a partir del análisis de la prueba diagnóstico se analizaron con base en los requisitos previos planteados en la descomposición genética hipotética para iniciar con la construcción del concepto MCB. Para organizar los datos hemos usado abreviaciones del tipo

E10.P3.i); en donde **E10** hace referencia al estudiante 10; **P3** denota el problema 3; i) denota el inciso de cada problema.

A continuación presentamos algunos aspectos del análisis de esta prueba con base en los elementos teóricos, así como algunas imágenes que apoyan el análisis realizadas por los estudiantes.

RESULTADOS SOBRE ESTRUCTURAS MENTALES PREVIAS

La primera pregunta se propuso evidenciar qué tan familiarizados estaban los estudiantes con el concepto de coordenadas de un vector y su relación con una base ordenada. En la actividad, se propone una base ordenada β del espacio $\mathbb{R}^3$ de manera explícita. En el inciso (i) se solicita la escritura de las coordenadas de un vector en particular respecto a la base dada y el inciso (ii) es una variante del inciso anterior puesto que ahora el vector del cual se piden las coordenadas esta dado de manera general. Para la situación E2, evidencia una concepción proceso de base ordenada y una concepción objeto del vector de coordenadas; es decir el estudiante en ambos incisos es capaz de establecer el orden en la base, plantear el sistema de ecuaciones (para ambos incisos) resolverlo y encontrar las coordenadas pedidas (Figura 2). Esta forma de solución muestra evidencia de lo expuesto en la descomposición genética hipotética y predice que el estudiante tiene condiciones para iniciar un camino posible hacia la construcción del concepto MCB.

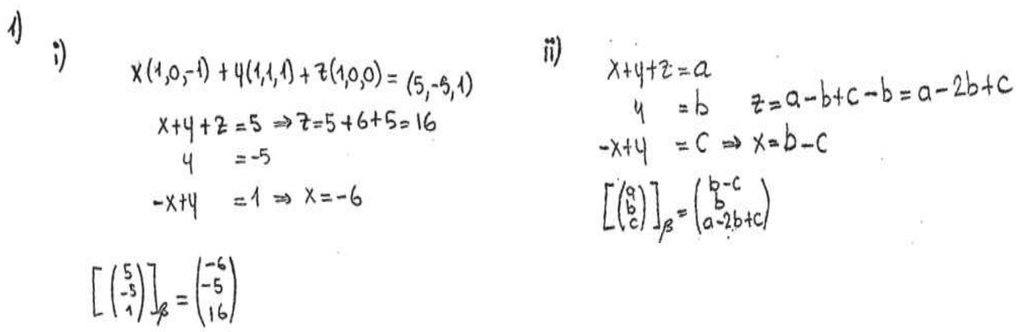

Figura 2. Procedimiento del E2.P1

También se observó que si un estudiante posee una concepción *acción* de una base ordenada, sólo será capaz de verificar o decidir si un vector en concreto puede o no ser escrito como combinación lineal de los elementos de la base. Hay evidencia de ello en la resolución del Problema 1 (Figura 3), puesto que para el caso concreto resulta relativamente sencillo. Pero para el caso que el vector está dado en forma general, sólo plantea el vector como una combinación lineal de los vectores de la base, llega a simplificar pero sin plantear el sistema de ecuaciones. Cuando el vector es dado en términos generales, es necesario haber interiorizado las acciones específicas realizadas sobre casos particulares para comprender la igualdad entre vectores, la identificación de incógnitas que debe determinar y el sistema que debe resolver de acuerdo a la expresión $(a, b, c) = (\alpha + \rho + \theta, \rho, -\alpha + \rho)$. Esto seguramente se relaciona con la necesidad de un tipo de construcción específica donde sea claro lo que varía y lo que se mantiene constante. En este caso, la necesidad de identificar cuáles son los escalares que hacen posible escribir la combinación lineal; esta es una característica propia de una estructura mental *proceso* de combinación lineal.

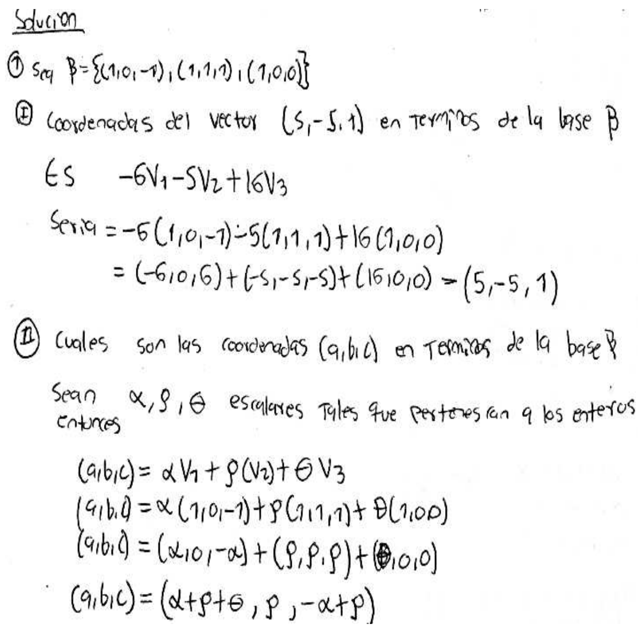

Figura 3. Procedimiento del E1.P1

RESULTATOS SOBRE DIFICULTADES ENCONTRADAS

En la pregunta dos se presentan bases ordenadas β, β' del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. El problema pide determinar las matrices de cambio de base $M_{\beta\to\beta'}$ y $M_{\beta'\to\beta}$. Este problema tiene que ver con el cálculo de dichas matrices, por ejemplo supongamos que un estudiante es capaz de escribir las coordenadas de cada vector de la base en términos de la otra base, pero puede cometer el error de confundir la base de llegada con la base de salida por así decirlo y en vez de calcular $M_{\beta\to\beta'}$ calcular $M_{\beta'\to\beta}$. Esta confusión puede llevarle a plantear mal la ecuación $[v]_{\beta'} = M_{\beta\to\beta'}[v]_{\beta}$, tomaría la ecuación $[v]_{\beta'} = M_{\beta'\to\beta}[v]_{\beta}$ como cierta y con ello dar repuestas erróneas en problemas en donde necesite de la ecuación que cumple la MCB. Una de las soluciones por parte de algunos estudiantes sigue el razonamiento expuesto de E15.P2, esta es la forma de dar solución al problema propuesto la cual aparece en la Figura 4.

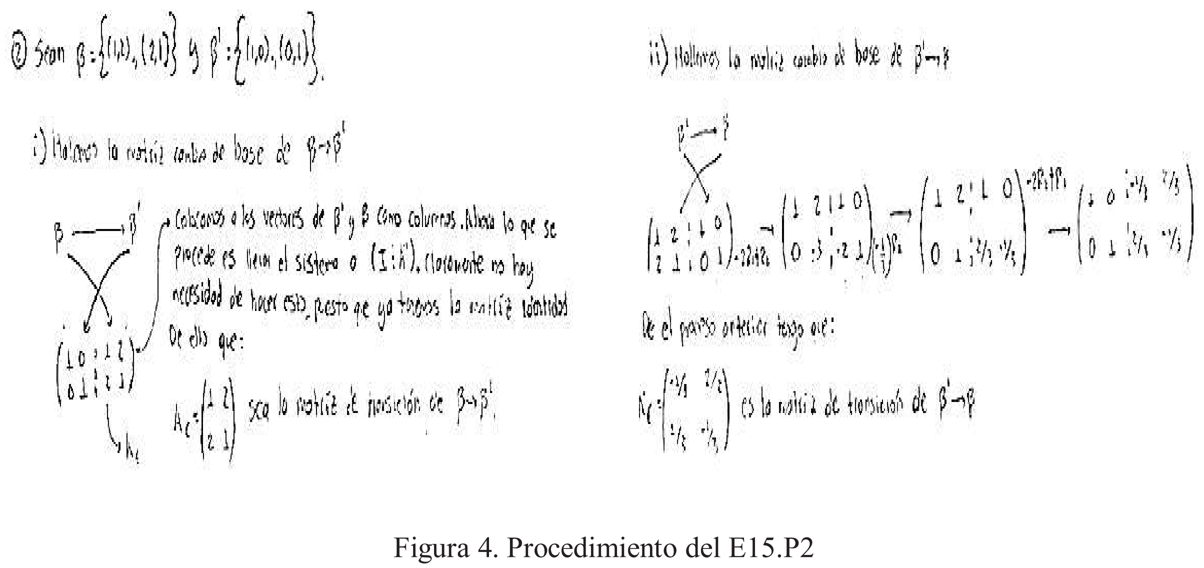

Figura 4. Procedimiento del E15.P2

Este algoritmo es una manera más global de hacer los cálculos para encontrar MCB. Esto parece de gran interés porque es una forma de proceder de los estudiantes que puede ayudar a la compresión de la MCB. Aunque esta forma de calcular dicha matriz no está exenta de la confusión entre $M_{\beta\to\beta'}$

o $M_{\beta'\to\beta}$, por ejemplo, el E22 utiliza la forma de proceder escrita anteriormente, se muestra evidencia de ello en la Figura 5. En donde calcula $M_{\beta'\to\beta}$ cuando tenía que encontrar $M_{\beta\to\beta'}$.

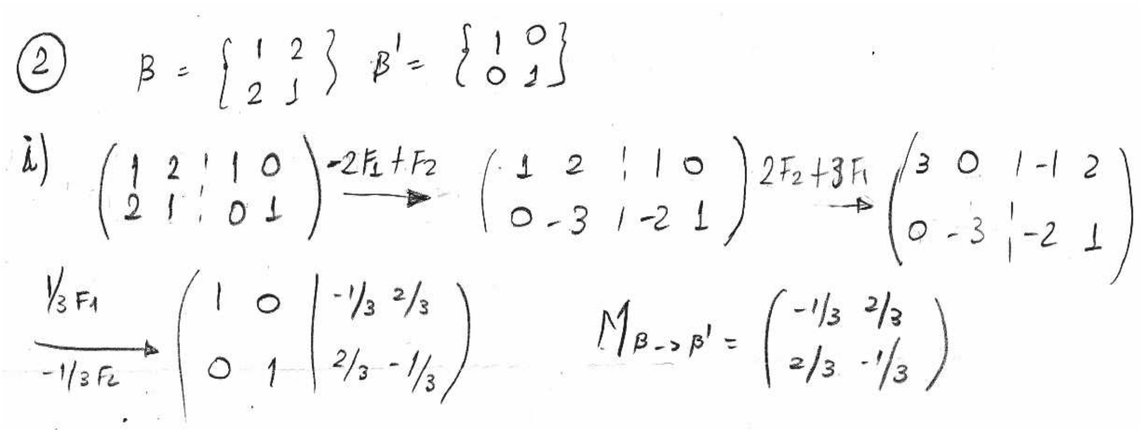

Figura 5. Procedimiento del E22.P2

Por otro lado, advertimos de la posible confusión entre la matriz $M_{\beta\to\beta'}$ y la matriz $M_{\beta'\to\beta}$. En la respuesta del E13.P2 puede verse este tipo de problema con la matriz véase la Figura 6.

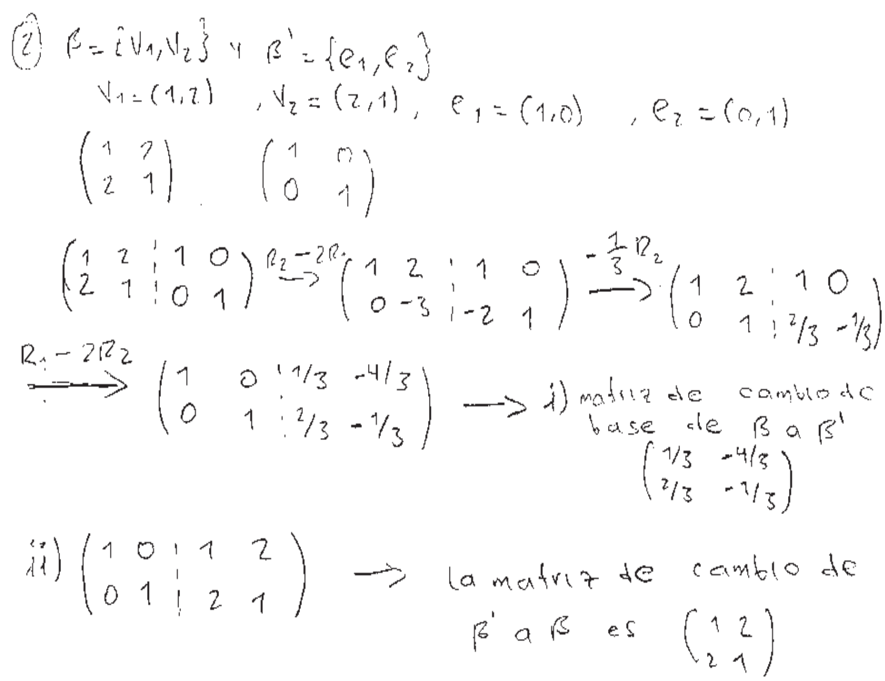

Figura 6. Procedimiento del E13.P2

En términos de nuestra perspectiva teórica decimos que este tipo de confusión se puede dar porque no sean interiorizado las acciones específicas. El estudiante no logra establecer la relación que hay entre la matriz encontrada y las columnas de dicha matriz, este es un claro ejemplo en donde se muestra *la independencia del algoritmo con una estructura mental* más sofisticada.

El estudiante E13 construye dos matrices al considerar los vectores de las bases B, β' como vectores columnas, es decir: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su algoritmo sugiere construir una matriz aumentada en donde coloque en la parte izquierda y derecha las matrices anteriores, esto es:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ el estudiante sabe que al reducir la parte izquierda a la identidad, entonces en la parte derecha tendrá una MCB. Es claro que esta forma de proceder por parte del estudiante como algoritmo está bien ejecutada. Puesto que encuentra una matriz de cambio de base. Pero no está interiorizando que las columnas de la matriz que obtiene son precisamente las coordenadas de los vectores de la base B', escrito como combinación lineal de los vectores de la base B. Por lo que lo lleva a confundir la matriz requerida.

El problema tres se diseñó para ser resuelto por dos vías, una en la que se considerara la matriz para calcular el vector solicitado y otra en donde a partir de la base se pudieran calcular el vector. Esperábamos que los estudiantes emplearan una propiedad de la MCB, $[v]_\beta = M_{\beta'\to\beta}[v]_{\beta'}$. En los procedimientos de los E2.P3, E15.P3, E16.P3, E26.P3, encontramos evidencia de que existen, tanto las estructuras mentales previas (puesto que aplican acciones específicas al vector de coordenadas) como algún tipo de concepción respecto a la MCB. Para ser más específicos podríamos decir que están reflexionando como un individuo con una concepción *objeto* del concepto MCB, puesto que ante los cálculos anteponen una reflexión de una propiedad que cumple la MCB la concibe como un todo y aplica acciones específicas sobre ella, por ejemplo en la Figura 7 aparece el trabajo del E15.

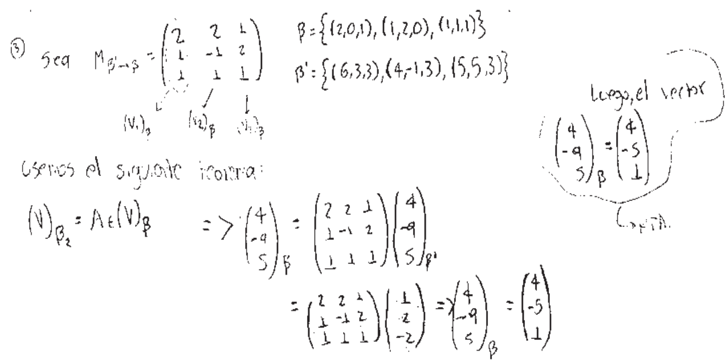

Figura 7. Procedimiento del E15.P3

En la pregunta cinco no pedimos la definición formal del concepto de estudio, pero sí pedíamos a los estudiantes que expresaran lo que entendían de dicho concepto. En las siguientes transcripciones se puede observar algunas concepciones encontradas, la concepción C3 es muy cercana a la definición formal que aparece en los libros de texto.

C1. E13.P5: “La matriz de cambio de base es aquella para la cual las matrices coinciden en su inversa”

C2. E16.P5:“La matriz de cambio de Base es la matriz inversa a la base y es la matriz que nos ayuda a encontrar las coordenadas de cierto vector como combinación de los vectores da la base dada”

C3. E26.P5: “Matriz de cambio de base, es aquella que, teniendo dos bases β' y β, me permite pasar un vector en base β a un vector en base β', es decir, esa matriz permite el cambio de las coordenadas de un vector en términos de la base ordenada β, a términos de la base ordenada β', y viceversa.”

CONCLUSIONES

Después de la aplicación y la recolección de datos de la prueba diagnóstico encontramos que poco más de la mitad de los estudiantes mostró poseer las estructuras mentales necesarias y contestar adecuadamente la pregunta en la que se relacionan la concepción *proceso* de base ordenada y la concepción *objeto* del vector de coordenadas (pregunta 1 y 3) puesto que utilizan los vectores de las bases para encontrar las coordenadas del vector requerido. Referente a las demás cuestiones de la prueba diagnóstico podemos concluir que menos de la mitad de los estudiantes tienen un tipo de concepción *acción* de la MCB y que sólo algunos logran interiorizar las acciones específicas para dar paso a otra estructura mental, así pues la prueba diagnóstico revela dificultades tales como la desconexión entre una MCB y un vector dado en unas ciertas coordenadas, no se ha interiorizado qué representan las columnas de dicha matriz y en consecuencia un poco más de dos terceras partes de estudiantes no logran contestar correctamente las preguntas tres y cuatro.

Es de resaltar que en la pregunta cinco donde se cuestiona sobre qué entiende un estudiante sobre la MCB, un alto número tiene una idea errónea en comparación con la definición formal y la ausencia de respuesta a dicha pregunta se observa en más de dos terceras partes del total de los estudiantes.

Algunas estructuras que deben fortalecerse son solución de un sistema de ecuaciones y combinación lineal. Respecto a la MCB, los estudiantes deben de interiorizar qué representan las columnas de la matriz y la relación que guarda con un vector escrito en dos bases ordenadas.

Referencias

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. Nueva York: Springer.

Asiala, M., Anne, B., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, H. Shoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*, 6 (pp. 1-32). Michigan: American Mathematical Society.

Codes, M. y Sierra, M. (2006). Una primera aproximación al análisis de la compresión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. En P. Bolea y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 173-186). Huesca: SEIEM.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Volumen 23, pp. 85–124). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva píagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 24-41.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE*. (Tesis inedita de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría apoe. *Educación Matemática*, *20*(2), 65.89.

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(4), 373-385.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory. En D. Hughes-Hallet, I. Vakalis y H. Arikan (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp. 271-272) Istanbul: John Wiley & Sons.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2112-2124.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoaericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l`Enseignement de l`Algèbre Linéare. *Annales de Didactique et de Scinces Cognitives*, *10*, 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2359-2368). Larnaca, Chipre: University of Cyprus.

Anexo 1. Diagnóstico del concepto Matriz Cambio de base en Álgebra Lineal

Matriz de Cambio de base en Álgebra Lineal

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
Unidad Académica de Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Escuela de Matemáticas

Nombre: ____________________
Carrera que cursa: ____________________

1. Sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores:
$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 0).$$
   (i) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (5,-5,1) en términos de la base ordenada β?
   (ii) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a, b, c) en términos de la base ordenada β?

2. Sean las bases ordenadas $\beta = \{v_1, v_2\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2\}$ del espacio $\mathbb{R}^2$, formadas por los vectores:
$$v_1 = (1,2),\ v_2 = (2,1) \text{ y } e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$$
   (i) Encuentre la matriz de cambio de base de β a β'.
   (ii) Encuentre la matriz de cambio de base de β' a β.

3. Dada la matriz de cambio de base $M_{\beta' \to \beta} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde las bases ordenadas están definidas como:
$$\beta = \{(2, 0, 1),\ (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$$
$$\beta' = \{(6, 3, 3), (4, -1, 3), (5, 5, 2)\}$$

Y sea el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Calcule el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta}$.

4. Sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y, sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vectores de una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.
   i) Encuentre una base $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $P_{\beta' \to \beta}$ sea la matriz de cambio de base de $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.
5. ¿Qué entiendes por Matriz de cambio de base?

---

[i] El análisis teórico que soportó el diagnóstico, consideró todas las estructuras mentales hipotéticas: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema* del concepto matriz de cambio de base.